Raízes de aplicações de superfícies em
 $S_2 \vee \dots \vee S_2 \vee S_1$

Northon Canevari Leme Penteado

Raízes de aplicações de superfícies em $S^2 \vee \dots \vee S^2 \vee S^1$

Northon Canevari Leme Penteado

Orientador: Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Maio de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L551r Leme Penteado, Northon
Raízes de aplicações de superfícies em $S^2v \dots vS^2vS^1$
/ Northon Leme Penteado; orientador Oziride
Manzoli Neto. -- São Carlos, 2015.
114 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Teoria de Raízes. 2. Teoria de Homotopia. 3.
Superfícies. I. Manzoli Neto, Oziride, orient. II.
Título.

Agradecimentos

A Deus pela vida e saúde.

A minha família que sempre está do meu lado me apoiando e ensinando a ter confiança na vida, proporcionando muitas alegrias. Agradeço também a Cristiane Rodrigues e sua família que me acolheram com muito carinho fazendo parte, de modo inesquecível, de momentos felizes da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto, pela sincera amizade, pelos conselhos, pela sua contagiante paixão a matemática, pelo seu exemplo de dedicação ao trabalho e pelo sua constante disposição em ajudar nos problemas surgidos no decorrer da tese.

Aos meus companheiros de toda hora de Leme. Aos amigos e colegas de estudos, por tudo que sorrimos e sofremos juntos, tanto os de graduação quanto os de pós graduação. E também aos amigos de repúblicas.

Ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação pela colaboração e proporcionar a excelente estrutura para a pós graduação. Agradeço também ao Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelos suportes e as concessões das bolsas.

Resumo

Este trabalho é um estudo do problemas de raízes para aplicações $f : S \rightarrow W_n$, onde S é uma superfície compacta, conexa e sem bordo e W_n é o espaço obtido pela reunião em um ponto do círculo S^1 com n esferas S^2 .

Abstract

The propose of this work is to studies the root problem for maps $f : S \rightarrow W_n$, where S is a closed, connected, compact surface and W_n is the space obtained by the one point union of a circle S^1 and n spheres S^2 .

Sumário

Introdução	1
1 Representação de aplicações de superfícies orientáveis em W	5
1.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de S^2 em W	5
1.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de T^2 em W	22
1.3 Representação das classes de homotopia de aplicações de T_g em W	35
2 Representação de aplicações de superfícies orientáveis em W_n	45
2.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de S^2 em W_n	45
2.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de T^2 em W_n	49
2.3 Representação das classes de homotopia de aplicações de T_g em W_n	53
3 Representação de aplicações de superfícies não orientáveis em W	59
3.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W . . .	59
3.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W . . .	62
4 Representação de aplicações de superfícies não orientáveis em W_n	69
4.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W_n . . .	69
4.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n . . .	71
5 Raízes de aplicações de superfícies orientáveis em W_n	75
5.1 Raízes de aplicações de S^2 em W_n	75
5.2 Raízes de aplicações de T^2 em W_n	79

5.3	Raízes de aplicações de T_g em W_n	83
6	Raízes de aplicações de superfícies não orientáveis em W_n	85
6.1	Raízes de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W_n	85
6.2	Raízes de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n	87
6.3	A sequência de Puppe-Barrat no caso $[T^2; W]$ e alguns resultados	103

Introdução

Dados uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos e $y \in Y$, então $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ é o conjunto de raízes de f em y . Um dos problemas da Teoria de Raízes é determinar qual é o conjunto minimal de raízes para um dado $y \in Y$, isto é, determinar, a menos de homotopia, qual é o menor conjunto de raízes de um dado $y \in Y$. Outro problema é estudar a existência de uma aplicação $g : X \rightarrow Y$, tal que g é homotópica a aplicação f , e g realiza o conjunto minimal de raízes para um dado $y \in Y$, isto é, $g^{-1}(y)$ é o conjunto minimal de raízes de y .

No contexto em que X e Y são variedades, tem sido estudados em inúmeros trabalhos. Aniz, C. e Fenille, M. C. estudaram, em [1] e [10], teoria de raízes de aplicações $f : K \rightarrow M$, onde K é um CW-complexo e M é uma variedade, não necessariamente estes dois problemas de raízes citados acima.

Neste trabalho estamos interessados nestes dois problemas no caso em que $f : S \rightarrow \underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{n\text{-vezes}} \vee S^1$ é uma aplicação contínua, onde S é uma superfície fechada, conexa e sem bordo e $\vee$ é a colagem por um ponto entre espaços topológicos. Para isso, a cada classe de homotopia $[f]$, será associado um polinômio proveniente de homologia com coeficientes locais. A partir de um polinômio é construída uma aplicação, denominada especial, que tem boas propriedades tal que o polinômio associado a classe de homotopia desta aplicação construída é o polinômio dado. E, para representar uma dada classe de homotopia $[f]$ de uma aplicação, mostra-se que existe uma aplicação especial $g \in [f]$. Por fim, é demonstrado que uma aplicação especial realiza o conjunto minimal de raízes, verificando que é uma representação com boas propriedades.

O contra-domínio de f será denotado por W_n e quando $n = 1$ apenas por W .

Este trabalho foi dividido em 6 capítulos e um apêndice.

Os livros [7], [9], [14], [16], [19] e [20] foram utilizados como apoio para os resultados e técnicas de teoria de topologia algébrica.

No primeiro capítulo é feita uma representação de classes de homotopia de aplicações de superfícies fechadas, conexas, orientáveis e sem bordo S em W . Para isso este capítulo foi dividido em 3 seções.

Na primeira seção, a cada classe de homotopia de uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ é associado, utilizando homologia com coeficientes locais, um polinômio. Em seguida, é construída uma aplicação com boas propriedades a partir de um polinômio dado e esta aplicação é denominada especial. Por fim, dada uma classe de homotopia $[f]$ e usando técnicas geométricas é mostrado que existe aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ tal que $g \in [f]$ é uma aplicação especial.

Na segunda seção, é considerada aplicações $f : T^2 \rightarrow W$. Recorrendo a primeira seção é associado um polinômio a classe de homotopias $[f]$ e seguindo a mesma linha de resultados da primeira seção é definido o que é uma aplicação especial neste caso e depois é mostrado que em cada classe de homotopia $[f]$ existe uma aplicação $g \in [f]$ que é especial.

Fazendo referências as seções anteriores, na terceira seção é associado um polinômio a classe de homotopia de aplicações $f : T_g \rightarrow W$, definido o que é uma aplicação especial neste caso e mostrado que existe uma aplicação especial em cada classe de homotopia $[f]$, onde T_g é uma superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável de gênero $g > 1$.

O segundo capítulo tem três seções que consideram o W_n como contra domínio de aplicações. Nas três seções é feito como nas seções do capítulo anterior, mas para aplicações $f : S^2 \rightarrow W_n$, $f : T^2 \rightarrow W_n$ e $f : T_g \rightarrow W_n$, respectivamente, onde $n > 1$.

No terceiro capítulo são consideradas aplicações $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$, onde $\mathbb{R}P_g^2$ é a notação para soma conexa de g planos projetivos dois dimensionais, para algum g finito. Para associar polinômios às classes de homotopias destas aplicações são utilizados os espaços de recobrimento duplo orientáveis de $\mathbb{R}P_g^2$, que são as superfícies S^2 ou T_g . Logo, para definir a aplicação especial e para provar as existências de aplicações especiais recai-se nos

casos das seções anteriores. Na primeira seção é considerado $g = 1$ e na segunda seção é considerado $g > 1$.

No quarto capítulo é feita a representação de classes de aplicações $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$ e $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ utilizando os recobrimentos duplos orientáveis.

O quinto e sexto capítulos são sobre minimalidade de raízes de uma aplicação. Nestes capítulos é mostrado que as aplicações especiais, definidas nas seções anteriores, são as aplicações que realizam os conjuntos de raízes minimais em cada caso. O quinto capítulo é dividido em três seções para tratar de minimalidades de raízes de aplicações de superfícies compactas, conexas, sem bordo e orientáveis em W_n , sendo a primeira seção, trata-se de raízes de aplicações $f : S^2 \rightarrow W_n$, a segunda seção trata-se de raízes de aplicações $f : T^2 \rightarrow W_n$ e a terceira seção trata-se de raízes de aplicações $f : T_g \rightarrow W_n$. O sexto capítulo é dividido em duas seções para tratar de minimalidades de raízes de aplicações de superfícies compactas, conexas, sem bordo e não orientáveis em W_n , sendo a primeira seção, para tratar de raízes de aplicações $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$ e a segunda seção para tratar de raízes de aplicações $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ com $g > 1$.

Por último é feito um apêndice no qual, primeiramente, é dada uma introdução a Homologia com Coeficientes Locais e por seguinte é apresentado via teoria de homotopia a caracterização dos conjuntos das classes de homotopia que utilizamos. Nele é apresentada uma sequência exata chamada sequência de Puppe-Barrat, originária dos artigos [2], [3] e [4], que define uma ação do grupo $[S^2; W]$ sobre o $[S; W]$. Esta ação descreve as classes de homotopia e a partir disto é caracterizada cada classe de homotopia de aplicações de S em $S^2 \vee S^1$, resultando em certas bijeções entre $[S, W]$ e outros conjuntos que as caracterizam.

Para finalizar a introdução, algumas convenções: Todas as aplicações são consideradas contínuas. O conjunto de classes de homotopias livres de aplicações de X em Y é denotado por $[X, Y]$. O espaço W_n considerado é o espaço tal que é tomado $\{p_1, \dots, p_n\}$ pontos, dois a dois distintos, de uma esfera um dimensional S^1 e n esferas dois dimensionais S_i^2 , duas a duas disjuntas com $S_i^2 \cap S^1 = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. O espaço W_n é o espaço obtido pela colagem, pelo ponto p_i , de cada S_i^2 em S^1 , portanto, W_n tem mesmo tipo de homotopia que $\underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{n\text{-vezes}} \vee S^1$. Por último, para denotar homotopia de aplicações ou equivalências de espaços topológicos usaremos $\cong$ e para denotar isomorfismo entre objetos

algébricos usaremos $\simeq$.

Representação de aplicações de superfícies orientáveis em W

1.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de S^2 em W

Nesta seção usaremos homologia com coeficientes locais para encontrar um polinômio associado a cada classe de homotopia de aplicações de S^2 em W , que representarão as classes de homotopia destas aplicações.

Calcularemos a homologia com coeficientes locais $H_*(W, \mathbb{Z}\pi_\rho)$ e será dada uma interpretação geométrica a estes módulos e o homomorfismo induzido por f no segundo grupo de homologia.

Polinômio associado a uma classe de homotopia

Consideremos $\pi_1(W) = \pi_1(S^2 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} \langle t \rangle$ (gerador por t), $\mathbb{Z}[\pi_1(W)] \simeq \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, onde a estrutura de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ é dada pelo homomorfismo $\rho_{\pi_1} : \pi_1(W) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ tal que $\rho_{\pi_1}(t)(\sigma) = t \cdot \sigma$, ou seja, ρ_{π_1} é a multiplicação por t .

Logo a homologia com coeficientes locais $H_*(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}})$ é calculada da seguinte

forma:

1) $S_*(W, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) = S_*(\widetilde{W}) \otimes_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = S_*(\widetilde{W})$, onde $S_*(\widetilde{W})$ tem estrutura de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo natural e $\widetilde{W}$ é o recobrimento universal de W ilustrado pelo figura abaixo

2) temos o complexo de cadeias

$$\dots S_3(\widetilde{W}) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_3} S_2(\widetilde{W}) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} S_1(\widetilde{W}) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} S_0(\widetilde{W}) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} 0.$$

Usando decomposição celular, temos $W = e_0 \cup e_1 \cup e_2$, onde $e_0 = P$, $e_1 = S^1$ e $e_2 = S^2$. Fixando os levantamentos destas células como sendo $\widetilde{e}_0 = 0$, $\widetilde{e}_1 = [0, 1]$ e $\widetilde{e}_2 = S_0^2$, temos a respectiva decomposição

$$\widetilde{W} = (\dots \cup \widetilde{e}_0^{t^{-2}} \cup \widetilde{e}_0^{t^{-1}} \cup \widetilde{e}_0 \cup \widetilde{e}_0^t \cup \widetilde{e}_0^{t^2} \cup \dots) \cup (\dots \widetilde{e}_1^{t^{-2}} \cup \widetilde{e}_1^{t^{-1}} \cup \widetilde{e}_1 \cup \widetilde{e}_1^t \cup \widetilde{e}_1^{t^2} \cup \dots) \cup (\dots \cup \widetilde{e}_2^{t^{-2}} \cup \widetilde{e}_2^{t^{-1}} \cup \widetilde{e}_2 \cup \widetilde{e}_2^t \cup \widetilde{e}_2^{t^2} \cup \dots),$$

onde $\widetilde{e}_i^{t^j} = t^j \widetilde{e}_i$ (lembrando que $S_*(\widetilde{W})$ é $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo). Utilizando a ilustração acima, geometricamente a multiplicação de $\widetilde{e}_0$ por t^j é o ponto j da reta, a multiplicação de $\widetilde{e}_1$ por t^j é o segmento $[j, j+1]$ e a multiplicação de $\widetilde{e}_2$ por t^j é a esfera S_j^2 .

Portanto $S_0(\widetilde{W}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ gerado por $\langle \widetilde{e}_0 \rangle$, $S_1(\widetilde{W}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ gerado por $\langle \widetilde{e}_1 \rangle$, $S_2(\widetilde{W}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ gerado por $\langle \widetilde{e}_2 \rangle$ e $S_i(\widetilde{W}) = 0$ para $i > 2$ e $i < 0$.

Os operadores bordos $\widetilde{\partial}_i$ são dados por:

$$i=1: \widetilde{\partial}_1(\widetilde{e}_1) = \widetilde{e}_0^t - \widetilde{e}_0 = t\widetilde{e}_0 - \widetilde{e}_0 = (t-1)\widetilde{e}_0. \text{ Logo } \widetilde{\partial}_1 = (t-1).$$

$$i=2: \widetilde{\partial}_2(\widetilde{e}_2) = 0. \text{ Logo } \widetilde{\partial}_2 = 0$$

$$i>2: \text{ para } i > 2, \text{ desde que } S_i(\widetilde{W}) = 0, \text{ temos } \widetilde{\partial}_i = 0.$$

O complexo de cadeia é então

$$\dots 0 \xrightarrow{\partial_3=0} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{\partial_2=0} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{\partial_1=(t^{-1})} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Logo temos a homologia

$$H_i(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \simeq \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}{\langle (t^{-1}) \rangle} \cong \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}[t, t^{-1}] & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Seja $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ o recobrimento universal. Pelo lema 6.2.1 temos o sistema de coeficientes locais sobre W associado ao recobrimento p

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] & \longrightarrow & \widetilde{W} \times_{\pi_1(W)} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \\ & & \downarrow q \\ & & W \end{array}$$

onde $q([\widetilde{w}, z]) = p(\widetilde{w})$.

Dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ induzida de f temos os homomorfismo induzido por f em homologia com coeficientes locais. A estrutura de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ é determinada pela imagem da induzida da f no grupo fundamental. Como $\pi_1(S^2)$ é trivial, a homologia com coeficientes locais $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ de S^2 é a homologia usual com coeficientes em $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Neste caso, a homologia $H_*(S^2; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}^*})$ é dada por

$$H_i(S^2; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}^*}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] & \text{se } i = 0, 2 \\ 0 & \text{se } \text{c.c} \end{cases}$$

onde $\rho_{\pi_1}^*$ é o "pullback" de ρ_{π_1} .

Seja $f_i : H_i(S^2; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow H_i(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}})$ o homomorfismo induzido por f em homologia com coeficientes locais.

Quando $i = 2$, temos o homomorfismo $f_2 : H_2(S^2; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}})$, dada por $f_2([\sigma]) = [f \circ \sigma]$, onde $f_2([\sigma])$ é da forma $a_{-i}t^{-i} + a_{-i+1}t^{-i+1} + \dots + a_0 + a_1t + \dots + a_jt^j$, onde $i, j \in \mathbb{N}$, desde que $H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Este elemento pressupõe feita uma escolha de isomorfismo $\Phi : H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ pois quando dizemos que $f_2(x)$ é desta forma estamos identificando com $\Phi(f_2(x))$.

Seja $\Phi : H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ um isomorfismo, isto significa que fixamos o ponto base $\tilde{x}_\Phi$ do espaço $\widetilde{W}$. Suponha que fixamos o isomorfismo tal que o ponto base seja $0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \widetilde{W}$.

Seja um elemento de $H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}})$, isto é, $t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j$, então cada monômio e seus coeficientes tem uma interpretação geométrica. Escolhemos uma orientação para as células S_i^2 do recobrimento universal $\widetilde{W}$. A representação geométrica deste elemento é feita em $\widetilde{W}$ e é como na parte vermelha da ilustração

isto é, cada monômio t^ja_j significa que a esfera S_j^2 é coberta a_j vezes, isto é, a esfera S_j^2 é recoberta com grau a_j de acordo com a orientação escolhida. Além disso o intervalo $[-i, j]$ também é coberto.

Observemos que esta associação de um elemento $t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j \in H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}})$ a uma aplicação de S^2 em W independente do representante da classe de homotopia desta aplicação, isto é, podemos fazer esta associação à classe de homotopia da aplicação. Portanto a representação geométrica pode ser como na ilustração acima na qual a parte vermelha contenha o intervalo $[-i, j]$. Mas, a menos de homotopia, a representação irá conter exatamente o intervalo $[-i, j]$ e o mesmo vale para as esferas S_j^2 , isto é, elas são recobertas exatamente a_j vezes de acordo com a orientação fixada anteriormente.

Fazendo a imagem deste elemento pela aplicação p temos que a imagem de f recobre a esfera S^2 , $a_{-i} + a_{-i+1} + \dots + a_{j-1} + a_j$ vezes.

Portanto dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ e feita a escolha do isomorfismo $\Phi : H_2(W; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, temos um elemento associado a f que é $\Phi(f_2(\sigma))$, onde σ é um gerador de $H_2(S^2; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_{\rho_{\pi_1}}) \simeq_{\Phi} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Suponha que $t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j$ seja o elemento associado a uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$. Considere o elemento $t^k(t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j)$, então a representação geométrica deste elemento será a mesma de $t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j$, mas transladado por k em $\widetilde{W}$ como na figura

Se $t^k(t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j)$ é o elemento associado a uma aplicação $g : S^2 \rightarrow W$, então a imagem por p das representações geométricas dos elementos $t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j$ e $t^k(t^{-i}a_{-i} + t^{-i+1}a_{-i+1} + \dots + t^{j-1}a_{j-1} + t^ja_j)$ são as mesmas. Portanto a imagem de f e g são as mesmas também.

Além disso, como o conjunto $[S^2, W]$ é o conjunto de classes de aplicações por homotopias livres, então $g \in [f]$.

Dado um elemento de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ associado a uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$, tal que tenha potência de t negativa e a menor potência seja $-i$. Podemos multiplicar este elemento pelo inversível t^i de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ e assim este novo elemento, que chamaremos de polinômio, terá somente potências positivas de t e a menor potência de t é 0. Este polinômio será o polinômio associado a $[f]$ que terá somente potências de t positivas, com $a_0 \neq 0$.

Correspondente ao polinômio nulo ($a_0 = 0$) temos a aplicação homotópica a aplicação constante.

Lembrando que $[f]$ é a classe de homotopia livre da aplicação f , podemos definir:

Definição 1.1.1. *Dados uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ e sua classe de homotopia. O polinômio nulo ou um polinômio com $a_0 \neq 0$ e $n > 0$, como construído acima é o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$ que é denotado por $p_{[f]}(t)$.*

Construção de um bom representante

Na seção anterior é associado à classe de homotopia de uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ um polinômio $p_{[f]}(t) \in H_2(W; \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \rho_{\pi_1})$.

Nesta seção será construída uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ a partir de um dado polinômio $q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{j-1} t^{j-1} + a_j t^j \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tal que $p_{[f]}(t) = q(t)$.

O espaço $\widetilde{W}$ pode ser descrito como $\mathbb{R} \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j^2 \right)$ tal que para $j \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \cap S_j^2 = \{j\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

A função de recobrimento $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ é tal que $p|_{S_j^2} : S_j^2 \rightarrow S^2$ é um difeomorfismo que preserva orientação.

Para qualquer $j \in \mathbb{Z}$, $p|_{[j, j+1]} : [j, j+1] \rightarrow W$ atinge S^1 com $p(j) = P = p(j+1)$ e $p|_{(j, j+1)} : (j, j+1) \rightarrow W \setminus S^2$ é dado por $p|_{(j, j+1)}(s) = e^{2\pi i s}$, onde P é identificado com $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ o plano complexo.

A ação de $\pi_1(W) \simeq \mathbb{Z}$ gerado por t sobre $\widetilde{W}$ é tal que $t^i S_j^2 = S_{j+i}^2$ e $t^i [j, j+1] = [j+i, j+1+i]$.

Dado o polinômio $q(t)$, descreveremos uma aplicação $\widetilde{f}_q : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ tal que a classe de homotopia de $f = p \circ \widetilde{f}_q$ corresponde ao polinômio $q(t)$.

A aplicação $\widetilde{f}_q : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ é como na ilustração:

onde a imagem da parte vermelha são as esferas de cores vermelhas em $\widetilde{W}$, a imagem da parte verde é o intervalo verde de $\widetilde{W}$ e a imagem da parte azul são os pontos de coordenadas inteiras em azul de $\widetilde{W}$.

Além disso, cada disco vermelho atinge uma esfera com um grau $a_i \neq 0$ e cada esfera vermelha é atingida por somente um disco vermelho. A aplicação $\widetilde{f}_q$ restrita a S^2 menos a parte vermelha é a projeção no intervalo verde.

Logo definimos a aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ por $p \circ \widetilde{f}_q$. Por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Definição 1.1.2. Uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ construída como acima a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ é chamada de aplicação especial.

Construção de uma aplicação especial na classe de homotopia de $f : S^2 \rightarrow W$

Dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$, usaremos algumas técnicas geométricas para encontrar uma aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ onde $g \in [f]$ e g é especial.

Primeiramente note que se a imagem de f esta contida em $S^1 \subset W$, desde que $\pi_2(S^1) = 0$, temos f homotópica a uma aplicação constante.

Se a imagem de f esta contida em $S^2 \subset W$, então o polinômio $p_{[f]} = \mathbb{O}$ e neste caso f é homotópica a uma aplicação constante

Se $p_{[f]} = a_0 \neq 0$ e a aplicação f pode ser considerada como aplicação de S^2 em S^2 tal que a_0 é o seu grau.

Observação: Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é dita fortemente sobrejetiva se para qualquer g homotópica a f , g é sobrejetora.

Logo daqui por adiante, consideremos aplicações de S^2 em W fortemente sobrejetiva.

Os resultados seguintes modificarão f , através de homotopias, para uma aplicação especial. Durante este processo a aplicação modificada sempre será denotada por f , isto é, manteremos a mesma notação nos vários passos das demonstrações.

Lema 1.1.1. *Seja uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ contínua fortemente sobrejetora. Então f é homotópica a uma aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ tal que $g^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de S^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{t=1}^n B_t^2$, onde n é finito, B_t^2 é o interior de discos D_t^2 tal que $\partial D_t^2 \cong S_t^1$ e para $i \neq j$, $S_i^1 \cap S_j^1 = \emptyset$. Além disso, $g(\partial D_t^2) = P$ e $g|_{(D_t^2, \partial D_t^2)} : (D_t^2, \partial D_t^2) \rightarrow (S^2, P)$ tem grau ± 1 .*

Demonstração: Primeiramente observe que como S^2 é variedade e W , a menos do ponto singular P , tem propriedades locais de variedades, podemos usar os conceitos e resultados de diferenciabilidade, que são conceitos locais, para podermos aproximar f por uma aplicação diferenciável nos abertos $f^{-1}(W \setminus S^1)$ e $f^{-1}(W \setminus S^2)$.

Então existe um valor regular $y \in W \setminus S^1$. Pelo Teorema de Sard y possui uma vizinhança 2-Euclidiana $V \subset S^2 \subset W$ tal que V não contém valor crítico. Como o domínio S^2 é compacto e y é valor regular, então $f^{-1}(y)$ é um número finito de pontos $\{x_1, \dots, x_t\} \subset S^2$. Considere uma vizinhança $B_1 \subset S^2$ de x_1 homeomorfa a um disco de dimensão 2 tal que $f(B_1) \subset V$ e $\partial B_1 \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. Por um resultado de [6] (pg. 300, Lema 5.3) tem-se que f pode ser deformada por homotopia em uma aplicação $f^1 : S^2 \rightarrow W$ tal que $f^1|_{(S^2 \setminus B_1)} = f|_{(S^2 \setminus B_1)}$, $(f^1)^{-1}(y) \cap B_1 = \{x_1\}$ e $f^1(B_1) \subset V$.

Repetindo o processo acima para x_2 e depois sucessivamente até x_t , existirá $B_1, \dots, B_t$ vizinhanças disjuntas, homeomorfas a disco de dimensão 2, de respectivamente $x_1, \dots, x_t$ tais que $f^t : S^2 \rightarrow W$ satisfaz:

- 1) $f^t|_{(S^2 \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_t))} = f|_{(S^2 \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_t))}$,
- 2) $(f^t)^{-1}(y) \cap B_i = \{x_i\}$ e $f^t(B_i) \subset V$, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$,
- 3) $f^t \cong f$.

Podemos tomar um caminho simples $c : I \rightarrow W$, tal que c conecta todos B_i e $c(I) \subset$

$V \setminus \bigsqcup_{i=1}^t \overset{\circ}{B}_i$. Sem perda de generalidade podemos supor $V = \bigsqcup_{i=1}^t B_i \cup (c(I))$.

Considere a homotopia $H : W \times I \rightarrow W$ tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = r(x)$ onde $r : W \rightarrow W$ é uma aplicação tal que $r(V) = W \setminus S^1$ e $r|_{S^1} = (Id_W)|_{S^1}$, isto é, r leva o aberto V sobre $W \setminus S^1$, leva $(S^2 \setminus V) \subset W$ em $\{P\}$ e o resto mantém a identidade, como no desenho abaixo

Figura 1.1: Retração S^2

Assim $f^t \cong f = H(., 0) \circ f \cong H(., 1) \circ f = r \circ f \cong r \circ f^t$. Portanto a menos de homotopia $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de S^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{t=1}^n B_t^2$, onde n é finito e B_t^2 são discos abertos de dimensão 2, B_t^2 é o interior de discos disjuntos D_t^2 tal que $\partial D_t^2 \simeq S_t^1$ e tal que $f(\partial D_t^2) = \{P\}$ para $t \in \{1, \dots, n\}$.

Além disso como S^2 e W são compactos segue pelo corolário 4.2 de [6] que podemos considerar a aplicação f tal que $f|_{B_t^2} : B_t^2 \rightarrow W \setminus S^1$ é homeomorfismo e se tomarmos $D_t^2 = B_t^2 \cup \partial D_t^2$ o grau de $f|_{D_t^2}$ é ± 1 . ■

O próximo lema juntará certos discos deste tipo.

Lema 1.1.2. *Sejam uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ fortemente sobrejetora e seu levantamento $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{W}$, onde $\tilde{W}$ é o recobrimento universal de W . Então existe uma aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ tal que $[g] = [f]$ e $\tilde{g}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = B_i^2$ ou $\tilde{g}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = \emptyset$, onde $\tilde{g} : S^2 \rightarrow \tilde{W}$ é o levantamento de g , B_i^2 são discos abertos de dimensão dois e $i \in \{k, \dots, k+n\}$.*

Demonstração: Já que S^2 é compacto, $\tilde{f}(S^2)$ também o é. Portanto existe um primeiro índice k e um último índice $k+n$ tal que S_k^2 e S_{k+n}^2 são atingidas pela imagem de $\tilde{f}$.

