ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS COM HOMOLOGIA PRÉ-FIXADA

LAÉRCIO APARECIDO LUCAS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS – SÃO PAULO
BRASIL

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS COM HOMOLOGIA PRÉ-FIXADA

LAÉRCIO APARECIDO LUCAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS - USP, PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Orientador: Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

SÃO CARLOS

1984

À Jô

e meus pais.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Ozíride Manzoli Neto, não só pela orientação como também pela amizade e paciência que sempre me dedicou durante toda esta jornada.

Aos professores Dr. Gilberto F. Loibel, Dr. Roberto de Carvalho Engler Pinto e Dr. Carlos Biasi pelo apoio e atenção.

Aos professores da AFA pela colaboração e compreensão que sempre me dedicaram

À Neube Elisabeth D.G. Stabili, pelo trabalho de datilografia.

Este trabalho contou com o apoio das instituições: CNPq e CAPES.

CONSTRUCTION OF SPACES WITH PRÉ-ASSIGNED HOMOLOGY

A B S T R A C T

The purpose of this work is the realization of certain families of abelian groups as homology of topological spaces.

The case of realization by manifolds is studied in dimensions ≤ 4. The lens space are important for these condiction and a carefull study of them is made.

Some tools from Algebraic and Differential Topology is used and briefly presented.

INDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Preliminares

§1 - Resultados Básicos de Álgebra e Álgebra Homológica... 1

§2 - Topologia de Identificação 7

§3 - Ação de Grupos 10

§4 - Grupos de Homotopia 11

§5 - Grupos de Homologia e Cohomologia de espaços 14

CAPÍTULO II

Resultados sobre Homologia, Cohomologia e Grupo Fundamental de Variedades

§1 - Soma Conexa 24

§2 - Colagem de Variedades através dos bordos..... 27

§3 - Cirurgia 29

§4 - Grau de Aplicação Diferenciável 32

§5 - Resultados Gerais sobre Grupos de Homologia e Variedades..... 33

CAPÍTULO III

Espaços Lenticulares

§1 - Espaços Lenticulares obtidos por Ação de Grupos..... 35

§2 - Espaços Lenticulares por classificação de Nós no Toro 52

§3 - Espaços Lenticulares - Definição Clássica 66

§4 - Espaços Lenticulares como Espaço de Órbita de Ação de Z_p em S^3..... 69

CAPÍTULO IV

Construção de Espaços com Homologia Pré-Fixada

§1 - Realização por C.W..... 74

§2 - Realização por Variedades Diferenciáveis de dimensão 3 76

§3 - Realização por Variedades Diferenciáveis de dimensão 4 77

BIBLIOGRAFIA 85

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho tem como objetivo a construção de espaços com invariantes pré-estabelecidos. Inicialmente fizemos um estudo para espaços topológicos e em seguida para variedades diferenciáveis.

No caso das variedades, há certas peculiaridades devendo satisfazer à condições especiais, tais como dualidades, e isto restringe muito as seqüências de grupos a serem realizados.

Apresentamos o trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo I, apresentamos algumas definições e resultados básicos que nos serão úteis no decorrer do trabalho.

No Capítulo II, estudamos alguns resultados sobre variedades no que diz respeito aos grupos de homologia, soma conexa e cirurgia, além disso, para obtermos certas variedades com H_1 pré estabelecido tivemos que recorrer ao processo de cirurgia.

No Capítulo III, apresentamos algumas descrições dos espaços lenticulares, que são básicas para as construções do capítulo seguinte, e também, calculamos seus grupos de homologia.

No Capítulo IV é desenvolvido o trabalho de realização.

Fixamos seqüências de grupos abelianos e fazemos a realização dos mesmos como homologia de espaços topológicos e de variedades considerando neste último caso as restrições necessárias.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma exposição de definições e resultados básicos sobre Grupos Abelianos, Ação de Grupos, Topologia de Identificação, Topologia Algébrica e Diferencial, que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Para maiores detalhes sobre as proposições apresentadas ver [5], [7], [9], [11] e [18].

§1 - Resultados Básicos de Álgebra e Álgebra Homológica

Dado um grupo abeliano G, denotaremos T(G) sua parte de torção, isto é, $T(G) = \{g \in G \mid g^n = e \text{ para algum } n > 0\}$.

Se $T(G) = \{e\}$, G é dito livre de torção.

Todo grupo abeliano G finitamente gerado se escreve $G \cong T(G) \oplus Z^m$ onde a parte de torção T(G) é finita e m é inteiro positivo.

Definição 1.1

Se G é finitamente gerado então o inteiro m acima descrito é chamado rank G.

Note-se que G grupo abeliano significa que G é modulo sobre Z.

Proposição 1.2 (Teorema fundamental dos grupos abelianos finitos)

Todo grupo abeliano finito G, $G \neq \{e\}$ é soma direta de uma família $\{G_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de p-subgrupos cíclicos não nulos; além disso, o número destes grupos cíclicos e suas ordens são determinados de modo único pelo grupo G.

Uma conseqüência do teorema acima é que temos então uma classificação dos grupos finitamente gerados dada pelo rank G e pela caracterização de $T(G)$ dada pelo Teorema fundamental.

Seja $(G_i)_{i \in J}$ uma família qualquer de grupos, $\pi_{i \in J} G_i$ o produto direto da família $(G_i)_{i \in J}$, isto é, o produto cartesiano munido da lei de composição $(g_i).(g_i') = (g_i g_i')$.

O *produto direto fraco* é o subgrupo $\pi'_{i \in J} G_i$ constituido das famílias $(g_i)_{i \in J}$ tais que $g_i \neq 1$ só para um número finito de índices.

O produto direto fraco pode ser caracterizado pela propriedade: Sejam G um grupo e $\phi_i : G_i \to G$ uma família de homomorfismos

(PDF) Para todo grupo abeliano A e toda família de homomorfismos $\psi_i : G_i \to A$, existe um e um único homomorfismo $f : G \to A$ que torna comutativo todos os diagramas abaixo com $i \in J$.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "f"] \\ G_i \arrow[ur, "\phi_i"] \arrow[r, "\psi_i"'] & A \end{tikzcd}$$

Teorema 1.3

Dados grupos abelianos G, G_i e uma família de homomorfismos $\phi_i: G_i \to G$, então $G = \pi'_{i\varepsilon J} G_i$ se e somente se está satisfeita a propriedade. (PDF)

Teorema 1.4

Seja $(G_i)_{i\varepsilon J}$ uma família de grupos abelianos, $G = \pi^* G_i$ $i\varepsilon J$ seu produto livre e $[G,G]$ o subgrupo dos comutadores de G.

Então, $G/_{[G,G]} \cong \pi'_{i\varepsilon J} G_i$ onde $\pi'_{i\varepsilon J} G_i$ é o produto direto fraco da família.

Uma generalização do teorema 1.4 pode ser dada por: Se G' indica o subgrupo dos comutadores de um grupo G, e $G = \pi^* G_i$ é o produto livre de uma família qualquer de grupos G_i, então: $G/G' \cong \pi'_i (\frac{G_i}{G_i'})$.

Observação 1: O produto livre, mesmo de grupos abelianos é em geral um grupo não abeliano.

Observação 2: Os grupos livres podem ser caracterizados pela propriedade universal: "Seja $S \subset G$ sistema de geradores $i: S \to G$ a inclusão.

Para todo grupo H e toda função $\phi: S \to H$, existe um homomorfismo $\phi': G \to H$ tal que $\phi'.i = \phi$."

Proposição 1.5

Sejam p, q primos e m, n inteiros positivos quaisquer. Então $Z \otimes_Z Z_n \cong Z_n$; $Z_n \otimes_Z Z_n \cong Z_n$, $Z_m \otimes_Z Z_n \cong Z_{(m,n)}$

e $Z_p \otimes_Z Z_q \cong 0$ $\mathrm{Tor}_Z(Z,Z_n) = 0$; $\mathrm{Tor}_Z(Z_p,Z_p) \cong Z_p$; $\mathrm{Tor}_Z(Z_m,Z_n) \cong$ $\cong Z_{(m,n)}$; $\mathrm{Tor}_Z(Z_p,Z_q) = 0$ onde (m,n) é o máximo divisor comum de m e n.

Observação: Suponhamos que $G_1 \cong Z^m \oplus T(G_1)$ e $G_2 \cong Z^n \oplus T(G_2)$ e passemos a calcular o $\mathrm{Tor}_Z(G_1,G_2)$.

$$\mathrm{Tor}_Z(G_1,G_2) = \mathrm{Tor}_Z(Z^m \oplus T(G_1),\ Z^n \oplus T(G_2)) =$$

$$= \mathrm{Tor}_Z(Z^m,\ Z^n) \oplus \mathrm{Tor}_Z(Z^m,T(G_2)) \oplus \mathrm{Tor}_Z(T(G_1),Z^n) +$$

$$+ \mathrm{Tor}_Z(T(G_1),T(G_2)) \cong \mathrm{Tor}_Z(T(G_1),T(G_2)).$$

Como $T(G_1) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Z_{P_i}^{\alpha_i}$ e $T(G_2) \cong \bigoplus_{j=1}^{m} Z_{P_j}^{\beta_j}$ então podemos escrever

$$\mathrm{Tor}_Z(G_1,G_2) \cong \mathrm{Tor}_Z\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} Z_{P_i}^{\alpha_i},\ \bigoplus_{j=1}^{m} Z_{P_j}^{\beta_j}\Big) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}_Z(Z_{P_i}^{\alpha_i},\ Z_{P_j}^{\beta_j}) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{\{i/P_i=P_j\}} \mathrm{Tor}_Z(Z_{P_i}^{\alpha_i},Z_{P_i}^{\beta_i}) \cong \bigoplus_{\{i/P_i=P_j\}} Z_{P_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$$

Portanto

$$\mathrm{Tor}_Z(G_1,G_2) \cong \bigoplus_{\{i/P_i=P_j\}} Z_{P_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$$

Complexo de Cadeias e Cocadeias - Homologia e Cohomologia

Definição 1.6

Um complexo de cadeias $C = (C_q,\partial_q)$ é definido

por um par de seqüências: uma seqüência de grupos abelianos $(C_q)_{q\varepsilon Z}$ e uma seqüência de homomorfismos $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ tal que $\partial_{q-1} \cdot \partial_q = 0$ para todo $q \varepsilon Z$.

Nas aplicações que faremos desta noção teremos normalmente $C_p = (0)$ se $p < 0$; além disso, freqüentemente, um complexo de cadeias será representado por um diagrama

$$\ldots \to C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_q} C_{p-1} \to \ldots$$

A um complexo de cadeias $C = (C_q, \partial_q)$ se associa de modo natural certos subgrupos dos grupos de cadeias C_q.

Os homomorfismos ∂_q são denominados operadores de bordo, os elementos de C_q são chamados q-cadeias, o grupo $Z_q(C) = \text{Ker}\ \partial_q$ é chamado grupo dos q-ciclos, o grupo $B_q(C) = \text{im}\ \partial_{q+1}$ é chamado grupo dos q-bordos e o grupo quociente $H_q(C) = \dfrac{Z_q(C)}{B_q(C)}$ é chamado q-ésimo grupo de homologia do complexo C.

A seqüência $\ldots \to C_{q+1} \xrightarrow{\alpha_{q+1}} C_q \xrightarrow{\alpha_q} C_{q-1} \to \ldots$ é dita exata em C_q se $\text{Ker}\ \alpha_q = \text{im}\alpha_{q+1}$.

Observação: Para um complexo de cadeias C, o grupo de homologia $H_q(C)$ é uma "medida" de o quanto a sequência $\ldots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \ldots$ não é exata em C_q.

Sejam C um complexo de cadeias e G um grupo abeliano. Podemos formar a cadeia $C \otimes G$, dada por

$$\ldots \to C_{q+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{q+1} \otimes 1} C_q \otimes G \xrightarrow{\partial_q \otimes 1} C_{q-1} \otimes G \to \ldots \text{ onde}$$

$1 : G \to G$ é o homomorfismo identidade.

Definimos $H_q(C,G) = H_q(C \otimes G)$ como sendo o q-ésimo grupo de homologia do complexo C com coeficientes no grupo G.

A relação entre os grupos $H_q(C,G)$ e $H_q(C)$ é dada pelo seguinte:

Teorema 1.7 (Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia)

Seja C um complexo de cadeias onde os C_q são grupos livres. Então

$$H_q(C,G) = H_q(C) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(C),G)$$

Observação: Se A ou B são grupos livres temos que $\mathrm{Tor}(A,B) = 0$.

Um complexo de cocadeias C é uma seqüência $\ldots C^q \xrightarrow{\delta^{q+1}} C^{q+1} \xrightarrow{\delta^{q+2}} C^{q+2} \to \ldots$ de grupos abelianos C^q e homomorfismos $\delta^{q+1}: C^q \to C^{q+1}$ tais que $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$.

Os homomorfismos δ^{q+1} são chamados operadores cobordos, os elementos de C^q são chamados n-cocadeias.

O grupo $Z^q(C) = \mathrm{Ker}\ \delta^{q+1}$ é chamado grupo dos n-cocíclos, o grupo $B^q(C) = \mathrm{im}\delta^q$ é chamado grupo dos n-cobordos e o grupo quociente

$$\frac{Z^q(C)}{B^q(C)} = H^q(C)$$

é chamado q-ésimo grupo de cohomologia do complexo de cocadeias C.

Sejam G grupo abeliano, $C = \{C_q, \partial_q\}_{q \in Z}$ complexo de cadeias e $C^q = \mathrm{Hom}(C_q, G)$. Consideremos $\alpha \in \mathrm{Hom}(C_{q-1}, G)$.

Seja δ^{q-1} tal que $\delta^{q-1}(\alpha) = \alpha . \partial_q$, então a seqüência $\ldots \to C^{q+1} \xrightarrow{\delta^q} C^q \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^{q-1} \to \ldots$ é um complexo de cocadeias e

$$H^q(C,G) = \frac{\mathrm{Ker}\ \delta^{q-1}}{\mathrm{im}\ \delta^q}$$

Teorema 1.8 (Coeficientes Universais para Cohomologia)

Se os C_q são livres então:

$$H^n(C,G) = \mathrm{Hom}(H_q(C),G) \oplus \mathrm{ExT}(H_{q-1}(C),G).$$

Observação: Se tivermos A um grupo livre então $\mathrm{Ext}(A,B) = 0$ para todo B.

§ 2 - Topologia de Identificação

Definição 2.1

Sejam X, Y espaços topológicos, $A \subset X$ subconjunto fechado e $f: A \to Y$ contínua.

O espaço colagem de X e Y por f, será denotado por

$$X \cup_f Y = \frac{X+Y}{R}$$

onde R é uma relação, $aRf(a)$ para cada $a \in A$ e $X + Y$ é reunião disjunta de X e Y.

Teorema 2.2

Sejam $p: X + Y \to X \cup_f Y$ a projeção e $C \subset X + Y$ tal que $C \subset X$ é fechado em X. Então $p(C)$ é fechado em $X \cup_f Y$ se e somente se $(C \cap Y) \cap f(C \cap A)$ é fechado em Y.

Teorema 2.3 (transgressão)

Sejam $p: X \to Y$ uma identificação e $h: X \to Z$ contínua.

Como h é constante em cada fibra $p^{-1}(y))$ fica bem definida $\bar{h}: Y \to Z$ por $\bar{h}(y) = h(p^{-1}(y))$ a qual é contínua e torna o diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "\bar{h}=hp^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

$\bar{h}: Y \to Z$ é aberta (fechada) se e somente se $h(U)$ é aberto (fechado) quando U é aberto (fechado) que satisfaz $U = p^{-1}(p(U))$.

Teorema 2.4

Sejam X colado a Y por $f: A \to Y$, $A \subset X$ fechado, e $p: X + Y \to X \cup_f Y$ a aplicação identificação.

Sejam $\phi: X \to Z$ e $\psi: Y \to Z$ funções contínuas e seja $(\phi,\psi); X + Y \to Z$ a única extensão comum. Se ϕ e ψ são consistentes (isto é, $\phi(a) = \psi(f(a)$ para todo $a \in A$) então $(\phi,\psi)p^{-1} : X \cup_f Y \to Z$ é contínua.

Teorema 2.5

Seja $f: X \to Y$ contínua e sobrejetora. Então $\bar{f} = f_p^{-1} : \frac{X}{K_f} \to Y$ é homeomorfismo se e somente se f é uma identificação onde K_f é uma relação em X definida pela f.

Proposição 2.6

Suponha Y subespaço fechado de um espaço de Hausdorff Z e $f : E^n \to Z$ uma aplicação contínua tal que $f(S^{n-1}) \subset Y$ e leva a n-célula aberta $\mathring{E}^n$ homeomorficamente sobre $Z - Y$. Então Z é obtido de Y por adjunção de uma n-célula E^n pela f/S^{n-1}.

Demonstração:

Consideremos $\phi: E^n \cup Y \to Z$, $\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E^n \\ x & \text{se } x \in Y \end{cases}$

e a relação: $x \sim f(x) \iff x \in S^{n-1}$.

Observemos o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} E^n \cup Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ E^n \underset{f/S^{n-1}}{\cup} Y \arrow[ur, "\phi p^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Mostraremos que ϕp^{-1} é homeomorfismo.

i) Mostremos que ϕ é sobrejetora.

Seja $y \in Z - Y \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in E^n$ tal que $f(x) = y \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = y = \phi(x)$.

Se $y \in Y \overset{def}{\Longrightarrow} \phi(y) = y$. Logo, ϕ é sobrejetora.

ii) Mostremos que ϕ é fechada.

Seja $F \underset{\text{fechado}}{\subset} E^n \cup Y$, então $p^{-1}(F) \cap Y$ é fechado em Y e $p^{-1}(F) \cap E^n$ é fechado em E^n.

Como $Y \subset Z$ é fechado, então $p^{-1}(F) \cap Y$ é fechado em Z.

Da definição de ϕ vem que:

$$\phi(p^{-1}(F) \cap Y \cup p^{-1}(F) \cap E^n) = (p^{-1}(F) \cap Y) \cup f(p^{-1}(F) \cap E^n).$$

Resta-nos mostrar que $f(p^{-1}(F) \cap E^n)$ é fechado.

Se $p^{-1}(F) \cap E^n \subset \mathring{E}^n \Rightarrow f$ é homeomorfismo e portanto $f(p^{-1}(F) \cap E^n)$ é fechado.

Se $p^{-1}(F) \cap E^n \subset S^{n-1} \Rightarrow f(p^{-1}(F) \cap E^n) \subset$
$f(S^{n-1}) \subset Y \underset{\text{fechado}}{\subset} Z$

Logo, $f(p^{-1}(F) \cap E^n)$ é fechado. Portanto, ϕ é fechada.

Sendo ϕ fechada e sobrejetora, ϕ é identificação. Pelo teorema 2.5 segue-se que ϕp^{-1} é homeomorfismo.

§3 - AÇÃO DE GRUPOS

Definição 3.1

Um grupo G atua sobre um conjunto S, se existir uma aplicação $G \times S \to S$, $(g,x) \to g.x$, tal que para todo $x \in S$ e $g_1, g_2 \in G$, $ex = x$, $(g_1 . g_2)x = g_1(g_2X)$.

Dependendo da estrutura que se tem em S e em G podemos pedir que a ação seja contínua, diferenciável, etc.

