Geometria de teias

Rodrigo Lopes Costa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC USP

DATA DE DEPÓSITO:

ASSINATURA:

Geometria de teias

Rodrigo Lopes Costa

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos

Abril/2009

*Aos meus amados pais Irene Lopes Costa e
Elzo Costa (in memoriam)*

Resumo

A geometria de teias dedica-se ao estudo de invariantes locais para uma determinada configuração de folheações. Uma d -teia é uma coleção de folheações que estão em posição geral. Desta forma, uma d -teia plana, definida em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, nada mais é que uma família de d folheações por curvas. Apresentamos neste trabalho os principais conceitos da teoria clássica de teias, iniciada por W. Blaschke por volta de 1930, bem como uma abordagem atual utilizada no estudo de teias planas. São abordados dois tipos de problemas importantes na teoria: os problemas de *linearização* e de *algebrização* de teias. Provamos um resultado clássico no que concerne ao problema de linearização, e um resultado de algebrização de teias empregando métodos desenvolvidos mais recentemente.

Abstract

Web geometry is devoted to the study of local invariants of a certain configuration of foliations. A d -web is a collection of foliations in general position. Therefore, a d -web defined in $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{C}^2$ is just a family of d foliations by curves. We present in this work the main concepts of classical theory of webs, initiated by W. Blaschke around 1930, as well as newer methods used in the study of plane webs. We approach two important types of problems in the theory: problems of *linearization* and that of *algebrization* of webs. We prove a classical result concerning the linearization problem, and a result of algebrization of webs using recently developed methods.

Agradecimentos

Este trabalho é para mim mais que uma dissertação de mestrado. É a concretização de esforços não só meus, mas de muitas outras pessoas a quem começo a agradecer.

Primeiramente agradeço a Deus.

Agradeço a minha mãe Irene Lopes Costa. Mãe, este trabalho é mais teu do que meu. Agradeço-te por ter praticamente abdicado de tua vida para que conseguisse me proporcionar uma educação de qualidade, que você não teve acesso em tua juventude, mas fez de tudo para que eu pudesse ter. Pelas vezes em que você me encorajava a terminar este trabalho nos meus momentos de fraqueza. Por ter ouvido meus choros e reclamações, seja por telefone ou pessoalmente e, logo em seguida, ajoelhar-se diante do teu Deus e orar em meu favor. Por ter sido a minha primeira professora a me ensinar em casa as primeiras letras e números. Preferi os números às letras e hoje, graças a você serei mestre em Matemática. Muito obrigado por tudo. Te amo! Agradeço a meu Pai Elzo Costa (*in memoriam*) que também estaria feliz junto comigo pela conquista deste título se estivesse ainda entre nós.

Também agradeço a minha família que, juntamente com minha mãe, me deu todo apoio possível para que este trabalho fosse concluído. Agradeço as minhas tias Maria Aparecida Antônio e Lúcia Lopes Antônio por todo o suporte dado a mim e minha mãe nos momentos em que precisamos. E claro, a todos os membros de minha família. Quero que saibam que os estimo muito. Agradeço também a Eduardo de Mayo por todo apoio prestado durante minha graduação.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas por também sempre ter me incentivado a concluir este trabalho com sábios conselhos. Por

toda a atenção dedicada a mim sempre que precisei. Agradeço por ter acreditado em mim. Te considerarei sempre minha orientadora, modelo de pessoa e profissional que um dia, embora seja muita pretensão minha, gostaria de ser. Agradeço por ter me dado a oportunidade de conhecer uma área da Matemática que eu não conhecia e gostei muito. Enfim, sem a Sra. esta dissertação não existiria. Muito obrigado, Cidinha!

Não posso deixar de agradecer meus amigos. Quero agradecer aos meus primeiros amigos que conheci assim que cheguei aqui em São Carlos. Agradeço a Vivian Hermógenes (Vi) por todos os conselhos, cuidados e carinho dedicados a mim; a Thiago Tentoni Dias (Thi) por todo companheirismo. Você sabe que te considero mais que um irmão! A Edilaine Martins Soler (Dila) também pelos bons momentos que passamos juntos na nossa graduação. Embora separados fisicamente, vocês estão dentro do meu coração.

Aos meus amigos Cléber Carvalho Pereira (Babado), Fabrício Borges Moreira (Fafito), Nikolas Paparidis (Nikito), Marcelo Demunari (Devil), André Camargo Parra (Sapão) e Angela Caldeira (Angel) pelos grandes, deliciosos, agradáveis, descontraídos e nostálgicos momentos que passamos todos juntos. Vocês são especiais para mim. Ao meu amigo Marcos Vinícios (Vi) pelos bons momentos que me ajudaram a terminar este trabalho. Aos meus amigos conterrâneos Vanessa Giordani (minha eterna coisa), Simone Madureira, Fábio Martins e Ricardo Franco (amigos de infância) por todos bons momentos que passamos sempre que retorno à Garça. Vocês meus amigos são lindos presentes que a vida me deu! Também agradeço a todos os amigos e colegas da turma de mestrado de 2007 que conheci.

Agradeço a todos meus queridos professores que contribuíram para minha formação. São inúmeros os nomes. Agradeço a todos vocês. Em especial agradeço a Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel, minha primeira orientadora de IC quem primeiro me mostrou como é a vida de um pesquisador em Matemática tendo despertado em mim o interesse para esta profissão. A Profa. Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy por ter sido uma excelente professora e amiga, tendo me ajudado em inúmeros problemas. Igualmente agradeço a Profa. Dra. Sueli Mieko Tanaka Aki pelos conselhos e simpatia com que sempre me tratou, bem como a Profa. Dra. Ires Dias pelas conversas e conselhos. Também agradeço a Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis por me ajudar com o idioma italiano na tradução e compreensão de um artigo importante para este trabalho.

A todos os funcionários deste instituto agradeço. Agradeço aos funcionários da biblioteca de quem obtive total cooperação neste trabalho. Igualmente ao pessoal do STI (Seção Técnica de Informática) por toda a ajuda. Em especial agradeço a Ana Paula Sampaio Fregona, Elizabeth Luisa Moretti e Silva, Laura Aparecida Donizeti Ruy Turi e Lívia Rodrigues pelo excelente trabalho desempenhado na seção de pós-graduação deste instituto, sendo solícitas e gentis sempre que precisei. Muito obrigado!

Finalmente, agradeço a CAPES por ter apoiado nosso trabalho.

“Até a mais alta das torres começa no solo”.

Provérbio chinês (Anônimo)

Sumário

Lista de Figuras	12
1 Análise histórica: nascimento e desenvolvimento da geometria de teias	15
1.1 O nascimento da geometria de teias	15
1.2 Início do estudo sistemático de teias e seu desenvolvimento	17
2 Preliminares	23
2.1 Dualidade projetiva	23
2.2 Formas diferenciais	27
2.3 Folheações	33
2.3.1 Folheações singulares de dimensão 1	38
2.3.2 Folheações singulares de codimensão 1	39
3 Definição e Exemplos	41
3.1 Teias Planas	41
3.2 Exemplos	46
3.2.1 Teias em geometria diferencial projetiva	46
3.2.2 Teias em geometria algébrica projetiva	47
3.2.3 Teias em equações diferenciais	50
3.3 Teias multidimensionais	51

4	Introdução à geometria de teias	55
4.1	Invariantes	55
4.1.1	O posto de uma d -teia	57
4.1.2	A curvatura de Blaschke de uma 3-teia	60
5	O Teorema de caracterização das 3-teias	65
5.1	O teorema de Thomsen	69
6	Teias algébricas e a equação de Clairaut	73
6.1	Polinômios associados	73
6.2	Equações de Clairaut	79
	Referências Bibliográficas	85

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de um nomograma	17
1.2	Exemplo de nomograma (ou ábaco) retílico	18
2.1	Plano projetivo	24
2.2	Dualidade projetiva	25
2.3	Folheação	35
3.1	Uma d -teia sobre Ω	42
3.2	$\mathcal{H}(3) = \{x, y, x + y\}$	43
3.3	A teia singular $\mathcal{W}(3) = \{x, y, x^2 + y^2\}$ e seu conjunto singular	44
3.4	Pontos umbílicos de Darboux	47
3.5	Uma 3-teia obtida por dualidade do plano projetivo	48
3.6	Esboço de $\mathcal{A}_{C_1}(2)$	49
3.7	Esboço de $\mathcal{A}_{C_2}(3)$	49
3.8	Uma teia multidimensional paralela em $\mathbb{R}^3$	52
4.1	Todas 2-teias são localmente equivalentes	56
4.2	Construção do hexágono	60
5.1	Demonstrando o teorema de Thomsen - 1	68
5.2	Demonstrando o teorema de Thomsen - 2	69

Introdução

A geometria de teias tem seu início por volta de 1930 quando W. Blaschke descobre um invariante diferencial para uma determinada configuração de curvas no plano. Esta configuração de curvas foi estudada por seu aluno Thomsen no artigo [Th 27] que é considerado o artigo que deu início ao estudo sistemático da teoria de teias.

Uma teia plana nada mais é que uma família de folheações por curvas de $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{R}^2$. Thomsen, em seu artigo citado acima, estuda quando é possível linearizar uma família de três folheações no plano, ou seja, quando tal família é equivalente a uma família de retas (cf. definição 4.1.1). Este problema deu início a uma teoria rica e vasta conhecida hoje como geometria de teias.

O objetivo do nosso trabalho é dar uma introdução aos principais problemas estudados na geometria de teias, a saber, os problemas de linearização e algebrização de teias planas. Apresentamos uma revisão da teoria clássica de teias bem como métodos mais recentes para seu estudo. A seguir, descrevemos como este trabalho está estruturado.

No capítulo 1 é apresentada uma análise histórica da teoria. Fizemos um estudo bibliográfico com o objetivo de entender como surgiu a geometria de teias e como está seu desenvolvimento. Percebemos uma certa carência de textos introdutórios à teoria clássica em inglês e em português, sendo possível encontrar apenas em alemão (os originais de W. Blaschke) e em russo (a tradução do mesmo).

No capítulo 2, intitulado Preliminares, são revisados alguns conceitos necessários à definição de uma d -teia e ao desenvolvimento da teoria. São apresentados alguns tópicos de geometria algébrica e folheações. No que se refere à geometria algébrica, o que nos interessa é o conceito de dualidade, enquanto que folheações são os objetos básicos da

teoria, como dissemos mais acima. Ambos os temas são abordados de maneira sucinta, ressaltando apenas o que iremos usar nos próximos capítulos.

No capítulo 3 (Definição e exemplos) damos a definição de teia e alguns exemplos de como as teias surgem em diversos ramos da matemática. O enfoque que damos neste trabalho de mestrado é o estudo das teias planas, ou seja, aquelas definidas em uma variedade de dimensão 2. O conceito de teia pode ser estendido a variedades de dimensões maiores, muito embora nos restringimos apenas em dar a definição e alguns exemplos de teias multidimensionais.

No capítulo 4 começamos a estudar os principais conceitos da geometria de teias. É neste capítulo que apresentamos dois invariantes básicos das teias planas: o posto de uma teia, e a curvatura de Blaschke. Ambos os conceitos fazem parte da teoria clássica de teias e através deles é que caracterizaremos as teias planas paralelizáveis de posto máximo.

O capítulo 5 é dedicado ao teorema de caracterização das 3-teias planas. Este foi o estudo feito por Thomsen e a demonstração de seu resultado é mostrada neste capítulo. Acharmos indispensável na compreensão da teoria clássica estudar o artigo que iniciou a teoria de teias.

No capítulo 6 mostramos um método mais recente, devido à Alain Hénaut, empregado no estudo da geometria de teias. Alain Hénaut inicia na década de 90 um estudo de teias dentro de um quadro analítico complexo. Ele utiliza, ao invés da definição clássica de teia, uma definição equivalente, que faz com que o estudo de teias muito se assemelhe ao estudo geométrico de equações diferenciais. É deste ponto de vista que buscamos saber quais são as teias algebrizáveis do plano e demonstramos que são justamente aquelas apresentadas via uma equação diferencial polinomial de Clairaut.

Análise histórica: nascimento e desenvolvimento da geometria de teias

Neste capítulo, damos uma breve introdução histórica das origens da geometria de teias, bem como de seu desenvolvimento até a atualidade. As duas principais referências para este capítulo são a tese de doutorado de Luc Pirio em [P] e o livro de Akivis e Goldberg [AG-2].

1.1 O nascimento da geometria de teias

O estudo sistemático da geometria de teias teve seu início por volta de 1930, na cidade de Hamburgo, por Wilhelm Johann Eugen Blaschke e seus alunos. Mas podemos encontrar suas origens antes, em meados do século 19. Os conceitos e problemas que deram origem à teoria têm como fonte dois ramos distintos da matemática do século 19: a geometria diferencial projetiva e a nomografia. Discutimos, a seguir, a ligação de cada um destes ramos com o nascimento da geometria de teias.