Pelo lema 1.1.1 podemos considerar que $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de S^2 homeo-

morfa a $\bigsqcup_{t=1}^n B_t^2$, onde n é finito, B_t^2 são discos abertos de dimensão 2, $f|_{B_t^2} : B_t^2 \rightarrow W \setminus S^1$ é homeomorfismo e $f(\partial B_t^2) = P$ para $t \in \{1, \dots, n\}$. Portanto para cada $j \in \{k, \dots, k+n\}$ $\tilde{f}^{-1}(S_j^2 \setminus \{j\})$ é uma subvariedade de S^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} B_l^2$, onde $B_l^2 \subset \{B_1^2, \dots, B_n^2\}$, $\tilde{f}|_{B_l^2} : B_l^2 \rightarrow S_j^2 \setminus \{j\}$ é homeomorfismo com $\tilde{f}(\partial B_l^2) = j$ para $l \in \{n_j, \dots, n_j+r\}$ e $\{n_j, \dots, n_j+r\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Fixemos $j \in \{k, \dots, k+n\}$, juntaremos os discos $\bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} B_l^2$ em um único disco.

Já que $S^2 \setminus f^{-1}(W \setminus (S^1 - \{P\}))$ é conexo por caminhos, quaisquer dois pontos podem ser ligados por um caminhos em $S^2 \setminus f^{-1}(W \setminus (S^1 - \{P\}))$. Portanto tomemos um caminho simples $c : I \rightarrow S^2$ tal que vale as seguintes propriedades:

- i) $c(I) \subset S^2 \setminus f^{-1}(W \setminus (S^1 - \{P\}))$.
- ii) $c(0) \in \partial B_{n_j}^2 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} \partial B_l^2$, $c\left(\frac{1}{r-1}\right) \in \partial B_{n_j+1}^2 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} \partial B_l^2, \dots, c\left(\frac{r-2}{r-1}\right) \in \partial B_{n_j+r-1}^2 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} \partial B_l^2$ e $c(1) \in \partial B_{n_j+r}^2 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} \partial B_l^2$.

Por construção do caminho c , $\tilde{f} \circ c \in \mathbb{R} \subset \widetilde{W}$. Como I é compacto segue que $\tilde{f} \circ c(I)$ também é compacto tal que $\tilde{f} \circ c(0) = \tilde{f} \circ c(1) = j$. Portanto, a menos de homotopia, podemos considerar que $\tilde{f} \circ c(I) = j$. Logo a menos de homotopia existe um único disco $D_j \subset S^2$ tal que $\tilde{f}(D_j) \subset S_j^2$, $\tilde{f}(\partial D_j) = j$ e o grau de $\tilde{f}|_{D_j}$ é a soma dos graus $\deg \tilde{f}|_{D_1^2} + \dots + \deg \tilde{f}|_{D_{n_j}^2}$. Se esta soma for zero então existe, a menos de homotopia, $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(D_j) = j$.

Portanto existe uma homotopia $H_j : S^2 \times I \rightarrow \widetilde{W}$ tal que $H_j(x, 0) = \tilde{f}$ e $H_j(x, 1) = \tilde{g}_j$ tal que $\tilde{g}_j(D_j) \subset S_j^2$, $\tilde{g}_j(\partial D_j) = j$ e o grau de $\tilde{g}_j|_{D_j}$ é a soma dos graus $\deg \tilde{g}_j|_{D_1^2} + \dots + \deg \tilde{g}_j|_{D_{n_j}^2}$.

Repetindo este processo de junção para cada índice $i \in \{k, \dots, k+n\}$ temos a existência de uma homotopia $H(x, 0) = \tilde{f}$ e $H(x, 1) = \tilde{g}$ tal que $\tilde{g}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = B_i^2$ ou $\tilde{g}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = \emptyset$ e $\tilde{g}(\partial D_i) = i$, onde $D_i = B_i^2 \cup \partial B_i^2$ e $i \in \{k, \dots, k+n\}$.

Portanto a composição $p \circ H$ é uma homotopia tal que $p \circ H(x, 0) = p \circ \tilde{f} = f$ e $p \circ H(x, 1) = p \circ \tilde{g} = g$ e g é como queríamos. ■

Lema 1.1.3. *Seja uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ contínua e fortemente sobrejetora. Então, a menos de homotopia, $f^{-1}(W \setminus S^2)$ é uma subvariedade de S^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{i=1}^n S_i^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$, onde n é finito.*

Demonstração: Assim como no lema anterior, podemos usar os conceitos e resultados de diferenciabilidade. O aberto $Z = W \setminus S^2$ de W é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Consideremos os intervalos abertos $\tilde{V} \subset \tilde{U} \subset Z$ e um compacto $\tilde{A} \subset \tilde{V}$ tal que $\tilde{\tilde{V}} \subset \tilde{U}$. Dados $f : S^2 \rightarrow S^1 \subset W$ contínua, tomemos os abertos de S^2 , $U = f^{-1}(\tilde{U})$, $V = f^{-1}(\tilde{V})$ e o compacto $A = f^{-1}(\tilde{A})$. Assim, vale que $A \subset V$ e $\bar{V} \subset U$. Seja $f|_U : U \rightarrow \tilde{U}$ a restrição de f . Pelo resultado 4.1 de [15] temos que existe uma aplicação $f_1 : U \rightarrow \tilde{U}$ tais que f_1 é C^∞ numa vizinhança de A , $f_1 = f$ para os pontos fora de V e f_1 é homotópica a f . Dessa forma se definirmos $f_1(x) = f(x)$ para os pontos em $S^2 \setminus U$, f_1 será contínua com as propriedades acima.

Portanto seja $x \in W \setminus S^2$ tal que x é valor regular de f_1 . Pelo teorema de Sard temos que existe uma vizinhança V_1 de x tal que não contenha pontos críticos de f_1 em V_1 . Considere a homotopia em W , $H : W \times I \rightarrow W$ tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = r(x)$ onde $r : W \rightarrow W$ é uma aplicação tal que $r(V_1) = W \setminus S^2$ e $r|_{S^2} = (Id_W)|_{S^2}$, ilustrada por,

Assim $f_1 = H_0 \circ f_1 \cong H_1 \circ f_1 = r \circ f_1$. Portanto podemos considerar que todos os pontos em $W \setminus S^2$ são valores regulares de f_1 . Pelo fato de $x \in W \setminus S^2$ ser valor regular, $(f_1)^{-1}(x)$ é uma subvariedade de S homeomorfa a uma união disjunta $\bigsqcup_{i=1}^n S_i^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$, onde n é finito. Dessa forma $(f_1)^{-1}(W \setminus S^2)$ é uma subvariedade de S homeomorfa a $\bigsqcup_{i=1}^n S_i^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$, onde n é finito e f_1 é homotópica a f . ■

Sejam uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ e seu levantamento $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{W}$. Como S^2 é compacta, um número finito de S_i^2 esta contida na imagem de $\tilde{f}$. Suponha que S_k^2 é a

esfera que esta contida na imagem tal que k seja o maior inteiro e que a imagem de $\tilde{f}$ atinja o intervalo $[k, k+n]$ e $Im(\tilde{f}) \cap (k+n, +\infty) = \emptyset$.

Como a última esfera atingida pela $\tilde{f}$ é S_k^2 , então existe uma aplicação $r : \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{W}$ que retrai todo intervalo $[k, k+n]$ no ponto k . A imagem da composição $r \circ \tilde{f}$ não atinge mais todo intervalo $[k, k+n]$, mas somente o ponto k . Além disso, esta composição é homotópica a $\tilde{f}$ e portanto $r \circ \tilde{f} \circ p$ é homotópica a f .

Pelo Lema 1.1.3 existe um cilindro $C \cong S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] \subset S^2$ tal que $\tilde{f}(C) = [k, k+1] \subset \widetilde{W}$ e $f(C) = S^1$. Quando fazemos a homotopia acima, significa que mudamos a aplicação f tal que a imagem de C seja o ponto $P \in S^1$.

Pelo lema 1.1.2 $\tilde{f}^{-1}(S_{k+n}^2 \setminus \{k+n\}) = B_{k+n}^2$ e se a esfera S_{k+n}^2 é coberta por f com grau igual a zero, então, por propriedade de grau, a aplicação f é homotópica a uma aplicação que é constante em B_{k+n}^2 . Logo repete-se o processo acima para $[k+n-1, k+n]$.

Podemos repetir este processo finitas vezes. Logo sem perda de generalidade, tomamos $k+n$ como sendo o menor inteiro tal que S_{k+n}^2 esta contida na imagem de $\tilde{f}$ com grau diferente de zero.

Portanto, a menos de homotopia, a imagem $\tilde{f}$ não atinge o subconjunto $(k+n, +\infty) \cup (-\infty, k)$, onde $k+n$ é o maior inteiro tal que S_{k+n}^2 pertence a imagem de $\tilde{f}$, k é o menor inteiro tal que S_k^2 pertence a imagem de $\tilde{f}$ e as esferas S_{k+n}^2 S_k^2 são recobertas com graus diferentes de zero.

Quando foi feita a interpretação geométrica do polinômio associado $[f]$, vimos que podemos multiplicar por inversíveis t^j , $\forall j \in \mathbb{Z}^*$, isto é, a menos de escolha de ponto base do espaço $\widetilde{W}$, $k = 0$.

Daqui por diante $k = 0$.

Portanto depois de algumas homotopias terminamos com uma aplicação $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ com boas propriedades, mas ainda $p \circ \tilde{f}$ não é uma aplicação especial.

Pelo Lema 1.1.3 a imagem inversa de cada intervalo $(j, j+1) \subset \widetilde{W}$, eventualmente, é uma união finita de cilindros, mas para uma aplicação especial a imagem inversa de cada intervalo $(j, j+1) \subset \widetilde{W}$ é vazio ou um único cilindro. Para eliminar os, possíveis, cilindros extras será utilizado teoria de grafos, através da fatoração de Stein que gera um grafo (também conhecido como grafo de Reeb ou grafo de Lyapunov).

Existe uma retração $\phi : \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}$ que manda cada esfera S_i^2 a $\{i\}$ e é a identidade em $\mathbb{R}$, isto é, $\phi|_{\mathbb{R}}$ é a identidade e $\phi(S_i^2) = i$.

Podemos compor a aplicação $\widetilde{f}$ com ϕ para obter um tipo de "aplicação de Morse" $\overline{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Esta aplicação tem imagem o intervalo $[0, n]$ e para todo inteiro $0 \leq i \leq n$ temos $\overline{f}^{-1}(i)$ é uma coleção não vazia de 2-variedades com bordo de genus zero e $\overline{f}^{-1}((i, i+1))$ é uma coleção não vazia de cilindros ($\simeq S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$).

Consideramos a fatoração Stein de $\overline{f}$, isto é, definimos uma relação de equivalência no domínio S^2 por $x_1 \sim x_2$ se $\overline{f}(x_1) = \overline{f}(x_2)$ e os pontos x_1 e x_2 pertencem a mesma componente conexa de $\overline{f}^{-1}(x_1)$. O espaço quociente $S^2 / \sim$ é um grafo denotado por $\Gamma_{\overline{f}}$ e neste caso o grafo é uma árvore. Definimos a aplicação $\overline{f}_s : \Gamma_{\overline{f}} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\overline{f}_s(\overline{x}) = \overline{f}(x)$, onde $\overline{x}$ é a classe de $x \in S^2$ e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \overline{f}_s & \\ \Gamma_{\overline{f}} & & \end{array}$$

A aplicação $\overline{f}$ pode ser vista como uma função de Morse com "regiões planas". Neste caso o domínio da fatoração de Stein $\Gamma_{\overline{f}}$ é uma árvore que tem seus vértices enviados por $\overline{f}_s$ nos inteiro de $\mathbb{R}$ e suas arestas correspondem aos cilindros que são projetados nos intervalos aberto $(i, i+1)$. Chamaremos $\overline{f}_s : \Gamma_{\overline{f}} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação induzida de f na fatoração de Stein.

Pelo Lema 1.1.2, há um único disco aberto B_i^2 tal que $\widetilde{f}(B_i^2) = S_i^2 \setminus \{i\}$, $\widetilde{f}(\partial B_i^2) = i$ e $\widetilde{f}|_{\overline{B_i^2}} : (\overline{B_i^2}, \partial B_i^2) \rightarrow (S_i^2, i)$ recobre a esfera S_i^2 com grau a_i . Assim, em cada nível i tal que $a_i \neq 0$ destacamos o vértice de $\Gamma_{\overline{f}}$ que corresponde à superfície que contém o ∂B_i^2 e "pintamos de vermelho", para distingui-los dos demais.

Note que as "regiões planas" são as superfícies com bordo que dão origem aos vértices do grafo, eles são mandados por $\overline{f}$ nos inteiros $\{0, \dots, n\}$.

Nós definimos uma ordem parcial no grafo, usando a aplicação $\overline{f}$ e a ordem de $[0, n] \subset \mathbb{R}$. Assim podemos imaginar $\overline{f}$ como a função altura definida de S^2 no grafo $\Gamma_{\overline{f}}$. Abreviaremos $\Gamma_{\overline{f}}$ por Γ .

Será feita modificações, por homotopias, em $\overline{f}$, mas ainda manteremos o mesmo nome

para esta nova aplicação e para o novo grafo também manteremos a notação Γ .

A partir de agora vamos estudar as mudanças por homotopias de f a partir do que ocorre com o grafo Γ e na aplicação $\overline{f_s}$.

Começaremos um processo de mudança por homotopias da aplicação $\overline{f}$ sem alterações nos discos E_i (os discos que a aplicação $\tilde{f}$ manda no interior das esferas S_i^2 onde $a_i \neq 0$). Devemos fazer isto de tal forma que o grafo se torne o grafo de uma aplicação especial o qual é linear e estritamente crescente com $(n + 1)$ vértices e n arestas.

Passo 1 Se no nível n tiver mais vértices do que o "vértice vermelho", podemos eliminar os outros vértices por uma homotopia de $\tilde{f}$ tal que as superfícies correspondentes a estes vértices e os cilindros atingidos são movidos para o nível $(n - 1)$.

Note que neste caso o número de vértices nos níveis $(n - 1)$ diminui, uma vez que algumas superfícies desse nível estão ligados pelos cilindros.

Passo 2 Podemos fazer o mesmo com o nível 0 e 1.

Passo 3 Usando o mesmo processo, podemos eliminar "vértices de máximos locais não vermelhos" e "vértices de mínimos locais não vermelhos".

Neste ponto, temos uma aplicação $\tilde{f}$ tal que o grafo Γ de $\tilde{f}$ tem apenas um vértice maximal (vermelho) e apenas um vértice minimal (vermelho).

Considere um subgrafo $\Delta \subset \Gamma$ ligando o vértice vermelho do nível 0 ao vértice vermelho do nível n tal que Δ é um caminho simples, ou seja, Δ é um caminho sem auto interseção.

Passo 4 Neste momento, temos uma árvore de modo que o (único) vértice minimal no nível 0, o (único) vértice máximo no nível n são os vermelhos e com possíveis arestas livres com vértices extremos vermelhos.

Δ é um grafo linear (não necessariamente crescente) que liga o vértice vermelho de nível 0 ao vértice vermelho do nível n , se este subgrafo for estritamente crescente e contém todos os vértices vermelhos, então o processo acabou uma vez que este gráfico é um

grafo de uma aplicação especial (a menos de mais algumas homotopias simples, onde as superfícies planares tornam-se objetos 1-dimensionais e as arestas livres são eliminadas por homotopias triviais).

Lema 1.1.4. *Sejam $f : S^2 \rightarrow W$ uma aplicação contínua e fortemente sobrejetora, $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ e $\bar{f} = \phi \circ \tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como antes. Podemos mudar $\tilde{f}$, por homotopias, tal que o grafo Γ é linear e estritamente crescente.*

Demonstração: Se o gráfico Γ é estritamente crescente (ou estritamente decrescente) acabou. Então suponha que o gráfico contém três vértices A, B e C , tal que A, C estão no nível i e B está no nível $i + 1$, como na ilustração abaixo:

Os vértices A e C correspondem às componentes conexas por caminhos de $\tilde{f}^{-1}(i)$, C_{i_A} e C_{i_C} , respectivamente; o vértice B corresponde à componente conexa por caminhos $C_{(i+1)_B}$ de $\tilde{f}^{-1}(i + 1)$, e as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ correspondem aos cilindros de $\tilde{f}^{-1}((i, i + 1))$.

Consideramos três pontos $x_1 \in C_{i_A}$, $x_2 \in C_{(i+1)_B}$ e $x_3 \in C_{i_C}$. Tomamos um caminho simples $c : I \rightarrow \tilde{f}^{-1}([i, i + 1])$ conectando x_1 a x_3 , passando por x_2 tal que não atinge nenhum outro cilindro, exceto aqueles que correspondem a AB e BC .

Tomamos $V \subset S^2 \setminus \tilde{f}^{-1}(W \setminus S^1)$ uma vizinhança tubular de c . Desde que $\tilde{f}(c(I)) \subset \mathbb{R}$ e os pontos finais são mandados em i , a menos de homotopia, $f(c(I)) = P$. Utilizamos

esta homotopia para modificar f em V de tal modo que o novo grafo associado a nova $\bar{f}$ seja como se segue:

Repetindo este processo para as outras partes de Γ similares a parte considerada acima entre os níveis i e $i + 1$.

Terminamos com um grafo linear estritamente crescente o qual é associado a uma aplicação especial. ■

Teorema 1.1.1. *Dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$ e sua classe de homotopia $[f]$. Então existe $g \in [f]$ tal que g é especial.*

Demonstração: Considere a aplicação $f : S^2 \rightarrow W$. Pelos lemas 1.1.1 e 1.1.3 existe uma aplicação homotópica a f , que manteremos o nome f , tal que $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma união finita de bolas cujos bordos são enviados por f em $\{P\}$, $f^{-1}(W \setminus S^2)$ é uma união finita de cilindros $S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$, os conjuntos $(S^1 \times \{-\epsilon\}) \cup (S^1 \times \{\epsilon\})$ são enviados por f em P e $f^{-1}(P)$ é uma coleção de superfícies compactas, conexas e com bordo de gênero zero.

Considere $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{W}$ o levantamento de f .

A imagem de $\tilde{f}$ é um conjunto compacto e conexo, assim a imagem é apenas um segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unido com um número finito de esferas.

Observa-se que as esferas que podem ser atingidas por $\tilde{f}$ são $S_n^2, S_{n+1}^2, \dots, S_{n+k}^2$ tais que $\{n, n+1, \dots, n+k\} \subset [a, b]$ as quais (não necessariamente todas elas) são as imagens dos discos D_i^2 pelo Lema 1.1.1.

Para cada uma dessas esferas S_j^2 coletamos os discos D_i^2 que são enviados por $\tilde{f}$ nesta esfera. Se o número deles é maior do que um, então conectamos estes discos por um caminho simples desviando dos outros discos de tal modo que a união dos discos e uma vizinhança suficientemente pequena do caminho será um único disco que contém todos os discos que atingem esta esfera.

Pelo Lema 1.1.2 a aplicação $\tilde{f}$ pode ser deformada mais uma vez ao longo do disco e da vizinhança do caminho (mais uma vez, continuaremos chamando a nova aplicação de $\tilde{f}$) de forma que a imagem de uma pequena vizinhança do caminho tenha imagem $\{j\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \widetilde{W}$ (note que $p \circ \tilde{f} : S^2 \rightarrow W$ envia este caminho em P). Após isso, ajustamos $\tilde{f}$ por outra homotopia tal que em um único disco a aplicação $\tilde{f}$ tem grau igual a soma algébrica dos graus dos discos correspondentes.

Se o grau é igual a zero, então a aplicação restrita ao disco é homotópica a aplicação constante, portanto, mudaremos homotopicamente a aplicação uma vez mais de modo que a imagem não atinge o interior da esfera, ou seja é constante e igual a P .

Depois de repetir esse processo para as outras famílias de discos que atingem a mesma esfera, temos uma aplicação $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ tal que para uma coleção de discos $E_k^2, \tilde{f}|_{E_k^2} : (E_k^2, \partial E_k^2) \rightarrow (S_k^2, k)$ tem grau $a_k \neq 0$.

Chamamos k^+ o maior índice de tal forma que $a_{k^+} \neq 0$, k^- o menor índice tal que $a_{k^-} \neq 0$ e, por conveniência, escolhemos o levantamento de f a $\widetilde{W}$ tal que $k^- = 0$ e $k^+ = n$.

Então, para $i > n$ ou $i < 0$, $S_i^2 \setminus \{i\}$ não é atingido por $\tilde{f}$.

Podemos ter algum $0 < i < n$ tal que $a_i = 0$. Neste caso, mudamos a aplicação por uma homotopia e temos que o interior da esfera S_i^2 não é atingido por $\tilde{f}$.

Note que temos uma aplicação $\tilde{f}$ tal que a parte da imagem de $\tilde{f}$ que atinge $\widetilde{W}$ acima de n esta dentro do segmento $[n, b] \subset \mathbb{R}$, o qual é contrátil (o mesmo para a imagem de $\tilde{f}$ abaixo 0). Assim, podemos modificar $\tilde{f}$ tal que a imagem de $\tilde{f}$ é o conjunto $[0, n] \cup (\cup S_i^2)$, onde $a_i \neq 0$ e o conjunto de índices i é um subconjunto de $\{0, \dots, n\}$.

Observamos que a imagem inversa de cada $i \in \mathbb{Z}$ é uma coleção de superfícies com bordo de genus zero (possíveis círculos ou "wedges" de círculos) e para cada intervalo $(j, j+1)$ a imagem inversa é uma coleção não vazia de cilindros.

Consideramos a fatoração de Stein (ou grafo de Lyapunov) de $\bar{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, definimos uma relação de equivalência no domínio S^2 por $x_1 \sim x_2$ se $f(x_1) = f(x_2)$ e os pontos x_1 e x_2 pertencem a mesma componente conexa de $f^{-1}(x_1)$. O espaço quociente $S^2 / \sim$ é um grafo, denotado por Γ , que neste caso é uma árvore. Definimos a aplicação $\bar{f}_s : \Gamma_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\bar{f}_s(\bar{x}) = \bar{f}(x)$, onde $\bar{x}$ é a classe de $x \in S^2$ e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \bar{f}_s & \\ \Gamma_{\bar{f}} & & \end{array}$$

Em Γ é dado uma ordem parcial induzida por $\bar{f}$ e pela ordem de $\mathbb{R}$.

Os vértices que correspondem às superfícies que contém os ∂D_i^2 com $a_i \neq 0$ é destacado em vermelho.

Pelos **Passos 1, 2, 3, 4** e o Lema 1.1.4 temos uma abordagem para mudar, homotopicamente, a aplicação $\bar{f}$, sem alterá-la no interior de D_i . Estas mudanças são parametrizadas pela fatoração de Stein que por fim resulta em um grafo linear e estritamente crescente que liga os vértices extremos e passando por cada vértice vermelho de Γ , e isto é um grafo que corresponde a uma aplicação especial, é fácil ver que $\tilde{f}$ é especial. ■

1.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de T^2 em W

Também neste caso a cada classe de homotopia de uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ será associado um polinômio. A partir deste polinômio será construída uma aplicação que terá boas propriedades e será chamada de especial. Em seguida, será provado que em cada classe de homotopia $[f]$ existe uma aplicação especial que pode ser dada a partir do

polinômio associado a classe $[f]$.

Eventualmente, nesta seção e nas próximas seções, será considerado o homomorfismo induzido por $f : S \rightarrow W_n$ em grupo fundamental, para isso é necessário fixar pontos bases de S e W_n e considerar f baseada. Para simplificar não é denotado os pontos bases dos espaços.

Polinômio associado a uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$

Sejam uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$, o grupo fundamental $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $f_\pi : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(W)$ a induzida de f no grupo fundamental. Vamos supor que $l \in \mathbb{N}$ é tal que $\langle l \rangle = f_\pi(\pi_1(T^2))$ com $f_\pi(1, 0) = a$, $f_\pi(0, 1) = b$ e $\text{mdc}\{a, b\} = l$. Como $\text{mdc}\{a, b\} = l$, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $x_0a + y_0b = l$. A base considerada em $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é a canônica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ tal que geometricamente é representada pelos seguintes laços:

Se escolhermos o conjunto de pares $B = \left\{ (x_0, y_0), \left(\frac{-b}{l}, \frac{a}{l} \right) \right\}$ como base para o $\pi_1(T^2)$, então temos $f_\pi(x_0, y_0) = x_0a + y_0b = l$ e $f_\pi\left(\frac{-b}{l}, \frac{a}{l}\right) = \frac{-ba}{l} + \frac{ab}{l} = 0$, isto significa que se considerarmos o toro como o quociente de $I \times I$ identificando os bordos opostos, então a mudança para a base B é apenas a troca de $I \times I$ por um losango e identifica-se os bordos opostos, onde os lados horizontais seriam o laço representado por (x_0, y_0) e os lados verticais seriam o laço representado por $\left(\frac{-b}{l}, \frac{a}{l}\right)$.

Observe que esta mudança significa um homeomorfismo no domínio de f .

Dessa maneira dada uma aplicação como acima, sempre podemos escolher como modelo uma aplicação que leva o lado horizontal do quadrado $I \times I$, que é o círculo longitudinal no toro que corresponde ao gerador $\alpha = (1, 0) \in \pi_1(T^2)$, na S^1 e outro lado do quadrado que corresponde ao outro círculo gerador $\beta = (0, 1) \in \pi_1(T^2)$ no ponto P , como na ilustração

Figura 1.2:

A partir da aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ construímos uma aplicação $f_{S^2} : S^2 \rightarrow W$ da seguinte forma:

- Identificamos o conjunto $T^2 \setminus \beta$ com $S^2 \setminus (D^1 \cup D^2)$, onde D^i são discos de dimensão 2 tal que $D^1 \cap D^2 = \emptyset$, como na figura abaixo

- Definimos a aplicação f_{S^2} no conjunto $D^1 \cup D^2$ como sendo a aplicação constante em P , isto é, $f_{S^2}(D^1 \cup D^2) = P \in W$.
- Para todo $x \in S^2 \setminus (D^1 \cup D^2)$ definimos $f_{S^2}(x) := f(x)$.

Definição 1.2.1. *Sejam uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ e o polinômio $p_{[f_{S^2}]}(t)$. Então $p_{[f]}(t) = p_{[f_{S^2}]}(t)$ é o polinômio associado a $[f]$, como na seção anterior.*

Representação quando $f_\pi = 0$

Consideremos as classes de homotopia $[f] \in [T^2, W]$ tais que $f_\pi : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(W)$ é o homomorfismo nulo. Neste caso podem ocorrer as seguintes situações:

- Se, a menos de homotopia, $f(T^2) \subset W \setminus S^1$ ou $f(T^2) \subset W \setminus S^2$, então f é homotópica a uma função constante.
- Se, a menos de homotopia, $f(T^2) = S^2 \subset W$, então usando as técnicas das demonstrações dos Lemas 1.1.2 e 1.1.1, a menos de homotopia temos $f^{-1}(P) = S^1 \vee S^1$ e $f^{-1}(W \setminus S^1) = D^2$

tal que $\partial D^2 = S^1 \vee S^1$ e $f|_{(D^2, \partial D^2)}$ recobre S^2 com grau diferente de zero, onde D^2 é um disco aberto. Quando o toro é pensado como o quadrado $I \times I$ identificando os bordos paralelos, a menos de homotopia, o conjunto $f^{-1}(P)$ são os bordos paralelos e $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é o interior do quadrado $I \times I$.