Seja $\theta : G \times S \to S$ uma ação de grupo, então:

i) A relação em S definida por $x \sim x' \iff gx = x'$ para algum $g \in G$, é uma relação de equivalência e cada classe é chamada órbita de G em S.

ii) Para cada $x \in S$, $G_x = \{g \in G \,/\, gx = x\}$ é um subgrupo chamado grupo de isotropia de x.

Um grupo G de homeomorfismos de um espaço topológico Y é chamado descontínuo se as órbitas de G em Y são subconjuntos discretos de Y. Também dizemos que G é propriamente descontínuo se para $y \in Y$ existe uma vizinhança aberta U de y em Y tal que se $g, g' \in G$ e $gU \cap g'U \neq \phi$ então $g = g'$.

§4 - GRUPOS DE HOMOTOPIA

Para maiores detalhes sobre as proposições apresentadas neste parágrafo, bem como suas demonstrações ver [5], [7] e [9].

Seja (X,x_0) um par onde X é um espaço topológico e x_0 um ponto de X.

Descrevemos o grupo fundamental do espaço X com ponto base x_0, denotado por $\pi_1(X,x_0)$ como o conjunto de todas as classes de homotopia de aplicações contínuas $f:(S',p) \to (X,x_0)$ tais que $f(p) = X_0$.

Também para $n > 1$ denotaremos por $\pi_n(X,x_0)$ o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto base x_0 que pode ser descrito como o conjunto das classes de homotopia de apli-

cações contínuas $f: (S^n,p) \to (X,x_0)$ tais que $f(p) = x_0$

Definição 4.1

Um espaço topológico X conexo por caminhos é dito simplesmente conexo se $\pi_1(X,x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$.

Proposição 4.2

Se X é um espaço conexo por caminhos, o grupo fundamental independe do ponto base x_0, isto é, $\pi_1(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$ para quaisquer x_0, x_1 pontos de X.

Proposição 4.3

Dados espaços topológico X, Y e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ então $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$.

Proposição 4.4

$$\pi_n(X \times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_n(X,x_0) \oplus \pi_n(Y,y_0)$$

Proposição 4.5

$$\pi_1(S^1) \cong Z \quad e \quad \pi_n(S^1) = 0 \quad se \quad n > 1.$$

Teorema 4.6 (Teorema de Van-Kampen)

Sejam X, X_0, X_1, X_2 espaços topológicos com $X = X_1 \cup X_2$ e $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \phi$, X_1 e X_2 abertos, X_0, X_1, X_2 conexos por caminhos.

Seja $p \in X_0$ e consideramos o diagrama comutativo in

duzido pelas inclusões nos grupos fundamentais.

$$\begin{tikzcd}
H & & \pi_1(X_0,p) \arrow[ll, "\psi_0"'] \arrow[rr, "\psi_0"] \arrow[dl, "\theta_1"] \arrow[dd, "\theta_0"] \arrow[dr, "\theta_2"'] & & H \\
& \pi_1(X_1,p) \arrow[ul, "\psi_1"] \arrow[dr, "w_1"] & & \pi_1(X_2,p) \arrow[ur, "\psi_2"'] \arrow[dl, "w_2"'] & \\
& & \pi_1(X,p) \arrow[uull, bend left, "\lambda"] \arrow[uurr, bend right, "\lambda"'] & &
\end{tikzcd}$$

Então as imagens $w_i(\pi_1(X_i,p))$ $(i = 1,2)$ geram $\pi_1(X,p)$. Além disso, dado um grupo arbitrário H com homomorfismos $\psi_i : \pi_1(X_i,p) \to H$ satisfazendo $\psi_0 = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$, existe um único homomorfismo $\lambda: \pi_1(X,p) \to H$ tal que $\psi_i = \lambda.w_i$.

Observação: O teorema de Van-Kampen nos dá a seguinte informação: Se $X = X_1 \cup X_2$, X_1 e X_2 abertos de X, tais que X_1, X_2 e $X_1 \cap X_2$ são conexos por caminhos, então $\pi_1(X)$ é inteiramente determinado em termos dos grupos $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ e $\pi_1(X_1 \cap X_2)$ e dos homomorfismos induzidos pelas inclusões $X_1 \to X$, $X_2 \to X$ e $X_1 \cap X_2 \to X$.

Uma interessante formulação do teorema de Van-Kampen pode ser dada em termos de apresentação de grupos.

Suponhamos que os grupos tenham as seguintes apresentações:

$$\pi_1(X_1) \cong |x_1, x_2, \ldots : r_1, r_2, \ldots|$$

$$\pi_1(X_2) \cong |y_1, y_2, \ldots : s_1, s_2, \ldots|$$

$$\pi_1(X_0) \cong |z_1, z_2, \ldots : t_1, t_2, \ldots|$$

Então o grupo fundamental de X tem a seguinte apresentação:

$$\pi_1(X) \cong |x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots : r_1, r_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots, \theta_1(z_1) = \theta_2(z_1),\ \theta_1(z_2) = \theta_2(z_2), \ldots|$$

Observação: Caso $\pi_1(X_0) = 0$ então $\pi_1(X)$ é o produto livre $\pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

Proposição 4.7

Seja G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de um espaço simplesmente conexo Y. Então o grupo fundamental do espaço das órbitas Y/G é isomorfo a G.

Demonstração

Sendo Y simplesmente conexo então o revestimento $\eta = (Y, p, Y/G)$ é universal, com $p: Y \to Y/G$ uma projeção de revestimento. Segue-se então que $\mathrm{Aut}(\eta) \cong \pi_1(Y/G)$. Pelo Teorema 17.14 de [13] segue-se que $G = \mathrm{Aut}(\eta) \cong \pi_1(Y/G)$.

§5 - GRUPOS DE HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE ESPAÇOS

Enunciaremos os axiomas de Eilenberg-Steenrod, empre-

gados para o cálculo efetivo de homologia de espaços topológicos. Como os espaços utilizados são complexos celulares finitos, existe essencialmente uma única teoria de homologia nesta categoria.

Sejam X, Y espaços topológicos e A, B subespaços de X e de Y respectivamente.

Definição 5.1

Uma aplicação $f: (X,A) \to (Y,B)$ é contínua $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $f : X \to Y$ é contínua e $f(A) \subset B$.

Consideraremos a identificação $X = (X,\phi)$ bem como as inclusões

$$\begin{tikzcd} & & (A,A) \arrow[dr] & & \\ (\phi,\phi) \arrow[r] & (A,\phi) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X,A) \arrow[r] & (X,X) \\ & & (X,\phi) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

São os seguintes os dados para uma teoria de homologia.

A cada par de espaços (X,A) pode-se associar, de uma maneira bem definida, um grupo $H_q(X,A)$ pertencente à classe Ab dos grupos abelianos, para cada inteiro q; para cada $f:(X,A) \to (Y,B)$ associamos um homomorfismo $f_* = H(f)$: $H_q(X,A) \to H_q(Y,B)$. Também para cada par (X,A) e $q \in Z$, associamos o operador bordo $\partial = \partial(X,A,q) : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$

A) AXIOMAS-HOMOLOGIA

A.1 : (identidade)

Se $f: (X,A) \to (X,A)$ é a identidade, então

$$f_*: H_q(X,A) \to H_q(X,A)$$

é a identidade de $H_q(X,A)$, $\forall$ q.

A.2 : Se $f: (X,A) \to (Y,B)$ e $g: (Y,B) \to (Z,C)$ são aplicações de pares, então $(g.f)_* = g_*.f_*$.

A.3 : Se $f: (X,A) \to (Y,B)$ é contínua, então o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_A"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "f'_*"] \\ H_q(X,B) \arrow[r, "\partial_B"] & H_{q-1}(B) \end{tikzcd} \qquad f' = f|A$$

A.4 : (Seqüência exata) Para todo par (X,A) a seqüência de grupos denominada seqüência de homologia do par (X,A) $\to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \to \ldots$ é uma seqüência exata.

A.5 : (Homotopia) Se as aplicações $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ são homotópicas então $f_* = g_*$.

A.6 : (Excisão) Se U é um aberto de X tal que $\bar{U}$ está contido no interior de A, então a inclusão

$e: (X-U, A-U) \to (X,A)$ induz um isomorfismo de grupos

$e_* : H_q(X-U, A-U) \xrightarrow{\cong} H_q(X,A), \quad \forall\, q.$

A.7 : Se $P = \{x_0\}$ então $H_q(P) = 0$ se $q \neq 0$

$H_0(P) = G$, G é o grupo de coeficientes).

B) COHOMOLOGIA

Uma teoria de cohomologia numa categoria admissível para a teoria de homologia e cohomologia C é uma coleção $H = \{H^q, *q, \delta^q\}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

I) Se $i: (X,A) \to (X,A)$ é identidade então $i^{*q}: H^q(X,A) \to H^q(X,A)$ é identidade.

II) Se $f : (X,A) \to (Y,B)$ e $g: (Y,B) \to (Z,C)$ então $(g.f)^{*q} = f^{*q} \,.\, g^{*q}$.

III) Se $f : (X,A) \to (Y,B)$ e $f/A = g: A \to B$ contínuas. En o diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} H^{q-1}(B) \arrow[r, "g^{*q}"] \arrow[d, "\delta^q"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^{q-1}(A) \arrow[d, "\delta^q"] \\ H^q(Y,B) \arrow[r, "f^{*q}"] & H^q(X,A) \end{tikzcd}$$

IV) Se $i: A \to X$ é $j : X \to (X,A)$ são as inclusões então a seqüência infinita é exata:

$$\ldots \to H^{q-1}(X) \xrightarrow{\delta^q} H^q(X,A) \xrightarrow{j^{*q}} H^q(X) \xrightarrow{i^{*q}} H^q(A) \to$$

$$\longrightarrow H^{q+1}(X,A) \longrightarrow \ldots$$

V) Se f e $g : (X,A) \to (Y,B)$ são homotópicas então $f^{*q} = g^{*q}$ $\forall\, q \in Z$.

VI) Se U é aberto de X tal que $\bar{U} \subset \mathring{A}$ e $e: (X-U, A-U) \to (X,A)$ inclusão, então $e^{*q} : H^q(X,A) \to H^q(X-U, A-U)$ é isomorfismo $\forall\, q \in Z$.

VII) Seja P_0 um espaço constituído de um único ponto então $H^q(P_0) = 0$ se $q \neq 0$.

C) HOMOLOGIA SINGULAR

Definição 5.2

Se X é um espaço topológico, um n-simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_n \to X$ onde Δ_n é o n-simplexo padrão.

Seja $S_n(X)$ o grupo livre gerado por todos os n-simplexos singulares de X.

Note-se que os elementos de $S_n(X)$ não são funções contínua de Δ_n em X, são combinações lineares formais com coeficientes em Z, de funções contínuas $\Delta_n \to X$ isto é, $Z_n \in S_n(X)$ se e só se $Z_n = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$, $n_\sigma \in Z$ e σ $\Delta_n \to X$.

Os elementos Z_n são chamados n-cadeias singulares de X.

Definição 5.3

Passemos agora a definir o operador bordo $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$.

Para um n-simplexo singular em X definimos a i-ésima face $\sigma^{(i)}$ de σ como sendo o (n-1)-simplexo $\sigma o F_n^i$ onde $F_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$, $F_n^i(E_j) = \begin{cases} E_j, & j < i \\ E_{j+1}, & j \geq i \end{cases}$

Assim, o operador bordo de um n-simplexo singular σ em X é uma n-1 cadeia dada por: $\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$.

Como $S_n(X)$ é livre podemos estender ∂_n a $S_n(X)$ por linearidade, isto é, $\partial_n(\sum_\sigma \nu_\sigma \sigma) = \sum_\sigma \nu_\sigma \partial_n \sigma$.

Observa-se que $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$, isto é, a seqüência $\ldots \to S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \ldots$ é um complexo de cadeias singular de X sobre Z.

Definimos $H_n(X,Z) = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}}$ e denominamos n-ésimo grupo de homologia do espaço X com coeficientes em Z. Denotaremos $H_n(X,Z)$ simplesmente por $H_n(X)$.

Seja A um subespaço de X. Desde que a inclusão $i : A \to X$ é contínua, cada n-simplexo de A é tomado como um n-simplexo de X por $\Delta_n \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{i} X$. Assim $\ldots \to S_{n+1}(A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(A) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(A) \to \ldots$ é um subcomplexo de cadeias de $\ldots \to S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \to \ldots$

Podemos então definir o complexo de cadeias relativo

$$\ldots \quad S_{n+1}(X,A) = \frac{S_{n+1}(X)}{S_{n+1}(A)} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \frac{S_n(X)}{S_n(A)} \xrightarrow{\partial_n} \frac{S_{n-1}(X)}{S_{n-1}(A)} \to \ldots \text{ e}$$

denotaremos por $H_n(X,A)$ o n-ésimo grupo de homologia relativo de X módulo A.

Proposição 5.4

Se (X,A) é um par de espaços com $A \neq \phi$ então a

seqüência $\ldots \xrightarrow{\partial} H_{q+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{q+1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \to \ldots$ é exata.

Esta seqüência é chamada a seqüência de homologia do par (X,A).

Enunciaremos um teorema que juntamente com outras propriedades torna a homologia singular efetivamente calculável.

Teorema 5.5 (Teorema da Excisão)

Se X é um espaço topológico, A e U são subespaços de X tais que $\bar{U} \subset \mathring{A}$, então a inclusão $e:(X-\bar{U},A-U) \to (X,A)$ induz um isomorfismo $e_* : H_q(X-U, A-U) \to H_q(X,A)$ para todo q.

Observação: Um teorema usado para verificar se a inclusão é uma excisão é o seguinte:

Teorema 5.6

Suponha $V \underset{ab}{\subset} U \underset{ab}{\subset} A$ com $\bar{V} \subset \mathring{U}$ e

i) $(X-V, A-V) \xrightarrow{e} (X,A)$ é uma excisão.

ii) $(X-U, A-U)$ é um retrato de deformação de $(X-V, A-V)$.

Então $(X-U, A-U) \xrightarrow{i} (X,A)$ é uma excisão.

Demonstração:

Como $e : (X-V, A-V) \to (X,A)$ é excisão, e_* é isomorfismo. Sendo $(X-U, A-U)$ retrato de deformação de $(X-V, A-V)$ temos:

$(X-U, A-U) \xrightarrow{i_1} (X-V, A-V) \xrightarrow{r} (X-U, A-U)$ onde r retração e i_1 inclusão tal que $r \cdot i_1 = \text{ident}$. Além disso, sendo r retrato de deformação $i_1 . r \sim \text{ident}$. ($i_1.r$ é homotópica a identidade). Logo, os homomorfismos induzidos são iguais, isto é, $H_q(i_1.r) = H_q(i_1) \cdot H_q(r) = H_q(\text{ident}) = \text{ident}$. Como temos $H_q(r.i_1) = H_q(r) \cdot H_q(i_1) = H_q(\text{ident.})$, da primeira igualdade segue que $H_q(i_1)$ é epimorfismo e da segunda, que é monomorfismo. Portanto $H_q(i_1)$ é isomorfismo.

Observando que $i = e.i_1$ a induzida $H_q(i)$ é um isomorfismo para todo q.

Portanto $i: (X-U, A-U) \to (X,A)$ é uma excisão.

Teorema 5.7 (Seqüência de Mayer-Vietoris)

Seja (X,U,V) uma tríade exata (ou seja $K_1: (U, U \cap V) \to (U \cup V, V)$ e $K_2 : (V, U \cap V) \to (U \cup V, U)$ são excisões) onde $U \cup V = X$. Então a seqüência

$$\ldots \to H_q(U \cap V,G) \xrightarrow{\psi} H_q(U,G) \oplus H_q(V,G) \xrightarrow{\phi} H_q(X,G) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(U \cap V,G) \to$$

é exata. As aplicações ψ, ϕ e Δ são definidas por:

$$\psi(a) = (m_{1*}(a), - m_{2*}(a))$$

$$\phi(x_1,x_2) = i_{1*}(x_1) + i_{2*}(x_2)$$

$$\Delta = -\partial' K_{1*}^{-1} s_{1*} = \partial''_* K_{2*}^{-1} s_{2*}.$$

$$m_{1*} : H_q(U \cap V) \to H_q(U); \quad m_{2*} : H_q(U \cap V) \to H_q(V)$$

$$s_{1*} : H_q(X) \to H_q(X,V); \quad s_{2*} : H_q(X) \to H_q(X,U)$$

$$K_{1*} : H_q(U, U \cap V) \to H_q(X,V); \quad K_{2*} : H_q(V, U \cap V) \to H_q(X,U)$$

$$i_{1*} : H_q(U) \to H_q(X) \; ; \quad i_{2*} : H_q(V) \to H_q(X)$$

são as induzidas de inclusões e

$$\partial'_* : H_q(U, U \cap V) \to H_{q-1}(U \cap V) \ ; \ \partial''_* : H_q(V, U \cap V) \to H_{q-1}(U \cap V)$$

Teorema 5.8 (Hurewicz)

Seja X um espaço simplesmente conexo. As afirmações seguintes são equivalentes.

i) $\pi_j(X) = 0 \ , \qquad 1 \leq j \leq n - 1$

ii) $H_j(X) = 0 \ , \qquad 1 \leq j \leq n - 1$

No caso de uma das duas condições acima estar verificada, podemos afirmar que

iii) $H_n(X) \cong \pi_n(X)$.

Teorema 5.9 (Fórmula de Künneth)

$$H_j(X \times Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{j} H_i(X) \otimes H_{j-i}(Y) \oplus$$

$$\bigoplus_{i=0}^{j} \mathrm{Tor}(H_i(X), H_{j-i-1}(Y)).$$

Corolário 5.10

Se todos os módulos de homologia de Y (ou de X) são livres para dimensões menores que j então

$$H_j(X \times Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{j} H_i(X) \otimes H_{j-i}(Y).$$

Proposição 5.11

$H_1(X) = \dfrac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$ onde $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ é o comu

tador de $\pi_1(X)$.

Em particular, se $\pi_1(X)$ for abeliano, $H_1(X) = \pi_1(X)$.

CAPÍTULO II

RESULTADOS SOBRE HOMOLOGIA, COHOMOLOGIA E GRUPO FUNDAMENTAL DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

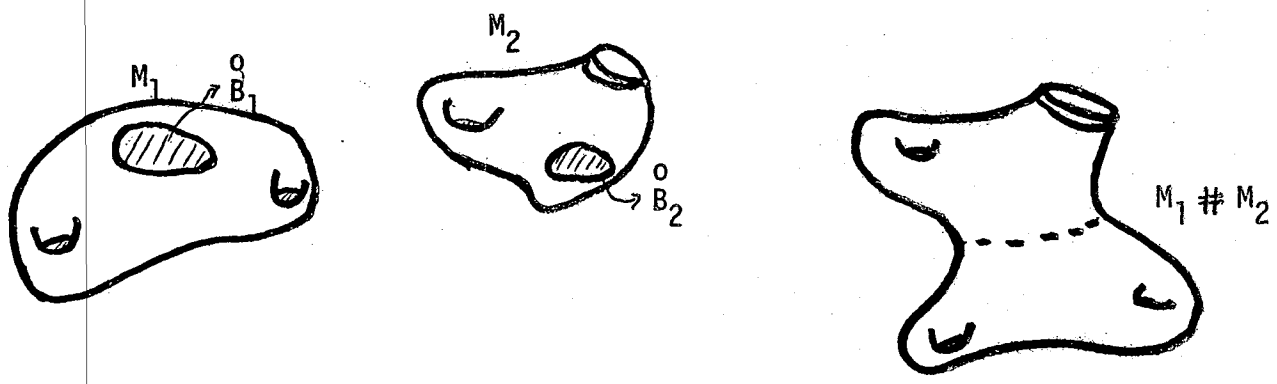
Neste capítulo exporemos alguns resultados e construções essenciais, utilizados nos capítulos posteriores no cálculo efetivo dos grupos de homologia de variedades diferenciáveis.