É principalmente da geometria diferencial projetiva do século 19 que nasce a geometria de teias. Esta disciplina surge da visão de Klein sobre a geometria que, no século 19, consistia basicamente dos estudos das propriedades projetivas das curvas e superfícies de $\mathbb{R}^3$. A geometria gaussiana, mais antiga, estudava as propriedades das superfícies do espaço euclidiano que são invariantes por transformações isométricas. Gauss e outros matemáticos estudaram as primeira e segunda formas fundamentais das superfícies, e os conceitos que se podiam deduzir a partir destas formas, tais como as noções de

direções principais, direções assintóticas, direções conjugadas, etc. Considerando as curvas integrais destas distribuições de direções, os geômetras da época consideravam o que chamavam de “1-rede” e “2-rede” de curvas sobre a superfície, ou seja, uma ou duas famílias de curvas, ou em termos mais modernos, uma 1-teia ou 2-teia (cf. 3.2.1).

É na tentativa de generalizar estas construções para a geometria diferencial projetiva que surgem as “3-redes” projetivamente relacionadas às superfícies de $\mathbb{R}^3$ (por exemplo, Darboux introduziu uma 3-rede que leva seu nome. Ver [Dar 80]). O interesse nestas redes reside no fato de que a partir de seu estudo, podiam-se obter certas propriedades da superfície estudada. O artigo de Thomsen [Th 27] (conhecido como o artigo que iniciou o estudo sistemático das teias) associa propriedades geométricas da superfície à condição de que sua 3-rede de Darboux seja hexagonal.

Outra origem da teoria de teias foi a nomografia. Esta disciplina (hoje quase desaparecida) fazia parte da “matemática aplicada” da época. Foi Maurice d’Ocagne que a estabeleceu como disciplina matemática autônoma por volta de 1900. Consistia de um método de cálculo gráfico que permitia aos engenheiros da época efetuar cálculos numéricos rapidamente. O princípio é simples: se $F(a_1, a_2, a_3) = 0$ é uma lei que relaciona três variáveis físicas, o problema era o de determinar de maneira rápida e suficientemente precisa uma variável a_i , a partir das outras duas: a_j e a_k . Para resolver este problema, introduziram-se os ábacos, também chamados de nomogramas. Um ábaco, ou ainda ábaco cartesiano, é um gráfico que representa algumas “linhas cotadas” seguindo diferentes valores das variáveis a_i . Para encontrar, por exemplo, a_1 em função de a_2 e a_3 , encontra-se o ponto de intersecção das linhas cotadas $a_2 = \alpha_2$ e $a_3 = \alpha_3$. Por este ponto, ou próximo deste ponto, passa uma linha $a_1 = \text{cte}$ cuja cota dá o valor procurado. Este processo era reconhecido como bastante satisfatório e, na época, a nomografia deu origem a muitos trabalhos e problemas, tanto em “cálculo gráfico” como nos ramos “puros” da matemática. Por exemplo, Hilbert formulou um de seus célebres 23 problemas relativo a certos resultados de nomografia. Notemos também que ela era ensinada até meados dos anos 60 nas escolas de engenharia da França, e até os anos 80 na União Soviética.

Sua principal desvantagem é que um ábaco, ou nomograma, pode ser muito difícil de ler. Por exemplo veja a figura 1.1 e compare com a figura 1.2. É claro que se as linhas do ábaco fossem segmentos de reta seria muito mais fácil utilizá-lo. Assim, colocava-se a questão de saber quando era possível linearizar as linhas cotadas de um ábaco dado. Logo, o problema de linearização de uma teia já aparecia dentre as questões

Figura 1.1: Exemplo de um nomograma

de matemática aplicada do início do século XX.

1.2 Início do estudo sistemático de teias e seu desenvolvimento

A teoria de teias foi constituída como disciplina autônoma principalmente pela contribuição da chamada “escola de Hamburgo”, formada por Blaschke e muitos outros colaboradores. A atividade intensa desta escola alemã parou tão rapidamente quanto começou, próximo do final dos anos 30. Ainda por volta do final dos anos 50, encontramos alguns pesquisadores que publicaram sobre teias: assim, Bompiani, Terracini e Buzano, nos anos 37-40, obtiveram resultados interessantes. Depois da guerra, alguns outros matemáticos italianos trabalharam também com as teias sob um outro ponto de vista. Alguns matemáticos europeus isolados (espanhóis, turcos, romenos) também se interessaram por teias participando de muitas conferências que Blaschke fez na Europa sobre o assunto.

A escola de Hamburgo

É um pouco após à publicação do artigo de Thomsen [Th 27] que aparece em Hamburgo, em torno de W. Blaschke, um grupo de pesquisadores em teias. Em

Figura 1.2: Exemplo de nomograma (ou ábaco) retílineo

pouco menos de dez anos, Blaschke e seus colaboradores obtiveram muitos resultados que tornaram a teoria de teias uma disciplina bem estabelecida. O que Thomsen demonstrou foi que uma 3-rede é equivalente a $\mathcal{W} = \{x, y, x + y\}$ se, e somente se, a 3-rede possui a “propriedade hexagonal”. Em seguida, Blaschke descobriu que esta configuração de 3-rede possui um invariante diferencial local, hoje chamado de curvatura de Blaschke.

Os artigos de Blaschke e Thomsen abriram uma nova direção em geometria diferencial, na qual os invariantes locais das aplicações diferenciáveis foram estudados. Muitos dos artigos anteriores de Blaschke aplicavam as ideias de Klein, formuladas em seu famoso *Erlangen program* (ver [F K1]). De acordo com este programa, uma geometria é o estudo das propriedades de figuras geométricas que são invariantes sob certas transformações que compõem um grupo.

Blaschke estendeu este método para a teoria de teias. Ele tomou o grupo (mais precisamente, o pseudogrupo) de todas as transformações diferenciáveis, da variedade onde a teia é definida, e estudou invariantes locais das teias relativos às transformações deste grupo. Blaschke, seus alunos e colaboradores, em um curto espaço de tempo (1927-1938), publicaram 66 artigos sob o título geral de *Topologische Fragen der Differentialgeometrie*. Estes e outros resultados foram coletados e publicados no livro [BB] por Blaschke e Gerrit Bol. Em 1955 Blaschke escreveu também o livro [Bl 55] como uma introdução à geometria de teias.

A interpretação do teorema de Graf e Sauer (ver [GS 24]) na linguagem da teoria de teias foi feita por Blaschke. Este teorema diz que uma 3-teia linear que possui uma relação abeliana não degenerada é formada pelas tangentes de uma curva algébrica plana de grau três. Rapidamente, em 1932, Blaschke e Howe generalizaram este teorema para o caso de uma d -teia linear que admite uma relação abeliana (não degenerada), fazendo surgir assim, o interesse pela noção de *relação abeliana*. O resultado de Bol que dá o limitante superior explícito $(d-1)(d-2)/2$ para a dimensão do espaço das relações abelianas de uma d -teia foi obtido pouco tempo depois, e permitiu a definição de posto de uma teia (cf. 4.1.1). Com este formalismo, Howe observou que o antigo resultado de Lie sobre superfícies de dupla translação podia ser interpretado em teoria de teias: toda 4-teia de posto 3 (ou seja, posto máximo) é algebrizável. A relação entre as teias de posto máximo e o teorema de Abel foi notada um ano mais tarde por Blaschke em [Bl 33-1], dando assim início à noção de teia algébrica. Blaschke enuncia também a generalização do teorema de Lie para o caso de uma 5-teia: toda 5-teia de posto 6 é algebrizável. Sabe-se hoje que isto não é verdade e o contra exemplo clássico (que por quase 70 anos foi o único) é a 5-teia de Bol. Um fato surpreendente é que a teia de Bol é apresentada neste mesmo artigo como sendo uma 5-teia de posto 5. Foi somente em 1935 que Bol percebeu que sua 5-teia é, na verdade, um exemplo de uma 5-teia de posto máximo que não é algebrizável (pois não é linearizável).

É também neste momento que Blaschke e seus colaboradores desviam-se da geometria de teias para estudar questões de geometria integral. Poucos membros da escola de Hamburgo trabalharam novamente com teias a partir de então. Após a guerra, Blaschke fez muitas palestras sobre teias pela Europa, sem produzir resultados novos.

A geometria de teias na Itália

Na mesma época (1937-1940), alguns geômetras italianos obtiveram alguns resultados interessantes com relação às teias planas. Estes resultados apareceram em vários artigos de Bompiani, de Terracini e de Buzano, muito embora já fossem conhecidos pela escola de Hamburgo (por exemplo, por Bol). Seus trabalhos são mais interessantes em relação ao estudo das teias excepcionais. A partir de uma construção de Blaschke, e utilizando uma noção introduzida por Corrado Segre, eles mostraram que dada uma teia excepcional, podia-se associar a ela uma superfície de $\mathbb{CP}^5$ cuja geometria é muito particular. Terracini e Buzano, então, determinaram explicitamente novas superfícies com esta geometria, cada superfície possuindo uma 5-teia particular. Outros matemáticos

italianos (como Vaona e Villa) estudaram alguns problemas de deformação de 3-teias planas por volta dos anos 50 e início dos anos 60. Eles obtiveram certos resultados interessantes, por exemplo sobre a conjectura de Gronwall (ver [Va 61]).

A geometria de teias no resto da Europa

Como já dissemos, Blaschke fez muitas conferências sobre a teoria de teias no período pós-guerra, o que despertou o interesse de alguns pesquisadores europeus. Citemos por exemplo Ozkan, na Turquia, que publicou vários artigos sobre teias nos anos 50, ou ainda o espanhol A. Dou, que publicou “un mémoire” pouco conhecido e interessante sobre as 4-teias do plano [Dou 53].

Citemos também o trabalho dos geômetras romenos Pantazi e Mihaileanu, que em pequenas notas, conseguiram alguns resultados particularmente importantes sobre o problema da determinação do posto de teias planas.

A escola Russa: Akivis e Goldberg

O final dos anos 60 vê o nascimento da escola russa com os trabalhos de Akivis e Goldberg, cujas publicações foram muitas e englobaram aspectos diferenciais e algébricos da teoria de teias. Esta escola é muito ativa ainda hoje em dia.

Mostramos mais atrás a ligação entre o nascimento da teoria de teias e a geometria diferencial projetiva. A partir do início do século 20, alguns geômetras queriam estender a geometria diferencial projetiva ao estudo das subvariedades de espaços projetivos de dimensão arbitrária (podemos citar Cartan, Bol, Terracini, etc.). No entanto, na mesma época, esta disciplina começava a diminuir no ocidente. A situação foi completamente diferente na União Soviética, onde uma grande escola de geometria diferencial vivia, conduzida por Finikov, Laptev e Vasilyev. As noções clássicas da geometria diferencial projetiva de curvas e superfícies foram generalizadas. As noções de formas fundamentais, de redes conjugadas, foram estendidas às subvariedades de espaços projetivos de dimensão qualquer. As técnicas empregadas fizeram um importante uso das contribuições de Elie Cartan para a geometria (método do referencial móvel, teoria dos sistemas diferenciais exteriores).

Foi o estudo das redes e dos sistemas conjugados sobre variedades projetivas de dimensão arbitrária que levou Akivis e Goldberg a estudarem teias em dimensão qualquer. Foram muitos os seus resultados que conduziram a uma teoria rica, agora exposta em

muitos livros (como por exemplo [G], [AG-2], etc.) e tratam de teias em dimensões maiores que 2 (chamaremos de “teias multidimensionais” cf. 3.3). Sobre as teias planas, um de seus resultados importantes é [AGL 04], em que trazem uma resposta a uma conjectura antiga de Blaschke referente à linearização de teias planas. Vários resultados sobre o posto de teias multidimensionais foram igualmente obtidos em meados dos anos 80 por Goldberg, que também descobriu três 4-teias excepcionais de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ (ver o oitavo capítulo do livro [G], onde estes resultados são descritos precisamente).

Os trabalhos de Chern e Griffiths

Chern começa sua carreira matemática em Hamburgo, em meados dos anos 30, onde fez sua tese sobre teias sob a supervisão de Blaschke. Ele obteve dois resultados (um é o limitante de Castelnuovo para o posto de teias de codimensão 1, o outro diz respeito a invariantes diferenciais das 3-teias de codimensão 2 em $\mathbb{R}^{2n}$) os quais foram publicados em 1935 e 1936, respectivamente. Chern conservou ao longo de sua carreira um interesse pelas teias, e mais particularmente pela noção de teia excepcional, como mostra a leitura de [Ch 82], [Ch 85] e [Ch 92]. Em 1978, voltou a trabalhar em teias de posto máximo com Griffiths. No artigo [CG 78] eles demonstram que uma d -teia de codimensão 1 e de posto máximo é algébrica quando $n \geq 2$ e $d \geq 2n$. Contudo a prova não estava completa pois era necessário fazer uma hipótese adicional para garantir a validade do resultado. Eles obtiveram igualmente um limitante ótimo para o posto das teias de codimensão 2 em [CG 78-1].

Trabalhos recentes: 1980-2000

Depois de 20 anos após o início da escola russa, novos resultados foram obtidos. Vamos ressaltar aqueles relacionados ao posto, às relações abelianas e às teias excepcionais.

