# Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais

***Bruno Vicente Marchi de Macedo***

**Bruno Vicente Marchi de Macedo**

# Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

**USP – São Carlos**
**Maio de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Macedo, Bruno Vicente Marchi de
M141c Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais / Bruno Vicente Marchi de Macedo; orientador Éder Rítis Aragão Costa. - São Carlos - SP, 2016.
125 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Espaços de potência fracionária. 2. Operador laplaciano. I. Costa, Éder Rítis Aragão, orient. II. Título.

**Bruno Vicente Marchi de Macedo**

# Characterization of fractional power spaces by pseudo-differential operators

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

**USP – São Carlos**
**May 2016**

# AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai Vicente, à minha mãe Ana e aos meus irmãos Vagner, Letícia e Elisangela por todo o apoio durante essa jornada.

À minha namorada Thays por me ajudar em todos os momentos.

À todos os meus professores de Matemática, que me incentivaram e me fizeram gostar cada vez mais desta Ciência. Em especial, agradeço ao meu orientador Éder pela imensa ajuda durante os estudos e por toda a paciência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# RESUMO

MACEDO, B. V. M.. **Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais**. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Neste trabalho mostramos uma caracterização para os espaços de potência fracionária associados ao operador $1-\Delta_p$, em que $\Delta_p$ representa o fecho do operador laplaciano em $L^p(\mathbb{R}^n)$, usando o fato de que o mesmo pode ser visto como um operador pseudodiferencial com símbolo $a(\xi) = 1+4\pi^2|\xi|^2$. No processo para obter essa caracterização representamos de maneira concreta a solução abstrata $u : [0,+\infty) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, obtida através da teoria de operadores setoriais e semigrupos analíticos, da equação $\dot{u}-\Delta_p u = 0$ em $(0,+\infty)$ com condição inicial $u(0) = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Palavras-chave:** Espaços de potência fracionária, Operador laplaciano.

ABSTRACT

MACEDO, B. V. M.. **Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais**. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this work we show a characterization for the fractional power spaces associated with the operator $1-\Delta_p$, where $\Delta_p$ represents the closure of the Laplacian operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$, using the fact that the operator may be seen as a pseudo-differential operator with symbol $a(\xi) = 1+4\pi^2|\xi|^2$. In the process for this characterization we represent of concrete way the abstract solution $u : [0,+\infty) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, obtained through the theory of sector operators and analytic semigroups, of the equation $\dot{u}-\Delta_p u = 0$ in $(0,+\infty)$ with initial condition $u(0) = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Key-words:** Fractional power spaces, Laplacian operator.

# Conteúdo

# Introdução

É de conhecimento geral que a Análise de Fourier junto com a Teoria das Distribuições se torna uma forte ferramenta para resolver equações diferenciais parciais. Também sabemos que muitas equações diferencias parciais podem ser reescritas como equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach, envolvendo operadores lineares. Nessa última forma de abordar uma EDP, a Teoria Espectral atua como peça chave. Este trabalho se insere no contexto destas duas teorias.

Considere a equação do calor em $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, com condição de fronteira $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Delta$ representa o operador de Laplace na variável $x$, isto é,

$$\Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t)$$

e a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ é interpretada por $\|u(\cdot,t) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $t \to 0+$. Podemos abordar a equação (1) de duas maneiras. A primeira maneira é utilizar os conceitos da Análise de Fourier (ver [2], página 275). A segunda maneira é olhar $\Delta$ como um operador linear em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e reescrever (1) como uma equação diferencial ordinária em $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) - \Delta u(t) = 0, \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = f. \end{cases} \tag{2}$$

O problema (2) é resolvido ao notar que $-\Delta$ pertence a uma classe muito especial de operadores lineares (os operadores setoriais) e ao definir o operador linear limitado $e^{\Delta t}$ para $t > 0$. Essa segunda forma de abordar o problema (1) se torna então muito rica, pois nos permite definir as potências fracionárias do operador $(1 - \Delta)$ e espaços de potência fracionária associados a ele. No entanto, os objetos obtidos nessa teoria são um tanto quanto abstratos, já que dependem sempre de uma integração de funções com valores em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é tornar concreta a solução $[0, +\infty) \ni t \to e^{\Delta t} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para o problema (2) e verificar que tal solução define uma solução para (1). Assim como demonstrar que os espaços de potência fracionária associados ao operador $(1 - \Delta)$ são exatamente os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definimos no Capítulo 1 a integral (de Riemann-Stieltjes) de uma função contínua sobre um intervalo da reta com valores em um espaço de Banach, assim como introduzimos o conceito de net.

No Capítulo 2, definimos quando um operador $A$ é setorial e usamos a integral de Riemann-Stieljes para definir o semigrupo $\{e^{-At}\}$ gerado por $-A$. Definimos também as potências $A^s$ do operador setorial $A$ e os espaços de potência fracionária associados a $A$.

Apresentamos alguns elementos da Análise de Fourier e da Teoria das Distribuições no Capítulo 3. Nesse ponto o objetivo é definir o espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'$, a transformada de Fourier sobre $\mathscr{S}'$ e os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Os conceitos estudados nos Capítulos 2 e 3 são integrados no Capítulo 4, através da visão dos elementos definidos no Capítulo 2 com os olhos da teoria desenvolvida no Capítulo 3, no exemplo particular em que o operador setorial é o $-\Delta$. Obtendo assim os resultados desejados.

É suposto do leitor conhecimentos básicos sobre Análise Funcional, Teoria da Medida, Funções de uma Variável Complexa e Variedades Diferenciáveis. Sendo que aparecem poucos conceitos sobre Variedades Diferenciáveis em um único trecho do trabalho.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo são introduzidos noções e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

## 1.1 A integral de Riemann-Stieltjes de funções vetoriais

Grande parte dos resultados obtidos no estudo das funções complexas analíticas de uma variável complexa são traduzidos para as funções analíticas de uma variável complexa com valores em um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Como antes, começamos então introduzindo a integral de Riemann-Stieltjes.

**Definição 1.1.1.** *Uma partição $P$ de um intervalo $[a,b]$ é uma família finita $\{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ de pontos em $[a,b]$ tais que $a = t_0 < t_1 < ... < t_{N_P} = b$. O módulo da partição $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$, denotado por $\|P\|$, é definido como $\|P\| = \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq N_P\}$.*

*Seja $X$ um espaço topológico e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma curva em $X$ é uma aplicação $\gamma : I \to X$ contínua.*

*Dada uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, dizemos que $\gamma$ tem variação limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq C$$

*para qualquer partição $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ de $[a,b]$ , neste caso definimos a variação total de $\gamma$, a qual denotamos por $V(\gamma)$, como sendo*

$$V(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P} \text{ é partição de } [a,b] \right\}.$$

**Teorema 1.1.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}$ uma curva de variação limitada e $f : [a,b] \to X$ uma aplicação contínua. Então existe um único $y \in X$ com a seguinte propriedade:*

*Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$, então*

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) \right\| < \epsilon$$

*para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, ..., N_P$.*

*Demonstração.* Pela continuidade uniforme de $f$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\delta_k > 0$ tal que

$$\|f(t) - f(s)\| < \frac{1}{k}$$

se $|t - s| < \delta_k$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja,

$$\mathscr{F}_k = \left\{ \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) : \begin{array}{l} P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P} \text{ é partição de } [a,b],\ \|P\| < \delta_k \\ \text{e } \tau_j \in [t_j, t_{j-1}] \text{ para } j = 1, ..., N_P \end{array} \right\}.$$

Mostraremos que $diam \mathscr{F}_k \leq \frac{2}{k}$. Suponhamos que, $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}, Q = \{s_j\}_{j=0}^{N_Q}$ sejam partições de $[a,b]$ tais que $\|P\| < \delta_k$ e $P \subset Q$, então para cada $j \in \{0, 1, ..., N_P\}$ existe $l_j \in \{0, 1, ..., N_Q\}$ tal que $s_{l_j} = t_j$ e naturalmente temos $0 = l_0 < l_1 < ... < l_{N_P} = N_Q$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N_Q} [\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})] f(\sigma_j) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{N_P} [\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} \gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})] f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N_P} \sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} [\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})] f(\sigma_l) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{N_P} \sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} [\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})](f(\tau_j) - f(\sigma_l)) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P} \sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} |\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})| \|f(\tau_j) - f(\sigma_l)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P} \sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} |\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})| \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N_P} \sum_{l=l_{j-1}}^{l_j} |\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N_Q} |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| \leq \frac{1}{k} V(\gamma)$$

para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, ..., N_P$ e $\sigma_j \in [s_j, s_{j-1}]$ com $j = 1, ..., N_Q$, pois para quaisquer $1 \leq j \leq N_P$ e $l_{j-1} \leq l \leq l_j$

$$\sigma_l \in [s_l, s_{l-1}] \subset [s_{l_j}, s_{l_{j-1}}] = [t_j, t_{j-1}]$$

e então $|\tau_j - \sigma_l| < \delta_k$.

Assim para quaisquer, $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}, Q = \{s_j\}_{j=0}^{N_Q}$ partições de $[a, b]$ denotando a partição $P \cup Q$ por $\{r_j\}_{j=0}^{N}$, como $P \subset P \cup Q$ e $Q \subset P \cup Q$, temos que

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N_Q} [\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})] f(\sigma_j) \right\| \\ \leq &\left\| \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N} [\gamma(r_j) - \gamma(r_{j-1})] f(r_j) \right\| \\ + &\left\| \sum_{j=1}^{N_Q} [\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})] f(\sigma_j) - \sum_{j=1}^{N} [\gamma(r_j) - \gamma(r_{j-1})] f(r_j) \right\| \\ \leq &\frac{1}{k} V(\gamma) + \frac{1}{k} V(\gamma) = \frac{2}{k} V(\gamma) \end{aligned}$$

para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, ..., N_P$ e $\sigma_j \in [s_j, s_{j-1}]$ com $j = 1, ..., N_Q$, como queríamos mostrar. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $y_k \in \mathscr{F}_k$, como $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_k$ se $m \geq k$, então dado $k_0 \in \mathbb{N}$ para $k, m \geq k_0$ temos $y_k, y_m \in \mathscr{F}_{k_0}$ e então $\|y_k - y_m\| \leq \frac{2}{k} V(\gamma)$. Portanto a sequência $(y_k)$ é de Cauchy, e como $X$ é completo segue que tal sequência converge, seja $y$ seu limite. Se $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ é uma partição de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta_k$, então

$$\left\| y_j - \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) \right\| \leq \frac{2}{k} V(\gamma)$$

para qualquer $j \geq k$, fazendo $j \to \infty$ obtemos

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j) \right\| \leq \frac{2}{k} V(\gamma).$$

Portanto, $y$ tem a propriedade desejada.

Se $x \in X$ tem a mesma propriedade de $y$, dada uma sequência de partições $P_k = \{t_j^k\}_{j=0}^{N_{P_k}}$ tal que

$\|P_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, temos que

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_{P_k}} [\gamma(t_j^k) - \gamma(t_{j-1}^k)] f(t_j^k) = y,$$

de onde segue a unicidade. □

**Definição 1.1.3** (Integral de Riemann-Stieltjes). *Tal $y \in X$ do teorema anterior é chamado de integral de Riemann-Stieltjes de $f$ com respeito a curva $\gamma$ e denotado por $\int_a^b f d\gamma$. No caso especial em que $\gamma$ é a identidade denotamos a integral $\int_a^b f d\gamma$ simplesmente por $\int_a^b f(t)dt$, tal integral é chamada de integral de Riemann de $f$.*

O teorema anterior garante a existência da integral de Riemann-Stieltjes de funções contínuas sobre intervalos fechados, também há um sentido para a integral de Riemann-Stieltjes de funções contínuas sobre os outros tipos de intervalos, como segue.

**Definição 1.1.4** (Integral imprópria). *Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados ,isto é, $\gamma|_{[c,d]}$ tem variação limitada para qualquer intervalo $[c, d] \subset I$. Consideremos também $f : I \to X$ uma função contínua. Se $I = [a, b)$ com $-\infty < a < b \leq +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos*

$$\int_a^b f d\gamma := \lim_{c\to b-} \int_a^c f d\gamma$$

*caso o limite acima exista.*

*Analogamente, se $I = (a, b]$ com $-\infty \leq a < b < +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos*

$$\int_a^b f d\gamma := \lim_{c\to a+} \int_a^c f d\gamma$$

*caso o limite acima exista.*

*Se $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos*

$$\int_a^b f d\gamma := \int_a^c f|_{(a,c]} d\gamma + \int_c^b f|_{[c,b)} d\gamma$$

*se dado $c \in (a, b)$ as duas integrais do lado direito existem.*

**Definição 1.1.5.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $Y$ um subespaço vetorial de $X$ e $A : Y \to X$ um operador linear. Denotamos $Y$ por $D(A)$, a imagem de $A$ por $R(A)$ e o gráfico de $A$ por $Gr(A)$, isto é,*

$$Gr(A) = \{(x, Tx) \in X \times X : x \in Y\}.$$

*Dizemos que $A$ é limitado se $A$ é contínuo e dizemos que $A$ é fechado se seu gráfico $Gr(A)$ é fechado em $X \times X$.*

**Proposição 1.1.6.** *Sejam $X, Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $I$ um intervalo de extremos $a, b$ onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados, $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado e $f : I \to D(A)$ uma função contínua. Suponhamos que $A \circ f : I \to Y$ é contínua, a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe em $X$ e a integral $\int_a^b A \circ f d\gamma$ existe em $Y$ então $\int_a^b f d\gamma \in D(A)$ e*

$$A\left(\int_a^b f d\gamma\right) = \int_a^b A \circ f d\gamma.$$

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que $I = [a, b]$. Dada uma sequência de partições $P_k = \{t_j^k\}_{j=0}^{N_{P_k}}$ tal que $\|P_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{N_{P_k}} [\gamma(t_j^k) - \gamma(t_{j-1}^k)] f(t_j^k) = \int_a^b f d\gamma$$

e

$$\lim_{k \to \infty} A\left(\sum_{j=1}^{N_{P_k}} [\gamma(t_j^k) - \gamma(t_{j-1}^k)] f(t_j^k)\right) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{N_{P_k}} [\gamma(t_j^k) - \gamma(t_{j-1}^k)] A \circ f(t_j^k) = \int_a^b A \circ f d\gamma.$$

Como $A$ é um operador fechado segue que $\int_a^b f d\gamma \in D(A)$ e

$$A\left(\int_a^b f d\gamma\right) = \int_a^b A \circ f d\gamma.$$

Se $I = [a, b)$ seja $(b_k)$ uma sequência convergindo à $b$ pela esquerda, temos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^{b_k} f d\gamma = \int_a^b f d\gamma$$

e pelo caso anterior

$$\lim_{k \to \infty} A\left(\int_a^{b_k} f d\gamma\right) = \lim_{k \to \infty} \int_a^{b_k} A \circ f d\gamma = \int_a^b A \circ f d\gamma.$$

Portanto, novamente como $A$ é um operador fechado segue que $\int_a^b f d\gamma \in D(A)$ e

$$A\left(\int_a^b f d\gamma\right) = \int_a^b A \circ f d\gamma$$

O caso em que $I = (a, b]$ é análogo ao caso anterior e o caso $I = (a, b)$ segue imediatamente destes. □

**Corolário 1.1.7.** *Sejam $X, Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $I$ um intervalo de extremos $a, b$ onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados, $A : X \to Y$ um operador linear limitado e $f : I \to X$ uma função contínua. Se a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe então a integral $\int_a^b A \circ f d\gamma$ existe e*

$$A\left(\int_a^b f d\gamma\right) = \int_a^b A \circ f d\gamma.$$

*Demonstração.* Se $I = [a, b]$ como $A$ é um operador fechado e $A \circ f$ é contínua, o corolário segue imediatamente da Proposição 1.1.6. Se $I = [a, b)$ temos da continuidade de $A$ e do caso anterior que,

$$\int_a^b A \circ f d\gamma = \lim_{c \to b-} \int_a^c A \circ f d\gamma = \lim_{c \to b-} A\left(\int_a^c f d\gamma\right) = A\left(\int_a^c f d\gamma\right).$$

Os outros casos seguem imediatamente. □

**Definição 1.1.8.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados. Fixado um $c \in I$ definimos a curva $|\gamma|_c : I \to \mathbb{R}$ por*

$$|\gamma|_c(x) = \begin{cases} V(\gamma|_{[c,x]}) & se\ x \geq c \\ -V(\gamma|_{[x,c]}) & se\ x \leq c \end{cases}.$$

*Sejam $\{\gamma\} = \gamma(I)$ e $f : \{\gamma\} \to X$ uma função contínua, definimos*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f \circ \gamma d\gamma$$

*e*

$$\int_\gamma f(z)|dz| := \int_a^b f \circ \gamma d|\gamma|_c$$

*caso existam as integrais do lado direito.*

**Observação 1.1.9.** *A definição de $\int_\gamma f(z)|dz|$ é independente da escolha de $c \in I$, de fato, basta notar que $|\gamma|_c(y) - |\gamma|_c(x) = V(\gamma|_{[x,y]})$ para quaisquer $x, y, c \in I$ com $x \leq y$ e que a integral $\int_\gamma f(z)|dz|$ só depende das diferenças $|\gamma|_c(y) - |\gamma|_c(x)$. Como para fins de integração não há diferença o $c \in I$ escolhido, denotaremos a curva $|\gamma|_c$ somente por $|\gamma|$.*

Os resultados anteriores passam imediatamente para as integrais $\int_\gamma f(z)dz$ em $\int_\gamma f(z)|dz|$.

**Proposição 1.1.10.** *Sejam $X, Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados, $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado e $f : \{\gamma\} \to D(A)$ uma função contínua.*

**(i)** *Se $A \circ f : \{\gamma\} \to Y$ é contínua e as integrais $\int_\gamma f(z)dz$, $\int_\gamma A \circ f(z)dz$ existem então $\int_\gamma f(z)dz \in D(A)$ e*

$$A\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma A \circ f(z)dz$$

**(ii)** *Se $A : X \to Y$ é um operador linear limitado, e a integral $\int_\gamma f(z)dz$ existe então a integral $\int_\gamma A \circ f(z)dz$ existe e $A\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma A \circ f(z)dz$.*

*As mesmas afirmações são válidas trocando $dz$ por $|dz|$.*

O próximo resultado é uma ferramenta útil (no caso impróprio) para mostrar a existência de uma integral.

**Proposição 1.1.11.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados e $f : \{\gamma\} \to D(A)$ uma função contínua. Se a integral $\int_\gamma |f(z)||dz|$ existe então, a integral $\int_\gamma f(z)dz$ existe e*

$$\left\|\int_\gamma f(z)dz\right\| \leq \int_\gamma \|f(z)\||dz|.$$

*Demonstração.* Se $I = [a, b]$, dado $\epsilon > 0$ seja $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]f \circ \gamma(t_j) - \int_a^b f \circ \gamma d\gamma\right\| \leq \epsilon \text{ e}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N_P}[|\gamma|(t_j) - |\gamma|(t_{j-1})]\|f \circ \gamma(t_j)\| - \int_a^b \|f \circ \gamma\|d|\gamma|\right| \leq \epsilon.$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f \circ \gamma d\gamma \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{N_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f \circ \gamma(t_j) \right\| + \epsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \| f \circ \gamma(t_j) \| + \epsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P} V(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}) \| f \circ \gamma(t_j) \| + \epsilon \\
&= \sum_{j=1}^{N_P} [|\gamma|(t_j) - |\gamma|(t_{j-1})] \| f \circ \gamma(t_j) \| + \epsilon \\
&\leq \int_a^b \| f \circ \gamma \| d|\gamma| + 2\epsilon
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos a desigualdade desejada.

Suponhamos agora que $I = [a, b)$ e seja $(b_j)$ uma sequência crescente convergindo a $b$, pelo que já foi provado temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^{b_j} f \circ \gamma d\gamma - \int_a^{b_k} f \circ \gamma d\gamma \right\| = \left\| \int_{b_k}^{b_j} f \circ \gamma d\gamma \right\| &\leq \int_{b_k}^{b_j} \| f \circ \gamma(t) \| d|\gamma| \\
&= \int_a^{b_j} \| f \circ \gamma(t) \| d|\gamma| - \int_a^{b_k} \| f \circ \gamma(t) \| d|\gamma|
\end{aligned}$$

para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$ com $j \geq k$. Por hipótese, a sequência $\left( \int_a^{b_j} \| f \circ \gamma(t) \| d|\gamma| \right)_{j \in \mathbb{N}}$ é convergente, logo é de Cauchy, assim da desigualdade acima segue que a sequência $\left( \int_a^{b_j} f \circ \gamma(t) d\gamma \right)_{j \in \mathbb{N}}$ também é de Cauchy, portanto é convergente. Como a sequência $(b_j)$ crescente convergindo a $b$ foi tomada arbitrariamente, segue que a integral $\int_a^b f \circ \gamma d\gamma$ existe. A desigualdade desejada segue da mesma desigualdade para o caso $I = [a, b]$. Os outros casos seguem imediatamente. □

## 1.2 Curvas suaves

**Definição 1.2.1.** *Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma curva $\gamma : I \to X$ é diferenciável em um ponto $t_0 \in I$ se o limite,*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

*existe, o limite acima é chamado de derivada de $\gamma$ no ponto $t_0$ e denotado por $\gamma'(t_0)$ ou $\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0)$.*

*Dizemos que a curva $\gamma$ é diferenciável se for diferenciável em todos os pontos de $I$, e dizemos $\gamma$ é suave se for diferenciável e a aplicação $\gamma' : I \ni t \mapsto \gamma'(t) \in X$ for contínua.*

**Lema 1.2.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $\gamma : I \to X$ uma curva tal que $\gamma'(t) = 0$ para todo $t \in I$. Então $\gamma$ é constante.*

*Demonstração.* Dado qualquer $\xi \in X^*$ temos que,

$$\begin{aligned}(\xi \circ \gamma)'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{\xi \circ \gamma(t) - \xi \circ \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \xi \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &= \xi \left( \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right) = \xi(\gamma'(t_0)) = \xi(0) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\xi \circ \gamma$ é constante para qualquer $\xi \in X^*$. Então $\gamma$ é constante, pois caso contrário, existiriam $t_1, t_2 \in I$ tais que $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \neq 0$, e pelo Teorema de Hahn-Banach (ver [1], página 3) existiria $\xi \in X^*$ tal que $\xi(\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) \neq 0$, o que iria contrariar $\xi \circ \gamma$ ser constante. □

**Proposição 1.2.3.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $\gamma : I \to X$ uma curva.*

**(i)** *Dado $c \in I$ a curva $\Gamma : I \to X$ definida por $\Gamma(x) = \int_c^x \gamma(t)dt$ é suave e $\Gamma' = \gamma$.*

**(ii)** *Se $\gamma$ é suave, então $\gamma(y) - \gamma(x) = \int_x^y \gamma'(t)dt$ para quaisquer $x, y \in I$.*

*Demonstração.* **(i)** De fato, seja $x_0 \in I$ e $x \in I$ tal que $x > x_0$, então

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0} - \gamma(x_0) \right\| &= \left\| \frac{1}{x - x_0} \left( \int_c^x \gamma(t)dt - \int_c^{x_0} \gamma(t)dt \right) - \gamma(x_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \gamma(t)dt - \gamma(x_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \gamma(t) - \gamma(x_0)dt \right\| \\ &\leq \sup_{x_0 \leq t \leq x} \|\gamma(t) - \gamma(x_0)\|.\end{aligned}$$

Portanto segue da continuidade de $\gamma$ em $x_0$ que

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0} = \gamma(x_0).$$

Da mesma forma, mostramos que

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0} = \gamma(x_0).$$

**(ii)** Fixado $x \in I$, seja $\Gamma : I \to X$ definida por $\Gamma(y) = \int_x^y \gamma'(t)dt$. Do item **(i)**, segue $\Gamma'(y) = \gamma'(y)$ para todo $y \in I$ e então $(\gamma - \Gamma)'(y) = \gamma(y) - \Gamma(y) = 0$ para todo $y \in I$. Logo pelo Lema 1.2.2

$$\gamma(y) - \int_x^y \gamma'(t)dt = \gamma(y) - \Gamma(y) = (\gamma - \Gamma)(y) = (\gamma - \Gamma)(x) = \gamma(x)$$

para todo $y \in I$. □

**Proposição 1.2.4.** *Seja $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva suave, então $\gamma$ é de variação limitada sobre intervalos fechados e dado $c \in I$ temos que,*

$$|\gamma|_c(x) = \int_c^x |\gamma'(t)|dt.$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos supor que $c \leq x$. Devemos então mostrar que

$$V(\gamma|_{[c,x]}) = \int_c^x |\gamma'(t)|dt.$$

Seja $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ uma partição de $[c, x]$, então temos que

$$\sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{N_P} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right| \leq \sum_{j=1}^{N_P} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt = \int_c^x |\gamma'(t)|dt.$$

Como $P$ foi tomada arbitrariamente segue que $V(\gamma|_{[c,x]}) \leq \int_c^x |\gamma'(t)|dt$.
Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ pela continuidade uniforme de $\gamma$ em $[c, x]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\epsilon}{x - c}$$

para quaisquer $t, s \in [c, x]$ com $|t - s| < \delta$. Consideremos $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ uma partição de $[c, x]$ tal que $\|P\| < \delta$ e

$$\left| \int_c^x |\gamma'(t)|dt - \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma'(t_j)|(t_j - t_{j-1}) \right| < \epsilon.$$

Temos então que,

$$
\begin{aligned}
\int_c^x |\gamma'(t)|dt &\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma'(t_j)|(t_j - t_{j-1}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} |\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_j)dt| \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} \left( \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_j) - \gamma'(t)dt \right| + \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right| \right) \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_j) - \gamma'(t)|dt + |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right) \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\epsilon}{c-x}dt + |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right) \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} (t_j - t_{j-1})\frac{\epsilon}{c-x} + \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq 2\epsilon + V(\gamma|_{[c,x]}).
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente obtemos a desigualdade desejada. □

O próximo resultado mostra que quando a curva $\gamma$ é suave a integral de Riemann-Stieltjes pode ser substituída por uma integral de Riemann.