§1 - Soma Conexa

Definição 1.1

Sejam M_1 e M_2 n-variedades conexas. A soma conexa de M_1 e M_2 denotada por $M_1 \# M_2$ é construida retirando-se os interiores de discos n-dimensionais B_1 e B_2 em M_1 e M_2, respectivamente, colando-se as variedades $M_i - \overset{o}{B}_i$ por algum homeomorfismo $h: \partial B_2 \to \partial B_1$

Assim, obtemos $M_1 \# M_2 = (M_1 - \overset{o}{B}_1) \underset{h}{\cup} (M_2 - \overset{o}{B}_2)$



Observação:

A operação "soma conexa" é bem definida (a menos de difeomorfismo) pois, variedades diferenciáveis conexas são espa

ços homogêneos, isto é, quaisquer pontos P e Q de M, existe um difeomorfismo $\psi: M \to M$ tal que $\psi(P) = Q$.

Proposição 1.2

Sejam M^m e N^m variedades de dimensão m, conexas, orientáveis, com $m \geq 3$.

$$\text{Então } H_q(M^m \# N^m) = \begin{cases} Z \text{ se } q = 0, m \\ H_q(M^m) \oplus H_q(N^m), & 1 \leq q < m \\ 0 \text{ se } q > m. \end{cases}$$

Demonstração:

Tomemos $X = M^m \# N^m = (M^m - \mathring{D}^m) \underset{\text{ident.}}{\cup} (N^m - \mathring{D}^m)$. Sejam $A = M^m - \mathring{D}^m$ e $B = N^m - \mathring{D}^m$. Logo, $A \cap B = S^{m-1} \times I \simeq S^{m-1}$ (tipo de homotopia).

Precisamos determinar $H_*(M^m - \mathring{D}^m)$ e $H_*(N^m - \mathring{D}^m)$ conhecendo-se $H_*(M^m)$ e $H_*(N^m)$.

Para determinarmos $H_*(M^m - \mathring{D}^m)$, consideremos o par $(M^m, M^m - \mathring{D}^m)$.

Seja U bola aberta de M^m tal que $D^m \subset U$. Pelo teorema 1,5.5 tem-se que $H_*(U, U - \mathring{D}^m) \xrightarrow[\cong]{\text{exc.}} H_*(M^m, M^m - \mathring{D}^m)$.

Consideremos a seqüência exata do par $(U, U - \mathring{D}^m)$:

$$\ldots \to H_q(U) \to H_q(U, U - \mathring{D}^m) \to H_{q-1}(U - \mathring{D}^m) \to H_{q-1}(U) \to \ldots$$

Sendo U contrátil, tem-se

$$H_q(U, U - \mathring{D}^m) \cong H_{q-1}(U - \mathring{D}^m) \simeq H_{q-1}(S^{m-1}).$$

Dessa forma obtemos $H_q(M^m, M^m - \mathring{D}^m) \cong H_{q-1}(S^{m-1}) = 0$ para $1 < q < m$. Considerando-se a seqüência exata do par $(M^m, M^m - \mathring{D}^m)$ tem-se

$$\ldots \to H_{q+1}(M^m, M^m - \mathring{D}^m) \to H_q(M^m - \mathring{D}^m) \to H_q(M^m) \to H_q(M^m, M^m - \mathring{D}^m) \to \ldots$$

Assim: $H_q(M^m) \cong H_q(M^m - \mathring{D}^m)$ e, analogamente, $H_q(N^m) \cong H_q(N^m - \mathring{D}^M)$ para $1 < q < m$.

Considerando que $H_q(A \cap B) \cong H_q(S^{m-1}) \cong 0$ $1 \leq q < m-1$ a seqüência de Mayer-Vietories aplicada à terna (X,A,B)

$\ldots \to H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to \ldots$ fica reduzida à seqüência:

$$0 \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to 0 \quad \text{para} \quad 1 < q \leq m - 1$$

Assim, $H_q(X) = H_q(M^m \# N^m) = H_q(M^m) \oplus H_q(N^m)$ para $1 < q \leq m - 1$.

Se $q = 0$ ou $q = m$ então $H_q(M^m \# N^m) \cong Z$ pois, $M^m \# N^m$ é conexa e orientável.

Se $q > m$ pelo teorema 5.2 vem que $H_q(M^m \# N^m) = 0$.

Resta-nos determinar $H_1(M^m \# N^m)$. Vamos aplicar o teorema I, 4.6 para obtermos primeiramente $\pi_1(M^m \# N^m)$.

Observe o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(S^{m-1}) \cong 0 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\pi_1(N^m) \cong \pi_1(N^m - \mathring{D}^m) \arrow[dr] & & \pi_1(M^m - \mathring{D}^m) \cong \pi_1(M^m) \arrow[dl] \\
 & \pi_1(M^m \# N^m) &
\end{tikzcd}$$

$m \geq 3$

Como $\pi_1(S^{m-1}) \cong 0$, então $\pi_1(M^m \# N^m) \cong \pi_1(M^m) * \pi_1(N^m)$. Pela proposição I, 5.11 vem que

$$H_1(M^m \# N^m) \cong \frac{\pi_1(M^m \# N^m)}{[\pi_1(M^m \# N^m);\pi_1(M^m \# N^m)]}.$$

Aplicando o teorema I, 1.4 temos:

$$H_1(M^m \# N^m) \cong \frac{\pi_1(M^m)*\pi_1(N^m)}{[\pi_1(M^m)*\pi_1(N^m),\pi_1(M^m)*\pi_1(N^m)]} \cong \frac{\pi_1(M^m)}{[\pi_1(M^m);\pi_1(M^n)]} \times$$

$$\times \frac{\pi_1(N^m)}{[\pi_1(N^m);\pi_1(N^m)]} \cong H_1(M^m) \oplus H_1(N^m).$$

Assim, ficam determinados todos os grupos de homologia da soma conexa $M^m \# N^m$.

§2 - *COLAGEM DE VARIEDADES ATRAVÉS DOS BORDOS*

Neste parágrafo abordaremos um resultado frequentemente utilizado na literatura usual; além disso, será empregado essencialmente para obtenção de algumas variedades, das quais estudaremos os grupos de homologia.

Teorema 2.1 (Existência de Colarinho)

Se M é uma variedade diferenciável com bordo ∂M então existe uma vizinhança W de ∂M tal que W é homeomorfa a $\partial M \times [0,1]$ de modo que ∂M se corresponde naturalmente com $\partial M \times \{0\}$.

Proposição 2.2

Sejam $(M^m,\partial M)$, $(N^m,\partial N)$ variedades diferenciáveis e

$\phi: \partial M \to \partial N$ difeomorfismo. Então $M \cup_\phi N$ é variedade diferenciável.

Demonstração: (esboço)

Para mostrarmos que $M \cup_\phi N$ é variedade, é necessário cobrí-la com cartas locais cujas mudanças de coordenadas sejam diferenciáveis.

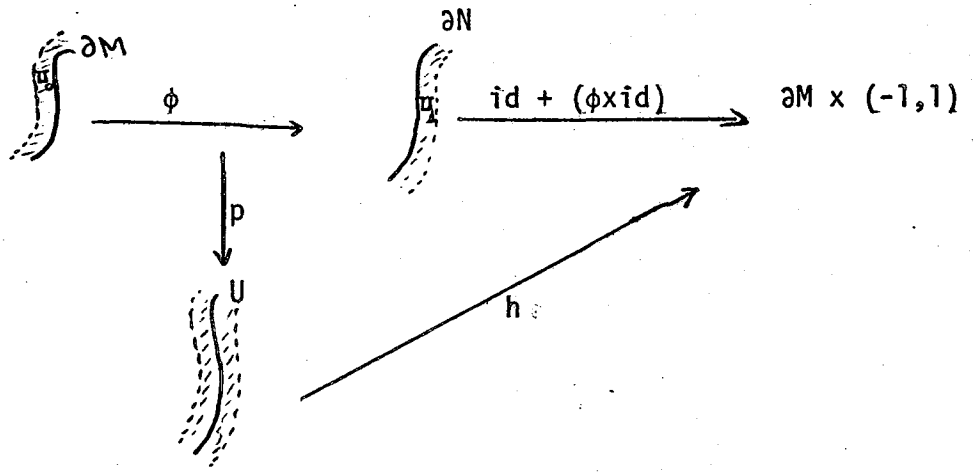
Pelo teorema 5.9 pag. 16 de [16] consideraremos os colarinhos $p_0: U_0 \to \partial M \times [0,1)$ e $p_1: U_1 \to \partial N \times (0,1]$.

Em $M \cup_\phi N$ consideramos $U = p(U_0) \cup p(U_1)$ onde $p: M + N \to M \cup_\phi N$.

Temos então que $M \cup_\phi N = A \cup U \cup B$ com abertos $A = p(M - p_0^{-1}(\partial M \times [0,\frac{1}{2})))$ e $B = p(N - p_1^{-1}(\partial N \times [0,\frac{1}{2})))$.

As cartas em A e B são restrições de cartas de M e N respectivamente pois, $p|_A: A \to p(A)$ e $p|_B: B \to p(B)$ são difeomorfismos.

As cartas em U são obtidas usando-se o diagrama abaixo para verificar a existência de homeomorfismo entre U e $\partial M \times (-1,1)$ compatível com as cartas de A e B.



Observação:

Em particular conclui-se que $M^m \# N^m$ é variedade diferenciável.

§3 - CIRURGIA

O objetivo principal deste parágrafo é definir cirurgia em uma variedade diferenciável W, e estudar esta construção aplicando-a para modificar o grupo fundamental π_1 da variedade e através disso, tirar conclusão sobre o grupo de homologia H_1.

Para alcançarmos nosso objetivo, faremos uma pequena introdução seguindo "A Procedure for Killing Homotopy Groups of Differentiable Manifolds" de J.W. Milnor [15].

Definição 3.1

Denotamos D^{p+1} ao disco unitário no espaço euclideano R^{p+1}, com bordo $S^p \subset R^{p+1}$. Observemos que o produto de $S^p \times S^q$ pode ser considerado como bordo de $D^{p+1} \times S^p$ ou $S^p \times D^{q+1}$.

Dados W uma variedade orientável de dimensão n, $n = p + q + 1$ e $f: S^p \times D^{q+1} \to W$, um mergulho diferenciável que preserva orientações.

Denotaremos por $X(W,f)$ a variedade obtida por passagem ao quociente, da reunião disjunta $[W-f(S^p\times 0) + (D^{p+1}\times S^q)]$ identificando-se $f(u,\theta v)$ com $(\theta u,v)$ com $u \in S^p$, $v \in S^q$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Observemos que através desse processo chamado cirur-

gia podemos obter uma nova variedade W', removendo o interior de $S^p \times D^{q+1}$ mergulhado em W, e substituindo pelo interior de $D^{p+1} \times S^q$, colando-o ao bordo comum.

A variedade $X(W',f)$ será orientada, pois f preserva orientações e, se W possui bordo, este será o mesmo de $X(W,f)$, pois a operação é realizada no interior de W.

Se W' é uma variedade diferenciável, difeomorfa a $X(W,f)$, por um difeomorfismo que preserva orientações, podemos dizer que W' é obtida de W por cirurgia do tipo $(p+1, q+1)$.

Se uma sequência $W_1, W_2, \ldots, W_r$ de variedades tais que, cada W_{i+1} é obtida de W_i por cirurgia diremos que W_1 é $\underline{X}$-equivalente a W_r.

A seguir, apresentaremos um processo que nos permitirá eliminar certos grupos de homotopia (se finitamente gerados) eliminando sucessivamente seus geradores.

Consideremos W uma variedade conexa de dimensão $n = p + q + 1$ e $\lambda \in \pi_p(W)$ uma classe de homotopia, a qual desejamos eliminar por cirurgia.

Definição 3.2

Diremos que um mergulho $f: S^p \times D^{q+1} \to W$ representa uma classe de homotopia $\lambda \in \pi_p(W)$ se $\lambda = f_*[\ell]$ onde f_* é o homomorfismo induzido $f_*: \pi_p(S^p \times D^{q+1}) \to \pi_p(W)$ e $[\ell]$ um gerador cíclico infinito $\pi_p(S^p \times D^{q+1})$.

Lema 3.3

Suponhamos que λ é representada por um mergulho co-

o anterior e que $\eta \geq 2p + 2$.

Nestas condições, os grupos de homotopia $\pi_i(W')$ são isomorfos aos grupos $\pi_i(W)$ para $i < p$ e $\pi_p(W')$ é isomorfo ao quociente de $\pi_p(W)$ por um subgrupo que contém λ onde $W' = X(W,f)$.

Resumidamente: O efeito da cirurgia é eliminar a classe de homotopia de λ.

Demonstração: ver [15].

Lema 3.4

Sejam M^n variedade orientável e $\alpha \in \pi_1(M^n)$ com $n \geq 4$. $f: S^1 \to M^n$ mergulho representando α.

Seja $F: S^1 \times D^{n-1} \to M^n$ trivialização de vizinhança tubular de $f(S^1)$(que sempre existe pois M^n é orientável).

$$M_F = [M^n - F(S^1 \times \mathring{D}^{n-1})] \underset{\text{bordo}}{\cup} D^2 \times S^{n-2},$$

$\bar{\alpha} \in \pi_1(M^n - F(S^1 \times \mathring{D}^{n-1}))$ representado por $F|S^1 \times \{a\}$ onde $a \in S^{n-2} = \partial D^{n-1}$.

Então, $\pi_1(M_F) = \dfrac{\pi_1(M^n)}{\langle\bar{\alpha}\rangle}$ onde $\langle\bar{\alpha}\rangle$ é o subgrupo gerado por $\bar{\alpha}$.

Demonstração

Aplicando o teorema I, 4.6 temos:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(S^1\times S^{n-2})\cong Z \quad (n\geq 4) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\pi_1(M^n-F(S^1\times \mathring{D}^{n-1})) \arrow[dr] & & \pi_1(D^2\times S^{n-2})\cong 0 \arrow[dl] \\
 & \pi_1(M_F) &
\end{tikzcd}$$

Assim, $\pi_1(M_F) = \dfrac{\pi_1(M^n-F(S^1\times D^{n-1}))}{-}$.

Temos $\dfrac{\pi_1(M^n-F(S^1\times \mathring{D}^{n-1}))}{-} \simeq \pi_1(M^n-\mathrm{im}f)$, pois $M^n-F(S^1\times \mathring{D}^{n-1})$ é retrato por deformação de $M^n-f(S^1)$. Como, por hipótese $n \geq 4$, por transversalidade tem-se $\pi_1(M^n-f(S^1)) \simeq \pi(M^n)$. Segue-se, então, o lema.

Observação:

O lema 3.3 foi enunciado de maneira adequada a ser aplicado no capítulo IV.

§4 - GRAU DE APLICAÇÃO DIFERENCIÁVEL

Definição 4.1

Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, ambas sem bordo, com M compacta. Seja $f: M \to N$ aplicação diferenciável e $y \in N$ valor regular de f.

A cada $x \in f^{-1}(y)$ associamos o valor $sDf(x) = 1$ se $Df(x)$ preserva a orientação e $sDf(x) = -1$ se $Df(x)$ inverte

a orientação.

Podemos então para cada valor regular y de f tomar $\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} s\, Df(x)$ que chamamos de grau de f em y.

Observe que $f^{-1}(y)$ tem um número finito de pontos pois M é compacta, e que o valor depende apenas da classe de homotopia de f.

Por exemplo, seja N compacta, sem bordo, orientada e conexa. Um difeomorfismo de N tem grau $+1$ ou -1 respectivamente se preserva ou inverte a orientação. Assim, se um difeomorfismo tem grau -1, ele não pode ser homotópico à identidade, pois, grau é invariante por homotopia.

§5 - RESULTADOS GERAIS SOBRE GRUPOS DE HOMOLOGIA DE VARIEDADES

Teorema 5.1 (Dualidade de Poincaré)

Seja X uma variedade n-dimensional, orientável, compacta, sem bordo (fechada). Então $H^q(X,G) \cong H_{n-q}(X,G)$ onde G é um anel comutativo com unidade.

Teorema 5.2

Se X é uma variedade n-dimensional, fechada, orientável, então temos: $H_q(X,G) = 0$ e $H^q(X,G) = 0$ para todo grupo abeliano G e $q > n$.

Além disso, $H^n(X,G) = G$, $H_n(X,G) = G$.

Teorema 5.3

Seja R um D.I.P. (domínio de ideais principais) e $H_{q-1}(X,A)$ finitamente gerado. Seja T_{q-1} o submódulo de torção de $H_{q-1}(X,A)$.

Se também $H_q(X,A)$ é finitamente gerado e F_q é o submódulo quociente de $H_q(X,A)$ por $T_q(X,A)$ então $H^q(X,A) \cong F_q \oplus T_{q-1}(X,A)$. (não canonicamente).

CAPÍTULO III

ESPAÇOS LENTICULARES

O objetivo deste capítulo é mostrar as várias formas de obter os espaços lenticulares, bem como computar seus grupos de homologia e fundamental.

As referências deste capítulo são [1] e [17].

§1 - *ESPAÇOS LENTICULARES OBTIDOS POR AÇÃO DE GRUPOS*

1.1. Considerações sobre aplicações equivariantes

Seja um G-espaço A. Suponha que dada uma aplicação equivariante $\theta: A \to G$, $a \to \theta_a$ onde G atua por conjugação em G $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Denotamos o grupo das aplicações equivariantes por $Map^G(A,G)$.

Definimos uma função $Map^G(A,G) \to Homeo^G(A)$ por $\theta \to \theta^*$ onde $\theta^*(a) = \theta_a(a)$.

Mostremos que θ^* é equivariante. De fato, $\theta^*(ga) = \theta_{ga}(ga) = (g\ \theta_a\ g^{-1})(ga) = g(\theta_a(a)) = g(\theta^*(a))$. Além disso, θ^* é homeomorfismo, pois $(\theta^*.\lambda^*)(a) = \theta^*(\lambda^*(a)) = \theta^*(\lambda a(a)) = \lambda_a(\theta^*(a)) = \lambda_a(\theta_a(a)) = (\lambda\theta)_a(a) = (\lambda\theta)^*(a)$. Daqui, conclui-se que $(\theta^{-1})^* = (\theta^*)^{-1}$, portanto, um homeomorfismo.

Suponha que seja dada uma aplicação equivariante $\theta: A \to G$ e $A \times A$ tem uma G-ação diagonal, isto é,

$g(a,a') = (g(a),g(a'))$. Então a aplicação $A \times A \to G$ dada por $(a,a') \to \theta_a$ é equivariante.

Pelas observações acima, $(a,a') \to (\theta_a(a),\theta_a(a'))$ é um homeomorfismo equivariante de $A \times A$.

Se $(a,a') \to (a',a)$ é também equivariante e então $(a,a') \to (\theta_a(a'), \theta_a(a))$ é homeomorfismo equivariante.