As relações abelianas da teia de Bol decorrem todas da relação dilogarítimica satisfeita pelo dilogarítmo de Rogers que, deste ponto de vista, parece ser mais fundamental que os outros. Em 1982, em [GM 82], Gelfand e MacPherson obtiveram uma interpretação geométrica desta relação que levou à caracterização da teia de Bol como teia sobre o espaço das configurações projetivas de 5-pontos em $\mathbb{RP}^2$. Em [Da 83], Damiano considera para $n \geq 2$ a teia em curva $D(n)$ naturalmente definida sobre o espaço das configurações projetivas de $n+3$ pontos em $\mathbb{RP}^n$. Utilizando o método de Gelfand e MacPherson, ele mostra que esta teia é de posto máximo e dá uma interpretação geométrica da “relação abeliana principal” de $D(n)$. Ele obteve, assim, uma família de teias excepcionais

generalizando a teia de Bol (que corresponde ao caso $n = 2$).

Depois de ter mostrado que uma d -teia de codimensão 2 sobre $\mathbb{C}^4$ de posto máximo é algebrizável para $d > 4$, Goldberg determina algumas 4-teias de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ que são excepcionais. Em [Gol 86] e [Gol 87], são dadas explicitamente três 4-teias de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$, de posto máximo (igual a 1 neste caso) mas não algebrizáveis. Ele não dá uma interpretação geométrica da relação abeliana para cada uma das teias mas estuda sua geometria.

Em 1989, Little em [Lit 89] dá uma construção geral (mas não explícita) de uma $2n$ -teia de codimensão 2, de posto máximo, sobre o espaço dos 0-ciclos de grau $2n$ de uma superfície $K3$. Apoiando-se num resultado de Mumford e Roitman, mostra que estas teias não são linearizáveis e portanto são excepcionais.

No início dos anos 90, Hénaut começa o estudo das teias analíticas. Ele publica cerca de 15 artigos e suas pesquisas dizem respeito tanto às teias multidimensionais como às teias planas e se concentram sobre as noções relativas ao posto e às relações abelianas.

Sobre teias planas, citemos [Hé 93], onde ele caracteriza as teias planas que são linearizáveis por um critério diferencial facilmente utilizável na prática. A publicação [Hé 04-1] é particularmente interessante pois ele encontra uma construção de uma conexão ligada a uma d -teia plana cuja curvatura é nula se, e somente se, a teia é de posto maximal. Decorre uma caracterização (não explícita) das d -teias planas de posto máximo, para todo $d \geq 3$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Dualidade projetiva

Nesta seção expomos brevemente um tópico de geometria algébrica que utilizaremos. Trata-se da dualidade projetiva. Utilizamos a dualidade projetiva para construir as teias algébricas. A principal referência que utilizamos é o livro [V].

Embora pudéssemos assumir a familiaridade do leitor com o plano projetivo e as definições básicas de curvas algébricas, introduzimos, resumidamente, estes conceitos afim de estabelecer notações e linguagem utilizadas no decorrer do texto.

O plano projetivo

Consideremos o plano afim mergulhado no espaço tridimensional como o plano π de equação $Z = 1$. Cada ponto do plano π determina uma reta passando pela origem e pelo dado ponto. Cada reta de π determina um plano pela origem. Se as retas $l_1, l_2 \subset \pi$ se intersectam, seu ponto de intersecção dá lugar à reta de intersecção dos dois planos associados a l_1, l_2 . Se as retas são paralelas, os planos que elas definem ainda se intersectam, desta vez ao longo de uma reta passando pela origem e contida no plano $Z = 0$.

Definição 2.1.1. O plano projetivo $\mathbb{P}^2$ é o conjunto das retas do espaço tridimensional passando pela origem.

Do exposto acima, vemos que o plano afim π se identifica naturalmente com um subconjunto de $\mathbb{P}^2$ que ainda denotaremos por π . Os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \pi$ são chamados de *pontos no infinito*.

Denotamos por $(X:Y:Z)$ o ponto de $\mathbb{P}^2$ que representa a reta ligando a origem a um ponto $(x, y, z) \neq 0$. Dizemos que X, Y e Z são as coordenadas homogêneas do ponto (x, y, z) relativas à base canônica. Por definição, temos que

$$(X : Y : Z) = (X' : Y' : Z') \Leftrightarrow \text{existe constante } t \neq 0 \text{ tal que } (x, y, z) = t(x', y', z').$$

O plano projetivo complexo, que utilizaremos mais frequentemente, é definido de maneira análoga. Faremos uma série de definições a seguir. Para nós, k denotará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.2. Seja $f = \sum_0^d f_i$, onde cada $f_i \in k[X, Y]$ (o anel dos polinômios em duas variáveis) é homogêneo de grau i e $f_d \neq 0$. A homogeneização de f é o polinômio homogêneo de grau $d = \text{grau}(f)$

$$f^*(X, Y, Z) = \sum Z^{d-i} f_i(X, Y).$$

Definição 2.1.3. Uma *curva algébrica (plana) projetiva* em $\mathbb{P}^2$ é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes, $F \in k[X, Y, Z]$, módulo a relação que identifica dois tais polinômios, F, G , se um for múltiplo constante do outro.

Dualidade projetiva e Curvas duais

Uma característica importante do plano projetivo que é muito útil no estudo de curvas algébricas é o chamado *princípio da dualidade projetiva*.

Dada uma reta em $\mathbb{P}^2$ de equação

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

podemos associar de maneira natural um ponto $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ e, reciprocamente um ponto $(b_0 : b_1 : b_2) \in \mathbb{P}^2$ determina uma reta

$$b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0.$$

Este tipo de correspondência entre retas e pontos é a base do princípio da dualidade projetiva.

O conjunto de todas as retas de $\mathbb{P}^2$ pode ser visto como um plano projetivo que denotaremos por $(\mathbb{P}^2)^*$ e chamaremos de plano projetivo dual.

Ou seja, um ponto $(b_0 : b_1 : b_2) \in (\mathbb{P}^2)^*$ representa a reta

$$b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \subset \mathbb{P}^2.$$

Figura 2.1: Dualidade projetiva

Mostra-se também que uma reta $c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2 = 0 \subset (\mathbb{P}^2)^*$ corresponde ao ponto $(c_0 : c_1 : c_2) \in \mathbb{P}^2$.

Seja $C : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ uma curva algébrica de grau d sem pontos singulares. Para cada ponto $a = (a_0 : a_1 : a_2) \in C$ considere a reta tangente a C em a :

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_0}x_0 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_2}x_2 = 0.$$

A esta reta associamos seu ponto correspondente no dual $(\frac{\partial F(a)}{\partial x_0} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_2}) \in (\mathbb{P}^2)^*$. Assim temos a aplicação

$$\delta : (a_0 : a_1 : a_2) \in C \mapsto \left(\frac{\partial F(a)}{\partial x_0} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_2} \right) \in (\mathbb{P}^2)^*. \quad (2.1)$$

A imagem de δ será uma curva algébrica em $(\mathbb{P}^2)^*$ que chamaremos de *curva algébrica dual* de C e denotada por C^* . O grau de C^* é chamado de *classe* de C .

Na discussão acima assumimos que $C : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ não tem pontos singulares. Isto porque em um ponto singular $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ temos

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_0} = \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(a)}{\partial x_2} = 0,$$

e a aplicação (2.1) não pode ser definida. Entretanto, se C_{reg} denota o conjunto dos pontos não singulares de C , então a imagem $\delta(C_{reg})$ é a curva algébrica C^* com um número finito de pontos removidos. Neste caso, também chamamos C^* de curva dual a

C . Isto faz sentido pois a aplicação

$$\delta : (a_0 : a_1 : a_2) \in C \mapsto \left(\frac{\partial F(a)}{\partial x_0} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} : \frac{\partial F(a)}{\partial x_2} \right) \in (\mathbb{P}\mathbb{C}^2)^*$$

é definida como quociente de polinômios homogêneos em a_0 , a_1 e a_2 . Tal aplicação é chamada de **aplicação racional**. Embora δ não esteja definida para todos pontos, podemos tratá-la como se fosse uma aplicação pois nossos objetos de estudo são aplicações definidas por polinômios.

Exemplo 2.1.1. Considere a curva algébrica projetiva $C : F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. A curva dual C^* é dada pela imagem da aplicação

$$\delta : (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (2a_0 : 2a_1 : 2a_2)$$

e portanto eliminamos a_0 , a_1 e a_2 das equações

$$y_0 = 2a_0 \quad y_1 = 2a_1 \quad y_2 = -2a_2, \text{ e}$$

temos que $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 4(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2) = 0$.

Assim a curva dual C^* de C é: $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$.

Exemplo 2.1.2. Seja $C : F(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 x_1 - x_0^3 = 0$. A curva dual C^* é dada pela imagem da aplicação

$$\delta : (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (-3a_0^2 : a_2^2 : 2a_2 a_1)$$

e portanto eliminamos a_0 , a_1 e a_2 das equações

$$y_0 = -3a_0^2 \quad y_1 = a_2^2 \quad y_2 = 2a_2 a_1, \text{ e}$$

temos que $\frac{y_2^2 y_1}{4} + \frac{y_0^3}{27} = 0$.

Como veremos no capítulo 3 este princípio é utilizado para a construção das *teias algébricas*.

2.2 Formas diferenciais

Nesta seção, fazemos uma introdução breve às formas diferenciais. Quase todos os cálculos que efetuaremos nesta dissertação envolvem formas diferenciais. Algumas vezes, utilizamos ao longo do texto dois teoremas clássicos, a saber o Lema de Poincaré e o Lema

de Élie Cartan. As demonstrações podem ser encontradas na principal referência que utilizamos para esta seção que é o livro [C].

Definiremos formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$, mas observamos que o desenvolvimento no caso complexo é análogo. Seja então um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e considere o espaço tangente em p denotando por $T_p\mathbb{R}^n$. Os vetores da base canônica $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ serão identificados com seus correspondentes $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$ no ponto p . Um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação v que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ associa um vetor $v(p) \in T_p\mathbb{R}^n$. Podemos escrever v como

$$v(p) = a_1(p)(e_1)_p + \dots + a_n(p)(e_n)_p,$$

de maneira que ficam definidas n funções $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, que caracterizam o campo v . Dizemos que o campo de vetores v é diferenciável se todas as funções a_i são diferenciáveis.

Para cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$ podemos associar seu espaço dual $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ que é o conjunto dos funcionais lineares $\varphi : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Uma base para $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ é obtida tomando as funções $x_i : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ponto $q \in T_p\mathbb{R}^n$ sua i -ésima coordenada. Denotaremos esta base por $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.

Definição 2.2.1. Um campo de *formas lineares*, ou uma *forma exterior de grau 1* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in (T_p\mathbb{R}^n)^*$. Temos que ω pode ser escrita como

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + \dots + a_n(p)(dx_n)_p$$

ou

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

onde a_i são funções reais em $\mathbb{R}^n$. Se as funções a_i são diferenciáveis, ω é chamada de *forma diferencial de grau 1*.

Agora denotemos por $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilineares e alternadas. Este conjunto é um espaço vetorial com as operações de funções usuais. Se $\varphi_1, \varphi_2 \in (T_p\mathbb{R}^n)^*$ podemos definir $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)^*$ como

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, 2.$$

O elemento

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)^*$$

será denotado por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. É fácil provar que o conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p \mid i < j\}$ é uma base para $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Além disso,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p \text{ e } (dx_i \wedge dx_i)_p = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Definição 2.2.2. Um campo de *formas bilineares alternadas*, ou uma *forma exterior de grau 2* em $\mathbb{R}^n$, ou ainda uma *2-forma*, é uma correspondência ω que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)^*$. A forma ω pode ser escrita na forma

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

ou

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, 2,$$

onde a_{ij} são funções em $\mathbb{R}^n$. Quando todas as funções a_{ij} são diferenciáveis, ω é chamada de *forma diferencial de grau 2*, ou uma *2-forma diferencial*.

Generalizando, seja $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto de todas as aplicações k -lineares e alternadas $\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \wedge \dots \wedge T_p\mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$. Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (T_p\mathbb{R}^n)^*$, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ pondo

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Segue de propriedades de determinantes que $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ é de fato k -linear e alternada. Uma base para o espaço $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ é o conjunto

$$\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Definição 2.2.3. Uma k -forma exterior em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Temos que ω pode ser escrita como

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\},$$

onde $a_{i_1 \dots i_k}$ são funções reais em $\mathbb{R}^n$. Quando todas as funções $a_{i_1 \dots i_k}$ são diferenciáveis, ω é chamada de *k-forma diferencial*. Denotaremos

$$I = \{(i_1, \dots, i_k) \mid i_1 < \dots < i_k, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

e usaremos a seguinte notação para ω :

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Também, por convenção, chamaremos de 0-forma as funções diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.1. Em $\mathbb{R}^4$ temos os seguintes tipos de formas exteriores, onde a_i, a_{ij} , etc. são funções reais em $\mathbb{R}^4$:

0 formas, funções em $\mathbb{R}^4$;

1-formas, $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4$;

2-formas, $a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{14} dx_1 \wedge dx_4 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3 + a_{24} dx_2 \wedge dx_4 + a_{34} dx_3 \wedge dx_4$;

3-formas, $a_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + a_{134} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$;

4-formas, $a_{1234} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

De agora em diante nos restringiremos às k -formas diferenciais que por simplicidade chamaremos apenas de k -formas. Definiremos algumas operações sobre as k -formas em $\mathbb{R}^n$. Sejam ω e φ duas k -formas:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \varphi = \sum_I b_I dx_I,$$

sobre as quais podemos definir sua soma como sendo

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Agora, se ω é uma k -forma e φ é uma s -forma, definimos seu produto exterior $\omega \wedge \varphi$ da seguinte forma:

Definição 2.2.4. Sejam

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, \dots, i_k), \quad i_1 < \dots < i_k,$$

$$\varphi = \sum_J b_J dx_J, \quad J = (j_1, \dots, j_s), \quad j_1 < \dots < j_s.$$

Por definição

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Observação 2.2.1. A definição de produto exterior é feita de tal maneira que se $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ são 1-formas, então o produto exterior $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ coincide com a k -forma anteriormente definida por

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Isto segue diretamente da definição e omitimos a demonstração.