- Se, a menos de homotopia, $f(T^2) = S^1 \subset W$, então, desde que $f_\pi = 0$, f é homotópica a uma aplicação constante.

- Finalmente o caso em que f é fortemente sobrejetora. Neste caso f pode ser fatorada por S^2 , isto é, existe uma aplicação $q : S^2 \rightarrow W$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S^2 & \\ q \nearrow & \downarrow f' & \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

comuta.

Já vimos que q pode ser representada utilizando as técnicas das demonstrações dos Lemas 1.1.1 e 1.1.2 e a aplicação f' é representada pelo seu polinômio, isto é, a menos de homotopia f' é especial.

Logo, a menos de homotopia, f é tal que $q(S^1 \vee S^1)$ é um único ponto $N \in S^2$ para algum $N \in S^2$, $q|_{(T^2 \setminus S^1 \vee S^1)}$ é uma bijeção com $S^2 \setminus N$ e f' é uma aplicação especial representada como na seção 1.1 pelo seu polinômio $p_{[f']}(t) = p_{[f]}(t)$.

Construção de $f : T^2 \rightarrow W$ a partir de $q(t)$ e $l \in \mathbb{N}$

Sejam um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a^n t^n$ e um número $l \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação f de T^2 em W obtida da figura

onde $f(\partial D) = P$, $f|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow W$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 1.1 (como aplicação de S^2 em W) e a imagem de cada cilindro C_i é $S^1 \subset W$ tal que cada um dos caminhos λ_i é levado pela f em $S^1 \subset W$ no sentido anti-horário e $i \in \{1, \dots, l\}$.

Quando $l = 0$, então $f(T^2 \setminus \overset{\circ}{D}) = P$, $f|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow W$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 1.1. Neste caso f é equivalente (por homotopia) a aplicação tal que $f(S^1 \vee S^1 (= \alpha \vee \beta)) = P$ e $f(T^2 \setminus S^1 \vee S^1)$ é construída a partir do polinômio $q(t)$.

Portanto por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$ e desde que $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$, então $f_\pi(\pi_1(T^2)) \simeq l\mathbb{Z}$, onde $f_\pi(\alpha) = l$ e $f_\pi(\beta) = 0$.

Definição 1.2.2. *Uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ será chamada especial se ela pode ser construída como acima, isto é, a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ e de l , onde $l \in \mathbb{N}$ é um gerador de $f_\pi(\pi_1(T^2))$ ou $l = 0$.*

Representação quando $f_\pi \neq 0$

Quando uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ é tal que $f_\pi \neq 0$, temos um subgrupo $Im(f_\pi) \subset \mathbb{Z}$. Logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $Im(f_\pi) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

Suponha que, a menos de homotopia, $f(T^2) = S^1 \subset W$. Neste caso temos a aplicação $f : T^2 \rightarrow S^1$ e podemos fazer uma aproximação de f , isto é, a menos de homotopia f é C^∞ . Com isso construímos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \overline{T} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \exp \\ T^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

onde $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é aplicação exponencial usual, $\overline{T}$ é o recobrimento cíclico infinito de T^2 (mais adiante apresentaremos mais informações sobre $\overline{T}$). Portanto $\bar{p}$ é um difeomorfismo local.

Dado um aberto $U \subset S^1$ e o aberto $V = f^{-1}(U)$ tal que $f|_V$ é C^∞ . Como $\exp$ e $\bar{p}$ são difeomorfismos locais, tomemos um respectivo aberto $U' \subset \mathbb{R}$ e um respectivo aberto

$V' \subset \overline{T}$. Usamos resultados de Teoria de Morse para tomar uma aplicação $G \cong F$ tal que G é uma aplicação de Morse. Temos então que podemos aproximar, usando o diagrama comutativo acima, a aplicação F por uma aplicação de Morse, obtendo assim $f : T^2 \rightarrow S^1$ uma aplicação de Morse circular.

Portanto para cada ponto $x \in S^1$ a imagem inversa $f^{-1}(x)$ pode ser uma união de l cópias de S^1 , isto é, $\bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$. Pela teoria de Morse temos que l é o mínimo de cópias de S^1 pertencente a imagem inversa $f^{-1}(x)$. Podendo, eventualmente, ter mais do que l .

Esta teoria que estuda aplicações de variedades fechadas M em S^1 é chamada "Circle Valued Morse Theory" e uma referência sobre este assunto é [17].

De agora em diante estaremos considerando aplicações $f : T^2 \rightarrow W$ fortemente sobrejetora.

Primeiramente vamos supor que $l = 1$ e da mesma forma como foi feito no início desta seção, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_\pi(1, 0) = 1$ e $f_\pi(0, 1) = 0$, onde $\alpha = (0, 1)$ e $\beta = (0, 1)$ são como na ilustração 1.2.

Consideremos $\overline{T}$ como na ilustração seguinte,

O espaço $\overline{T}$ é um espaço de recobrimento de T^2 relativo ao $\ker(f_\pi)$, isto é, um recobrimento cíclico infinito de T^2 tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T} & & \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

é comutativo.

Por construção do recobrimento $\overline{T}$, a imagem $(f \circ \overline{p})_\pi(\pi_1(\overline{T}))$ é nula. Portanto a aplicação $f \circ \overline{p}$ se levanta ao recobrimento universal $\widetilde{W}$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T} & \xrightarrow{\widetilde{f}_{\overline{p}}} & \widetilde{W} \\ \overline{p} \downarrow & \searrow f \circ \overline{p} & \downarrow p \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

é comutativo.

Como este diagrama comuta, aplicações $\widetilde{f}_{\overline{p}}$ e $\widetilde{g}_{\overline{p}}$ homotópicas induzem aplicações f e g homotópicas.

Portanto faremos homotopias na aplicação $\widetilde{f}_{\overline{p}}$ para encontrar $\widetilde{g}_{\overline{p}} \simeq \widetilde{f}_{\overline{p}}$ tal que $\widetilde{g}_{\overline{p}}$ irá induzir uma aplicação $g \simeq f$, onde g é especial.

O cilindro $\overline{T}$ é um recobrimento com $\mathbb{Z}$ -folhas de T^2 . Isto significa que basta conhecer como são as aplicações $\overline{p}$ e $\widetilde{f}_{\overline{p}}$ em uma região fundamental do recobrimento (que é um cilindro fechado), pois as aplicações restritas em cada cilindro se repetem nas outras regiões.

Fixaremos uma destas folhas e chamaremos de C a região destacada (cilindro fechado com bordos $\alpha_0 \sqcup \alpha_1$) da ilustração

Sem perda de generalidade, podemos considerar a região C para fazer modificações por homotopias, pois basta repetir analogamente estas modificações em cada cópia de C em $\overline{T}$.

Lema 1.2.1. *Seja uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ contínua e fortemente sobrejetiva com $l = 1$ (f_π sobrejetiva). Então existe $g \in [f]$ tal que $g^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de T^2*

homeomorfa a $\bigsqcup_{t=1}^n B_t^2$, onde $n \in \mathbb{N}$, e B_t^2 é o interior de discos D_t^2 onde $\partial D_t^2 \simeq S_t^1$ e se $i \neq j$ $S_i^1 \cap S_j^1 = \emptyset$. Além disso, $g(S_t^1) = P$ e $g|_{(D_t^2, \partial D_t^2)} : (D_t^2, \partial D_t^2) \rightarrow (S^2, P)$ tem grau ± 1 .

Demonstração: Assim como na demonstração do Lema 1.1.1 podemos usar os conceitos de diferenciabilidade local. Então tomemos um valor regular $y \in S^2 \subset W$. Então pelo Teorema de Sard y possui uma vizinhança 2-Euclidiana $V \subset S^2$ tal que V não possua valor crítico. Como S é compacto e y é valor regular $f^{-1}(y)$ é um número finito de pontos $\{x_1, \dots, x_t\} \subset T^2$. Considere uma vizinhança $B_1 \subset T^2$ de x_1 homeomorfa ao disco aberto de dimensão 2 tal que $f(B_1) \subset V$ e $\partial B_1 \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. Pelo Lema 5.3 de [6] tem-se que f pode ser deformada por homotopia em uma aplicação $f^1 : T^2 \rightarrow W$ tal que $f^1|_{(T^2 \setminus B_1)} = f|_{(T^2 \setminus B_1)}$, $(f^1)^{-1}(y) \cap B_1 = \{x_1\}$ e $f^1(B_1) \subset V$.

Repetindo o processo acima para x_2 e depois sucessivamente até x_t , existirá $B_1, \dots, B_t$ vizinhanças disjuntas, homeomorfas ao disco aberto de dimensão 2, de respectivamente $x_1, \dots, x_t$ tais que $f^t : T^2 \rightarrow W$ satisfaz:

- 1) $f^t|_{(T^2 \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_t))} = f|_{(T^2 \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_t))}$,
- 2) $(f^t)^{-1}(y) \cap B_i = \{x_i\}$ e $f^t(B_i) \subset V$, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$,
- 3) $f^t \cong f$.

Podemos tomar um caminho simples $c : I \rightarrow W$, tal que c conecta todos B_i e $c(I) \subset V \setminus \bigsqcup_{i=1}^t \overset{\circ}{B}_i$. Sem perda de generalidade podemos supor $V = \bigsqcup_{i=1}^t B_i \cup (c(I))$.

Considere a homotopia $H : W \times I \rightarrow W$ tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = r(x)$ onde $r : W \rightarrow W$ é uma aplicação tal que $r(V) = W \setminus S^1$ e $r|_{S^1} = (Id_W)|_{S^1}$, isto é r retrai todo aberto V em $W \setminus S^1$ e o resto mantém a identidade, como na ilustração 1.1.

Assim $f^t \cong f = H(., 0) \circ f \cong H(., 1) \circ f = r \circ f \cong r \circ f^t$.

Portanto a menos de homotopia $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de T^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{t=0}^n B_t^2$, onde n é finito, B_t^2 são discos abertos de dimensão 2. Além disso, por construção, B_t^2 é o interior de discos D_t^2 tal que os bordos $\partial D_t^2 \simeq S_t^1$ são dois a dois disjuntos, onde $f(S_t^1) = P$ e $f|_{D_t^2} : (D_t^2, S_t^1) \rightarrow (S^2, P)$ tem grau ± 1 . ■

Pelo diagrama comutativo 1.2 e pelo Lema 1.2.1, a menos de homotopia, $(f \circ \bar{p})^{-1}(W \setminus S^1) \cap C = \bigsqcup_{t=0}^n \bar{B}_t^2$, onde $\bar{B}_t^2 = \bar{D}_t^2$ tal que $\bar{D}_t^2$ são discos fechados com $\partial \bar{D}_t^2 = \bar{S}_t^1$ satisfazendo $(f \circ \bar{p})(\bar{S}_t^1) = P$, $(f \circ \bar{p})|_{(\bar{D}_t^2, \bar{S}_t^1)}$ tem grau ± 1 com $t \in \{1, \dots, n\}$.

Da mesma forma como feito na seção 1.1 podemos juntar os discos $\bar{D}_{t_i}^2$ tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}(\bar{D}_{t_i}^2) = S_i^2$ em um único disco e o grau neste novo disco é a soma dos graus, isto é, vale o Lema seguinte.

Lema 1.2.2. *Sejam uma aplicação $f : T^2 \rightarrow S^1 \subset W$ contínua, fortemente sobrejetiva com $l = 1$ e $\tilde{f}_{\bar{p}} : \bar{T} \rightarrow \bar{W}$ como antes. Então existe $\tilde{g}_{\bar{p}} \simeq \tilde{f}_{\bar{p}}$ tal que $\tilde{g}_{\bar{p}}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) \cap C \cong \bar{B}_{i_0}^2$ ou $\tilde{g}_{\bar{p}}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = \emptyset$, onde $B_{i_0}^2$ são interiores de discos fechados $\bar{D}_{i_0}^2$ com $\partial \bar{D}_{i_0}^2 \simeq \bar{S}_{i_0}^2$ e para $i \neq j$, $\bar{S}_{i_0}^1 \cap \bar{S}_{j_0}^1 = \emptyset$. Além disso, $\tilde{g}_{\bar{p}}(\bar{S}_{i_0}^1) = i$ e $i \in \{0, \dots, n\}$.*

Demonstração: Desde que $\tilde{f}_{\bar{p}}(C)$ é compacto existe um primeiro índice k e um último índice $k + n$ tal que S_k^2 e S_{k+n}^2 pertence a imagem de $\tilde{f}_{\bar{p}}$.

Pelo Lema 1.2.1, $f^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de T^2 homeomorfa a $\bigsqcup_{t=0}^n B_t^2$, onde n é finito, B_t^2 são discos abertos de dimensão 2, além disso, por construção, B_t^2 é o interior de discos D_t^2 tal que os bordos $\partial D_t^2 \simeq S_t^1$ são dois a dois disjuntos, onde $f(S_t^1) = P$ e $f|_{D_t^2} : (D_t^2, S_t^1) \rightarrow (S^2, P)$ tem grau ± 1 .

Portanto para cada $j \in \{k, \dots, k+n\}$, $\tilde{f}_{\bar{p}}^{-1}(S_j^2 \setminus \{j\})$ é uma subcoleção $\bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} B_l^2 \subset \bigsqcup_{t=0}^n B_t^2$.

Fixemos $j \in \{k, \dots, k+n\}$, juntaremos os discos $\bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} D_l^2$ em um único disco.

Como $T^2 \setminus f^{-1}(W \setminus S^1 - \{P\})$ é conexo por caminhos quaisquer dois pontos podem ser ligados por um caminho em $T^2 \setminus f^{-1}(W \setminus S^1 - \{p\})$. Portanto tomemos um caminho simples $c : I \rightarrow T^2$ tal que vale as seguintes propriedades:

i) $c(I) \subset T^2 \setminus f^{-1}(W \setminus S^1 - \{P\})$.

ii) $c(0) \in S_{n_j}^1 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} S_l^1$, $c\left(\frac{1}{r-1}\right) \in S_{n_j+1}^1 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} S_l^1, \dots, c\left(\frac{r-2}{r-1}\right) \in S_{n_j+r-1}^1 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} S_l^1$ e

$c(1) \in S_{n_j+r}^1 \subset \bigsqcup_{l=n_j}^{n_j+r} S_l^1$.

Por construção do caminho c , $\tilde{f}_{\bar{p}} \circ c \in \mathbb{R} \subset \bar{W}$. Como I é compacto segue que $\tilde{f}_{\bar{p}} \circ c(I)$ também é compacto tal que $\tilde{f}_{\bar{p}} \circ c(0) = \tilde{f}_{\bar{p}} \circ c(1) = j$. Portanto a menos de

homotopia, podemos considerar que $\tilde{f}_{\bar{p}} \circ c(I) = j$. Logo a menos de homotopia existe um único disco $D_j \subset T^2$ tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}(D_j) \subset S_j^2$, $\tilde{f}_{\bar{p}}(\partial D_j) = j$ e o grau de $\tilde{f}|_{D_j}$ é a soma dos graus $\deg \tilde{f}_{\bar{p}}|_{D_1^2} + \dots + \deg \tilde{f}_{\bar{p}}|_{D_{n_j}^2}$. Se esta soma for zero então, a menos de homotopia, $\tilde{f}_{\bar{p}}(D_j) = j$.

Repetimos este processo de junção para cada índice $j \in \{k, \dots, k+n\}$.

Portanto como $\tilde{f}_{\bar{p}} \circ p = \bar{p} \circ f$, a menos de homotopia, f é como queríamos. ■

Este Lema junta certos discos do Lema 1.2.1 em um único disco D_i tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_i, \partial D_i)}$ tenha grau igual a soma dos graus anteriores. Eventualmente esta soma pode ser nula. Mas quando isto acontecer podemos fazer uma homotopia tal que a imagem de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ não atinge $S_i^2 \setminus \{i\}$.

Como já vimos a imagem de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ é determinada pela imagem da região C . Agora $\tilde{f}_{\bar{p}}(C)$ é compacta, então existem inteiros k^+ e k^- tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_{k^+}, \partial D_{k^+})}$ e $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_{k^-}, \partial D_{k^-})}$ têm graus diferentes de zero.

A menos de escolha de ponto base de $\widetilde{W}$, como já vimos antes, podemos considerar $k^- = 0$ e $k^+ = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Logo a menos de homotopia $\tilde{f}_{\bar{p}}|_C$ é da seguinte forma

onde D_i recobre S_i^2 com grau não nulo, denotaremos este grau por a_i e a aresta β_0 recobre o intervalo $[0, 1] \subset \widetilde{W}$ injetivamente.

Podemos considerar $\partial D_0 \cap \alpha_0 \neq \emptyset$, pois caso contrário basta tomar um caminho simples $d : I \rightarrow \overset{\circ}{C} \setminus \left(\bigsqcup_{t=0}^j \overline{B}_{i_j}^2 \right)$ tal que $d(0) \in \partial \overline{D}_0$ e $d(1) \in \beta_0$ e fazer homotopias numa vizinhança da imagem de d tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}(d(I)) = 0 \in \mathbb{Z} \subset \widetilde{W}$.

Consideremos um caminho simples $c : I \rightarrow \overset{\circ}{C} \setminus \left(\bigsqcup_{t=0}^j \overline{B}_{i_j}^2 \right)$ tal que

- $c(0) \in \partial D_0$ e $c\left(\frac{i}{n}\right) \in \partial D_i$,
- $f(c((i-1, i))) = W \setminus \{P\}$ e
- $f|_{c((i-1, i))}$ é injetiva,

onde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $V \subset C$ uma vizinhança tubular de $c(I) \cup \left(\bigsqcup_{i=0}^n B_i \right)$ como segue

Fazemos uma mudança por homotopia dentro desta vizinhança V (se necessário tome uma vizinhança $V' \subset V$ tal que $\partial V' \cap \partial V = \emptyset$) tal que $V \simeq D \subset C$ tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}(\partial D) = 0 \in \mathbb{Z} \subset \widetilde{W}$.

Utilizando os resultados da seção 1.1, a aplicação $p \circ \tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow (W, P)$ é homotópica a uma aplicação especial (como aplicação de S^2 em W) e manteremos as mesmas notação de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ para estas aplicações homotópicas.

A imagem $\bar{p}(D)$ é um disco D' de dimensão 2 no toro T^2 .

Consideremos a aplicação $f|_{(T^2 \setminus D')} : (T^2 \setminus D') \rightarrow S^1$ e definimos uma aplicação $g : T^2 \rightarrow S^1$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (T^2 \setminus D') \\ P & \text{se } x \in D' \end{cases}$$

Assim como feito anteriormente, podemos usar a Teoria de Morse em S^1 , para determinar uma aplicação $g' : T^2 \rightarrow S^1$ tal que $g(D') = P$ e g' seja aplicação de Morse, onde $g'^{-1}(x) = S^1 \subset T^2$ para qualquer $x \in S^1 \setminus \{P\}$.

Definimos $g : T^2 \rightarrow W$ por

- $g|_{(T^2 \setminus D')} = g'|_{T^2 \setminus D'}$
- $g|_D = (f \circ \bar{p})|_D$.

Obtemos uma aplicação $g \simeq f$, onde g é especial com $p_{[g]}(t) = p_{[f]}(t) = p_{[f|_{(D, \partial D)}]}(t)$ e $f_\pi(\pi_1(T^2)) = \langle f_\pi(\alpha) \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$, isto é, $l = 1$.

Agora só falta analisar o caso em que $f_\pi \neq 0$ e f_π não é sobrejetora, isto é, $l \geq 2$.

Neste caso a imagem $f_\pi(\pi_1(T^2))$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$, logo a imagem é isomorfa a $\mathbb{Z}$. Seja $l \in \mathbb{N}$ o gerador desta imagem.

A menos de escolha de geradores podemos supor que $\langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(T^2)$ tal que $f_\pi(\alpha) = l$ e $f_\pi(\beta) = 0$.

Da mesma maneira que antes, podemos supor que $\alpha \subset f^{-1}(x)$, onde x é valor regular e que α e β são da forma como mostrado na figura abaixo

Sejam $\bar{T}$ o espaço de recobrimento cíclico infinito de T^2 relativo ao $\ker(f_\pi)$ e $\tilde{f}_{\bar{p}} : \bar{T} \rightarrow \tilde{W}$ o levantamento de $f \circ \bar{p}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{p}}} & \tilde{W} \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \downarrow p \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

é comutativo, onde $\bar{p} : \bar{T} \rightarrow T^2$ e $p : \tilde{W} \rightarrow W$ são aplicações de recobrimento.

Como $\bar{T}$ é o recobrimento cíclico infinito de T^2 existe uma região básica, que denotaremos por C , tal que é suficiente fazer alterações (por homotopias) na aplicação $\tilde{f}_{\bar{p}}$ restrita a C e depois repetir o processo para todas as outras cópias de $C \subset \bar{T}$.

A região C é um cilindro fechado, isto é, $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ tal que $S^1 \times \{-\epsilon\} \cup S^1 \times \{\epsilon\} \subset \bar{p}^{-1}(\beta)$ e $e \times [-\epsilon, \epsilon] = \bar{p}^{-1}(\alpha)$ para um ponto fixado $e \in S^1$, como na figura abaixo,

Assim, como antes, vamos nos concentrar somente nesta região C para fazer modificações.

Observemos que fixado uma região C e fixado um ponto $e \in S^1$ a imagem pela $\tilde{f}_{\bar{p}}$ do conjunto $e \times [-\epsilon, \epsilon]$ é um intervalo $[j, j + l] \subset \mathbb{R} \subset \widetilde{W}$ e a imagem pela $\tilde{f}_{\bar{p}}$ do conjunto $S^1 \times \{\epsilon\}$ e $S^1 \times \{-\epsilon\}$ são os pontos $j + l$ e j , respectivamente.

Podemos supor que a região C seja tal que $j = 0$, pois isto significa que escolhemos $j = 0$ como sendo ponto base de $\widetilde{W}$ e já vimos que no caso de classes de homotopias livres de aplicações independe da escolha do ponto base. Denotaremos os seguintes conjuntos $S^1 \times \{-\epsilon\} = \beta_0$, $S^1 \times \{\epsilon\} = \beta_1$ e $e \times [-\epsilon, \epsilon] = \alpha_0$.

Usando as mesmas técnicas que no caso de f_{π} ser sobrejetora, os conjuntos $C \cap \tilde{f}_{\bar{p}}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = B_i^2$ tal que B_i^2 são discos abertos de dimensão 2 que são interiores de discos disjuntos fechado D_i^2 com $\tilde{f}_{\bar{p}}(\partial D_i^2) = S_i^1$ e $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_i^2, S_i^1)}$ tem grau diferente de zero.

Da mesma forma juntamos estes discos num único disco $D \subset \bar{T}$ tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}(\partial D) = 0$ e $p \circ \tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow (W, P)$ é uma aplicação especial (como aplicação de S^2 em W).

Sejam $D' = \bar{p}(D)$ e a aplicação $f|_{(T^2 \setminus D')} : (T^2 \setminus D') \rightarrow S^1$. Definimos uma aplicação $g : T^2 \rightarrow S^1$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (T^2 \setminus D') \\ P & \text{se } x \in D' \end{cases}$$

Assim como feito anteriormente, podemos usar a Teoria de Morse Circular, para de-

terminar uma aplicação $g' : T^2 \rightarrow S^1$ tal que $g(D') = P$, g' seja aplicação de Morse e $g' \simeq g$.

Observemos que como $\tilde{f}_{\bar{p}}(C \setminus D) = [0, l]$ então $g'_\pi(\pi_1(T^2)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.
Portanto $g'^{-1}(x) = \bigsqcup_{j=1}^l S_j^1 \subset T^2$ para qualquer $x \in S^1 \setminus \{P\}$.

Agora definimos a aplicação $g : T^2 \rightarrow W$ por

$$- g|_{(T^2 \setminus D')} = g'|_{T^2 \setminus D'}$$

$$- g|_D = (\bar{p} \circ f)|_D.$$

Concluimos com uma aplicação $g \simeq f$, onde g é especial com $p_{[g]}(t) = p_{[f]}(t) = p_{[f|_{(D, \partial D)}]}(t)$ e $f_\pi(\pi_1(T^2)) = \langle f_\pi(\alpha) \rangle \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

Portanto a menos de homotopia temos f uma aplicação especial e segue o teorema.

Teorema 1.2.1. *Seja uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$, então existe uma aplicação especial $g \in [f]$.*

1.3 Representação das classes de homotopia de aplicações de T_g em W

Sejam T_g superfície fechada e orientável de gênero $g > 1$ e uma aplicação $f : T_g \rightarrow W$.

Assim como feito nas seções anteriores, associaremos um polinômio a $[f]$ e a partir deste polinômio encontraremos um elemento $g \in [f]$ com boas propriedades.

Polinômio associado a uma aplicação de T_g em W

Seja $f_\pi : \pi_1(T_g) \rightarrow \pi_1(W)$ o homomorfismo induzido por f em grupos fundamentais.

Uma apresentação grupo fundamental de uma superfície T_g fechada, conexa e orientável de gênero $g > 1$ é dado por

$$\pi_1(T_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g ; \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \rangle.$$

Uma superfície pode ser ilustrada como um polígono identificando os lados que são os

geradores de $\pi_1(T_g)$ são ilustrado como abaixo

Quando $f_\pi = 0$, então $f_\pi(\alpha_i) = f_\pi(\beta_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$. Caso $f_\pi \neq 0$, existe $l \in \mathbb{N}^*$ tal que $f_\pi(\pi_1(T_g)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

Vamos fazer assim como feito no caso do toro, isto é, fazer mudança de base nos geradores (no caso do toro geradores de $\pi_1(T^2)$), tal que somente um, a menos de homotopia, gerador é levado em $S^1 \subset W$ e os outros, a menos de homotopia, é levado em $P \in W$.

Para isso, como $\pi_1(T_g)$ não tem uma base, compomos o homomorfismo induzido por f em grupos fundamentais com a aplicação $\tau : \pi_1(T_g) \rightarrow H_1(T_g)$

Assim como foi feito no caso do toro, podemos considerar os geradores de $\pi_1(T_g)$ satisfazendo $f_\pi(\alpha_1) = l$ e $f_\pi(\alpha_i) = f_\pi(\beta_j) = 0$, onde $i \in \{2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, \dots, g\}$.

Identificamos o conjunto $T_g \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^g \beta_i \bigsqcup_{i=2}^g \alpha_i \right)$ com $S^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{2g-1} D_i$, onde D_i são discos de dimensão 2 e α_i, β_i são os geradores de $\pi_1(T_g)$.

Definimos $f_{S^2} : S^2 \rightarrow W$ da seguinte maneira;

$$f_{S^2}(x) = \begin{cases} P & , \text{ se } x \in \bigsqcup_{i=1}^{2g-1} D_i \\ f(x) & , \text{ se } x \in S^2 \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{2g-1} D_i \right) \end{cases}$$

Sejam $f : T_g \rightarrow W$ e $f_{S^2} : S^2 \rightarrow W$ como acima.

Definição 1.3.1. O polinômio $p_{[f_{S^2}]}(t)$ será o polinômio associado à $[f]$ e denotaremos por $p_{[f]}(t)$.