**Proposição 1.2.5.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : I \to X$ uma função contínua. Se uma das integrais abaixo existe a outra integral existe e temos que*

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f\gamma' dt.$$

*Demonstração.* Basta provar o caso em que $I = [a, b]$. Seja $K = \sup\{\|f(t)\| : t \in [a, b]\}$, dado $\epsilon > 0$, usando a continuidade uniforme de $\gamma$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\epsilon}{K(b-a)}$$

para quaisquer $t, s \in [a, b]$ tais que $|t - s| < \delta$. Assim tomando $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ tal que $\|P\| < \delta$,

$$\left\| \int_a^b f d\gamma - \sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] \right\| < \epsilon \quad \text{e} \quad \left\| \int_a^b f\gamma' dt - \sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)\gamma'(t_j)(t_j - t_{j-1}) \right\|,$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_a^b f d\gamma - \int_a^b f\gamma' dt\right\| &\leq 2\epsilon + \left\|\sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})] - \sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)\gamma'(t_j)(t_j-t_{j-1})\right\| \\
&\leq 2\epsilon + \left\|\sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(t)dt - \sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(t_j)dt\right\| \\
&\leq 2\epsilon + \left\|\sum_{j=1}^{N_P} f(t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(t)-\gamma'(t_j)dt\right\| \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{j=1}^{N_P}\|f(t_j)\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}|\gamma'(t)-\gamma'(t_j)|dt \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{j=1}^{N_P} K\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\epsilon}{K(b-a)}dt \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{j=1}^{N_P}(t_j-t_{j-1})\frac{\epsilon}{(b-a)}dt \leq 3\epsilon
\end{aligned}
$$

como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente o resultado segue. □

**Corolário 1.2.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva suave e $f : I \to X$ uma função contínua. Então*

$$\int_a^b f d|\gamma| = \int_a^b f(t)|\gamma'(t)|\, dt.$$

*Demonstração.* Pelas Proposições 1.2.4 e 1.2.3 temos que

$$\frac{d|\gamma|}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_c^t |\gamma'(s)|\, ds\right) = |\gamma'(t)|.$$

Assim pela Proposição 1.2.5,

$$\int_a^b f d|\gamma| = \int_a^b f(t)|\gamma|'(t)dt = \int_a^b f(t)|\gamma'(t)|dt.$$

□

**Definição 1.2.7.** *Seja $X$ um espaço de Banach. Dizemos que uma curva $\gamma : I \to X$ é suave por partes se existem $a_1 < a_2 < ... < a_N$ em $I$, tais que $\gamma|_{I\setminus(a_1,+\infty)}$, $\gamma|_{I\setminus(-\infty,a_N)}$ e $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ para $j = 1, 2, ..., N$ são curvas suaves.*

**Observação 1.2.8.** *Sejam $I$ um intervalo com extremos $a_0, a_{N+1}$, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva suave por partes, $a_1 < a_2 < ... < a_N$ em $I$ como na definição acima e $f : I \to X$ uma função contínua,* *caso exista a integral de Riemann-Stieltjes de $f$ com relação a $\gamma$, segue da Proposição 1.2.5 que,*

$$\int_a^b f\,d\gamma = \sum_{j=1}^{N+1} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f\,d\gamma = \sum_{j=1}^{N+1} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f\gamma' dt.$$

*Dessa forma, denotamos a soma*

$$\sum_{j=1}^{N+1} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f\gamma' dt$$

*simplesmente por,*

$$\int_a^b f\gamma' dt.$$

**Teorema 1.2.9** (Fubini)**.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $I, J$ intervalos com extremos $a, b$ e $c, d$, respectivamente, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ e $\zeta : J \to \mathbb{K}$ curvas suaves por partes e $F : I \times J \to X$ uma função contínua. Suponhamos que para cada $t, s$ fixados as integrais,*

$$f(t) := \int_c^d F(t,s)\,d\zeta(s) \quad e \quad g(s) := \int_a^b F(t,s)\,d\gamma(t)$$

*existam e que as funções $f : I \to X$ e $g : J \to X$ definidas dessa forma sejam contínuas. Suponhamos ainda que*

$$\int_{I\times J} \|F(t,s)\|_X |\gamma'(t)||\zeta'(s)|\,dtds < \infty,$$

*onde a integral acima é a integral de Lebesgue. Então as integrais abaixo existem e vale*

$$\int_a^b f\,d\gamma = \int_c^d g\,d\zeta. \tag{1.1}$$

*Demonstração.* Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\,d\gamma\right| &\leq \int_a^b |f|\,d|\gamma| = \int_a^b |f(t)||\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_I |f(t)||\gamma'(t)|\,dt = \int_I \left|\int_c^d F(t,s)\,d\zeta(s)\right| |\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \int_I \left(\int_c^d |F(t,s)|\,d|\zeta(s)|\right) |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_I \left(\int_c^d |F(t,s)||\zeta'(s)|\,ds\right) |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_I \left(\int_J |F(t,s)||\zeta'(s)||\gamma'(t)|\,ds\right) |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_{I\times J} \|F(t,s)\|_X |\gamma'(t)||\zeta'(s)|\,dtds < \infty,
\end{aligned}$$

de onde segue a existência da integral de $f$ com relação a curva $\gamma$. Analogamente mostramos a existência da integral de $g$ com relação a curva $\zeta$.
Por outro lado, seja $\xi \in X^*$ temos que,

$$\int_{I\times J} |\xi(F(t,s))||\gamma'(t)||\zeta'(s)|\,dt\,ds \leq \int_{I\times J} \|\xi\|_{X^*}\|F(t,s)\|_X|\gamma'(t)||\zeta'(s)|\,dt\,ds < \infty,$$

logo aplicando o Teorema de Fubini (ver [2], página 67) segue que

$$\begin{aligned}
\xi\left(\int_a^b f\,d\gamma\right) &= \xi\left(\int_a^b \left(\int_c^d F(t,s)\,d\zeta(s)\right)\,d\gamma(t)\right)\\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \xi(F(t,s))\,d\zeta(s)\right)\,d\gamma(t)\\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \xi(F(t,s))\zeta'(s)\,ds\right)\gamma'(t)\,dt\\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \xi(F(t,s))\zeta'(s)\gamma'(t)\,ds\right)\,dt\\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \xi(F(t,s))\zeta'(s)\gamma'(t)\,dt\right)\,ds\\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \xi(F(t,s))\gamma'(t)\,dt\right)\zeta'(s)\,ds\\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \xi(F(t,s))\,d\gamma(t)\right)\,d\zeta(s)\\
&= \xi\left(\int_c^d \left(\int_a^b \xi(F(t,s))\,d\gamma(t)\right)\,d\zeta(s)\right) = \xi\left(\int_c^d g\,d\zeta\right).
\end{aligned}$$

Como $\xi \in X^*$ foi tomado arbitrariamente, o igualdade (1.1) segue do Teorema de Hahn-Banach (Ver [1], página 3). $\square$

## 1.3 Funções analíticas e Teorema de Cauchy

**Definição 1.3.1.** *Sejam $\Omega \in \mathbb{C}$ um aberto, $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$ uma aplicação. Dizemos que $f$ é diferenciável em $z_0 \in \Omega$ se o limite*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

*existe. Neste caso denotamos o limite acima por $f'(z_0)$ $\left(\text{ou } \frac{df(z_0)}{dz}\right)$, e dizemos que $f'(z_0)$ é a derivada de $f$ no ponto $z_0$. Se $f$ é diferenciável em todos os pontos de $\Omega$ dizemos que $f$ é analítica em $\Omega$.*

*Seja $E \subset \mathbb{C}$, dizemos que $E$ é um conjunto estrelado se existe um ponto $x \in E$ tal que $(1-t)x+ty \in E$ para quaisquer $y \in E$ e $t \in [0,1]$.*
*Dizemos que uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

**Teorema 1.3.2** (Cauchy)**.** *Sejam $\Omega \in \mathbb{C}$ um aberto estrelado, $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ uma aplicação analítica e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ uma curva fechada de variação limitada. Então*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

*Demonstração.* Sabemos que o teorema é válido para $X = \mathbb{C}$. Em geral, dados $\xi \in X^*$ e $\lambda_0 \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}(\xi \circ f)'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\xi(f(z)) - \xi(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \xi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \\ &= \xi\left(\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = \xi(f'(z_0)).\end{aligned}$$

Logo $\xi \circ f$ é analítica em $\Omega$. Temos então que

$$\xi\left(\int_\gamma f(z)\, dz\right) = \int_\gamma \xi \circ f(z)\, dz = 0.$$

Portanto, como $\xi \in X^*$ foi tomado arbitrariamente, segue do Teorema de Hahn-Banach que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

□

## 1.4 O resolvente de um operador linear

Nesta seção serão introduzidos os primeiros conceitos e resultados da teoria espectral. $X$ representará sempre um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ nesta seção.

**Definição 1.4.1.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de $A$ denotado por $\rho(A)$ é o subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que:*

**(i)** $(\lambda - A) : D(A) \subset X \to X$ *é injetivo.*

**(ii)** $\overline{R(\lambda - A)} = X$*, em que $R(\lambda - A)$ representa a imagem do operador $\lambda - A : D(A) \to X$.*

**(iii)** $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \to X$ *é limitado.*

*O espectro de $A$, denotado por $\sigma(A)$ é definido por $\sigma(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A)$.*

**Proposição 1.4.2.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado, então*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda - A) : D(A) \subset X \to X \text{ é bijetivo}\}.$$

*Demonstração.* Dado $\lambda \in \rho(A)$ mostraremos que $R(\lambda - A)$ é um conjunto fechado. De fato, seja $(y_j) \subset R(\lambda - A)$ uma sequência tal que $y_j \to y \in X$ e sejam $x_j = (\lambda - A)^{-1}y_j$ . Como $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado e $(y_j)$ é uma sequência de Cauchy, segue que $(x_j)$ é uma sequência de Cauchy, logo é convergente, seja $x = \lim x_j$. Como $A$ é um operador fechado segue que $(\lambda - A)$ também é fechado, assim de $x_j \to x$ e $(\lambda - A)x_j = y_j \to y$ segue que $x \in D(A)$ e $(\lambda - A)x = y$. Logo, $y \in R(\lambda - A)$ como queríamos. Portanto, $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)} = X$, provando que $(\lambda - A)$ é sobrejetor. Reciprocamente, suponhamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $(\lambda - A) : D(A) \subset X \to X$ é um operador bijetivo. Como $(\lambda - A)$ é fechado, segue imediatamente que $(\lambda - A)^{-1} : X \to X$ é fechado, e então pelo Teorema do gráfico fechado segue que $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado. Portanto $\lambda \in \rho(A)$. □

**Lema 1.4.3.** *Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado tal que $\|A\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$, então $(1 - A) : X \to X$ é bijetor e*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1 - A)^{-1}.$$

*Consequentemente,*

$$\|(1 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \le \left(1 - \|A\|_{\mathscr{L}(X)}\right)^{-1}.$$

*Demonstração.* De fato, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\|_{\mathscr{L}(X)} \le \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j_{\mathscr{L}(X)} = (1 - \|A\|_{\mathscr{L}(X)})^{-1} < \infty.$$

Logo como $\mathscr{L}(X)$ é um espaço de Banach a série $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ é convergente. Além disso,

$$(1 - A) \circ \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j - A\left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j - \sum_{j=1}^{\infty} A^j = A^0 = I.$$

Analogamente mostramos que,

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j\right) \circ (1 - A) = I.$$

Desta forma, segue que $(1 - A) : X \to X$ é bijetivo e

$$(1 - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

□

**Proposição 1.4.4.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Se $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que*

$$|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1,$$

*então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^j (\mu - A)^{-j-1}.$$

*Em particular, $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e consequentemente $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.*

*Demonstração.* Dado $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}(\lambda - A) &= (\mu - A) + (\lambda - \mu) \circ I = (\mu - A)I + (\lambda - \mu)(\mu - A) \circ (\mu - A)^{-1} \\ &= (\mu - A) \circ \left(I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Assim para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$, pelo lema anterior segue que $(I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1})$ é bijetivo e

$$\left(I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^j (\mu - A)^{-j}.$$

Segue então que para $\lambda \in B\left(\mu, \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}^{-1}\right)$, o operador $(\lambda - A)$ é bijetivo e

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1} &= \left(I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}\right)^{-1} \circ (\mu - A)^{-1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^j (\mu - A)^{-j}\right) \circ (\mu - A)^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^j (\mu - A)^{-j-1}\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

**Teorema 1.4.5** (Identidade do Resolvente)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear e*

$\lambda, \mu \in \rho(A)$, *então*

$$(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}.$$

*Consequentemente temos que,*

$$(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\lambda - \mu)I + (\mu - A)](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)^{-1}\end{aligned}$$

de onde segue a primeira igualdade. A segunda igualdade é óbvia se $\mu = \lambda$, por outro lado se $\mu \neq \lambda$ segue da primeira igualdade que,

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} &= (\lambda - \mu)[(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\mu - \lambda)[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.4.6.** *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. A função* $F : \rho(A) \to \mathscr{L}(X)$ *definida por*

$$F(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$$

*é analítica e*

$$F'(\lambda) = -(\lambda - A)^{-2}$$

*para todo* $\lambda \in \rho(A)$.

*Demonstração.* Mostraremos primeiro que a função $F$ é contínua. De fato, fixado $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < \frac{1}{2}$, então pelos resultados anteriores segue que $\lambda \in \rho(A)$

e

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_0 - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} &= \|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \\
&= |(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j (\lambda_0 - A)^{-j-1} \right\|_{\mathscr{L}(X)} \\
&\leq |(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \sum_{j=0}^{\infty} |(\lambda - \lambda_0)|^j \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}^{j+1} \\
&= \frac{|(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}^2}{1 - |(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}} \\
&\leq \frac{|(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}^2}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 2|(\lambda - \lambda_0)| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}^2
\end{aligned}$$

de onde segue a continuidade de $F$. Por outro lado, fixado $\lambda_0 \in \rho(A)$ usando a identidade do resolvente e a continuidade de $F$ temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left[ -(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1} \right] \\
&= - \left[ \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - A)^{-1} \right] (\lambda_0 - A)^{-1} = -(\lambda_0 - A)^{-2}.
\end{aligned}$$

□

## 1.5 Nets

Como sabemos a convergência de sequências caracteriza a topologia de um espaço métrico, já que caracteriza seus fechados. No entanto, o mesmo não ocorre em um espaço topológico qualquer. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ munido com a topologia box, isto é, a topologia gerada pela base

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) : j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j < b_j \right\}.$$

É imediato que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ é denso em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, no entanto dada qualquer sequência $(x^k) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ onde $x^k = (x_1^k, x_2^k, ...)$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...) \in B$ e $B \cap \{x^k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. De fato, basta usar o argumento diagonal de Cantor considerando

$$B = \prod_{j=1}^{\infty} \left( \sqrt{2} - |x_j^j - \sqrt{2}|, \sqrt{2} + |x_j^j - \sqrt{2}| \right).$$

Portanto, não existe uma sequência em $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ que converge para $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...)$.
Para caracterizar um espaço topológico qualquer a partir da convergência de determinados objetos necessitamos que esses objetos sejam um pouco mais gerais que as sequências. Esses objetos são os nets.

**Definição 1.5.1.** *Um conjunto dirigido é um conjunto $A$ munido de uma relação binária $\lesssim$ que satisfaz:*

**(i)** $\alpha \lesssim \alpha$ *para todo* $\alpha \in A$.

**(ii)** *Se* $\alpha, \beta, \gamma \in A$ *são tais que* $\alpha \lesssim \beta$ *e* $\beta \lesssim \gamma$ *então* $\alpha \lesssim \gamma$.

**(iii)** *Dados* $\alpha, \beta \in A$ *existe* $\gamma \in A$ *tal que* $\alpha \lesssim \gamma$ *e* $\beta \lesssim \gamma$.

*Neste caso, dizemos também que $\lesssim$ é uma pré-ordem filtrante, onde pré-ordem se refere a relação $\lesssim$ satisfazer* **(i)** *e* **(ii)** *e filtrante se refere a relação $\lesssim$ satisfazer* **(iii)**.
*Um net em um conjunto $X$ é uma aplicação $A \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in X$, de um conjunto dirigido $A$ em $X$. Indicaremos tal net por $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ ou simplesmente por $\langle x_\alpha \rangle$ quando estiver claro qual é o conjunto dirigido $A$ em questão.*

**Exemplo 1.5.2.** $\mathbb{N}$ *é um conjunto dirigido com a pré-ordem filtrante* $\leq$.

**Exemplo 1.5.3.** *Seja $M$ um espaço métrico e $a \in M$, $M \backslash \{a\}$ é um conjunto dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:*

$$x \lesssim y \Longleftrightarrow d(x, a) \geq d(y, a).$$

**Exemplo 1.5.4.** *Dado um intervalo $[a, b]$ o conjunto $\mathscr{P}$ de todas as partições de $[a, b]$ é um conjunto dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:*

$$P \lesssim Q \Longleftrightarrow \|Q\| \leq \|P\|.$$

**Exemplo 1.5.5.** *Seja $X$ um espaço topológico e $x \in X$, o conjunto $\mathscr{N}_x$ de todas as vizinhanças de $x$ é um conjunto dirigido pela inclusão inversa, isto é, dados $U, V \in \mathscr{N}_x$ dizemos que $U \lesssim V$ quando $V \subset U$.*

**Exemplo 1.5.6.** *Se $A, B$ são conjuntos dirigidos pelas relações $\lesssim_1$ e $\lesssim_2$, então $A \times B$ fica dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:*

$$(\alpha, \beta) \lesssim (\alpha', \beta') \Longleftrightarrow \alpha \lesssim_1 \alpha' \text{ e } \beta \lesssim_2 \beta'.$$

**Definição 1.5.7.** *Seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ um net em $X$ e $E \subset X$. Dizemos que,*

**(a)** *$\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ está eventualmente em $E$ quando existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in E$ sempre que $\alpha \gtrsim \alpha_0$.*

**(b)** *$\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ está frequentemente em $E$ quando para todo $\alpha \in A$ existe $\beta \in A$ com $\beta \gtrsim \alpha$ e $x_\beta \in E$.*

*Se $X$ é um espaço topológico, dizemos que um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ converge para $x \in X$ quando dada qualquer vizinhança $U$ de $x$ o net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ está eventualmente em $U$ e denotamos esta convergência por $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in A]{} x$ ou simplesmente por $x_\alpha \to x$.*
*Dizemos também que $x$ é um valor de aderência de $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ quando para toda vizinhança $U$ de $x$ o net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ está frequentemente em $U$.*

**Proposição 1.5.8.** *Seja $X$ um espaço topológico, $E$ um subconjunto de $X$ e $x \in X$. Então:*

**(a)** *$x \in \overline{E}$ se, e somente se, existe um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $E$ tal que $x_\alpha \to x$.*

**(b)** *$x \in E'$ se, e somente se, existe um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $E \backslash \{x\}$ tal que $x_\alpha \to x$.*

*Demonstração.* **(a)** Seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $E$ tal que $x_\alpha \to x$. Dada uma vizinhança $U$ de $x$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, em particular, $x_{\alpha_0} \in U \cap E$, logo $U \cap E \neq \emptyset$. Portanto, $x \in \overline{E}$.
Reciprocamente, suponhamos que $x \in \overline{E}$ e para cada vizinhança $U$ de $x$ seja $x_U \in U$, assim o conjunto $\mathscr{N}_x$ de todas as vizinhanças de $x$ dirigido pela inclusão inversa, obtemos o net $\langle x_U \rangle_{U \in \mathscr{N}_x}$. Dada uma vizinhança $U_0$ de $x$, para todo $U \subset U_0$ temos que $x_U \in U \subset U_0$. Portanto, $x_U \xrightarrow[U \in \mathscr{N}_x]{} x$.
**(b)** Temos que $x \in E'$ se, e somente se, $x \in \overline{E \backslash \{x\}}$, logo o (b) segue de (a). □

O próximo resultado nos mostra que assim como a continuidade de uma função entre espaços métricos é descrita através da convergência das sequências, a continuidade de uma função entre espaços topológicos é descrita através da convergência dos nets.

**Proposição 1.5.9.** *Sejam $X, Y$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então $f$ é contínua em um ponto $x \in X$ se, e somente se, para todo $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $X$ tal que $x_\alpha \to x$ temos que $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $f$ é contínua em $x \in X$ e seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $X$ tal que $x_\alpha \to x$. Se $V \in \mathscr{N}_{f(x)}$ então $f^{-1}(V) \in \mathscr{N}_x$, logo existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, então $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \in \alpha_0$. Portanto $f(x_\alpha) \to f(x)$.
Reciprocamente, se $f$ não é contínua em $x$ existe $V \in \mathscr{N}_x$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathscr{N}_x$, ou seja, $x \notin int(f^{-1}(V))$, ou ainda, $x \in [int(f^{-1}(V))]^c = \overline{[f^{-1}(V)]^c} = \overline{f^{-1}(V^c)}$. Então pela proposição anterior existe $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ em $f^{-1}(V^c)$ tal que $x_\alpha \to x$, por outro lado, como $\langle f(x_\alpha) \rangle_{\alpha \in A}$ é um net em $V^c$ segue que $f(x_\alpha) \not\to f(x)$. □

**Proposição 1.5.10.** *Sejam $X, Y$ espaços topológicos e consideremos $X \times Y$ munido com a topologia produto. Um net $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in A}$ em $X \times Y$ converge para $(x, y) \in X \times Y$ se, e somente se, $x_\alpha \to x$ em $X$ e $y_\alpha \to y$ em $Y$.*

*Demonstração.* Suponhamos que o net $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in A}$ em $X \times Y$ converge para $(x, y) \in X \times Y$, então dadas uma vizinhança $U$ de $x$ e uma vizinhança $V$ de $y$, como $U \times V$ é uma vizinhança de $(x, y)$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \times V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, ou ainda, $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Portanto, $x_\alpha \to x$ e $y_\alpha \to y$.
Reciprocamente, suponhamos que $x_\alpha \to x$ e $y_\alpha \to y$. Dada uma vizinhança $W$ de $(x, y)$, da definição da topologia produto, existem vizinhanças $U$ de $x$ e $V$ de $y$ tais que $U \times V \subset W$. Por outro lado, das convergências $x_\alpha \to x$ e $y_\alpha \to y$, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ tais que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_1$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_2$. Tomando $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_0 \gtrsim \alpha_1$ e $\alpha_0 \gtrsim \alpha_2$, obtemos que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, logo $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \times V \subset W$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Portanto, $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in A} \to (x, y)$. □

## 1.6 Resultados auxiliares

Nesta seção são apresentados alguns resultados que serão usados ao longo desse trabalho.

**Definição 1.6.1.** *Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Definimos a aplicação dualidade $J : X \to \mathscr{P}(X^*)$ por*

$$J(x) = \{\xi \in X^* : \|\xi\|_{X^*} = \|x\|_X \text{ e } \langle \xi, x \rangle = \|x\|_X^2\}.$$

*Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se para cada $x \in D(A)$, existe um funcional $\xi_x \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle \xi_x, Ax \rangle \leq 0$.*

**Lema 1.6.2.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo, então*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X$$

*para quaisquer $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.*

*Demonstração.* Com efeito, sejam $\lambda > 0$, $x \in D(A)$ e $\xi \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle \xi, Ax\rangle \leq 0$, temos então que

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\|_X\|x\|_X &= \|(\lambda - A)x\|_X\|\xi\|_{X^*} \geq |\langle \xi, (\lambda - A)x\rangle| \\ &\geq \mathrm{Re}\langle \xi, (\lambda - A)x\rangle = \lambda \mathrm{Re}\langle \xi, x\rangle - \mathrm{Re}\langle \xi, Ax\rangle \geq \lambda\|x\|_X^2,\end{aligned}$$

de onde segue o lema. □

**Definição 1.6.3.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, dizemos que $A$ é fechável se existe um operador linear fechado $B : D(B) \subset X \to X$ que estende $A$, isto é, $D(B) \supset D(A)$ e $Bx = Ax$ para todo $x \in D(A)$.*

**Proposição 1.6.4.** *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é fechável se, e somente se, dada uma sequência $(x_j) \subset D(A)$ tal que $x_j \to 0$ e $Ax_j \to y \in X$ então $y = 0$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $A$ é fechável e seja $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear fechado que estende $A$. Dada uma sequência $(x_j) \subset D(A)$ tal que $x_j \to 0$ e $Ax_j \to y \in X$, temos então que $(x_j) \subset D(B)$ e $Bx_j \to y \in X$ logo como $B$ é fechado segue que $y = B(0) = 0$.
Reciprocamente, se $A : D(A) \subset X \to X$ é tal que dada uma sequência $(x_j) \subset D(A)$ tal que $x_j \to 0$ e $Ax_j \to y \in X$ então $y = 0$, definimos

$$D(B) = \{x \in X : \text{existem } y(x) \in X \text{ e } (x_j) \subset D(A) \text{ tais que } x_j \to x \text{ e } Ax_j \to y(x)\}.$$

Observe que $y(x)$ na definição de $D(B)$ é único, de fato se $(x_j), (u_j) \subset D(A)$ são sequências que convergem para $x$, tais que $Ax_j \to y_1(x) \in X$ e $Ax_j \to y_2(x) \in X$ então $(x_j - u_j) \subset D(A)$ é uma sequência que converge para 0, tal que $A(x_j - u_j) \to y_1(x) - y_2(x)$, logo $y_1(x) - y_2(x) = 0$ e portanto $y_1(x) = y_2(x)$. Definimos então $B : D(B) \subset X \to X$ por $Bx = y(x)$. É evidente que $B$ é linear e estende $A$, provemos então que $B$ é fechado. Com efeito, seja $(x_j) \subset D(B)$ tal que $x_j \to x \in X$ e $Bx_j \to y \in X$. Segue da definição de $D(B)$, que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $u_j \in D(A)$ tal que,

$$\|u_j - x_j\|_X \leq \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad \|Au_j - Bx_j\|_X \leq \frac{1}{j}.$$

Portanto, $(u_j) \subset D(A)$ é uma sequência tal que $u_j \to x$ e $Au_j \to y$, logo $x \in D(B)$ e $Bx = y$. □

**Definição 1.6.5.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear tal que dada uma sequência $(x_j) \subset D(A)$ tal que $x_j \to 0$ e $Ax_j \to y \in X$ então $y = 0$. O operador linear fechado $B : D(B) \subset$*

*$X \to X$ que estende $A$ construído na demonstração anterior é dito o fecho de $A$ e denotado por $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \to X$.*

**Proposição 1.6.6.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo e densamente definido. Então $A$ é fechável.*

*Demonstração.* De fato, seja $(x_j) \subset D(A)$ uma sequência tal que $x_j \to 0$ e $Ax_j \to f$. Pelo lema 1.6.2

$$\begin{aligned} \|x + tx_j - t^{-1}Ax - Ax_j\|_X &= \|(x + tx_j) - t^{-1}A(x + tx_j)\|_X \\ &= t^{-1}\|(t - A)(x + tx_j)\|_X \geq \|x + tx_j\|_X, \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in D(A)$, $t > 0$ e $j \in \mathbb{N}$. Logo fazendo $j \to \infty$ obtemos

$$\|x - t^{-1}Ax - f\|_X \geq \|x\|_X$$

para quaisquer $x \in D(A)$ e $t > 0$. Então fazendo $t \to \infty$, concluímos que $\|x - f\| \geq \|x\|_X$ para todo $x \in D(A)$. Dado $\epsilon > 0$, seja $x \in D(A)$ tal que $\|x - f\|_X < \epsilon$, temos então que

$$\epsilon > \|x - f\|_X \geq \|x\|_X \geq \|f\|_X - \|x - f\|_X > \|f\|_X - \epsilon$$

logo $\|f\|_X < 2\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente segue que $\|f\|_X = 0$ e portanto $f = 0$. $\square$

**Teorema 1.6.7** (Sard)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$. Então o conjunto dos valores críticos de $f$ tem medida nula. Em particular, o conjunto dos valores regulares de $f$ é denso em $\mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Ver [10] página 54. $\square$

# Capítulo 2

# Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Neste capítulo são introduzidos os conceitos de operador setorial, semigrupo analítico e espaços de potência fracionária. Também são demonstrados alguns resultados nesse contexto. Neste capítulo $X$ representará sempre um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$.

## 2.1 Operadores setoriais

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear e consideremos o problema:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\dot{u}$ representa a derivada de $u$. Mostraremos nesta seção, que se $A$ pertencer a uma classe especial de operadores lineares então o problema (2.1) terá uma solução $u$ contínua em $t_0 = 0$ e analítica em $(0, +\infty)$ para cada $u_0 \in X$.

**Definição 2.1.1** (Operador Setorial). *Dizemos que um operador linear $A : D(A) : X \to X$ é setorial se $A$ é fechado, densamente definido e existem um ângulo $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, uma constante $M \geq 0$ e um número real $a$, tais que o setor*

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{a\} : \phi \leq |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| \leq \pi\} \tag{2.2}$$

*está contido no conjunto resolvente de* $A$ *e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \tag{2.3}$$

*para todo* $\lambda \in S_{a,\phi}$.

**Observação 2.1.2.** *Dados* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *temos que*

$$S_{a,\phi} \cup \{a\} = \{x + iy : y \geq \mathrm{tg}(\phi)(x - a)\} \cup \{x + iy : y \leq -\mathrm{tg}(\phi)(x - a)\}. \tag{2.4}$$

*De fato, sendo* $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^n$ *a função tangente, dado* $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *temos que*

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \textit{se } x > 0 \\ \pi + \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \textit{se } x < 0 \textit{ e } y \geq 0 \\ \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & \textit{se } x < 0 \textit{ e } y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \textit{se } x = 0 \textit{ e } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \textit{se } x = 0 \textit{ e } y < 0. \end{cases}$$

*Dessa forma para* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *se* $x \leq a$, $y \geq 0$ *e* $z \neq a$ *temos que* $y \leq \mathrm{tg}(\phi)(x - a)$ *e* $|\mathrm{Arg}(z)| = \mathrm{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{2} > \phi$, *logo neste caso* $z \in S_{a,\phi} \cup \{a\}$ *e* $z \in \{x+iy : y \geq \mathrm{tg}(\phi)(x-a)\} \cup \{x+iy : y \leq -\mathrm{tg}(\phi)(x - a)\}$. *Analogamente, mostramos que o mesmo ocorre quando* $x \leq a$ *e* $y < 0$.
*Se* $x > a$ *e* $y \geq 0$ *então,*

$$\begin{aligned} z \in S_{a,\phi} \cup \{a\} \quad &\iff \quad |\mathrm{Arg}(z - a)| \geq \phi \quad \iff \quad \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x - a}\right) \geq \phi \\ &\iff \quad \frac{y}{x - a} \geq \phi \quad \iff \quad y \geq \mathrm{tg}(\phi)(x - a) \\ &\iff \quad z \in \{x + iy : y \geq \mathrm{tg}(\phi)(x - a)\} \cup \{x + iy : y \leq -\mathrm{tg}(\phi)(x - a)\} \end{aligned}$$

*Do mesmo modo mostramos que se* $x > a$ *e* $y < 0$, *então*

$$z \in S_{a,\phi} \cup \{a\} \quad \iff \quad z \in \{x + iy : y \geq \mathrm{tg}(\phi)(x - a)\} \cup \{x + iy : y \leq -\mathrm{tg}(\phi)(x - a)\}.$$

*Portanto, a identidade* (2.4) *é válida.*

**Proposição 2.1.3.** *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado e densamente definido.*

*Então $A$ é setorial se, e somente se, existem $R > 0$, $C > 0$ e um ângulo $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que*

$$D_{R,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R \text{ e } |\mathrm{Arg}(\lambda)| \leq \phi\} \subset \rho(A) \quad e$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

*para todo $\lambda \in D_{R,\phi}$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $A$ é setorial com vértice $a \in \mathbb{R}$, ângulo $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e constante $M > 0$. Suponhamos inicialmente que $a < 0$. Utilizando a Observação 2.1.2, é fácil ver que

$$E := \{\lambda = x+iy \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| \leq \phi \text{ e } x \leq 1\} = \{\lambda = x+iy \in \mathbb{C} : x \in [a, 1] \text{ e } |y| \leq \mathrm{tg}(\phi)(x-a)\}$$

logo $E$ é limitado. Consideremos $R > 0$ tal que $E \subset B(0, R)$ e $\phi' = \mathrm{tg}^{-1}(R)$. Dado $\lambda \in D_{R,\phi'}$, se $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 1$, temos que $|\mathrm{Arg}(\lambda - a)| \geq \phi$, caso contrário teríamos $\lambda \in E \subset B(0, R)$ o que contraria $|\lambda| \leq R$. Suponhamos agora que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$. Note que

$$\frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{\mathrm{Re}(\lambda) - a} \geq \frac{1}{(1-a)},$$

pois a derivada da função $[1, +\infty) \ni t \mapsto t(t-a)^{-1} \in \mathbb{R}$ é positiva em todos os pontos de $[1, +\infty)$, logo tal função atinge seu valor mínimo em $t = 1$. Observe também que $\lambda_0 = 1 + i\mathrm{tg}(\phi)(1-a) \in E$, logo $R > |\lambda_0| \geq \mathrm{tg}(\phi)(1-a)$. Assim temos que,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{\mathrm{Re}(\lambda) - a}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{\mathrm{Re}(\lambda)} \frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{\mathrm{Re}(\lambda) - a}\right) \\ &\geq \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{\mathrm{Re}(\lambda)} \frac{1}{(1-a)}\right) \geq \mathrm{tg}^{-1}\left(R \frac{1}{(1-a)}\right) \geq \phi. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $D_{R,\phi'} \subset S_{a,\phi} \subset \rho(A)$. Como

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \frac{|\lambda|}{|\lambda - a|} = 1,$$

podemos supor que $R > 0$ é tal que

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda - a|} \leq 2$$

para todo $|\lambda| \geq R$. Assim temos que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|} \leq \frac{M}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\lambda - a|} \leq \frac{2M}{|\lambda|}$$

para todo $\lambda \in D_{R,\phi'}$. No caso em que $a \geq 0$ não há o que demonstrar.