O produto exterior de formas em $\mathbb{R}^n$ goza das seguintes propriedades cuja demonstração segue diretamente da definição.

Proposição 2.2.1. *Sejam ω uma k -forma, φ uma s -forma e θ uma r -forma. Então:*

- a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta);$
- b) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega);$
- c) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta, \text{ se } r = s.$

Vamos agora definir uma operação no espaço das formas diferenciais que, de certa forma, generaliza a diferenciação de funções. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma, isto é, uma função diferenciável. Então a derivada total

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

é uma 1-forma. Queremos generalizar este processo definindo uma operação que a cada k -forma associa uma $(k+1)$ -forma.

Definição 2.2.5 (Derivada exterior). Seja $\omega = \sum a_I dx_I$ uma k -forma em $\mathbb{R}^n$. A derivada exterior $d\omega$ de ω é definida por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

Na proposição seguinte listamos algumas propriedades satisfeitas pela derivada exterior.

Proposição 2.2.2. *Sejam ω, ω_1 e ω_2 k -formas e φ uma s -forma em $\mathbb{R}^n$. Temos:*

- a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2;$
- b) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi;$
- c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0.$

Dois tipos de formas diferenciais que ocorrem com frequência em geometria diferencial são as formas exatas e fechadas cuja definição vem a seguir.

Definição 2.2.6. Seja ω uma forma diferencial definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que ω é *fechada* se $d\omega = 0$ e que ω é *exata* em U se existir uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$ em U .

É claro que toda forma exata é fechada e, embora nem toda forma fechada seja exata, o lema de Poincaré garante que, localmente, toda 1-forma fechada é exata.

Teorema 2.2.1 (Lema de Poincaré para 1-formas). *Seja $\omega = \sum a_i dx_i$ uma 1-forma definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $d\omega = 0$ se, e somente se, para cada $p \in U$ existir uma vizinhança $V \subset U$ de p e uma função diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ com $df = \omega$.*

Demonstração. Se ω é localmente exata, claramente $d\omega = 0$. Agora vamos assumir que $d\omega = 0$. Por simplicidade de notação, nos restringiremos ao caso em que $\omega = adx + bdy + cdz$ está definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Para cada $p \in U$ seja B_p uma bola centrada em $p = (x_0, y_0, z_0)$ contida em U . Para cada $q = (x, y, z) \in B_p$ considere $\beta(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0, 1]$ o segmento de reta ligando p ao ponto q . Como B_p é uma bola então $\beta(t) \subset B_p$. Defina

$$f(q) = \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 [a(\beta(t))(x - x_0) + b(\beta(t))(y - y_0) + c(\beta(t))(z - z_0)] dt.$$

O que queremos provar é que $df = \omega$, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(q) = a(q), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(q) = b(q), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(q) = c(q).$$

Para ver isto, note que a condição $d\omega = 0$ é equivalente a:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Provaremos que $\frac{\partial f}{\partial x} = a$. Derivando f e usando as duas primeiras identidades obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(q) &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial a}{\partial x} t(x - x_0) + a + \frac{\partial b}{\partial x} t(y - y_0) + \frac{\partial c}{\partial x} t(z - z_0) \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial a}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial a}{\partial z} (z - z_0) \right) t + a \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{d}{dt} (a(\beta(t))) \right) t + a \right\} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (a(\beta(t)) t) dt = a(\beta(1)) = a(q) \end{aligned}$$

E é de maneira análoga que provamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(q) = b(q), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(q) = c(q).$$

□

Enunciamos, a seguir, o Lema de Cartan que utilizamos em alguns cálculos efetuados no capítulo 5.

Lema 2.2.1 (Lema de Élie Cartan). *Seja V^n um espaço vetorial de dimensão n , e $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$ formas diferenciais em V linearmente independentes. Assuma que existam formas diferenciais $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Então*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \text{ com } a_{ij} = a_{ji}.$$

2.3 Folheações

Uma d -teia é, resumidamente falando, uma coleção de d folheações que estão em posição geral. Portanto, nesta seção introduzimos o conceito de folheação e damos alguns exemplos. Estamos interessados no estudo de teias definidas no plano complexo $\mathbb{C}^2$ e, por isso é que trataremos o caso de folheações holomorfas. Na verdade, uma folheação holomorfa é uma folheação no sentido clássico introduzido por C. Ehresmann e G. Reeb por volta de 1950. As referências principais são os livros [NS] e [CN] onde podem ser encontradas as demonstrações das proposições enunciadas nesta seção.

Motivação

Para motivar o conceito de folheação, consideremos uma variedade complexa conexa M e seja X um campo de vetores holomorfo em M . Ora, podemos associar ao campo X uma equação diferencial holomorfa $\dot{x} = X(x(t))$ onde t é tempo complexo. Sabemos que as soluções desta equação definem um fluxo local na variedade M . As trajetórias de X são as subvariedades de M obtidas pelo prolongamento destas soluções locais. Se X é não singular em M , então as trajetórias são curvas analíticas lisas (superfícies de Riemann). Notemos que estas curvas são duas a duas disjuntas e por cada ponto de M passa uma e somente uma trajetória de X . Dizemos então que as trajetórias de X definem em M uma folheação por curvas. Entretanto, em geral, uma variedade complexa M pode não admitir campos de vetores holomorfos globalmente definidos. Neste caso, podemos considerar uma cobertura aberta $(U_i)_{i \in I}$ de M , tal que em cada aberto U_i está definido um campo de vetores holomorfos X_i , cujo fluxo local define uma decomposição de U_i em superfícies de Riemann, a qual denotaremos por $\mathcal{F}_i$. O que procuramos é dar para cada intersecção não vazia $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, uma condição de colagem para $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ nesta intersecção.

Para isto, seja $p \in U_i \cap U_j$. A subvariedade de $\mathcal{F}_i$ passando por $p \in U_i$ tem

por espaço tangente neste ponto o subespaço complexo de dimensão um gerado por $X_i(p)$ em $T_p M$. De forma análoga, como $p \in U_j$, então $X_j(p)$ também gera o espaço tangente à subvariedade de $\mathcal{F}_j$ por p . O que queremos é que estes subespaços tangentes coincidam, e esta condição pode ser expressa por $X_i(p) = g_{ij}(p)X_j(p)$, onde $g_{ij}(p) \neq 0$. Verifica-se, por meio de coordenadas locais, que a função $p \in U_i \cap U_j \mapsto g_{ij}(p)$ é holomorfa. Deste modo, a condição natural para a colagem de $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ em $U_i \cap U_j$ é a seguinte:

$$X_i = g_{ij}X_j$$

onde g_{ij} é uma função holomorfa em $U_i \cap U_j$ que não se anula em nenhum ponto deste conjunto. Assim, de forma simplificada, uma folheação de M é uma decomposição de M em subvariedades lisas de mesma dimensão, e que são localmente associadas a equações diferenciais.

Formalizemos agora a definição:

Definição 2.3.1. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n . Uma folheação holomorfa de dimensão k , ou codimensão $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, é uma decomposição $\mathcal{F}$ de M em subvariedades complexas (chamadas folhas da folheação $\mathcal{F}$) de dimensão complexa k , imersas biunivocamente, que gozam das seguintes propriedades:

1. Para cada ponto $p \in M$ existe uma única subvariedade L_p da decomposição que passa por p ;
2. Para cada ponto $p \in M$ existe uma carta holomorfa de M , (φ, U) (chamada carta distinguida de $\mathcal{F}$) com $p \in U$, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\varphi(U) = P \times Q$, onde P e Q são polidiscos abertos em $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^{n-k}$, respectivamente;
3. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $L \cap U \neq \emptyset$, então $L \cap U = \bigcup_{q \in D_{L,U}} \varphi^{-1}(P \times q)$, onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q .

Os subconjuntos $\varphi^{-1}(P \times \{q\})$ são chamados *placas* da carta distinguida (φ, U) . Uma folheação de dimensão um também é chamada de folheação por curvas. Neste caso as folhas são chamadas superfícies de Riemann imersas biunivocamente na variedade ambiente.

Observe que a condição 3 também implica que as folhas são subvariedades imersas biunivocamente em M , já que a intersecção de uma folha com uma carta distinguida é uma união de placas disjuntas duas a duas.

A figura 2.3 ilustra o conceito.

Figura 2.2: Folheação

Observação 2.3.1. Uma folheação $\mathcal{F}$ em M de dimensão k induz em M uma distribuição de planos, de dimensão k , denotada por $T\mathcal{F}$, a qual é definida por:

$$T\mathcal{F} = \cup_{p \in M} T_p \mathcal{F} = \cup_{p \in M} T_p L_p,$$

onde $T_p L_p$ é o plano tangente em p à folha de $\mathcal{F}$ que passa por p .

Decorre de 3 que esta distribuição é holomorfa. Ela define um sub-fibrado vetorial holomorfo do fibrado tangente TM , o qual será também denotado por $T\mathcal{F}$.

Proposição 2.3.1. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k de M também pode ser definida dos seguintes modos equivalentes:*

1. Descrição por cartas distinguidas:

$\mathcal{F}$ é dada por um atlas de M (também denotado por $\mathcal{F}$) $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ onde:

(a) $\varphi_\alpha(U_\alpha) = P_\alpha \times Q_\alpha$, onde P_α, Q_α são polidiscos de dimensões k e $n - k$, respectivamente;

(b) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é localmente da forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha, y_\alpha) = (h_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\alpha), g_{\alpha\beta}(y_\alpha)).$$

Neste caso, as placas de $\mathcal{F}$ em U_α são os conjuntos da forma $\varphi_\alpha^{-1}(P_\alpha \times \{q\})$.

2. Descrição por submersões locais:

$\mathcal{F}$ é dada por uma cobertura aberta $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ e por coleções $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ que satisfazem:

(a) Para todo $\alpha \in A$, a aplicação $y_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ é uma submersão;

(b) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $y_\alpha = g_{\alpha\beta}(y_\beta)$ onde

$$g_{\alpha\beta} : y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k \rightarrow y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k$$

é um difeomorfismo local holomorfo.

Neste caso, as placas de $\mathcal{F}$ em U_α são os conjuntos da forma $y_\alpha^{-1}(q)$, $q \in V_\alpha$.

Exemplo 2.3.1 (Folheações geradas por um campo de vetores holomorfo). Seja M uma variedade complexa de dimensão n e X um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em M . Seja $S = \{p \in M : X(p) = 0\}$ o conjunto singular de X . Então X gera uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão 1 no aberto $N = M \setminus S$. As folhas de $\mathcal{F}$ são as trajetórias de X em N . A estrutura de folheação decorre do teorema do fluxo tubular para campos holomorfos o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

“Para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe um sistema de coordenadas holomorfo $(\phi = (z_1, \dots, z_n), U)$ onde $p \in U$, $\phi : U \rightarrow \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ e no qual $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$ ”

Como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial t} = X(z) \text{ e } X|_U = \frac{\partial}{\partial z_1},$$

vemos que as trajetórias de X em U são da forma $\phi^{-1}(A \times \{w\})$ com $w \in B$. Obtemos daí e da descrição 1 da proposição 2.3.1, uma folheação de dimensão um, cujas folhas são as trajetórias de X .

Na verdade, toda folheação de dimensão 1 é localmente definida por um campo de vetores como diz a proposição seguinte.

Proposição 2.3.2. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em M . Então existem coleções $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{G_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:*

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M ;
2. X_α é um campo de vetores holomorfo em U_α que não se anula em nenhum ponto;
3. $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, isto é, uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$;

4. Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $X_\alpha = g_{\alpha\beta} X_\beta$;
5. Se $p \in U_\alpha$, então $T_p \mathcal{F} = \mathbb{C} X_\alpha(p)$, o subespaço de $T_p M$ gerado por $X_\alpha(p)$.

Reciprocamente, se existirem coleções $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, e $\mathcal{G}$ satisfazendo 1 2 3 e 4, então existe uma folheação $\mathcal{F}$ que satisfaz 5.

Exemplo 2.3.2 (Folheações geradas por 1-formas diferenciais). Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em M . Seja $S = \{p \in M : \omega_p = 0\}$ o conjunto singular de ω . Neste caso, ω induz uma distribuição de hiperplanos Ω no aberto $N = M \setminus S$, definida por

$$\Omega_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_p M : \omega_p(v) = 0\}.$$

Dizemos que ω é integrável se existe uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em N tal que $T\mathcal{F} = \Omega$. Em outras palavras, o espaço tangente em p à folha de $\mathcal{F}$ que passa por p coincide com Ω_p .