Construção de uma aplicação a partir de $p(t)$ e $l \in \mathbb{N}$

Dada uma superfície fechada e orientável T_g de gênero $g \geq 1$, então pelo teorema de classificação de superfície $T_g \cong \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g\text{-vezes}}$, onde $\#$ é a soma conexa.

Portanto o recobrimento cíclico infinito $\overline{T}_g$ de uma superfície T_g é como segue

onde a região destacada é uma região básica e será denotado por B .

Para definir uma aplicação $\overline{f}_{\overline{p}} : \overline{T}_g \rightarrow \widetilde{W}$ basta defini-lá somente na região B e depois estender $\overline{f}_{\overline{p}}$ nas outras cópias de B , por isso B é chamada de região básica.

Sejam um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a^n t^n$ e um número $l \in \mathbb{N}$.

Considere a aplicação $\overline{f}_{\overline{p}}$ definida na região B da seguinte maneira

onde $\overline{f}_{\overline{p}}(\partial D) = 0 \in \mathbb{Z} \subset (\widetilde{W}, 0)$, $\overline{f}_{\overline{p}}|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow \widetilde{W}$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 1.1 e a região $\overline{f}_{\overline{p}}|_{B \setminus D}$ é uma sobrejeção no intervalo $[0, l]$.

Por fim, definimos a aplicação $f : T_g \rightarrow W$ por

$$f(x) = p \circ \bar{f}_{\bar{p}}(\bar{x}),$$

onde $\bar{p} : \bar{T}_g \rightarrow T_g$ é recobrimento, $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ é recobrimento universal e $\bar{x} = \bar{p}^{-1}(x) \cap B$.

Portanto por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$ e $f_{\pi}(\pi_1(T_g)) = \langle l \rangle \subset \mathbb{Z}$, onde $f_{\pi}(\alpha_1) = l$ e $f_{\pi}(\alpha_i) = f_{\pi}(\beta_j) = 0$ para $i \in \{2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, \dots, g\}$.

Definição 1.3.2. *Uma aplicação $f : T_g \rightarrow W$ será chamada especial se ela pode ser construída como acima, isto é, a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ e de l , onde $l \in \mathbb{N}$ é um gerador de $f_{\pi}(\pi_1(T_g))$.*

Encontrando uma aplicação especial $g \in [f]$

Para encontrar uma aplicação especial $g \in [f]$ seguiremos os passos feitos na seção 1.2.

Seja T_g superfície fechada, conexa e orientável de gênero $g > 1$.

No caso em que a classe de homotopia $[f] \in [T_g, W]$ é tal que $f_{\pi} : \pi_1(T_g) \rightarrow \pi_1(W)$ é a aplicação nula pode ocorrer as seguintes situações:

- Se, a menos de homotopia, $f(T_g) \subset W \setminus S^1$ ou $f(T_g) \subset W \setminus S^2$, então f é homotópica a uma função constante.

- Se, a menos de homotopia, $f(T_g) = S^2 \subset W$, então usando as técnicas dos lemas 1.2.2 e 1.2.1, a menos de homotopia, temos $f^{-1}(P) = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g-\text{vezes}}$ e $f^{-1}(S^2 \setminus \{P\}) = B^2$ tal que

$T_g \setminus B^2 = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g-\text{vezes}}$ e $f|_{(B^2, S \setminus B^2)}$ recobre S^2 com grau diferente de zero.

- Se $f_{\pi} = 0$ e, a menos de homotopia, $f(T_g) = S^1 \subset W$, então f é homotópica a uma aplicação constante.

- Se $f_{\pi} = 0$ e para toda $g \in [f]$, g é sobrejetora. Então f pode ser fatorada por S^2 tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & S^2 \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow f' \\ T_g & \xrightarrow{f} & W \end{array},$$

comuta. Logo f é homotópica a uma aplicação $g : T_g \rightarrow W$ tal que $\bar{g}(\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g-\text{vezes}}) =$

$P \in S^2$, $\bar{g}|_{B^2}$ é uma bijeção, onde $B^2 = T_g \setminus \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g-\text{vezes}}$ e g' é representada como na seção anterior pelo seu polinômio $p_{[g']}(t) = p_{[f]}(t)$.

Quando uma aplicação $f : T_g \rightarrow W$ é tal que $f_\pi \neq 0$, temos o subgrupo $Im(f_\pi) \subset \mathbb{Z}$, logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $Im(f_\pi) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

No caso em que $f(T_g) = S^1 \subset W$ usamos resultados da Teoria de Morse Circular para encontrar uma aplicação especial.

Portanto, daqui em diante, nesta seção, consideraremos f fortemente sobrejetiva.

Primeiramente vamos supor que $l = 1$ e da mesma forma como foi feito na seção anterior, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_\pi(\alpha_1) = 1$ e $f_\pi(\gamma) = 0$, onde $\gamma \in \pi_1(T_g) \setminus \{\alpha_1\}$.

Seja $\overline{T_g}$ o espaço de recobrimento de T_g relativo ao $ker(f_\pi)$, isto é, um recobrimento cíclico infinito de T_g e temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_g} & & \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \\ T_g & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

comutativo. O espaço topológico $\overline{T_g}$ é como na figura 1.3

Por construção do recobrimento $\overline{T_g}$, a imagem $(f \circ \bar{p})_\pi(\pi_1(\overline{T_g}))$ é nula. Portanto a aplicação $f \circ \bar{p}$ se levanta ao recobrimento universal $\widetilde{W}$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_g} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{p}}} & \widetilde{W} \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \downarrow p \\ T_g & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

é comutativo.

Faremos homotopias na aplicação $\tilde{f}_{\bar{p}}$ para encontrar $\tilde{g}_{\bar{p}} \simeq \tilde{f}_{\bar{p}}$ tal que $\tilde{g}_{\bar{p}}$ irá induzir uma aplicação $g \simeq f$, onde g é especial.

Consideremos B a região destacada na ilustração 1.3 que é uma região básica para fazer as modificações por homotopias, pois basta repetir analogamente estas modificações em cada cópia de B em $\overline{T_g}$.

Lema 1.3.1. *Seja $f : T_g \rightarrow W$ aplicação contínua, fortemente sobrejetiva com $l = 1$. Então existe $g \in [f]$ tal que $g^{-1}(W \setminus S^1)$ é uma subvariedade de T_g homeomorfa a $\bigsqcup_{t=1}^n B_t^2$, onde n é finito, B_t^2 são discos abertos de dimensão 2 e B_t^2 é o interior de discos D_t^2 onde $\partial D_t^2 \simeq S_t^1$ e se $i \neq j$, $S_i^1 \cap S_j^1 = \emptyset$. Além disso, $g(S_t^1) = P$ e $g|_{D_t^2} : (D_t^2, \partial D_t^2) \rightarrow (S^2, P)$ tem grau ± 1 .*

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração do Lema 1.2.1. ■

Pelo diagrama comutativo 1.3 e pelo lema 1.3.1, a menos de homotopia, $(f \circ \bar{p})^{-1}(W \setminus S^1) \cap B = \bigsqcup_{t=0}^n \bar{B}_t^2$, onde n é finito, $\bar{B}_t^2$ são discos abertos de dimensão 2 e $\bar{B}_t^2$ é o interior de discos disjuntos dois a dois $\bar{D}_t^2$ onde $\partial \bar{D}_t^2 \simeq \bar{S}_t^1$. Além disso, $(f \circ \bar{p})(\bar{S}_t^1) = P$ e $(f \circ \bar{p})|_{(\bar{B}_t^2, \bar{S}_t^1)}$ tem grau ± 1 .

Lema 1.3.2. *Sejam $f : T_g \rightarrow S^1 \subset W$ aplicação contínua, fortemente sobrejetiva com $l = 1$ e $\tilde{f}_{\bar{p}} : \bar{T}_g \rightarrow \tilde{W}$ como antes. Então existe $\tilde{g}_{\bar{p}} \simeq \tilde{f}_{\bar{p}}$ tal que $\tilde{g}_{\bar{p}}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) \cap B \cong \bar{B}_{i_0}^2$ ou $\tilde{g}_{\bar{p}}^{-1}(S_i^2 \setminus \{i\}) = \emptyset$, onde $\bar{B}_{i_0}^2$ são discos abertos de dimensão 2 que são interiores de discos fechados $\bar{D}_{i_0}^2$ com $\partial \bar{D}_{i_0}^2 \simeq \bar{S}_{i_0}^2$ e, para $i \neq j$, $S_{i_0}^1 \cap S_{j_0}^1 = \emptyset$. Além disso, $\tilde{g}_{\bar{p}}(\bar{S}_{i_0}) = P$ e $i \in \{0, \dots, n\}$.*

Demonstração: Análoga a demonstração do Lema 1.2.2. ■

Este lema junta certos discos do Lema 1.3.1 em um único disco D_i tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_i, \partial D_i)}$ tenha grau igual a soma dos graus anteriores. Eventualmente esta soma pode ser nula. Mas quando isto acontecer podemos fazer uma homotopia tal que a imagem de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ não atinge $S_i^2 \setminus \{i\}$.

Como já vimos a imagem de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ é determinada pela imagem da região B . Agora $\tilde{f}_{\bar{p}}(B)$ é compacta, então existem inteiros k^+ e k^- tal que $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_{k^+}, \partial D_{k^+})}$ e $\tilde{f}_{\bar{p}}|_{(D_{k^-}, \partial D_{k^-})}$ têm graus diferentes de zero.

Lembramos que o conjunto $[T_g, W]$ independe da escolha do ponto base de $\tilde{W}$. Então a menos de escolha de ponto base de $\tilde{W}$, podemos considerar $k^- = 0$ e $k^+ = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Logo a menos de homotopia $\tilde{f}_{\overline{P}}$ restrita ao conjunto B é da seguinte forma

onde cada disco D_i recobre S_i^2 com grau não nulo. Denotaremos este grau por a_i e a aresta β_1^0 recobre o intervalo $[0, 1] \subset \widetilde{W}$ injetivamente.

Podemos considerar $\partial D_0 \cap \alpha_0 \neq \emptyset$, pois caso contrário basta tomar um caminho simples $d : I \rightarrow \overset{\circ}{C} \setminus \left(\bigsqcup_{t=0}^j \overline{B}_{i_j}^2 \right)$ tal que $d(0) \in \partial \overline{B}_0$ e $d(1) \in \beta_1^0$ e fazer homotopias numa vizinhança da imagem de d tal que $f(d(I)) = 0$.

Tomemos um caminho simples $c : I \rightarrow \overset{\circ}{C} \setminus \left(\bigsqcup_{t=0}^j \overline{B}_{i_j}^2 \right)$ tal que

- $c(0) \in \partial D_0$ e $c\left(\frac{i}{n}\right) \in \partial D_i$,
- $f(c((i-1, i))) = W \setminus \{P\}$ e
- $f|_{c((i-1, i))}$ é injetiva,

onde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $V \subset B$ uma vizinhança tubular de $c(I) \cup \left(\bigcup_{i=0}^n B_i \right)$ como segue

Podemos fazer uma homotopia, como foi feito no caso do toro, em V , tal que existe $D \subset B$ onde $\tilde{f}_{\overline{P}}(\partial D) = 0$. Utilizando os resultados do seção 1.1, a aplicação $\tilde{f}_{\overline{P}}|_{(D, \partial D)} :$

$(D, \partial D) \rightarrow (W, P)$ é homotópica a uma aplicação especial (como aplicação de S^2 em W) e manteremos as mesmas notação de $\tilde{f}_{\bar{p}}$ para estas aplicações homotópicas.

A imagem $\bar{p}(D)$ é um disco D' de dimensão 2 na superfície T_g , assim a aplicação $f|_{(T_g \setminus D')} : (T_g \setminus D') \rightarrow S^1$.

Consideremos a aplicação $f' : T_g \rightarrow S^1$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} P & \text{se } x \in D' \\ f(x) & \text{se } x \in T_g \setminus D' \end{cases}$$

Da mesma forma como feito na seção 1.2, podemos usar resultados da Teoria de Morse Circular, para determinar uma aplicação de Morse $g' : T_g \rightarrow S^1$ tal que $g'(D') = \{P\}$ e $g' \simeq f'$.

Sem perda de generalidade, $\bar{p}|_{D'} : D' \rightarrow D$ é um difeomorfismo.

Definimos $g : T_g \rightarrow W$ por

$$\begin{aligned} - g|_{(T_g \setminus D')} &= g'|_{T_g \setminus D'} \\ - g|_D &= (p \circ \bar{f}_{\bar{p}} \circ \bar{p}^{-1})|_D. \end{aligned}$$

Portanto $g \simeq f$, g é especial com $p_{[g]}(t) = p_{[f]}(t) = p_{[f|_{(D, \partial D)}]}(t)$ e $f_{\pi}(\pi_1(T_g)) = \langle f_{\pi}(\alpha) \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

Agora só falta o caso em que $f_{\pi} \neq 0$ e f_{π} não é sobrejetora, isto é, $l \geq 2$. Neste caso a imagem $f_{\pi}(\pi_1(T_g))$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$, logo a imagem é isomorfa a $\mathbb{Z}$. Suponha $l \in \mathbb{N}$ gerador desta imagem.

A menos de escolha de geradores, temos $f_{\pi}(\pi_1(T_g)) = \langle l \rangle \subset \mathbb{Z}$, onde $f_{\pi}(\alpha_1) = l$ e $f_{\pi}(\alpha_i) = f_{\pi}(\beta_j) = 0$ para $i \in \{2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, \dots, g\}$.

Sejam $\overline{T_g}$ o espaço de recobrimento cíclico infinito de T_g relativo ao $\ker(f_{\pi})$ e $\tilde{f}_{\bar{p}} : \overline{T_g} \rightarrow \widetilde{W}$ o levantamento de $f \circ \bar{p}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\overline{T}_g & \xrightarrow{\tilde{f}_{\overline{p}}} & \widetilde{W} \\
\downarrow \overline{p} & \searrow f \circ \overline{p} & \downarrow p \\
T_g & \xrightarrow{f} & W
\end{array}$$

é comutativo, onde $\overline{p} : \overline{T}_g \rightarrow T_g$ e $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ são aplicações de recobrimento.

Seja B a região básica de $\overline{T}_g$ como antes, tal que é suficiente fazer alterações na aplicação $\tilde{f}_{\overline{p}}$ restrita a B .

Assim como antes, vamos nos concentrar somente nesta região B para fazer modificações por homotopias, pois basta repetir as modificações nas outras cópias de B .

Observemos que fixado uma região B a imagem pela $\tilde{f}_{\overline{p}}$ do conjunto $e \times [-\epsilon, \epsilon]$ é um intervalo $[j, j+l] \subset \mathbb{R} \subset \widetilde{W}$ e a imagem pela $\tilde{f}_{\overline{p}}$ do conjunto $S^1 \times \{\epsilon\}$ e $S^1 \times \{-\epsilon\}$ são os pontos $j+l$ e j , respectivamente.

Como já vimos que o conjunto $[T_g, W]$ independe da escolha do ponto base no espaço $\widetilde{W}$, podemos supor que $j = 0$ e denotaremos os seguintes conjuntos $S^1 \times \{-\epsilon\} = \beta_1^0$, $S^1 \times \{\epsilon\} = \beta_1$ e $e \times [-\epsilon, \epsilon] = \alpha_0$.

Assim como no caso de f_π ser sobrejetora podemos modificar por homotopias a aplicação inicial tal que os conjuntos $B \cap \tilde{f}_{\overline{p}}^{-1}(S_i^2) = \emptyset$ ou $B \cap \tilde{f}_{\overline{p}}^{-1}(S_i^2) = \overline{B}_{i_0}^2$ tal que $\overline{B}_{i_0}^2$ são discos abertos de dimensão 2 que são interiores de discos disjuntos fechados $\overline{D}_{i_0}^2$ com $\partial \overline{D}_{i_0}^2 \simeq \overline{S}_{i_0}^1$ e $\tilde{f}_{\overline{p}}(\overline{S}_{i_0}^1) = i$ e $i \in \{0, \dots, n\}$ e $\tilde{f}_{\overline{p}}|_{(\overline{D}_{i_0}^2, \overline{S}_{i_0}^1)}$ tem grau diferente de zero e como no caso de f_π ser sobrejetora unir estes discos $\overline{D}_{i_0}^2$ num único disco $D \subset B$ tal que $\tilde{f}_{\overline{p}}(\partial D) = 0$.

Observe que $\tilde{f}_{\overline{p}}(B \setminus D) = [0, l]$.

Utilizando os resultados do seção 1.1, a aplicação $\tilde{f}_{\overline{p}}|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow (W, P)$ é homotópica a uma aplicação especial (como aplicação de S^2 em W) e manteremos as mesmas notação de $\tilde{f}_{\overline{p}}$ para estas aplicações homotópicas.

A imagem $\overline{p}(D)$ é um disco D' de dimensão 2 na superfície T_g e sem perda de generalidade, $\overline{p}|_{D'} : D' \rightarrow D$ é um difeomorfismo. Assim a aplicação $f|_{(T_g \setminus D')} : (T_g \setminus D') \rightarrow S^1$.

Definimos a aplicação $f' : T_g \rightarrow S^1$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} P & \text{se } x \in D' \\ f(x) & \text{se } x \in T_g \setminus D' \end{cases}$$

Da mesma forma como feito na seção 1.2, podemos usar resultados da Teoria de Morse Circular, para determinar uma aplicação de Morse $g' : T_g \rightarrow S^1$ tal que $g'(D') = P$ e $g' \simeq f'$.

Definimos $g : T_g \rightarrow W$ por

- $g|_{(T_g \setminus D')} = g'|_{T_g \setminus D'}$
- $g|_D = (p \circ \bar{f}_{\bar{p}} \circ \bar{p}^{-1})|_D$.

Portanto $g \simeq f$, g é especial com $p_{[g]}(t) = p_{[f]}(t) = p_{[f|_{(D, \partial D)}]}(t)$ e $f_\pi(\pi_1(T_g)) = \langle f_\pi(\alpha) \rangle = \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$ e temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.1. *Seja uma aplicação $f : T_g \rightarrow W$. Então existe $g \in [f]$ tal que g é especial.*

Representação de aplicações de superfícies orientáveis em W_n

2.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de S^2 em W_n

Como na seção 1.1, nesta seção representaremos aplicações com domínio a esfera S^2 , mas mudaremos o contradomínio por outro espaço.

Consideremos o espaço topológico $W_n \cong \underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{n\text{-vezes}} \vee S^1$ dado como na ilustração abaixo:

Figura 2.1: Espaço W_n

Dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$ usaremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & W_n \\ & \nearrow f & \downarrow p_n \\ S^2 & \longrightarrow & W \end{array}$$

para descrever a classe de homotopia da aplicação f , onde $p_n : W_n \rightarrow W$ é o recobrimento de n -folhas e W é como antes.

Sejam $f : S^2 \rightarrow W_n$ contínua e $p_n : W_n \rightarrow W$ o recobrimento a n -folhas de W . Então f induz uma aplicação $f' : S^2 \rightarrow W$ tomando a composição natural $f \circ p_n$. Então f é o levantamento de f' , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & W_n \\ & \nearrow f & \downarrow p_n \\ S^2 & \xrightarrow{f'} & W \end{array}$$

comuta.

Na seção 1.1 foram representadas as classes de homotopia de aplicações $f' : S^2 \rightarrow W$. Usando levantamento de homotopia podemos representar a classe da aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$.

Portanto basta descrever a aplicação $p_n : W_n \rightarrow W$ e os levantamentos das homotopias para representar $f : S^2 \rightarrow W_n$.

A aplicação $p_n : W_n \rightarrow W$ é da seguinte forma:

i) Consideremos W_n como na ilustração abaixo.

Denotemos por $e_i^1 \subset W_n \setminus (\cup e_i^2 \setminus \{x_i\})$ o menor caminho que liga as 0-células x_i a x_{i+1} para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e e_n^1 o menor caminho que liga as 0-células x_n a x_1 .

Na ilustração o subconjunto e_i^2 é a esfera de dimensão dois tal que $x_i \in e_i^2$.

ii) observemos que $p_n(e_i^1) = S^1$ e $p_n(e_i^2) = S^2$ tal que $p_n|_{(e_i^1 \setminus \{x_i\})}$ é injetiva em S^1 e $p_n|_{e_i^2}$ é

injetiva em S^2 .

Consideremos $f' = f \circ p_n : S^2 \rightarrow W$. Pelo Teorema 1.1.1 existe uma homotopia $H : S^2 \times I \rightarrow W$ com $H(x, 0) = f'(x)$, $H(x, 1) = g'(x)$ tal que $g' : S^2 \rightarrow W$ é uma aplicação especial.

Como f é o levantamento de f' , podemos levantar a homotopia H a uma homotopia $\tilde{H} : S^2 \times I \rightarrow W_n$ com $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, $\tilde{H}(x, 1) = g(x)$ tal que g é levantamento de g' , isto é, $g' = g \circ p_n$.

Temos o diagrama

comutativo, $\tilde{f}$ é o levantamento de f e o levantamento de f' ao recobrimento universal $\tilde{W}$.

Analogamente feito na seção 1.1 podemos calcular a homologia com coeficientes locais $H_*(W_n, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]_{\rho_{\pi_1}})$. É simples verificar que a esta homologia no nível 2 é dada por $H_2(W_n, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]_{\rho}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]}_{n\text{-vezes}}$ e a homologia de S^2 no nível 2 é a mesma que na seção 1.1, isto é, $H_2(S^2, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]_{\rho_{\pi_1}}) \simeq \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$.

Logo se fizermos análogo como na seção 1.1, então dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$ associaremos uma n-upla de polinômios $(p_1(t), \dots, p_n(t)) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]}_{n\text{-vezes}}$ ao invés de associar somente um polinômio como antes.

Cada n-upla $(p_1(t), \dots, p_n(t))$ tem uma interpretação geométrica no espaço $\tilde{W}$.

Fixado um recobrimento $p' : \tilde{W} \rightarrow W_n$ de forma que a primeira esfera $S_0^2 \in \tilde{W}$ seja recoberta, pela f , com grau diferente de zero, isto é, o primeiro monômio de $p_1(t)$ é não nulo e a potência de t seja 0. Seja $p_j(t) = a_0^{(j)} + \dots + a_k^{(j)} t^k$ a j-ésima coordenada de $(p_1(t), \dots, p_n(t))$, então a interpretação geométrica é que a aplicação recobre as esferas S_{j+ni}^2 com grau a_i^j , para $i \in \{0, \dots, k\}$.

Escolhemos $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ tal que o polinômio associado a $f' : S^2 \rightarrow W$ tal que o primeiro monômio seja $a_0 \neq 0$.

Como o diagrama acima é comutativo, existe uma relação entre o polinômio associado a f e o polinômio associado a f' . Seja $p_{[f']}(t) = a_0 + \dots + a_m t^m$ o polinômio associado a f' , então $a_{j+ni_j} = a_{j+ni_j}^{(j)}$, onde $(p_1(t), \dots, p_n(t))$ é o polinômio associado a f , $p_j(t) = a_0^{(j)} + \dots + a_{k_j}^{(j)} t^{k_j}$ é a j -ésima coordenada, $j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \in \{0, \dots, k_j\}$.

Portanto podemos definir o polinômio $p_{[f]}$ como na seção 1.1, isto é:

Definição 2.1.1. *Dados uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$ e $f' : S^2 \rightarrow W$ como antes. O polinômio associado a classe $[f]$ é o polinômio $p_{[f']}(t)$.*

Da mesma forma, desde que o diagrama anterior é comutativo, podemos usar o conceito de aplicação especial para a aplicação f utilizando o conceito de aplicação especial da aplicação f' . Segue a definição:

Definição 2.1.2. *Dada uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$. Dizemos que f é especial se $f' = f \circ p_n : S^2 \rightarrow W$ for especial, onde $p_n : W_n \rightarrow W$ é o recobrimento a n -folhas de W .*

Fixados os recobrimentos $p_n : W_n \rightarrow W$ e $p' : \widetilde{W} \rightarrow W_n$ e dado um polinômio $q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_j t^j$, construímos, do mesmo modo da seção 1.1, a aplicação $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ e definimos $f : S^2 \rightarrow W_n$ por $p' \circ \tilde{f}$. É fácil ver que $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Apesar das definições acima requisitarem as definições da seção 1.1, a interpretação geométrica é diferente.

Suponha que p_n seja tal que $p_n(S_i^2) = e_{i+1}^2$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Consideremos os polinômios $q_1(t) = a_0$ e $q_2(t) = b_0 + b_1 t$. Neste caso a aplicação especial $f'_1 : S^2 \rightarrow W$ proveniente do polinômio q_1 recobre a esfera $S^2 \subset W$ com grau a_0 e a aplicação especial $f_1 : S^2 \rightarrow W_n$ proveniente do polinômio q_1 recobre a esfera e_1^2 com grau a_0 .

No caso da aplicação especial $f'_2 : S^2 \rightarrow W_n$ proveniente do polinômio q_2 existem dois discos fechados $D'^1, D'^2 \in S^2$ tal que $f'_2|_{(D'_i, \partial D'_i)}$ recobre $S^2 \in W$ com grau a_i e $f'_2|_{S^2 \setminus (D'_1 \cup D'^2)}$ recobre $W \setminus S^2$ e a aplicação especial $f_2 : S^2 \rightarrow W_n$ existem dois discos $D_1, D_2 \in S^2$ tal que $f_2|_{(D'_i, \partial D'_i)}$ recobre $e_i^2 \in W_n$ com grau a_i e $f_2|_{S^2 \setminus (D_1 \cup D_2)}$ recobre e_1^1 .

Teorema 2.1.1. *Seja uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$. Então existe aplicação $g \in [f]$ especial.*

Demonstração: Dadas uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W_n$ e o recobrimento de n - folhas $p_n : W_n \rightarrow W$. Consideremos a aplicação $f' = p_n \circ f$.

Pelo Teorema 1.1.1 existe $g' \in [f']$ especial. Seja $\tilde{g}' : S^2 \rightarrow \tilde{W}$ o levantamento de g' construído a partir do polinômio $p_{[g']}(t)$.

Basta tomar $g = p \circ \tilde{g}'$, onde $p' : \tilde{W} \rightarrow W_n$ é o recobrimento universal. ■

2.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de T^2 em W_n

Consideremos o espaço topológico $W_n \cong \underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{n\text{-vezes}} \vee S^1$ dado como na ilustração 2.1 e o espaço W com antes.

Dada uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W_n$, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & W_n \\ & \nearrow f & \downarrow p_n \\ T^2 & \longrightarrow & W \end{array}$$

onde $p_n : W_n \rightarrow W$ é o recobrimento de n -folhas de W , representada como na seção 2.2.

Portanto f induz uma aplicação $f' : T^2 \rightarrow W$ tomando a composição natural $f \circ p_n$ e f' é o levantamento de f' , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & W_n \\ & \nearrow f & \downarrow p_n \\ T^2 & \xrightarrow{f'} & W \end{array}$$

comuta.

Pela seção 1.2 temos a representação da classe de homotopia da aplicação $f' : T^2 \rightarrow W$. Usando levantamento de homotopia podemos representar as classes da aplicação $f : T^2 \rightarrow W_n$.

Portanto basta descrever a aplicação $p_n : W_n \rightarrow W$ e usar levantamentos das homoto-

pias para representar $f : S^2 \rightarrow W_n$.