Neste parágrafo será interessante considerar o caso em que $\theta_a(a) = a$. Em particular, se $\theta: A \to G$, $a \to \theta_a$ tal que $\theta_a(a) = a$ para todo $a \in A$ e θ equivariante, então a aplicação $A \times A \to A \times A$ definida por $(x,y) \to (\theta_x(y),x)$ é um homeomorfismo equivariante. Pois, definindo $\phi(x,y) = (\theta_x(y),x)$ então tem-se:

$\phi(gx,gy) = (\theta_{gx}(gy),gx) = ((g\theta_x g^{-1})(gy),gx) = (g\theta_x(y),gx) = g(\phi_x(y),x) = g\phi(x,y)$. Portanto, ϕ é equivariante.

1.2 - Sobre Colagem de Espaços

Usando as observações anteriores construiremos alguns espaços por colagem de $S^{n-1} \times D^n$ em $S^{n-1} \times D^n$ através de um homeomorfismo equivariante ϕ de $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Observemos que o nosso grupo será $G = O(n)$ que consiste de todas as matrizes $A \in GL(n)$ tal que $A.A^t = I$, e consideraremos a ação standart de $O(n)$ em S^{n-1} e D^n e a ação diagonal em $S^{n-1} \times D^n$.

Queremos uma aplicação $\theta: S^{n-1} \to O(n)$ onde $O(n)$ atua em si mesmo por conjugação. Vamos caracterizar tais aplicações.

Se $x \in S^{n-1}$ e $gx = x$ então $\theta_x = \theta_{gx} = g\theta_x g^{-1}$. As

sim, θ_x comuta com cada elemento do grupo de $O(n)_x$ (que é o conjugado de $O(n-1)$). Temos quatro possibilidades para θ_x : 1, -1, uma reflexão através do hiperplano perpendicular a x ou igual a uma reflexão através da linha Rx.

Vamos considerar somente o caso em que θ_x é a reflexão através de Rx, isto é, para cada $x \in S^{n-1}$ e $y \in R^n$ considere $\theta_x(y) = 2\langle x,y\rangle x-y$. Observe que $\theta_x(X) = x$.

Consideremos a aplicadação $\phi: S^{n-1}\times S^{n-1} \to S^{n-1}\times S^{n-1}$, $\phi(x,y) = (\theta_x(y),x)$. Como vimos anteriormente ϕ é uma aplicação equivariante sobre $O(n)$.

Mostremos que ϕ é homeomorfismo. Observemos que $\theta_x(\theta_x(y)) = y$ e $\theta_y(\theta_y(x)) = X$.

De fato:

$$\theta_x(\theta_x(y)) = \theta_x(2\langle x,y\rangle x-y) = 2\{\langle x,[2\langle x,y\rangle x-y]\rangle\}x -$$
$$- \{2\langle x,y\rangle x-y\} = 2\{2\langle x,y\rangle\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle\}x -$$
$$-2\langle x,y\rangle x+y = 2\{2\langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle\}x - 2\langle x,y\rangle x + y =$$
$$= 2\langle x,y\rangle x - 2\langle x,y\rangle x + y = y$$

Analogamente mostra-se que $\theta_y(\theta_y(x)) = x$.

Para ver que ϕ é homeomorfismo basta tomar $\phi^{-1}(x,y) = (y,\theta_y(x))$. Logo, tem-se:

$$\phi(\phi^{-1}(x,y)) = \phi(y,\theta_y(x)) = (\theta_y(\theta_y(x)),y) = (x,y)$$
$$\phi^{-1}(\phi(x,y)) = \phi^{-1}(\theta_x(y),x) = (x,\theta_x(\theta_x(y))) = (x,y)$$

Assim, $\phi(x,y) = (\theta_x(y),x)$ é homeomorfismo. Segue que θ é equivariante e portanto, ϕ é homeomorfismo equivariante,

bem como suas potências ϕ^k.

Observemos que isto poderia ser deduzido das preliminares, do fato de ser θ equivariante:

$$\theta_{AX}(y) = 2\langle AX,y\rangle\, AX - y =$$

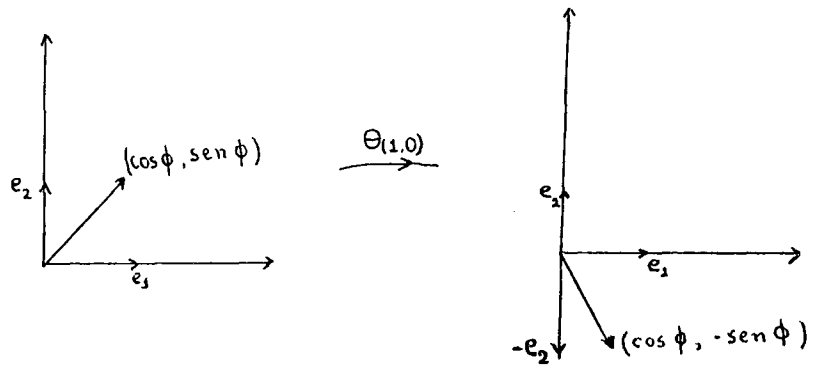
$$= A(2\langle AX,y\rangle x - A^{-1}y) = A.\theta_x(y)A^{-1}.$$

Definimos então, $\Sigma_k^{2n-1} = S^{n-1} \times D^n \underset{\phi^k}{\cup} S^{n-1} \times D^n$ como sendo o $O(n)$ - espaço resultante da colagem de $S^{n-1} \times D^n$ em si mesmo por meio da k-ésima potência de ϕ (K inteiro qualquer) em $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

A aplicação θ geometricamente pode ser descrita para $n = 2$. $\theta: S^1 \to \theta(2)$ $\theta_x(y) = 2\langle x,y\rangle\, x - y$. Fixemos $x=(1,0)$ então $\theta_{(1,0)}(x,y) = 2\langle(1,0),(x,y)\rangle\,(1,0) - (x,y) = (x, -y)$.

$\theta_{(1,0)}(1,0) = (1,0)$; $\theta_{(1,0)}(0,1) = (0,-1)$. Portanto

$$\theta(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Logo, o vetor $e_2 = (0,1)$ fêz uma reflexão em relação ao eixo $R(1,0) = R$.

Sendo $\phi^0 =$ identidade $\Sigma_0^{2n-1} \simeq S^{n-1} \times S^n$ com a ação diagonal de $O(n)$. [$O(n)$ atua em S^n via inclusão standart

$O(n) \subset O(n+1)]$.

Observemos que $\Sigma_k^{2n-1} \simeq \Sigma_{-K}^{2n-1}$ como $O(n)$-espaços.

Para descrevermos $\Sigma_{K=1}^{2n-1}$ trocamos as componentes de $S^{n-1} \times D^n$ por $D^n \times S^{n-1}$ por meio de ϕ^1: $(x,y) \to (x,\theta_x(y))$, em $S^{n-1} \times S^{n-1}$, (ϕ^1 é a composição de ϕ com uma mudança de fatores $T(x,y) = (y,x)$, pois, $(T.\phi)(x,y) = T\phi(x,y)=T(\theta_x(y),x)=$ $= (x,\theta_x(y)) = \phi^1(x,\theta_x(y))$.

A extensão de ϕ^1 sobre o espaço $S^{n-1} \times D^n$ é feita da seguinte maneira:

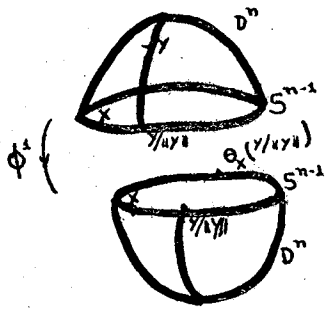
$$\phi^1: S^{n-1} \times D^n \to S^{n-1} \times S^{n-1} \subset S^{n-1} \times D^n$$

$$\phi^1(x,y) = (x,\theta_x(y)).$$

Se $y \in S^{n-1}$ podemos calcular $\theta_x(y)$ naturalmente da definição.

Se $y = 0$ então $\phi^1(x,0) = (x,\theta_x(0)) = (x,0)$ pois $\theta_x(0) = 2\langle x,0\rangle x - 0 = 0$.

Se $y \neq 0$ com $y \in D^n$ então $y/\|y\| \in S^{n-1}$, logo, $(x,\frac{y}{\|y\|}) \to \phi^1(x, y/\|y\|) = (x,\theta_x(y/\|y\|)) \in D^n \times S^{n-1}$



Concluimos que $\Sigma_1^{2n-1} = S^{n-1} \times D^n \underset{\phi^1}{\cup} D^n \times S^{n-1} \simeq S^{2n-1}$.

Logo, Σ_1^{2n-1} é equivalente à união dos espaços $S^{n-1} \times D^n$ por meio da função ϕ^1, isto é,

$\Sigma_1^{2n-1} \simeq S^{n-1} \times D^n \bigcup_{\phi^1} D^n \times S^{n-1} \simeq S^{2n-1} \subset R^{2n} \simeq R^n \times R^n$ onde $O(n)$ atua diagonalmente.

Observemos que pela proposição II,2.1 o espaço Σ_K^{2n-1} obtido dessa forma tem estrutura de variedade diferenciável com $n \geq 2$.

Passemos a estudar o grupo de homologia dessa variedade e em seguida particularizar os valores de n e K para obtermos desse modo os espaços lenticulares como objetivo proposto.

Denotaremos por $*$ um ponto base de S^{n-1} e sejam α e β classes de $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ representadas por $S^{n-1} \times *$ e $* \times S^{n-1}$ respectivamente.

Assim, $\phi: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1} \times S^{n-1}$ induz automorfismo $\phi_*: H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$.

Por exemplo, $\phi_*(\alpha) = a_1\alpha + a_2\beta$ onde a_i é o grau da composição $S^{n-1} \times * \to S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_i} S^{n-1}$ onde p_i é a projeção sobre o i-ésimo fator $(i=1,2)$.

Analogamente para B.

Usando as definições de ϕ vamos determinar o valor de ϕ_* nos geradores α e β.

Temos que: $\phi(x,*) = (\theta_x(*),x)$

$$\phi(*,y) = (\theta_*(y),*)$$

Como $\phi_*(\alpha) = a_1\alpha + a_2\beta$, $\phi_*(\beta) = c_1\alpha + c_2\beta$ vamos determinar a_1, a_2, c_1 e c_2.

Determinação de a_1

Temos $S^{n-1} \to S^{n-1}$ $x \mapsto \theta_x(*) = 2\langle x,*\rangle x - *$. Usando a definição II, 4.1 queremos calcular o grau de $\theta_x(*)$.

Calculando as derivadas de $\theta_x(*)$ nos pontos regulares $*$ e $-*$, fixando-se $* = (0,0,\ldots,1)$ obtemos $s(D\theta_*(*))=1$ e $s(D\theta_*(*)) = -1$. Então, $\deg \theta_x(*) = 0$ se n impar e $\deg \theta_x(*) = 2$ se n é par.

Logo, podemos escrever $a_1 = 1 + (-1)^n$, $n \in N$.

Determinação de a_2

Temos que $S^{n-1} \times * \subset S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$

$(x,*) \mapsto (p_2\phi)\ (x,*) = p_2(\theta_x(*),x) = x$

$H_{n-1}(S^{n-1} \times *) \to H_{n-1}(S^{n-1})$

$\alpha \mapsto (p_2\phi)_*(\alpha) = a_2\alpha$

$a_2 = \deg$ (identidade) $= 1$.

Logo, $a_2 = 1$. Portanto, $\phi_*(\alpha) = (1 + (-1)^n)\alpha + 1\beta$.

Determinação de c_1

$* \times S^{n-1} \subset S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_1} S^{n-1}$

$(*,x) \to (p_1\phi)\ (*,y) = p_1(\phi(*,y)) = p_1(\theta_*(y),*) = \theta_*(y)$.

$H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{(p_1\phi)_*} H_{n-1}(S^{n-1})$

$\beta \to (p_1\phi)_*(\beta) = c_1\beta$.

Calculemos o grau de $\theta_*(y)$.

Podemos ver que $\theta_*(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$

$= (-y_1, -y_2, \ldots, -y_{n-1}, y_n)$. Como $r_i = S^{n-1} \to S^{n-1}$,

$r_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$ tem grau

$\deg(r_i) = (-1)$. Observemos que $\theta_* = r_1 r_2 \ldots r_{n-2} . id$ e que

$\deg(\theta_*(y))$ depende do número par ou impar de composição de r_i.

Assim $\deg(\theta_*(y)) = (-1)^{n-1}$. Portanto, $C_1 = (-1)^{n-1}$.

Determinação de C_2

Temos que: $* \times S^{n-1} \subset S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_2}$

$\xrightarrow{p_2} S^{n-1}$.

$$(*, y) \to (p_2\phi)\ (*, y) = p_2\ \phi(*, y) = *$$

$$H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{(p_2\phi)_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

$$\beta \to (p_2\phi)_*(\beta) = 0.\beta = 0$$

$$\therefore\ c_2 = 0$$

Portanto obtemos $\phi_*(\alpha) = (1+(-1)^n)\alpha + 1.\beta$

$$\phi_*(\beta) = (-1)^{n-1}\alpha.$$

Escrevendo matricialmente a expressão acima temos:

$$\phi_* = \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando ϕ_* na forma matricial, podemos calcular as potências de ϕ_* para todo inteiro K:

$$\phi_*^K = \begin{bmatrix} 1 + k & -K \\ K & 1 - K \end{bmatrix} \text{se } n \text{ par}$$

$$\phi_*^{K=\text{impar}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{se } n \text{ ímpar}$$

$$\phi_*^{K=\text{par}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{se } n \text{ ímpar}$$

Observação sobre o espaço $\Sigma_k^{2n-1} = S^{n-1}\times D^n \underset{\phi^k}{} S^{n-1}\times D^n$. Nesta construção foram consideradas as seguintes inclusões: $S^{n-1} \times S^{n-1} \approx (S^{n-1} \times S^{n-1})_1 \hookrightarrow S^{n-1} \times D^n$.

$\wr\wr$ difeomorfismo

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \approx (S^{n-1} \times S^{n-1})_2 \hookrightarrow S^{n-1} \times D^n.$$

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1} \times D^n \hookrightarrow \Sigma_k^{2n-1}$$

Podemos considerar $S^{n-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1} \times D^n$ através da inclusão ou de ϕ e denotaremos por:

$$(S^{n-1} \times D^n)_i \hookrightarrow \Sigma_k^{2n-1}$$

$$(S^{n-1} \times D^n)_\phi \hookrightarrow \Sigma_k^{2n-1}$$

Além disso, $(S^{n-1} \times D^n)_i \cap (S^{n-1} \times D^n)_\phi =$ $= (S^{n-1} \times S^{n-1})_{(i,\phi)} \approx S^{n-1} \times S^{n-1}$. Portanto, queremos através da sequência de Mayer-Vietoris calcular $H_i(\Sigma_k^{2n-1})$ sabendo que:

$$H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})_i \cong H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})$$

$$H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})_\phi \cong H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})$$

$$H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})_{(i,\phi)} \cong H_i(S^{n-1} \times S^{n-1})$$

1.3 - GRUPOS DE HOMOLOGIA DE Σ_k^{2n-1}

Para calcular a homologia de Σ_k^{2n-1}, vamos usar a sequência de Mayer-Vietoris na tríade $(\Sigma_k^{2n-1}, S^{n-1}\times D^n, S^{n-1}\times S^{n-1})$.

Logo, temos a sequência de Mayer, Vietoris

$$\ldots \to H_{j+1}(\Sigma_k^{2n-1}) \xrightarrow{\Delta} H_j(S^{n-1}\times S^{n-1}) \xrightarrow{(i_*,\phi_*^k)=\psi} H_j(S^{n-1}\times D^n) \oplus$$

$$\oplus\, H_j(S^{n-1}\times D^n) \xrightarrow{\phi} H_j(\Sigma_k^{2n-1}) \to \ldots$$

Antes de realizarmos os cálculos faremos duas observações:

Observação 1:

Da proposição I, 5.7 precisamos verificar como é a aplicação $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{\psi=(m_{1*},-m_{2*})} H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \oplus$ $+ \; H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n)$.

$(a_1,a_2) \mapsto (m_{1*}(a_1,a_2), -m_{2*}(a_1,a_2))$. Se tomarmos $(a_1,a_2) = (1,0)$ e $(a_1,a_2) = (0,1)$ elementos básicos de $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$.

$$(1,0) \mapsto (m_{1*}(1,0), -\, m_{2*}(1,0))$$

$$(0,1) \mapsto (m_{1*}(0,1), -\, m_{2*}(0,1))$$

Como neste caso $i_* = m_{1*}$ então $m_{1*}(1,0) = 1$ e $m_{1*}(0,1) = 0$. Resta-nos encontrar o valor de $m_{2*}(1,0)=\phi_*^k(1,0)$ e

$m_{2*}(0,1) = \phi_*^k(0,1)$.

Para isto, vamos usar ϕ_*^k na forma matricial. Assim

$m_{2*}(1,0) = \phi_*^k(1,0) = [1+k,-k]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = [1+k] \in H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n)$.

$m_{2*}(0,1) = \phi_*^k(0,1) = [1+k, -k]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [-k] \in H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n)$.

Podemos então tomar ψ como $\psi = (i_*, \phi_*^k) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1+k & -k\end{bmatrix}$.

Passemos agora a determinar a homologia de Σ_k^{2n-1}. Esses cálculos estão divididos em duas etapas de acordo com n ser par ou ímpar.

A) Suponhamos $n = 2m$, $m \geq 1$ e k inteiro qualquer

i) *Se $j = 2m - 1$* e k inteiro qualquer obtemos:

$$0 \to H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\Delta} H_{2m-1}(S^{2m-1}\times S^{2m-1}) \xrightarrow{\psi} H_{2m-1}(S^{2m-1}\times D^{2m}) +$$

$$\oplus H_{2m-1}(S^{2m-1}\times D^{2m}) \xrightarrow{\phi} H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \to 0$$

$$0 \to H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\Delta} Z \oplus Z \xrightarrow{\psi} Z \oplus Z \xrightarrow{\phi} H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \to 0$$

Da exatidão da sequência temos: $\operatorname{Ker}\psi \simeq H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1})$ e $\operatorname{coker}\psi = \operatorname{im}\phi = H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1})$

Como $\psi = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1+k & -k\end{bmatrix}$ segue-se que

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1+k & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ implica $(x,y) = (0,0)$ e portanto

$\operatorname{Ker}\psi = 0$. Logo, $H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \simeq 0$.

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+k \end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k \end{bmatrix}$ segue-se que

$\operatorname{im} \psi = [(1,1+k) \oplus (0,-k)] = [(1,1) \oplus (0,k)]$.

Portanto, $H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) = \operatorname{coker} \psi = \dfrac{Z \oplus Z}{[(1,1) \oplus (0,k)]} \approx Z_k$

ii) *Se* $j = 4m - 1$ e K inteiro qualquer obtemos:

$\to H_{4m-1}(S^{2m-1} D^{2m}) \oplus H_{4m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \xrightarrow{\phi} H_{4m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\Delta}$

$\xrightarrow{\Delta} H_{4m-2}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) \xrightarrow{\psi} H_{4m-2}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{4m-2}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \xrightarrow{\phi}$

$\xrightarrow{\phi} H_{4m-2}(\Sigma_k^{4m-1}) \to H_{4m-3}(S^{2m-1} \times S^{2m-1})$

$$0 \to H_{4m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\Delta} Z \xrightarrow{\psi} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{4m-2}(\Sigma_k^{4m-1}) \to 0$$

Segue-se então que $H_{4m-1}(\Sigma_k^{m-1}) \approx Z$ e $H_{4m-2}(\Sigma^{4m-1}) = 0$

Além disso, se $j \neq 0,\ 2m - 1,\ 4m - 1$ então $H_j(\Sigma_k^{4m-1}) = 0$.