Um resultado clássico na teoria de folheações diz que

$$\omega \text{ é integrável} \Leftrightarrow \omega \wedge d\omega = 0.$$

Este resultado é conhecido como teorema de Frobenius e pode ser encontrado em [CN].

É comum dizer-se que a folheação $\mathcal{F}$ é definida pela equação diferencial $\omega = 0$ e que as folhas de $\mathcal{F}$ são as subvariedades integrais desta equação.

Se η é uma 1-forma tal que $\eta = f\omega$, onde f é uma função holomorfa em N que não se anula, então a distribuição de hiperplanos induzida por η coincide com Ω . Em particular, η será também integrável e as folheações definidas por $\eta = 0$ e $\omega = 0$ coincidem.

As folheações de codimensão 1 são localmente definidas por 1-formas diferenciais integráveis como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em M . Então existem coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{G_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:*

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M ;

2. ω_α é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável em U_α que não se anula em nenhum ponto;
3. $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, isto é, uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$;
4. Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$;
5. Se $p \in U_\alpha$, então $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$, o subespaço de T_pM gerado por $X_\alpha(p)$.

Reciprocamente, se existirem colocações $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$, e $\mathcal{G}$ satisfazendo 1 2 3 e 4, então existe uma folheação $\mathcal{F}$ que satisfaz 5.

2.3.1 Folheações singulares de dimensão 1

Definimos, aqui, o conceito de folheação singular. Elas aparecem naturalmente, por exemplo, no estudo das soluções das equações diferenciais complexas da forma $\frac{\partial z}{\partial t} = X(z)$, onde X é um campo de vetores que se anula em alguns pontos. Mais ainda, nem toda variedade admite uma folheação holomorfa, no sentido anterior, embora muitas admitam folheações singulares.

Definição 2.3.2. Seja M uma variedade complexa de dimensão n . Uma folheação com singularidades por curvas de M , digamos $\mathcal{F}$, é um objeto definido por coleções $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{G_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M ;
2. $X_\alpha \in \mathcal{X}^h(U_\alpha)$ é um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em U_α ;
3. $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$;
4. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $X_\alpha = g_{\alpha\beta}X_\beta$.

Para cada campo X_α consideremos o seu conjunto singular dado por:

$$S_\alpha := \text{sing}(X_\alpha) = \{p \in U_\alpha \mid X_\alpha(p) = 0\}.$$

É claro que S_α é um subconjunto analítico de U_α . De 3 e 4 segue que $S_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta = S_\beta \cap U_\alpha \cap U_\beta$. A união destes S_α também é um subconjunto analítico S de M . Este conjunto que denotaremos por $\text{sing}(\mathcal{F})$, é chamado de conjunto singular de $\mathcal{F}$. Observe

que a proposição 2.3.2 implica que $\mathcal{F}$ define uma folheação por curvas (não singular) no aberto $U = M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é regular em U . As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da restrição de $\mathcal{F}$ a U , a qual será denotada por $\mathcal{F}|_U$.

Dizemos que duas folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ em M coincidem, se $\text{sing}(\mathcal{F}_1) = \text{sing}(\mathcal{F}_2)$ e $\mathcal{F}_1|_{M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_1)} = \mathcal{F}_2|_{M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_2)}$.

No caso em que $\text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, vemos que $\mathcal{F}$ é uma folheação por curvas. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é uma folheação regular.

Em seguida veremos que no caso em que M tem dimensão 2, podemos definir uma folheação singular por meio de formas diferenciais.

Proposição 2.3.4. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão 2 e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 com singularidades em M . Existem coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{H} = \{h_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:*

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M ;
2. Para todo α , ω_α é uma 1-forma holomorfa em U_α ;
3. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $h_{\alpha\beta}\omega_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\omega_\alpha = h_{\alpha\beta}\omega_\beta$;
4. Se $p \in U_\alpha$ não é singularidade de $\mathcal{F}$ então $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$.

2.3.2 Folheações singulares de codimensão 1

Introduzimos o conceito de folheação singular de codimensão 1.

Como já vimos na proposição 2.3.3, uma 1-forma diferencial holomorfa integrável, ω , definida numa variedade complexa M define uma folheação singular de codimensão 1 em $M \setminus \text{sing}(\omega)$, onde $\text{sing}(\omega)$ é o conjunto singular de ω . A *grosso modo*, uma folheação singular de codimensão 1 é um objeto que é localmente definido por uma 1-forma integrável.

Definição 2.3.3. Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$. Uma folheação holomorfa singular de codimensão um é um objeto $\mathcal{F}$ definido por coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{G_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M ;

2. ω_α é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável não identicamente nulo em U_α ;
3. $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$;
4. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$.

Exemplo 2.3.3 (Folheações dadas por formas holomorfas fechadas). Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e ω uma 1-forma holomorfa fechada em M (isto é $d\omega = 0$) que não se anula identicamente. Então ω é claramente integrável e portanto define uma folheação $\mathcal{F}$ em M . O lema de Poincaré, garante que dado um aberto simplesmente conexo $U \subset M$, existe uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\omega|_U = df$. Observe que se $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função tal que $dg = \omega$, onde $U \cap V$ é conexo e não vazio, então g e f diferem por uma constante em $U \cap V$. Desta forma, a folheação $\mathcal{F}$ pode ser definida localmente por funções holomorfas no seguinte sentido: existem coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$, $F = \{f_\alpha\}_\alpha$ e $\mathcal{C} = \{C_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que:

1. $\mathcal{U}$ é uma cobertura de M por abertos simplesmente conexos;
2. f_α é uma função holomorfa não constante em U_α tal que $df_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$;
3. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ é conexo, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ e $f_\alpha = f_\beta + c_{\alpha\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Observe que se ω não tem singularidades, então as funções f_α são submersões e $\mathcal{F}$ é regular. Neste caso, se denotarmos por $g_{\alpha\beta}$ a translação $g_{\alpha\beta}(z) = z + c_{\alpha\beta}$ então $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, de forma que $\mathcal{F}$ pode ser descrita por submersões locais com na definição 2 da proposição 1, sendo que no caso as $g_{\alpha\beta}$ são translações.

Dizemos então que $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal aditiva. No caso em que $\text{sing}(\omega) \neq \emptyset$, vemos que $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação com estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ e tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$ então $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma holomorfa fechada.

Capítulo 3

Definição e Exemplos

Na primeira seção do capítulo, apresentamos o conceito de d -teia e mostramos com vários exemplos como elas surgem em diversos ramos da matemática. Começamos com o caso bidimensional, ou seja, as teias planas, definidas em um aberto contendo a origem de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$. Em seguida, embora não seja o foco de nosso trabalho, definimos as teias multidimensionais. Como dissemos no capítulo 1, Alain Hénaut iniciou o estudo de teias dentro de um quadro analítico complexo. Seguimos a mesma linha, e as principais referências para este capítulo são as teses de doutorado de dois de seus alunos: a tese de Olivier Ripoll em [R] e a tese de Luc Pirio em [P].

3.1 Teias Planas

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ um subconjunto aberto e simplesmente conexo, onde estamos supondo que $0 \in \Omega$. A definição de uma d -teia regular sobre Ω faz uso apenas dos conceitos de folheação e posição geral.

Definição 3.1.1. Uma d -teia regular sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ é uma família de d folheações holomorfas por curvas regulares (superfícies de Riemann lisas), $\mathcal{W}(d) = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d\}$, sobre Ω tais que para todo ponto $p \in \Omega$, a família $\{T_p \mathcal{F}_i, i = 1 \dots d\}$ de subespaços de $T_p \Omega$ está em posição geral.

Em outras palavras, uma d -teia regular sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ nada mais é que uma família de folheações por curvas de Ω , em que as curvas da folheação se intersectam transversalmente.

Figura 3.1: Uma d -teia sobre Ω

Faremos a ligação de alguns resultados básicos sobre folheações, apresentados no capítulo 2, com a definição de teia, afim de estabelecer a linguagem e notações utilizadas neste trabalho. Sendo assim, seja $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ o anel das séries convergentes de duas variáveis complexas com coeficientes em $\mathbb{C}$. Seja também $\mathcal{W}(d) = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d\}$ uma d -teia definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ contendo a origem. Recordemos (proposição 2.3.1) que dada uma folheação regular $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}^2$ é sempre possível obter uma submersão F , tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são dadas pelas curvas de nível da submersão F , ou seja, $\{F(x, y) = \text{cte}\}$. Assim, usualmente denotamos uma d -teia por $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$.

Utilizando a linguagem do cálculo exterior, a hipótese de posição geral satisfeita pelas folhas de $\mathcal{W}(d)$, na origem, é expressa da seguinte forma:

$$dF_i(0) \wedge dF_j(0) \neq 0 \text{ para } 1 \leq i < j \leq d.$$

Uma outra forma de denotar uma d -teia é utilizando formas diferenciais, as formas de Pfaff. Vimos que para toda folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão 1 em $\mathbb{C}^2$, existe uma 1-forma diferencial $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$, tal que a folha de $\mathcal{F}$ que passa pelo ponto $p \in \Omega$ é obtida pela integral primeira de $\ker(\omega(p))$. Assim, denotamos também uma d -teia por $\mathcal{W}(d) = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$. Portanto, a menos de um elemento invertível de $\mathcal{O}$, os objetos fundamentais que definem a d -teia $\mathcal{W}$ são as 1-formas diferenciais seguintes:

$$\begin{cases} \omega_1 &= \partial_x(F_1)dx + \partial_y(F_1)dy \\ &\vdots \\ \omega_d &= \partial_x(F_d)dx + \partial_y(F_d)dy \end{cases}$$

ou ainda os d campos de vetores

$$\begin{cases} X_1 = \partial_y(F_1)\partial_x - \partial_x(F_1)\partial_y \\ \vdots \\ X_d = \partial_y(F_d)\partial_x - \partial_x(F_d)\partial_y \end{cases}$$

onde ∂_x e ∂_y denotam os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ usuais. Neste caso, as folhas da teia são as curvas integrais destes campos de vetores.

Exemplo 3.1.1. A teia $\mathcal{H}(3) = \{x, y, x + y\}$ é uma 3-teia sobre $\mathbb{C}^2$ (veja um esboço real da teia na figura 3.2). Este é um dos exemplos mais simples de uma 3-teia em $\mathbb{C}^2$ com características muito importantes. Como veremos mais adiante, esta é uma teia *linear*, *algebrizável*, de *posto máximo* e *hexagonal*. Todos os termos anteriores em destaque serão explicados mais tarde, bem como as relações entre estes conceitos.

Figura 3.2: $\mathcal{H}(3) = \{x, y, x + y\}$

Observação 3.1.1. Denotamos a teia anterior por $\mathcal{H}(3)$ pelo fato dela ser hexagonal. Em geral, como veremos, denotaremos as teias lineares por $\mathcal{L}(d)$ e as teias algebrizáveis por $\mathcal{A}(d)$.

Ampliaremos agora nossa definição de teia para incluir teias com singularidades. Se $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ é uma família de folheações holomorfas singulares sobre Ω , diremos que $p \in \Omega$ é um ponto genérico de $\mathcal{W}$ se p é ponto regular para $F_i(x, y)$ para todo $i = 1 \dots d$.

Definição 3.1.2. Uma d -teia singular sobre Ω é uma família $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ de folheações holomorfas singulares sobre Ω tais que, para todo ponto genérico $p \in \Omega$, a família $\{T_p \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, d\}$ de subespaços de $T_p \Omega$ está em posição geral.

Podemos, então, definir o conjunto singular de uma d -teia:

Definição 3.1.3. Seja $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ uma d -teia singular sobre Ω . O conjunto singular de $\mathcal{W}(d)$, denotado por $\sum[\mathcal{W}]$, é a reunião das singularidades $\text{sing}(F_i)$ das folheações F_i e dos pontos de Ω nos quais a hipótese de posição geral não é satisfeita.

É claro que uma teia sobre Ω é regular se, e somente se, seu conjunto singular é vazio. Além disso, quando não dissermos explicitamente que uma teia é singular, estamos supondo a teia regular. Se F_1 e F_2 são duas folheações sobre Ω denotamos $\sum[F_1, F_2]$ o conjunto dos pontos de Ω onde as folhas de F_1 e F_2 não são transversais. Portanto, se $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ é uma d -teia sobre Ω temos

$$\sum[\mathcal{W}] = \left(\bigcup_{F_i \in \mathcal{W}} \text{sing}(F_i) \right) \cup \left(\bigcup_{F, F' \in \mathcal{W}, F \neq F'} \sum[F, F'] \right)$$

Exemplo 3.1.2. Consideremos o espaço $\mathbb{CP}^2$ e denotemos por $\mathbb{CP}_\infty^1$ a reta $\{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid z = 0\}$ como sendo a reta no infinito. Então $\mathcal{W} = \{x, y, x^2 + y^2\}$ é uma 3-teia singular sobre $\mathbb{CP}^2$. O conjunto singular de $\mathcal{W}$ é a reunião de três retas:

$$\sum[\mathcal{W}] = \mathbb{CP}_\infty^1 \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\}$$

Novamente, um esboço real desta teia numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ está na figura

Figura 3.3: A teia singular $\mathcal{W}(3) = \{x, y, x^2 + y^2\}$ e seu conjunto singular

Exemplo 3.1.3. Esboçar a teia $\mathcal{W}(3) = \{2xdx + dy, dx + dy, ydx + xdy\}$. Neste caso, temos que a 3-teia é definida pelas formas de Pfaff: $\omega_1 = 2xdx + dy$, $\omega_2 = dx + dy$ e $\omega_3 = ydx + xdy$. Logo, as folhas da 3-teia são obtidas, como vimos, por integração de $\ker(\omega_i)$.