Reciprocamente, suponhamos que existem $R > 0$, $C > 0$ e um ângulo $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que $D_{R,\phi_0} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

para todo $\lambda \in D_{R,\phi_0}$. Seja $a < -R$ temos que,

$$\bigcup_{\phi \in \left(a, \frac{\pi}{2}\right)} [\mathbb{C} \backslash (S_{a,\phi} \cup \{a\})] = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{a\} : \left|\operatorname{Arg}(\lambda) < \frac{\pi}{2}\right|\right\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > a\}.$$

Logo $\{\mathbb{C} \backslash (S_{a,\phi} \cup \{a\})\}_{\phi \in \left(a, \frac{\pi}{2}\right)}$ é uma cobertura aberta do compacto $\overline{B(0,R)}$, portanto existe uma subcobertura finita $\{\mathbb{C} \backslash (S_{a,\phi_j} \cup \{a\})\}_{j=1}^{N}$, tomando $\phi' = \max\{\phi_j : j = 0, 1, ..., N\}$ obtemos que

$$\mathbb{C} \backslash S_{a,\phi'} \supset \mathbb{C} \backslash (S_{a,\phi'} \cup \{a\}) \supset \bigcup_{j=1}^{N} \left[\mathbb{C} \backslash (S_{a,\phi_j} \cup \{a\})\right] \supset \overline{B(0,R)}.$$

Logo $S_{a,\phi'} \subset \mathbb{C} \backslash \overline{B(0,R)}$. Dado $\lambda \in S_{a,\phi'}$, se $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ então $|\operatorname{Arg}(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} > \phi_0$ e se $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, então

$$|\operatorname{Arg}(\lambda)| = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right) \geq \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{\operatorname{Re}(\lambda) - a}\right) = |\operatorname{Arg}(\lambda - a)| \geq \phi' \geq \phi_0.$$

Portanto $S_{a,\phi'} \subset D_{R,\phi_0} \subset \rho(A)$. Por fim, como

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} = 1$$

existe $r > 0$ tal que

$$\frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \leq 2$$

para todo $|\lambda| \geq r$. Como a função $S_{a,\phi'} \cup \{a\} \ni \lambda \mapsto \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \in \mathbb{R}$ é contínua, tal função possui valor máximo $M$ no compacto $(S_{a,\phi'} \cup \{a\}) \cap \overline{B(0,r)}$. Assim temos que,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \leq \frac{C}{|\lambda - a|} \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \leq \frac{C(2 + M)}{|\lambda - a|}$$

para todo $\lambda \in S_{a,\phi'}$. $\square$

**Exemplo 2.1.4.** *Seja $A : X \to X$ um operador limitado. Como sabemos $\mathbb{C} \backslash \overline{B\left(0, \|A\|_{\mathscr{L}(X)}\right)} \subset$*

*$\rho(A)$. Além disso, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|A\|_{\mathscr{L}(X)}$, temos que*

$$\begin{aligned}\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} &= \left\|[\lambda(1-\lambda^{-1}A)]^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} = \left\|\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &= |\lambda|^{-1}\left\|(1-\lambda^{-1}A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq |\lambda|^{-1}\left(1-|\lambda|^{-1}\|A\|_{\mathscr{L}(X)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

*Tomando $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$, temos que $|\lambda|^{-1}\|A\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{2}$ e então $\left(1-|\lambda|^{-1}\|A\|_{\mathscr{L}(X)}\right)^{-1} \leq 2$. Portanto,*

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

*para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$. Segue então da proposição anterior que $A$ é um operador setorial.*

**Teorema 2.1.5.** *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial, $R > 0$, $C > 0$ e $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tais que $D_{R,\phi_0} \subset \rho(A)$ e $\|A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C$ para todo $\lambda \in D_{R,\phi_0}$. Suponhamos que $B : D(B) \subset X \to X$ é um operador linear tal que $D(B) \supset D(A)$ e existam constantes $\epsilon \in (0, C^{-1})$ e $K > 0$ tais que $\|Bx\| \leq \epsilon\|Ax\| + K\|x\|$ para todo $x \in D(A)$. Então $A + B : D(A) \subset X \to X$ é setorial.*

*Demonstração.* De fato, temos que

$$\begin{aligned}\|B(\lambda - A)^{-1}x\| &\leq \epsilon\|A(\lambda - A)^{-1}x\| + K\|(\lambda - A)^{-1}x\| \\ &\leq \epsilon C\|x\| + K\|\lambda^{-1}[(\lambda - A) + A](\lambda - A)^{-1}x\| \\ &\leq \epsilon C\|x\| + K|\lambda^{-1}|\|x + A(\lambda - A)^{-1}x\| \\ &\leq \epsilon C\|x\| + \frac{K(1+C)}{|\lambda|}\|x\|\end{aligned}$$

para quaisquer $\lambda \in D_{R,\phi_0}$ e $x \in X$. Logo para todo $\lambda \in D_{R,\phi_0}$ o operador linear $B(\lambda - A)^{-1}$ é limitado e

$$\|B(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \epsilon C + \frac{K(1+C)}{|\lambda|}.$$

Tomando $\lambda \in D_{R,\phi_0}$ tal que $|\lambda| \geq 2K(1+C)(1-\epsilon C)^{-1}$, obtemos que $\|B(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$ logo $1 - B(\lambda - A)^{-1} : X \to X$ é bijetivo e como

$$\begin{aligned}[\lambda - (A+B)]^{-1} &= \left[(\lambda - A) - B(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)\right]^{-1} \\ &= \left(\left[1 - B(\lambda - A)^{-1}\right](\lambda - A)\right)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1}\left[1 - B(\lambda - A)^{-1}\right]^{-1}\end{aligned}$$

segue que $[\lambda - (A+B)]^{-1} : X \to X$ é bijetivo. Note que pelo Teorema da aplicação aberta

$[1 - B(\lambda - A)^{-1}]^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, logo $[\lambda - (A+B)]^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. Em particular, $[\lambda - (A+B)]^{-1}$ é um operador fechado, segue então que $\lambda - (A+B) : D(A) \subset X \to X$ é fechado. Portanto $A + B : D(A) \subset X \to X$ é fechado. Seja $R' = 2K(1+C)(1-\epsilon C)^{-1} + R$ temos então que $D_{R',\phi_0} \subset \rho(A+B)$ e além disso,

$$\begin{aligned}
\left\|[\lambda - (A+B)]^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} &\leq \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \left\|\left[1 - B(\lambda - A)^{-1}\right]^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \\
&\leq \frac{C+1}{|\lambda|}\left[1 - \left\|B(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)}\right]^{-1} \\
&\leq \frac{C+1}{|\lambda|}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \\
&\leq \frac{2(C+1)}{|\lambda|},
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in D_{R',\phi_0}$. Portanto, segue da proposição anterior que $(A+B)$ é setorial. □

**Definição 2.1.6.** *Dado $U \subset \mathbb{R}$ um aberto e $f : U \to X$ uma aplicação. Dizemos que $f$ é analítica real se para cada $t_0 \in U$ existem $\delta > 0$ e $x_j \in X$ para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset U$ e*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (t - t_0)^j x_j$$

*para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*

**Definição 2.1.7** (Semigrupo Analítico e Gerador Infinitesimal)**.** *Um semigrupo analítico sobre um espaço de Banach $X$ é uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores em $\mathscr{L}(X)$ satisfazendo:*

**(i)** *$T(0) = I$.*

**(ii)** *$T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.*

**(iii)** *$T(t)x \to x$ quando $t \to 0$ para todo $x \in X$.*

**(iv)** *$t \mapsto T(t)x$ é uma função analítica real sobre $t \in (0, +\infty)$ para cada $x \in X$.*

*O gerador infinitesimal $L$ de um semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é definido por*

$$Lx = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

*seu domínio $D(L)$ consiste de todos os $x \in X$ para os quais o limite acima existe.*

**Teorema 2.1.8.** *Se $A$ é um operador setorial com ângulo $\phi$ e vértice $a$, então $-A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$, onde*

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \tag{2.5}$$

*e $\Gamma : \mathbb{R} \to \rho(-A)$ é a curva definida por*

$$\Gamma(s) = \begin{cases} Re^{it} - a & se \quad t \in [-\theta, \theta] \\ \frac{s}{\theta}Re^{i\theta} - a & se \quad t \in [\theta, +\infty) \\ -\frac{s}{\theta}Re^{-i\theta} - a & se \quad t \in (-\infty, -\theta] \end{cases}$$

*com $R > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$.*
*A função $(0, +\infty) \ni t \to e^{-tA} \in \mathscr{L}(X)$ pode ser estendida para uma função analítica $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{arg}z| < \varepsilon\} \ni z \to e^{-zA} \in \mathscr{L}(X)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.*
*Temos também que se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\mathrm{Re}\sigma(A) > b$, isto é, se $\mathrm{Re}\lambda > b$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|e^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ce^{-bt} \quad e \quad \|Ae^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{t}e^{-bt}$$

*para todo $t > 0$. Por fim, temos que*

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}) = -Ae^{-tA}$$

*para todo $t > 0$.*

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que $a = 0$. Antes de tudo, fixado $t > 0$ devemos provar que a integral imprópria em (1.3) é convergente, para isso é suficiente mostrar que as integrais $\int_{\Gamma_1}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ e $\int_{\Gamma_2}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ são convergentes onde $\Gamma_1 : [\theta, +\infty) \to \mathbb{C}$, $\Gamma_2 : (-\infty, -\theta] \to \mathbb{C}$ são definidas por

$$\Gamma_1(s) = \frac{s}{\theta}Re^{i\theta} \quad \text{e} \quad \Gamma_2(s) = -\frac{s}{\theta}Re^{-i\theta}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \left\|(\lambda+A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} |e^{\lambda t}||d\lambda| &\leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{|\lambda|}|e^{\lambda t}||d\lambda| \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|}|e^{\Gamma_1(s)t}||\Gamma_1'(s)|ds \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|}e^{Re(\Gamma_1(s))t}|\Gamma_1'(s)|ds \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\frac{s}{\theta}Re^{i\theta}|}e^{Re(\frac{s}{\theta}Re^{i\theta})t}\left|\frac{R}{\theta}e^{i\theta}\right| ds \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{s}e^{(\frac{s}{\theta}R\cos\theta)t}ds \\
&\leq \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{\theta}e^{(\frac{t}{\theta}R\cos\theta)s}ds < \infty
\end{aligned}$$

pois $\frac{t}{\theta}R\cos\theta < 0$. Portanto a integral $\int_{\Gamma_1}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ converge absolutamente, em particular tal integral converge. Analogamente mostramos que a integral $\int_{\Gamma_2}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ converge. Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o caminho definido por

$$\Phi(s) = \Gamma(s) + K$$

onde $K > 0$ é uma constante escolhida de modo que $\{\Gamma(s) : s \in \mathbb{R}\} \cap \{\Gamma(s) + K : s \in \mathbb{R}\} = \emptyset$. Pelo Teorema de Cauchy temos que

$$\int_{\Gamma}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = \int_{\Phi}(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda. \tag{2.6}$$

De fato, dado $N > \theta$ sejam $\Gamma_N = \Gamma|_{[-N,N]}$, $\Phi_N = \Phi|_{[-N,N]}$ e definamos $\gamma_N^1,\gamma_N^2 : [0,K] \to \mathbb{C}$ por

$$\gamma_N^1(s) = \frac{N}{\theta}Re^{-i\theta} + Ks \quad \text{e} \quad \gamma_N^2(s) = \frac{N}{\theta}Re^{i\theta} + Ks.$$

Pelo Teorema de Cauchy, temos que

$$\left(\int_{\gamma_N^1} + \int_{\Phi_N} - \int_{\gamma_N^2} - \int_{\Gamma_N}\right)(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = 0 \tag{2.7}$$

já que a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t} \in \mathscr{L}(X)$ é analítica. Note agora que,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_N^1} \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} |e^{\lambda t}||d\lambda| &\leq \int_{\gamma_N^1} \frac{M}{|\lambda|} e^{Re(\lambda t)}|d\lambda| \\
&\leq \int_0^K \frac{M}{|\gamma_N^1(s)|} e^{Re(\gamma_N^1(s))t} \left|(\gamma_N^1)'(s)\right| ds \\
&\leq \int_0^K \frac{M}{\frac{N}{\theta}R\sin\theta} e^{(\frac{N}{\theta}R\cos\theta + K)t} ds \\
&\leq \frac{KM}{\frac{N}{\theta}R\sin\theta} e^{(\frac{N}{\theta}R\cos\theta + K)t}
\end{aligned}$$

de onde segue que $\int_{\gamma_N^1} (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \to 0$ quando $N \to \infty$. Analogamente mostramos que $\int_{\gamma_N^2} (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \to 0$ quando $N \to \infty$. Portanto fazendo $N \to \infty$ em (2.7) segue (2.6).
Então fixados $t, s > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
e^{-At}e^{-As} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Phi (\mu + A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma \left(\int_\Phi (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}(\mu + A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma \left(\int_\Phi e^{\lambda t + \mu s}(\mu - \lambda)^{-1}\left[(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1}\right] d\mu\right) d\lambda,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde a última igualdade segue da identidade do resolvente. Observe que para quaisquer $\lambda \in \Gamma$ e $\mu \in \Phi$, temos que

$$\int_\Gamma e^{\lambda t}(\mu - \lambda)^{-1}d\lambda = 0 \quad \text{e} \tag{2.9}$$

$$\int_\Phi e^{\mu s}(\mu - \lambda)^{-1}d\mu = 2\pi i e^{\lambda s}. \tag{2.10}$$

De fato, dado $N > \theta$ seja $\gamma_N : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma_N(w) = \frac{N}{\theta}e^{i\theta}(1 - w) + \frac{N}{\theta}e^{-i\theta}w.$$

Segue pelo Teorema de Cauchy que

$$\left(\int_{\gamma_N} + \int_{\Gamma_N}\right) e^{\lambda t}(\mu - \lambda)^{-1}d\lambda = 0, \tag{2.11}$$

pois a função $(\mathbb{C}\backslash\{\mu\}) \ni \lambda \to e^{\lambda t}(\mu - \lambda)^{-1} \in \mathbb{C}$ é analítica.

Para $N$ suficientemente grande temos $|(\mu-\lambda)|\geq 1$ para todo $\lambda\in\gamma_N$, desta forma

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_N} e^{\lambda t}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda\right| &\leq \int_{\gamma_N}|e^{\lambda t}||(\mu-\lambda)|^{-1}|d\lambda|\\
&\leq \int_{\gamma_N}|e^{\lambda t}||d\lambda|\\
&= \int_{\gamma_N}e^{tRe\lambda}|d\lambda|\\
&= \int_{\gamma_N}e^{t\frac{N}{\theta}R\cos\theta}|d\lambda|\\
&= e^{t\frac{N}{\theta}R\cos\theta}(2\frac{N}{\theta}R\sin\theta).
\end{aligned}$$

Logo $\int_{\gamma_N} e^{\lambda t}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda\to 0$ quando $N\to\infty$ e então por (2.11) segue (2.9).
A prova de (2.10) é similar a prova de (2.9) usando a fórmula integral de Cauchy (ver [9], página 45) em vez do Teorema de Cauchy.
Partindo de (2.8) e usando (2.9), (2.10) e o Teorema 1.2.9, segue que

$$\begin{aligned}
e^{-At}e^{-As} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{\lambda t+\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}((\lambda+A)^{-1}-(\mu+A)^{-1})d\mu\right)d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{\lambda t+\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&\quad -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{\lambda t+\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{\lambda t+\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&\quad -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Phi\left(\int_\Gamma e^{\lambda t+\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\lambda\right)d\mu \qquad (2.12)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{\lambda t}\left(\int_\Phi e^{\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu\right)(\lambda+A)^{-1}d\lambda\\
&\quad -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Phi e^{\mu s}\left(\int_\Gamma e^{\lambda t}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda\right)(\mu+A)^{-1}d\mu\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{\lambda t}2\pi i e^{\lambda s}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t+\lambda s}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = e^{-A(t+s)}.
\end{aligned}$$

Seja $\epsilon<\min\{\theta-\frac{\pi}{2},\pi-\theta\}$ podemos estender a aplicação $(0,+\infty)\ni t\mapsto e^{-At}\in\mathscr{L}(X)$ para o conjunto $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon\}$. De fato, seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon$, então

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda\right| &\leq \int_{\Gamma_1} |(\lambda + A)^{-1}||e^{\lambda z}||d\lambda| \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{M}{|\lambda|} e^{\mathrm{Re}(\lambda z)} |d\lambda| \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma_1(s)|} e^{\mathrm{Re}[\Gamma_1(s) z]} |(\Gamma_1)'(s)| ds \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{|\frac{s}{\theta}\mathrm{R}e^{i\theta}|} e^{\mathrm{Re}\left[s\theta^{-1}\mathrm{R}e^{i\theta}|z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}\right]} \left|\frac{R}{\theta} e^{i\theta}\right| ds \\
&= \int_{\theta}^{+\infty} \frac{M}{s} e^{s\theta^{-1} R|z| \cos[\theta + \mathrm{Arg}(z)]} ds < \infty,
\end{aligned}
$$

pois $\theta + \mathrm{Arg}(z) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, logo $\cos(\theta + \mathrm{Arg}(z)) < 0$. Da mesma forma mostramos que a integral $\int_{\Gamma_1} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$ converge.

Mostraremos que a aplicação $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon\} \ni z \mapsto e^{-Az} \in \mathscr{L}(X)$ é analítica. Fixemos $N > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon$. Dado $\lambda \in \Gamma([-N, N])$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\lambda + A)^{-1}\left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0}\right) - (\lambda + A)^{-1}\lambda e^{\lambda z_0}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \\
&= \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \left|\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0} - \lambda e^{\lambda z_0}\right| \\
&= \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \left|\frac{\lambda e^{\lambda z_0}(e^{\lambda(z - z_0)} - 1)}{\lambda(z - z_0)} - \lambda e^{\lambda z_0}\right| \\
&= \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} |\lambda e^{\lambda z_0}| \left|\frac{e^{\lambda(z - z_0)} - 1}{\lambda(z - z_0)} - 1\right|.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Como $\Gamma([-N, N])$ é compacto e a aplicação $\Gamma([-N, N]) \ni \lambda \mapsto \|(\lambda + A)^{-1}\||\lambda e^{\lambda z_0}| \in \mathbb{R}$ é contínua, segue que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$
\left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} |\lambda e^{\lambda z_0}| \leq C_1 \text{ e } |\lambda||z - z_0| \leq C_2|z - z_0|
$$

para todo $\lambda \in \Gamma([-N, N])$. Como $(e^z - 1)z^{-1} \to 1$ quando $z \to 0$ dado $\epsilon' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$
\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| < \frac{\epsilon'}{C_1}
$$

sempre que $0 < |z| < \delta$. Então para qualquer $\lambda \in \Gamma([-N, N])$

$$\left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} |\lambda e^{\lambda z_0}| \left|\frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z - z_0)} - 1\right| \leq C_1 \left|\frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z - z_0)} - 1\right|$$
$$\leq C_1 \left|\frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{\lambda(z - z_0)} - 1\right|$$

sempre que $|z - z_0| < \frac{\delta}{C_2}$. Segue então de (2.13) que $(\lambda + A)^{-1}\left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0}\right)$ converge para $(\lambda + A)^{-1}\lambda e^{\lambda z_0}$ quando $z \to z_0$ uniformemente nos $\lambda \in \Gamma([-N, N])$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z - z_0}\left(\int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z_0} d\lambda\right) \\
&= \lim_{z\to z_0} \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1}\left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda z_0}}{z - z_0}\right) d\lambda \\
&= \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z_0},
\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon\} \ni z \mapsto \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \in \mathscr{L}(X)$ é analítica.

Dado $K \subset \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |Arg(z)| < \epsilon\}$ um conjunto compacto, mostraremos que a convergência $\int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \to \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda$ é uniforme sobre $K$.

Como $d(0, K) > 0$ existe $r > 0$ tal que,

$$K \subset \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |Arg(z)| < \epsilon\} \cap [\mathbb{C}\backslash B(0, r)].$$

Por outro lado dados $z \in K$ e $N > \theta$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda - \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds - \int_{-N}^{N} (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds\right| \\
&= \left|\left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{+\infty}\right) (\Gamma(s) + A)^{-1} e^{\Gamma(s)z} \Gamma'(s) ds\right| \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{+\infty}\right) \left\|(\Gamma(s) + A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \left|e^{\Gamma(s)z}\right| |\Gamma'(s)| ds \\
&\leq 2 \int_{N}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} \left|e^{\Gamma(s) r e^{-i\epsilon}}\right| |\Gamma'(s)| ds,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde a última desigualdade ocorre pois para todo $s \in [\theta, +\infty)$ temos

$$\begin{aligned} \left|e^{\Gamma(s)z}\right| &= e^{\mathrm{Re}(\Gamma(s)z)} = e^{|\Gamma(s)z|\cos(\theta + Arg(z))} \\ &\leq e^{|\Gamma(s)r|\cos(\theta+\mathrm{Arg}(z)} \leq e^{|\Gamma(s)r|\cos(\theta-\epsilon)} = \left|e^{\Gamma(s)re^{-i\epsilon}}\right|, \end{aligned}$$

já que $\frac{\pi}{2} < \theta - \epsilon < \theta + \mathrm{Arg}(z) < \pi$ , logo $\cos(\theta + \mathrm{Arg}(z)) < \cos(\theta - \epsilon)$. Analogamente, usando que $-\pi < \mathrm{Arg}(z) - \theta < \epsilon - \theta < -\frac{\pi}{2}$, concluímos que $\left|e^{\Gamma(-s)z}\right| \leq \left|e^{\Gamma(s)re^{-i\epsilon}}\right|$ para todo $s \in [\theta, +\infty)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-N} \frac{M}{|\Gamma(s)|} \left|e^{\Gamma(s)z}\right| |\Gamma'(s)| ds &\leq \int_{N}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(-s)|} \left|e^{\Gamma(-s)z}\right| |\Gamma'(-s)| ds \\ &\leq \int_{N}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} \left|e^{\Gamma(s)re^{-i\epsilon}}\right| |\Gamma'(s)| ds \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\int_{N}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} \left|e^{\Gamma(s)z}\right| |\Gamma'(s)| ds \leq \int_{N}^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} \left|e^{\Gamma(s)re^{-i\epsilon}}\right| |\Gamma'(s)| ds.$$

Por fim, como $(\theta - \epsilon) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ temos que $\cos(\theta - \epsilon) < 0$ e então $\int_N^{+\infty} \frac{M}{|\Gamma(s)|} |e^{\Gamma(s)re^{-i\epsilon}}||\Gamma'(s)|ds \to 0$ quando $N \to \infty$. Tal integral não depende de $z \in K$, logo de (2.14) segue o que queríamos. Portanto a aplicação $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}(z)| < \epsilon\} \ni z \mapsto \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \in \mathscr{L}(X)$ é analítica. Além disso,

$$\frac{d}{dz}(e^{-Az}) = \lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_N} (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda = \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} \lambda e^{\lambda z} d\lambda &= \int_\Gamma \left((\lambda + A)(\lambda + A)^{-1} - A(\lambda + A)^{-1}\right) e^{\lambda z} d\lambda \\ &= \int_\Gamma I e^{\lambda z} d\lambda - \int_\Gamma A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \\ &= -\int_\Gamma A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda \\ &= -A \left(\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda\right) \\ &= -Ae^{-Az}, \end{aligned}$$

pois usando o Teorema de Cauchy segue que $\int_\Gamma I e^{\lambda z} d\lambda = 0$ e como $A$ é um operador fechado temos que $\int_\Gamma A(\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda = A \left(\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda z} d\lambda\right)$. Portanto,

$$\frac{d}{dz}(e^{-Az}) = -Ae^{-Az}$$

para todo $z \in \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |Arg(z)| < \epsilon\}$. Em particular,

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}) = -Ae^{-At}$$

para todo $t > 0$. Dado $t > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \left\|e^{-At}\right\|_{\mathscr{L}(X)} &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{t\Gamma}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Note que

$$\int_{t\Gamma}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu = \int_{\Gamma}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu. \tag{2.16}$$

De fato, suponhamos $t \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned} &\int_{t\Gamma}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu - \int_{\Gamma}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu \\ &= \left(\int_{t\Gamma|_{(-\infty,-t^{-1}\theta]}} + \int_{t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta,t^{-1}\theta]}} + \int_{t\Gamma|_{[t^{-1}\theta,+\infty)}}\right)\left[\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right] \\ &- \left(\int_{\Gamma|_{(-\infty,-\theta]}} + \int_{\Gamma|_{[-\theta,\theta]}} + \int_{\Gamma|_{[\theta,\infty)}}\right)\left[\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right] \\ &= \left(\int_{t\Gamma|_{(-\infty,-t^{-1}\theta]}} - \int_{\Gamma|_{(-\infty,-\theta]}}\right)\left[\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right] \\ &+ \left(\int_{t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta,t^{-1}\theta]}} - \int_{\Gamma|_{[-\theta,\theta]}}\right)\left[\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right] \\ &+ \left(\int_{t\Gamma|_{[t^{-1}\theta,+\infty)}} - \int_{\Gamma|_{[\theta,\infty)}}\right)\left[\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right] = 0, \end{aligned}$$

pois $t\Gamma|_{(-\infty,-t^{-1}\theta]}$ e $t\Gamma|_{[t^{-1}\theta,+\infty)}$ são reparametrizações de $\Gamma|_{(-\infty,-\theta]}$ e $\Gamma|_{[\theta,\infty)}$, respectivamente, e $t\Gamma|_{[-t^{-1}\theta,t^{-1}\theta]}$, $-\Gamma|_{[-\theta,\theta]}$ formam uma curva fechada, logo podemos aplicar o Teorema de Cauchy já que o integrando é uma função analítica. De modo análogo, mostramos que (2.16) ocorre se $t \geq 1$.

Então, de (2.15) e (2.16) segue que

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{-At}\right\|_{\mathscr{L}(X)} &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1} e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left\|\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \frac{|e^{\mu}|}{t}|d\mu|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{M}{\frac{|\mu|}{t}}\frac{|e^{\mu}|}{t}|d\mu|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{M}{|\mu|}|e^{\mu}||d\mu| = C.
\end{aligned}
$$

Usando os mesmos argumentos temos

$$
\begin{aligned}
\left\|Ae^{-At}\right\|_{\mathscr{L}(X)} &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma A(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{t\Gamma} A\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1} e^{\mu}\frac{1}{t}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \frac{1}{2\pi t}\left\|\int_{t\Gamma} \left(\frac{\mu}{t}+A\right)e^{\mu}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1} - \frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}e^{\mu}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \frac{1}{2\pi t}\left\|\int_{t\Gamma} I - \frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}e^{\mu}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \frac{1}{2\pi t}\left\|\int_{\Gamma} I - \frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}e^{\mu}d\mu\right\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&\leq \frac{1}{2\pi t}\int_{\Gamma}\left\| I - \frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)}|e^{\mu}||d\mu|\\
&\leq \frac{1}{2\pi t}\int_{\Gamma}\left(1+\left|\frac{\mu}{t}\right|\frac{M}{|\frac{\mu}{t}|}\right)|e^{\mu}||d\mu|\\
&\leq \frac{1+M}{2\pi t}\int_{\Gamma}|e^{\mu}||d\mu| \leq \frac{C}{t}.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Mostraremos agora que $e^{-At}x \to x$ quando $t \to 0+$ para todo $x \in X$. Suponhamos inicialmente que $x \in D(A)$. Notemos que pela fórmula integral de Cauchy, e por cálculos análogos aos que já fizemos

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1}x d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1}d\lambda\right)x = x. \tag{2.18}
$$

Assim temos que

$$
\begin{aligned}
\|e^{-At}x - x\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} x d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1} x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_\Gamma e^{\lambda t}\left[(\lambda + A)^{-1} + \lambda^{-1}\right] x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda + A)^{-1}\left[I - (\lambda + A)\lambda^{-1}\right] x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda + A)^{-1} A x d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{t\Gamma} e^{\mu}\frac{t}{\mu}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} A x \frac{1}{t} d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\Gamma} e^{\mu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1} A x d\lambda \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}\frac{M}{|\frac{\mu}{t}|}\|Ax\||d\lambda| \\
&\leq \left(\frac{M\|Ax\|}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|^2}|d\lambda|\right) t.
\end{aligned}
$$

Portanto $e^{-At}x \to x$ quando $t \to 0+$ para todo $x \in D(A)$.

Fixado $y \in X$ e dado $\epsilon > 0$ seja $x \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2(C+1)}$. Do que já foi provado, existe $\delta > 0$ tal que $\|e^{-At}x - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \in (0, \delta)$. Segue então que

$$
\begin{aligned}
\|e^{-At}y - y\| &\leq \|e^{-At}y - e^{-At}x\| + \|e^{-At}x - x\| + \|x - y\| \\
&\leq \|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)}\|x - y\| + \|e^{-At}x - x\| + \|x - y\| \\
&= (\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} + 1)\|x - y\| + \|e^{-At}x - x\| \\
&< (C+1)\frac{\epsilon}{2(C+1)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

para todo $t \in (0, \delta)$, de onde segue que $e^{-At}y \to y$ quando $t \to 0+$. Portanto está completa a prova de que $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ é um semi-grupo analítico.