Usamos o diagrama comutativo acima para definir o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$, como segue:

Definição 2.2.1. *Sejam uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W$ e o polinômio $p_{[f]}(t)$. Então $p_{[f]}(t) = p_{[f']}(t)$ é o polinômio associado a $[f]$.*

Construção de $f : T^2 \rightarrow W_n$ a partir de $q(t)$ e $l \in \mathbb{N}$

Dados um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a^j t^j$ e um número $l \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação f de T^2 em W_n obtida da figura

onde $f(\partial D) = P$, $f|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow W$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 2.1 (como aplicação de S^2 em W_n) e a imagem dos cilindros C_i é $W_n \setminus \bigcup_{k=1}^l e_k^2 \setminus \{k\}$ tal que cada um dos caminhos λ_i é levado pela f em $S^1 \subset W$ no sentido anti-horário e $i \in \{1, \dots, l\}$.

Quando $l = 0$, então $f(T^2 \setminus \mathring{D}) = P$, $f|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow W$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 2.1. Neste caso é equivalente (a menos de homotopia) a aplicação tal que $f(S^1 \vee S^1) = P$ e $f|_{T^2 \setminus S^1 \vee S^1}$ é construída a partir do polinômio $q(t)$.

Portanto por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$ e desde que $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$, então $f_\pi(\pi_1(T^2)) = l\mathbb{Z}$, onde $f_\pi(\alpha) = l$ e $f_\pi(\beta) = 0$.

Definição 2.2.2. *Uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W_n$ será chamada especial se ela pode ser construída como acima, isto é, a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ e de l , onde $l \in \mathbb{N}$ é um gerador de $f_\pi(\pi_1(T^2))$ ou $l = 0$.*

Observe que se $f : T^2 \rightarrow W_n$ é especial construída a partir de $p_{[f]}(t)$ e $l \in \mathbb{N}$, então $(p_n)_\pi(l) = nl \in \pi_1(W)$ e $f' : T^2 \rightarrow W$ é especial construída a partir de $p_{[f]}(t)$ e $nl \in \mathbb{N}$.

Representação de $f : T^2 \rightarrow W_n$

Dada uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W_n$, dividiremos em casos para provar a existência de uma aplicação especial $g \in [f]$.

Primeiro Caso: Suponha que $f_\pi = 0$.

Neste caso temos o seguinte diagrama comutativo

Portanto, f é especial se, e somente se, f' é especial. Pelo Teorema 1.2.1 existe $g' \in [f']$ especial. Logo, utilizando levantamento de homotopias, existe $g \in [f]$ especial.

Observemos que a aplicação especial $f : T^2 \rightarrow W_n$ pode não ser sobrejetora, mas aplicação especial $f' : T^2 \rightarrow W$ ser sobrejetora. Isto acontece quando $p_{[f]}(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_jt^j$, onde $a_0 \neq 0$, $a_j \neq 0$ para algum $0 < j < n$.

Segundo Caso: Suponha que $f_\pi \neq 0$.

Seja $f : T^2 \rightarrow W_n$ tal que $f_\pi \neq 0$. Identificando $\pi_1(W_n)$ com $\mathbb{Z}$, temos $f_\pi(\pi_1(T^2)) \simeq \langle l \rangle \simeq \mathbb{Z}$, onde $0 \neq l \in \mathbb{N}$.

Da maneira análoga da seção 1.2 podemos supor que os geradores $\alpha, \beta \in \pi_1(T^2)$ são tal que $f_\pi(\alpha) = l$ e $f_\pi(\beta) = 0$. Assim levantamos f ao $\bar{T}$ recobrimento cíclico infinito de T^2 relativo ao $\ker(f_\pi)$ e temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & & \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

Por construção do recobrimento $\bar{T}$, a imagem $(f \circ \bar{p})_\pi(\pi_1(\bar{T}))$ é nula. Portanto a aplicação $f \circ \bar{p}$ se levanta ao recobrimento universal $\widetilde{W}$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{p}}} & \widetilde{W} \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \downarrow p_n \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

comuta.

Portanto temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{f}_{\bar{p}} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \bar{T} & \xrightarrow{\quad} & W_n & \xleftarrow{p'} & \widetilde{W} \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f & \downarrow p_n & & \downarrow p \\ T^2 & \xrightarrow{f'} & W & & \end{array}$$

Consideremos $f' = f \circ p_n : T^2 \rightarrow W$. Pelo Teorema 1.2.1 existe uma homotopia $H : T^2 \times I \rightarrow W$ com $H(x, 0) = f'(x)$, $H(x, 1) = g'(x)$ tal que $g' : T^2 \rightarrow W$ é uma aplicação especial.

A aplicação especial g' pode ser construída. A construção é feita por modificações, através dos Lemas 1.2.1, 1.2.2 e algumas técnicas geométricas, na região $C \subset \bar{T}$ para encontrar uma aplicação $\tilde{g}_{\bar{p}} : \bar{T} \rightarrow \widetilde{W}$, tal que $\tilde{g}_{\bar{p}} \in [\tilde{f}_{\bar{p}}]$ e a partir da aplicação $\bar{p}$ são feitas modificações em T^2 e compondo com a aplicação p teremos a aplicação especial g' .

Podemos repetir este processo e as técnicas usadas na seção 1.2 e utilizando o diagrama 2.2 e a aplicação p_n encontramos uma aplicação especial $g : T^2 \rightarrow W_n$ tal que $g \in [f]$.

Portanto temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Seja uma aplicação $f : T^2 \rightarrow W_n$. Então existe aplicação $g \in [f]$ é especial.*

2.3 Representação das classes de homotopia de aplicações de T_g em W_n

Sejam T_g uma superfície fechada, conexa e orientável de gênero $g > 1$ e uma aplicação $f : T_g \rightarrow W_n$.

Associaremos um polinômio a $[f]$ e a partir deste polinômio encontraremos um elemento $g \in [f]$ com boas propriedades.

Polinômio associado a uma aplicação de T_g em W_n

O grupo fundamental de uma superfície T_g fechada e orientável de gênero $g > 1$ é dado por

$$\pi_1(T_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g ; \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \rangle.$$

De maneira análoga como foi feito para associar um polinômio a uma aplicação de T^g em W , podemos escolher convenientemente os geradores de $\pi_1(T_g)$ tal que α_1 pertence a imagem inversa $f^{-1}(x)$, onde x é valor regular de f . A superfície pode ser obtida de polígono identificando os lados que são os geradores de $\pi_1(T_g)$ como ilustrado antes.

Quando $f_\pi = 0$, então $f_\pi(\alpha_i) = f_\pi(\beta_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$. Caso $f_\pi \neq 0$, existe $l \in \mathbb{N}^*$ tal que $f_\pi(\pi_1(T_g)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$.

Assim como foi feito no caso do toro, podemos considerar os geradores de $\pi_1(T_g)$ satisfazendo $f_\pi(\alpha_1) = l$ e $f_\pi(\alpha_i) = f_\pi(\beta_j) = 0$, onde $i \in \{2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, \dots, g\}$.

Dada uma aplicação $f : T^g \rightarrow W_n$, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & W_n \\ & \nearrow f & \downarrow p_n \\ T_g & \longrightarrow & W \end{array}$$

onde $p_n : W_n \rightarrow W$ é o recobrimento de n -folhas de W .

Definição 2.3.1. O polinômio $p_{[f](t)}$ será o polinômio associado à $[f]$ e denotaremos

$p_{[f]}(t)$.

Construção de uma aplicação a partir de um $p(t)$ e $l \in \mathbb{N}$

Dada uma superfície fechada e orientável T_g de gênero $g \geq 1$, então pelo teorema de classificação de superfície $T_g \simeq \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g\text{-vezes}}$, onde $\#$ é a colagem pelo bordo de um disco removendo o seu interior.

Portanto o recobrimento cíclico infinito $\overline{T_g}$ de uma superfície T_g é como segue

onde a região destacada é uma região básica e será denotado por B .

Para definir uma aplicação $\overline{f_{\overline{p}}} : \overline{T_g} \rightarrow \widetilde{W}$ basta defini-lá somente na região B e depois estender analogamente a definição nas outras cópias de B , por isso B é chamada de região fundamental.

Sejam um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a^j t^j$ e um número $l \in \mathbb{N}$.

Considere a aplicação $\overline{f_{\overline{p}}}$ definida na região B da seguinte maneira

onde $\bar{f}_{\bar{p}}(\partial D) = \{P\}$, $\bar{f}_{\bar{p}}|_{(D, \partial D)} : (D, \partial D) \rightarrow \widetilde{W}$ é construída a partir do polinômio $q(t)$ como na seção 1.1 e $\bar{f}_{B \setminus D}$ é sobrejetiva no intervalo $[0, ln]$.

Por fim, definimos a aplicação $f : T_g \rightarrow W_n$ por

$$f(x) = p' \circ \bar{f}_{\bar{p}}(\bar{x}),$$

onde $p' : \widetilde{W} \rightarrow W_n$ é aplicação de recobrimento universal, $\bar{p} : \overline{T_g} \rightarrow T_g$ é aplicação recobrimento e $\bar{x} = \bar{p}^{-1}(x) \cap B$.

Portanto por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$ e $f_{\pi}(\pi_1(T_g)) = \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W)$, onde $f_{\pi}(\alpha_1) = l$ e $f_{\pi}(\alpha_i)f_{\pi}(\beta_j) = 0$ para $i \in \{2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, \dots, g\}$.

Definição 2.3.2. Uma aplicação $f : T_g \rightarrow W_n$ será chamada especial se ela pode ser construída como acima, isto é, a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ e de l , onde $l \in \mathbb{N}$ é um gerador de $f_{\pi}(\pi_1(T_g))$.

Encontrando uma aplicação especial $g \in [f]$

Dada uma aplicação $f : T_g \rightarrow W_n$, dividiremos em dois casos para provar a existência de uma aplicação especial $g \in [f]$.

Os dois casos serão como foi feito em aplicações de T^2 em W_n .

Primeiro Caso: Suponha que $f_{\pi} = 0$.

Tomamos o seguinte diagrama comutativo

Analogamente o caso de aplicações de T^2 em W^n , prova-se que existe $g \in [f]$ aplicação especial.

Segundo Caso: Suponha que $f_\pi \neq 0$.

Seja $f : T_g \rightarrow W_n$ tal que $f_\pi \neq 0$. Identificando $\pi_1(W_n)$ com $\mathbb{Z}$, temos $f_\pi(\pi_1(T_g)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(W_n)$, onde $0 \neq l \in \mathbb{N}$.

Da maneira análoga da seção 1.2 podemos supor que os geradores $\alpha_i \in \pi_1(T_g)$ são tal que $f_\pi(\alpha_0) = l$ e $f_\pi(\alpha_i) = 0$ para $i \neq 0$. Assim levantamos f ao $\overline{T_g}$ recobrimento cíclico infinito de T_g relativo ao $\ker(f_\pi)$ e temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_g} & & \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \\ T_g & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

Por construção do recobrimento $\overline{T_g}$, a imagem $(f \circ \bar{p})_\pi(\pi_1(\overline{T_g}))$ é nula. Portanto a aplicação $f \circ \bar{p}$ se levanta ao recobrimento universal $\widetilde{W}$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_g} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{p}}} & \widetilde{W} \\ \bar{p} \downarrow & \searrow f \circ \bar{p} & \downarrow p_n \\ T_g & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

comuta.

Portanto temos seguinte diagrama:

Pelo Teorema 1.3.1 existe uma homotopia $H : S^2 \times I \rightarrow W$ com $H(x, 0) = f'(x)$, $H(x, 1) = g'(x)$ tal que $g' : T^2 \rightarrow W$ é uma aplicação especial.

A aplicação especial g' pode ser construída. A construção é feita por modificações, através dos Lemas 1.3.1, 1.3.2 e algumas técnicas geométricas, na região $B \subset \overline{T_g}$ para encontrar uma aplicação $\tilde{g}_{\tilde{p}} : \overline{T_g} \rightarrow \widetilde{W}$, tal que $\tilde{g}_{\tilde{p}} \in [\tilde{f}_{\tilde{p}}]$ e a partir da aplicação $\tilde{p}$ são feitas modificações em T^2 e compondo com a aplicação p teremos a aplicação especial g' .

Podemos repetir este processo e as técnicas usadas na seção 1.3 e utilizando o diagrama acima e compondo com a aplicação p_n encontramos uma aplicação especial $g : T_g \rightarrow W_n$ tal que $g \in [f]$.

Portanto temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *Seja $f : T_g \rightarrow W_n$ uma aplicação. Então existe aplicação $g \in [f]$ especial.*

Representação de aplicações de superfícies não orientáveis em W

Nas próximas duas seções, assim como na seção anterior, dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ é associado um polinômio $p_{[f]}(t)$ a classe de homotopia de f , mas este polinômio tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Apresenta-se uma aplicação, chamada aplicação especial, a qual no capítulo de ?? mostra-se que estas aplicações realizam o conjunto minimal de raízes, que é construída a partir de um polinômio. Depois, mostra-se que existe uma aplicação especial em cada classe de homotopia $[\mathbb{R}P_g^2, W]$.

O motivo de considerar polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ é explicado no apêndice.

3.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W

Consideremos o espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$ e uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$. Então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

onde $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ é o recobrimento duplo orientável.

Como $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, segue que $f_\pi = 0$. Logo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \widetilde{W} \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

comuta.

Para fazer modificações, por homotopias, na aplicação f basta fazer modificações numa região fundamental de S^2 e repetir nas outras regiões e utilizando a aplicação Π para modificar f . Neste caso como Π é recobrimento duplo a região que vamos considerar é a calota superior de S^2 , isto é, se $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1\}$, então a região será $CN = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\} \subset S^2$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $f \circ \Pi(S^1) = P$, onde $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1 \text{ e } z = 0\} \subset S^2$.

Identificamos $CN \setminus S^1$ com $S^2 \setminus N$, para algum $N \in S^2$. Consideremos a aplicação $h : S^2 \rightarrow W$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in S^2 \setminus N \\ P & \text{se } x = N \end{cases}$$

e seu polinômio $p_{[h]}(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$. Seja $\bar{p}_{[h]}(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1t + \dots + \bar{a}_nt^n$ o polinômio tal que $\bar{a}_i$ é igual a a_i módulo 2.

Definição 3.1.1. Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$, definimos o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$ por $\bar{p}_{[h]}(t)$, onde $h : S^2 \rightarrow W$ é como antes e este polinômio será denotado por $p_{[f]}(t)$.

Agora a partir de um polinômio qualquer $q(t)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, construiremos

uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ tal que $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Dado um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$. Consideremos a aplicação $h : S^2 \rightarrow W$ construída a partir de $q(t)$, como feito na seção 1.1.

Identificamos a região $CN \setminus S^1$ com $S^2 \setminus N$, tal que $h(N) = P$.

Dado $y \in \mathbb{R}P^2$, então $\Pi^{-1}(y) = \{x, -x\}$ tal que $x \in CN \setminus S^1$ e $-x \in \mathbb{R}P^2 \setminus CN$ ou $\Pi^{-1}(y) \subset S^1$.

Definimos $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ por

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in CN \setminus S^1 \\ P & \text{se } \Pi^{-1}(y) \subset S^1 \end{cases}$$

Por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Definição 3.1.2. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ que pode ser construída como acima é chamada aplicação especial.*

Dada uma classe de homotopia $[f]$ de uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$, mostraremos que existe $g \in [f]$ tal que g é uma aplicação especial.

Seja uma homotopia $F : S^2 \times I \rightarrow W$ entre duas aplicações $f', g' : S^2 \rightarrow W$ tal que as modificações feitas por F em $CN \times I$ se repete na região $(S^2 \setminus CN) \times I$. Então utilizando a aplicação Π induzimos uma homotopia $\bar{F} : \mathbb{R}P^2 \times I \rightarrow W$ entre duas $f, g : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ tais que $f \circ \Pi = f'$ e $g \circ \Pi = g'$.

Consideremos uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ e a aplicação $h : S^2 \rightarrow W$ definida como antes a partir de f . Então pelo Teorema 1.1.1 existe uma aplicação especial $h' \in [h]$.

Identificamos o conjunto CN com $S^2 \setminus N$, onde $h(N) = h'(N) = P$. Definimos duas aplicações $f', g' : S^2 \rightarrow W$ por $f'(x) = f'(-x) = h(x)$ e $g'(x) = g'(-x) = h'(x)$, onde $x \in CN$ e $-x \in S^2 \setminus CN$. Dada uma homotopia entre h' e h , podemos induzir uma homotopia entre f' e g' . Portanto podemos induzir uma homotopia $\bar{F}$ tal que $\bar{F}(x, 0) = f(x)$ e $g(x) = \bar{F}(x, 1)$ tal que g é especial.

Logo segue o teorema:

Teorema 3.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ uma aplicação. Então existe $g \in [f]$ tal que g é uma aplicação especial.*

Observe que o polinômio associado a cada classe de homotopia de uma aplicação especial tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. E acima concluímos que g é especial. Isto se deve ao fato de que h construída a partir de f , como acima, possui a propriedade de que o polinômio associado a $[h]$ tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. No apêndice este fato fica esclarecido.

3.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W

Nesta seção representaremos classes de homotopias de aplicações de uma superfície compacta e não orientável em W .

Pelo Teorema de Classificação de Superfícies uma superfície não orientável é dada por

$$\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{g\text{-vezes}},$$

isto é, a soma conexa de g planos projetivos, para algum g finito.

Denotaremos a soma conexa de g planos projetivos por $\mathbb{R}P_g^2$.

No caso de $g = 1$ está resolvido, por isso consideremos $g \geq 2$.

Assim como na seção anterior, usaremos o recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$ para representar as classes de homotopia de aplicações $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$.

Temos as seguintes identificações;

- $\mathbb{R}P_2^2 \cong K$, onde K é a garrafa de Klein,
- $\mathbb{R}P_g^2 \cong T_k^2 \# \mathbb{R}P^2$, onde $g = 2k + 1$ e
- $\mathbb{R}P_g^2 \cong T_k^2 \# K$, onde $k \neq 2$ e $g = 2k$.

No caso da garrafa de Klein o recobrimento duplo orientável é o toro, como na figura abaixo:

Figura 3.1: Recobrimento duplo da garrafa de Klein

onde a parte destacada é uma região fundamental.

No segundo caso o recobrimento duplo orientável é um cilindro tal que em cada extremidade do cilindro é feita a soma conexa com T_k^2 como na figura abaixo

Figura 3.2: g ímpar

onde o cilindro central recobre $\mathbb{R}P^2 \setminus D$, onde D é um disco e a parte destacada da figura é uma região fundamental.

No terceiro caso o recobrimento duplo orientável é dado tomando um toro e fazendo soma conexa de dois T_k^2 como na ilustração abaixo

Figura 3.3: g par

onde o toro central recobre a garrafa de Klein e a região destacada é uma região fundamental.

Portanto em cada caso temos um diagrama comutativo como abaixo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{R}P_g^2} & & \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \\ \mathbb{R}P_g^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array},$$

onde $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ é o recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$.

O resultado do Lema 5.3 de [6] também é válido para uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$. Logo para variedades não orientáveis podemos utilizar das técnicas feitas nos Lemas 1.2.1 e 1.2.2 para que $f^{-1}(W \setminus S^1)$ seja um disco.

Usando o levantamento de homotopia, podemos fazer estas modificações em cada região do recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$. Quando fazemos estas modificações nos levantamentos resulta em dois discos, um disco numa região fundamental e outro disco na outra região, sendo cada um destes é levado no disco de $\mathbb{R}P_g^2$ pela aplicação Π .

Logo temos que tomar $\frac{p_{[f']}(t)}{2}$.

Além disso, a menos de homotopia, o polinômio $\frac{p_{[f']}(t)}{2}$ tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Este fato é esclarecido no apêndice.

Denotaremos $\bar{p}_{[f']} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \dots + \bar{a}_n t^n$ o polinômio tal que $\bar{a}_i$ são os coeficientes de $\frac{p_{[f']}(t)}{2} = a_0 + a_1 \dots + a_n t^n$ módulo 2.

Assim temos a definição:

Definição 3.2.1. *Sejam uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ e $f' : \widetilde{\mathbb{R}P_g^2} \rightarrow W$ tal que $f \circ \Pi = f'$, como no diagrama acima. Então o polinômio associado a aplicação f é $\bar{p}_{[f]}(t)$ e será denotado por $p_{[f]}(t)$.*

Aplicação especial de $\mathbb{R}P_g^2$ em W para $g = 2k + 1$

Dados um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ tal que $a_0 = 1$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$ e um número $l \in \mathbb{N}$ finito. Consideremos a variedade não orientável $\mathbb{R}P_g^2$ tal que $g = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Construímos uma aplicação $f : T_k^2 \rightarrow W$ a partir de $q(t)$ e l , como feito na seção 1.2.

Sem perda de generalidade podemos supor que existe um disco fechado $D \subset T_g^2$ tal que $f(D) = P$. Identificamos o subconjunto $C = T_g^2 \setminus \overset{\circ}{D}$ com uma região básica do recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$.

Definimos a aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ por $h([x]) = f(x)$, onde $\Pi^{-1}([x]) \cap C = x$.

Por construção temos $h_\pi(\pi_1(\mathbb{R}P_g^2)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$ e $p_{[h]}(t) = q(t)$.

Definição 3.2.2. *Uma aplicação que é como a aplicação h construída acima, isto é, uma aplicação que pode ser construída a partir de l finito e seu polinômio associado $p_{[h]}(t)$ é chamada aplicação especial.*

Uma aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ é especial desde que a aplicação $f : T_k^2 \rightarrow W$ construída a partir de h seja uma aplicação especial. Lembrando que aplicações especiais f construída a partir de h tem os coeficientes do polinômio $p_{[f]}(t)$ associado em $\mathbb{Z}_2$ (este fato é esclarecido no apêndice). Portanto segue o teorema.

Teorema 3.2.1. *Seja uma aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$. Então existe uma aplicação $g \in [h]$ tal que g é uma aplicação especial.*

Aplicação especial de $\mathbb{R}P_g^2$ em W para $g = 2k$

Primeiramente consideremos a variedade não orientável $\mathbb{R}P_2^2 \cong K$, onde K é a garrafa de Klein.

Dados o toro T^2 recobrimento duplo de K e um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ tal que $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$ e um número $l \in \mathbb{N}$ finito.

Consideremos a região fundamental F destacada na figura 3.2. Definimos uma aplicação em F da seguinte maneira:

onde a aplicação é definida no disco D a partir do polinômio $q(t)$, como na seção 1.1, cada faixa λ_i é projetada em $S^1 \subset W$ e o bordo do disco D e os bordos das faixas são levados em $P \in W$. Denotaremos esta aplicação por $\Psi : F \rightarrow W$.

Podemos identificar $T^2 \setminus F$ com $F \setminus \partial F$.

Definimos uma aplicação $h : T^2 \rightarrow W$ dada por $h(x) = \Psi(x)$, isto é, a aplicação h é definida como Ψ em F . Como $T^2 \setminus F$ também é um cilindro h é definida de modo análogo a Ψ em F .

Por fim definimos uma aplicação $f : K \rightarrow W$ por $f([x]) = h(x)$, onde $\Pi^{-1}([x]) \cap F = x$.

Por construção temos $f_\pi(\pi_1(K)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$ e $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Definição 3.2.3. Uma aplicação $f : K \rightarrow W$ é chamada aplicação especial se pode ser construída, como acima, a partir de l finito e seu polinômio associado $p_{[f]}(t)$.

Dada uma aplicação $f : K \rightarrow W$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T^2 & & \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \\ K & \xrightarrow{f} & W \end{array}.$$

Para encontrar uma aplicação especial $\theta \in [f]$, é necessário encontrar uma aplicação especial $g' \in [f']$. Portanto faremos modificações, por homotopias, na aplicação f' .

Basta fazer estas modificações na região fundamental F de T^2 e repetir analogamente as modificações na outra região fundamental.

Como vimos anteriormente, para definir o polinômio associado, existe, a menos de homotopia, um disco $D \in F$ tal que $f'^{-1}(W \setminus S^1) \subset D$, D define o polinômio $p_{[f]}(t)$ e $f'(\partial D) = P$. Observando que o polinômio $p_{[f]}(t)$, neste caso, tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, como é explicado no apêndice.

Seja $\langle x, y; xyx^{-1}y \rangle$ a apresentação do grupo fundamental de K . Suponha que $f_\pi(y) = a \neq 0$, como $\pi_1(W)$ é abeliano segue que $a^2 = 0$, absurdo. Portanto $f_\pi(y) = 0$.

Se $f_\pi(x) = 0$, temos, a menos de homotopia, uma aplicação especial.

Suponha que $f_\pi(x) = l \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que o bordo de F é levado no caminho $x \in K$ pela aplicação Π . Consideremos a aplicação $h : F \rightarrow S^1 \subset W$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in F \setminus \overset{\circ}{D} \\ P & \text{se } x \in \overset{\circ}{D} \end{cases}$$

Portanto a aplicação h é uma aplicação de um cilindro em S^1 tal que $h_\pi(\pi_1(F)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$. É simples verificar que a aplicação h , a menos de homotopia, é uma projeção do cilindro em S^1 como na ilustração abaixo

onde cada faixa λ_i é projetado em S^1 .

Consideremos a aplicação $h' : F \rightarrow W$ dada por

$$h'(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in F \setminus \overset{\circ}{D} \\ f'(x) & \text{se } x \in D \end{cases}$$

Portanto a partir da aplicação h' temos uma aplicação $g \in [f]$ tal que g é especial.

Logo segue o teorema:

Teorema 3.2.2. *Seja uma aplicação $f : K \rightarrow W$. Então existe $g \in [f]$ tal que g é uma aplicação especial.*

Consideremos o caso em que $g = 2k > 2$, então $\mathbb{R}P_g^2 \cong T_k^2 \# K$ e o recobrimento duplo orientável é como na figura 3.2.

Seja uma aplicação $f : T_k^2 \# K \rightarrow W$. Então, novamente como no caso anterior, para encontrar uma aplicação especial $g \in [f]$ basta fazer modificações na região fundamental de $\widetilde{T_k^2 \# K}$ repetir na outra região do recobrimento e compor com a aplicação Π . Denotaremos a região fundamental por F .

Assim como no caso anterior existe um disco $D \in F$ tal que $f'^{-1}(W \setminus S^1) \subset D$, D define o polinômio $p_{[f]}(t)$ e $f'(\partial D) = P$.

Se $f_\pi = 0$ então, a menos de homotopia, f é especial.

Se $f_\pi(\pi_1(\mathbb{R}P_g^2)) = \langle l \rangle$, tal que $l \neq 0$, então da mesma forma como feito no caso de aplicações de T_g em W , a menos de homeomorfismo, somente um, a menos de homotopia, gerador é levado em $S^1 \subset W$ e os outros, a menos de homotopia, é levado em $P \in W$.

Para isso, como $\pi_1(T_k^2 \# K)$ não tem uma base, compomos o homomorfismo induzido por f em grupos fundamentais com a aplicação $\tau : \pi_1(T_k^2 \# K) \rightarrow H_1(T_k^2 \# K)$

Assim como foi feito no caso do toro, podemos considerar $f_\pi(\alpha_0) = l$ e $f_\pi(\alpha_i) = 0$ para $i \neq 0$, onde α_i são os geradores de $\pi_1(T_k^2 \# K)$ e $\alpha_0 \in T_k^2 \subset T_k^2 \# K$.

Portanto, desde que os bordos de F são levado pela Π no gerador $\gamma\pi_1(T_k^2 \# K)$ tal que a imagem de γ pela Π pertence a $K \in T_k^2 \# K$, a imagem dos bordos de F pela aplicação f' é o ponto $P \in W$.