Assim temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \omega_1 = 0 \Leftrightarrow \int 2x dx + \int dy = 0 \\ \int \omega_2 = 0 \Leftrightarrow \int dx + \int dy = 0 \\ \int \omega_3 = 0 \Leftrightarrow \int y dx + \int x dy = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y) = x^2 + y \\ F_2(x, y) = x + y \\ F_3(x, y) = xy \end{array} \right.$$

Trata-se de uma teia singular. De fato, a origem $P = (0, 0)$ é uma singularidade da folheação F_3 e, portanto, uma singularidade da 3-teia $\mathcal{W}$.

Além disso as folhas de F_1 e F_3 tangenciam-se ao longo da parábola $2x^2 = y$.

De fato

$$(2x, 1) = \lambda(y, x)$$

é satisfeita para $\lambda = \frac{1}{x}$.

Também temos que F_2 e F_3 tangenciam-se ao longo da reta $y = x$. De fato,

$$(1, 1) = \lambda(y, x)$$

é satisfeita para $\lambda = \frac{1}{y}$.

Abaixo segue um esboço real da teia destacado o conjunto singular.

3.2 Exemplos

Nesta seção apresentamos ao leitor alguns exemplos de teias que podemos associar de maneira natural a diversos objetos clássicos em matemática.

3.2.1 Teias em geometria diferencial projetiva

Já dissemos, no capítulo 1, que foram dos estudos provenientes da geometria diferencial projetiva das superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ que nasceu a geometria de teias. Antes de apresentarmos a 3-teia de Darboux, retomemos um pouco da geometria diferencial clássica.

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e indiquemos por U o conjunto de seus pontos umbílicos. Em cada $p \in M \setminus U$, estão definidas duas direções principais $\{e_1(p), e_2(p)\}$, que são ortogonais e, portanto, determinam em $M \setminus U$ dois campos de direções. Associadas a estes campos temos algumas funções como: as curvaturas principais k_1 e k_2 ; a curvatura Gaussiana $K = k_1 k_2$ e a curvatura média $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$. As curvas integrais dos campos das direções principais são chamadas de linhas de curvatura. A rede formada pelas linhas de curvatura, juntamente com os pontos umbílicos, formam o que é chamado de configuração principal da superfície. A configuração principal de uma superfície é um exemplo de uma 2-teia.

Um avanço significativo no estudo das configurações principais foi dado por Darboux (ver [Dar 80]) em 1896, que descreveu os pontos umbílicos genéricos, caracterizando-os em termos das condições algébricas nas terceiras derivadas da superfície. A estabilidade da configuração principal para mergulhos genéricos de superfícies em $\mathbb{R}^3$ só foi estudada em 1982, por Gutierrez e Sotomayor (ver [G-S]). A figura 3.4 mostra o comportamento de uma 2-teia na vizinhança de um ponto umbílico darbouxiano.

Como motivação para a construção de Darboux, relembremos os conceitos de direções principais de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ em um ponto $p \in S$. Consideremos as esferas tangentes a M em p . Genericamente, a intersecção de M com estas esferas definem um germe de curva singular em $p \in M$ com uma singularidade ordinária dupla em p . Assim, ficam determinadas duas direções distintas $d_1(S)$ e $d_2(S)$, tangentes aos ramos da curva singular. Mostra-se que existem duas esferas osculadoras S_1 e S_2 tais que $d_1(S_i) = d_2(S_i) := d(S_i)$ para $i = 1, 2$. Estas são as chamadas esferas de curvatura de M em p . Também é possível mostrar que as duas direções $d(S_i)$, $i = 1, 2$ são as

Figura 3.4: Pontos umbílicos de Darboux

direções principais de M em p . Darboux generalizou esta construção para a geometria diferencial projetiva. Neste contexto, é mais natural considerarmos quádricas osculadoras, uma vez que uma esfera é transformada em uma quádrica via uma transformação projetiva genérica. Darboux considerou o sistema linear de hipersuperfícies quádricas que tem contato de ordem 3 com M em p . A intersecção de uma quádrica Q com M define um germe de curva sobre M com uma singularidade tripla em p . Logo podemos associar as três direções tangentes (distintas) à M , $d_1(Q)$, $d_2(Q)$ e $d_3(Q)$. Darboux mostra que sob certas hipóteses genericamente verificadas, existem três quádricas Q_1 , Q_2 e Q_3 tais que $d_1(Q_i) = d_2(Q_i) = d_3(Q_i) := d(Q_i) \in \mathbb{P}T_p\mathbb{R}^3$ para $i = 1, 2, 3$. Estas são as *direções de Darboux* à M em p . Repetindo esta construção em todos os pontos de M teremos uma distribuição regular de direções tangentes sobre M . Estas distribuições são integráveis pois são de dimensão um. Ao considerarmos as curvas integrais associadas a estes campos de direções, obtemos uma 3-teia sobre M conhecida como a 3-teia de Darboux sobre M .

3.2.2 Teias em geometria algébrica projetiva

Já no início da teoria, Blaschke notou a estreita relação que há entre geometria de teias e geometria algébrica. Descrevemos a seguir qual é esta relação.

Seja $C \subset \mathbb{CP}^2$ uma curva algébrica plana de grau d , que supomos reduzida. A esta curva C , podemos associar uma d -teia sobre o dual $(\mathbb{CP}^2)^*$. Esta construção é central e clássica na teoria de teias. Seja $z \in (\mathbb{CP}^2)^*$ um ponto genérico. Por dualidade considere a reta $(z) \subset \mathbb{CP}^2$. Se C não contém reta alguma como sua componente, então a reta (z) corta C transversalmente em d pontos distintos, que indicaremos por $l_1, \dots, l_d$. Novamente, por dualidade, consideraremos as retas $\{(l_1), \dots, (l_d)\} \subset (\mathbb{CP}^2)^*$ que passam

por z . Estas são as retas tangentes à curva dual C^* e formam uma folheação por retas de $(\mathbb{CP}^2)^*$. A condição de (z) intersectar C transversalmente em d pontos distintos é aberta. Então, numa vizinhança U de z é possível fazer esta construção para cada $z \in U$. Esta folheação constitui uma d -teia em $(\mathbb{CP}^2)^*$ que, por definição, é chamada de *teia algébrica associada à curva C* . Esta construção local está ilustrada na figura 3.5.

Figura 3.5: Uma 3-teia obtida por dualidade do plano projetivo

Exemplo 3.2.1. Para cada uma das curvas planas abaixo, encontraremos a teia algébrica associada:

1. $C_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
2. $C_2 : z^2y - x^3 = 0$.

1) Como vimos no capítulo 2, a curva dual à C_1 é a curva de equação

$$y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

Escolhendo uma carta afim, podemos esboçar a teia algébrica $\mathcal{A}_{C_1}(2)$, como mostra a figura 3.6.

Figura 3.6: Esboço de $\mathcal{A}_{C_1}(2)$

2) Agora seja $C_2 : z^2y - x^3 = 0$. Como vimos no capítulo 2 a cúbica dual C_2^* é a curva algébrica de equação $\frac{y_2^2y_1}{4} + \frac{y_0^3}{27} = 0$. Escolhendo uma carta afim, podemos esboçar a teia algébrica $\mathcal{A}_{C_2}(3)$, como mostra a figura 3.7.

Figura 3.7: Esboço de $\mathcal{A}_{C_2}(3)$

Podemos estender a construção de 3.2.2 para folheações de $\mathbb{CP}^2$. Por definição, o grau de uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{CP}^2$ é o número (finito) de pontos de tangência que uma reta genérica $L \subset \mathbb{CP}^2$ tem com as folhas de $\mathcal{F}$. Mostra-se que este número não depende de $\mathcal{F}$ e que existem folheações de $\mathbb{CP}^2$ de qualquer grau.

Sejam $\mathcal{F}$ uma tal folheação, de grau $d \geq 3$ e L uma reta em $\mathbb{CP}^2$. Se a reta é suficientemente genérica, haverá d pontos distintos sobre L nos quais a reta é tangente a uma folha de $\mathcal{F}$. Por dualidade projetiva, estes pontos definem d retas em $(\mathbb{CP}^2)^*$ passando por L (vista como ponto dual em $(\mathbb{CP}^2)^*$). Podemos assim construir uma d -teia linear

sobre um aberto de Zariski de $(\mathbb{CP}^2)^*$. Esta será a teia associada à $\mathcal{F}$. Esta dualidade entre as folheações e as teias globais sobre $\mathbb{CP}^2$ são estudadas em [MP]. Ainda neste contexto citemos a tese de doutorado de Joseph Nee (ver [J]) em que o autor generaliza resultados de folheações de $\mathbb{CP}^2$ utilizando a geometria de teias.

Outros autores têm estudado as teias via folheações, num contexto um pouco diferente do descrito acima. Podemos citar o artigo de Cerveau [Cer 92], em que o autor se interessa pela dinâmica das 3-teias globais, motivado pela descrição da variedade das folheações algébricas de codimensão 1 dos espaços projetivos.

3.2.3 Teias em equações diferenciais

A 3-teia associada a uma equação diferencial de primeira ordem

Considere uma equação diferencial de primeira ordem na forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad F \in \mathcal{O}^2, \text{ verificando } F(0) \neq 0. \quad (3.1)$$

As curvas integrais desta equação formam uma folheação analítica $\mathcal{F}$. A esta folheação podemos associar a 3-teia $\mathcal{W}(3) = \{x, y, \mathcal{F}\}$. A classificação das 3-teias da forma $\mathcal{W}(x, y, \mathcal{F})$ módulo germes de biholomorfismos da forma $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ é equivalente à classificação geométrica das equações diferenciais (3.1) módulo a mudança de variáveis $\bar{x} = X(x), \bar{y} = Y(y)$.

Teias associadas a uma equação diferencial implícita

A definição clássica de uma d -teia, como vimos, é dada através de suas folhas. Como veremos agora, também podemos definir uma d -teia implicitamente em que as folhas são dadas globalmente. Isto pode ser feito através de uma equação diferencial implícita.

Consideremos uma equação diferencial implícita de primeira ordem, polinomial em y' e de grau $d \geq 3$, com coeficientes analíticos em $\Omega \subset \mathbb{C}^2$:

$$F(x, y, y') = a_0(x, y)(y')^d + a_1(x, y)(y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0, \quad (3.2)$$

onde $F(x, y, p) \in \mathcal{O}[p]$ não tem fatores múltiplos e $a_0 \neq 0 \in \mathcal{O}$. Denotamos por $R \in \mathcal{O}$ a p -resultante de F , ou seja, $R := \text{Result}(F, \partial_p(F)) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0 \Delta$, onde Δ é o p -discriminante de F .

Em virtude do teorema de Cauchy, numa vizinhança V de um ponto $\omega \in \Omega \setminus \{R = 0\}$, existem d aplicações holomorfas $(x, y) \mapsto p_i(x, y)$ tais que, sobre V , temos:

$$F(x, y, p) = a_0(x, y) \prod_{i=1}^2 (p - p_i(x, y)) \text{ com } p_i(\omega) \neq p_j(\omega) \text{ se } i \neq j.$$

Em V , portanto, a equação $F(x, y, y') = 0$ admite d soluções $(x, y) \mapsto y_i(x, y)$ que são as integrais primeiras das folheações definidas pelos campos de vetores $\partial_x + p_i \partial_y$. Podemos considerar, então, a teia $\mathcal{W}(d) = (y_1, \dots, y_d)$ sobre V .

Reciprocamente, dada uma d -teia $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ de $\mathbb{C}^2$, se necessário por uma mudança de coordenadas linear, podemos construir uma equação diferencial

$$F(x, y, y') := \prod_{i=1}^d (\partial_y(F_i) y' + \partial_x(F_i)) = 0$$

que está na forma 3.2, verifica $R(0) \neq 0$ e cujas d soluções numa vizinhança da origem formam as folhas da teia

$$p_i(x, y) := -\frac{\partial_x(F_i)}{\partial_y(F_i)} \in \mathcal{O}.$$

Logo, toda teia plana pode ser dada implicitamente por uma equação diferencial F na forma (3.2). Este método, chamado de método implícito, tem a vantagem de não privilegiar nenhuma das folhas e se encaixa no estudo geométrico das equações diferenciais. Assim, o estudo da equação diferencial $F(x, y, y') = 0$ corresponde a estudar a teia que lhe é associada. Muitos autores usam este método. Por exemplo, Alain Hénaut obteve diversos resultados aplicando o método implícito, bem como seus alunos Luc Pirio e Olivier Ripoll. Este ponto de vista se generaliza aos sistemas de EDP's de primeira ordem (ver o artigo [Na 96])

3.3 Teias multidimensionais

Como o foco de nosso trabalho são as teias planas, a seguir damos apenas a definição de teias multidimensionais e alguns exemplos. As teias multidimensionais são definidas de maneira análoga às teias planas. Vejamos:

Definição 3.3.1. Seja $M = X^{nk}$ uma variedade diferenciável de dimensão nk e $\Omega \subset X$ um subconjunto aberto. Uma d -teia de codimensão k sobre Ω é um conjunto de d folheações de codimensão k que estão em posição geral. Denotamos esta d -teia por $W(d, n, k)$.