Provaremos agora que $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$. Dado $x \in D(A)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = \frac{d}{dt}(e^{-At})x = -Ae^{-At}x &= -\int_\Gamma A(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}x d\lambda \\
= \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}\lambda e^{\lambda t} x d\lambda = -\int_\Gamma e^{\lambda t}&(\lambda + A)^{-1}Axd\lambda = -e^{-At}Ax.
\end{aligned}
$$

Seja $\phi : [0, +\infty) \to X$ definida por

$$
\phi(s) = -\int_0^s e^{-At}Ax.
$$

Então segue que

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = -e^{-At}Ax = \frac{d\phi}{dt}(t)$$

para todo $t > 0$. Portanto pela Proposição 1.2.3, existe $y \in X$ tal que $e^{-At}x - \phi(t) = y$ para todo $t > 0$. Como a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto e^{-At}x - \phi(t) \in X$ é contínua, temos que $e^{-At}x - \phi(t) = y$ para todo $t \geq 0$ e $y = e^{-A0}x - \phi(0) = x$. Logo a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto e^{-At}x \in X$ é diferenciável no 0 e

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x)(0) = \frac{d}{dt}(\phi(t) + x)(0) = \frac{d}{dt}(\phi(t))(0) = -e^{-A0}Ax = -Ax.$$

Portanto se $L$ é o gerador infinitesimal de $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$, segue que $D(A) \subset D(L)$ e $L = -A$ em $D(A)$. Por fim, seja $T : X \to X$ o operador linear definido por

$$T(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e{-}Atxdt.$$

Observe que como $\|e^{-At}\| \leq C$ para todo $t \geq 0$, a integral acima converge absolutamente e portanto $T$ está bem definido. Dado $x \in X$ já provamos que $e^{-At}x \in D(A)$ para todo $t > 0$, logo como $A$ é fechado, dado $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt \in D(A) \quad \text{e} \quad A\left(\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}dt\right) = \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}Ae^{-At}dt.$$

Além disso, integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} A\left(\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) &= \lim_{j\to\infty} \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}Ae^{-At}dt \\
&= \lim_{j\to\infty}\left((-e^{-t}e^{-At}x)|_{\frac{1}{j}}^{j} - \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{j}}e^{-A\frac{1}{j}}x - e^{-j}e^{-Aj}x - \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) \\
&= x - \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-At}xdt = x - Tx.
\end{aligned}$$

Logo novamente por $A$ ser fechado segue que $Tx \in D(A)$ e $A(Tx) = x - Tx$. Note agora que, dado $x \in D(L)$ temos que $e^{-At}x \in D(A) \subset D(L)$ e

$$\begin{aligned}
Le^{-At}x &= \lim_{s \to 0+} \frac{e^{-As}e^{-At}x - e^{-At}x}{s} \\
&= \lim_{s \to 0+} \frac{e^{-At}e^{-As}x - e^{-At}x}{s} \\
&= \lim_{s \to 0+} e^{-At}\left(\frac{e^{-As}x - x}{s}\right) \\
&= e^{-At} \lim_{s \to 0+} \frac{e^{-As}x - x}{s} = e^{-At}Lx.
\end{aligned}$$

Assim, se $x \in D(L)$ temos que

$$\begin{aligned}
T(Lx) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-At}Lxdt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}Le^{-At}xdt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}Ae^{-At}xdt \\
&= A\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-At}xdt\right) \\
&= A(Tx) = x - Tx.
\end{aligned}$$

Portanto $x = T(Lx) + Tx \in D(A)$, logo $D(L) \subset D(A)$. Então $D(L) = D(A)$ e $L = -A$.

No caso em que $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, temos que

$$\begin{aligned}
e^{-At} &= \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \\
&= \int_\Gamma \left[\lambda + a + (-a + A)\right]^{-1} e^{\lambda t}d\lambda \\
&= \int_{\widetilde{\Gamma}} \left[\mu + (-a + A)\right]^{-1} e^{(\mu - a)t}d\mu \\
&= e^{-at}\int_{\widetilde{\Gamma}} \left[\mu + (-a + A)\right]^{-1} e^{\mu t}d\mu,
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\Gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é definido por $\widetilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s) + a$. Seja $\widetilde{A} = -aI + A$, temos que $\widetilde{A}$ é um operador setorial com vértice 0 e $\widetilde{\Gamma}$ é exatamente a curva $\Gamma$ quando tomamos $a = 0$, portanto podemos aplicar o que já foi provado ao semi-grupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ definido por

$$T(t) = \int_{\Gamma + a} (\mu(-a + A))_{-1}e^{\mu t}d\mu$$

de onde todas as afirmações do teorema seguem.

Por fim, se $A$ é um operador setorial com vértice $a$ e $b \in \mathbb{R}$ é tal que $b > \sigma(A)$, então $A$ também é setorial com vértice $b$ para algum ângulo. Utilizando o vértice $b$ para gerar o semi-grupo obtemos as estimativas desejadas, além disso, aplicando o Teorema de Cauchy mostramos que o semi-grupo gerado é o mesmo que o semi-grupo gerado considerando o vértice $a$. $\square$

## 2.2 Espaços de potência fracionária

Como veremos nesta seção, dado um operador setorial $A$ com $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$, é possível definir o operador de potência fracionária $A^{-s}$ com $s > 0$ através dos operadores $e^{-At}$. Os espaços de potência fracionária surgem neste contexto.

**Definição 2.2.1.** *Definimos a função gama* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *por*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt.$$

**Observação 2.2.2.** *Note que a integral na definição da função gama de fato existe para todo* $s \in (0, +\infty)$.

**Observação 2.2.3.** *Dados números reais* $a > 0$ *e* $s > 0$, *temos que*

$$a^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at} \, dt. \tag{2.19}$$

*De fato,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at} \, dt &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^{s-1} e^{-x} \frac{1}{a} \, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} a^{-s} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} a^{-s} \Gamma(s) = a^{-s}. \end{aligned}$$

Como dado um operador setorial $A$ já definimos o operador $e^{-At}$, podemos usar a igualdade (2.19) para definir $A^{-s}$, a condição $a > 0$ no exemplo anterior se traduz para $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$, como segue:

**Definição 2.2.4.** *Seja* $A$ *um operador setorial tal que* $Re\sigma(A) > 0$, *então para* $s > 0$ *definimos*

$$A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-At} \, dt.$$

**Observação 2.2.5.** *Na definição acima como* $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$*, temos que existe* $\delta > 0$ *tal que* $\mathrm{Re}\sigma(A) > \delta$*. Logo pelo Teorema 2.1.8, existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ce^{-\delta}$*, de onde segue que a integral na definição acima converge absolutamente.*

**Exemplo 2.2.6.** $A^{-1}$ *dado pela definição 2.2.4 é o operador inverso de* $A$*. De fato, dado* $x \in D(A)$ *temos que*

$$\frac{d}{dt}(-A^{-1}e^{-At}x) = -A^{-1}\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = -A^{-1}(-Ae^{-At}x) = e^{-At}x$$

*para todo* $t \geq 0$*. Portanto, pela Proposição 1.2.3 segue que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-At}\,dt = \left(-A^{-1}e^{-At}x\right)\Big|_0^{+\infty} = \left(\lim_{t\to+\infty} -A^{-1}e^{-At}x\right) + A^{-1}x = A^{-1}x.$$

*Como a integral* $\int_0^{+\infty} e^{-At}\,dt$ *e* $A^{-1}$ *são operadores lineares contínuos sobre* $X$ *que coincidem no subespaço denso* $D(A)$*, segue que eles são iguais.*

**Teorema 2.2.7.** *Seja* $A$ *um operador setorial sobre* $X$ *tal que* $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > 0$*. Então* $A^{-s}$ *é um operador linear limitado e injetivo sobre* $X$ *para qualquer* $s > 0$ *e* $A^{-s}A^{-w} = A^{-(s+w)}$ *para quaisquer* $s, w > 0$*. Além disso,*

$$A^{-s} = \frac{\mathrm{sen}(\pi s)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{-s}(\lambda + A)^{-1}\,d\lambda \tag{2.20}$$

*para todo* $0 < s < 1$*.*

*Demonstração.* Sejam $s, w > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
A^{-s}A^{-w} &= \left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-At}\,dt\right)\left(\frac{1}{\Gamma(w)}\int_0^{+\infty} u^{w-1}e^{-Au}\,du\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-At}\left(\int_0^{+\infty} u^{w-1}e^{-Au}\,du\right)\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)}\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{s-1}u^{w-1}e^{-A(t+u)}\,du\right)\,dt.
\end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ fixado, fazendo a mudança de variável $v = t + u$ obtemos

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}u^{w-1}e^{-A(t+u)}\,du = \int_t^{+\infty} t^{s-1}(v-t)^{w-1}e^{-Av}\,dv.$$

Notando que

$$\chi_{(t,+\infty)}(v) = \chi_D(t,v) = \chi_{(0,u)}(v)$$

para quaisquer $t, v \in (0, +\infty)$, onde $D = \{(t,v) \in \mathbb{R}^2 : t > 0ev > t\}$ e usando o Teorema 1.2.9

obtemos que

$$\begin{aligned}
A^{-s}A^{-w} &= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_t^{+\infty} t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av}\, dv \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av} \chi_{(t,+\infty)}(v)\, dv \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av} \chi_{(0,v)}(t)\, dv \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av} \chi_{(0,v)}(t)\, dt \right) dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{v} t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av}\, dt \right) dv.
\end{aligned}$$

Para cada $v > 0$ fixado, fazendo a mudança de variável $t = vu$ obtemos que

$$\int_0^v t^{s-1}(v-t)^{w-1} e^{-Av}\, dt = \int_0^1 (vu)^{s-1}(v-vu)^{w-1} e^{-Av} v\, du,$$

logo

$$\begin{aligned}
A^{-s}A^{-w} &= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 (vu)^{s-1}(v-vu)^{w-1} e^{-Av}\, du \right) dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{w-1}\, du \right) v^{s+w-1} e^{-Av}\, dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \left( \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{w-1}\, du \right) \left( \int_0^{+\infty} v^{s+w-1} e^{-Av}\, dv \right).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(w)} \left( \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{w-1}\, du \right) = \frac{1}{\Gamma(s+w)}.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt \int_0^{+\infty} v^{w-1} e^{-v}\, dv \\
&= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt \right) v^{w-1} e^{-v}\, dv \\
&= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} t^{s-1} v^{w-1} e^{-(t+v)}\, dt \right) dv \\
&= \iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} t^{s-1} v^{w-1} e^{-(t+v)}\, dt dv.
\end{aligned}$$

Como a aplicação $F : (0,+\infty) \times (0,1) \to (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ definida por

$$F(x,y) = (xy, x(1-y))$$

é um difeomorfismo de classe $C^\infty$ com inversa $F^{-1} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to (0,+\infty) \times (0,1)$ dada por

$$F^{-1}(t,v) = \left(t+v, \frac{t}{t+v}\right),$$

fazendo a mudança de variáveis $(t,v) = F(x,y) = (xy, x(1-y))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} t^{s-1} v^{w-1} e^{-(t+v)}\, dtdv &= \iint_{(0,+\infty)\times(0,1)} (xy)^{s-1}[x(1-y)]^{w-1} e^{-x} x \, dxdy \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} x^{s+w-1} y^{s-1} (1-y)^{w-1} e^{-x}\, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{w-1}\, dy \int_0^{+\infty} x^{(s+w)-1} e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{w-1}\, dy\, \Gamma(s+w).
\end{aligned}$$

Portanto $A^{-s}A^{-w} = A^{-(s+w)}$.

Dado $s > 0$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > s$, do que já provamos segue que

$$A^{-k} = A^{-(k-s)}A^{-s}.$$

Como $0 \in \rho(A)$ segue que $A^{-1} : X \to X$ é injetivo, logo $A^{-k} = (A^{-1})^k$ é injetivo. Portanto, segue da identidade acima que $A^{-s}$ é injetivo.

Dado $\lambda \geq 0$, temos que

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-At} e^{-\lambda t}\, dt. \tag{2.21}$$

Já demonstramos, no Exemplo 2.2.6, a igualdade acima para $\lambda = 0$. Suponhamos que $\lambda > 0$, dado $x \in X$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(-e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x\right) &= \frac{d}{dt}\left(-e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}\right)x \\
&= \left(Ae^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t} + e^{-At}e^{-\lambda t}\right)x \\
&= Ae^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x + e^{-At}e^{-\lambda t}x
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Portanto,

$$e^{-\lambda t}x + e^{-At}e^{-\lambda t}x = \frac{d}{dt}\left(-e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x\right) - Ae^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x$$

para todo $t > 0$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-At}e^{-\lambda t}x\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x\right)\,dt - \int_0^{+\infty} Ae^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x\,dt \\ = -\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x - \lim_{t\to 0} e^{-At}\lambda^{-1}e^{-\lambda t}x\right) - \lambda^{-1}A\int_0^{+\infty} e^{-At}e^{-\lambda t}x\,dt \\ = \lambda^{-1}x - \lambda^{-1}A\int_0^{+\infty} e^{-At}e^{-\lambda t}x\,dt.\end{aligned}$$

De onde segue que,

$$(\lambda + A)\left(\int_0^{+\infty} e^{-At}e^{-\lambda t}x\,dt\right) = x.$$

Portanto a identidade (2.21) é válida.

Usando a identidade (2.21), dado $s > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \lambda^{-s}(\lambda + A)^{-1}\,d\lambda &= \int_0^{+\infty} \lambda^{-s}\left(\int_0^{+\infty} e^{-At}e^{-\lambda t}\,dt\right)\,d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-s}e^{-At}e^{-\lambda t}\,dt\right)\,d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-s}e^{-At}e^{-\lambda t}\,d\lambda\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At}\left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-s}e^{-\lambda t}\,d\lambda\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At}\left(\int_0^{+\infty} \frac{u}{t}^{-s}e^{-u}\frac{1}{t}\,du\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At}t^{s-1}\left(\int_0^{+\infty} u^{-s}e^{-u}\,du\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At}t^{s-1}\Gamma(1-s)\,dt \\ &= \Gamma(s)\Gamma(1-s)A^{-s}.\end{aligned}$$

Por fim, usando a identidade

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}$$

para todo $0 < s < 1$, a identidade (2.20) segue, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

**Definição 2.2.8.** *Dado $s > 0$ definimos $D(A^s) := R(A^{-s})$ e $A^s : D(A^s) \to X$ como sendo o* *operador inverso de $A^{-s}$. Definimos também $A^0$ como sendo o operador identidade $I : X \to X$.*

**Exemplo 2.2.9.** *Como já mostramos, $A^{-1}$ obtido com a Definição 2.2.4 coincide com o operador inverso de $A$, assim temos que, $D(A^1) = R(A^{-1}) = D(A)$ e $A^1 = (A^{-1})^{-1} = A$.*

**Observação 2.2.10.** *Se $s > w > 0$ então $D(A^s) \subset D(A^w)$.*
*De fato, como $A^{-s} = A^{-w}A^{-(s-w)}$, temos que $D(A^s) = R(A^{-s}) \subset R(A^{-w}) = D(A^w)$.*

**Observação 2.2.11.** *$A^s$ é fechado para todo $s > 0$.*
*Basta notar que $A^{-s}$ é fechado, pois é limitado, a aplicação $F : X \times X \to X \times X$ definida por $F(x,y) = (y,x)$ é um homeomorfismo e que*

$$Gr(A^s) = \{(x, A^s x) : x \in D(A^s)\} = \{(A^{-s}y, y) : y \in X\} = \{F(y, A^{-s}y) : y \in X\} = F(Gr(A^{-s})).$$

*Portanto $Gr(A^s)$ é fechado em $X \times X$.*

**Observação 2.2.12.** *$A^s$ é densamente definido para todo $s > 0$.*
*De fato, dado $k \in \mathbb{N}$ temos que*

$$D(A^{k+1}) = R(A^{-(k+1)}) = R(A^{-1}A^{-k}) = A^{-1}R(A^{-k}) = A^{-1}D(A^k).$$

*Suponhamos que $D(A^k)$ é denso em $X$. Dado $x \in D(A)$, existe uma sequência $(y_j) \in D(A^k)$ tal que $y_j \to Ax$, assim pela continuidade de $A^{-1}$, segue que $A^{-1}y_j \to x$, logo $D(A^{k+1}) = A^{-1}D(A^k)$ é denso em $D(A)$. Portanto $D(A^{k+1})$ é denso em $X$.*
*Assim, segue por indução que $D(A^k)$ é denso em $X$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Dado $s > 0$, tomando $k > s$, segue da Observação 2.2.10 que $D(A^k) \subset D(A^s)$, portanto $D(A^s)$ é denso em $X$.*

**Observação 2.2.13.** *$R(e^{-At}) \subset D(A^s)$ e $A^s e^{-At} \in \mathscr{L}(X)$ para quaisquer $s, t > 0$. Além disso, $A^s e^{-At} = e^{-At}A^s$ em $D(A^s)$ para quaisquer $s \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.*
*Já sabemos que $R(e^{-At}) \subset D(A)$, $Ae^{-At} = -\frac{d}{dt}(e^{-At}) \in \mathscr{L}(X)$ e $Ae^{-At}x = e^{-At}Ax$ para quaisquer $t > 0$ e $x \in D(A)$.*
*Dado $k \in \mathbb{N}$ suponhamos que $R(e^{-At}) \subset D(A^k)$, $A^k e^{-At} \in \mathscr{L}(X)$ e $A^k e^{-At}x = e^{-At}A^k x$ para quaisquer $t > 0$ e $x \in D(A^k)$. Dado $x \in X$, temos então que $A^k e^{-At}x = A^k e^{-A\frac{t}{2}} e^{-A\frac{t}{2}} x = e^{-A\frac{t}{2}}(A^k e^{-A\frac{t}{2}} x) \in D(A)$, logo $e^{-At}x \in D(A^{k+1})$. Além disso, $A^{k+1}e^{-At} = Ae^{-A\frac{t}{2}} A^k e^{-A\frac{t}{2}} \in \mathscr{L}(X)$ e dado $x \in D(A^{k+1})$ temos que*

$$A^{k+1}e^{-At}x = AA^k e^{-At}x = Ae^{-At}A^k x = e^{-At}AA^k x = e^{-At}A^{k+1}x.$$

*Portanto, segue por indução que* $R(e^{-At}) \subset D(A^k)$, $A^k e^{-At} \in \mathscr{L}(X)$ *e* $A^k e^{-At} x = e^{-At} A^k x$ *para quaisquer* $t > 0$ *e* $x \in D(A^k)$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

*Dado* $s > 0$, *tomando* $k > s$, *temos que* $R(e^{-At}) \subset D(A^k) \subset D(A^s)$ *e* $A^s e^{-At} = A^{s-k} A^k e^{-At} \in \mathscr{L}(X)$.

*Por fim, dados* $s < 0$ *e* $t > 0$,

$$\begin{aligned} A^s e^{-At} &= \left( \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} w^{-s-1} e^{-Aw}\, dw \right) e^{-At} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} w^{-s-1} e^{-Aw} e^{-At}\, dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} w^{-s-1} e^{-At} e^{-Aw}\, dw \\ &= e^{-At} \left( \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} w^{-s-1} e^{-Aw}\, dw \right) = e^{-At} A^s. \end{aligned}$$

*Assim, dado* $s \geq 0$ *e* $x \in D(A^s)$, *tomando* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k > s$ *temos que,*

$$A^s e^{-At} x = A^k A^{s-k} e^{-At} x = A^k e^{-At} A^{s-k} x = e^{-At} A^k A^{s-k} x = e^{-At} A^s x.$$

**Teorema 2.2.14.** *Seja* $A$ *um operador setorial tal que* $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > 0$. *Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|A^s x\| \leq C \|Ax\|^s \|x\|^{1-s}$$

*para quaisquer* $s \in [0,1]$ *e* $x \in D(A)$. *Além disso, também existe uma constante* $C' > 0$ *de modo que*

$$\|A^s x\| \leq C' \left( \epsilon \|Ax\| + \epsilon^{-\frac{s}{1-s}} \|x\| \right)$$

*para quaisquer* $s \in [0,1)$, $x \in D(A)$ *e* $\epsilon > 0$.

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.1.8, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C$ para todo $t > 0$. Dados $s \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ e $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(s)A^{-s}x\| &= \left\| \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-At} x \, dt \right\| \\
&= \left\| \left( \int_0^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) t^{s-1} e^{-At} x \, dt \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{\epsilon} t^{s-1} e^{-At} x \, dt \right\| + \left\| \int_{\epsilon}^{+\infty} t^{s-1} e^{-At} x \, dt \right\| \\
&\leq \int_0^{\epsilon} t^{s-1} \|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \|x\| \, dt \\
&+ \left\| \left( - \lim_{t \to +\infty} t^{s-1} A^{-1} e^{-At} x \right) + \epsilon^{s-1} e^{-A\epsilon} A^{-1} x + \int_{\epsilon}^{+\infty} (s-1) t^{s-2} e^{-At} A^{-1} x \, dt \right\| \\
&\leq \int_0^{\epsilon} t^{s-1} C \|x\| \, dt + \|\epsilon^{s-1} e^{-A\epsilon} A^{-1} x\| + \left\| \int_{\epsilon}^{+\infty} (s-1) t^{s-2} e^{-At} A^{-1} x \, dt \right\| \\
&\leq C\|x\| \frac{\epsilon^s}{s} + C\|A^{-1}x\| \epsilon^{s-1} + (s-1) \int_{\epsilon}^{+\infty} t^{s-2} C \|A^{-1}x\| \, dt \\
&\leq C\|x\| \frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\| \epsilon^{s-1}.
\end{aligned}$$

Fixados $x \in X \backslash \{0\}$ e $s \in (0,1)$, como

$$\lim_{\epsilon \to +\infty} C\|x\| \frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1} = +\infty = \lim_{\epsilon \to 0+} C\|x\| \frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1}$$

e a aplicação $(0,+\infty) \ni \epsilon \mapsto C\|x\|\frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1} \in \mathbb{R}$ é contínua, segue que ela possui um ponto de mínimo. Além disso, tal aplicação também é $C^1$ e

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\epsilon} \left( C\|x\| \frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1} \right) = 0 \\
\iff \quad & C\|x\|\epsilon^{s-1} + 2C\|A^{-1}\|(s-1)\epsilon^(s-2) = 0 \\
\iff \quad & C\|x\|\epsilon^{s-1} = -2C\|A^{-1}\|(s-1)\epsilon^(s-2) \\
\iff \quad & \frac{\epsilon^{s-1}}{\epsilon^{s-2}} = -\frac{2C\|A^{-1}\|(s-1)}{C\|x\|} \\
\iff \quad & \epsilon = \frac{2\|A^{-1}\|(1-s)}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

Assim o ponto de mínimo da função $(0,+\infty) \ni \epsilon \mapsto C\|x\|\frac{\epsilon^s}{s} + 2C\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1} \in \mathbb{R}$ é $\epsilon_0 = \frac{2\|A^{-1}\|(1-s)}{\|x\|}$

e o valor mínimo desta aplicação é

$$
\begin{aligned}
C\|x\|\frac{\epsilon_0^s}{s}+2C\|A^{-1}x\|\epsilon_0^{s-1} &= \frac{C\|x\|}{s}\left(\frac{2\|A^{-1}\|(1-s)}{\|x\|}\right)^s+2C\|A^{-1}x\|\left(\frac{2\|A^{-1}\|(1-s)}{\|x\|}\right)^{s-1}\\
&= \frac{C}{s}\|x\|^{1-s}2^s\|A^{-1}\|^s(1-s)^s+2^sC\|A^{-1}x\|^s\|x\|^{1-s}(1-s)^{s-1}\\
&= \left(\frac{C}{s}[2(1-s)]^s+2C[2(1-s)]^{s-1}\right)\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s.
\end{aligned}
$$

Desta forma

$$
\|\Gamma(s)A^{-s}x\| \leq \left(\frac{C}{s}[2(1-s)]^s+2C[2(1-s)]^{s-1}\right)\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s,
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\|A^{-s}x\| &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{C}{s}[2(1-s)]^s+2C[2(1-s)]^{s-1}\right)\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{C}{s}\frac{[2(1-s)]^s}{1-s}+\frac{2C[2(1-s)]^{s-1}}{s}\right)\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{2C}{s}[2(1-s)]^{s-1}+\frac{2C}{s}2C[2(1-s)]^{s-1}\right)\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s\\
&= \frac{4C}{\Gamma(s)s}[2(1-s)]^{s-1}\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s\\
&= \frac{4C}{\Gamma(s+1)}[2(1-s)]^{s-1}\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s.
\end{aligned}
$$

Note que existe uma constante $K$ tal que

$$
\frac{4C}{\Gamma(s+1)}[2(1-s)]^{s-1} \leq K
$$

para todo $s \in (0,1)$. De fato, basta notar que a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$
F(s) = \begin{cases} \frac{4C}{\Gamma(s+1)}[2(1-s)]^{s-1}, & \text{se } s \neq 1\\ 4C, & \text{se } s = 1\end{cases}
$$

é contínua, já que

$$
\lim_{s\to 1-}[2(1-s)]^{s-1} = \lim_{s\to 1-} e^{\ln([2(1-s)]^{s-1})} = \lim_{s\to 1-} e^{(s-1)\ln(2(1-s))} = 1.
$$

Assim,

$$\|A^{-s}x\| \leq K\|x\|^{1-s}\|A^{-1}x\|^s$$

para quaisquer $x \in X$ e $s \in (0,1)$. Portanto, dado $x \in D(A)$ e $s \in (0,1)$, temos então que

$$\|A^s x\| = \|A^{-(1-s)}(Ax)\| \leq K\|Ax\|^{1-(1-s)}\|A^{-1}(Ax)\|^{1-s} = K\|Ax\|^s\|x\|^{1-s}$$

como queríamos provar.

Além disso, dados $s \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ e $x \in X$, temos que

$$\|A^{-s}x\| \leq \frac{C\|x\|\epsilon^s}{\Gamma(s+1)} + \frac{2C}{\Gamma(s)}\|A^{-1}x\|\epsilon^{s-1}.$$

Então dados $w \in (0,1)$, $\delta > 0$ e $y \in D(A)$, considerando na estimativa acima $\epsilon = \delta^{\frac{1}{1-w}}$, $x = Ay$ e $s = 1-w$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|A^w y\| = \|A^{-(1-w)}Ay\| &\leq \frac{C\|Ay\|\delta}{\Gamma(2-w)} + \frac{2C}{\Gamma(1-w)}\|A^{-1}Ay\|\delta^{-\frac{w}{1-w}} \\
&\leq C'\left(\delta\|Ay\| + \delta^{-\frac{w}{1-w}}\|y\|\right),
\end{aligned}$$

já que $\inf\{\Gamma(s) : s \in (0,+\infty)\} > 0$. De onde segue a segunda parte do teorema. □

**Observação 2.2.15.** *Sabemos agora que existe uma constante $C > 0$, tal que $\|e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ce^{-\delta t}$, $\|Ae^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ct^{-1}e^{-\delta t}$ para todo $t > 0$, e tal que $\|A^s x\| \leq C\|Ax\|^s\|x\|^{1-s}$ para quaisquer $x \in D(A)$ e $s \in [0,1]$. Assim, segue que*

$$\begin{aligned}
\|A^s e^{-At}x\| &\leq C\|Ae^{-At}x\|^s\|e^{-At}x\|^{1-s} \\
&\leq C\|Ae^{-At}\|^s_{\mathscr{L}(X)}\|x\|^s\|e^{-At}\|^{1-s}\|x\|^{1-s} \\
&\leq C\left(Ct^{-1}e^{-\delta t}\right)^s\left(Ce^{-\delta t}\right)^{1-s}\|x\| \\
&= CC^s t^{-s}e^{-s\delta t}C^{1-s}e^{-(1-s)\delta t}\|x\| \\
&= C^2 t^{-s}e^{-\delta t}\|x\|
\end{aligned}$$

*para quaisquer $s \in [0,1]$, $t > 0$ e $x \in X$.*

**Teorema 2.2.16.** *Seja $A$ um operador setorial tal que $Re(\sigma(A)) > \delta > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C_k$ tal que*

$$\|A^s e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_k t^{-s}e^{-\delta t}$$

*para quaisquer* $t > 0$ *e* $s \in [0, k]$.