Conclusão da parte A)

$$H_j(\Sigma_k^{4m-1}) = \begin{cases} Z & \text{se } j = 0,\ 4m - 1 \\ Z_k & \text{se } j = 2m - 1 \\ 0 & \text{se } j \neq 0,\ 2m - 1,\ 4m - 1 \end{cases}$$

B) Suponhamos $n = 2m + 1$ $m \geq 1$ *e* k *inteiro qualquer*

Quando n é ímpar, $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ devemos considerear se K é par ou K é ímpar, pois as matrizes de Ψ são diferentes.

B.1) Se K é par a matriz de Ψ fica sendo $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

i) *j = 2m, k par*

$$\to H_{2m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{2m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{2m}(S^{2m}\times S^{2m}) \xrightarrow{\psi} H_{2m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{2m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi}$$

$$\xrightarrow{\phi} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to$$

$$0 \oplus 0 \to H_{2m+1}(\Sigma_k^{2m-1}) \xrightarrow{\Delta} Z \oplus Z \xrightarrow{\psi} Z \oplus Z \xrightarrow{\phi}$$

$$\xrightarrow{\phi} H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \to 0$$

Temos que $H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq \text{Ker } \Psi$ e $H_{2m}(\Sigma_k^{2m+1}) \simeq \text{coker } \Psi$

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ \forall\, y \end{matrix}$

$\therefore$ Ker $\psi \simeq Z$.

Também $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ implica que im $\psi \simeq Z$

Portanto $H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq Z$ e $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq Z$.

ii) *j = 4m, k par*

$$\to H_{4m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{4m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta} H_{4m}(S^{2m}\times S^{2m}) \xrightarrow{\psi}$$

$$\xrightarrow{\psi} H_{4m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{4m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{4m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to 0$$

$$0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta} Z \xrightarrow{\psi} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{4m}(\Sigma^{4m+1}) \to 0$$

Da seqüência exata segue-se que:

$$H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \approx Z \quad \text{e} \quad H_{4m}(\Sigma_k^{4m+1}) \approx 0.$$

B2) *Se k é ímpar* e $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ a matriz de ψ fica sendo $\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

i) *Se j = 2m, k ímpar* temos

$$\to H_{2m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{2m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta} H_{2m}(S^{2m}\times S^{2m}) \xrightarrow{\psi}$$

$$\xrightarrow{\psi} H_{2m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{2m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to 0$$

$$0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta} Z \oplus Z \xrightarrow{\psi} Z \oplus Z \xrightarrow{\phi} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to 0$$

Temos que $H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \approx \text{Ker}\ \psi$ e $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \approx \text{coker}\ \psi$

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

segue-se que $\text{Ker}\ \psi \cong 0$.

Temos também $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ implica que

$\operatorname{im} \psi \simeq Z \oplus Z$.

Portanto, $H_{2m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq \ker \psi \simeq 0$ e $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq \operatorname{coker} \psi = 0$

ii) *Se* $j = 4m$, k *impar temos:*

$$\to H_{4m+1}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{4m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi} H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{4m}(S^{2m}\times S^{2m}) \xrightarrow{\psi} H_{4m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \oplus H_{4m}(S^{2m}\times D^{2m+1}) \xrightarrow{\phi}$$

$$\xrightarrow{\phi} H_{4m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to 0$$

$$\ldots \to 0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\Delta} Z \xrightarrow{\psi} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\phi} H_{4m}(\Sigma_k^{4m+1}) \to 0$$

Desta seqüência segue-se que: $H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq Z$ e $H_{4m}(\Sigma_k^{4m+1}) \simeq 0$.

Conclusão de B)

$$H_j(\Sigma_{k=par}^{4m+1}) = \begin{cases} Z & \text{se } j = 0,\ 2m,\ 2m+1,\ 4m+1. \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_j(\Sigma_{k=impar}^{4m+1}) = \begin{cases} Z & \text{se } j = 0,\ 4m+1 \\ 0 & \text{se } j \neq 0,\ 4m+1. \end{cases}$$

Observemos que, $\Sigma^{4m+1}_{k=par}$ tem a mesma homologia de $S^{2m} \times S^{2m+1}$ e que $\Sigma^{4m+1}_{k=impar}$ tem a homologia de S^{4m+1}.

Para $n \geq 3$, $S^{n-1} \times D^n$ é simplesmente conexo pelo teorema I, 4.6 implica que Σ^{2n-1}_k é simplesmente conexo.

1.4 - OBTENÇÃO DOS ESPAÇOS LENTICULARES A PARTIR DE Σ^{2n-1}_k

Se tomarmos $n = 2$, obtemos Σ^3_k e queremos mostrar que este é justamente o espaço lenticulares do tipo (k,l).

Para ver isto, consideremos a aplicação $\phi: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ dada por $\phi(x,y) = (\theta_x(y), x)$.

Seja $\tilde{\phi}$ o levantamento de ϕ definido da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} & R\times R \arrow[d, "q"] \\ R\times R \arrow[ur, dashed, "\tilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & S^1\times S^1 \end{tikzcd}$$

$$\phi(s,t) = (e^{2\pi i(2s-t)}, e^{2\pi i s})$$

$$q(2s-t,s) = (e^{2\pi i(2s-t)}, e^{2\pi i s})$$

$$\tilde{\phi}(s,t) = (2s-t,s)$$

Temos que $q \circ \tilde{\phi}(s,t) = q(\tilde{\phi}(s,t)) = q(2s-t,s) =$ $= (e^{2\pi i(2s-t)}, e^{2\pi i s})$ e assim, $q \circ \tilde{\phi} = \phi$.

Vamos verificar que $\phi(e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) = (e^{2\pi i(2s-t)}, e^{2\pi i s})$ Para isto, vamos mostrar que $\theta_{2\pi i s}(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i(2s-t)}$

$$\theta_{e^{2\pi is}}(e^{2\pi it}) = 2\langle e^{2\pi is}, e^{2\pi it}\rangle e^{2\pi is} - e^{2\pi it} = (\cos(4\pi s-2\pi t) +$$

$$+ \cos 2\pi t, \operatorname{sen}(4\pi s-2\pi t) + \operatorname{sen} 2\pi t) -$$

$$- (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) = (\cos(4\pi s-2\pi t), \operatorname{sen}(4\pi s-2\pi t)) =$$

$$= e^{2\pi i(2s-t)}.$$

Observemos que, geometricamente, $\Theta_{e^{2\pi is}}(e^{2\pi it}) = e^{(4s-2t)\pi i}$ corresponde a multiplicar $e^{-2\pi it}$ pelo ângulo de $4\pi s$.

Escrevendo $\tilde{\phi}(s,t) = (2s-t,s)$ na base usual do R^2 tem-se $\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando-se as potências de $\tilde{\phi}$ vem que

$$\tilde{\phi}^k = \begin{bmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{bmatrix}$$

No próximo parágrafo usaremos isto para definir os espaços lenticulares. Além disso, veremos que $L(k,q)$ depende somente de $|K|$ e da classe de congruência $\pm q \pmod K$. Assim $\Sigma_k^3 = L(k,1-k) \simeq L(K,1)$.

Observação 1:

Podemos descrever $L(k,q)$ como sendo o espaço das órbitas da ação livre de Z_k em $S^3 \subset C^2$ gerado pela matriz $\begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{k}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi iq}{k}} \end{bmatrix}$, isto também veremos adiante.

Observação 2:

Outro fato interessante é observado ao analisarmos o espaço Σ_k^1, $\Sigma_k^1 = S^0 \times D^1 \bigcup_{\phi^k} S^0 \times D^1$ onde $\phi^k: S^0 \times S^0 \to S^0 \times S^0$, $\bar{\phi}^k(x,y) = (y,x)$. Assim na base canônica do R^2, podemos ver que $\bar{\phi}^{k=par} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\phi^{k=impar} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\Sigma^1_{k=impar} \cong S^1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$\Sigma^1_{k=par} \cong S^0 \times S^1 \cong$ dois círculos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observação 3:

Portanto, pelo que foi visto anteriormente podemos calcular os grupos de homologia de Σ_k^3.

Então,

$$H_j(\Sigma_k^3) = \begin{cases} Z & \text{se } j = 0,3 \\ Z_k & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j \neq 0,1,3 \end{cases}$$

§2 - *OS ESPAÇOS LENTICULARES POR CLASSIFICAÇÃO DE NÓS NO TORO*

Neste parágrafo descreveremos os espaços lenticulares usando essencialmente classificação de nós no toro. Para isso,

precisamos de alguns resultados básicos.

Para as demonstrações dos resultados enunciados a seguir ver [17].

Um nó $K \subset T^2$ que é não homotópico a zero ($[K] \neq \langle 0,0 \rangle$ em $H_1(T^2)$) será dito essencial, onde $T^2 = S^1 \times S^1$.

Teorema 2.1

Quaisquer dois nós em $T^2 = S^1 \times S^1$ de classe $\langle 0, \pm 1 \rangle$ são isotópicos.

Teorema 2.2

Para qualquer nó $K \subset T^2$ de classe $[k] \neq \langle 0,0 \rangle$, existe um homeomorfismo $h: T^2 \to T^2$ tal que $h(K) = M$, um meridiano standart.

Teorema 2.3

Dois nós $J, K \subset T^2$ são isotópicos se e somente se $[J] = \pm[k]$.

Lema 2.4 (Lema de Dehn)

Suponha M^3 uma 3-variedade e $f: D^2 \to M^3$ aplicação sem singularidades em ∂D^2 (isto é, $x \in \partial D^2$, $x \neq y \in D^2 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$). Então existe um mergulho $g: D^2 \to M^3$ com $g(\partial D^2) = f(\partial D^2)$.

Corolário 2.5

Suponha que $J \subset \partial M$ é uma curva fechada simples na fronteira de uma 3-variedade M^3 e que J é homotopicamente trivial em M^3. Então J borda um disco D^2 mergulhado propriamente em M^3 (isto é, $\partial D^2 \subset \partial M$, $\overset{0}{D}{}^2 \subset \overset{0}{M}{}^3$).

Lema 2.6

Seja $X = \{(x,y,z) \varepsilon R^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$ e $f: X \to D^2 \times S^1$, $f(x,y,z) = (x,y,e^{2\pi i z})$. Então $\frac{X}{K_f}$ é homeomorfo a $D^2 \times S^1$ onde k_f é uma relação de equivalência definida pela função f.

Demonstração

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & D^2 \times S^1 \\ \frac{X}{k_f} \arrow[ur, "\bar{f} = f p^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

onde p é identificação.

Mostremos que $\bar{f}$ é bijetora contínua e fechada. Temos que $\bar{f}$ é bijetora pois se $y \varepsilon \frac{X}{k_f}$ então $p^{-1}(y) = \{(t_1,t_2,0), (t_1,t_2,1)\}$ ou $p^{-1}(y) = \{(x,y,z) \varepsilon X$ com $z \varepsilon (0,1)\}$.

Como $f(t_1,t_2,0) = f(t_1,t_2,1) = (t_1,t_2,1)$ e $f(x,y,z) \varepsilon D^2 \times S^1$ vem que $\bar{f}$ é constante nas fibras $p^{-1}(y)$.

Além disso, $\bar{f}$ é naturalmente continua, pois p é identificação.

Para ver que $\bar{f}$ é fechada, seja $F \subset X/_{k_f}$ fechado. Então $p^{-1}(F)$ é fechado em X. Sendo X compacto de Hausdorff então $p^{-1}(F)$ é compacto. Como f é contínua segue que $f(p^{-1}(F)) \subset D^2 \times S^1$ é compacto e também $D^2 \times S^1$ sendo compacto e também $D^2 \times S^1$ sendo compacto de Hausdorff então $f(p^{-1}(F))$ é fechado. Portanto, $\bar{f}$ é fechada.

Segue-se então pelo Teorema 1, 2.3 que $\bar{f}$ é um homeomorfismo.

Lema 2.7

Sejam V_1 toro sólido e J uma curva fechada simples em ∂V_1 que é essencial. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) J é homologicamente trivial em V_1.

b) J é homotopicamente trivial em V_1.

c) J borda um disco D em V_1

d) para algum homeomorfismo $h: S^1 \times D^2 \to V_1$ existe um homeomorfismo $H: S^1 \times D^2 \to V_1$ tal que $H(1 \times \partial D^2) = J$.

Demonstração:

a) <=> b) pois $\pi_1(V_1) \cong H_1(V_1) \cong Z$

b) => c) Corolário 2.5

c) => b) óbvio

d) => c) Suponha que existe algum homeomorfismo

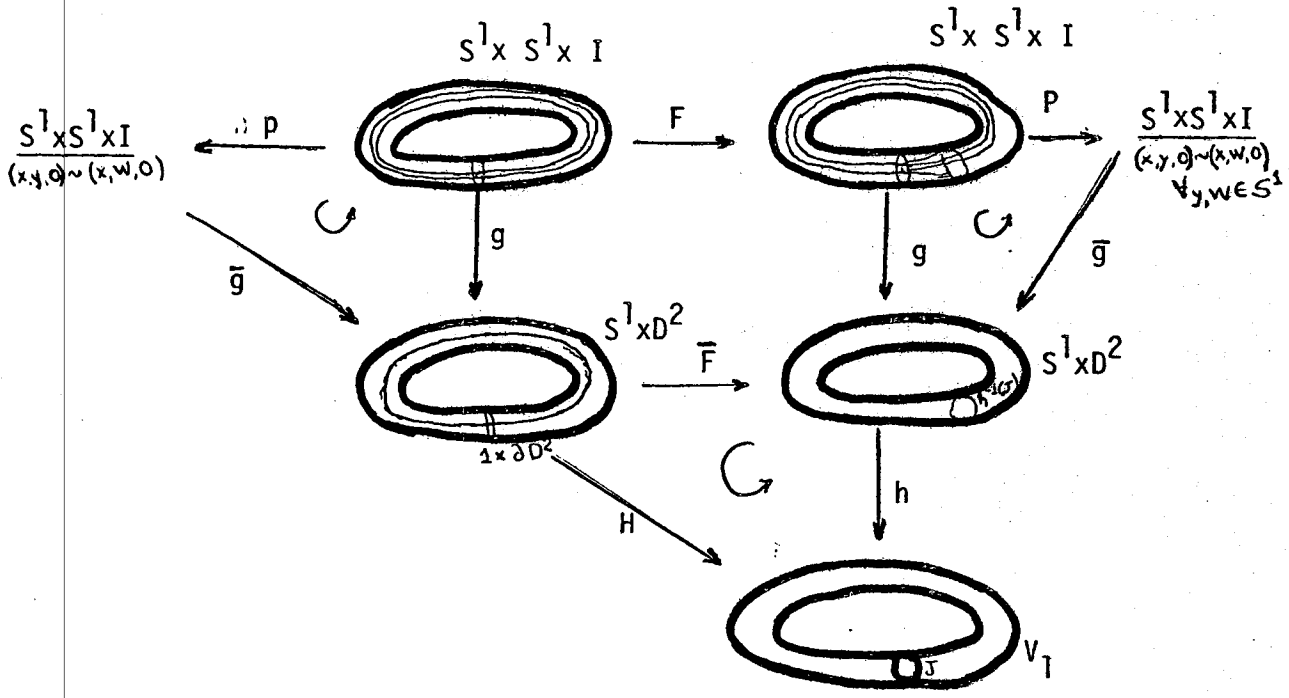
$H: S^1 \times D^2 \to V_1$ com $J = H(1 \times \partial D^2)$. Tomemos $H(1 \times \partial D^2) = D^2_1$

c) => d). Suponha que J borda um disco $D^2 \subset V_1$ e $h: S^1 \times D^2 \to V_1$ um homeomorfismo.

Temos então que $(1 \times \partial D^2)$ e $h^{-1}(J)$ são nós do tipo $\langle 0, \pm 1 \rangle$ pelo teorema 2.1. Portanto, existe uma isotopia $G: S^1 \times S^1 \times I \to S^1 \times S^1$ tal que $G(x,0) = Id_{S^1 \times S^1}$ e $G(x,1) = f_1 : h^{-1}(J) \to 1 \times \partial D^2$.

Tomemos então $F: S^1 \times S^1 \times I \to S^1 \times S^1 \times I$ dada por $F(x,t) = (G(x,t),t)$ isto é, o traço da isotopia G.

Seja p a identificação, então, observemos que se $g: S^1 \times S^1 \times I \to S^1 \times D^2$, $g(x_1(y,t)) = (x,ty)$ temos os diagramas comutativos. Aplicando estes fatos no diagrama obteremos a conclusão desejada, onde tomamos H como sendo $H = \bar{F} \circ h$ que é o homeomorfismo desejado.



Definição 2.8

Uma curva fechada simples em ∂V_1 satisfazendo as condições do lema 2.7 é chamada de meridiano em V_1.

Uma longitude de ∂V_1 é qualquer curva fechada simples em ∂V_1 da forma $h(S^1 \times 1)$, para algum homeomorfismo $h: S^1 \times D^2 \to V_1$.

Lema 2.9

Se $K \subset \partial V_1$ é uma curva fechada simples, as seguintes condições são equivalentes.

a) K representa uma longitude

b) K representa um gerador de $H_1(V_1) \cong \pi_1(V\ ) \cong Z$

c) K intercepta algum meridiano (transversalmente)em um único ponto.

Demonstração

a) => b) por definição

a) => c) Supondo K uma longitude de V_1, $K=h(S^1\times 1)$ para algum homeomorfismo $h: S^1 \times D^2 \to V_1$.

Consideramos o meridiano $J = h(1 \times \partial D^2)$, então a única interseção entre K e J é $h(1 \times 1)$.

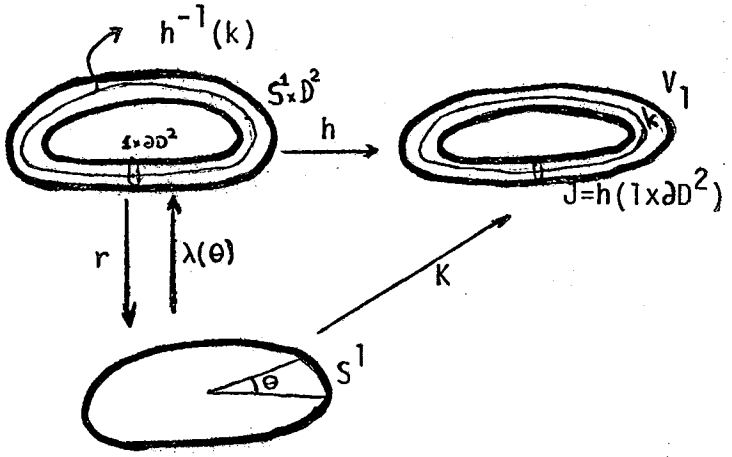
b) => a) similar à demonstração de c) => d) do lema 2.7.

c) => b)

Suponha que k intercepta algum meridiano em um úni-

co ponto. Seja J o meridiano em ∂V_1 tal que $J \cap k = \{p\}$. Pelo lema 2.7, $h(1 \times \partial D^2) = J$ para algum homeomorfismo $h: S^1 \times D^2 \to V_1$.