Observação 3.3.1. Observemos que é possível definir uma d -teia de codimensão k em $\mathbb{C}^n$ sem exigir que k seja divisor de n . É desta forma que Luc Pirio define uma d -teia multidimensional em [P]. A definição acima de teia multidimensional é a que encontramos em [AG-2]. Pode-se considerar, também, uma vez que a noção de posição geral não requer que os subespaços tangentes sejam de mesma dimensão, as teias mistas formadas por folheações em posição geral, mas de codimensões diferentes. Estas teias foram pouco estudadas e consideradas. Veja [BB 34], [Ch 85] e [Bom 34].

Exemplo 3.3.1. Seja $X = A^{nk}$ um espaço afim nk -dimensional. Considere $F_i, i = 1 \dots d$, d folheações de planos paralelos de dimensão $(n-1)k$. Esta teia $W(d, n, k)$ é chamada de *paralela*. Note que se $d \leq n$, então a d -teia é sempre paralela.

Figura 3.8: Uma teia multidimensional paralela em $\mathbb{R}^3$

Os primeiros estudos das teias multivariacionais $W(3, 2, k)$, $k > 1$ foram feitos por Bol ([Bol]) e Chern ([Chern 36]). Somente em 1969, com os trabalhos da escola Russa de Akivis, é que as teias multivariacionais voltaram a ser estudadas.

Capítulo 4

Introdução à geometria de teias

Neste capítulo começamos a estudar a geometria de teias propriamente dita. Na primeira seção, apresentamos os dois principais invariantes de uma teia: o *posto* e a *curvatura de Blaschke*. Este último invariante é definido inicialmente para uma 3-teia plana, enquanto que o posto é definido para uma d -teia, d qualquer. É também na primeira seção onde definimos a propriedade hexagonal utilizada por Thomsen para caracterizar as 3-teias paralelas. Feito isto, dedicamos a 2ª seção deste capítulo à demonstração do Teorema de caracterização das 3-teias planas.

4.1 Invariantes

A geometria de teias dedica-se ao estudo de invariantes de uma teia sob o grupo (pseudogruppo) das transformações diferenciais analíticas (ou $\mathbb{C}^\infty$, no caso real). Neste quadro, estamos seguindo as idéias introduzidas por Félix Klein em seu *programme d'Erlangen* (cf. 1.2 §3.). Assim, vamos explicitar um pouco mais o que queremos dizer por invariante de uma teia.

Seja $\mathcal{W}(d) = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ uma d -teia definida pelas d formas de Pfaff ω_i . Como $\rho_i \omega_i$ e ω_i definem a mesma folheação, onde $\rho_i \in \mathcal{O}$ e $\rho_i(0) \neq 0$, estamos interessados em invariantes que não dependam da maneira como são dadas as folhas da folheação, mas sim que dependam somente da d -teia. No caso implícito (cf. 3.2.3), modificar a maneira como a d -teia é dada equivale a multiplicar a equação implícita por um elemento invertível de $\mathcal{O}$, a saber o produto dos ρ_i^s . Em outras palavras, consideramos os invariantes módulo a ação do grupo dos elementos invertíveis de $\mathcal{O}$ sobre o conjunto das equações que definem

a teia.

Estabelecido isto, precisamos dizer quando duas teias são equivalentes.

Definição 4.1.1. Sejam $\mathcal{W}_1 = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d\}$ e $\mathcal{W}_2 = \{\tilde{\mathcal{F}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_d\}$ duas d -teias definidas em Ω_1 e Ω_2 , abertos de $(\mathbb{C}^2, 0)$, respectivamente. Dizemos que $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ são equivalentes se existir um difeomorfismo analítico (biholomorfismo local) $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que:

$$h(\mathcal{W}_1) = \{h(F_1), \dots, h(F_d)\} = \{\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_d\} = \mathcal{W}_2$$

O problema de classificação das d -teias para d qualquer ainda é um problema em aberto. Iniciemos com o caso mais simples. A classificação das 1-teias e 2-teias é trivial. De fato, seja $\mathcal{W} = \{F\}$ uma 1-teia definida em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Pelo teorema da forma local das submersões, existe um difeomorfismo analítico h tal que a folha $\{F = cte\}$ de $\mathcal{W}$ é levada sobre a folha $\{y = cte\}$. Analogamente se $\tilde{\mathcal{W}} = \{F_1, F_2\}$ é uma 2-teia plana, podemos fazer a mudança de coordenadas $u = F_1(x, y)$ e $v = F_2(x, y)$. Segue da hipótese de posição geral que esta é de fato uma mudança de coordenadas. Assim, neste novo sistema de coordenadas, as folhas de $\{F_1 = cte\}$ e $\{F_2 = cte\}$ são levadas sobre as folhas $\{u = cte\}$ e $\{v = cte\}$, respectivamente. Sendo assim, todas 1-teias são equivalentes entre si, bem como todas 2-teias.

Figura 4.1: Todas 2-teias são localmente equivalentes

Logo o caso que é interessante para a geometria de teias é quando $d \geq 3$. Antes de continuarmos, mais algumas definições são necessárias:

Definição 4.1.2. Dizemos que uma d -teia $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ é *linear*, se as folhas das folheações de $\mathcal{W}$ são retas. Uma d -teia $\mathcal{W}$ definida em $(\mathbb{C}^n, 0)$ é linear se suas folhas são intersecções de $(\mathbb{C}^n, 0)$ com subespaços lineares de $\mathbb{C}^n$. Ainda, dizemos uma d -teia em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é paralela se suas folhas são retas paralelas.

O problema de decidir quando uma d -teia é equivalente a uma teia linear é um dos principais problemas da geometria de teias. Já vimos no capítulo 1 que este problema era importante em nomografia, afinal um nomograma constituído por segmentos de retas é mais legível (Ver fig. 1.2). Mais legível ainda seria se os segmentos de retas fossem paralelos! Para o caso de uma 3-teia plana, o problema de saber quando ela é equivalente a uma teia paralela foi resolvido por Thomsen e publicado no artigo [Th 27] em 1927. Thomsen era aluno de Blaschke. Foi após a publicação de seu aluno que Blaschke percebeu a existência de um invariante diferencial para uma 3-teia plana que também diz se uma 3-teia é equivalente a uma teia paralela. Estes dois resultados juntos basicamente constituem o teorema de caracterização das 3-teias planas paralelizáveis ou, como chamaremos daqui em diante, *Teorema de caracterização das 3-teias*. Este é um resultado importante e reservamos uma seção para o seu enunciado e demonstração. Antes disso, formalizemos alguns conceitos.

Definição 4.1.3. Uma d -teia é dita *linearizável* se é equivalente a uma teia linear. Analogamente, uma d -teia é *paralelizável* se é equivalente a uma teia paralela.

4.1.1 O posto de uma d -teia

Vamos aqui apresentar o nosso primeiro invariante de uma d -teia: o posto de uma teia. Começemos com a seguinte definição:

Definição 4.1.4. Seja $\mathcal{W}(d) = \{F_1(x, y), \dots, F_d(x, y)\}$ uma d -teia em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Uma equação da forma

$$\sum_i^d f_i(F_i(x, y)) dF_i = 0,$$

onde f_i é uma função polinomial de uma variável complexa com derivada $f'_i \neq 0$, é chamada de *relação abeliana* da teia $\mathcal{W}$. Se $\mathcal{W}$ é dada pelas suas formas de Pfaff, então a equação acima se torna $\sum_i^d f_i(\omega_i) d\omega_i$. Dizemos também que a relação abeliana é não degenerada quando todas as funções $f_i \in \mathbb{C}\{t\}$ não são identicamente nulas.

Observação 4.1.1. Em um ponto $p \in \Omega \subset \mathbb{C}^2$, a forma $\omega^i = dF_i$ determina um ponto $\omega^i(p) \in \mathbb{P}(T_p^*)$. Os pontos $\omega^1(p), \dots, \omega^d(p)$ são chamados de *normais* da teia $\mathcal{W}$. Assim, uma relação abeliana é uma relação entre as normais da teia em que os coeficientes $f_i \in \mathbb{C}\{t\}$ são constantes ao longo das folhas da teia.

Consideremos o conjunto de todas as relações abelianas de uma d -teia $\mathcal{W}$. Este conjunto será denotado por $\mathfrak{R}(\mathcal{W})$. Sejam $r_1 := \sum_i^d f_i(\omega_i)d\omega_i$, $r_2 := \sum_i^2 g_i(\omega_i)d\omega_i$ duas relações abelianas de $\mathcal{W}$, e $h \in \mathcal{O}$. Definimos, de maneira natural, as operações $+$: $r_1 + r_2 := \sum_i^d (f_i + g_i)(\omega_i)d\omega_i$ e $\cdot$: $hr_1 := \sum_i^d (hf_i)(\omega_i)d\omega_i$. Verifica-se que o conjunto $\mathfrak{R}(\mathcal{W})$ munido destas duas operações é um espaço vetorial que será chamado de *espaço vetorial das relações abelianas* de $\mathcal{W}$. Este espaço vetorial é de dimensão finita e, embora as relações abelianas dependam da maneira como a d -teia é apresentada, a dimensão deste espaço é bem definida e depende somente da d -teia. Sendo assim, temos a seguinte

Definição 4.1.5. Seja $\mathcal{W}$ uma d -teia sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ e considere o espaço vetorial das relações abelianas $\mathfrak{R}(\mathcal{W})$. A dimensão de $\mathfrak{R}(\mathcal{W})$ é chamada de *posto* da d -teia $\mathcal{W}$. Denotamos o posto de uma d -teia por $\text{rk}(\mathcal{W})$.

Um resultado clássico estabelecido logo no início da teoria de teias, nos diz que o posto de uma d -teia possui um limitante superior ótimo, a saber:

$$\text{rk}(\mathcal{W}) := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{R}(\mathcal{W}) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \quad (4.1)$$

O número $\pi_d = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ é bem conhecido em geometria algébrica e trata-se do gênero de uma curva lisa de classe d em $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$.

Cabe aqui outra definição importante:

Definição 4.1.6. Uma d -teia $\mathcal{W}$ é de *posto máximo* quando a dimensão do espaço das relações abelianas atinge o número π_d . Em outras palavras, $\mathcal{W}$ é de posto máximo quando, ao invés da desigualdade acima, verifica-se a igualdade

$$\text{rk}(\mathcal{W}) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Exemplo 4.1.1. Retomemos o exemplo da 3-teia plana $\mathcal{H} = \{x, y, x+y\}$. As três formas de Pfaff que definem a teia são $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = dy$ e $\omega_3 = dx + dy$. Por (4.1) temos que $\text{rk}(\mathcal{H}) \leq 1$. Assim, o posto de $\mathcal{H}$ só pode ser 0 ou 1. Como temos a seguinte relação abeliana não degenerada $r_1 : \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0$, segue que o posto de $\mathcal{H}$ é exatamente 1, o que mostra que $\mathcal{H}$ é uma teia de posto máximo.

Formalizemos o conceito de teia algébrica.

Definição 4.1.7. Diremos que uma d -teia $\mathcal{W}$ é *algébrica* (ou *algebrizável*) se $\mathcal{W}$ pode ser obtida através de uma curva algébrica C de grau d via a construção feita em 3.2.2.

Existe uma estreita relação entre as teias algebrizáveis e o teorema de adição de Abel. Na verdade, Blaschke descobriu que toda teia algébrica (ou algebrizável) é de posto máximo. Não entraremos nos detalhes desta relação podendo ser encontrados no artigo publicado por Chern e Griffiths em [CG 78]. Logo surge a questão: toda teia de posto máximo é algebrizável? A resposta é não e como vimos na introdução a 5-teia de Bol é um exemplo de uma teia de posto máximo ($\text{rk}(\mathcal{W}) = 6 = \frac{1}{2}(5-1)(5-2)$) que não é algebrizável pois não é linearizável. Isto motiva a definição seguinte:

Definição 4.1.8. Uma d -teia $\mathcal{W}$ de posto máximo que não é algebrizável é chamada de *teia excepcional*.

Muitos autores têm estudado teias excepcionais como dissemos no capítulo 1.

Teias Hexagonais

Thomsen demonstrou que uma 3-teia plana é paralelizável se, e somente se, ela possui a propriedade hexagonal (ou ainda, a propriedade do hexágono fechado), que explicamos a seguir.