*Se* $0 < s < 1$ *e* $x \in D(A^s)$, *então*

$$\|(e^{-At} - 1)x\| \leq \frac{1}{s} C_1 t^s \|A^s x\|.$$

*Demonstração.* A Observação 2.2.15 mostra que existe uma constante $C_1$ tal que

$$\|A^s e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_1 t^{-s} e^{-\delta t}$$

para todo $t > 0$ e $s \in [0, k]$. Assim dado quaisquer $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, k]$

$$\begin{aligned} \|A^s e^{-At}\|_{\mathscr{L}(X)} &= \left\| \left( A^{\frac{s}{k}} e^{-A\frac{t}{k}} \right)^k \right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \left\| A^{\frac{s}{k}} e^{-A\frac{t}{k}} \right\|_{\mathscr{L}(X)}^k \\ &\leq \left[ C_1 \left( \frac{t}{k} \right)^{-\frac{s}{k}} e^{-\delta \frac{t}{k}} \right]^k = C_1^k k^s t^{-s} e^{-\delta t} \leq C_1^k k^k t^{-s} e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Por fim, dado $0 < s < 1$ e $x \in D(A^s)$, temos que

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = -Ae^{-At}x = -A^{1-s}A^s e^{-At}x = -A^{1-s}e^{-At}A^s x$$

para todo $t > 0$. Logo,

$$-\int_0^t A^{1-s} e^{-Aw} A^s x \, dw = e^{-At}x - \lim_{w \to 0+} e^{-Aw}x = e^{-At}x - x = (e^{-At} - I)x.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|(e^{-At} - I)x\| &= \left\| \int_0^t A^{1-s} e^{-Aw} A^s x \, dw \right\| \leq \int_0^t \|A^{1-s} e^{-Aw}\|_{\mathscr{L}(x)} \|A^s x\| \, dw \\ &\leq \left( \int_0^t C_1 w^{-(1-s)} e^{-\delta w} \, dw \right) \|A^s x\| \leq C_1 \left( \int_0^t w^{-(1-s)} \, dw \right) \|A^s x\| \\ &\leq C_1 \left( \frac{w^s}{s} \bigg|_0^t \right) \|A^s x\| = \frac{C_1}{s} t^s \|A^s x\|. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.2.17.** *Seja* $A$ *um operador setorial tal que* $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > 0$ *e* $B : D(B) \subset X \to X$ *um operador linear tal que para algum* $s \in [0, 1)$ *temos* $D(A^s) \subset D(B)$ *e* $BA^{-s} \in \mathscr{L}(X)$. *Então* $A + B$ *é setorial.*

*Demonstração.* Como $A$ é setorial e $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > 0$, existe um ângulo $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e uma constante $M$, tais que o setor $S_{0,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}\lambda| \geq \phi\}$ está contido em $\rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

para todo $\lambda \in S_{0,\phi}$. Temos então que

$$\begin{aligned}\|A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} &= \|[\lambda - (\lambda - A)](\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = \|\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq |\lambda|\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} + 1 \leq |\lambda|\frac{M}{|\lambda|} + 1 = M + 1.\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 2.2.14 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|Bx\| &= \|BA^{-s}A^s x\| \leq \|BA^{-s}\|\|A^s x\| \\ &\leq \|BA^{-s}\|C\left(\epsilon\|Ax\| + \epsilon^{-\frac{s}{1-s}}\|x\|\right) \\ &= \|BA^{-s}\|C\epsilon\|Ax\| + \|BA^{-s}\|C\epsilon^{-\frac{s}{1-s}}\|x\|\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in D(A)$ e $\epsilon > 0$. Tomando $\epsilon < [\|BA^{-s}\|C(M+1)]^{-1}$ na estimativa acima, segue do Teorema 2.1.5 que $A + B$ é setorial. $\square$

**Teorema 2.2.18.** *Sejam $A, B$ operadores setoriais em $X$ tais que $D(A) = D(B)$, $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > 0$, $\mathrm{Re}(\sigma(B)) > 0$ e $(A - B)A^{-s} : D(A^{1-s}) \to X$ é um operador linear limitado para algum $s \in [0, 1)$. Então $D(A^w) = D(B^w)$ e $A^w B^{-w}, B^w A^{-w} \in \mathscr{L}(X)$ para qualquer $w \in [0, 1]$.*

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.2.14 segue que

$$\begin{aligned}\|A^w(\lambda + A)^{-1}x\| &\leq \|A(\lambda + A)^{-1}x\|^w \|(\lambda + A)^{-1}x\|^{1-w} \\ &\leq \left(\|A(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|\right)^w \left(\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|\right)^{1-w} \\ &\leq [(M+1)\|x\|]^w \left(\frac{M}{|\lambda|}\|x\|\right)^{1-w} \\ &\leq (M+1)|\lambda|^{w-1}\|x\|\end{aligned}$$

para quaisquer $w \in [0, 1]$, $x \in X$ e $\lambda > 0$. Logo para todo $\lambda > 0$, temos $A^w(\lambda + A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ e

$$\|A^w(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq (M+1)|\lambda|^{w-1}.$$

Analogamente, temos que $B^w(\lambda+B)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ e existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|B^w(\lambda+B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq (M+1)|\lambda|^{w-1}$$

para todo $\lambda > 0$. Além disso, dado $\lambda > 0$ temos que

$$\begin{aligned}(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1} &= (\lambda+A)^{-1}[(\lambda+B)-(\lambda+A)](\lambda+B)^{-1} \\ &= (\lambda+A)^{-1}-(\lambda+B)^{-1}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}[I+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}]A^s(\lambda+B)^{-1} &= A^s(\lambda+B)^{-1}+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)(\lambda+B)^{-1} \\ &= A^s(\lambda+B)^{-1}+A^s(\lambda+A)^{-1}-A^s(\lambda+B)^{-1} \\ &= A^s(\lambda+A)^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\|A^s(\lambda+A)^{-1}\| \leq (M+1)|\lambda|^{s-1}$, existe $R > 0$ tal que

$$\|A^s(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|(B-A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)} < \frac{1}{2}$$

para todo $\lambda \geq R$. Então, para $\lambda \geq R$ temos que $[I+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}]$ é bijetivo, logo

$$A^s(\lambda+B)^{-1} = [I+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}]^{-1}A^s(\lambda+A)^{-1}.$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}\|[I+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}]^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} &\leq \big(1-\|A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)}\big)^{-1} \\ &\leq \big(1-\|A^s(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|(B-A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)}\big)^{-1} \\ &\leq \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.\end{aligned}$$

Dessa forma para $\lambda \geq R$ temos que

$$\begin{aligned}\|A^s(\lambda+B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} &\leq \|[I+A^s(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-s}]^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\|A^s(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\leq 2(M+1)|\lambda|^{s-1}.\end{aligned}$$

Dado $w \in (0,1)$, da identidade (2.20) segue que

$$\begin{aligned} A^{-w} - B^{-w} &= \frac{\sin(\pi w)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-w}[(\lambda + A)^{-1} - (\lambda + B)^{-1}]\, d\lambda \\ &= \frac{\sin(\pi w)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-w}(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}\, d\lambda. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{+\infty} \lambda^{-w} A^w (\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}\, d\lambda \right\|_{\mathscr{L}(X)} \\ \leq &\left( \int_0^R + \int_R^{+\infty} \right) \|\lambda^{-w} A^w (\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\, d\lambda \\ = &\int_0^R \|\lambda^{-w} A^{w-1} A(\lambda + A)^{-1}(B - A)B^{-1}B(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\, d\lambda \\ + &\int_R^{+\infty} \|\lambda^{-w} A^w (\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-s}A^s(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\, d\lambda \\ \leq &\int_0^R \lambda^{-w} \|A^{w-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \|A(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \|(B - A)B^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \|B(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\, d\lambda \\ + &\int_R^{+\infty} \lambda^{-w} \|A^w(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \|(B - A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)} \|A^s(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\, d\lambda \\ \leq &\int_0^R \lambda^{-w} \|A^{w-1}\|_{\mathscr{L}(X)} (M+1) \|(B - A)B^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} (M+1)\, d\lambda \\ + &\int_R^{+\infty} \lambda^{-w} (M+1)\lambda^{w-1} \|(B - A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)} 2(M+1)\lambda^{w-1}\, d\lambda \\ = &\|A^{w-1}\|_{\mathscr{L}(X)} (M+1)^2 \|(B - A)B^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \int_0^R \lambda^{-w}\, d\lambda \\ + &2(M+1)^2 \|(B - A)A^{-s}\|_{\mathscr{L}(X)} \int_R^{+\infty} \lambda^{w-2}\, d\lambda < \infty. \end{aligned}$$

Logo a integral

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-w} A^w (\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}\, d\lambda$$

é convergente. Como $A^w$ é um operador fechado e dado $x \in X$ as integrais

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-w}(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-w} A^w (\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda$$

são convergentes, segue que

$$\left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-w}(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda\right) \in D(A^w) \quad \text{e}$$

$$A^w \left(\int_0^{+\infty} \lambda^{-w}(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda\right) = \int_0^{+\infty} \lambda^{-w} A^w(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda.$$

Portanto, dado $x \in X$

$$\begin{aligned} B^{-w}x &= A^{-w}x - (A^{-w} - B^{-w})x \\ &= \left(A^{-w}x - \frac{\sin(\pi w)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-w}(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda\right) \in D(A^w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^w B^{-w} &= A^w[A^{-w} - (A^{-w} - B^{-w})] \\ &= \left(I - \frac{\sin(\pi w)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-w} A^w(\lambda + A)^{-1}(B - A)(\lambda + B)^{-1}x\, d\lambda\right) \in \mathscr{L}(X). \end{aligned}$$

Em resumo, concluímos que $D(B^w) \subset D(A^w)$ e $A^w B^{-w} \in \mathscr{L}(X)$ para qualquer $w \in (0, 1)$. Obtemos em particular que

$$(B - A)B^{-s} = -[(A - B)A^{-s}][A^s B^{-s}] \in \mathscr{L}(X).$$

Portanto, pela parte do teorema já provada, invertendo os papeis de $A$ e $B$ segue que $D(A^w) \subset D(B^w)$ e $B^w A^{-w} \in \mathscr{L}(X)$ para qualquer $w \in (0, 1)$, o que prova o teorema para $w \in (0, 1)$. O caso $w = 0$ é imediato. Para o caso $w = 1$ basta notar que

$$BA^{-1} = I - (A - B)A^{-1} = I - (A - B)A^{-s}A^s A^{-1} = I - [(A - B)A^{-s}][A^{s-1}] \in \mathscr{L}(X),$$

e que $BA^{-1} : X \to X$ é bijetivo, com inverso $AB^{-1} : X \to X$. Logo pelo Teorema da aplicação aberta $AB^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. □

**Definição 2.2.19.** *Seja $A$ um operador setorial em um espaço de Banach $X$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que* $\mathrm{Re}\sigma(A_1) > 0$ *onde $A_1 = aI + A$. Para cada $s \geq 0$, definimos $X^s := D(A_1^s)$ e munimos o espaço $X^s$ com a norma $\|\cdot\|_s$ definida por $\|x\|_s = \|A_1^s x\|_X$. Chamamos $X^s$ de espaço de potência fracionária associado ao operador $A_1$.*

**Observação 2.2.20.** *$X^s$ é invariante sobre a escolha de $a \in \mathbb{R}$. De fato, seja $A$ um operador* *setorial e* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $\mathrm{Re}\sigma(A_1) > 0$ *e* $\mathrm{Re}\sigma(A_2) > 0$*, onde* $A_1 = a_1 I + A$ *e* $A_1 = a_2 I + A$*. Como* $(A_1 - A_2)A^0 = (a_1 - a_2)I$*, segue do Teorema 2.2.18 que* $D(A_1^s) = D(A_2^s)$ *para qualquer* $s \in [0,1]$*. Suponhamos que para algum* $k \in \mathbb{N}$ *tenhamos* $D(A_1^s) = D(A_2^s)$ *para qualquer* $s \in [0,k]$*. Então dado* $s \in [k, k+1]$ *e* $x \in D(A_1^s) = R(A_1^{-s})$*, existe* $y \in X$ *tal que* $x = A_1^{-s}y = A_1^{-1}(A_1^{1-s}y)$*, logo* $A_1 x = A_1^{1-s}y \in R(A_1^{1-s}) = D(A_1^{s-1}) = D(A_2^{s-1})$*. Além disso,*

$$A_2 x = A_1 x + (a_2 - a_1)x \in D(A_2^{s-1})$$

*pois* $x \in D(A_1^s) \subset D(A_1^{s-1}) = D(A_2^{s-1})$*. Então existe* $z \in X$ *tal que* $A_2 x = A_2^{1-s}z$*, logo* $x = A_2^{-1}A_2^{1-s}z = A_2^{-s}z$*. Portanto, temos que* $x \in D(A_2^s)$*. Provamos assim que* $D(A_1^s) \subset D(A_2^s)$*, e analogamente mostramos que* $D(A_2^s) = D(A_1^s)$*. Portanto segue por indução que* $D(A_1^s) = D(A_2^s)$ *para qualquer* $s \geq 0$*.*

**Observação 2.2.21.** *A topologia de* $X^s$ *é independente da escolha de* $a \in \mathbb{R}$*, isto é, existem constantes* $C_1$ *e* $C_2$ *tais que* $\|A_1^s x\| \leq C_1 \|A_2^s x\|$ *e* $\|A_2^s x\| \leq C_2 \|A_1^s x\|$ *para todo* $x \in X^s$*. De fato, dado qualquer* $s \geq 0$*, temos que*

$$\begin{aligned} A_1 A_2^{-s} &= (a_1 I + A)A_2^{-s} = [(a_1 - a_2)I + a_2 I + A]A_2^{-s} \\ &= [(a_1 - a_2)I + A_2]A_2^{-s} = (a_1 - a_2)A_2^{-s} + A_2 A_2^{-s} \\ &= A_2^{-s}(a_1 - a_2)I + A_2^{-s}A_2 = A_2^{-s}[(a_1 - a_2)I + A_2] \\ &= A_2^{-s}A_1. \end{aligned}$$

*Assim segue imediatamente, por indução sobre* $k$*, que*

$$A_1^k A_2^{-s} = A_2^{-s} A_1^k$$

*para quaisquer* $k \in \mathbb{N}$ *e* $s \geq 0$*. Logo, dado* $s \geq 0$*, seja* $k = \max\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : j \leq s\}$*, como* $(s-k) \in [0,1]$*, temos pelo Teorema 2.2.18 que*

$$A_1^s A_2^{-s} = A_1^{s-k}(A_1^k A_2^{-(s-k)})A_2^{-k} = A_1^{s-k}A_2^{-(s-k)}A_1^k A_2^{-k} = (A_1^{s-k}A_2^{-(s-k)})(A_1 A_2^{-1})^k \in \mathscr{L}(X)$$

*Dessa forma, dado* $s \geq 0$

$$\|A_1^s x\| \leq \|A_1^s A_2^{-s} A_2^s x\| \leq \|A_1^s A_2^{-s}\| \|A_2^s x\|$$

*para todo $x \in X^s$. Analogamente, temos que $\|A_2^s x\| \leq \|A_2^s A_1^{-s}\| \|A_1^s x\|$ para todo $x \in X^s$.*

**Teorema 2.2.22.** *Seja $A$ um operador setorial em um espaço de Banach $X$, então $X^s$ munido com a norma $\|\cdot\|_s$ é um espaço de Banach para qualquer $s \geq 0$.*
*Se $s \geq w \geq 0$, então $X^s$ é um subespaço denso de $X^w$, e a aplicação inclusão de $X^s$ em $X^w$ é contínua. Além disso, se $A$ tem resolvente compacto a aplicação inclusão de $X^s$ em $X^w$ é compacta. Por fim, se $A_1, A_2$ são operadores setoriais em $X$ tal que $D(A_1) = D(A_2)$, $Re\sigma(A_j) > 0$ com $j = 1, 2$ e $(A_1 - A_2)A_1^{-s} : D(A^{1-s}) \to X$ é limitado para algum $s \in [0, 1)$, então denotando por $X_j^w$ o espaço de potência fracionária associado ao operador $A_j$ com $j = 1, 2$, temos que $X_1^w = X_2^w$ e as normas nesses espaços são equivalentes para qualquer $w \in [0, 1]$.*

*Demonstração.* Como $A^s : X^s \to X$ é uma isometria sobrejetora, a completude de $X^s$ segue imediatamente da completude de $X$. Portanto $X^s$ é um espaço de Banach.
Seja $s \geq w \geq 0$ e $J : X^s \to X^w$ a inclusão, temos que

$$J = A^{-w} A^w A^{-s} A^s = A^{-w} A^{w-s} A^s$$

Como $A^s : X^s \to X$ e $A^{-w} : X \to X^w$ são isometrias e $A^{w-s} \in \mathscr{L}(X)$ segue que $J$ é contínua. Se $A$ tem resolvente compacto, então $A^{w-s}$ é um operador compacto, logo segue que $J = A^{-w} A^{w-s} A^s$ é um operador compacto.
As últimas afirmações seguem diretamente do Teorema 2.2.18. $\square$

# Capítulo 3

# Análise de Fourier e Teoria das Distribuições

Neste capítulo são apresentados alguns elementos da análise de Fourier e da teoria das distribuições. Sobre a teoria das distribuições só é desenvolvido o suficiente para introduzir as distribuições temperadas, para mais detalhes sobre o tema consulte [5].

Usaremos neste capítulo as seguintes notações: Um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma n-upla ordenada de inteiros não negativos $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Seu comprimento ou tamanho $|\alpha|$ é definido por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Observe que dados multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ temos que $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$. Dados multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, dizemos que $\beta \leq \alpha$, se $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ e definimos

$$\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n! \quad \text{e} \quad \binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ definimos também

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Denotamos por $\partial^\alpha$ a derivada de ordem $|\alpha|$

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{x_n^{\alpha_n}}.$$

Por fim dado $E \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : E \to \mathbb{C}$, denotamos por $\operatorname{supp}(f)$ o suporte de $f$ definido por

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n}.$$

## 3.1 Espaços vetoriais topológicos

Por vezes em alguns espaços vetoriais é necessário considerar uma topologia que não é gerada por uma norma. Entretanto é muito interessante quando tal topologia se comporta bem com a estrutura algébrica do espaço vetorial.

**Definição 3.1.1.** *Um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial $X$ sobre $\mathbb{K}$, munido de uma topologia Hausdorff de modo que as aplicações soma $s : X \times X \to X$ e multiplicação de escalar por vetor $m : \mathbb{K} \times X \to X$ definidas por*

$$s(x, y) = x + y \quad e \quad m(\lambda, x) = \lambda x$$

*são contínuas.*

**Definição 3.1.2.** *Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, uma seminorma em $X$ é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

**(i)** $p(x) \geq 0$

**(ii)** $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

**(iii)** $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

*para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Assim como uma norma gera uma topologia em um espaço vetorial normado através das bolas que tal norma define, a definição abaixo nos mostra um processo para obter uma topologia para um espaço vetorial através de uma família de seminormas.

**Definição 3.1.3.** *Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $A$ um conjunto de índices e $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de seminormas em $X$. Dizemos que a família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é separante se $p_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in A$ somente quando $x = 0$.*
*Dados $x \in X$, $\alpha \in A$ e $r > 0$ seja $B_\alpha(x, r) := \{y \in X; p_\alpha(x - y) < r\}$. O conjunto,*

$$\left\{ U \subset X; \forall x \in U \text{ existem } N \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in A \text{ para } j = 1, ..., N \text{ e } r > 0 \text{ tais que } x \in \bigcap_{j=1}^{N} B_{\alpha_j}(x, r) \subset U \right\}$$

*é uma topologia em $X$, a qual chamamos de topologia gerada pela família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

Seja $X$ um espaço vetorial munido de uma família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$, sempre que nada for dito estaremos considerando em $X$ a topologia gerada pela família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$.
Segue diretamente da definição anterior que $B_\alpha(x,r)$ é um aberto em $X$ para quaisquer $\alpha \in A$, $x \in X$ e $r > 0$ e que

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{N} B_{\alpha_j}(x,r); x \in X, r > 0, N \in \mathbb{N} \text{ e } \alpha_j \in A \text{ para } j = 1, ..., N \right\}$$

é uma base para a topologia de $X$.

**Teorema 3.1.4.** *Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de uma família separante de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Então*

**(a)** *Um net $\langle x_\beta\rangle_{\beta\in B}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, $p_\alpha(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$ para todo $\alpha \in A$.*

**(b)** *$X$ é um espaço vetorial topológico.*

*Demonstração.* **(a)** Suponhamos que o net $\langle x_\beta\rangle_{\beta\in B}$ converge para $x \in X$. Então, fixado $\alpha \in A$ e dado $\epsilon > 0$, como $B_p(x,\epsilon)$ é uma vizinhança de $x$, existe $\beta_0 \in A$ tal que $x_\beta \in B_p(x,\epsilon)$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$, logo $p(x_\beta - x) < \epsilon$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$. Portanto, $p_\alpha(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$.
Reciprocamente, suponhamos que $p_\alpha(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$ para todo $\alpha \in A$. Dada uma vizinhança $U$ de $x$, da definição da topologia de $X$, existem $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in A$ para $j = 1, ..., N$ e $r > 0$ tais que $x \in \bigcap_{j=1}^{N} B_{\alpha_j}(x,r) \subset U$. Da hipótese, para cada $j = 1, ..., N$ existe $\beta_j$ tal que $p_{\alpha_j}(x_\beta - x) < r$ para todo $\beta \gtrsim \beta_j$. Tomando $\beta_0 \in B$ tal que $\beta_0 \gtrsim \beta_j$ para todo $j = 1, ..., N$, obtemos que $p_{\alpha_j}(x_\beta - x) < r$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$ e todo $j = 1, ..., N$, logo $x_\beta \in \bigcap_{j=1}^{N} B_{\alpha_j}(x,r) \subset U$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$ e portanto $x_\beta \to x$.
**(b)** Seja $\langle (x_\beta, y_\beta)\rangle_{\beta\in B}$ um net em $X \times X$ que converge para $(x,y) \in X \times X$, então $x_\beta \to x$ em $X$ e $y_\beta \to y$ em $X$, logo por (a) dado $\alpha \in A$ temos que $p_\alpha(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$ e $p_\alpha(y_\beta - y) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$. Como

$$p_\alpha(s(x_\beta, y_\beta) - s(x,y)) = p_\alpha(x_\beta + y_\beta - (x+y)) \leq p_\alpha(x_\beta - x) + p_\alpha(y_\beta - y),$$

segue que $p_\alpha(s(x_\beta, y_\beta) - s(x,y)) \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$. Novamente por (a), $s(x_\beta, y_\beta) \to s(x,y)$ em $X$ e portanto $s$ é contínua.
Analogamente, usando a desigualdade

$$p_\alpha(\lambda_\beta x_\beta - \lambda x) = p_\alpha(\lambda_\beta(x_\beta - x) + (\lambda_\beta - \lambda)x) \leq |\lambda_\beta| p_\alpha(x_\beta - x) + |\lambda_\beta - \lambda| p_\alpha(x)$$

e o item **(a)**, obtemos que a aplicação produto de escalar por vetor é contínua.

□

**Teorema 3.1.5.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ munidos pelas famílias de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$, respectivamente. Se $T : X \to Y$ é um operador linear, então $T$ é contínuo se, e somente se, para todo $\beta \in B$ existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in A$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$q_\beta(Tx) \leq C \sum_{j=1}^{N} p_{\alpha_j}(x)$$

*para qualquer $x \in X$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $T$ é contínuo, então dado $\beta \in B$, como o conjunto $B^Y_\beta(0,1) = \{y \in Y : q_\beta(y) < 1\}$ é um aberto que contém a origem, segue que $T^{-1}\left(B^Y_\beta(0,1)\right)$ é um aberto que contém a origem. Consequentemente existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in A$ e $r > 0$ tais que,

$$\bigcap_{j=1}^{n} B^X_{\alpha_j}(0,r) \subset T^{-1}\left(B^Y_\beta(0,1)\right).$$

Dado $x \in X$, temos dois casos: **(i)** $p_{\alpha_j}(x) \neq 0$ para algum $j \in \{1, 2, ..., N\}$. Nesse caso, como

$$p_{\alpha_j}\left(\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x)}\, x\right) = \frac{r}{2}\frac{p_{\alpha_j}(x)}{\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x)\}} \leq \frac{r}{2} < r$$

para todo $j \in \{1, 2, ..., N\}$, temos que,

$$\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x)}\, x \in \bigcap_{j=1}^{n} B^X_{\alpha_j}(0,r) \subset T^{-1}\left(B^Y_\beta(0,1)\right).$$

Logo

$$q_\beta\left(T\left(\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x)}\, x\right)\right) < 1,$$

de onde segue que,

$$q_\beta(Tx) < \frac{2}{r}\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x).$$

**(ii)** $p_{\alpha_j}(x) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., N\}$. Nesse caso dado $t > 0$ temos que $p_{\alpha_j}(tx) = tp_{\alpha_j}(x) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., N\}$, logo

$$tx \in \bigcap_{j=1}^{n} B^X_{\alpha_j}(0,r) \subset T^{-1}\left(B^Y_\beta(0,1)\right)$$

e então $tq_\beta(Tx) = q_\beta(T(tx)) < 1$. Temos assim que,

$$q_\beta(Tx) < \frac{1}{t}$$

para todo $t > 0$ e portanto $q_\beta(Tx) = 0$. Com isso,

$$q_\beta(Tx) = 0 \leq 0 = \frac{2}{r}\sum_{k=1}^{N} p_{\alpha_k}(x).$$

□

Note que quando $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado a topologia em $X$ gerada pela família de seminormas cujo o único elemento é $\|\cdot\|_X$ é exatamente a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_X$, dessa forma um caso particular do Teorema 3.1.5 é o seguinte:

**Corolário 3.1.6.** *Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de uma família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Se $f : X \to \mathbb{K}$ é um funcional linear, então $f$ é contínuo se, e somente se, existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in A$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$|f(x)| \leq C\sum_{j=1}^{N} p_{\alpha_j}(x)$$

*para qualquer $x \in X$.*

**Exemplo 3.1.7** (**O Espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$** )**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $A = \{K \subset \Omega; K \text{ é compacto}\}$ e*

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } f|_K \in L^1(K) \text{ para qualquer } K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

*A família de seminormas $\{P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),K}\}_{K\in A}$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definidas por*

$$P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),K}(f) = \int_K |f(x)|dx$$

*é separante. Portanto $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ munido com tais seminormas é um espaço vetorial topológico.*

**Exemplo 3.1.8** (**O Espaço $C^\infty(\Omega)$** )**.** *Ainda com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e o mesmo $A$ do Exemplo 3.1.7, seja*

$$C^\infty(\Omega) := \{\phi : \Omega \to \mathbb{C}; \phi \text{ é de classe } C^k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

*A família de seminormas* $\{P_{C^\infty(\Omega),m,K}\}_{(m,K)\in\mathbb{Z}_+\times A}$ *definidas por*

$$P_{C^\infty(\Omega),m,K}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \phi|$$

*é separante. Então* $C^\infty(\Omega)$ *munido com tais seminormas é um espaço vetorial topológico.*

**Exemplo 3.1.9 (O Espaço $C_c^\infty(K)$ ).** *Seja* $E \subset \mathbb{R}^n$ *definimos*

$$C_c^\infty(E) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(\phi) \text{ é um compacto contido em } E\}$$

*Dado um compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$*, a família de seminormas* $\left\{P_{C_c^\infty(K),m}\right\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ *em* $C_c^\infty(K)$ *definidas por*

$$P_{C_c^\infty(K),m}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi|$$

*é separante. Portanto* $C_c^\infty(K)$ *munido com tais seminormas é um espaço vetorial topológico.*

**Exemplo 3.1.10 (O Espaço de Schwartz $\mathscr{S}$ ).** *Consideremos o espaço de Schwartz*

$$\mathscr{S} := \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi(x)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+ \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

*munido da família de seminormas* $\{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}$ *definidas por*

$$\|\phi\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

*Como a família de seminormas* $\{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}$ *é separante, segue que* $\mathscr{S}$ *é um espaço vetorial topológico.*

**Proposição 3.1.11.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto,* $f$ *e* $g$ *funções em* $C^\infty(\Omega)$*. Então*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial^\beta f\right) \left(\partial^{\alpha-\beta} g\right)$$

*para todo multi-índice* $\alpha \in \mathbb{Z}_+$*.*

*Demonstração.* Suponhamos que $n = 1$. Então o resultado se reduz a demonstrar que

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \tag{3.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. É evidente que (3.1) é válida para $k = 1$. Seja $m \in \mathbb{N}$ e suponhamos que (3.1) é válida para $k = m$. Temos então que

$$\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= \left[(fg)^{(m)}\right]' = \left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}g^{(m-j)}\right]' = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left[f^{(j)}g^{(m-j)}\right]' \\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left[f^{(j+1)}g^{(m-j)} + f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}f^{(j+1)}g^{(m-j)} + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}g^{(m-j+1)} \\
&= f^{(m+1)} + \left[\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}f^{(j+1)}g^{(m-j)}\right] + \left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right] + g^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)} + \left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j-1}f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right] + \left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right] + g^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)} + \left(\sum_{j=1}^{m}\left[\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j}\right]f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right) + g^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)} + \left(\sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}f^{(j)}g^{(m-j+1)}\right) + g^{(m+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}f^{(j)}g^{(m+1-j)}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue por indução que (3.1) é válida para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $n$ qualquer o resultado segue do caso $n = 1$. $\square$

**Proposição 3.1.12.** *Consideremos $\mathscr{S}$ munido com a topologia gerada pela família de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\right\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}$ definidas no exemplo 3.1.10. Então:*

**(i)** *Dados $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ seja*

$$P^1_{(\alpha,\beta)}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)\right|.$$

*Então $\mathscr{S} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : P^1_{(\alpha,\beta)}(\phi) < \infty \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Além disso, a topologia de $\mathscr{S}$ também é gerada pela família de seminormas $\left\{P^1_{(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^n\times\mathbb{Z}_+^n}$.*

**(ii)** *Dados $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ seja*

$$P^2_{(\alpha,\beta)}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\alpha\left[x^\beta\phi(x)\right]\right|.$$

*Então* $\mathscr{S} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : P^2_{(\alpha,\beta)}(\phi) < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+\}$. *Além disso, a topologia de* $\mathscr{S}$ *também é gerada pela família de seminormas* $\left\{P^2_{(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n_+\times\mathbb{Z}^n_+}$.

*Demonstração.* **(i)** Denotemos por $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ o espaço de Shwartz munido com a família de seminormas $\left\{P^1_{(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n_+\times\mathbb{Z}^n_+}$ e $\left\{P^2_{(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n_+\times\mathbb{Z}^n_+}$, respectivamente. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ temos que,

$$P^1_{(\alpha,\beta)}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|}\partial^\beta|\phi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^{|\alpha|}\right)\partial^\beta|\phi(x)| = \|\phi\|_{(|\alpha|,\beta)}$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Portanto, a pelo Teorema 3.1.5 a aplicação identidade $I : \mathscr{S} \to \mathscr{S}_1$ é contínua. Por outro lado, dado $N \in \mathbb{Z}_+$, como $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^N |x_j|^N \in \mathbb{R}$ é estritamente positiva na esfera unitária, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^N |x_j|^N \geq \delta$$

sempre que $|x| = 1$. Assim dado $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{|x_j|}{|x|}\right)^N \geq \delta,$$

já que $||x|^{-1}x| = 1$. Então

$$\sum_{j=1}^N |x_j|^N \geq \delta|x|^N.$$

Logo

$$\begin{aligned}
(1 + |x|)^N &\leq (2\max\{1, |x|\})^N = 2^N(\max\{1, |x|\})^N \leq 2^N(1 + |x|^N) \\
&\leq 2^N + 2^N|x|^N \leq 2^N + 2^N\delta^{-1}\sum_{j=1}^N |x_j|^N \\
&\leq (2^N + 2^N\delta^{-1})\left(1 + \sum_{j=1}^N |x^{Ne_j}|\right).
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_{(N,\alpha)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha\phi(x)| \\
&\leq (2^N+2^N\delta^{-1})\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left[\left(1+\sum_{j=1}^{N}|x^{Ne_j}|\right)|\partial^\alpha\phi(x)|\right] \\
&= (2^N+2^N\delta^{-1})\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(|x^0\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{j=1}^{N}|x^{Ne_j}||\partial^\alpha\phi(x)|\right) \\
&\leq (2^N+2^N\delta^{-1})\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^0\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{j=1}^{N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^{Ne_j}||\partial^\alpha\phi(x)|\right) \\
&= (2^N+2^N\delta^{-1})\left(P^1_{(0,\alpha)}(\phi)+\sum_{j=1}^{N}P^1_{(Ne_j,\alpha)}(\phi)\right)
\end{aligned}
$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Então pelo Teorema 3.1.5 segue que $I : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}$ é contínua.