Como existe uma retração r de $S^1 \times D^2$ em S^1, definimos $\lambda(\theta) = h^{-1}k(\theta)$ onde $K: S^1 \to V_1$ $K(\theta) = k$. Sendo k curva fechada simples e intercepta J em um único ponto, então $r.\lambda$ tem grau 1. Logo, $r_* \cdot \lambda_* : \pi_1(S^1 \times D^2) \to \pi_1(S^1)$ é isomorfismo e sendo r_* isomorfismo, segue-se que $\lambda_*: \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1 \times S^2)$ é isomorfismo. Portanto, k é gerador de $\pi_1(V_1)$ pois h_* é isomorfismo.



Lema 2.10

Um homeomorfismo $f: \partial V \to \partial V$ estende a um homeomorfismo $F: V \to V$ se e somente se f leva meridiano em meridiano.

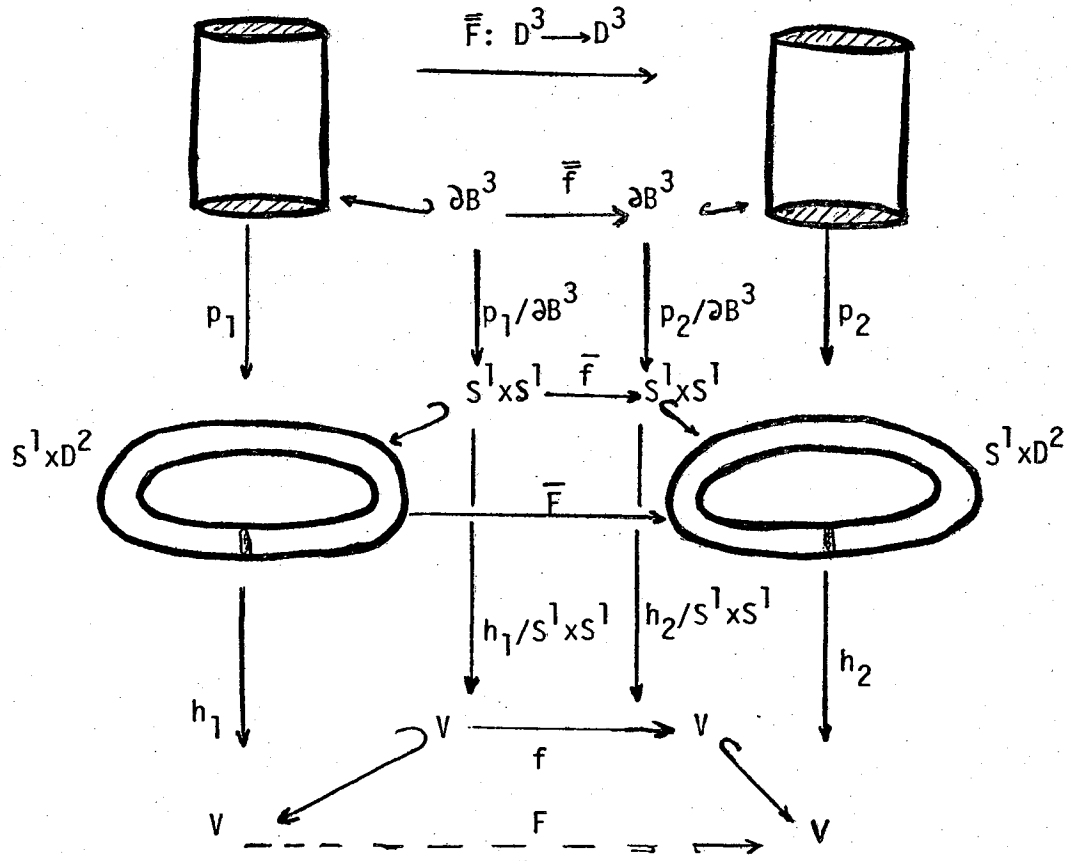
Demonstração

Suponha que f leva meridiano em meridiano. Temos que $f: \partial V \to \partial V$ homeomorfismo e ∂V homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Consideremos o seguinte diagrama, com f_1 e f_2 homeomorfismos.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \times S^1 \\ \uparrow f_1 & & \uparrow f_2 \\ \partial V & \xrightarrow{f} & \partial V \end{array}$$

Logo, $\bar{f} = f_2.f.f_1^{-1}: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ é um homeomorfismo. Seja m um meridiano qualquer de $S^1 \times S^1$. Como a imagem da $\bar{f}$ é meridiano, podemos estender $\bar{f}$ sobre o disco D que borda m(lema 2.7). Cortamos $S^1 \times S^1$ ao longo do disco D^2. Naturalmente, o que obtemos é homeomorfo a uma bola B^3, podemos estender $\bar{f}$ à $\bar{\bar{f}}$ para o bordo de B^3. Usando os lemas 2.6 e 2.7 estendemos a função $\bar{f}$ para todo $S^1 \times D^2$ onde h_1 e h_2 são homeomorfismos. Observando o diagrama vem que $F = h_2 \,.\, \bar{F} \,.\, h_1^{-1}$ onde $\bar{F}$ é passagem ao quociente de $\bar{\bar{F}}$ que existe pelo lema 2.6.



Definição 2.11

Seja $h: \partial V_2 \to \partial V_1$ homeomorfismo com V_1 e V_2 toros sólidos.

Fixando-se uma longitude ℓ_1 e um meridiano m_1 como geradores de $H_1(\partial V_1)$, escrevemos $h_*: H_1(\partial V_2) \to H_1(\partial V_1)$, $h_*(m_2) = p\ell_1 + qm_1$ onde m_2 é um meridiano em ∂V_2.

O espaço resultante da colagem de V_1 e V_2 via h é chamado espaço lenticular de tipo (p,q), com p e q relativamente primos. Denotaremos por $L(p,q) = V_1 \bigcup_h V_2$.

Em outras palavras, uma 3-variedade, orientável, conexa, compacta é um espaço lenticular se e somente se contém um toro sólido, cujo fêcho do complementar é também um toro sólido. Além disso, o que define qual é o espaço lenticular obtido é somente h_* e mais especificamente, se fixarmos uma trivialização em um dos toros sólidos, digamos V_1, então o que define $L(p,q)$ é exatamente $h_*(m_2) = p\ell_1 + qm_1$ como definido acima.

Observemos que $L(p,q)$ depende a menos de homeomorfismo somente da classe de homotopia de $h_*(m_2)$ em ∂V_1. De fato, suponha que $L^{h_1}(p,q) = V_1 \bigcup_{h_1} V_2$, $L^{h_2}(p,q) = V_1 \bigcup_{h_2} V_2'$ onde as aplicações $h_1: \partial V_2 \xrightarrow{\approx} T^2$ $h_2^{-1}(x) \to x$ e $h_1: \partial V_2' \xrightarrow{\approx} T^2$, $h_2^{-1}(x) \to x$ são homeomorfismos. Pelo fato de que

$h_{1*}(m_2) = p\ell_1 + qm_1 = h_{2*}(m_2')$ então podemos tomar a aplicação identidade $i: V_1 = S^1 \times D^2 \to V_1' = S^1 \times D^2$. Podemos observar o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L^{h_1}(p,q) = S^1 \times D^2 \cup_{h_1} V_2 & \\
L^{h_1}(p,q) = S^1 \times D^2 \cup_{h_2} V_2' \arrow[u, "id"] \arrow[u, dashed, bend right, "\phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $id|S^1 \times \partial D^2 = idS^1 \times S^1$. Observando a função induzida em ∂V_2 e ∂V_2 obtemos a função $\phi: \partial V_2' \to \partial V_2$ tal que $\phi : h_1^{-1} \cdot h_2$, isto é, $\phi(h_2^{-1}(x)) = h_1^{-1}(x)$.

$$\begin{tikzcd}
\partial V_2 & \partial V_2' \arrow[l, "\phi"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
T^2 \arrow[u, "h_1^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Logo, $\phi_*(m_2') = (h_{1*}^{-1} \cdot h_{2*})(m_2') = h_{1*}^{-1}(p\ell_1 + qm_1) = m_2$. Portanto, $\phi_*(m_2') = m_2$, isto é, ϕ_* leva meridiano em meridiano.

Pelo lema III, 2.10, podemos estender ϕ a uma função $\phi': V_2' \to V_2$.

$$\begin{tikzcd}
V_2' \arrow[r, "\phi'"] & V_2 \\
\partial V_2 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi"] & \partial V_2 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

que também é homeomorfismo. Assim conclui-se que $L^{h_1}(p,q) = L^{h_2}(p,q)$.

Observação 1

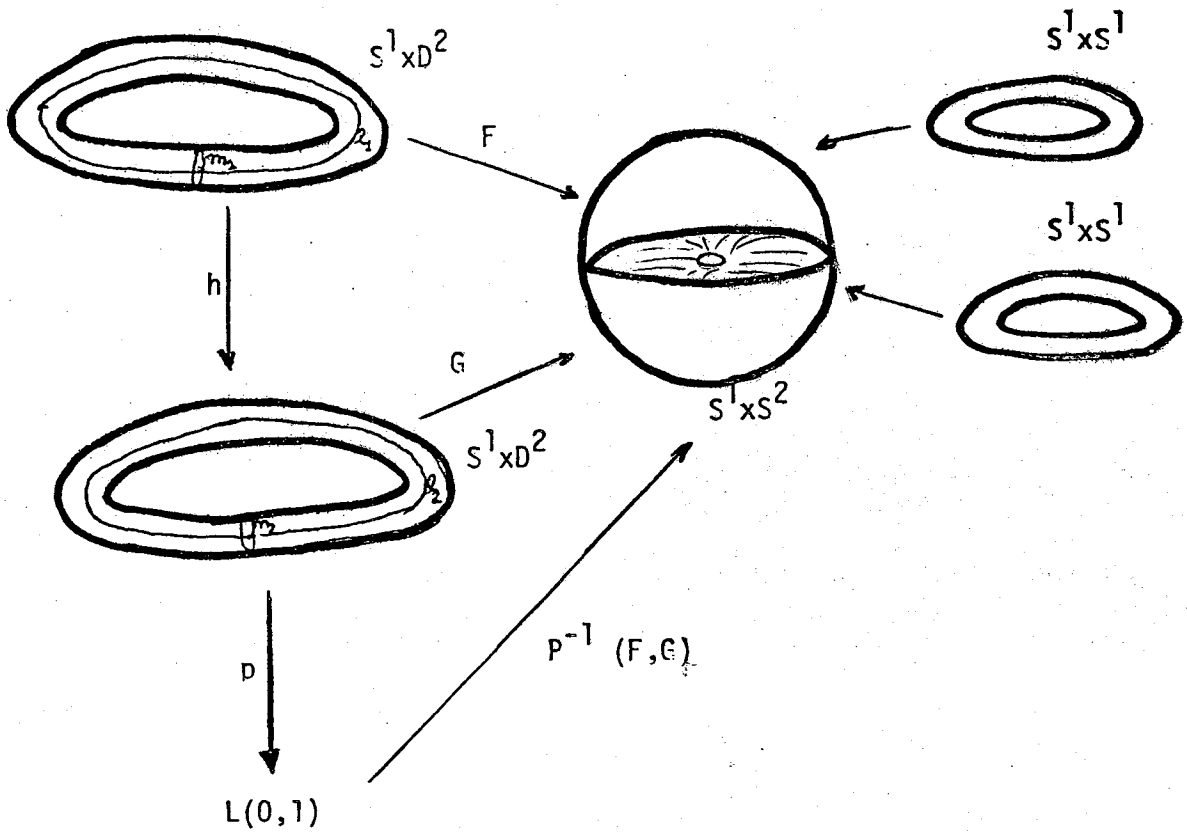
Para $p = 0$ e $q = 1$ então $L(0,1) \cong S^2 \times S^1$.

Pela definição 2.11, temos que $h_*(m_2) = m_1$. Em $S^2 \times S^1$ podemos fazer a seguinte decomposição:

$S^1 \times S^2 = (S^1 \times D_1^2) \bigcup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D_1^2)$ onde $S^2 = D_1^2 \bigcup_{S^1} D_2^2$. Usando o teorema 2.2, podemos obter homeomorfismos

$f: \partial(S^1 \times D_1^2)_1 \to \partial(S^1 \times D_1^2)_1$ e $g: \partial(S^1 \times D_2^2)_2 \to \partial(S^1 \times D_2^2)_2$.

Portanto, pelo lema 2.10, podemos estender f e g da seguinte forma $F: S^1 \times D_1^2 \to S^1 \times D_1^2$, $G: S^1 \times D_2^2 \to S^1 \times D_2^2$, observando que $\frac{S^2 \times I}{(a,0) \sim (a,1)} \cong S^2 \times S^1$. Seja $p: S^1 \times D_1^2 \bigcup_h (S^1 \times D_2^2) \to L(0,1)$ a identificação. Da comutatividade do diagrama, segue-se pelo teorema 1, 2.4 o homeomorfismo entre $S^1 \times S^2$ e $L(0,1)$.



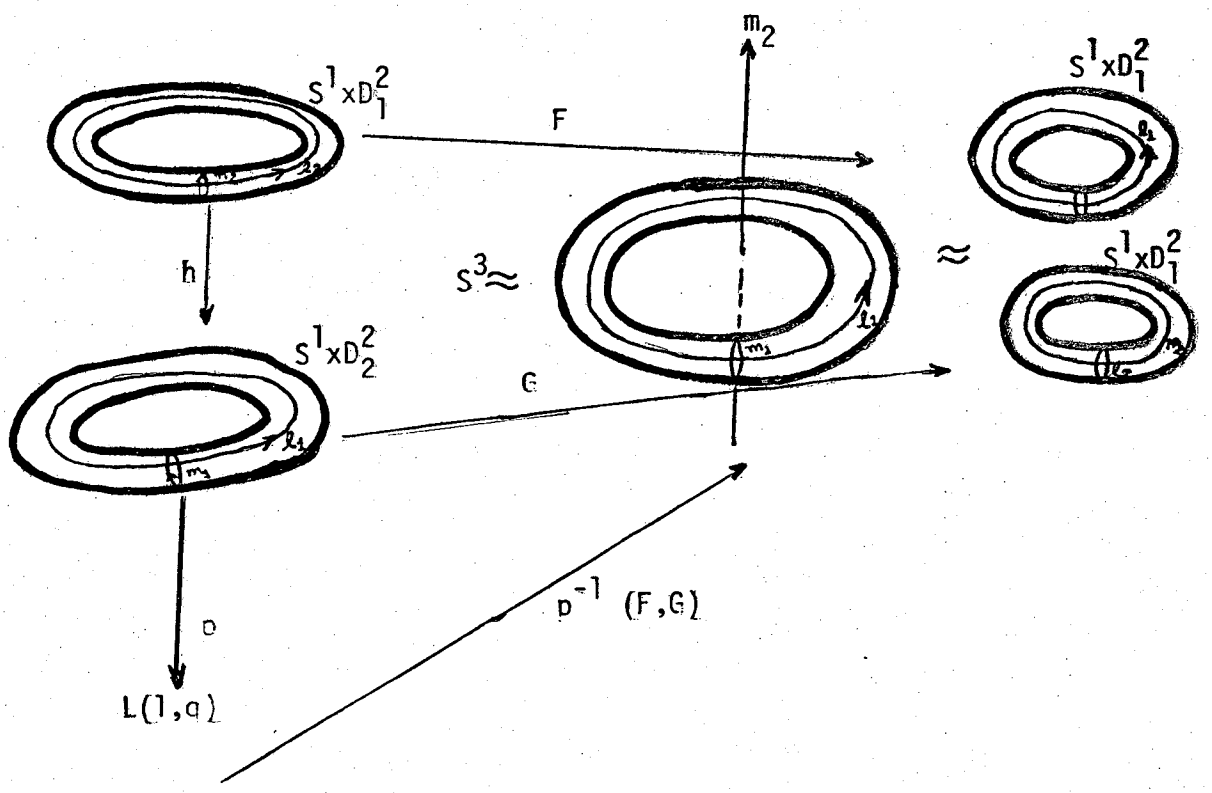
Observação 2

$L(1,q) \cong S^3$.

Pela definição 2.11, fazendo $p = 1$ e q qualquer em h_* obtemos $h_*(m_2) = \ell_1 + qm_1$.

Em S^3, fazemos $S^3 = R^3 + \infty$, como reunião de um toro sólido $S^1 \times D_1^2$ com seu complementar que é também um toro sólido. Pelo teorema 2.2, podemos obter homeomorfismos $f: \partial(S^1 \times D_1^2)_1 \to \partial(S^1 \times D_1^2)_1$ e $g: \partial(S^1 \times D_2^2)_2 \to \partial(S^1 \times D_2^2)_2$ que levam m_2 e m_1 respectivamente em meridianos nas imagens.

Portanto, pelo lema 2.10, podemos estender f e g da seguinte forma $F: S^1 \times D_1^2 \to S^1 \times D_1^2$ e $G: S^1 \times D_2^2 \to S^1 \times D_2^2$. Sendo $p: (S^1 \times D_1^2) \cup_h (S^1 \times D_2^2) \to L(1,q)$ a identificação, temos o diagrama abaixo comutativo. Portanto, pelo teorema I, 2.4 segue-se o homeomorfismo entre S^3 e $L(1,q)$.



Proposição 2.12

O grupo fundamental de $L(p,q)$ é isomorfo a Z_p.

Demonstração

Tomemos $L(p,q) = (S^1 \times D^2) \bigcup_h (S^1 \times D^2)$ onde $h: \partial(S^1 \times D^2) \to \partial(S^1 \times D^2)$ homeomorfismo tal que: $h_*: \pi_1(\partial(S^1 \times D^2)) \to \pi_1(\partial(S^1 \times D^2))$ com $h_*(m_2) = p\ell_1 + qm_1$ e também p e q relativamente primos, $0 < q < p$.

Consideremos os espaços conexos por caminhos $X_0 = S^1 \times S^1$, $X_1 = S^1 \times D^2$, $X_2 = S^1 \times D^2$ e $X = L(p,q)$ com os respectivos grupos $\pi_1(X_0) \cong Z \oplus Z$, $\pi_1(X_1) \cong Z$ e $\pi_1(X_2) \cong Z$.

Pelo teorema I, 4.6, vem que:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_0) \arrow[dl, "i_{1*}"'] \arrow[dr, "i_{2*} = h'_* \cdot h_*"] & \\
\pi_1(X_1) \arrow[dr] & & \pi_1(X_2) \arrow[dl] \\
 & \pi_1(L(p,q)) &
\end{tikzcd}$$

Usando as definições de i_{1*} e i_{2*}, vamos encontrar as respectivas imagens dos geradores de $\pi_1(X_0)$. Observe que $i_{1*}(1,0) = 1$ e $i_{1*}(0,1) = 0$.

Passemos agora a determinar as imagens de i_{2*} sobre os geradores de $\pi_1(X_0)$. Sabemos que $H_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong Z \oplus Z$ e que $H_1(X_1) \cong \pi_1(X_1)$, $H_1(X_2) \cong \pi_1(X_2)$.

Temos que $h_*: H_1(S^1 \times S^1) \to H_1(S^1 \times S^1)$,

$$h_* = \begin{bmatrix} r & p \\ s & q \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad rq - sp = 1$$

$$(1,0) \mapsto h_*(1,0) = (r,s)$$
$$(0,1) \mapsto h_*(0,1) = (p,q)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H_1(S^1 \times D^2) & \xleftarrow{i_*} & H_1(S^1 \times S^1) & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^1 \times S^1) & \xrightarrow{h_*^! = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} & H_1(S^1 \times D^2) \\
1 & \longleftarrow\!\shortmid & (1,0) & \longmapsto & (r,s) & \longmapsto & r \\
0 & \longleftarrow\!\shortmid & (0,1) & \longmapsto & (p,q) & \longmapsto & p
\end{array}$$

Então, $h_*^! \cdot h_*(1,0) = p$ e $h_*^! h_*(0,1) = r$.