Seja $\partial F = S_0^1 \sqcup S_1^1$, onde S_i^1 são esferas de dimensão 1. Tomemos F e identifiquemos as duas esferas que resulta em T_{k+1}^2 e denotemos S_*^1 as duas esferas identificadas.

Consideremos a aplicação $h : T_{k+1}^2 \rightarrow W$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in T_{k+1}^2 \setminus S_*^1 \\ P & \text{se } x \in S_*^1 \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.3.1 existe uma aplicação $h' \in [h]$ tal que h' é aplicação especial e sem perda de generalidade, podemos supor que $h(S_*^1) = P$.

Consideremos a aplicação $h'' : F \rightarrow W$ dada por

$$h''(x) = \begin{cases} h'(x) & \text{se } x \in F \setminus S_0^1 \sqcup S_1^1 \\ P & \text{se } x \in S_0^1 \sqcup S_1^1 \end{cases}$$

Portanto a partir de h'' construímos uma aplicação $g : T_k^2 \# K \rightarrow W$ tal que $g \in [f]$ é especial e segue o teorema:

Teorema 3.2.3. *Seja uma aplicação $f : T_k^2 \# K \rightarrow W$. Então existe $g \in [f]$ tal que g é uma aplicação especial.*

Representação de aplicações de superfícies não orientáveis em W_n

Nas próximas duas seções, dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ tal que $n > 1$, é associado um polinômio $p_{[f]}(t)$ a classe de homotopia de f , este polinômio tem coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Apresenta-se uma aplicação, chamada aplicação especial, a qual no capítulo de ?? mostra-se que estas aplicações realizam o conjunto minimal de raízes, que é construída a partir de um polinômio. Depois, mostra-se que existe uma aplicação especial em cada classe de homotopia $[\mathbb{R}P_g^2, W_n]$.

O motivo de considerar polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ é explicado no apêndice.

4.1 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W_n

Assim como na seção 3.1, consideremos o espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$ e uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

onde $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ é o recobrimento duplo orientável.

Como $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, segue que $f_\pi = 0$. Logo temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \widetilde{W} \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{f} & W_n \end{array}$$

comutativo.

Para fazer modificações, por homotopias, na aplicação f basta fazer modificações numa região fundamental de S^2 e repetir na outra região e utilizar a aplicação Π para modificar f . Neste caso como Π é recobrimento duplo a região que vamos considerar é $CN \subset S^2$ dada como na seção 3.1.

Sem perda de generalidade podemos supor que $f \circ \Pi(S^1) = P$, onde $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1 \text{ e } z = 0\} \subset S^2$.

Identificamos $CN \setminus S^1$ com $S^2 \setminus N$, para algum $N \in S^2$. Consideremos a aplicação $h : S^2 \rightarrow W_n$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in S^2 \setminus N \\ P & \text{se } x = N \end{cases}$$

Definimos $\bar{p}_{[h]}(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \dots + \bar{a}_n t^n$ tal que $\bar{a}_i$ é igual a a_i módulo 2, onde $p_{[h]}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$.

Definição 4.1.1. Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$, definimos o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$ por $\bar{p}_{[h]}(t)$, onde $h : S^2 \rightarrow W_n$ é como antes e este polinômio será denotado por $p_{[f]}(t)$.

Dado um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$, tal que os coeficientes de $q(t)$ pertencem a $\mathbb{Z}_2$, construiremos uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$ tal que $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Consideremos a aplicação $h : S^2 \rightarrow W_n$ construída a partir de $q(t)$, como feito na seção 2.1.

Identificamos a região $CN \setminus S^1$ com $S^2 \setminus N$, tal que $h(N) = P$.

Dado $y \in \mathbb{R}P^2$, então $\Pi^{-1}(y) = \{x, -x\}$ tal que $x \in CN \setminus S^1$ e $-x \in \mathbb{R}P^2 \setminus CN$ ou $\Pi^{-1}(y) \subset S^1$.

Definimos $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ por

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in CN \setminus S^1 \\ P & \text{se } \Pi^{-1}(y) \subset S^1 \end{cases}$$

Por construção $p_{[f]}(t) = q(t)$.

Definição 4.1.2. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$ que pode ser construída como acima é chamada aplicação especial.*

Analogamente como feito na seção 3.1, dada uma classe de homotopia $[f]$, pode ser encontrada uma aplicação $g \in [f]$ tal que g é aplicação especial.

4.2 Representação das classes de homotopia de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n

Como na seção 3.2 consideremos as superfícies não orientáveis $\mathbb{R}P_g^2$ tal que $g = 2k+1 \geq 2$ e, portanto, $\mathbb{R}P_g^2 \cong T_k^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Seja $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ o recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$ como na figura 3.2.

Portanto temos um diagrama comutativo como abaixo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{R}P_g^2} & & \\ \Pi \downarrow & \searrow f' & \\ \mathbb{R}P_g^2 & \xrightarrow{f} & W_n \end{array} .$$

Da mesma forma que na seção 3.2 temos a definição:

Definição 4.2.1. *Dadas uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ e $f' : \widetilde{\mathbb{R}P_g^2} \rightarrow W_n$ tal que*

$f \circ \Pi = f'$, como no diagrama acima. Então o polinômio associado a aplicação f é $\bar{p}_{[f]}(t)$ e será denotado por $p_{[f]}(t)$.

Aplicação especial de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n para $g = 2k + 1$

Dados um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ tal que $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$ e um número $l \in \mathbb{N}$ finito.

Construímos uma aplicação $f : T_k^2 \rightarrow W_n$ a partir de $q(t)$ e l , como feito na seção 2.2.

Sem perda de generalidade podemos supor que existe um disco fechado $D \subset T_g^2$ tal que $f(D) = P$. Identificamos o subconjunto $C = T_k^2 \setminus \overset{\circ}{D}$ com uma região básica do recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$.

Definimos a aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ por $h([x]) = f(x)$, onde $\Pi^{-1}([x]) \cap C = x$.

Por construção temos $h_\pi(\pi_1(\mathbb{R}P_g^2)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$ e $p_{[h]}(t) = q(t)$.

Definição 4.2.2. Uma aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ é chamada aplicação especial se h pode ser construída a partir de l finito e seu polinômio associado $p_{[h]}(t)$ como a construção acima.

Pelos mesmos argumentos feitos no caso de aplicação de $\mathbb{R}P_g^2$ em W , dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ existe uma aplicação $\theta \in [f]$ tal que θ é especial.

Aplicação especial de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n para $g = 2k$

Dados um polinômio $q(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ tal que $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$ e um número $l \in \mathbb{N}$ finito.

Construímos uma aplicação $f : T_{k+1}^2 \rightarrow W_n$ a partir de $q(t)$ e l , como feito na seção 2.2.

Seja uma esfera $S_*^1 \in T_{k+1}^2$ tal que S_*^1 não é contrátil em T_{k+1}^2 e $f(S_*^1) = x_0$. Identificamos o subconjunto $T_{k+1}^2 \setminus S_*^1$ com $F \setminus \partial F$, onde F é uma região básica do recobrimento duplo orientável de $\mathbb{R}P_g^2$.

Definimos a aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ por $h([x]) = f(x)$, onde $\Pi^{-1}([x]) \cap F = x$.

Por construção temos $h_\pi(\pi_1(\mathbb{R}P_g^2)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$, $p_{[h]}(t) = q(t)$.

Definição 4.2.3. *Uma aplicação $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ é chamada aplicação especial se h pode ser construída a partir de l finito e seu polinômio associado $p_{[h]}(t)$ como a construção acima.*

Pelos mesmos argumentos feitos no caso de aplicação de $\mathbb{R}P_g^2$ em W junto com as técnicas usadas na seção 2.3 para provar a existência de aplicação especial, então dada uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ existe uma aplicação $g \in [f]$ tal que g é especial.

Teorema 4.2.1. *Seja uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$. Então existe uma aplicação $g \in [f]$ tal que g é aplicação especial.*

Raízes de aplicações de superfícies orientáveis em W_n

Seja $f : S \rightarrow W_n$ uma aplicação contínua. Neste capítulo é feito um estudo dos conjuntos $f^{-1}(x)$, $\forall x \in W_n$, tal que $g^{-1}(x)$ seja o conjunto minimal e $g \in [f]$, onde a minimalidade se refere a $g^{-1}(x)$ ser o conjunto com menor dimensão, menor número de componentes conexas e as dimensões dos grupos de homologias de $g^{-1}(x)$ são minimais.

Para cada $x \in W_n$, denotaremos o conjunto minimal de raízes por $M(f, x) = \{g^{-1}(x) \text{ é minimal} : g \in [f]\}$.

Observe que para quaisquer $x, y \in W_n \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i^2$, temos $M(f, x) = M(f, y)$ e para quaisquer $x, y \in \bigcup_{i=1}^n (S_i^2 \setminus \{i\}) \subset W_n$ também vale $M(f, x) = M(f, y)$.

5.1 Raízes de aplicações de S^2 em W_n

Consideremos $n = 1$ e uma aplicação $f : S^2 \rightarrow W$. Quando $f(S^2) \subset S^1$ ou quando $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$, então f é homotópica a uma aplicação constante. Logo $M(f, x) = \emptyset$, para qualquer $x \in W$.

Se $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$, então neste caso o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & S^2 \\
 & \nearrow \bar{f} & \downarrow \\
 S^2 & \xrightarrow{f} & W
 \end{array}$$

é comutativo e a_0 é o grau de $\bar{f}$, o conjunto minimal de raízes para $x \in S^2 \subset W$ é unitário e para $x \in W \setminus S^2$ $M(f, x) = \emptyset$.

De fato, suponha que existe $x \in W \setminus S^1$ tal que $f^{-1}(x) = \emptyset$. Logo fazendo uma retração temos $f(S^2) \subset S^1$, o que implicaria $f \cong \text{cte}$, contradizendo $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$.

Se $x \in W \setminus S^2$, então pelo diagrama comutativo acima, temos $M(f, x) = \emptyset$.

Portanto se $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$, temos os seguintes conjuntos minimais de raízes

$$M(f, x) = \begin{cases} \emptyset & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \{y\} & , \quad \text{se } x \in S^2 \subset W \end{cases}$$

Suponha que $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ com $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ e $n > 0$.

Logo a aplicação f é fortemente sobrejetiva e para cada $x \in W$ temos a imagem inversa $f^{-1}(x) \neq \emptyset$. Para $x \in W \setminus S^1$ uma aplicação especial tem, a menos de homotopia, como imagem inversa um único ponto, isto é, $f^{-1}(x) = \{y\}$, logo uma aplicação especial realiza o conjunto minimal de raízes, neste caso. Provemos que para $x \in W \setminus S^2$ uma aplicação especial realiza o conjunto minimal de raízes.

Para $x \in W \setminus S^2$ temos as seguintes possibilidades:

- (i) $M(f, x) \cong S_0$;
- (ii) $M(f, x) \cong S_1$;
- (iii) $M(f, x) \cong S_2$;

onde S_i são subespaços topológicos de W de dimensões $i = 0, 1$ ou 2 , podendo não ser conexo.

Se acontecesse (i), então para cada $y \in f^{-1}(x)$ é tal que y é raiz isolada de f em x .

Sejam V uma vizinhança de y tal que y seja a única raiz de f em x pertencente a V e $\{\tilde{x}\} = \tilde{f}(V) \cap p^{-1}(x) \subset \widetilde{W}$. Então por continuidade, $\tilde{f}(V \setminus \{x\}) \subset [\tilde{x}, +\infty)$ ou $\tilde{f}(V \setminus \{x\}) \subset (-\infty, \tilde{x}]$. Logo, a menos de homotopia, $\tilde{f}(V) \cap \{\tilde{x}\} = \emptyset$ e, portanto, amenos de homotopia, $f(V) \cap \{x\} = \emptyset$. Contradiz o fato de f ser fortemente sobrejetiva.

Se vale (iii), então cada componente conexa de S_2 é homotópica a D^2 ou é toda S^2 . Caso a componente conexa seja homotópica a D^2 , então deste que $D^2 \cong pto$, a menos de homotopia, a componente conexa é um único ponto e novamente usando os argumentos do caso (ii) temos que este caso não acontece.

Se S_2 é todo o domínio de f , então f uma aplicação constante o que contradiz $p_{[f]}(t) \neq \mathbb{O}$.

Portanto, vale (ii).

Cada componente conexa de S_1 é homotópica a $[0, 1]$ ou é homotópica a S^1 .

Suponha que a componente conexa de S_1 é homotópica a $[0, 1]$. Como $[0, 1] \cong pto$, a menos de homotopia, esta componente conexa é um único ponto. Logo repetimos os argumentos de (ii) e chegamos numa contradição. Portanto, temos somente o caso $S_1 \cong \bigsqcup_{i=1}^r S_i^1$.

Observe que $p^{-1}(x) \cap \tilde{f}(S^2)$ é pelo menos n pontos e para cada um destes ponto a imagem inversa é por $\tilde{f}$ é homotópica a uma união finita de S^1 .

Para f uma aplicação especial $p^{-1}(x) \cap \tilde{f}(S^2)$ é exatamente n pontos e, a menos de homotopia, a imagem inversa de cada um destes pontos é uma única S^1 . Portanto uma aplicação especial realiza o conjunto minimal de raízes para $x \in W \setminus S^2$.

Finalmente o ponto $P \in W$ singular. Como já vimos $f^{-1}(P) \neq \emptyset$.

Se $x \in f^{-1}(P)$ tal que x é raiz isolada, então assim como nos casos anteriores esta raiz pode ser eliminada por homotopias, lembrando que estamos no caso de f fortemente sobrejetiva.

Da mesma forma como feito anteriormente, não acontecem os casos $M(f, P)$ ser homotópico subespaços de dimensão 2

Logo $M(f, P)$ contém somente espaços de dimensão 1.

Consideremos $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \widetilde{W}$ um levantamento de aplicação especial f ao recobrimento universal e seja o conjunto $\{0, \dots, n\} = \tilde{f}(S^2) \cap \mathbb{Z}$. Observe que n é mínimo.

Logo $f^{-1}(P) = \tilde{f}^{-1}(\{0, \dots, n\})$.

Os espaços de dimensão 1 que estão contidos em $f^{-1}(P)$ tem mesmo tipo de homotopia que buquês de esferas de dimensão 1, isto é, $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{j\text{-vezes}}$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ temos $\tilde{f}^{-1}(i)$ contendo pelo menos um espaço do mesmo tipo de homotopia que S^1 .

Portanto no caso de $i = 0, n$ ou $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_i = 0$ temos $\tilde{g}^{-1}(i) = S^1$ que é o conjunto minimal de raízes.

Para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_i \neq 0$, uma aplicação especial f tem o conjunto $f^{-1}(i) = S^1 \vee S^1$ como imagem inversa. Suponha que o conjunto minimal de raízes de i seja S^1 , isto é, existe $h \in [f]$ tal que $h^{-1}(i) = S^1$. Seja V uma vizinhança tubular de S^1 em S^2 . Como $a_i \neq 0$ temos $h(V) \cap (S_i^2 \setminus \{i\}) \neq \emptyset$, $h(V) \cap (i, +\infty) \neq \emptyset$ e $h(V) \cap (-\infty, i) \neq \emptyset$. Para V suficientemente pequeno $V \setminus S^1$ tem somente duas componentes conexas. Logo por conexidade não existe h .

Portanto, a menos de homotopia, $f^{-1}(P) = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n-\text{vezes}}$ com $n \geq 2$.

Logo uma aplicação especial realiza o conjunto minimal de raízes para $P \in W$.

Concluimos que para qualquer $x \in W$ existe uma aplicação especial $f : S^2 \rightarrow W$ que realiza $M(f, x)$ e este conjunto é classificado pelo polinômio $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ tal que $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$. Definimos $r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$ e observe que $r \neq 2$. Então o minimal de raízes é como abaixo,

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^n S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+3} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

Abordaremos minimalidade de raízes no caso de aplicações $f : S^2 \rightarrow W_n$ tal que $n \geq 2$.

Consideremos $n \geq 2$ e uma aplicações $f : S^2 \rightarrow W_n$. Suponha que f é uma aplicação especial.

Fixemos o recobrimento $p' : \widetilde{W} \rightarrow W_n$, como na seção 2.1. Sem perda de generalidade podemos supor que $p'(S_0^2) = e_0^2$.

Da mesma maneira como feito no caso de aplicações de S^2 em W , mostrar-se que as

aplicações especiais são as aplicações que realizam o conjunto minimal de raízes para os pontos de W_n .

Seja $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_k t^k$ o polinômio associado a f . Se $p_{[f]}(t)$ é o polinômio nulo, então $M(f, x) = \emptyset$ para qualquer $x \in W_n$. Suponha que $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$, então o conjunto minimal de raízes é

$$M(f, x) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } x \in e_0^2 \\ \emptyset & \text{c.c} \end{cases}$$

Suponha que $k > 1$ com $a_0 \neq 0$ e $a_k \neq 0$. Para cada $h, h' \in \{0, \dots, n\}$, consideremos c_h a cardinalidade do conjunto $\{h + jn/h + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h+jn} \neq 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ e $c_{h'}$ é a cardinalidade do conjunto $\{h' + jn/h' + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h'+jn} = 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$. Suponha que $k = mn + r$ para certos $m, r \in \mathbb{N}$.

Portanto o conjunto minimal de raízes neste caso é

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } c_h & , \text{ se } x \in e_i^2 \setminus \{x_i\} \\ \bigcup_{j=1}^{m+1} S_j^1 & , \text{ se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } 1 \leq i \leq r \\ \bigcup_{j=1}^m S_j^1 & , \text{ se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } r < i \leq n \\ \left(\bigcup_{j=1}^{c_h} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{c_{h'}} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_i \text{ e } i \neq 0, r \\ \left(\bigcup_{j=1}^{c_h-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{c_{h'}+2} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_0 \text{ ou } x = x_r \end{cases}$$

5.2 Raízes de aplicações de T^2 em W_n

Sejam $f : T^2 \rightarrow W$ uma aplicação especial, $p_{[f]}(t)$ o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$, $n = 1$ e $l \in N$ tal que $\langle l \rangle = f_\pi(\pi_1(T^2))$.

Provemos que uma aplicação especial é a aplicação que realiza o conjunto minimal de raízes para qualquer $x \in W$.

Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l = 0$ então f é homotópica a uma aplicação constante. Portanto $M(f, x) = \emptyset$ para qualquer $x \in W$.

Se $p_{[f]}(t) \neq \mathbb{O}$, então pelo resultados da seção 1.2 existe $D \subset T^2$ tal que $f|_{(D, \partial D)}$ é dada a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ como aplicação de S^2 em W .

Como $f^{-1}(W \setminus S^1) \subset D$, então para todo $x \in W \setminus S^1$ o conjunto minimal de raízes é obtido como feito no caso de minimalidade de raízes de aplicação de S^2 em W .

Sejam $x \in W \setminus S^2$ e $l \geq 1$, então o conjunto minimal de raízes contém ao menos $f^{-1}(x) \cap D$. A aplicação especial tem como conjunto de raízes $(f^{-1}(x) \cap D) \sqcup (l \text{ copias de } S^1)$.

Consideremos a aplicação $\bar{f} : C \rightarrow \widetilde{W}$ e $p : \widetilde{W} \rightarrow W$ como na seção ??, então $f^{-1}(x) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_l\})$, onde $\bar{x}_i \in (i, i+1) \subset \widetilde{W}$, $i \in \{0, \dots, l\}$ e $p(\bar{x}_i) = x$.

Suponha que para algum $i \in \{0, \dots, l\}$ o conjunto $\bar{f}^{-1}(\bar{x}_i) \cap (C \setminus D) = S^1$ não seja o conjunto minimal, isto é, existe $g \in [f]$ tal que $\bar{g}^{-1}(\bar{x}_i) \subset S^1 \setminus \{y\}$, para algum ponto y .

Como o conjunto $S^1 \setminus \{y\}$ tem mesmo tipo de homotopia que um ponto, então, a menos de homotopia, $\bar{g}(\bar{x}_i) \cap (C \setminus D)$ é um único ponto. Portanto, por homotopia, podemos eliminar esta raiz e $\bar{g}(\bar{x}_i) \cap (C \setminus D) = \emptyset$.

Logo, a menos de homotopia, o conjunto minimal $\bar{f}^{-1}(\bar{x}_i)$ é S^1 .

Analogamente pode ser feito no caso do ponto $P \in W$ para concluir que o conjunto $f^{-1}(P) = \bar{f}^{-1}(\{0, \dots, l\}) = \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{l\text{-vezes}} \sqcup (S^1 \vee S^1)$, onde $\bar{f}^{-1}(i) = S^1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$ e $\bar{f}^{-1}(0) = S^1 \vee S^1$.

Concluindo assim que o conjunto minimal de raízes de uma aplicação de T^2 em W é o conjunto de raízes de uma aplicação especial tal que o conjunto de raízes é classificado pelo polinômio $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ e $l \in \mathbb{N}$ tal que $\langle l \rangle = f_\pi(\pi_1(T^2))$.

Portanto, se $a_i = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ e $l = 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W$.

Se $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$ e $l = 0$, o conjunto minimal de raízes é $M(f, x) = \emptyset$ para $x \in W \setminus S^2$ e $M(f, x)$ é unitário caso contrário.

Se $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ e $l = 0$, então o conjunto minimal de raízes é

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^n S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-1} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+3} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

onde $r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$.

Caso contrário, isto é, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, $l \neq 0$. Seja que $r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$, então o conjunto minimal de raízes é como abaixo,

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^{n+l} S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-1} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+l+1} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

Consideremos $n \geq 2$ e uma aplicações $f : T^2 \rightarrow W_n$ especial.

Fixemos o recobrimento $p' : \widetilde{W} \rightarrow W_n$ tal que $p'(S_0^2) = e_0^2$.

Da mesma maneira com feito anteriormente nesta seção, mostra-se que as aplicações especiais são as aplicações que realizam o conjunto minimal de raízes para os pontos de W_n com $n \geq 2$.

Sejam $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_k t^k$ o polinômio associado a f e $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_\pi(\pi_1(T^2)) = \mathbb{Z} \langle l \rangle$. Se $p_{[f]}(t)$ é o polinômio nulo e $l = 0$, então o conjunto minimal de raízes é vazio para qualquer ponto de W_n .

Suponha que $p_{[f]}(t) = a_0 \neq 0$ e $l = 0$, então o conjunto minimal de raízes é

$$M(f, x) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } x \in e_0^2 \\ \emptyset & \text{c.c} \end{cases}$$

Suponha que $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, $k > 0$, $l = 0$, $p'(S_0^2) = e_0^2$ e $p'(S_k^2) = e_r^2$ para algum $r \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $h, h' \in \{0, \dots, n\}$, consideremos c_h a cardinalidade do conjunto

$\{h + jn/h + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h+jn} \neq 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ e $c_{h'}$ é a cardinalidade do conjunto $\{h' + jn/h' + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h'+jn} = 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$. Suponha que $k = mn + r$ para alguns $m, r \in \mathbb{N}$.

Portanto o conjunto minimal de raízes neste caso é

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } c_h & , \text{ se } x \in e_i^2 \setminus \{x_i\} \\ \bigcup_{j=1}^{m+1} S_j^1 & , \text{ se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } 1 \leq i \leq r \\ \bigcup_{j=1}^m S_j^1 & , \text{ se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } r < i \leq n \\ \left(\bigcup_{j=1}^{c_h} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{c_{h'}} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_i \text{ e } i \neq 0, r \\ \left(\bigcup_{j=1}^{c_h-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{c_{h'}+2} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_0 \\ \left(\bigcup_{j=1}^{c_h-1} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{c_{h'}+1} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_r \end{cases}$$

Por fim, suponha que $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, $k > 0$, $l \neq 0$, $p'(S_0^2) = e_0^2$ e $p'(S_k^2) = e_r^2$ para algum $r \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $h, h' \in \{0, \dots, n\}$, consideremos c_h a cardinalidade do conjunto $\{h + jn/h + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h+jn} \neq 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ e $c_{h'}$ é a cardinalidade do conjunto $\{h' + jn/h' + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h'+jn} = 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$. Suponha que $k = mn + r$ para alguns $m, r \in \mathbb{N}$.

Logo o conjunto minimal de raízes é

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } c_h & , \text{ se } x \in e_i^2 \setminus \{x_i\} \\ \bigsqcup_{j=1}^{m+1+l} S_j^1 & , \text{ se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } 1 \leq i \leq r \\ \bigsqcup_{j=1}^{m+l} S_j^1 & , \text{ se } xx \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } r < i \leq n \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}+l} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_i \text{ e } i \neq 0, r \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}+2+l} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_0 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h-1} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}+1+l} S_j^1 \right) & , \text{ se } x = x_r \end{cases}$$

5.3 Raízes de aplicações de T_g em W_n

Assim como nos casos anteriores provaremos que o conjunto de raízes de uma aplicação especial $f : T_g \rightarrow W$ é minimal.

Sejam $n = 1$, uma aplicação especial $f : T_g \rightarrow W$, $p_{[f]}(t)$ o polinômio associado a classe de homotopia $[f]$ e $l \in N$ tal que $\langle l \rangle = f_\pi(\pi_1(T_g))$.

Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l = 0$ então f é homotópica a uma aplicação constante. Portanto o conjunto minimal de raízes é vazio para qualquer $x \in W$.

Suponha que $p_{[f]}(t) \neq \mathbb{O}$ e $l \neq 0$. Então sabemos que existe $D \subset T_g$ tal que $f|_{(D, \partial D)}$ é dada a partir do polinômio $p_{[f]}(t)$ como aplicação de S^2 em W .

Portanto $f|_{(D, \partial D)}$ tem conjunto minimal de raízes. Como $f^{-1}(W \setminus S^1) \subset D$, então para todo $x \in W \setminus S^1$ o conjunto minimal de raízes é obtido como feito no caso de minimalidade de raízes de aplicação de S^2 em W .

Seja $x \in W \setminus S^2$. Então o conjunto minimal de raízes é ao menos o conjunto $f^{-1}(x) \cap D$. A menos de homotopia, uma aplicação especial tem como conjunto de raízes o seguinte:

$$\left\{ (f^{-1}(x) \cap D) \sqcup (l \text{ copias de } S^1) \right\}$$

Consideremos a aplicação $\bar{f}|_B : B \rightarrow \widetilde{W}$, então $f^{-1}(x) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_l\})$, onde $\bar{x}_i \in (i, i+1) \subset \widetilde{W}$, $i \in \{0, \dots, l\}$ e $p'(\bar{x}_i) = x$.

Analogamente ao caso de raízes de aplicações de T^2 em W se prova que este é o conjunto minimal de raízes e para o ponto $P \in W$ o conjunto minimal de raízes é $f^{-1}(P) = f^{-1}(\{0, \dots, l\}) = \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{l\text{-vezes}} \sqcup (S^1 \vee S^1)$, onde $\bar{f}^{-1}(i) = S^1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$ e $\bar{f}^{-1}(0) = S^1 \vee S^1$.

Concluindo assim que o conjunto minimal de raízes de uma aplicação de T_g em W é o mesmo conjunto de raízes de uma aplicação especial de T^2 em W .

Analogamente como feito no caso de T_g em W , concluimos que no caso de $n > 2$, o conjunto minimal de raízes é igual ao caso de aplicações de T^2 em W_n .

Raízes de aplicações de superfícies não orientáveis em W_n

6.1 Raízes de aplicações de $\mathbb{R}P^2$ em W_n

Dados uma aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ e $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ o recobrimento duplo orientável.