**(ii)** Dados $\alpha, \beta \in \mathscr{S}$ e $\phi \in \mathscr{S}$ temos que

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha(x^\beta\phi)| &= \left|\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma(x^\beta)\partial^{\alpha-\gamma}\phi\right| = \left|\sum_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}\binom{\alpha}{\gamma}\frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}x^{\beta-\gamma}\partial^{\alpha-\gamma}\phi\right| \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}\binom{\alpha}{\gamma}\frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}|x^{\beta-\gamma}||\partial^{\alpha-\gamma}\phi| \leq \max_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}\left\{\binom{\alpha}{\gamma}\frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}\right\}\sum_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}|x^{\beta-\gamma}||\partial^{\alpha-\gamma}\phi|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
P^2_{(\alpha,\beta)}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha(x^\beta\phi)| \leq C\sum_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^{\beta-\gamma}||\partial^{\alpha-\gamma}\phi| = C\sum_{\substack{\gamma\leq\alpha\\ \gamma\leq\beta}}P^1_{(\beta-\gamma,\alpha-\gamma)}(\phi),
$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Portanto, $I : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ é contínua.

Por fim, consideremos a seguinte afirmação: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ existem $\alpha^j, \beta^j$ para $j = 1, 2, \ldots, N$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$
P^1_{(\alpha,\beta)}(\phi) \leq C\sum_{j=1}^{N}P^2_{(\alpha_j,\beta_j)}(\phi) \tag{3.2}
$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Se $|\beta| = 0$ então $\beta = 0$ e $P^1_{(\alpha,0)}(\phi) = P^2_{(0,\alpha)}(\phi)$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\phi \in \mathscr{S}$. Observe agora que dados quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ temos que

$$
\partial^\beta(x^\alpha\phi) = x^\alpha\partial^\beta\phi + + \sum_{0<\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma(x^\alpha)\partial^{\beta-\gamma}\phi = x^\alpha\partial^\beta\phi + \sum_{\substack{0<\gamma\leq\beta\\ \gamma\leq\alpha}}\binom{\beta}{\gamma}\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}x^{\alpha-\gamma}\partial^{\beta-\gamma}\phi.
$$

Logo
$$x^\alpha \partial^\beta \phi = \partial^\beta (x^\alpha \phi) - \sum_{\substack{0<\gamma\leq\beta \\ \gamma\leq\alpha}} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!} x^{\alpha-\gamma}\partial^{\beta-\gamma}\phi.$$

Portanto, a afirmação segue imediatamente por indução sobre $|\beta|$. Então $I : \mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_1$ é contínua e **(ii)** segue de **(i)**. $\square$

## 3.2 Convolução

**Definição 3.2.1.** *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis. A convolução de $f$ por $g$, denotada por $f * g$, é a função definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy$$

*para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a integral acima exista.*

**Observação 3.2.2.** *Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ são funções mensuráveis e $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f * g(x)$ existe então,*
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\, dz = g * f(x).$$

**Teorema 3.2.3** (Desigualdade de Young)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ onde $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g(x)$ existe para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.*

*Demonstração.* De fato, como $f(y)g(\cdot - y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(y)g(\cdot - y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = |f(y)|\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ e
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
o resultado segue da desigualdade de Minkowski para integrais (ver [2], página 194). $\square$

**Definição 3.2.4** (Translação)**.** *Dado $y \in \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definimos $\tau_y f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por*

$$\tau_y f(x) = f(x-y).$$

**Lema 3.2.5.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $\|\tau_y f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$.*

*Demonstração.* Com efeito, seja $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ como $g$ é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$|g(x-y) - g(x)| < \epsilon^{\frac{1}{p}} \left[ m \left( \operatorname{supp}(g) + \overline{B(0,1)} \right) \right]^{-\frac{1}{p}}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| \leq \delta$, onde $m$ representa a medida de Lebesgue. Assim dado $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| \leq \min\{\delta, 1\}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y g - g|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y) - g(x)|^p \, dx = \int_{\operatorname{supp}(g)+\overline{B(0,1)}} |g(x-y) - g(x)|^p \, dx \\ &\leq \int_{\operatorname{supp}(g)+\overline{B(0,1)}} \epsilon \left[ m\left( \operatorname{supp}(g) + \overline{B(0,1)} \right) \right]^{-1} = \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[y \to 0]{} 0$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver [2], página 217), existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$. Logo

$$\begin{aligned}\|\tau_y f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\tau_y (f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Como $\|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3}$ para $y$ suficientemente pequeno, o resultado está demonstrado. □

**Teorema 3.2.6.** *Sejam $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a = \int_{\mathbb{R}^n} \phi$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para cada $t > 0$, seja $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\phi_t(x) = t^{-n} \phi(t^{-1} x).$$

*Então $f * \phi_t \to af$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0+$.*

*Demonstração.* Note que para todo $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n} \phi(t^{-1} x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \, dy = a.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned}f * \phi_t(x) - af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \phi_t(y) \, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \phi_t(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \phi(t^{-1} y) t^{-n} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - tz) - f(x)] \phi(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{tz} f(x) - f(x)] \phi(z) \, dz.\end{aligned}$$

Segue então da desigualdade de Minkowski para integrais que

$$\|f * \phi_t(x) - af(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz}f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\phi(z)|\, dz.$$

Como para quaisquer $t > 0$ e $z \in \mathbb{R}^n$

$$\|\tau_{tz}f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\phi(z)| \leq (\|\tau_{tz}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})|\phi(z)| \leq 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\phi(z)|$$

e pelo lema 3.2.5 $\|\tau_{tz}f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\phi(z)| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, segue do Teorema da convergência dominada (ver [2], página 54) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz}f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\phi(z)|\, dz \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.$$

Portanto, $\|f * \phi_t(x) - af(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $t \to 0+$. □

**Proposição 3.2.7.** *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\partial^\alpha(f * \phi) = f * \partial^\alpha(\phi)$$

*para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.*

*Demonstração.* Com efeito, dado $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e $R > 0$ temos que,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}[f(y)\phi(x - y)]\right| = \left|f(y)\frac{\partial \phi(x - y)}{\partial x_j}\right| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|\right)|f(y)|\chi_K(y)$$

para quaisquer $x \in B(0, R)$ e $y \in \mathbb{R}^n$, onde $K = \overline{B(0, R)} - \operatorname{supp}(\phi)$ e $\chi_K$ representa a função característica. Como $|f|\chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ segue pelo Teorema da convergência dominada (ver [2], página 56) que a j-ésima derivada parcial de $f * \phi$ em $x$ existe e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \phi)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x - y)\, dy\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x - y) = f * \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(x)$$

para todo $x \in B(0, R)$. Como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \phi)(x) = f * \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O resultado segue imediatamente por indução sobre $|\alpha|$. □

**Proposição 3.2.8.** *Seja $1 \leq p < \infty$, temos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Pelo 3.2.6, temos que $g * \phi_t \to g$ quando $t \to 0+$, logo para $r > 0$ suficientemente pequeno temos que $\|g * \phi_r - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2}$. Pela Proposição 3.2.7 temos que $g * \phi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, além disso,

$$\operatorname{supp}(g * \phi_r) \subset \operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(\phi_r).$$

De fato, se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que $g * \phi_r(x) \neq 0$ então $g(y)\phi_r(x-y) \neq 0$ para algum $y \in \mathbb{R}^n$, logo $g(y) \neq 0$ e $\phi_r(x-y) \neq 0$ e portanto

$$x = y + (x-y) \in \{u \in \mathbb{R}^n : g(u) \neq 0\} + \{u \in \mathbb{R}^n : \phi_r(u) \neq 0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g * \phi_r) &= \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : g * \phi_r(u) \neq 0\}} \subset \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : g(u) \neq 0\} + \{u \in \mathbb{R}^n : \phi_r(u) \neq 0\}} \\ &\subset \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : g(u) \neq 0\}} + \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : \phi_r(u) \neq 0\}} = \operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(\phi_r).\end{aligned}$$

Como $\operatorname{supp}(g)$ e $\operatorname{supp}(\phi_r) = r \operatorname{supp}(\phi)$ são compactos segue que $\operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(\phi_r)$ é um compacto, logo $g * \phi_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f - g * \phi_r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - g * \phi_r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

## 3.3 A transformada de Fourier

**Definição 3.3.1.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (ou $\mathscr{F} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$) é a função definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx.$$

**Observação 3.3.2.** *Temos que*

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi \cdot x}|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

*Portanto,* $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

**Observação 3.3.3.** *Seja* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ *uma sequência convergindo para* $\xi$. *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$, *pela continuidade da aplicação* $\mathbb{R}^n \ni \eta \mapsto e^{-2\pi i \eta \cdot x} \in \mathbb{C}$ *temos que*

$$\lim_{j\to\infty} f(x)e^{-2\pi i \xi_j \cdot x} = f(x)e^{-2\pi i \xi \cdot x}.$$

*Além disso*

$$|f(x)e^{-2\pi i \xi_j \cdot x}| \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall j \in \mathbb{N},$$

*logo pelo Teorema da convergência dominada segue que*

$$\lim_{j\to\infty} \int f(x)e^{-2\pi i \xi_j \cdot x}\, dx = \int f(x)e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx,$$

*isto é,*

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{f}(\xi_j) = \widehat{f}(\xi).$$

*Portanto* $\widehat{f}$ *é contínua.*

**Teorema 3.3.4.** *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então:*

**(a)** $(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y}\widehat{f}(\xi)$ *e* $\tau_\eta(\widehat{f})(\xi) = (e^{2\pi i \eta \cdot x} f(x))^\wedge(\xi)$.

**(b)** *Se* $T$ *é uma transformada linear invertível sobre* $\mathbb{R}^n$ *e* $S = (T^*)^{-1}$ *então* $(f \circ T)^\wedge = |detT|^{-1}\widehat{f} \circ S$. *Em particular se* $T$ *é uma rotação, temos que* $(f \circ T)^\wedge = \widehat{f} \circ T$. *E se* $Tx = t^{-1}x$ *com* $t > 0$ *então* $(f \circ T)^\wedge(\xi) = t^n \widehat{f}(t\xi)$.

**(c)** $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

**(d)** *Se* $x^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leq k$ *então* $f \in C^k$ *e* $\partial^\alpha \widehat{f} = ((-2\pi i x)^\alpha f)^\wedge$.

**(e)** *Se* $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leq K$ *e* $\partial^\alpha f \in C_0$ *para* $|\alpha| \leq k-1$, *então* $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

**(f)** $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, *onde* $C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{\phi \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0\right\}$.

*Demonstração.* (a) De fato,

$$\begin{aligned}(\tau_y f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i \xi \cdot (z+y)}\, dz \\ &= e^{-2\pi i y \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i \xi \cdot z}\, dz = e^{-2\pi i y \cdot \xi}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Analogamente mostramos a outra igualdade.

(b) Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(f\circ T)^{\wedge}(\xi) &= \int f(Tx)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = |detT|^{-1}\int f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot T^{-1}x}\,dx\\
&= |detT|^{-1}\int f(x)e^{-2\pi i S\xi\cdot x}\,dx = |detT|^{-1}\widehat{f}(S\xi) = |detT|^{-1}\widehat{f}\circ S(\xi).
\end{aligned}
$$

(c) Como $|f|, |g| \in L^1$ podemos aplicar o Teorema de Tonelli e em seguida aplicar o Teorema de Fubini, obtendo

$$
\begin{aligned}
(f*g)^{\wedge}(\xi) &= \int f*g(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \int\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\\
&= \int\left(\int f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dy\right)dx = \int\left(\int f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)dy\\
&= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot(x+y)}\,dx\right)dy = \left(\int f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)\left(\int g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,dy\right)\\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(d) Faremos por indução sobre $|\alpha|$. Primeiramente, se $|\alpha| = 0$ então $\alpha = (0,\dots,0)$ e a afirmação é obvia. Suponhamos que $|\alpha| = 1$, então $\alpha = e_j$ para algum $j \in \{1,\dots,n\}$. Temos que

$$
\left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}(f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x})\right| = |-2\pi i x_j f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}| \leq 2\pi|x_j f(x)| \quad \forall x,\xi\in\mathbb{R}.
$$

Logo pelo Teorema da convergência dominada

$$
\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi) = \int -2\pi i x_j f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = (-2\pi i x_j f(x))^{\wedge}(\xi) = (-2\pi i x_j f(x))^{\wedge}(\xi).
$$

Além disso $\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi)$ é contínua pela igualdade acima. Suponhamos que a afirmação seja válida para $|\alpha| = N \leq k-1$. Dado $|\alpha| = N+1$, existe $\alpha_j \neq 0$ para algum $j \in \{1,\dots,n\}$. Logo pela hipótese de indução

$$
\partial^{\alpha-e_j}\widehat{f} = ((-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^{\wedge}.
$$

Como $x^{e_j}(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f \in L^1$ do que já mostramos segue que $\partial^{\alpha}\widehat{f}$ existe, e além disso

$$
\begin{aligned}
\partial^{\alpha}\widehat{f} &= \partial^{e_j}(\partial^{\alpha-e_j}\widehat{f}) = \partial^{e_j}((-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^{\wedge} = ((-2\pi i x_j)(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^{\wedge}\\
&= ((-2\pi i x)^{e_j}(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^{\wedge} = ((-2\pi i)^{\alpha}f)^{\wedge}.
\end{aligned}
$$

(e) Provaremos por indução sobre $k$. Para $k = 0$ não há o que demonstrar. Provaremos o caso $k = 1$. Se $|\alpha| = 1$, então $\alpha = e_j$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)^{\wedge}(\xi) &= \int \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\ &= -\int f(x)(-2\pi i)\xi_j e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Suponhamos que a afirmação vale para $k \in \mathbb{N}$ e provaremos que vale para $k+1$. É suficiente então demonstrar que

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

para $|\alpha| = k+1$. Usando a hipótese de indução e o caso $k = 1$ temos que

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) &= (\partial^{\alpha - e_j} \partial^{e_j} f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha - e_j} (\partial^{e_j} f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha - e_j} 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \\ &= (2\pi i \xi)^{\alpha - e_j} (2\pi i \xi)^{e_j} \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

onde $j \in \{1, \ldots, n\}$ é tal que $\alpha_j \neq 0$.

(f) Suponhamos que $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, então por (e) temos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)^{\wedge} = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Logo $|\xi_j||\widehat{f}(\xi)|$ é limitada para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim, como $|\xi||\widehat{f}(\xi)| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|\right) |\widehat{f}(\xi)|$, segue que $|\xi||\widehat{f}(\xi)|$ é limitada. Portanto

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = \lim_{|\xi| \to \infty} \frac{1}{|\xi|} (|\xi||\widehat{f}(\xi)|) = 0.$$

$\square$

**Corolário 3.3.5.** *Temos que $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$, além disso a aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínua.*

*Demonstração.* Sejam $\phi \in \mathscr{S}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, temos que

$$\begin{aligned}\int |x^\alpha \partial^\beta \phi| &= \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} (1+|x|)^{n+1} |x^\alpha \partial^\beta \phi|\, dx \leq \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} (1+|x|)^{n+1+|\alpha|} |\partial^\beta \phi|\, dx \\ &\leq \|\phi\|_{(n+1+|\alpha|, \beta)} \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} < \infty.\end{aligned}$$

Portanto $x^\alpha \partial^\beta \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Segue também que $\partial^\beta \phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$

para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Então de (d) e (e) do Teorema 3.3.4 segue que

$$(x^\alpha \partial^\beta \phi)^\wedge = (-2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha (\partial^\beta \phi)^\wedge = (-2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha \left[ (2\pi i \xi)^\beta \widehat{\phi} \right] = (-1)^{-\alpha} (2\pi i)^{|\beta| - |\alpha|} \partial^\alpha \left( \xi^\beta \widehat{\phi} \right).$$

Portanto segue da Proposição 3.1.12 que $\widehat{\phi} \in \mathscr{S}$ e que a transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínua. □

**Proposição 3.3.6.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\pi a |x|^2}$ onde $a \in \mathbb{C}$ é tal que* $\mathrm{Re}(a) > 0$. *Então*

$$\widehat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.$$

*Demonstração.* Provaremos primeiramente o caso $n = 1$. Usando o Teorema 3.3.4 (d) segue que

$$\begin{aligned} \left(\widehat{f}\right)'(\xi) &= (-2\pi i x f)^\wedge(\xi) = \left(-2\pi i e^{-\pi a x^2}\right)^\wedge(\xi) \\ &= \left(\frac{i}{a}(-2\pi a) e^{-\pi a x^2}\right)^\wedge(\xi) = \frac{i}{a}(f')^\wedge(\xi) \\ &= \frac{i}{a} 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) = -\frac{2\pi}{a} \xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{\frac{\pi}{a}\xi^2} \widehat{f}(\xi)\right) = 2\frac{\pi}{a} \xi e^{\frac{\pi}{a}\xi^2} \widehat{f}(\xi) - e^{\frac{\pi}{a}\xi^2} \frac{2\pi}{a} \xi \widehat{f}(\xi) = 0,$$

logo $e^{\frac{\pi}{a}\xi^2} \widehat{f}(\xi)$ é constante. Além disso,

$$\widehat{f}(0) = \int e^{-2\pi i 0 \cdot x} f(x)\, dx = \int e^{-\pi a x^2}\, dx. \tag{3.3}$$

Pelo Teorema de Tonelli temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a (x^2 + y^2)}\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2} e^{-\pi a y^2}\, dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\, dx \right) e^{-\pi a y^2}\, dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\, dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a y^2}\, dy \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a (x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\, dx \right)^2. \tag{3.4}$$

Por outro lado, consideremos o difeomorfismo $C^1$ $\varphi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \to \Omega$ definido por

$$\varphi(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta)$$

onde $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : x \leq 0 \text{ e } y = 0\}$. Usando o teorema de mudança de variáveis com a mudança $(x,y) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{\Omega} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)} e^{-\pi a t^2} t\,dt\,d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi a t^2} t\,dt\right)d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-\pi a t^2} t\,dt \\
&= 2\pi\left(-\frac{e^{-\pi a t^2}}{2\pi a}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi\frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{a}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De (3.3), (3.4) e (3.5) segue que $\widehat{f}(0) = a^{-\frac{1}{2}}$. Então

$$e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\widehat{f}(\xi) = e^{\frac{\pi}{a}0^2}\widehat{f}(0) = \widehat{f}(0) = a^{-\frac{1}{2}}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto

$$\widehat{f}(\xi) = a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

No caso geral, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a|x|^2} e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i \xi_j x_j}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^n e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i \xi_j x_j}\,dx_1\right)\ldots\,dx_{n-1}\right)dx_n \\
&= \prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i \xi_j x_j}\,dx_j = \prod_{j=1}^n a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi_j^2} = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

□

**Definição 3.3.7** (Transformada de Fourier Inversa)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier inversa, denotada por $f^\vee$, da seguinte maneira*

$$f^\vee(x) = \int f(\xi)e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,d\xi = \widehat{f}(-x).$$

Os próximos resultados terão o objetivo de mostrar que dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\left(\widehat{f}\right)^\vee = f$.

**Observação 3.3.8.** *Uma simples aplicação do Teorema de Fubini com esse propósito falha, já que*

$$\begin{aligned}\left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,dy\right)e^{2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}e^{2\pi i\xi\cdot x}\,dy\right)d\xi\end{aligned}$$

*e o integrando não está em $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.*

**Lema 3.3.9.** *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\int \widehat{f}g = \int f\widehat{g}$.*

*Demonstração.* Usando os Teoremas de Tonelli e Fubini segue que

$$\begin{aligned}\int \widehat{f}g &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)d\xi \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int f\widehat{g}.\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.10.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $f$ coincide em quase todo ponto com uma função contínua $f_0$ e $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = (f^{\vee})^{\wedge} = f_0$.*

*Demonstração.* Dados $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(\xi) = e^{2\pi\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}.$$

Usando o Teorema 3.3.4 (a) e a Proposição 3.3.6 segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(y) &= \left(e^{2\pi\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}\right)^{\wedge}(y) = \tau_x\left[\left(e^{-\pi t^2|\xi|^2}\right)^{\wedge}(y)(y)\right] \\ &= \tau_x\left(t^{-n}e^{-\frac{\pi}{t^2}|y|^2}\right) = t^{-n}e^{-\frac{\pi}{t^2}|x-y|^2} = g_t(x-y),\end{aligned}$$

onde $g_t(y) = t^{-n}e^{-\frac{\pi}{t^2}|y|^2}$. Pelo Lema 3.3.9 temos então que

$$\begin{aligned}\int e^{-\pi t^2|\xi|^2}e^{2\pi i\xi\cdot x}\widehat{f}(\xi)\,d\xi &= \int \phi(\xi)\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\ &= \int \widehat{\phi}(y)f(y)\,dy = \int g_t(x-y)f(y)\,dy,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = f * g_t(x). \tag{3.6}$$

Como $\int g(y)\, dy = 1$, pelo Teorema 3.2.6 segue que

$$f * g_t \xrightarrow[t \to 0]{} f \text{ em } L^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

Por outro lado, como $\widehat{f} \in L^1$, pelo Teorema da convergência dominada temos que

$$\lim_{t \to 0} \int e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int e^{2\pi i \xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, dx = \left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x). \tag{3.8}$$

Segue de (3.6), (3.7) e (3.8) que $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = f$ quase sempre e analogamente $f = (f^{\vee})^{\wedge}$ quase sempre. Como $\left(\widehat{f}\right)^{\vee}$ é contínua o teorema está demonstrado. □

**Corolário 3.3.11.** *Se $f \in L^1$ e $\widehat{f} = 0$ então $f = 0$ quase sempre.*

*Demonstração.* Se $\widehat{f} = 0$ então $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = 0$ logo $f = 0$ quase sempre. □

**Corolário 3.3.12.** *$\mathscr{F}$ é um isomorfismo de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$, com inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definida por $\mathscr{F}^{-1}\phi = \phi^{\vee}$.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.3.5 $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínua. Além disso, como $f^{\vee}(x) = \widehat{f}(-x)$ segue que $\check{f} \in \mathscr{S}$ e a aplicação $\mathscr{S} \ni f \longrightarrow \check{f} \in \mathscr{S}$. Por fim, pelo Teorema 3.3.10 a última aplicação é a inversa da transformada de Fourier $\mathscr{F}$. □

**Teorema 3.3.13** (Plancherel)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}\big|_{L^1 \cap L^2}$ se estende unicamente para um isomorfismo unitário sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Consideremos o subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que $f = \left(\widehat{f}\right)^{\vee} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f||f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} |f| \leq \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Então $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto $V \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S} \subset V$, segue que $V$ é denso em

$L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dadas $f, g \in V$, pondo $h = \overline{\widehat{g}}$ temos que

$$\widehat{h}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} \overline{\widehat{g}(x)}\, dx = \int \overline{e^{-2\pi i \xi \cdot x} \widehat{g}(x)}\, dx = \overline{(\widehat{g})^\vee(\xi)} = \overline{g(\xi)},$$

então pelo Lema 3.3.9 segue que

$$\int f\overline{g} = \int f\widehat{h} = \int \widehat{f}h = \int \widehat{f}\overline{\widehat{g}}.$$

Portanto, $\mathscr{F}\big|_V$ preserva o produto internode $L^2(\mathbb{R}^n)$, em particular $\mathscr{F}\big|_V$ preserva a norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dada $f \in V$, temos que $f^\vee \in L^1(\mathbb{R})$ (pois $f^\vee(x) = \widehat{f}(-x)$) e $f = (f^\vee)^\wedge$, assim $f^\vee \in V$ e $\mathscr{F}(f^\vee) = f$, mostrando assim que $\mathscr{F}(V) = V$.

Como $\mathscr{F} : V \to V$ é um isomorfismo unitário munindo $V$ com o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $V$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que $\mathscr{F}$ se estende por continuidade a um isomorfismo unitário $\overline{\mathscr{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Provaremos que $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Sejam $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ e $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $t > 0$ dada por

$$g_t(x) = t^{-n} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Como $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int g = 1$, dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, segue pelo Teorema 3.2.6 que $(f * g_t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $(f * g_t)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g_t} = \widehat{f}e^{-\pi|\xi|^2}$, logo como $\widehat{f}$ é limitada segue que $(f * g_t)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto $f * g_t \in V$ para todo $t > 0$. Por fim, como $(f * g_t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $(f * g_t)^\wedge \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}$ uniformemente, e como $(f * g_t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $(f * g_t)^\wedge \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \overline{\mathscr{F}}(f)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Concluímos então que $\overline{\mathscr{F}}(f) = \widehat{f}$. $\square$

## 3.4 O espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$

**Definição 3.4.1 (Espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$).** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, munimos o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com a topologia limite indutivo $\mathscr{T}_{\mathscr{D}}$ definida por*

$$\mathscr{T}_{\mathscr{D}} := \{U \subset C_c^\infty(\Omega); U \cap C_c^\infty(K) \text{ é um aberto em } C_c^\infty(K) \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto }\}.$$

Podemos nos perguntar se $C_c^\infty(\Omega)$ não é o espaço trivial $\{0\}$, isto é, se existe alguma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \neq 0$. A seguir, daremos um exemplo de tal $\phi$.

**Exemplo 3.4.2.** *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{se } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

*Verificamos facilmente por indução que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e existe um polinômio $P_k$ tal que,*

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \textit{se } t \leq 0 \\ P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

*portanto $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*
*Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \textit{se } \leq x \in B(0,1) \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\phi$ é a função $f$ composta com a função $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto 1 - |x|^2 \in \mathbb{R}$, como esta última função também é de classe $C^\infty$ segue que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado $\text{supp}(\phi) \subset \overline{B(0,1)}$, portanto $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $x_0 \in \Omega$ e $\epsilon > 0$ tais que $\overline{B(0,\epsilon)} \subset \Omega$, então temos que função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = \phi\left(\epsilon^{-1}(x - x_0)\right)$ pertence a $C_c^\infty\left(\overline{B(0,\epsilon)}\right) \subset C_c^\infty(\Omega)$.

**Proposição 3.4.3.** *As inclusões $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ com $K \subset \Omega$ compacto são contínuas. Além disso, $\mathscr{T}_{\mathscr{D}}$ é a maior topologia sobre $C_c^\infty(\Omega)$ que torna tais inclusões $i_K$ contínuas.*

*Demonstração.* Fixado $K \subset \Omega$ compacto, seja $U \subset C_c^\infty(\Omega)$ um aberto, temos que $i_K^{-1}(U) = U \cap C_c^\infty(K)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$ pela definição da topologia de $C_c^\infty(\Omega)$. Portanto, $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínua. Por outro lado, se $\mathscr{T}$ é outra topologia sobre $C_c^\infty(\Omega)$ que torna as inclusões $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ com $K \subset \Omega$ compacto contínuas, então dado $U \in \mathscr{T}$ e $K \subset \Omega$ compacto, temos que $U \cap C_c^\infty(K) = i_K^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$, logo $U \in \mathscr{T}_{\mathscr{D}}$. $\square$

**Proposição 3.4.4.** *Sejam $X$ um espaço topológico e $f : C_c^\infty(\Omega) \to X$ uma função. Então $f$ é contínua se, e somente se, sua restrição $f|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to X$ é contínua para qualquer $K \subset \Omega$ compacto.*

*Demonstração.* Suponhamos que $f$ é contínua e seja $K \subset \Omega$ compacto, temos então que $f|_{C_c^\infty(K)} = f \circ i_K$ é contínua pela Proposição 3.4.3. Reciprocamente, se dado $K \subset \Omega$ compacto temos $f|_{C_c^\infty(K)}$ :

$C_c^\infty(K) \to X$ contínua, então para $U \subset X$ aberto $f^{-1}(U) \cap C_c^\infty(K) = f|_{C_c^\infty(K)}^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$. Como o compacto $K \subset \Omega$ é tomado arbitrariamente, segue que $f^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(\Omega)$. □

**Proposição 3.4.5.** *Seja $f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ um funcional linear, então $f$ é contínuo se, e somente se, para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $m \in \mathbb{Z}_+$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$|f(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi|,$$

*para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$.*

*Demonstração.* Segue imediatamente da Proposição 3.4.4 e do Corolário 3.1.6. □

## 3.5 O espaço das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$

**Definição 3.5.1.** *Seja $X$ um espaço vetorial topológico, o dual de $X$, o qual denotamos por $X'$ é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos sobre $X$. Munimos $X'$ com a família de seminormas $\{P_{X',x}\}_{x \in X}$ definidas por*

$$P_{X',x}(f) = |\langle f, x \rangle|$$

*para toda $f \in X'$.*

*Chamamos de espaço das distribuições e denotamos por $\mathscr{D}'(\Omega)$ o dual do espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$, isto é, uma distribuição é um funcional linear contínuo $f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.*

Observe que a Proposição 3.4.5 nos dá uma caracterização para as distribuições.