Como $\pi_1(X_1) \cong Z = |b:|$ e $\pi_1(X_2) \cong Z \cong |a:|$ de acôrdo com a observação feita no §4 do Capítulo I, podemos escrever o grupo fundamental de $L(p,q)$ como sendo:

$$\pi_1(L(p,q)) \cong |a,b:\ i_{1*}(1,0) = h_*^! h_*(1,0),\ \ i_{1*}(0,1) = h_*^! h_*(0,1)| =$$

$$= |a,b:\ 1 = a^p,\ \ b = a^r|.$$

Assim, concluimos que $\pi_1(L(p,q)) \cong |a:\ a^p = 1| \cong Z_p$.

Observação

Como vimos pela proposição anterior, o grupo fundamental de $L(p,q)$ não depende de q.

Logo, os espaços $L(p,1), L(p,2), \ldots, L(p,p-1)$ apre-

sentam grupo fundamental isomorfo a Z_p.

De acordo com [2] tem-se que $L(p,q)$ e $L(p,q')$ são homeomorfos se e somente se $\pm q' \equiv \pm q \pmod p$.

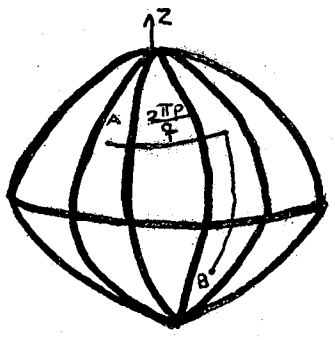
Além disso, a classificação destes espaços quanto ao tipo de homotopia tem-se que $L(p,q)$ e $L(p,q')$ são do mesmo tipo de homotopia se e somente se $\pm qq' \equiv m^2 \pmod p$ para algum m (ver [19]).

Assim, por exemplo, $L(7,1)$ e $L(7,2)$ são 3-variedades que tem o mesmo tipo de homotopia mas não são homeomorfos.

§3 - *ESPAÇOS LENTICULARES - DEFINIÇÃO CLÁSSICA*

Nesta descrição obteremos os espaços lenticulares pelo corte através de uma "lente" com identificação nos bordos.

Considere a bola unitária B^3 em R^3. Então identifique cada ponto da metade superior ($Z \geq 0$) de ∂B^3 com a imagem obtida por meio de rotação de um ângulo de $\frac{2\pi q}{p}$, ao redor do eixo Z, seguido de uma reflexão no plano xy, como podemos ver na figura abaixo.



Vamos verificar que o espaço com a identificação acima é $L(p,q)$ segundo a definição 2.11.

Seja V_1 a parte interna do espaço contido no cilindro $x^2 + y^2 \leq 1/4$ (com identificações) e V_2 o complementar do fecho.

Podemos ver que V_1 com as identificações acima descritas é um toro sólido e que V_2 é um toro sólido também.

A figura abaixo nos mostra um caso particular onde tomamos $p = 5$ e $q = 2$.

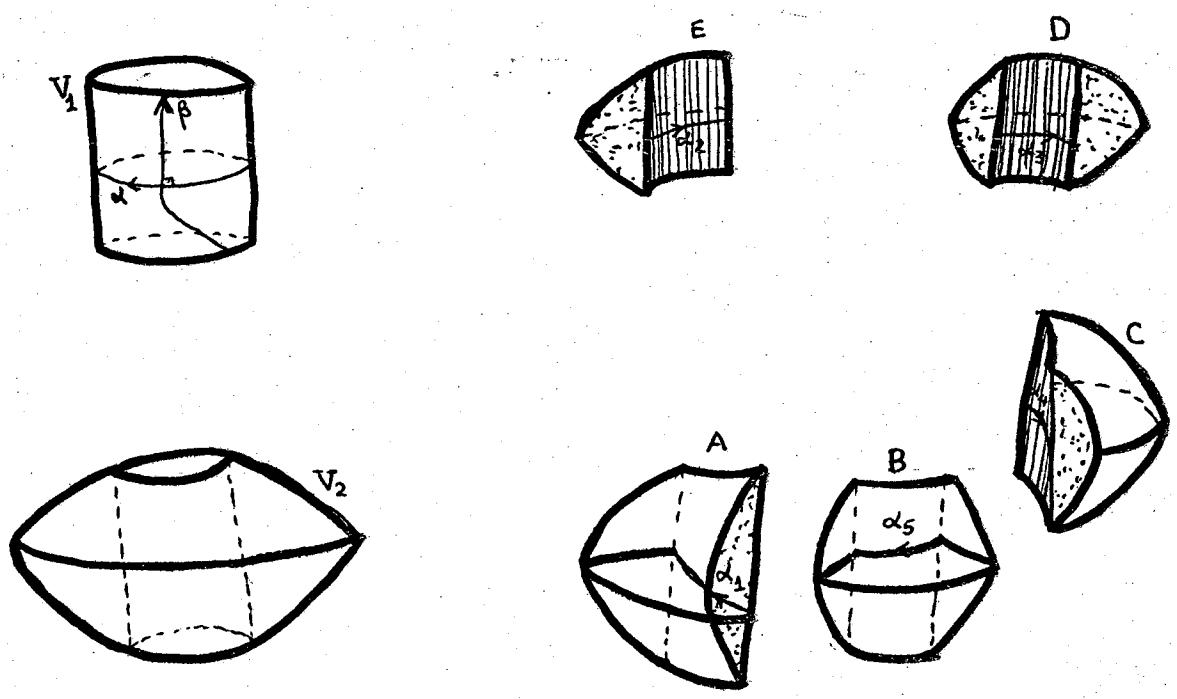


FIGURA 1

Em V_1 fazemos as identificações do topo com a base e obtemos um toro sólido.

Para ver que V_2 é também um toro sólido, cortamos V_2 em cinco partes e identificamos conforme figura 1.

Juntando as partes de acôrdo com as identificações indicadas obtemos a figura 2.

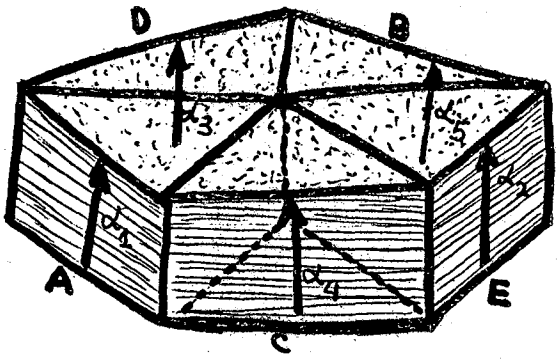
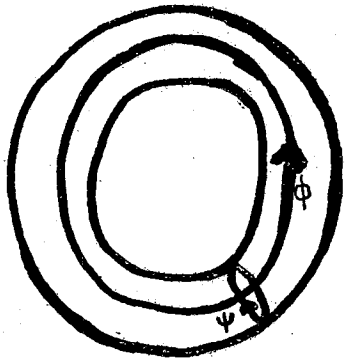


FIGURA 2

Na figura 2 se identificarmos o topo com a base obtemos um toro V_2 e se colocarmos o meridiano e a longitude nesse toro Standart podemos ver na figura 3.



Seja α um meridiano de V_1 e β uma longitude de V_1. Como o espaço $L(5,2)$ é caracterizado pelo valor da aplicação $h_*: H_1(\partial V_1) \to H_1(\partial V_2)$ um meridiano, devemos portanto, encontrar a imagem de α pela h_*.

Podemos dividir $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5$ onde

$\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in E$, $\alpha_3 \in D$, $\alpha_4 \in C$, $\alpha_5 \in B$.

Usando as identificações, podemos ver que: $A \equiv E$, $B \equiv A$, $C \equiv B$, $D \equiv C$, $E \equiv D$.

Assim, $h_*(\alpha_1) = 1\phi$. Portanto, $h_*(\alpha) = 5\phi + 2\psi$ e $h_*(\beta) = 2\phi + 1\psi$.

Logo, h_* pode ser representada pela seguinte matriz: $h_* = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Usando a definição 2.11, o espaço $L(5,2)$ é caracterizado pela matriz $A = \begin{bmatrix} r & 5 \\ s & 2 \end{bmatrix}$ tal que $\det A = \pm 1$.

Portanto, a definição 2.11 é equivalente à este parágrafo.

Um caso particular da definição dada neste parágrafo é o homeomorfismo entre $L(2,1) \approx RP^3$ ($RP^3 = S^3$ com identificação dos pontos antípodas).

Assim, baseado nessas descrições dos espaços $L(p,q)$ com p e q relativamente primos, podemos obter vários exemplos de espaços (variedades) conhecidos variando somente os p e q.

§ 4 - ESPAÇOS LENTICULARES COMO ÓRBITA DA AÇÃO DE Z_p em S^3

Consideremos $S^3 \subset C^2$ o subespaço $S^3 \doteq \{(Z_0.Z_1) \in C^2 \ / \ |Z_0|^2 + |Z_1|^2 = 1\}$.

Seja $\tau: S^3 \to S^3$ definida por $\tau(Z_0,Z_1) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} Z_0, e^{\frac{2\pi i q}{p}} Z_1)$ homeomorfismo com p e q relativamente primos.

Observemos que τ tem período p, isto é, $\tau^p = Id_{S^3}$.

Logo, τ define uma ação de Z_p em S^3 como $\bar{K}.x = \tau^k(x)$ para todo $K \in Z$ e $x \in S^3$. Além disso, $q: S^3 \to S^3/Z_p$ é um revestimento regular pois, S^3 é (localmente conexo por caminhos) e Z_p é um grupo totalmente descontínuo de homeomorfismo de S^3.

Consideremos o espaço das órbitas desta ação, isto é, identificamos os pontos $x, y \in S^3$ se $x = \tau^K(y)$ para algum $K \in Z$.

Verificaremos que o espaço das órbitas é homeomorfo a $L(p,q)$ conforme descrição do parágrafo anterior. Isto faremos em três etapas.

1) $A = \{(Z_0, Z_1) \in C^2 / |Z_0|^2 + |Z_1|^2 = 1, \ 0 \leq \arg Z_0 \leq \frac{2\pi}{p}\}$ é uma lente. Sabemos que $S^1 \subset A$, pois, $Z_0 = 0$ tem-se que $\{(0, Z_1) \in C^2 \ / \ |Z_1|^2 = 1\} = S^1$.

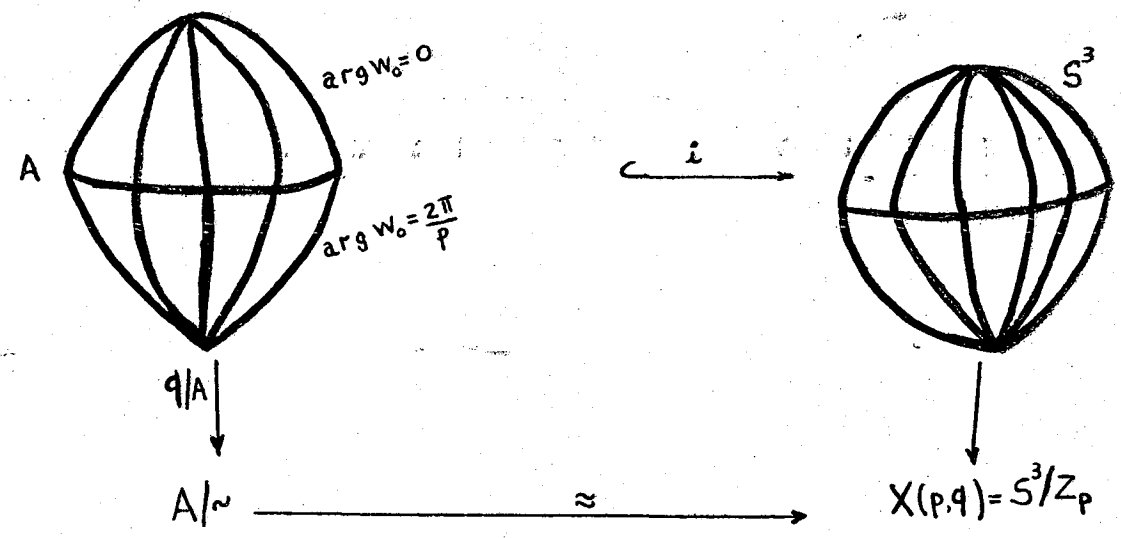
Seja $B = \{w_0 \in C \mid 0 \leq \arg w_0 \leq \frac{2\pi}{p}$ e $|w_0|^2 \leq 1\}$. Então $B \times S^1$ é um toro sólido. Definimos $f: B \times S^1 \to A$ / $f(w_0, \theta) = (w_0, e^{2\pi i \theta} \sqrt{1 - |w_0|^2})$ e podemos ver que se $|w_0| = 1$ então, $f(w_0, \theta) = (w_0, 0)$, $\forall \theta \in S^1$. Usando o teorema I, 2.5 temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \times S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ L = \frac{B \times S^1}{K_f} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

comutativo onde F é homeomorfismo e K_f é relação de equivalência definida por f.

2) A é região fundamental pois, todos os pontos de espaço quociente S^3/Z_p tem ao menos um representante em A e os pontos de $\overset{0}{A}$ representa um único ponto.

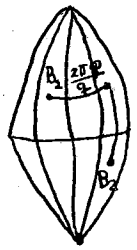
Assim, restringindo a relação definida por τ em A e tomando-se a restrição $q|A$ temos o homeomorfismo entre $A/\sim$ e $X(p,q)$.



3) Resta-nos verificar que $A/\sim$ é do tipo da descrição do parágrafo anterior.

Temos $$\partial A = \begin{cases} \arg x_0 = 0 \\ \arg Z_0 = \dfrac{2\pi}{p} \end{cases}$$

Tomemos $Z = (\lambda, Z_1) \in \partial A$ e vamos aplicar τ no ponto Z. Então fica: $\tau(\lambda, Z_1) = (e^{\frac{2\pi i}{p}}\lambda,\ e^{\frac{2\pi i q}{p}} Z_1)$. Daí segue- se que $\arg(e^{\frac{2\pi i}{p}}\lambda) = e^{\frac{2\pi}{p}}$ e portanto, $e^{\frac{2\pi i}{p}}\lambda \in \partial A$. Também podemos ver que $|\tau(Z)| = |Z|$. Geometricamente podemos ver em A:



$B_1 \equiv B_2$

Assim, a relação em A após as identificações coincide com aquela dada no parágrafo anterior. Assim, conclui-se que $X(p,q)$ é homeomorfo a $L(p,q)$.

CAPÍTULO IV

CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS COM HOMOLOGIA PRÉ-FIXADA

Dado um espaço topológico X, temos associado ao mesmo grupos abelianos $H_q(X)$, $q = 0,1,2...$ que são seus grupos de homologia.

Se a natureza do espaço X não for muito ruim, a partir de um valor de q os grupos $H_q(X)$ se anulam e os não nulos são finitamente gerados.

Neste capítulo nos propomos a estudar a possibilidade de dada uma coleção de grupos abelianos $G_0, G_1, G_2, ..., G_n$, construir um espaço $X = X(G_0,G_1,G_2,...,G_n)$ tal que $H_i(X) = G_i$, $i = 0,1,2,...,n$.

Claro está, nem toda coleção de grupos poderá ser realizada como se pode verificar facilmente; basta lembrar por exemplo, que $H_0(X) = Z^m$ onde m é o número de componentes conexas de X. Segue-se daí que se tomarmos G_0 grupo abeliano com alguma torção estamos impossibilitados de realizá-lo como $H_0(X)$.

Fazemos desde já a restrição de que $G_0 = Z$ o que significa que estamos procurando um espaço topológico <u>conexo</u> e, daqui por diante, não faremos mais menção do primeiro grupo da seqüência, isto é, estaremos preocupados somente com a realização de sequência do tipo $G_1, G_2,...,G_n$ através de espaços conexos.

Mostraremos, inicialmente, como construir um espaço (C.W.) cuja homologia realiza uma sequência de grupos sem no en

tanto nos preocupar com a "natureza" do mesmo e a seguir tentaremos o mesmo exigindo que o espaço seja uma variedade diferenciável.

Naturalmente que no caso de procurarmos uma variedade diferenciável temos que nos restringir à seqüência de grupos ainda mais especiais para conseguirmos tal realização.

§1 - *REALIZAÇÃO POR C.W.*

Teorema 1.1

Dados grupos abelianos finitamente gerados $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots G_n$ existe um espaço celular $X = X(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ tal que $H_i(X) = G_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, X pode ser escolhido de tal forma a ter apenas celulas de dimensão $\leq n + 1$.

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Para $n = 1$

Mostremos que existe X conexo tal que $H_1(X) = G_1$.

Suponhamos $G_1 = Z^m \oplus Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \ldots \oplus Z_{n_r}$. Tomemos $X_i = D^2 \cup_{f_i} S^1$ onde $f_i : \partial D^2 \to S^1$ de grau n_i e assim $H_1(X_i) = Z_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tomemos $X = (\bigvee_{j=1}^{m} S^1_j) \vee (\bigvee_{i=1}^{r} X_i)$ que satisfaz às condições pedidas, isto é, X é conexo e $H_1(X) = G_1$

Suponhamos o teorema válido para n, e provemos que também é válido para $n + 1$. Então dada a sequência $G_1, G_2, \ldots$ G_n, G_{n+1} temos X_1 tal que $H_i(X_1) = G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, uti

lizamos este X_1 para encontrar X tal que $H_i(X) = G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

Consideremos $Y_i = D^{n+2} \cup_{f_i} S^{n+1}$ onde $f: \partial D^{n+2} \to S^{n+1}$ tem grau n_i.

Então temos que $H_{n+1}(Y_i) = Z_{n_i}$ e $H_j(Y_i) = 0$ se $j = 1, 2, \ldots n$.

Seja $X = X_1 \vee (\bigvee_{k=1}^{m} S_k^{n+1}) \vee (\bigvee_{i=1}^{r} Y_i)$. Logo, temos que $H_i(X) = G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Observações:

1) A seqüência $G_1, G_2, \ldots, G_n$ só terá chance de se realizar como homologia de variedade se se respeitarem as condições necessárias contidas nos teoremas I, 5.1 e I, 5.3.

2) Nos restringiremos aqui à variedades compactas, orientáveis (sobre Z) e conexas, de dimensão n e, portanto, $G_0 = Z$ e $G_n = Z$. Com isso omitiremos a citação sobre G_0 e G_n daqui para frente.

3) Se nos permitíssemos a realização de variedades com bordo, sem restrição de dimensão, veríamos que é sempre possível mergulhar o complexo realizado em algum R^N (teorema IV, 1.1) e daí, a sua vizinhança tubular (com bordo) realizaria a sequência G_1, $G_2, \ldots, G_n$ já que a vizinhança tubular retrai-se no complexo (ver C.P. Rourke - B.J. Sanderson; Introduction to Piecewise - Linear Topology).

Não foi possível desenvolver o processo indutivo para a realização da sequência $G_1, G_2, \ldots, G_n$ através de variedades.

Faremos a realização das seqüências nos casos de

$n = 1, 2, 3, 4$.