Na seção 3.1 foi considerado $CN \subset S^2$ para fazer modificações, por homotopias, e concluir os resultados. Nesta seção, também, basta utilizar a aplicação $f \circ \Pi$ e $CN \subset S^2$ para obter os conjuntos minimais de raízes.

Uma aplicação especial $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W$ é construída a partir de uma aplicação especial $h : S^2 \rightarrow W$. Portanto como uma aplicação especial h realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W , então uma aplicação especial f também será uma aplicação que realiza o conjunto minimal de raízes.

Desde que uma aplicação especial f é construída identificando $S^2 \setminus \{N\}$ com $CN \setminus S^1$, onde $h(N) = P$, o conjunto minimal de raízes de f é igual ao conjunto de raízes de h para $x \in W \setminus \{P\}$ e no ponto P o conjunto minimal de raízes é igual ao conjunto minimal de raízes de h em P mais uma $S^1 = \Pi(\partial CN)$.

Portanto seja $p_{[f]}(t)$ o polinômio associado a f . Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$, então, a menos de homotopia, $f^{-1}(x) = \emptyset$ para cada $x \in W$.

Caso $p_{[f]}(t) = 1$, então, a menos de homotopia, os conjunto minimais de raízes são conjuntos unitários.

Caso contrário ponha que $0 \neq r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$ (observe que $r > 1$) então o conjunto de raízes é como abaixo,

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^n S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+4} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

Analogamente para o caso em que $n \geq 2$, isto é, uma aplicações especial $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow W_n$ realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W_n .

Seja o recobrimento universal $p' : \widetilde{W} \rightarrow W_n$. Sem perda de generalidade podemos supor que $p'(S_0^2) = e_0^2$.

Seja $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_k t^k$ o polinômio associado a f . Se $p_{[f]}(t)$ é o polinômio nulo, então $M(f, x) = \emptyset$ para cada $x \in W_n$. Suponha que $p_{[f]}(t) = 1$, então o conjunto minimal de raízes é

$$M(f, x) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } x \in e_0^2 \\ \emptyset & \text{c.c} \end{cases}$$

Se $k > 0$ e $p'(S_0^2) = e_0^2$. Para cada $h, h' \in \{0, \dots, n\}$, consideremos c_h a cardinalidade do conjunto $\{h + jn/h + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h+jn} \neq 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ e $c_{h'}$ é a cardinalidade do conjunto $\{h' + jn/h' + jn \in \{0, \dots, k\}, a_{h'+jn} = 0 \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$. Suponha que $k = mn + r$ para alguns $m, r \in \mathbb{N}$.

Portanto o conjunto minimal de raízes neste caso é

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } c_h & , \quad \text{se } x \in e_i^2 \setminus \{x_i\} \\ \bigsqcup_{j=1}^{m+1} S_j^1 & , \quad \text{se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } 1 \leq i \leq r \\ \bigsqcup_{j=1}^m S_j^1 & , \quad \text{se } x \in (e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}) \text{ e } r < i \leq n \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = x_i \text{ e } i \neq 0, r \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}+2} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = x_0 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_h-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{c_{h'}+3} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = x_r \end{cases}$$

6.2 Raízes de aplicações de $\mathbb{R}P_g^2$ em W_n

Seja uma aplicação $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ tal que $\mathbb{R}P_g^2 \simeq T_k^2 \# \mathbb{R}P^2$ com $g = 2k + 1$ e $k \geq 1$. Considere $\Pi : \widetilde{\mathbb{R}P_g^2} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ o recobrimento duplo orientável, onde $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ é como na figura 3.2.

Na seção 3.2 foi considerado a região fundamental de $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ para fazer modificações, por homotopias, e concluir os resultados. Nesta seção, também, basta utilizar a aplicação $f \circ \Pi$ e a região fundamental de $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ para obter os conjuntos minimais de raízes.

Como vimos na seção 3.2, uma aplicação especial $h : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ é construída a partir de uma aplicação especial $f : T_k^2 \rightarrow W$. Portanto como uma aplicação especial h realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W , então uma aplicação especial f também será uma aplicação que realiza o conjunto minimal de raízes.

Neste caso o conjunto minimal de raízes de h em $x \in W \setminus \{P\}$ é o conjunto minimal de raízes de f em $x \in W \setminus \{P\}$ e o conjunto minimal de raízes de h em P é o conjunto minimal de raízes de f em P união com $S^1 = \Pi(\partial CN)$.

Seja $p_{[f]}(t)$ o polinômio associado a f . Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W$.

Caso $p_{[f]}(t) = 1$, então o conjunto $M(f, x)$ tem cardinalidade 1.

Caso contrário suponha que $0 \neq r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$ (observe que $r > 1$) então o conjunto de raízes é como abaixo,

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^n S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-2} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+4} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

Analogamente para o caso em que $n \geq 2$, isto é, uma aplicação especial $f' : T_k^2 \rightarrow W_n$ realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W_n e consequentemente uma aplicação especial $h' : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ construída a partir de f' realiza o conjunto minimal de raízes para os pontos de W_n .

Seja $p_{[h']}(t)$ o polinômio associado a h' . Neste caso o conjunto de raízes é

- se $p_{[f']}(t) = \mathbb{O}$, então $M(h', x) = \emptyset$ para todo $x \in W$
- se $p_{[f']}(t) = 1$, então $M(h', x)$ tem cardinalidade 1.
- caso contrário, desde que o conjunto minimal de raízes de aplicações $h : T_k^2 \rightarrow W$ é igual ao conjunto minimal de raízes de aplicações $h' : T_k^2 \rightarrow W_n$, segue que o conjunto minimal de raízes de $f' : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ é igual ao conjunto minimal de raízes de aplicações $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$.

Seja uma aplicação $f : K \rightarrow W$ tal que K é a garrafa de Klein. Considere $\Pi : T^2 \rightarrow K$ o recobrimento duplo orientável, onde T^2 é como na figura 3.2.

Na seção 3.2 foi considerado a região fundamental de T^2 para fazer modificações, por homotopias, e concluir os resultados. Nesta seção, também, basta utilizar a aplicação $f \circ \Pi$ e a região fundamental de $\widetilde{\mathbb{R}P_g^2}$ para obter os conjuntos minimais de raízes.

Como vimos na seção 3.2, uma aplicação especial $f : K \rightarrow W$ é construída a partir de uma aplicação $h : F \rightarrow W$. Usando as técnicas da seção 5.1 mostra-se que a aplicação h realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W , logo uma aplicação especial f também será uma aplicação que realiza o conjunto minimal de raízes.

Neste caso o conjunto minimal de raízes de f em $x \in W \setminus S^1$ é o conjunto minimal de raízes de h em $x \in W \setminus S^1$, o conjunto minimal de raízes de f em $x \in W \setminus S^2$ é o conjunto minimal de raízes de $h|_D$ em $x \in W \setminus S^2$ união com l S^1 .

Seja $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ o polinômio associado a f e $f_\pi(\pi_1(K)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$. Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l = 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W$.

Se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l \neq 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W \setminus S^1$ e $M(f, x) = \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$ para cada $x \in S^1 \subset W$.

Caso $p_{[f]}(t) = 1$ e $l = 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W \setminus S^2$ e $M(f, x)$ tem cardinalidade 1 para cada $x \in S^2 \subset W$.

Caso $p_{[f]}(t) = 1$ e $l \neq 0$, então $M(f, x)$ tem cardinalidade 1 para todo $x \in W \setminus S^1$, $M(f, x) = \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$ para cada $x \in W \setminus S^2$ e $M(f, P) = S^1 \vee S^1$.

Caso contrário ponha que $0 \neq r = \#\{a_i; a_i \neq 0\}$ (observe que $r > 1$) e $l \neq 0$, então o conjunto minimal de raízes é como abaixo,

$$M(f, x) = \begin{cases} \text{tem cardinalidade } r & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^1 \\ \bigsqcup_{j=1}^{n+l} S_j^1 & , \quad \text{se } x \in W \setminus S^2 \\ \left(\bigsqcup_{j=1}^{r-1} (S^1 \vee S^1)_j \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-r+3+l-1} S_j^1 \right) & , \quad \text{se } x = P \end{cases}$$

Analogamente para o caso em que $n \geq 2$, isto é, uma aplicação especial $h : T^2 \rightarrow W_n$ realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W_n e conseqüentemente a aplicação especial $f : K \rightarrow W_n$ construída a partir de f realiza o conjunto minimal de raízes para os pontos de W_n .

Seja $p_{[f]}(t) = a_0 + \dots + a_k t^k$ o polinômio associado a f e $f_\pi(\pi_1(K)) \simeq \mathbb{Z} \langle l \rangle$. Neste caso o conjunto de raízes é

- se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l = 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W$.

- se $p_{[f]}(t) = \mathbb{O}$ e $l \neq 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W \setminus S^1$ e $M(f, x) = \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$ para cada $x \in S^1 \subset W$.

- caso $p_{[f]}(t) = 1$ e $l = 0$, então $M(f, x) = \emptyset$ para todo $x \in W \setminus S^2$ e $M(f, x)$ tem

cardinalidade 1 para cada $x \in S^2 \subset W$.

- caso $p_{[f]}(t) = 1$ e $l \neq 0$, então $M(f, x)$ tem cardinalidade 1 para cada $x \in W \setminus S^1$, $M(f, x) = \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$ para todo $x \in W \setminus S^2$ e $M(f, P) = S^1 \vee S^1$.

Caso contrário, desde que o conjunto minimal de raízes de aplicações $f|_{\Pi(D)} : \Pi(D) \rightarrow W_n$ é igual ao conjunto minimal de raízes de aplicações $f' : D \rightarrow W_n$, segue que o conjunto minimal de raízes de $f : K \rightarrow W_n$ é:

- para $x \in W_n \setminus S^1$, $M(f, x) = M(f', x)$.
- para $x \in e_i^1 \setminus \{x_i, x_{i+1}\}$, $M(f, x) = M(f', x) \bigcup \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$.
- ponha que $k = jn + m$, onde $0 \leq m < n$. Logo para $x = x_i$ tal que $i \neq m$, $M(f, x) = M(f', x) \bigcup \bigsqcup_{i=1}^l S_i^1$.
- para $x = x_m$, $M(f, x) = (M(f', x) \setminus S^1) \bigcup S^1 \vee S^1 \bigsqcup_{i=1}^{l-1} S_i^1$.

Por fim, sejam $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W$ tal que $g = 2k$ com $k > 1$ e $\Pi : T_{2+1} \rightarrow W$ o recobrimento duplo orientável.

Da mesma maneira que antes, as aplicações especiais realizam o conjunto minimal de raízes.

Uma aplicação especial é construída a partir de uma aplicação $h : F \rightarrow W$, onde F é a região fundamental de T_{2k+1} . Na construção da aplicação especial são identificadas duas circunferências de F para obter uma aplicação $h' : T_{k+1} \rightarrow W$ para construir f .

Portanto para $x \in W$, $M(f, x)$ é igual $M(h', x)$.

Analogamente para o caso em que $n \geq 2$, isto é, uma aplicação especial $f : \mathbb{R}P_g^2 \rightarrow W_n$ realiza o conjunto minimal de raízes para pontos de W_n e para cada $x \in W_n$, $M(f, x)$ é igual $M(h', x)$, onde $h' : T_{k+1} \rightarrow W_n$ é uma aplicação especial usada para construir a aplicação f .

Apêndice

Homologia com Coeficientes Locais

Apresentaremos uma introdução de homologia com coeficientes locais que foi usada ao longo do trabalho, para mais detalhes ver livro [13].

Dado um grupo π , denotaremos por $\mathbb{Z}\pi$ o seu anel de grupo.

Sejam A um grupo abeliano e um homomorfismo de grupos $\rho : \pi \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$, onde $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A) = \{h : A \rightarrow A | h \text{ é automorfismo}\}$. O homomorfismo ρ induz em A uma estrutura de $\mathbb{Z}\pi$ -módulo a esquerda pela seguinte ação

$$\left(\sum_{g \in \pi} m_g g \right) a = \sum_{g \in \pi} m_g \rho(g)(a).$$

Reciprocamente se A é um módulo a esquerda sobre o anel $\mathbb{Z}\pi$, então existe um homomorfismo

$$\rho : \pi \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$$

dado por $\rho(g)(a) = ga$, onde ga é a multiplicação de $a \in A$ por $g \in \pi$.

Definição 6.2.1. *Sejam E, B espaços topológicos, A grupo abeliano com a topologia discreta e G um subgrupo de $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$. Então um recobrimento $p : E \rightarrow B$ com fibra A e grupo estrutural G é um sistema de coeficientes locais sobre B . Além disso, cada fibra $p^{-1}(b)$ é isomorfa a A .*

Definição 6.2.2. *Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal. Suponha que G atua a esquerda sobre um espaço F , isto é, é dada uma ação $G \times F \rightarrow F$. A construção de Borel*

$$E \times_G F$$

é dado pelo espaço quociente $\frac{E \times F}{\sim}$, onde $(x, f) \sim (xg, g^{-1}f)$.

Denotemos a classe de equivalência de (x, f) por $[x, f] \in E \times_G F$. Definimos a aplicação $q : E \times_G F \rightarrow B$ por $q([x, f]) = p(x)$.

Definição 6.2.3. Se $p : E \rightarrow B$ é um G -fibrado principal e G atua sobre F , então

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \times_G F \\ & & \downarrow q \\ & & B \end{array}$$

é um fibrado sobre B com fibra F e grupo estrutural G , onde $q([x, f]) = p(x)$. A aplicação $q : E \times_G F \rightarrow B$ é chamada fibrado associado ao fibrado principal $p : E \rightarrow B$ via a ação de G sobre F .

Lema 6.2.1. Todo sistema de coeficientes locais sobre um espaço B conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo é da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \tilde{B} \times_{\pi_1(B)} A \\ & & \downarrow q \\ & & B \end{array}$$

isto é, é o fibrado associado ao $\pi_1(B)$ -fibrado principal dado pelo recobrimento universal $\tilde{B}$ de B , onde a ação é dada por um homomorfismo $\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$.

Seja X um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo com recobrimento universal $\tilde{X}$. Daqui por diante $\pi = \pi_1(X)$. Para definir homologia com coeficientes locais daremos uma estrutura de $\mathbb{Z}\pi$ -módulo aos complexos singulares $S_*(\tilde{X})$, onde $S_*(\tilde{X})$ é o grupo abeliano livre gerado por $\{\delta : \Delta^* \rightarrow \tilde{X} \mid \delta \text{ é contínua}\}$ e ∂ é o operador bordo usual.

Seja $\tilde{X} \rightarrow X$ o recobrimento universal de X com a π -ação usual a direita obtida por identificação de π com o grupo de transformações de recobrimento.

A ação de um elemento $g \in \pi$ sobre um simplexo singular $\delta : \Delta^k \rightarrow \tilde{X}$ é o simplexo singular $g\delta$ definido como a composição de δ e a transformação recobrimento $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$.

Estendendo esta ação por linearidade para $\mathbb{Z}\pi$, tem-se que o complexo de cadeias do recobrimento universal é constituído por $\mathbb{Z}\pi$ -módulos livres a direita e os operadores bordos são $\mathbb{Z}\pi$ homomorfismos.

Definição 6.2.4. *Seja um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo com recobrimento universal $\tilde{X}$. Dado um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo A , então o produto tensorial*

$$S_*(X; A) = S_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} A$$

é um complexo de cadeias cuja homologia é chamada homologia de X com coeficientes locais em A e é denotado por $H_(X; A)$.*

A estrutura de $\mathbb{Z}\pi$ -módulo de A é determinada, como vimos anteriormente, por um homomorfismo $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$. Às vezes para enfatizar este homomorfismo colocaremos um subíndice ρ em A e denotaremos $H_*(X; A_\rho)$ para homologia com coeficientes em A .

Definição 6.2.5. *Sejam $p : E \rightarrow B$ um fibrado com fibra F e grupo estrutural G . Dada uma aplicação $f : B' \rightarrow B$ o “pullback” de $p : E \rightarrow B$ por f é o espaço*

$$f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\}.$$

Se considerarmos $q : f^*(E) \rightarrow B'$ como sendo a restrição da projeção $E \times B' \rightarrow B'$ a $f^*(E)$, então q é um fibrado com fibra F e grupo estrutural G com o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\quad} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \end{array}$$

Observe que dados uma aplicação $f : B' \rightarrow B$ e um sistema local em B , usando o “pullback” tem-se um sistema local sobre B' .

Sequência de Puppe-Barrat

Apresentamos alguns resultados de caracterização de classes de homotopia, a referência principal é [21].

Cone, suspensão e produto smash

Para efeito de notação colocamos alguns conceitos e resultados.

Definição 6.2.6. *O produto smash $(X \wedge Y, *)$ entre dois espaços topológicos pontuados (X, x_0) e (Y, y_0) é o quociente*

$$\frac{X \times Y}{X \vee Y}$$

com o ponto base $*$ $= p(X \vee Y)$, onde $\vee$ denota o wedge e $p : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ é a projeção tal que $p(x, y) \in X \wedge Y$ é denotado por $[x, y]$.

Teorema 6.2.1. *Sejam (X, x_0) , (Y, y_0) , (Z, z_0) espaços topológicos pontuados, tais que X, Z são Hausdorff e Z é localmente compacto, então existe uma equivalência de homotopia*

$$A : [(Z \wedge X, *); (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0); (Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0]$$

definida por $A([f]) = [\hat{f}]$, onde $\hat{f} : X \rightarrow Y^Z$ é dada por $(\hat{f}(x))(z) = f([z, x])$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [21]. Este resultado implica que podemos identificar os espaços $[(Z \wedge X, *); (Y, y_0)]$ e $[(X, x_0); (Y, y_0)^{(Z, z_0)}, f_0]$, onde $f_0 : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é a aplicação constante e este resultado será usado mais adiante.

Definição 6.2.7. *Se (X, x_0) é um espaço topológico pontuado, defini-se a suspensão pontuada $(SX, *)$ de X , pelo produto smash de X e da 1-esfera, isto é, $(S^1 \wedge X, *)$. Além disso, dada uma função contínua entre espaços pontuados $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ podemos definir a aplicação Sf suspensão de f , por*

$$Sf = 1 \wedge f : (S^1 \wedge X, *) \rightarrow (S^1 \wedge Y, *).$$

Observação: A operação de suspensão é um funtor, chamado funtor suspensão.

Definição 6.2.8. Considere um espaço topológico pontuado (X, x_0) . Então o cone pontuado $(CX, *)$ é o produto smash $(I \wedge X, *)$, onde o ponto base de I é o 0. Logo CX é o quociente

$$CX = \frac{I \times X}{(\{0\} \times X) \cup (I \times \{x_0\})}.$$

Por exemplo se considerar o espaço pontuado $X = S^1$ $x_0 \in S^1$. Então o $(CS^1, *) \cong D^2$.

Nós usaremos a notação $[t, x]$ para a imagem pela projeção de $(t, x) \in I \times X$ em CX . A aplicação $i : X \rightarrow CX$ dada por $i(x) = [1, x]$, $x \in X$, é um homeomorfismo com sua imagem $Im\ i$. Dessa forma podemos identificar o espaço X com $Im\ i$ e assim olhar X como um subespaço de CX . Logo $CX/X \cong SX$.

Definição 6.2.9. Dados uma função contínua $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e CX o cone de X , considere o espaço $Y \cup_f CX$ obtido de $Y \vee CX$ identificando os pontos $[1, x] \in CX$ com os pontos $f(x)$ para todo $x \in X$. Intuitivamente colamos a base do cone CX com Y através de f .

Considere $X = S^1$, $Y = S^1 \vee S^1$ e $f : (S^1, x_0) \rightarrow (S^1 \vee S^1, y_0)$ dada por $f(S^1) = aba^{-1}b^{-1}$, onde a significa que a imagem de S^1 pela f recobre $S^1 \vee *$ injetivamente em uma direção e a^{-1} recobre injetivamente em outra direção, analogamente b e b^{-1} recobre $* \vee S^1$. Então $Y \cup_f CX \cong T^2$.

Os próximos dois resultados podem serem encontrados em [21] e resultará numa equivalência de homotopia que será usado posteriormente.

Lema 6.2.2. Para qualquer função contínua entre espaços topológicos $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ a projeção

$$q : (Y \cup_f CX) \cup_j CY \rightarrow \frac{(Y \cup_f CX) \cup_j CY}{CY}$$

é uma equivalência de homotopia, onde $j : Y \rightarrow Y \cup_f CX$ é a inclusão.

Proposição 6.2.1. Se $A \subset X$ é um subespaço, então $\frac{X \cup_i CA}{CA}$ é homeomorfo a $\frac{X}{A}$, onde $i : A \rightarrow X$ é a inclusão.

Em particular temos $\frac{(Y \cup_f CX) \cup_j CY}{CY} \cong \frac{Y \cup_f CX}{Y} \cong \frac{CX}{X} \cong SX$.

Sequência de Puppe-Barrat

Nesta seção será introduzido a sequência de Puppe-Barrat, que pode ser encontrada em [21]. Os estudos desta sequência foi iniciado por Michael G. Barratt em [3] e [4] e propriedades e alguns resultados sobre a sequência de Puppe foi feita por Dieter Puppe em [18]. A construção desta sequência fornece uma ação de grupo. A sequência junto com a ação caracterizará um elemento $f \in [S, W]$ explicitando geometricamente como é a aplicação. Segue abaixo, alguns conceitos e resultados necessários para definir a sequência.

Relembraremos alguns conceitos de álgebra e definiremos a sequência exata de Puppe-Barrat.

Definição 6.2.10. *Um grupo é um conjunto pontuado (G, e) com uma multiplicação $\mu : G \times G \rightarrow G$ e uma inversa $\nu : G \rightarrow G$ tais que os seguintes diagramas comutam:*

1. *e é uma identidade nos dois lados;*

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(e,1)} & G \times G & \xleftarrow{(1,e)} & G \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & G & & \end{array}$$

2. *associatividade;*

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times 1} & G \times G \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

3. *inversa;*

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(\nu,1)} & G \times G & \xleftarrow{(1,\nu)} & G \\ & \searrow e & \downarrow \mu & \swarrow e & \\ & & G & & \end{array}$$

onde $e : G \rightarrow G$ é a aplicação constante $e(g) = e$ para todo $g \in G$, $(e, 1)(g) = (e, g)$ para todo $g \in G$.

Além disso, G é chamado comutativo ou abeliano se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{T} & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & G & \end{array}$$

onde $T : G \times G \rightarrow G \times G$ é dada por $T(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ para todo $(g_1, g_2) \in G \times G$.

Motivado pela definição de grupo foi feita a seguinte definição.

Definição 6.2.11. Um H -espaço é um espaço pontuado (K, k_0) com uma aplicação multiplicação $\mu : K \times K \rightarrow K$ tal que vale as seguintes propriedades:

1. $k_0 : K \rightarrow K$ é uma identidade homotópica, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{(k_0, Id_K)} & K \times K & \xleftarrow{(Id_K, k_0)} & K \\ & \searrow Id_K & \downarrow \mu & \swarrow Id_K & \\ & & K & & \end{array}$$

comuta homotopicamente, isto é, $\mu \circ (Id_K, k_0) \cong Id_K \cong \mu \circ (k_0, Id_K)$.

2. μ é associativa homotópica, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \times K \times K & \xrightarrow{\mu \times Id_K} & K \times K \\ Id_K \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ K \times K & \xrightarrow{\mu} & K \end{array}$$

o diagrama acima comuta homotopicamente: $\mu \circ (\mu \times Id_K) \cong \mu \circ (Id_K \times \mu)$.

3. $\nu : (K, k_0) \rightarrow (K, k_0)$ é inversa homotópica:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{(\nu, Id_K)} & K \times K & \xleftarrow{(Id_K, \nu)} & K \\ & \searrow k_0 & \downarrow \mu & \swarrow k_0 & \\ & & K & & \end{array}$$

o diagrama acima comuta homotopicamente: $\mu \circ (\nu, Id_K) \cong k_0 \cong \mu \circ (Id_K, \nu)$.

4. μ é comutativo homotópica:

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{T} & K \times K \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & K & \end{array}$$

o diagrama acima comuta homotopicamente: $\mu \circ T \cong \mu$, onde $T : K \times K \rightarrow K \times K$ é dada por $T(k_1, k_2) = (k_2, k_1)$ para todo $(k_1, k_2) \in K \times K$.

Um H -grupo é um H -espaço (K, k_0) com multiplicação associativa homotópica μ e inversa homotópica ν . Para a simplificar notação não foi usado ponto base, mas todas as aplicações na definição são relativas ao ponto base.

A partir desta definição temos a seguinte proposição:

Proposição 6.2.2. *Se (K, k_0) é um H -grupo com multiplicação μ' e inversa homotópica ν' , então para qualquer espaço topológico pontuado (X, x_0) o conjunto*

$$[(X, x_0); (K, k_0)]$$

tem uma estrutura de grupo se definirmos o produto $[f][g]$ pela classe de homotopia da seguinte composição:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} K \times K \xrightarrow{\mu} K,$$

onde Δ é dada por $\Delta(x) = (x, x)$. A identidade do grupo é a classe $[k_0]$ da função constante e a inversa é dada por $[f]^{-1} = [\nu \circ f]$. Se μ' é homotópica comutativa, então $[(X, x_0); (K, k_0)]$ é abeliano. Toda função $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz um homomorfismo de grupos

$$f^* : [(Y, y_0); (K, k_0)] \rightarrow [(X, x_0); (K, k_0)].$$

Assim como foi feito a construção a partir de um H -grupo, pode ser feito uma construção “dualizando” os espaço e as função, por exemplo será feito tomando o espaço $K \vee K$ ao invés de $K \times K$.

Definição 6.2.12. *Um H -cogrupo é um espaço topológico pontuado (K, k_0) junto com um função contínua comultiplicação $\mu' : K \rightarrow K \vee K$ tal que:*

1. k_0 é a homotopia identidade, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K & \xleftarrow{(k_0,1)} & K & \vee & K & \xrightarrow{(1,k_0)} & K \\ & \searrow 1 & \uparrow \mu' & & \nearrow 1 & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

comuta homotopicamente, onde $(k_0, 1)(k, k_0) = k_0$ e $(k_0, 1)(k_0, k) = k$ para todo $k \in K$.

2. μ' é associativa homotópica, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \vee K \vee K & \xleftarrow{\mu' \vee 1} & K \vee K \\ \uparrow 1 \vee \mu' & & \uparrow \mu' \\ K \vee K & \xleftarrow{\mu'} & K \end{array}$$

comuta homotopicamente.

3. K tem uma inversa homotópica $\nu' : K \rightarrow K$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K & \xleftarrow{(\nu',1)} & K & \vee & K & \xrightarrow{(1,\nu')} & K \\ & \searrow k_0 & \uparrow \mu' & & \nearrow k_0 & & \\ & & K & & & & \end{array}$$

comuta homotopicamente.

Além disso, K é um H -cogruppo comutativo homotópico se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \vee K & \xrightarrow{T} & K \vee K \\ & \searrow \mu' & \nearrow \mu' \\ & K & \end{array}$$

comuta homotopicamente.

Um exemplo de H -cogruppo é (SX, x_0) para um espaço topológico X . A aplicação comultiplicação μ' é definida por

$$\mu'([t, x]) = \begin{cases} ([2t, x], x_0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x_0, [2t - 1, x]) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A homotopia inversa $\nu' : SX \rightarrow SX$ é dada por $\nu'([t, x]) = [1 - t, x]$, para todo $t \in I$, $x \in X$.