**Exemplo 3.5.2.** *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, temos que $\widetilde{f} : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\langle \widetilde{f}, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi$$

*é uma distribuição. De fato, é evidente que $\widetilde{f}$ é linear, além disso, dado $K \Subset \Omega$ temos que*

$$|\langle \widetilde{f}, \phi \rangle| = \left| \int_\Omega f\phi \right| = \left| \int_K f\phi \right| \leq \int_K |f\phi| \leq \left( \int_K |f| \right) \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi|,$$

*para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$. Pela Proposição 3.4.5, $\widetilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Temos ainda que a aplicação $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ni f \mapsto \widetilde{f} \in \widetilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é linear, injetiva e contínua. A linearidade de tal aplicação é evidente e a* *injetividade é obtida por consequência do Teorema da diferenciação de Lebesgue (ver [2], página 98). Já a continuidade segue pelo Teorema 3.1.5, pois*

$$P_{\mathscr{D}'(\Omega),\phi}(\widetilde{f}) = |\langle \widetilde{f}, \phi\rangle| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |\phi|\right) \int_{\text{supp}(\phi)} |f| = \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |\phi|\right) P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),\text{supp}(\phi)}(f)$$

*para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(K)$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

*Como é usual, iremos identificar a função $f$ com a distribuição $\widetilde{f}$, nesse sentido, temos que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.*

O Exemplo 3.5.2, mostra que $\mathscr{D}'(\Omega)$ contém todas a funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, é natural nos perguntar se existe alguma distribuição que não seja uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. A seguir temos um exemplo de uma distribuição deste tipo.

**Exemplo 3.5.3.** *Seja $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0).$$

*Segue da Proposição 3.4.5 que $\delta$ é uma distribuição, conhecida como a distribuição delta de Dirac. Suponhamos que $\delta = f$ para alguma $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, como*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\phi = \langle f, \phi\rangle = \langle \delta, \phi\rangle = \phi(0) = 0$$

*para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, segue $f = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Assim*

$$\langle \delta, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi = 0$$

*para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que contraria a existência de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(0) = 1$, já que neste caso teremos $\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0) = 1$. Portanto, $\phi \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

## 3.6 Operações com distribuições

**Definição 3.6.1.** *Sejam $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega')$, $L' : C_c^\infty(\Omega') \to C_c^\infty(\Omega)$ operadores lineares contínuos tais que*

$$\int_{\Omega'} (L\phi)\psi = \int_{\Omega} \phi(L'\psi),$$

*para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$. Dizemos que $L'$ é o transposto formal de $L$ e vice-versa.*

Dado um operador $L$ como na definição anterior, seu transposto formal $L'$ nos dá uma maneira natural de criar uma extensão $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ do operador $L$. Com efeito, definimos $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ por

$$\langle \widetilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$.
Observe que de fato $\widetilde{L}u \in \mathscr{D}'(\Omega')$ já que $\widetilde{L}u = u \circ L'$ é a composição de aplicações lineares e contínuas. Note também que

$$\langle \widetilde{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle = \int_{\Omega'} \phi(L'\psi) = \int_{\Omega} (L\phi)\psi = \langle L\phi, \psi \rangle,$$

para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$, portanto $\widetilde{L}\phi = L\phi$. Por fim, temos que $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ é linear e contínuo. A linearidade é evidente e a continuidade segue do Teorema 3.1.5, já que dada $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$

$$P_{\mathscr{D}'(\Omega'),\psi}(\widetilde{L}u) = |\langle \widetilde{L}u, \psi \rangle| = |\langle u, L'\psi \rangle| = P_{\mathscr{D}'(\Omega),L'\psi}(u)$$

para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

**Exemplo 3.6.2 (Derivação).** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e consideremos o operador linear $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ definido por*

$$L\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

*O operador $L$ é contínuo. De fato, dado $K \subset \Omega$ compacto e $\phi \in C_c^\infty(K)$, temos que $L\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C_c^\infty(K)$, além disso, dado $m \in \mathbb{K}$ temos que*

$$\begin{aligned} P_{C_c^\infty(K),m}(L\phi) = P_{C_c^\infty(K),m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) &= \sum_{|\alpha| \le m} \sup \left| \partial^\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) \right| \\ &= \sum_{|\alpha| \le m} \sup \left| \partial^{\alpha + e_j} \phi \right| \le \sum_{|\beta| \le m+1} \sup \left| \partial^\beta \phi \right| = P_{C_c^\infty(K),m+1}(\phi). \end{aligned}$$

*Segue então que $L|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(K)$ é contínuo, assim das Proposições 3.4.3 e 3.4.4 concluímos que $L$ é contínuo. Note ainda que dadas $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, tomando $r > 0$ tal que*

$\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *sempre que* $x_j \notin (-r, r)$, *temos que*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (L\phi)\psi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j}\psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-r}^{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j}\psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-r}^{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j}\psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \phi(r)\psi(r) - \phi(-r)\psi(-r) - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}\, dx_j \right) d\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \left( - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right),
\end{aligned}$$

*onde* $\widehat{x}$ *representa a (n-1)-upla obtida ao retirar a j-ésima coordenada de* $x$. *Portanto, o transposto formal do operador* $\frac{\partial}{\partial x_j}$ *é o operador* $-\frac{\partial}{\partial x_j}$. *Logo estendemos o operador* $\frac{\partial}{\partial x_j} : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ *ao operador* $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ *pondo*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

*para quaisquer* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Em geral, dado um multi-índice* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *o transposto formal do operador* $\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ *é o operador* $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$. *Logo definimos* $\partial^\alpha : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ *por*

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

*para quaisquer* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

**Exemplo 3.6.3 (Multiplicação por uma função $C^\infty$).** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Temos que* $\operatorname{supp}(f\phi) \subset \operatorname{supp}(\phi)$, *logo* $f\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Desta forma, seja* $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ *o operador linear definido por*

$$L\phi = f\phi.$$

*Afirmamos que* $L$ *é contínuo, de fato, dado* $K \subset \Omega$ *compacto é fácil ver que* $L\left(C_c^\infty(K)\right) = C_c^\infty(K)$, *além disso, dada $\phi \in C_c^\infty(K)$ e $m \in \mathbb{N}$ temos que*

$$
\begin{aligned}
P_{C_c^\infty(K),m}(L\phi) &= \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(f\phi)| = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_K |\partial^\alpha(f\phi)| \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \sup_K \left| \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f\, \partial^\beta \phi \right| \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^{\alpha-\beta} f| \sup_K |\partial^\beta\phi| \\
&\le \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} \max_{\substack{|\alpha|\le m\\ \beta\le\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sup_K |\partial^\beta\phi| \\
&\le \max_{\substack{|\alpha|\le m\\ \beta\le\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} \sup_K |\partial^\beta\phi| \\
&\le \max_{\substack{|\alpha|\le m\\ \beta\le\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{|\beta|\le m} \sup_K |\partial^\beta\phi| \\
&\le C \sum_{|\beta|\le m} \sup_K |\partial^\beta\phi| = C \sum_{|\beta|\le m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta\phi| = C P_{C_c^\infty(K),m}(\phi),
\end{aligned}
$$

*de onde segue a continuidade de $L|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(K)$, portanto $L$ é contínuo.*
*Note também que, para quaisquer $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\int_\Omega (L\phi)\psi = \int_\Omega (f\phi)\psi = \int_\Omega \phi(f\psi) = \int_\Omega \phi(L\psi),$$

*logo $L$ é o transposto formal de $L$. Assim definimos a extensão $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ de $L$ por*

$$\langle \widetilde{L}u, \phi\rangle := \langle u, L\phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle,$$

*para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Naturalmente, dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ denotamos $\widetilde{L}u$ por $fu$.*

## 3.7 O espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'$

Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ adotaremos a notação $D^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha$.
Seja $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio e consideremos o operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ por ele determinado. Se $u \in \mathscr{S}$, temos pelo Teorema 3.3.4 (e) que $[P(D)u]^\wedge = P(\xi)\widehat{u}$. Desta forma a transformada de Fourier nos dá um método para tentar encontrar soluções para equação $P(D)u = f$. De fato, aplicando a transformada de Fourier obtemos a equação $P(\xi)\widehat{u} = \widehat{f}$, então se $P$ não possui raízes reais segue que $\widehat{u} = P^{-1}\widehat{f}$. Assim

obtemos que $u = \left(P^{-1}\widehat{f}\right)^{\vee}$. No entanto, para encontrar soluções através desse processo deve ser possível aplicar a transformada de Fourier em $f$ e a transformada inversa em $P^{-1}\widehat{f}$. Nesse ponto notamos que quanto maior o domínio da transformada de Fourier, maior é a chance de encontrarmos uma solução utilizando essa técnica. Essa é a grande motivação para o estudo das distribuições temperadas.

**Proposição 3.7.1.** *Seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(0) = 1$ e dado $\epsilon > 0$ seja $\psi^\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por $\psi^\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)$. Então para qualquer $\phi \in \mathscr{S}$, temos que $\psi^\epsilon\phi \to \phi$ em $\mathscr{S}$ quando $\epsilon \to 0+$. Em particular, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}$.*

*Demonstração.* Fixado $N \in \mathbb{Z}_+$ e dado $\delta > 0$, como $\phi \in \mathscr{S}$ existe um compacto $K$ tal que

$$(1 + |x|)^N |\phi(x)| < \delta$$

para todo $x \in \Omega \backslash K$. Como $\psi$ é contínua no ponto 0 e $\psi(0) = 1$ segue imediatamente que $\psi^\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0+]{} 1$ uniformemente em $K$, logo existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|\psi^\epsilon(x) - 1| < \delta$, para quaisquer $x \in K$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Assim, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in K} (1 + |x|)^N |\psi^\epsilon(x)\phi(x) - \phi(x)| &= \sup_{x \in K} (1 + |x|)^N |\phi(x)||\psi^\epsilon(x) - 1| \\
&\le \left( \sup_{x \in K} (1 + |x|)^N |\phi(x)| \right) \delta = \|\phi\|_{(N,0)} \delta.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash K} (1 + |x|)^N |\psi^\epsilon(x)\phi(x) - \phi(x)| &\le \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash K} (1 + |x|)^N |\psi^\epsilon(x)||\phi(x)| + |\phi(x)| \\
&\le \sup_{\mathbb{R}^n} |\psi| \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash K} (1 + |x|)^N |\phi(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash K} (1 + |x|)^N |\phi(x)| \\
&\le \left( \sup_{\mathbb{R}^n} |\psi| + 1 \right) \delta
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, logo

$$\|\psi^\epsilon\phi - \phi\|_{(N,0)} \le (\|\phi\|_{(N,0)} + \sup_{\mathbb{R}^n} |\psi| + 1)\delta$$

sempre que $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Portanto $\|\psi^\epsilon\phi - \phi\|_{(N,0)} \xrightarrow[\epsilon \to 0+]{} 0$.

Em geral dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ temos que,

$$
\begin{aligned}
(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\psi^\epsilon\phi)(x)-\partial^\alpha\phi(x)| &= (1+|x|)^N\left|\left(\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta\psi^\epsilon(x)\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right)-\partial^\alpha\phi(x)\right|\\
&\leq (1+|x|)^N\left(|\psi^\epsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta\psi^\epsilon(x)||\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right)\\
&= (1+|x|)^N\left(|\psi^\epsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\epsilon^{|\beta|}|\partial^\beta\psi(\epsilon x)||\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right)\\
&\leq (1+|x|)^N\left(|\psi^\epsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\epsilon\sum_{0<\beta\leq\alpha}\max_{\beta\leq\alpha}\left\{\binom{\alpha}{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta\psi(x)|\right\}|\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right)\\
&= (1+|x|)^N|\psi^\epsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\epsilon\max_{\beta\leq\alpha}\left\{\binom{\alpha}{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta\psi(x)|\right\}\sum_{0<\beta\leq\alpha}\|\phi\|_{(N,\alpha-\beta)}\\
&= (1+|x|)^N|\psi^\epsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+C\epsilon\\
&= \|\psi^\epsilon\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\phi\|_{(0,\alpha)}+C\epsilon
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $0<\epsilon<1$. Segue então que,

$$\|\psi^\epsilon\phi-\phi\|_{(N,\alpha)} \leq \|\psi^\epsilon\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\phi\|_{(N,0)}+C\epsilon \tag{3.9}$$

para todo $0<\epsilon<1$. Como $\phi' = \partial^\alpha\phi \in \mathscr{S}$ temos pelo que já demonstramos que $\|\psi^\epsilon\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\phi\|_{(N,0)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0+$. Portanto segue da estimativa (3.9) que $\|\psi^\epsilon\phi-\phi\|_{(N,\alpha)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0+$, o que conclui a demonstração. $\square$

**Observação 3.7.2.** *A inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua. De fato, dados $N \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $K \subset \Omega$ compacto, temos que*

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_{(N,\alpha)} &= \sup_K (1+|x|)^N|\partial^\alpha\phi|\\
&\leq \left(\sup_K(1+|x|)^N\right)\sum_{\beta\leq|\alpha|}\sup_K|\partial^\beta\phi|\\
&= \left(\sup_K(1+|x|)^N\right)P_{C_c^\infty(K),|\alpha|}(\phi),
\end{aligned}
$$

*para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$. Portanto a inclusão $C_c^\infty(K) \subset \mathscr{S}$ é contínua para qualquer $K \subset \Omega$ compacto, logo segue da Proposição 3.4.4 que a inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua.*

Como a inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua, dada $u \in \mathscr{S}'$ temos que $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e como

$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{S}$ segue que se $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$ então $u = 0$, além disso,

$$P_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\phi}\left(u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) = \left|\left\langle u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}, \phi\right\rangle\right| = |\langle u, \phi\rangle| = P_{\mathscr{S}',\phi}(u).$$

Portanto a aplicação linear $\mathscr{S}' \ni u \to u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é injetiva e contínua. Desta forma, como é usual, iremos identificar $u \in \mathscr{S}'$ com $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, neste sentido temos então que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua.

**Definição 3.7.3.** *Dizemos que uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é temperada se $u \in \mathscr{S}'$, isto é, se $u$ possui uma extensão linear contínua ao espaço $\mathscr{S}$. Dessa forma, dizemos que $\mathscr{S}'$ é o espaço das distribuições temperadas.*

**Exemplo 3.7.4.** *Dado $1 \le p \le \infty$, temos que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$ com inclusão contínua.*
*Notemos inicialmente dado qualquer $1 \le q \le \infty$ temos que $\mathscr{S} \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua. No caso $q = \infty$ basta notar que $\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{(0,0)}$. Suponhamos então que $1 \le q < \infty$, seja $N \ge n+1$, dada $\phi \in \mathscr{S}$ temos que*

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q (1+|x|)^{Nq}(1+|x|)^{-Nq} = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi|(1+|x|)^N\right]^q (1+|x|)^{-Nq} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Nq}\right)\|\phi\|^q_{(N,0)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N}\right)\|\phi\|^q_{(N,0)} \le C\|\phi\|^q_{(N,0)}.
\end{aligned}$$

*Portanto, existe uma constante $C' > 0$ tal que $\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C'\|\phi\|_{(N,0)}$ para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos que $\widetilde{f} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\langle \widetilde{f}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$$

*é uma extensão linear e contínua de $f$. É evidente que $\widetilde{f}$ é uma extensão linear de $f$, para a continuidade usando a desigualdade de Hölder tem-se para toda $\phi \in \mathscr{S}$.*

$$|\langle \widetilde{f}, \phi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\phi\right| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{(N,0)}. \tag{3.10}$$

*Segue então que $f \in \mathscr{S}'$. Além disso, dada $\phi \in \mathscr{S}$ a estimativa (3.10) vale para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, assim*

$$P_{\mathscr{S}',\phi}(f) = |\langle \widetilde{f}, \phi\rangle| \le C'\|\phi\|_{(N,0)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Portanto a inclusão $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$ é contínua.*

Assim como estendemos algumas operações em $C_c^\infty(\Omega)$ para $\mathscr{D}'(\Omega)$ através do transposto formal, utilizando o mesmo processo, podemos estender algumas operações em $\mathscr{S}$ para $\mathscr{S}'$. Utilizando o Lema 3.3.9 temos que o transposto formal da transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é a própria $\mathscr{F}$, assim podemos estender $\mathscr{F}$ a uma transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$. A principal motivação para o estudo do espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'$ é que tal espaço se torna um domínio substancialmente maior para a transformada de Fourier.

**Definição 3.7.5.** *Dada $u \in \mathscr{S}'$, definimos sua transformada de Fourier $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$ por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle$$

*para toda $\phi \in \mathscr{S}$.*

**Observação 3.7.6.** *A aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ definida por $\mathscr{F}u = \widehat{u}$ é uma bijeção linear e contínua cuja inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ definida por $\mathscr{F}^{-1}u = u^{\vee}$ é contínua, onde*

$$\langle u^{\vee}, \phi \rangle = \langle u, \phi^{\vee} \rangle$$

*para toda $\phi \in \mathscr{S}$. De fato, a continuidade de $\mathscr{F}$ segue de*

$$P_{S',\phi}(\widehat{u}) = |\langle \widehat{u}, \phi \rangle| = |\langle u, \widehat{\phi} \rangle| = P_{S',\widehat{\phi}}(u)$$

*pelo Teorema 3.1.5 e a continuidade de $\mathscr{F}^{-1}$ segue analogamente. Além disso, é consequência imediata do Corolário 3.3.12 e das definições de $\mathscr{F}$ e de $\mathscr{F}^{-1}$ que $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^{-1} = I$ e que $\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F} = I$.*

**Observação 3.7.7.** *Sejam $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ as transformadas de Fourier já definidas, temos que $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*
*De fato, dadas $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{S}$, temos que*

$$\langle \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\phi) = \langle f, \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\phi \rangle = \langle \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} f, \phi \rangle.$$

*Então $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f = \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} f$ e portanto $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.*
*Por outro lado, já sabemos que $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, logo $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$, assim $\mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'$ são operadores contínuos que coincidem em um conjunto denso, portanto $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

**Definição 3.7.8.** *Dizemos que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem crescimento lento, se para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ existe uma constante $C_\alpha > 0$ e um inteiro $N_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{N_\alpha}$$

*para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

**Proposição 3.7.9.** *Seja $u \in \mathscr{S}'$ temos que:*

**(i)** *$\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.*

**(ii)** *Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem de crescimento lento, então $\psi u \in \mathscr{S}'$.*

*Demonstração.* **(i)** Inicialmente, note que o operador linear $L : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definido por $L\phi = \partial^\alpha \phi$ é contínuo já que dado $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, temos que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{(N,\beta)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial_\beta (\partial^\alpha \phi)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^{\alpha+\beta} \phi| = \|\phi\|_{(N,\alpha+\beta)}$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$.
Consideremos agora $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ definida por $\langle \partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$ para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Temos que $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u = (-1)^{|\alpha|} u \circ L$ é contínua, além disso, $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u$ é claramente uma extensão linear de $\partial^\alpha u$, portanto $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'$.
**(ii)** Analogamente à demonstração do item **(i)**, é suficiente demonstrar que o operador linear $L : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definido por $L\phi = \psi\phi$ é contínuo. De fato, dado $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi\phi\|_{(N,\alpha)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha (\psi\phi)| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} \psi| |\partial^\beta \phi)| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{\beta \leq \alpha} \max_{\beta \leq \alpha} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha-\beta} \psi| \right\} |\partial^\beta \phi)| \\
&\leq \max_{\beta \leq \alpha} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha-\beta} \psi| \right\} \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\beta \phi)| \\
&= C \sum_{\beta \leq \alpha} \|\phi\|_{(N,\beta)},
\end{aligned}$$

portanto a continuidade de $L$ segue do Teorema 3.1.5. $\square$

## 3.8 Os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Seja $k \in \mathbb{N}$ é usual definir o espaço de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço de todas as funções $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Por outro lado, como

$$(\partial^\alpha f)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}$$

segue do Teorema 3.3.13 (Plancherel) que $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Temos ainda que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha| \leq C_2(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{k}{2}},$$

assim $\xi^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$ se e somente se $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Esta última caracterização do espaço $H^k(\mathbb{R}^n)$ tem a vantagem de permitir a extensão da definição para qualquer $k \in \mathbb{R}$, como segue:

**Definição 3.8.1.** *Dado $s \in \mathbb{R}$ seja $\Lambda^s : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ a aplicação definida por*

$$\Lambda^s(f) = \left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\right]^\vee.$$

*Definimos o espaço de Sobolev, denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, da seguinte maneira:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}' : \Lambda^s(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

*e munimos tal espaço com o produto interno,*

$$\langle f, g\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \langle \Lambda^s(f), \Lambda^s(g)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s(f)\overline{\Lambda^s(g)}.$$

*Desta forma, a norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ é dada então por*

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

**Observação 3.8.2.** *A função $\mathbb{R}^n \ni \xi \to (1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in \mathbb{C}$ é $C^\infty$ de crescimento lento, logo dada $f \in \mathscr{S}'$, temos que $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in \mathscr{S}'$.*

**Observação 3.8.3.** *Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Temos que $\Lambda^t$ é um isomorfismo de $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$.*

*De fato, seja $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\begin{aligned}\Lambda^{s-t}(\Lambda^t f) &= \left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s-t}{2}}\left[\left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{f}\right]^{\vee}\right]^{\wedge}\right]^{\vee}\\ &= \left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s-t}{2}}(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{f}\right]^{\vee} = \left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\right]^{\vee} = \Lambda^t f \in L^2(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

*logo $\Lambda^t f \in H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos também uma função $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim*

$$(\Lambda^t f, \Lambda^t g)_{H^{s-t}(\mathbb{R}^n)} = (\Lambda^{s-t}(\Lambda^t f), \Lambda^{s-t}(\Lambda^t g))_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\Lambda^s f, \Lambda^s g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (f,g)_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

*Finalmente, temos que $\Lambda^{-t} : H^{s-t}(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ é o operador inverso de $\Lambda^t : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 3.8.4.** *Dado qualquer $s \in \mathbb{R}$ temos que $\mathscr{S}$ é um subespaço denso de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*
*Segue em particular da Observação 3.8.3 que, $\Lambda^{-s} : L^2(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo unitário, além disso, é fácil ver que $\Lambda^{-s}(\mathscr{S}) = (\mathscr{S})$, logo como $\mathscr{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $\mathscr{S}$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 3.8.5.** *Se $t < s$ então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de $H^t(\mathbb{R}^n)$, além disso a inclusão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^t(\mathbb{R}^n)$ é contínua.*
*De fato, basta notar que $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{t}{2}} \leq (1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dada $f \in \mathscr{S}'$ tal que $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

*Portanto, se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $f \in H^t(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^n)}$. Além disso, como $\mathscr{S} \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^t(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 3.8.6.** *$H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ e tais espaços são munidos com o mesmo produto interno.*
*Segue então da Observação 3.8.5 que $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $s \geq 0$.*

# Capítulo 4

# O operador laplaciano

## 4.1 Propriedades do operador laplaciano

O objetivo principal desta seção é mostrar que, em um certo sentido, o operador $-\Delta$ é setorial, onde $\Delta$ representa o operador de Laplace.

**Definição 4.1.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi \in C^2(\Omega)$. O laplaciano de $\phi$, denotado por $\Delta\phi$, é a função definida por*

$$\Delta\phi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}. \tag{4.1}$$

**Teorema 4.1.2.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p < \infty$. O operador laplaciano $\Delta : C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definido por* (4.1) *é dissipativo. Em particular $\Delta$ é fechável.*

*Demonstração.* Consideremos inicialmente $2 \leq p < \infty$. Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi\|_p = 1$, sejam $g_\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ a função definida por $g_\phi(x) = \overline{\phi(x)}|\phi(x)|^{p-2}$ e $\xi_\phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por

$$\langle \xi_\phi, u \rangle = \int_\Omega g_\phi u.$$

Temos que $g_\phi \in L^{p'}$, onde $p'$ é o expoente conjugado de $p$, isto é, $p'$ é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De fato, $g_\phi$ é contínua, logo é mensurável, além disso

$$\int_\Omega |g_\phi|^{p'} = \int_\Omega |\phi|^{(p-1)p'} = \int_\Omega |\phi|^p = 1 < \infty.$$

Segue então pela desigualdade de Hölder que

$$|\langle \xi_\phi, u \rangle| = \left| \int_\Omega g_\phi u \right| \leq \|g_\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

logo $\xi_\phi \in [L^p(\Omega)]^*$. Temos também que,

$$\langle \xi_\phi, \phi \rangle = \int_\Omega \overline{\phi}|\phi|^{p-2}\phi = \int_\Omega |\phi|^p = 1 = \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|g_\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|\xi_\phi\|_{[L^p(\Omega)]^*}.$$

Portanto segue que $\xi_\phi \in J(\phi)$.

Observe ainda que a função $g_\phi$ é de classe $C^1$. De fato, é evidente que $g_\phi$ é diferenciável no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$, além disso, dado $j \in \{1, 2, ..., n\}$ em tal conjunto temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_\phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\phi}|\phi|^{p-2}\right) = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\phi|^{p-2}\right) \\
&= \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}(p-2)|\phi|^{p-3}\frac{\partial |\phi|}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}(p-2)|\phi|^{p-3}\frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{Re}\phi)^2 + (\operatorname{Im}\phi)^2}}\left(2\operatorname{Re}\phi\frac{\partial \operatorname{Re}\phi}{\partial x_j} + 2\operatorname{Im}\phi\frac{\partial \operatorname{Im}\phi}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}(p-2)|\phi|^{p-4}\left(\operatorname{Re}\phi\frac{\partial \operatorname{Re}\phi}{\partial x_j} + \operatorname{Im}\phi\frac{\partial \operatorname{Im}\phi}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $x_0 \in \partial\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{g_\phi(x_0 + te_j)}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{|\phi(x_0+te_j)|^{p-1}}{|t|} = \lim_{t\to 0}\frac{|\phi(x_0+te_j)|}{|t|}|\phi(x_0+te_j)|^{p-2} = 0,$$

logo a j-ésima derivada parcial de $g_\phi$ no ponto $x_0$ existe e

$$\frac{\partial g_\phi(x_0)}{\partial x_j} = \lim_{t\to 0}\frac{g_\phi(x_0+te_j)}{t} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial g_\phi}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}(p-2)|\phi|^{p-4}\left(\operatorname{Re}\phi\frac{\partial \operatorname{Re}\phi}{\partial x_j} + \operatorname{Im}\phi\frac{\partial \operatorname{Im}\phi}{\partial x_j}\right), & \text{se } \phi \neq 0 \\ 0, & \text{se } \phi = 0, \end{cases}$$

que é uma função contínua. De fato, como

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}|\phi|^{p-2} + \overline{\phi}(p-2)|\phi|^{p-4}\left(\operatorname{Re}\phi\frac{\partial \operatorname{Re}\phi}{\partial x_j} + \operatorname{Im}\phi\frac{\partial \operatorname{Im}\phi}{\partial x_j}\right)\right| \\
\leq &\left(\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|\right)|\phi|^{p-2} + |\phi|^{p-3}\left(|\phi|\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right| + |\phi|\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|\right) \\
\leq &3|\phi|^{p-2}\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|,
\end{aligned}$$

dada uma sequência $(x_k) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$ tal que $x_k \to x_0 \in \partial\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial g_\phi(x_k)}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_j}.$$

Utilizando o Teorema de Fubini, o fato de $g_\phi$ ser de classe $C^1$ e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\phi, \Delta\phi \rangle &= \int_\Omega \overline{\phi}|\phi|^{p-2}\Delta\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi}|\phi|^{p-2}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi}|\phi|^{p-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2} \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}|\phi(x)|^{p-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}(x)\, dx_j\right) d\widehat{x} \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[-\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_j}(x)|\phi(x)|^{p-2} + \overline{\phi(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\phi(x)|^{p-2}\right)\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\, dx_j\right] d\widehat{x} \\
&= \sum_{j=1}^n -\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_j}(x)|\phi(x)|^{p-2} + \overline{\phi(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\phi(x)|^{p-2}\right)\right]\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{p-2}\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi} + \overline{\phi}\nabla\phi\cdot\nabla\left(|\phi|^{p-2}\right) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{p-2}\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi} + (p-2)|\phi|^{p-4}\,\overline{\phi}\nabla\phi\cdot|\phi|\nabla|\phi|.
\end{aligned}$$

Sendo $\phi_1 = \mathrm{Re}\phi$ e $\phi_1 = \mathrm{Im}\phi$ temos ainda que,

$$|\phi|^{p-2}\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi} = \overline{\phi}\nabla\phi\cdot\phi\nabla\overline{\phi} = \overline{\phi}\nabla\phi\cdot\overline{\overline{\phi}\nabla\phi} = \left[\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2, \tag{4.2}$$

$$\overline{\phi}\nabla\phi = (\phi_1 - i\phi_2)\nabla(\phi_1 + i\phi_2) = \phi_1\nabla\phi_1 + \phi_2\nabla\phi_2 + i(\phi_1\nabla\phi_2 - \phi_2\nabla\phi_1). \tag{4.3}$$

E dado $j \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\begin{aligned}
|\phi|\,\frac{\partial|\phi|}{\partial x_j} &= |\phi|\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}\right) = |\phi|\,\frac{1}{2\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}}\left(2\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x_j} + 2\phi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x_j}\right) \\
&= \phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x_j} + \phi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

logo

$$|\phi|\nabla|\phi| = \phi_1\nabla\phi_1 + \phi_2\nabla\phi_2 = \mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi). \tag{4.4}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&|\phi|^{p-2}\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi}+(p-2)|\phi|^{p-4}\,\overline{\phi}\nabla\phi\cdot|\phi|\nabla|\phi| = |\phi|^{p-4}\left(|\phi|^2\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi}+(p-2)\overline{\phi}\nabla\phi\cdot|\phi|\nabla|\phi|\right)\\
=&|\phi|^{p-4}\left(\left[\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+\left[\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+(p-2)\left[\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)+i\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right)\\
=&|\phi|^{p-4}\left((p-1)\left[\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+\left[\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+i\left[(p-2)\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]\right). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Seja $h=|\phi|^{p-2}\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi}+(p-2)|\phi|^{p-4}\,\overline{\phi}\nabla\phi\cdot|\phi|\nabla|\phi|$, por (4.5) temos que

$$
h=|\phi|^{p-4}\left((p-1)\left[\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+\left[\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]^2+i\left[(p-2)\mathrm{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\mathrm{Im}(\overline{\phi}\nabla\phi)\right]\right). \qquad (4.6)
$$

Logo $\mathrm{Re}\,h\geq 0$ e então $\mathrm{Re}\langle\xi_\phi,\Delta\phi\rangle=-\mathrm{Re}\int_\Omega h=-\int_\Omega\mathrm{Re}\,h\leq 0$, o que mostra que o operador $\Delta$ é dissipativo.