No caso $n = 1$, temos o círculo S^1 que nos realiza a sequência $G_0 = Z$ e $G_1 = Z$ apenas.

No caso $n = 2$, temos a classificação das superfícies e, portanto, sabemos quais os grupos que podem ser realizados, que são exatamente os grupos Z^{2g} onde g é o genus da superfície.

Os casos $n = 3$ e 4 serão abordados a seguir.

§2 - *REALIZAÇÃO POR VARIEDADES DE DIMENSÃO 3*

O problema que colocamos agora é o seguinte:

Dados G_1 e G_2 achar uma variedade M^3 compacta, orientável, (sem bordo) tal que $H_1(M^3) = G_1$ e $H_2(M^3) = G_2$.

Notemos que neste caso, a realização só será possível se tivermos $\text{ran } K\, G_1 = \text{ran } K\, G_2$ e G_2 livre de torção (pelo teorema II, 5.1)

Teorema 2.1

Dados G_1 e G_2 grupos abelianos finitamente gerados com $\text{ran } K\, G_1 = \text{ran } K\, G_2$ e G_2 livre de torção, então existe uma variedade $M^3 = M^3(G_1, G_2)$ compacta, conexa, orientável(sem bordo) tal que $H_1(M^3) = G_1$ e $H_2(M^3) = G_2$.

Demonstração:

Faremos a demonstração do teorema construindo efetivamente uma variedade M^3, utilizando para isso as variedades S^3, P^3, $S^1 \times S^3$ e de um modo geral os espaços lenticulares $L(m,n)$

com m e n relativamente primos.

Seja então $G_1 = Z^m \oplus Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \ldots \oplus Z_{m_r}$ e

$M^3 = [\ \#_{i=1} (S^1 \times S^2)_i] \# [\ \#_{i=1}^{r} L(m_i, n_i)]$ onde n_i é inteiro

relativamente primo com m_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Verifiquemos que M^3 satisfaz às condições. Aplicando a proposição II, 1.2 podemos ver que $H_1(\#_{i=1}^{m} (S^1 \times S^2)_i) = Z^m$, $H_2(\#_{i=1}^{m} (S^1 \times S^2)_i) = Z^m$ e $H_1(\#_{i=1}^{r} L(m_i, n_i)) = \bigoplus_{i=1} Z_{m_i}$ e

$H_2(\#_{i=1}^{r} L(m_i, n_i)) = 0$.

Aplicando novemente a proposição II, 1.2 vem que:

$$H_1(M^3) = H_1(\#_{i=1}^{m} (S^1 \times S^2)_i) \oplus H_1(\#_{i=1}^{r} L(m_i, n_i)) = Z^m \oplus (\bigoplus_{i=1}^{r} Z_{m_i}) =$$

$$= G_1.$$

$$H_2(M^3) = H_2(\#_{i=1}^{m} (S^1 \times S^2)_i) \oplus H_2(\#_{i=1}^{r} L(m_i, n_i)) = G_2.$$

§3 - REALIZAÇÃO POR VARIEDADES DE DIMENSÃO 4

Neste caso, estamos procurando M^4 compacta, conexa, orientável (sem bordo) tal que $H_1(M^4) = G_1$, $H_2(M^4) = G_2$ e $H_3(M^4) = G_3$.

Observemos que a realização só será possível se ran K G_1 = ran K G_3 e G_3 livre de torção e torção G_2 = torção G_1 pelos teoremas II, 5.1 e II, 5.3.

Teorema 3.1

Dados G_1, G_2, G_3 grupos abelianos finitamente gerados com ran K G_1 = ran K G_3, G_3 livre e torção $G_1 \cong$ torção G_2, então existe $M^4 = M^4(G_1, G_2, G_3)$ compacta, conexa, orientável, sem bordo, tal que $H_i(M^4) = G_i$, $i = 1,2,3$.

A título de ilustração provemos alguns casos particulares do Teorema 3.1.

Proposição 3.2

Nas condições do teorema acima, suponha $G_1 = Z^n$, $G_2 = Z^m$ e $G_3 = Z^n$. Então existe variedade $N^4 = N^4(n,m)$, compacta, orientável, conexa (sem bordo) tal que $H_i(N^4) = G_i$ $i = 1,2,3$.

Demonstração:

Seja $N^4 = [\coprod_{i=1}^{n} (S^1 \times S^3)_i] \# [\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i]$ onde CP^2 = espaço projetivo complexo.

Usando a proposição II, 1.2 vem que:

$$H_1([\coprod_{i=1}^{n} (S^1 \times S^3)_i]) = Z^n, \quad H_2(\coprod_{i=1}^{n} (S^1 \times S^3)_i) = 0 \quad H_3(\coprod_{i=1}^{n} (S^1 \times S^3)_i) =$$

$$= Z^n$$

$$H_1(\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i) = 0, \quad H_2(\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i) = Z^m, \quad H_3(\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i) = 0$$

Dai concluimos que:

$$H_1(N^4) = H_1(\coprod_{i=1}^{n} (S^1 \times S^3)_i) \oplus H_1((\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i) = Z^n$$

$$H_2(N^4) = H_2(\coprod_{i=1}^{n} (S^1\times S^3)_i)) \oplus H_2((\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i)) = Z^m$$

$$H_3(N^4) = H_3((\coprod_{i=1}^{n} (S^1\times S^3)_i)) \oplus H_3((\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i)) = Z^n.$$

Casos Particulares da Proposição 3.2

1) Se $G_1 = G_3 = 0$ e $G_2 = Z^m$ ent~ao tome $N^4 = \coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i$ e teremos $H_1(N^4) = H_3(N^4) = 0$ e $H_2(N^4) = Z^m$.

2) Se tivermos $G_1 = G_3 = Z^n$ e $G_2 = 0$ tomemos $N^4 = \coprod_{i=1}^{n}(S^1\times S^3)_i$.

Ent~ao, aplicando a proposiç~ao II, 1.2 temos que $H_1(N^4) = H_3(N^4) = Z^n$ e $H_2(N^4) = 0$.

Proposição 3.3

Nas condições do lema 3.1, suponha $G_1 = Z^s \oplus Z_r$, $G_2 = Z_r$ e $G_3 = Z^s$. Então existe uma variedade, $L^4 = L^4(r,s)$, compacta, orientável, conexa (sem bordo) tal que $H_i(L^4) = G_i$ $i = 1,2,3$.

Demonstração:

Seja $L^4 = (L(r,p)\times S^1) \coprod (\coprod_{i=1}^{s-1} (CP^2)_i)$ onde $L(r,p)$ são os espaços lenticulares. Aplicando a proposiç~ao II, 1.2 vem que: $H_1(\coprod_{i=1}^{s-1} (CP^2)_i) = Z^{s-1}$, $H_2(\coprod_{i=1}^{s-1} (CP^2)_i) = 0$, $H_3(\coprod_{i=1}^{s-1} (CP^2)_i) = Z^{s-1}$.

Usando o teorema I,5.9 podemos calcular os grupos de homologia de $L(r,p) \times S^1$. Assim tem-se $H_1(L(r,p) \times S^1) = Z \oplus Z_r$

$H_2(L(r,p) \times S^1) = Z_r$, $H_3(L(r,p) \times S^1) = Z$

Aplicando novamente a proposiç~ao II, 1.2 vem que:

$H_1(L^4) = Z^s \oplus Z_r$, $H_2(L^4) = Z_r$ e $H_3(L^4) = Z^s$.

3.4 - Homologia de $L(n,m)-D^3$

$L(n,m)$ = espaços lenticulares com $(n,m) = 1$.

Consideremos o par $(L(n,m), L(n,m)-D^3)$ e suponha que $D^3 \subset D_1^3$. Logo, $U = L(n,m) - D_1^3 \subset L(n,m)-D^3 = A$ e também $\bar{U} \subset \mathring{A}$. Pelo <u>teorema da excisão</u> temos $H_q(L(n,m),A) \approx$

$\approx H_q(L(n,m) - U, A - U) \approx$

$$\approx H_q(D_1^3, S^2) = \begin{cases} Z & \text{se } q = 3 \\ 0 & \text{se } q \neq 3 \end{cases}$$

Temos a seqüência exata do par $(L(n,m),L(n,m)-D^3)$:

$\to H_{q+1}(L(n,m),L(n,m)-D^3) \to H_q(L(n,m)-D^3) \to H_q(L(n,m)) \to$

$\to H_q(L(n,m), L(n,m) - D^3) \to$

Se $q = 0$ temos $0 \to H_0(L(n,m) - D^3) \to Z \to 0$

donde $H_0(L(n,m) - D^3) \approx Z$.

Se $q = 1$ temos $0 \to H_1(L(n,m)-D^3) \to Z_n \to 0$.

donde $H_1(L(n,m) - D^3) \approx Z_n$.

Cálculo de $H_3(L(n,m) - D^3)$

Seja $D^3 \subset \overset{0}{D}{}_1^3$ então $(L(n,m) - \overset{0}{D}{}_1^3) \subset (L(n,m) - D^3)$

Portanto, temos $L(n,m) - \overset{0}{D}{}^3_1 \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} L(n,m) - D^3$

Assim, $H_3(L(n,m) - \overset{0}{D}{}^3_1) \simeq H_3(L(n,m) - D^3)$. Como $H_3(L(n,m)) \simeq Z$, $H_3(L(n,m) - \overset{0}{D}{}^3_1) \simeq 0$. Logo, $H_3(L(n,m) - D^3) \simeq 0$

Cálculo de $H_2(L(n,m) - D^3)$

Da definição III, 3 temos $\frac{S^2}{\sim} \underset{\pi}{\overset{i}{\rightleftarrows}} L(n,m) - D^3)$

Portanto, $H_2(S^2/\sim) \simeq H_2\left(\frac{D^2}{\text{rotação } \frac{2\pi}{q}}\right) \simeq H_2(D^2) \simeq 0.$

Logo, $H_2(L(m,n) - D^3) \simeq 0$.

Assim conclui-se que:

$$H_q(L(n,m) - D^3) = \begin{cases} Z & \text{se } q = 0 \\ Z_n & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } q \geq 2 \end{cases}$$

Lema 3.5

Nas condições do teorema 3.1 suponha que $G_1 = Z_n$, $G_2 = Z_n$ e $G_3 = 0$. Então existe uma variedade L^4, compacta, orientável, conexa (sem bordo) tal que $H_i(L^4) = G_i$ com $i = 1$, 2 e 3.

Demonstração:

Sejam $M^4 = L(n,m) \times S^1$ e $D^3 \times S^1 \subset M^4$ representando o gerador de $S^1 \subset M^4$ onde $L(n,m)$ espaços lenticulares e $(n,m) = 1$.

Consideremos $M^4_f = (L(n,m) \times S^1 - (D^3 \times S^1)) \bigcup_f D^2 \times S^2$ onde $f: S^1 \times S^2 \longrightarrow S^1 \times S^2$ homeomorfismo entre $\partial(D^2 \times S^2) \simeq \partial(D^3 \times S^1)$.

Como $(L(n,m) \times S^1 - (D^3 \times S^1)) = (L(n,m) - D^3) \times S^1$ e sabemos que $H_1(L(n,m) - D^3) \simeq Z_n$, $H_2(L(n,m) - D^3) \simeq 0$ e $H_3(L(n,m) - D^3) \simeq 0$, podemos calcular os grupos de homologia pelo teorema I, 5.9, isto é:

$H_1((L(n,m) - D^3) \times S^1) \simeq Z \oplus Z_n$, $H_2((L(n,m) - D^3) \times S^1) \simeq Z_n$ e $H_3((L(n,m) - D^3) \times S^1) \simeq 0$, e observando que $H_1(D^2 \times S^2) \simeq 0$, $H_2(D^2 \times S^2) \simeq Z$, $H_3(D^2 \times S^2) \simeq 0$;

$H_1(S^1 \times S^2) \simeq Z$, $H_2(S^1 \times S^2) \simeq Z$.

Usando a seqüência de Mayer-Vietoris temos que:

$$0 \to H_{q+1}(M_f^4) \xrightarrow{\Delta} H_q(S^1 \times S^2) \xrightarrow{\Psi} H_q((L(n,m)-D^3)\times S^1) \oplus H_q(D^2 \times S^2) \xrightarrow{\phi}$$

$$\xrightarrow{\phi} H_q(M_f^4) \to$$

Logo $0 \to H_4(M_f^4) \to H_3(S^1 \times S^2) \to 0$ e portanto, $H_4(M_f^4) \simeq Z$.

Cálculo de $H_3(M_f^4)$

$$0 \to H_3(M_f^4) \xrightarrow{\Delta} H_2(S^1 \times S^2) \xrightarrow{\Psi} H_2((L(n,m)-D^3) \times S^1) \oplus H_2(D^2 \times S^2) \to$$

Temos $\psi: H_2(S^1 \times S^2) \to H_2((L(n,m) - D^3) \times S^1) \oplus H_2(D^2 \times S^2)$

$$Z \longrightarrow Z_n \oplus Z \qquad \psi(\alpha) = (*, \alpha)$$

Logo, ψ é monomorfismo e $\operatorname{Ker} \Psi = \operatorname{im} \Delta$. Então $H_3(M_f^4) \simeq 0$.

Cálculo de $H_2(M_f^4)$

Consideremos a seqüência exata:

$0 \to Z \xrightarrow{g_4} Z_n \oplus Z \xrightarrow{g_3} H_2(M_f^4) \xrightarrow{g_2} Z \xrightarrow{g_1} Z_n \oplus Z$. Dai temos

$\operatorname{Ker} g_4 = 0 \quad \therefore \quad \dfrac{Z_n \oplus Z}{\operatorname{Ker} g_3} \approx \operatorname{im} g_3$. Logo, $\operatorname{Ker} g_2 \approx \operatorname{im} g_3 \approx$

$\dfrac{Z_n \oplus Z}{Z} \approx Z_n$. Como g_1 é monomorfismo segue-se $\dfrac{H_2(M_f^4)}{Z_n} = 0$. Da condiç˜ao $G_1 = G_2$ vemos que $H_2(M_f^4) = Z_n$

Cálculo de $H_1(M_f^4)$

Para calcularmos $H_1(M_f^4)$ aplicamos o lema II, 3.3 e obtemos $\pi_1(M_f^4) \approx Z_n$. Segue-se que $H_1(M_f^4) \approx Z_n$.

Desta maneira, tomemos $L^4 = M_f^4$ e ent˜ao teremos $H_1(L^4) = G_1$, $H_2(L^4) = G_2$ e $H_3(L^4) = G_3$ satisfazendo às condiç˜oes iniciais.

Proposição 3.6

Nas condiç˜oes do teorema 3.1, suponha que $G_1 = Z_p$ $G_2 = Z^m \oplus Z_p$, $G_3 = 0$. Então, existe uma variedade H^4, compacta, orientável, conexa (sem bordo) tal que $H_i(H^4) = G_i$ com $i = 1,2$ e 3.

Demonstração

Pelo lema 3.5 podemos obter uma variedade M_1^4 tal que $H(M_1^4) = Z_p$, $H_2(M_1^4) = Z^m \oplus Z_p$ e $H_3(M_1^4) = 0$. Seja $H^4 = M_1^4 \# \left(\#_{i=1}^{m} (CP^2)_i \right)$. Aplicando a proposiç˜ao II, 1.2 segue-se que: $H_1(M^4) = G_1$, $H_2(M^4) = G_2$, $H_3(H^4) = G_3$.

Passemos agora à demonstração do teorema 3.1. Suponha $G_1 = Z^{\ell} \oplus Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \ldots \oplus Z_{m_r}$, $G_2 = Z^m \oplus Z_{m_1} \oplus \oplus Z_{m_2} \oplus \ldots \oplus Z_{m_r}$ e $G_3 = Z^{\ell}$.

Tomemos $X^4 = [\coprod_{i=1}^{\ell} (S^1 \times S^3)_i] \coprod [\coprod_{i=1}^{m} (CP^2)_i] \coprod \coprod_{i=1}^{r} [\coprod_{i=1}^{r} (L_i^4)]$ com $H_1(L_i^4) = Z_{m_i}$, $H_2(L_i^4) = Z_{m_i}$ e $H_3(L_i) = 0$.

Aplicando a proposiçãao II, 1.2 separadamente obtém-se

$$H_1(\coprod_{i=1}^{\ell}(S^1 \times S^3)_i) = Z^{\ell},\ H_2(\coprod_{i=1}^{\ell}(S^1 \times S^3)_i) = 0,\ H_3(\coprod_{i=1}^{\ell}(S^1 \times S^3)_i) = Z^{\ell}.\ H_1(\coprod_{i=1}^{m}(CP^2)_i) = 0,\ H_2(\coprod_{i=1}^{m}(CP^2)_i) = Z^m,$$

$$H_3(\coprod_{i=1}^{m}(CP^2)_i) = 0.\ H_1(\coprod_{i=1}^{r}(L_i^4) = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_{m_i},\ H_2(\coprod_{i=r}^{r} L_i^4) = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_{m_i},\ H_3(\coprod_{i=1}^{r} L_i^4) = 0$$

Aplicando novamente a proposiçãao II, 1.2 em X^4 temos: $H_1(X^4) = G_1$, $H_2(X^4) = G_2$, $H_3(X^4) = G_3$.

Assim, concluimos a demonstração do teorema 3.1.

Observemos que a proposição 3.6 é um caso particular do Teorema 3.1.

BIBLIOGRAFIA

|1 | - Bredon,G.E.; Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press. London and N.York (1972).

|2| - Brody E.J.; The Topological Classification of the Lens Space, Ann.Math. vol.71 (1960).

|3| - Cousin,A.T.; Redução dos Grupos de Homotopia de uma Varieda de Diferenciável. Dissertação de Mestrado,ICMSC-UPS(1982).

|4| - Conde,A.; Introdução à Topologia Diferencial. 9º Colóquio Brasileiro de Matemática - Poços de Caldas (1973).

| 5| - Crowell,R.H. e Fox,R.H.; Introduction to Knot Theory GTM ≠ 57. Springer - Verlag (1977).

|6 | - Dugundji,J.; Topology. Allyn and Bacon, Boston Massachus sets (1960).

|7 | - Greenberg,M.; Lectures on Algebraic Topology. Mathematics Lecture Note Series.N.A. Benjamin, Inc. (1967).

|8 | - Hempel,J.; 3-Manifolds, Princeton University Press (1976).

|9 | - Hu,S.T.; Homotopy Theory, Academic Press. London and N.Y. (1959).

|10| - Hu,S.T.; Cohomology Theory, Chicago, Markham, (1968).

|11| - Lang,S.; Algebra, Addison - Wesley, Reading,Massachussets (1964).

|12| - Lima,E.L.; Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimentos 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas (1977).

|13| - Lyra,C.B.de; - Grupo Fundamental de Revestimentos, 7º Colóquio de Matemática Poços de Caldas (1969).

|14| - Massey,W.; Algebraic Topology; An Introduction Springer - - Verlag (1977).

|15| - Milnor,J.W.; A Procedure for Killing Homotopy Groups of Differentiable Manifolds; Differentual Manifolds-Simposia in Pure Mathematics III. AMS. (1961).

|16| - Munkres,J.R.; Elementary Differential Topology, Princeton University Press (1963).

|17| - Rolfsen,D.; Knots and Links, Publish or Perisk,Inc. (1976)

|18| - Spanier,E.; Algebraic Topology, McGraw-Hill (1966).

|19| - Whitehead,J.H.C.; On incidence matrices, nuclei and homotopy, Ann.Math. 42.1197-1239 (1941).