Proposição 6.2.3. *Se (K, k_0) é um H -cogrupo com comultiplicação μ' e inversa homotópica ν' , então para qualquer espaço topológico pontuado (X, x_0) o conjunto*

$$[(K, k_0); (X, x_0)]$$

tem uma estrutura de grupo definida por; $[f][g]$ é a classe de homotopia da seguinte composição:

$$K \xrightarrow{\mu'} K \vee K \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X,$$

onde Δ' é dada por $\Delta'(x, x_0) = x = \Delta'(x_0, x)$. A identidade do grupo é a classe $[x_0]$ da função constante e a inversa é dada por $[f]^{-1} = [f \vee \nu']$. Se μ' é homotópica comutativa, então $[(K, k_0); (X, x_0)]$ é abeliano. Toda função $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz um homomorfismo de grupos

$$f_* : [(K, k_0); (X, x_0)] \rightarrow [(K, k_0); (Y, y_0)].$$

Dado um espaço topológico X , denotemos $S^n X$ pela suspensão do espaço $S^{n-1} X$, para $n \geq 1$ e $S^0 X = X$. Então vale os seguintes três resultados e suas provas podem ser encontradas em [21].

Proposição 6.2.4. *Dado um espaço topológico X . Então $S^n X$ é um H -cogrupo comutativo homotópico, para $n \geq 2$.*

Lema 6.2.3. *Para todo $n \geq 0$ tem-se $S^1 \wedge S^n$ é homeomorfo a S^{n+1} , onde S^i é a esfera de dimensão i .*

Corolário 6.2.1.1. *Para todo espaço topológico X e $n \geq 0$ tem-se que $S^n X$ é homeomorfo a $S^n \wedge X$.*

Definição 6.2.13. Um grupo G atua (à esquerda) sobre um conjunto A se existe uma função $\alpha : G \times A \rightarrow A$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} i) & A \xrightarrow{(e,1)} G \times A & \\ & \searrow 1 \quad \downarrow \alpha & \\ & A & \end{array} \quad ii) \begin{array}{ccc} G \times G \times A & \xrightarrow{1 \times \alpha} & G \times A \\ \mu \times 1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ G \times A & \xrightarrow{\alpha} & A, \end{array}$$

onde $\mu : G \times G \rightarrow G$ é a função multiplicação de G e $(e, 1)(x) = (e, x)$ para todo $x \in A$. As órbitas da ação são os conjuntos $Gx = \{gx : g \in G\}$ para $x \in A$.

Definição 6.2.14. Um H -cogrupo (K, k_0, μ') coatua sobre um espaço (X, x_0) se existe um função coação $\alpha' : X \rightarrow K \vee X$ tais que os seguintes diagramas comutam homotopicamente :

$$\begin{array}{ccc} i) & X \xleftarrow{(x_0,1)} K \vee X & \\ & \swarrow 1 \quad \uparrow \alpha' & \\ & X & \end{array} \quad ii) \begin{array}{ccc} K \vee K \vee X & \xleftarrow{1 \vee \alpha'} & K \vee X \\ \mu' \vee 1 \uparrow & & \uparrow \alpha' \\ K \vee X & \xleftarrow{\alpha'} & X. \end{array}$$

Proposição 6.2.5. Se o H -cogrupo (K, k_0, μ') coatua sobre o espaço (X, x_0) com a função coação α' , então para todo espaço (W, w_0) existe uma ação natural do grupo $[(K, k_0); (W, w_0)]$ sobre o conjunto $[(X, x_0); (W, w_0)]$ dada por

$$\alpha([f], [g]) = [\Delta' \circ (f \vee g) \circ \alpha'],$$

onde $f : (K, k_0) \rightarrow (W, w_0)$ e $g : (X, x_0) \rightarrow (W, w_0)$ são quaisquer.

Com estas definições e resultados definiremos a principal aplicação coação que será importante para os resultados da próxima subseção.

Dados dois espaços topológicos pontuados (X, x_0) , (Y, y_0) e uma função contínua $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, constrói-se a aplicação

$$\alpha' : Y \cup_f CX \rightarrow SX \vee (Y \cup_f CX)$$

definida por

$$\alpha'(y) = (*, y)$$

$$\alpha'([t, x]) = \begin{cases} ([2t, x], *) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (*, [2t - 1, x]) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

geometricamente temos

Lema 6.2.4. A função α' definida acima é uma coação. Além disso, considere as inclusões $j : Y \rightarrow Y \cup_f CX$ e $k : Y \cup_f CX \rightarrow (Y \cup_f CX) \cup_j CY$ e a equivalência de homotopia $\bar{q} : (Y \cup_f CX) \cup_j CY \rightarrow SX$. Defina $k' = \bar{q} \circ k$. Então α' tem as seguintes propriedades:

- i) $\alpha' \circ j = (*, j)$,
- ii) $\mu' \circ k' = (1 \vee k') \circ \alpha'$.

Exemplo 1. Consideremos $X = S^1$, $Y = S^1 \vee S^1$ e $f : X \rightarrow Y$ função contínua tal que $CS^1 \cup_f S^1 \vee S^1 = T^2$. Então $\alpha' : Y \cup_f CX \rightarrow SX \vee (Y \cup_f CX)$ é da seguinte forma;

isto significa que a coação α' “pinça” uma S^1 (bordo de um disco D^2) a um ponto, dando origem à uma $S^2 = SS^1$ colada ao toro por um “ponto”.

Na próxima subseção será descrita a ação de $[(S^2, s_0); (W, w_0)]$ sobre o conjunto $[(S, x_0); (W, w_0)]$ dada por esta α' .

Dadas duas aplicações $f_1, f_2 : Y \cup_f CX \rightarrow W$ tal que $f_1|_Y = f_2|_Y$ podemos definir

$$d(f_1, f_2) : SX \rightarrow W$$

por

$$d(f_1, f_2)([t, x]) = \begin{cases} f_1([2t, x]) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2([2 - 2t, x]) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lema 6.2.5. *Para quaisquer aplicações $f_1, f_2 : Y \cup_f CX \rightarrow W$ tais que $f_1|_Y = f_2|_Y$ tem-se*

$$[d(f_1, f_2)][f_2] = [f_1].$$

Teorema 6.2.2. *Sejam $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma função contínua entre espaços topológicos pontuados, (W, w_0) um espaço topológico pontuado e as inclusões $j : Y \rightarrow Y \cup_f CX$ e $k : Y \cup_f CX \rightarrow (Y \cup_f CX) \cup_j CY$. Considere a equivalência de homotopia $\bar{q} : (Y \cup_f CX) \cup_j CY \rightarrow SX$. Então existe uma ação natural do grupo $[(SX, *); (W, w_0)]$ sobre o conjunto $[(Y \cup_f CX, *); (W, w_0)]$ tal que na sequência exata abaixo, conhecida como sequência de Puppe-Barrat,*

$$[X; W] \xleftarrow{f^*} [Y; W] \xleftarrow{j^*} [Y \cup_f CX; W] \xleftarrow{k'^*} [SX; W] \xleftarrow{Sf^*} [SY; W]$$

vale o seguinte:

- i) para $x_1, x_2 \in [Y \cup_f CX; W]$, temos $j^*(x_1) = j^*(x_2)$ se, e somente se, existe $\theta \in [SX; W]$ tal que $\theta x_2 = x_1$;
- ii) para $y_1, y_2 \in [SX; W]$ temos $k'^*(y_1 + y_2) = y_1 \cdot k'^*(y_2)$;
- iii) para $y_1, y_2 \in [SX; W]$ temos $k'^*(y_1) = k'^*(y_2)$, se e somente se, existe um $\gamma \in [SY; W]$ com $y_2 = y_1 + Sf^*(\gamma)$;
- iv) $k'(y) = y \cdot [w_0]$ para todo $y \in [SX; W]$.

A prova deste teorema e dos dois lemas anteriores podem ser encontrados em [21] nos capítulos 1 e 2.

6.3 A sequência de Puppe-Barrat no caso $[T^2; W]$ e alguns resultados

Usando os resultados das seções anteriores entre outros, será feita uma descrição geométrica da ação de $[S^2; W]$ sobre $[T^2; W]$ e utilizando a sequência de Puppe-Barrat, as

classes de homotopia de aplicações de T^2 em W serão caracterizadas. Para uma melhor didática as classes de homotopia de aplicações serão divididas em vários casos.

Seguindo as notações da seção anterior, temos os $X = S^1$, $Y = S^1 \vee S^1$. Considere $f : X \rightarrow Y$ a função contínua tal que $D^2 \cup_f S^1 \vee S^1 = T^2$ e $j : Y \rightarrow S^1 \cup_f C(S^1)$ é a inclusão natural.

Construindo a sequência de Puppe-Barrat para estes espaços temos:

$$\begin{aligned} [S^1; W] \xleftarrow{f^*} [S^1 \vee S^1; W] \xleftarrow{j^*} [S^1 \vee S^1 \cup_f C(S^1); S^2 \vee T^2] \xleftarrow{k'^*} \\ \xleftarrow{k'^*} [S(S^1); W] \xleftarrow{Sf^*} [S(S^1 \vee S^1); W] \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Pelas definições de suspensão e cone, temos $S(S^1) = S^2$ e $(S^1 \vee S^1) \cup_f C(S^1) = T^2$. Portanto a sequência 6.3.1 se torna

$$[S^1; W] \xleftarrow{f^*} [S^1 \vee S^1; W] \xleftarrow{j^*} [T^2; W] \xleftarrow{k'^*} [S^2; W] \xleftarrow{Sf^*} [S(S^1 \vee S^1); W], \quad (6.3.2)$$

Pelo resultado 5.19 do capítulo 3 de [22], $[S^1 \vee S^1; W] = [S^1; W] \times [S^1; W]$.

Portanto tomemos $[A] = ([A_1], [A_2]) \in [S^1; W] \times [S^1; W]$. Agora $f^*([A]) = [A \circ f]$ e afirmo que $f^*([A]) = 0$. Pois, suponha que $[A_1]$ é a classe que dá x voltas em $S^1 \subset W$ e $[A_2]$ dá y voltas em $S^1 \subset W$. A aplicação f é representada por $aba^{-1}b^{-1}$, onde a significa que f dá uma volta numa S^1 e b que f dá uma volta na outra S^1 e a^{-1} e b^{-1} são voltas no sentido contrário. Então $f^*([A])$ dará $xyx^{-1}y^{-1}$ voltas em $S^1 \subset W$. Por propriedades de homotopia e sabendo-se que o caminho representado por $xyx^{-1}y^{-1}$ é homotópico ao caminho constante ($\pi_1(W) \simeq \mathbb{Z}$ é abeliano). O que implica que $f^*([A]) = 0$.

Da mesma maneira vê-se que $Sf^* = 0$, por definição de suspensão de aplicação. Simplificando a sequência 6.3.2, temos:

$$0 \xleftarrow{f^*} [S^1 \vee S^1; W] \xleftarrow{j^*} [T^2; W] \xleftarrow{k'^*} [S^2; W] \xleftarrow{Sf^*} 0. \quad (6.3.3)$$

Pelo teorema 6.2.2, $[S^2, W]$ atua sobre $[T^2, W]$ segundo a ação definida em 6.2.5. O conjunto $[T^2, W]$ será caracterizado descrevendo-se esta ação e utilizando a sequência de

Puppe-Barrat.

Ação de $[S^2, W]$ em $[S^2, W] \subset [T^2, W]$

Primeiramente algumas propriedades e observações.

Dada uma classe de homotopia $[h] \in [T^2, W]$, tal que $h_\pi : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(W)$ seja o homomorfismo nulo, então $[h] \in [S^2, W] \subset [T^2, W]$, onde $k'^*([S^2; W])$ é identificado à $[S^2; W]$ já que k'^* é injetiva. Como $h_\pi = 0$, então h se levanta a uma aplicação $\tilde{h} : T^2 \rightarrow \tilde{W}$, onde $\tilde{W}$ é o espaço de recobrimento universal esquematizado anteriormente.

Defina uma aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ tal que $\tilde{g}(S^2) = \tilde{h}(T^2)$, onde $\tilde{g}$ é o levantamento de g ao recobrimento universal $\tilde{W}$. Por definição $k'^*([g]) = [h]$. Como k'^* é injetiva, identificamos $[h]$ à $[g]$.

Sejam $f_1, f_2 \in [T, W]$ tal que $(f_1)_\pi = (f_2)_\pi = 0$, isto é, $[f_1], [f_2] \in [S^2, W]$, como descrito acima. Pelo lema 6.2.5 temos

$$[d(f_1, f_2)][f_1] = [f_2].$$

Portanto dadas $[f] \in [S^2, W]$ e $[f_1] \in [T, W]$ tal que $(f_1)_\pi = 0$, então existe $[f_2] \in [T, W]$ tal que $[f] = [d(f_1, f_2)]$. A construção de f_2 é da seguinte forma. Seja o toro dado pelo quadrado abaixo com os lados identificados

Então imagem de f_2 é dada por; a parte hachurada unida com os bordos de ∂D_1 e ∂D_2 é levada no ponto de *wedge* de W , $f_2(x) = f_1(x)$ se $x \in \text{Int}(D_1)$ e $f_2(x) = f(x)$ se $x \in \text{Int}(D_2)$. Logo $[f][f_1] = [f_2]$.

Dessa forma, a ação sobre $[S^2, W]$ é trivial, no sentido que a imagem da ação de $[S^2, W]$ sobre $[S^2, W] \subset [T^2, W]$ é o próprio conjunto $[S^2, W] \subset [T^2, W]$.

Geometricamente a ação é da seguinte forma: como $(f)_\pi = (f_1)_\pi = 0$ então existem levantamentos $\tilde{f}, \tilde{f}_1 : T^2 \rightarrow \widetilde{W}$, onde $\widetilde{W}$ é o espaço de recobrimento de W , comutando os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \tilde{f}_1 & \widetilde{W} \\ T^2 & \xrightarrow{f_1} & W \\ & \searrow p & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow \tilde{f} & \widetilde{W} \\ T^2 & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow p & \end{array}$$

Suponha que as imagens de $\tilde{f}, \tilde{f}_1$ sejam respectivamente as área vermelha e azul abaixo,

onde $\tilde{f}$ recobre x vezes S_n^2 e $\tilde{f}_1$ recobre x_1 vezes S_m^2 . Lembrando do exemplo 1, a ação de $[f][f_1]$ terá imagem

e recobre x vezes S_n^2 e x_1 vezes S_m^2 . Descrevendo algebricamente, temos as classes de homotopias $[f], [f_1] \in [S^2, W] = \pi_2(W) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ como polinômios e basta somar os

polinômios, como feito na seção 1.2.

Ação de $[S^2, W]$ em $[T^2, W] \setminus [S^2; W]$

Sejam $f \in [S^2, W]$ e $f_1 \in [T^2, W] \setminus [S^2; W]$, isto é, $(f_1)_\pi \neq 0$. Primeiramente suponha que $f_1(T) \subset S^1 \vee \{x_0\}$. De acordo com a ação $[f][f_1] = [\Delta' \circ (f \vee f_1) \circ \alpha'] = [g]$, onde α' definido como em 6.2.2. Temos, a menos de homotopia, $f|_{S^1 \vee S^1} = x_0$, então $f_1|_{S^1 \vee S^1} = g|_{S^1 \vee S^1}$. Logo $[d(f_1, g)] = [f]$ já que $[d(f_1, g)][f_1] = [g]$.

Geometricamente a ação age da seguinte maneira: denote $(f_1)_\pi$ a induzida de f_1 no grupo fundamental. Sejam $(1, 0), (0, 1) \in \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ os geradores tais que $(f_1)_\pi(1, 0) = x$ e $(f_1)_\pi(0, 1) = y$, onde $x, y \in \pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$ com $xy \neq 0$. Pois o caso $xy = 0$ é a situação anterior, onde $(f_1)_\pi = 0$. Como $f_1(T^2) \subset S^1 \vee \{x_0\}$, a menos de homotopia f_1 é dada esquematicamente como no quadrado abaixo, que é identificado no toro T^2 ,

onde os lados verticais estão divididos em x partes iguais e os lados horizontais do quadrado estão divididos em y partes iguais. Assim cada uma destas partes, denotado por μ , é levado por f_1 em $S^1 \subset W$ recobrindo uma vez. A imagem de toda a parte verde é o ponto de *wedge* de W .

Sobre este toro selecionamos um disco D , como no esquema abaixo

Agora a ação de $[f]$ sobre $[f_1]$ resultará na classe $[g] \in [T^2; W]$. Esta aplicação g é dada tomando um outro disco D_1 no interior do disco construído anteriormente, o qual será o domínio de f como segue,

Assim como antes, g leva μ em $S^1 \subset W$, cobrindo uma vez, e toda a parte verde é levado no ponto $\{x_0\} \in S^1 \vee \{x_0\}$ e, no disco D_1 , g é definida como f . Isto é,

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in T \setminus D \\ x_0 & \text{se } x \in D \setminus \overset{\circ}{D}_1 \\ f(x) & \text{se } x \in \overset{\circ}{D}_1 \end{cases}$$

Por construção g é contínua e satisfaz $[d(f_1, g)][f_1] = [g]$.

No caso em que $f_1 \in [T^2, W] \setminus [S^2; W]$ é sobrejetora, temos $[f_1] = [g][f]$, onde $[f]$ e $[g]$ são construídas a partir de f_1 de forma que $[g] \in [S^2; W]$ e $[f] \in [T^2, W] \setminus [S^2; W]$

tal que $f(T^2) = S^1 \vee \{x_0\}$. Usando as mesmas técnicas da seção 1.2, mostra-se que $(f_1)^{-1}(W \setminus S^1 \vee \{x_0\})$ é uma união finita disjunta de discos $\bigsqcup_{i=1}^n D_i$.

A aplicação f é construída de forma que $f(x) = f_1(x)$ para todo $x \in T^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^n D_i$ e $f(x) = x_0$ para $x \in \bigsqcup_{i=1}^n D_i$. Para cada disco D_i podemos considerar uma aplicação $g_i : S^2 \rightarrow W$ dada por $g_i(x) = f_1(x)$, onde $x \in D_i$. Então considere a aplicação $g : S^2 \rightarrow W$ por $[g] = [g_1] \dots [g_n]$. Portanto a função f_1 nada mais é do que a ação de g sobre f .

A ação no conjunto $[T^2; W]$, descreve que este conjunto é uma união disjunta de classes de equivalências de homotopia da seguinte maneira

$$[T^2; W] = \bigsqcup_{(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} [S^2; W]_{(x,y)}$$

onde $[S^2; W]_{(x,y)}$ é a ação de $[S^2; W]$ na classe de homotopia $[f]$ tal que $f_\pi(1, 0) = x$ e $f_\pi(0, 1) = y$.

Analogamente pode-se caracterizar o conjunto de classes de homotopias $[S, W]$, onde S é uma superfície compacta, conexa, orientável e sem bordo.

Neste caso, f^* e Sf^* são aplicações nulas também e as classes de homotopias de $[S, W]$ é caracterizada pela ação de classes de homotopias de $[S^2, W]$ em aplicações de S em S^1 .

É conhecido que o conjunto de classes de homotopias de aplicações de S em S^1 é

$H^1(S, \mathbb{Z})$ a cohomologia de S com coeficientes em $\mathbb{Z}$ no nível 1. Portanto temos uma bijeção entre $[S; W]$ e $\bigsqcup_{z \in H^1(S, \mathbb{Z})} [S^2; W]_z$.

Quando temos S uma superfície compacta, conexa, não orientável e sem bordo, é um pouco diferente. Por exemplo se considerarmos aplicações $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^2 \subset W$, pelo Corolário 16 (pág. 432) de [20] $[\mathbb{R}P^2, S^2] \simeq \mathbb{Z}_2$.

Seja $S = \mathbb{R}P_g^2$, então $\mathbb{R}P_g^2$ é obtida pela colagem $CS^1 \cup_f S_1^1 \vee \dots \vee S_g^1$, onde $X = S^1$, $Y = S_1^1 \vee \dots \vee S_g^1$ e $f : X \rightarrow Y$ é a aplicação contínua caracterizada pela palavra $a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$, onde a_i^2 significa que a imagem da f dá duas voltas em S_i^1 .

Pelo resultado 5.19 do capítulo 3 de [22], $[S_1^1 \vee \dots \vee S_g^1; W] = [S_1^1; W] \times \dots \times [S_g^1; W]$. Se $[A] = ([A_1], [A_2], \dots, [A_g]) \in [S_1^1; W] \times \dots \times [S_g^1; W]$ tal que $[A_i]$ é a classe que dá x_i voltas em $S^1 \subset W$. Então $f^*([A])$ dará $x_1^2 \dots x_g^2$ voltas em $S^1 \subset W$.

Da mesma maneira se $[B] \in [S_1^2 \vee \dots \vee S_g^2; W]$, então $[S_1^2 \vee \dots \vee S_g^2; W] = [S_1^2; W] \times \dots \times [S_g^2; W]$ e $[B] = ([B_1], \dots, [B_g])$, onde cada $[B_i]$ é caracterizado pelo grau. Assim se b_i é grau de cada $[B_i]$, então $Sf^*([B])$ terá grau igual a $b_1^2 \dots b_g^2$.

Portanto f^* e Sf^* é a multiplicação por dois em cada coordenada, desde que $[S_1^2 \vee \dots \vee S_g^2; W] = [S_1^2; W] \times \dots \times [S_g^2; W] \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{g\text{-vezes}} \simeq [S_1^1; W] \times \dots \times [S_g^1; W] = [S_1^1 \vee \dots \vee S_g^1; W]$.

Neste caso a sequência de Puppe-Barrat é

$$[S^1; W] \xleftarrow{f^* \bullet 2} [S_1^1 \vee \dots \vee S_g^1; W] \xleftarrow{j^*} [\mathbb{R}P_g^2; W] \xleftarrow{k'^*} [S^2; W] \xleftarrow{Sf^* \bullet 2} [S_1^2 \vee \dots \vee S_g^2; W]. \quad (6.3.4)$$

onde $\bullet 2$ significa que é a multiplicação por 2.

Denotemos por $\overline{[S^2; W]} \simeq \mathbb{Z}_2$ o conjunto $\frac{[S^2; W]}{Im(Sf^*)}$.

Portanto o conjunto de classes de homotopia $[\mathbb{R}P_g^2; W]$ é descrito como o seguinte

$$[\mathbb{R}P_g^2; W] = \bigsqcup_{z \in H^1(\mathbb{R}P_g^2, \mathbb{Z})} \overline{[S^2; W]}_z$$

Conclusão

As classes de homotopia do toro em W foram caracterizadas.

No caso S ser uma superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável as classes de homotopias de $[S, W]$ é caracterizada pela ação de classes de homotopias de $[S^2, W]$ em aplicações de S em S^1 .

É conhecido que o conjunto de classes de homotopias de aplicações de S em S^1 é $H^1(S, \mathbb{Z})$ a cohomologia de S com coeficientes em $\mathbb{Z}$ no nível 1. Portanto temos uma bijeção entre $[S; W]$ e $\bigsqcup_{z \in H^1(S, \mathbb{Z})} [S^2; W]_z$.

Já no caso de S ser uma superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável as classes de homotopias de $[S; W]$ é caracterizada pela ação das classes de homotopias de $[\overline{S^2}, W]$ em aplicações de S em S^1 . Portanto temos uma bijeção entre $[S; W]$ e $\bigsqcup_{z \in H^1(S, \mathbb{Z})} [\overline{S^2}; W]_z$.

Observe que para qualquer superfície compacta, conexa e sem bordo S a representação de classes de homotopias de aplicações de $f : S \rightarrow W$ é dada a partir do polinômio associado a classe $p_{[f]}(t)$ e pelo gerador da imagem da induzida em grupo fundamental $\langle l \rangle = f_\pi(\pi_1(S))$, considerando a aplicação especial construída a partir deste polinômio e deste número natural.

Se considerarmos $S = S^2$, cada aplicação especial representa uma única classe de homotopia de $[S^2; W]$. Logo existe uma bijeção entre aplicações especiais (que esta em bijeção com os polinômios associados) e o conjunto $[S^2; W]$.

Já, por exemplo, no caso se $S = T^2$, então existem menos aplicações especiais do que classes de homotopias de $[T^2; W]$. Pois, como vimos, o conjunto $[T^2; W]$ está em bijeção com $\bigsqcup_{(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} [S^2; W]_{(x,y)}$, pela sequência de Puppe-Barratt, e as aplicações especiais, que são caracterizadas pelos polinômios associado e por número natural, está em bijeção com o conjunto $\bigsqcup_{z \in \mathbb{N}} Pol_z$, onde $Pol = \{a_0 + \dots + a_n t^n; n \geq 0 \text{ e } a_i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ e o conjunto Pol esta em bijeção com $[S^2; W]$. Portanto para cada aplicação especial existem mais de uma classe de homotopia de $[T^2; W]$ que são representadas pela mesma aplicação especial.

Isto ocorre pois para obter a aplicação especial mudamos a classe de homotopia da aplicação usando homeomorfismo do domínio (quando é feita a escolha de base de $\pi_1(S)$)

ou em certos casos de $H_1(S, \mathbb{Z})$). Note que a configuração de raízes de $f : S \rightarrow W$ não muda se compomos f com homeomorfismo $h : S \rightarrow S$, com isso, estudar as raízes da classe $[f]$ é equivalente a estudar raízes de $[f \circ h]$, isto explica a diminuição da quantidade de classes de homotopia estudada.

Referências Bibliográficas

- [1] Aniz, C., *Raízes de funções de um complexo em uma variedade*, tese de doutorado do ICMC-USP, 2002.
- [2] Barcus, W. D., Barrat, M. G., *On the homotopy classification of the extensions of a fixed map*, Trans. Amer. Math. Soc., **88**, 1958, 57-74.
- [3] Barratt, M. G., *Track groups I*, Proc. London Math. Soc., **5**, (1955), 71-106.
- [4] Barratt, M. G., *Track groups II*, Proc. London Math. Soc., **5**, (1955), 285-329.
- [5] Borsari, L. D., Gonçalves, D. L., *The First Group (Co)Homology of a Group G with Coefficients in Some G -Modules* Quaest. Math., **31**, (2008), 89-100.
- [6] Brooks, R., *Roots of mappings from manifolds*, Fixed Point Theory Appl., **4**, (2004), 273-307.
- [7] Browder, W., *Surgery on simple-connected manifolds*, Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete, Band 65, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [8] Brown, R. F., Furi, M., Górniewicz, L., Jiang, B., *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, Springer-Dordrecht, 2005.
- [9] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [10] Fenille, M. C., *Raízes de aplicações de complexos 2-dimensionais em superfícies fechadas*, tese de doutorado do ICMC-USP, 2009.

-
- [11] Fox, R. H., *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Soc., **51**, (1945), 429-432.
 - [12] Jackson, J. R., *Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory*, Proc. Amer. Math. Soc., **3**, (1952), 327-333.
 - [13] Davis, J. F., Kirk, P., *Lectures Notes in Algebraic Topology*, American Mathematical Society, 55-XX, 1991.
 - [14] Milnor, J., *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press., 1965.
 - [15] Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, **Study 54**, 1966.
 - [16] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, Westview Press, 1984.
 - [17] Pajitnov, A. *Circle-valued Morse Theory*, Walter de Gruyter **32**, 2006.
 - [18] Puppe, D., *Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I*, Math. Z., **69**, (1958), 299-344.
 - [19] Rourke, C. P., Sanderson, B.J., *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
 - [20] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966.
 - [21] Switzer, R. M., *Algebraic Topology- Homotopy and Homology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.
 - [22] Whitehead, G. W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1978.