Suponhamos agora $1\leq p<2$. Neste caso, definimos

$$
g_\phi(x)=\begin{cases}\overline{\phi(x)}|\phi(x)|^{p-2}, & \text{se } \phi(x)\neq 0\\ 0, & \text{se } \phi(x)=0.\end{cases}
$$

Analogamente ao que foi feito, mostramos que $\xi_\phi$ definida como antes pertence a $J(\phi)$. Observe que não podemos usar o método da integração por partes para calcular $\langle\xi_\phi,\phi\rangle$, já que neste caso a função $g_\phi$ não é necessariamente de classe $C^1$. Para este caso, em vez da integração por partes usaremos o Teorema da divergência.

Dado $\epsilon>0$ seja $\Omega_\epsilon=\{x\in\mathbb{R}^n : |\phi(x)|^2>\epsilon\}$. Se $\epsilon$ é um valor regular de $|\phi|^2$, temos que $\partial\Omega_\epsilon=\{x\in\Omega : |\phi(x)|^2=\epsilon\}$ é uma superfície de codimensão 1 em $\mathbb{R}^n$ e pelo Teorema da divergência

$$
\int_{\Omega_\epsilon}\overline{\phi}|\phi|^{p-2}\Delta\phi=\int_{\partial\Omega_\epsilon}\overline{\phi}|\phi|^{p-2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}dS-\int_{\Omega_\epsilon}h,
$$

onde $\nu$ é o vetor unitário normal a superfície $\partial\Omega_\epsilon$ e exterior ao conjunto $\Omega_\epsilon$.

Note que, como $\partial\Omega_\epsilon$ é a curva de nível $\epsilon$ da função $|\phi|^2$ e $|\phi|^2>\epsilon$ em $\Omega_\epsilon$, dado $x\in\partial\Omega_\epsilon$ temos que

$$
\nu(x)=-\frac{\nabla\left(|\phi(x)|^2\right)}{\left|\nabla\left(|\phi(x)|^2\right)\right|}=-\frac{2|\phi(x)|\nabla|\phi(x)|}{|2|\phi(x)|\nabla|\phi(x)||}=-\frac{\nabla|\phi(x)|}{|\nabla|\phi(x)||}.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\overline{\phi}\frac{\phi}{\partial\nu}\right) &= \operatorname{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi\cdot\nu) = \operatorname{Re}(\overline{\phi}\nabla\phi)\cdot\nu \\
&= |\phi|\nabla|\phi|\cdot\nu = -|\phi|\nabla|\phi|\cdot\frac{\nabla|\phi|}{|\nabla|\phi||} = -|\phi||\nabla|\phi||\leq 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, os mesmos argumentos mostram que a igualdade (4.6) é válida em $\Omega_\epsilon$ para todo $\epsilon>0$, logo $-\int_{\Omega_\epsilon}\operatorname{Re}h\leq 0$ para todo $\epsilon>0$. Pelo Teorema de Sard, podemos escolher uma sequência $(\epsilon_j)\subset(0,1)$ de valores regulares de $|\phi|^2$ tal que $\epsilon_j\to 0$. Então

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\int_\Omega \overline{\phi}|\phi|^{p-2}\Delta\phi\right) &= \operatorname{Re}\left(\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega_{\epsilon_j}}\overline{\phi}|\phi|^{p-2}\Delta\phi\right) \\
&= \operatorname{Re}\left[\lim_{j\to\infty}\left(\int_{\partial\Omega_{\epsilon_j}}\overline{\phi}|\phi|^{p-2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}dS - \int_{\Omega_{\epsilon_j}} h\right)\right] \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(\int_{\partial\Omega_{\epsilon_j}}|\phi|^{p-2}\operatorname{Re}\left(\overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)dS - \int_{\Omega_{\epsilon_j}}\operatorname{Re}h\right)\leq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Delta$ é dissipativo. Em particular, como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ segue da Proposição 1.6.6 que $\Delta$ é fechável. □

**Definição 4.1.3.** *Dados $\lambda\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ e $\alpha>0$ seja $G_\alpha^\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ definida por*

$$
G_\alpha^\lambda(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\gamma_\lambda} e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{z}}e^{-\frac{z}{4\pi}}z^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\,dz, \tag{4.7}
$$

*onde $\gamma_\lambda:(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ é a curva definida por $\gamma_\lambda(t)=\sqrt{\lambda}t$.*

**Observação 4.1.4.** *A função $G_\alpha^\lambda$ está bem definida, pois a integral em (4.7) converge absolutamente. De fato,*

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_\lambda}\left|e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{z}}e^{-\frac{z}{4\pi}}z^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\right||dz| &= \int_0^{+\infty}\left|e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{\sqrt{\lambda}t}}\right|\left|e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}}\right|\left|(\sqrt{\lambda}t)^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\right||\sqrt{\lambda}|\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})|x|^2}{t}}e^{-\frac{(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}}t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}|\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}}\,dt \\
&= |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})|x|^2}{t}}e^{-\frac{(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}}t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\,dt<\infty.
\end{aligned}
$$

**Proposição 4.1.5.** *Dados $\lambda\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ e $\alpha>0$, temos*

**(i)** *$G_\alpha^\lambda\in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|G_\alpha^\lambda\right| dx \leq |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)^{-\frac{\alpha+n}{2}}.$$

**(ii)** $\left(G_\alpha^\lambda\right)^\wedge(\xi) = (\sqrt{\lambda})^{-n}\left(1+\lambda^{-1}4\pi^2|\xi|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$.

*Demonstração.* **(i)** Com efeito, usando a estimativa obtida na Observação 4.1.4 e o Teorema de Tonelli segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |G_\alpha^\lambda| &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\gamma_\lambda} e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{z}} e^{-\frac{z}{4\pi}} z^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\, dz \right| dx \\
&\leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\gamma_\lambda} \left| e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{z}} e^{-\frac{z}{4\pi}} z^{\frac{\alpha-n}{2}-1} \right| |dz| \right) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})|x|^2}{t}} e^{-\frac{(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\, dt \right) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})|x|^2}{t}} e^{-\frac{(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\, dx \right) dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})|x|^2}{t}}\, dx \right) e^{-\frac{(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \int_0^{+\infty} \left( t^{-1}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{4\pi}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \\
&= |\sqrt{\lambda}|^{\frac{\alpha-n}{2}} \left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right)^{-\frac{\alpha+n}{2}}.
\end{aligned}$$

**(i)** As estimativas acima e o Teorema de Tonelli nos permite utilizar o Teorema de Fubini para obter

$$
\begin{aligned}
\left(G_\alpha^\lambda\right)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha^\lambda(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\gamma_\lambda} e^{-\frac{\pi\lambda|x|^2}{z}} e^{-\frac{z}{4\pi}} z^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\,dz\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi\sqrt{\lambda}|x|^2}{t}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}} (\sqrt{\lambda}t)^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\sqrt{\lambda}\,dt\right) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi\sqrt{\lambda}|x|^2}{t}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}} (\sqrt{\lambda}t)^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\sqrt{\lambda}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dt\right) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi\sqrt{\lambda}|x|^2}{t}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}} (\sqrt{\lambda}t)^{\frac{\alpha-n}{2}-1}\sqrt{\lambda}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\right) dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi\sqrt{\lambda}|x|^2}{t}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\right) e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}(\sqrt{\lambda})^{\frac{\alpha-n}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{t}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi t|\xi|^2}{\sqrt{\lambda}}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}(\sqrt{\lambda})^{\frac{\alpha-n}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-n}\int_0^{+\infty} e^{-t\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]} t^{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\lambda})^{\frac{\alpha}{2}}\,dt. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, seja $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{C}$ definida por

$$
\gamma(t) = t\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right),
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]^{-\frac{\alpha}{2}}\int_\gamma e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dz \\
&= \left[\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]^{-\frac{\alpha}{2}}\int_\gamma e^{-t\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)}\left[t\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)} t^{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\lambda})^{\frac{\alpha}{2}}\,dt. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Por fim, para cada $r > 0$ seja $\gamma^r : [0,1] \to \mathbb{C}$ a curva definida por

$$
\gamma^r(t) = (1-t)\mathrm{Re}\gamma(r) + t\gamma(r),
$$

e para cada $r>1$ seja $I_r : [\mathrm{Re}\gamma(r^{-1}), \mathrm{Re}\gamma(r)] \to [\mathrm{Re}\gamma(r^{-1}), \mathrm{Re}\gamma(r)]$ a identidade. Como a função $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \ni z \to e^{-z}z^{\frac{\alpha}{2}-1} \in \mathbb{C}$ é analítica, dado $r>1$, segue pelo Teorema de Cauchy que

$$\left(\int_{I_r} + \int_{\gamma^r} - \int_{\gamma|_{[r^{-1},r]}} - \int_{\gamma^{\frac{1}{r}}}\right) e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz = 0. \tag{4.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma^r} e^{-z}z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz\right| &\leq \int_{\gamma^r} \left|e^{-z}z^{\frac{\alpha}{2}-1}\right|\, |dz| \\
&\leq \int_0^1 \left|e^{-(1-t)\mathrm{Re}\gamma(r) - t\gamma(r)}\right| |(1-t)\mathrm{Re}\gamma(r) + t\gamma(r)|^{\frac{\alpha}{2}-1} |\left(\gamma^r\right)'(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^1 e^{-\mathrm{Re}\gamma(r)} |\gamma(r)|^{\frac{\alpha}{2}-1} |\mathrm{Im}\gamma(r)|\, dt \\
&\leq e^{-\mathrm{Re}\gamma(r)}|\gamma(r)|^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\gamma(r) &= \mathrm{Re}\left[r\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right] \\
&= \frac{r}{4\pi}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} + 4\pi^2|\xi|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \\
&= \frac{r}{4\pi}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} + 4\pi^2|\xi|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\sqrt{\lambda}}}{|\sqrt{\lambda}|^2}\right)\right) \\
&= \frac{r}{4\pi}\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} + \frac{4\pi^2|\xi|^2}{|\lambda|}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

e $\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} + \frac{4\pi^2|\xi|^2}{|\lambda|}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) > 0$ pois $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$. Observe também que,

$$|\gamma(r)|^{\frac{\alpha}{2}} = r^{\frac{\alpha}{2}}\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Assim

$$\lim_{r\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}\gamma(r)}|\gamma(r)|^{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{r\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}} e^{-r\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right|} r^{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

e portanto

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma^r} e^{-z}z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz = 0.$$

Analogamente

$$\left|\int_{\gamma^{\frac{1}{r}}} e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz\right| \leq e^{-\mathrm{Re}\gamma(r^{-1})}|\gamma(r^{-1})|^{\frac{\alpha}{2}} = \left|\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{r}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\left(1+\frac{4\pi^2|\xi|^2}{\lambda}\right)\right]} r^{-\frac{\alpha}{2}},$$

logo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma^{\frac{1}{r}}} e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz = 0.$$

Portanto fazendo $r \to +\infty$ em (4.10) obtemos

$$\int_{\gamma} e^{-z} z^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dz = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\, dt = \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.11}$$

Segue de (4.8), (4.9) e (4.11) que

$$\left(G_\alpha^\lambda\right)^\wedge(\xi) = (\sqrt{\lambda})^{-n}\left(1+\lambda^{-1}4\pi^2|\xi|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

$\square$

**Proposição 4.1.6.** *Sejam $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{|\sqrt{\lambda}|}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)^{1+\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}\|(\lambda-\Delta)\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.12}$$

*Em particular, $\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é injetivo e dado $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,*

$$\|(\lambda-\Delta)^{-1}\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1-\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

*para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $|\mathrm{Arg}\lambda| \leq \theta$ e toda $\psi \in R(\lambda-\Delta)$.*

*Demonstração.* Seja $F_\lambda = \left(\sqrt{\lambda}\right)^n \lambda^{-1} G_2^\lambda$, temos então que $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e são válidas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_\lambda| \leq \left(\frac{|\sqrt{\lambda}|}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)^{1+\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}$$

$$(F_\lambda)^\wedge = (\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}.$$

Sejam $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi = (\lambda-\Delta)\phi$ temos então que $\widehat{\psi} = (\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)\widehat{\phi}$, logo

$\widehat{\phi} = (\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\psi}$ e portanto $\phi = F_\lambda * \psi$. Pela desigualdade de Young segue então que

$$\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\left(F_\lambda\right)^\wedge * \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\left(F_\lambda\right)^\wedge\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{|\sqrt{\lambda}|}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)^{1+\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

o que mostra, em particular, que $(\lambda - \Delta)$ é injetivo. Além disso, temos que

$$\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{|\sqrt{\lambda}|} = \cos(\mathrm{Arg}(\sqrt{\lambda})) = \cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\lambda}{2}\right)$$

e então dado $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{|\sqrt{\lambda}|} = \cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\lambda}{2}\right) = \cos\left(\frac{|\mathrm{Arg}\lambda|}{2}\right) \geq \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\mathrm{Arg}\lambda| \leq \theta$, pois a função cosseno é decrescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Portanto

$$\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1-\frac{n}{2}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{|\lambda|}$$

se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\mathrm{Arg}\lambda| \leq \theta$. □

Dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $\Delta_p : D(\Delta_p) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ o fecho do operador de Laplace $\Delta : D(\Delta) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos a partir daqui por $\Delta$ o laplaciano no sentido das distribuições, isto é, a aplicação $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ni u \to \Delta u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Observação 4.1.7.** *Temos que $\Delta_p = \Delta$ em $D(\Delta_p)$.*
*Dada $u \in D(\Delta_p)$, pela definição de $D(\Delta_p)$, existe uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\phi_j \to \Delta_p u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $\phi_j \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ segue que $\phi_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, logo pela continuidade do operador $\Delta : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ segue que $\Delta\phi_j \to \Delta u$. Por outro lado, como $\Delta\phi_j \to \Delta_p u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $\Delta\phi_j \to \Delta_p u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, como a topologia de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é Hausdorff segue que $\Delta_p u = \Delta u$.*

**Observação 4.1.8.** *Dado $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, $(\lambda - \Delta)$ é uma bijeção de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$, além disso, $(\lambda - \Delta)^{-1}\phi = \left[(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\phi}\right]^\vee$ para qualquer $\phi \in \mathscr{S}$.*

*De fato dadas $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ temos que,*

$$\begin{aligned}(\lambda - \Delta)\psi = \phi &\iff [(\lambda - \Delta)\psi]^\wedge = \widehat{\phi} \\ &\iff \left[\lambda - \sum_{j=1}^{n}(2\pi i)^2 \xi_j^2\right]\widehat{\psi} = \widehat{\phi} \\ &\iff \left(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2\right)\widehat{\psi} = \widehat{\phi} \\ &\iff \widehat{\psi} = \left(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2\right)^{-1}\widehat{\phi} \\ &\iff \psi = \left[(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\phi}\right]^\vee .\end{aligned}$$

**Observação 4.1.9.** *$\mathscr{S} \subset D(\Delta_p)$.*

*Dada $\phi \in \mathscr{S}$, usando a densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}$, seja $(\phi_j)$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to \phi$ em $\mathscr{S}$. Segue então que $\phi_j \to \phi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e da continuidade de $\Delta : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ temos também que $\Delta\phi_j \to \Delta\phi$ em $\mathscr{S}$, logo $\Delta\phi_j \to \Delta\phi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\phi \in D(\Delta_p)$.*

Juntando as Observações 4.1.7, 4.1.8 e 4.1.9 obtemos que dado $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, temos que $(\lambda - \Delta_p)$ é bijetor de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$ e $(\lambda - \Delta_p)^{-1}\phi = \left[(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\phi}\right]^\vee$ para qualquer $\phi \in \mathscr{S}$.

**Proposição 4.1.10.** *Dado $1 \leq p\infty$ temos que $\sigma(\Delta_p) \subset (-\infty, 0]$ e $-\Delta_p : D(\Delta_p) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é um operador setorial.*

*Demonstração.* Dados $\lambda \in \rho(\Delta_p)$ e $u \in D(\Delta_p)$, existe uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to u$ e $(\lambda - \Delta)\phi_j \to (\lambda - \Delta_p)u$. Usando a estimativa (4.12) para $\phi_j$ e fazendo $j \to \infty$ obtemos

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{|\sqrt{\lambda}|}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)^{1+\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}\|(\lambda - \Delta_p)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Segue então que o operador $(\lambda - \Delta_p) : D(\Delta_p) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é injetivo com inverso $(\lambda - \Delta_p)^{-1} : R(\lambda - \Delta_p) \to D(\Delta_p)$ contínuo. Como observamos que $\mathscr{S} \subset R(\lambda - \Delta_p)$, segue que $\overline{R(\lambda - \Delta_p)} = L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto $\lambda \in \rho(\Delta_p)$. Da estimativa acima segue que dado $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1-\frac{n}{2}} \frac{1}{|\lambda|}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $|\mathrm{Arg}\lambda| \leq \theta$. Portanto $-\Delta_p$ é setorial. $\square$

## 4.2 Uma caracterização para os espaços de potência fracionária associados ao operador $1 - \Delta_p$

**Lema 4.2.1.** *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $(f_j)$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *tal que* $f_j \to f$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então existe uma subsequência* $(f_{j_k})$ *de* $(f_j)$ *tal que* $f_{j_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$.

*Demonstração.* Ver [1], página 94. □

**Proposição 4.2.2.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *temos que:*

**(i)** $e^{-t(1-\Delta_p)} f = \left[e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)} \widehat{f}\right]^\vee = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-t} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * f\right)$ *para todo* $t > 0$.

**(ii)** $(1 - \Delta_p)^{-s} f = \left[(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-s} \widehat{f}\right]^\vee = G^1_{2s} * f$ *para todo* $s > 0$.

*Demonstração.* **(i)** Suponhamos inicialmente que $f = \phi \in \mathscr{S}$. Segue então que $e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)} \widehat{\phi} \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Notando que

$$e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} [\lambda + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \, d\lambda,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left[e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)} \widehat{\phi}\right]^\vee (x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_\Gamma e^{\lambda t} [\lambda + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \, d\lambda \right) \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_\Gamma e^{\lambda t} e^{2\pi i \xi x} [\lambda + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \widehat{\phi}(\xi) \, d\lambda \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Gamma(s)t} e^{2\pi i \xi x} [\Gamma(s) + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \widehat{\phi}(\xi) \Gamma'(s) \, ds \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Lembremos que a curva $\Gamma$ é tal que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $|\Gamma(s) + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)| \geq C_1$ e $|\Gamma(s)| \leq C_2$ para quaisquer $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Desta forma

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{\Gamma(s)t} e^{2\pi i \xi x} [\Gamma(s) + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \widehat{\phi}(\xi) \Gamma'(s) \right| ds \right) d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{\Gamma(s)t}| \left| [\Gamma(s) + (1 + 4\pi^2|\xi|^2)]^{-1} \right| |\widehat{\phi}(\xi)| |\Gamma'(s)| \, ds \right) d\xi \\
&\leq C_1^{-1} C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{\Gamma(s)t}| \, |\widehat{\phi}(\xi)| \, ds \right) d\xi \\
&= C_1^{-1} C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)| \, d\xi \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\Gamma(s)t} \right| \, ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo usando o Teorema de Fubini obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+(1+4\pi^2|\xi|^2)]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)\Gamma'(s)\,ds\right)d\xi\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+(1+4\pi^2|\xi|^2)]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)\Gamma'(s)\,ds\right)d\xi\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+(1+4\pi^2|\xi|^2)]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)\Gamma'(s)\,d\xi\right)ds\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+(1+4\pi^2|\xi|^2)]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)\,d\xi\right)\Gamma'(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Como $(\Gamma(s)+1)\in\mathbb{C}\backslash[-\infty,0)$ para todo $s\in\mathbb{R}$, temos que

$$
(\Gamma(s)+1-\Delta_p)^{-1}\phi=\left[(\Gamma(s)+1+4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\phi}\right]^{\vee},
$$

ou ainda,

$$
\left[(\Gamma(s)+1-\Delta_p)^{-1}\phi\right]^{\wedge}=(\Gamma(s)+1+4\pi^2|\xi|^2)^{-1}\widehat{\phi}
$$

para todo $s\in\mathbb{R}$. Portanto

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+(1+4\pi^2|\xi|^2)]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)\,d\xi\right)\Gamma'(s)\,ds\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}\left[(\Gamma(s)+1-\Delta_p)^{-1}\phi\right]^{\wedge}(\xi)\,d\xi\right)\Gamma'(s)\,ds\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}(\Gamma(s)+1-\Delta_p)^{-1}\phi(x)\Gamma'(s)\,ds\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi(x)\,d\lambda\\
\stackrel{*}{=}&\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi\,d\lambda\right)(x)=e^{-t(1-\Delta_p)}\phi(x).
\end{aligned}
$$

A igualdade $\stackrel{*}{=}$ se justifica da seguinte maneira, para cada $j\in\mathbb{N}$ seja $P_j=\{t_k^j\}_{k=0}^{N_{P_j}}$ uma partição de $[-j,j]$ tal que,

$$
\left\|\int_{\Gamma|_{[-j,j]}} e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi\,d\lambda-\sum_{k=1}^{N_{P_j}}\left[\Gamma\left(t_k^j\right)-\Gamma\left(t_{k-1}^j\right)\right]e^{\Gamma\left(t_k^j\right)t}\left[\Gamma\left(t_k^j\right)+1-\Delta_p\right]^{-1}\phi\right\|_{L^p(\mathbb{R})^n}<\frac{1}{j}
$$

Representando a soma acima simplesmente por $f_j$ temos que $f_j\to\int_\Gamma e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi\,d\lambda$ em $L^p(\mathbb{R})^n$, logo pelo Lema 4.2.1 existe uma subsequência de $(f_j)$ convergindo pontualmente para $\int_\Gamma e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi\,d\lambda$, sem perda de generalidade podemos supor que tal subsequência é a própria sequência $(f_j)$. Obtemos assim que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Gamma e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi\,d\lambda\right)(x)&=\lim f_j(x)\\&=\int_\Gamma e^{\lambda t}\left[\lambda+(1-\Delta_p)\right]^{-1}\phi(x)\,d\lambda\end{aligned}$$

para quase todo $x\in\mathbb{R}^n$. Por fim seja $B:\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$ operador linear definido por

$$Bf=\left[e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)}\widehat{f}\right]^\vee,$$

temos que $B$ é contínuo. Como a inclusão $L^p(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{S}'$ é contínua, temos que as aplicações $(1-\Delta_p)^{-s}:L^p(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'$ e $B|_{L^p(\mathbb{R}^n)}:L^p(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'$ são contínuas. Além disso, como tais aplicações coincidem em um subespaço denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{S}'$ é Hausdorff, segue que tais aplicações são iguais. Portanto, segue a primeira igualdade.

Se $f\in\mathscr{S}$, a segunda igualdade segue imediatamente do Teorema 3.3.4 (c) e da Proposição 3.3.6. Então a segunda igualdade é válida para qualquer $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, por argumentos análogos aos usados acima.

**(ii)** Novamente, suponhamos que $f=\phi\in\mathscr{S}$. Temos que $(1+4\pi^2|\xi|^2)^s\,\widehat{\phi}\in\mathscr{S}\subset L^1(\mathbb{R}^n)$, assim

$$\begin{aligned}\left[\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)^s\widehat{\phi}\right]^\vee&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)^s\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)t}\,dt\right)\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi\\&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)t}\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,dt\right)d\xi.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}\left|t^{s-1}e^{-\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)t}\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\right|\,dt\right)d\xi\\\le&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}|\widehat{\phi}(\xi)|\,dt\right)d\xi\\=&\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\phi}(\xi)|\,d\xi\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}\,dt=\|\widehat{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\Gamma(s)<\infty.\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema de Tonelli, a função no integrando em (4.13) pertence a $L^1(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))$ e então usando o Teorema de Fubini segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)t}\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,dt\right)d\xi\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} t^{s-1}e^{-\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)t}\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\right)dt\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[e^{-t(1-\Delta_p)}\phi\right]^\vee(\xi)\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\right)dt\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t(1-\Delta_p)}\phi(x)\,dt\\
&=\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t(1-\Delta_p)}\phi\,dt\right)(x)=(1-\Delta_p)^{-s}\phi(x).
\end{aligned}$$

Portanto as duas igualdades seguem por argumentos análogos aos usados no final da demonstração de (ii). □

**Observação 4.2.3.** *Dado $t>0$, note que $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-t}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*f\right)$ é uma função "clássica", isto é, uma função que está definida em cada ponto de $\mathbb{R}^n$. De fato, dado $x\in\mathbb{R}^n$ pela desigualdade de Holder temos que*

$$\left|e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*f(x)\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\right||f(x-y)|\,dy\le\left\|e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Portanto $e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*f(x)$ existe.*

**Observação 4.2.4.** *Dados $1\le p<\infty$ e $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, sabemos que a aplicação $u:[0,+\infty)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ definida por $u(t)=e^{t\Delta_p}f$ verifica a equação*

$$\begin{cases}\dot{u}(t)-\Delta_p u(t)=0, & t\in(0,+\infty)\\ u(0)=f.\end{cases}\tag{4.14}$$

*Por outro lado, pela Proposição 4.2.2 (i), sabemos agora que*

$$u(t)=e^{t\Delta_p}f=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*f\right).$$

*Dessa forma, podemos agora verificar que a função $v:\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ definida por*

$$v(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}*f\right)(x),$$

*satisfaz a equação*

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ v(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{4.15}$$

*onde a condição de fronteira* $v(x,0) = f(x)$ *é interpretada por* $\|v(\cdot,t) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ *quando* $t \to 0+$. *De fato, segue imediatamente da continuidade de* $u$ *em* $0$, *que* $v$ *verifica a condição de fronteira de* (4.15). *Além disso, uma verificação rápida mostra que*

$$(\partial_t - \Delta)\left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right] = 0,$$

*para quaisquer* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$. *Temos também que, dado* $t_0 > 0$

$$\begin{aligned}
\left| f(x-y)\partial_t \left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\right]\right| &= |f(x-y)| \left|(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \frac{|y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} - 2n\pi(4\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\right| \\
&\leq |f(x-y)| \left((4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \frac{|y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} + 2n\pi(4\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\right) \\
&\leq |f(x-y)| \left((2\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} \frac{|y|^2}{t_0^2} e^{-\frac{|y|^2}{8t_0}} + 2n\pi(2\pi t_0)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|y|^2}{8t_0}}\right),
\end{aligned}$$

*para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $t \in \left(\frac{t_0}{2}, 2t_0\right)$. *Como a função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$g(y) = (2\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} \frac{|y|^2}{t_0^2} e^{-\frac{|y|^2}{8t_0}} + 2n\pi(2\pi t_0)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|y|^2}{8t_0}}$$

*pertence a* $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, *segue pela desigualdade de Holder que* $|f(x-\cdot)|g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$. *Portanto, usando o Teorema da convergência dominada temos que*

$$\partial_t \left(\left[(4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t_0}}\right] * f(x)\right) = \left(\partial_t \left[(4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t_0}}\right]\right) * f(x),$$

*para quaisquer* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t_0 > 0$. *Usando argumentos semelhantes, mostramos que*

$$\Delta \left(\left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right] * f(x)\right) = \left(\Delta \left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right]\right) * f(x).$$

*para quaisquer* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$. *Portanto, segue que*

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)\left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} * f(x)\right)\right] &= (\partial_t - \Delta)\left[\left((4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right) * f(x)\right] \\
&= \left[(\partial_t - \Delta)\left((4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right)\right] * f(x) = 0.
\end{aligned}$$

*para quaisquer* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$.

**Observação 4.2.5.** *Dado* $1 \leq p < \infty$, *o item* **(ii)** *da Proposição 4.2.2 nos dá uma caracterização para o espaço de potência fracionária* $X^s$ *associado ao operador setorial* $(1 - \Delta_p) : D(\Delta_p) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$. *De fato, temos que*

$$\begin{aligned} X^s = D\left((1-\Delta_p)^s\right) &= R\left((1-\Delta_p)^{-s}\right) = \left\{(1-\Delta_p)^{-s} f : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\} \\ &= \left\{\left[\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)^{-s} \widehat{f}\right]^{\vee} : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\} = \left\{\Lambda^{-2s} f : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\} \\ &= \left\{G^1_{2s} * f : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}. \end{aligned}$$

*Em particular, se* $p = 2$ *obtemos que* $X^s = H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. *Além disso,*

$$\|f\|_{X^s} = \|(1-\Delta_p)^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^{2s} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{R}^n)}$$

*para toda* $f \in X^s$. *Portanto, neste caso* $X^s$ *é exatamente o espaço de Sobolev* $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$.

# Bibliografia


[1] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolex Spaces and Partial Differencial Equations*, Springer, New York, 2011.

[2] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley, New York, 1999.

[3] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] A.N. Carvalho, *Análise Funcional II*, Notas de aula, ICMC, São Carlos, 2012. http://www.icmc.usp.br/ andcarva/analisefuncional-ii.pdf, último acesso: 21/02/2016.

[5] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[6] P. Cordaro, *Teoria das Distribuições e Análise de Fourier*, Notas manuscritas, 1999.

[7] E.M. Stein, *Singular Integrals e Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[8] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Spring-Verlag, New York, 1980.

[9] E.M. Stein, *Complex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2003.

[10] K. Burns, M. Gidea, *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems*, Chapman e Hall/CRC, London, 2005.