Seja $\mathcal{W} = \{F_1, F_2, F_3\}$ uma 3-teia definida sobre uma pequena vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^2$. Sejam L_1, L_2 e L_3 as três folhas passando pela origem das três folheações $\mathcal{W}$. Se p é um ponto de L_1 suficientemente próximo da origem, a folha de F_3 que passa por p intersecta L_2 em um ponto que denotaremos por $h_1^2(p)$. Verifica-se que a aplicação $p \mapsto h_1^2(p)$ define um germe holomorfo de $(L_1, 0)$ em $(L_2, 0)$.

Mais geralmente quando $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ao percorrermos as folhas de F_i , podemos associar a cada ponto p de L_j (suficientemente próximo da origem) um ponto $h_j^k(p)$ de L_k definindo assim um germe de aplicação holomorfa $h_j^k : (L_j, 0) \rightarrow (L_k, 0)$. Por composição obtemos um germe de aplicação:

$$H_1 = h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 \circ h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 : (L_2, 0) \rightarrow (L_1, 0).$$

Note que para todo $p \in L_1$, a imagem $q = H_1(p)$ de p é obtida traçando-se um “hexágono” em torno da origem caminhando pelas folhas de $\mathcal{W}$. Veja a figura 4.2. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.1.9 (Teias hexagonais). Uma 3-teia $\mathcal{W}$ é hexagonal se todo hexágono traçado em torno da origem (segundo a construção acima) se fecha, ou seja, o germe de aplicação H_1 é a identidade.

Figura 4.2: Construção do hexágono

4.1.2 A curvatura de Blaschke de uma 3-teia

Seja $\mathcal{W}(3)$ uma 3-teia em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e sejam ω_1, ω_2 e ω_3 as 3 formas de Pfaff que a definem.

Proposição 4.1.1. *Podemos escolher três formas, $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$, e $\tilde{\omega}_3$, que definem a mesma teia que as formas de Pfaff acima tais que verifiquem a condição de normalização seguinte:*

$$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3 = 0. \quad (4.2)$$

Demonstração. De fato, a hipótese de posição geral garante que as três formas ω_1, ω_2 e ω_3 são, duas a duas, independentes na origem. Logo, existem ρ_2 e ρ_3 necessariamente invertíveis em $\mathcal{O}$ tais que

$$\omega_3 = \rho_1 \omega_1 + \rho_2 \omega_2. \quad (4.3)$$

Basta fazer a substituição

$$\tilde{\omega}_1 \mapsto \frac{1}{\rho_1} \omega_1; \quad \tilde{\omega}_2 \mapsto \frac{1}{\rho_2} \omega_2 \text{ e } \tilde{\omega}_3 \mapsto -\omega_3$$

que a equação 4.3 fica na forma 4.2. □

No que segue, sempre estaremos supondo que as 3-formas de Pfaff que definem uma 3-teia estão normalizadas. Também é fácil ver que dadas duas triplas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ de formas normalizadas, elas definem a mesma teia se, e somente se, existe $\rho \in \mathcal{O}^*$ tal que

$$\omega_1 = \rho \tilde{\omega}_1; \quad \omega_2 = \rho \tilde{\omega}_2 \text{ e } \omega_3 = \rho \tilde{\omega}_3.$$

Equações de Estrutura de uma 3-teia

Proposição 4.1.2. *Seja $\mathcal{W}$ uma 3-teia. Existe uma 1-forma holomorfa $\gamma \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que, para todo i , vale a relação*

$$d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i \quad (4.4)$$

Demonstração. Podemos definir a 2-forma (não singular) $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2$. Usando 4.2 é fácil obter as igualdades $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_1$. Se colocarmos $\tilde{\omega}_i = \rho_i \omega_i$, onde ρ_i é invertível com $\sum_i \omega_i = 0$, temos então

$$\tilde{\Omega} = \rho_1 \rho_2 \Omega = \rho_2 \rho_3 \Omega = \rho_1 \rho_3 \Omega,$$

o que prova que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ e, denotando este valor comum por ρ temos $\tilde{\Omega} = \rho^2 \Omega$.

Uma vez que em $\mathbb{C}^2$ temos para toda 1-forma ω a identidade $\omega \wedge d\omega = 0$, o teorema de Fröbenius garante a existência de funções invertíveis $g_i \in \mathcal{O}^*$ para $i = 1, 2$ e 3 e de funções $F_i \in \mathcal{O}$ que satisfazem $F_i(0) = 0$ e $dF_i(0) \neq 0$ tais que

$$\omega_i = g_i dF_i.$$

Assim podemos escrever

$$d\omega_i = dg_i \wedge dF_i = \frac{dg_i}{g_i} \wedge \omega_i$$

e uma vez que o sistema das formas ω_i está normalizado, temos que

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dg_i}{g_i} \wedge \omega_i = 0.$$

Como $-\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, temos

$$\left(\frac{dg_1}{g_1} - \frac{dg_3}{g_3} \right) \wedge \omega_1 = \left(\frac{dg_2}{g_2} - \frac{dg_3}{g_3} \right) \wedge \omega_2 = 0.$$

Como as formas ω_1 e ω_2 são independentes, segue do lema de E. Cartan que existem α, β e δ em $\mathcal{O}$ tais que

$$\begin{cases} \frac{dg_1}{g_1} - \frac{dg_3}{g_3} = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \frac{dg_2}{g_2} - \frac{dg_3}{g_3} = \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{cases}$$

e verifica-se que

$$\frac{dg_1}{g_1} - (\alpha - \beta)\omega_1 = \frac{dg_2}{g_2} + (\beta - \delta)\omega_2 = \frac{dg_3}{g_3} - \beta\omega_3.$$

A 1-forma acima definida será denotada por γ e, para todo i , tem-se que

$$d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i. \quad (4.5)$$

□

As relações 4.5 são chamadas de *primeiras equações de estrutura* da 3-teia $\mathcal{W}$.

Definição 4.1.10. Chamamos de *curvatura de Blaschke* da 3-teia $\mathcal{W}(3)$ a 2-forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)} = d\gamma.$$

Temos a seguinte

Proposição 4.1.3. *A curvatura de Blaschke acima definida é um invariante da 3-teia $\mathcal{W}$.*

Demonstração. Para uma outra normalização $\sum_i \tilde{\omega}_i = 0$ já vimos que $\tilde{\omega}_i = \rho\omega_i$ e, portanto

$$d\tilde{\omega}_i = \tilde{\gamma} \wedge \tilde{\omega}_i = d\rho \wedge \omega_i + \rho d\omega_i = \rho\tilde{\gamma} \wedge \omega_i.$$

Como as 1-formas ω_1 e ω_2 geram Λ^1 , obtemos

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \frac{d\rho}{\rho},$$

o que mostra que $d\gamma$ é um invariante da teia $\mathcal{W}$. □

Temos que

$$d\gamma = K\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (4.6)$$

A equação 4.6 é chamada de *segunda equação de estrutura* da teia $\mathcal{W}$ e K a função curvatura.

Exemplo 4.1.2. Considere a 3-teia $\mathcal{W}(3) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Como estamos trabalhando num domínio simplesmente conexo existe uma função $f \in \mathcal{O}$ tal que ω_3 é proporcional a df , ou seja, $\omega_3 \wedge df = 0$. Logo, existe $g \in \mathcal{O}^*$ tal que $\omega_3 = gdf$. Escolhemos, então, uma representação na qual podemos tomar $\omega_3 = df$. A função f é chamada de *função da teia* e é em função dela que calcularemos a curvatura da teia $\mathcal{W}$. Observe que podemos tomar as funções analíticas x e y de maneira que $\omega_1 = g_1 dx$ e $\omega_2 = g_2 dy$ para algumas funções analíticas g_1 e g_2 . As funções x e y sendo independentes podem ser tomadas como coordenadas locais e, segue de 4.2, que nestas coordenadas temos

$$\omega_1 = -f_x dx, \omega_2 = -f_y dy \text{ e } \omega_3 = df.$$

Como as duas 2-formas $d\omega_1$ e $d\omega_2$ diferem de $\omega_1 \wedge \omega_2$ apenas por funções escalares, podemos escrever $d\omega_1 = h_1\omega_1 \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = h_2\omega_2 \wedge \omega_1$ para algumas funções h_1 e h_2 . De $d\omega_3 = 0$ segue que $h_1 = h_2$ e chamaremos esta função de H . Então $d\omega_1 = H\omega_1 \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = H\omega_2 \wedge \omega_1$ e pelas primeiras equações de estrutura $d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma$ para $i = 1, 2$ segue que

$$\gamma = -H\omega_3.$$

Em termos da função da teia f temos:

$$\gamma = -\frac{f_{xy}}{f_x f_y} \omega_3 \text{ e } H = \frac{f_{xy}}{f_x f_y}.$$

Agora, como $d\gamma = K\omega_1 \wedge \omega_2$ a função curvatura K em termos de f é:

$$K = -\frac{1}{f_x f_y} \left(\lg \left(\frac{f_x}{f_y} \right) \right)_{xy}.$$

Por exemplo, a 3-teia $\mathcal{H}$ de posto 1 definida anteriormente é de curvatura nula. De fato, com a normalização $dx + dy - d(x + y) = 0$, temos $\Omega = dx \wedge dy$ e assim $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ o que prova que $\gamma = 0$.

Capítulo 5

O Teorema de caracterização das 3-teias

Nesta seção, demonstraremos o Teorema de caracterização das 3-teias. Faremos uso de tudo o que foi discutido até agora. A equivalência (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) é o famoso teorema de Thomsen que deu início ao estudo sistemático das teias.

Teorema 5.0.1 (Estrutura das 3-teias de posto máximo). *Seja $\mathcal{W}(3)$ uma 3-teia de $(\mathbb{C}^2, 0)$, dada pelas três formas de Pfaff normalizadas ω_1 , ω_2 e ω_3 . As cinco propriedades seguintes são equivalentes:*

- (i) *A teia $\mathcal{W}(3)$ é de posto 1;*
- (ii) *A teia $\mathcal{W}(3)$ é paralelizável;*
- (iii) *A teia $\mathcal{W}(3)$ é hexagonal;*
- (iv) *A teia $\mathcal{W}(3)$ tem curvatura de Blaschke $\mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)}$ nula;*
- (v) *As três formas de Pfaff normalizadas que definem a teia $\mathcal{W}(3)$ verificam $\omega_i = \rho du_i$, onde $\rho \in \mathcal{O}^*$ e $u_i \in \mathcal{O}$.*

Demonstração. Primeiramente notemos que (ii) e (iii) implicam (iv) e (i). De fato, como $\mathcal{W}(3)$ é paralelizável então ela é equivalente à 3-teia $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y, x + y)$. Do que foi exposto um pouco mais acima, lembremos que as três formas de Pfaff que definem a teia $\mathcal{H}$ são: $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = dy$, $\omega_3 = dx + dy$. Note que o posto de $\mathcal{H}$ pode ser apenas 0 ou 1. Como temos a seguinte relação abeliana não trivial

$$dx + dy - (dx + dy) = 0$$

segue que $\mathcal{H}$ tem posto 1. Além disso, calculamos acima a curvatura de Blaschke da teia $\mathcal{H}$ e vimos que $\mathcal{K}_H \equiv 0$. Como a curvatura é um invariante da teia, se $\mathcal{W}(3)$ é hexagonal e paralelizável então sua curvatura de Blaschke é nula, pois $\mathcal{W}(3)$ é equivalente à teia $\mathcal{H}$.

Mostremos agora que (iv) implica (v). Como a 2-forma $\mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)} = d\gamma \equiv 0$, pelo lema de Poincaré temos que $\gamma = d\psi$ onde $\psi \in \mathcal{O}$. Tome $\rho = e^\psi \in \mathcal{O}^*$. Então $d\rho = d(e^\psi) = e^\psi d\psi$. Logo,

$$\frac{d\rho}{e^\psi} = d\psi \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \gamma.$$

Como vimos na construção acima, temos que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$. Assim temos

$$d\left(\frac{\omega_i}{\rho}\right) = d\omega_i \frac{1}{\rho} + \omega_i \wedge \left(\frac{-d\rho}{\rho^2}\right).$$

Agora $\frac{-d\rho}{\rho} = -\gamma \Leftrightarrow \frac{-d\rho}{\rho} \wedge \omega_i = -\gamma \wedge \omega_i$. Portanto

$$d\left(\frac{\omega_i}{\rho}\right) = d\omega_i \frac{1}{\rho} + \omega_i \wedge \left(\frac{-d\rho}{\rho^2}\right) = 0$$

Pelo lema de Poincaré temos que existem $u_i \in \mathcal{O}$ tais que $\frac{\omega_i}{\rho} = du_i \Leftrightarrow \omega_i = \rho du_i$, e isto mostra que (iv) implica em (v).

Mostraremos agora que (v) implica (ii). Por translação podemos supor que $u_i(0) = 0$. Pela hipótese de posição geral temos

$$\omega_1 \wedge \omega_2(0) = \rho^2(du_1 \wedge du_2)(0) \neq 0.$$

Assim $\phi : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ definida por $\phi = (u_1, u_2)$ é um isomorfismo analítico local. Como as 3 formas ω_i estão normalizadas, então $0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \rho d(u_1 + u_2 + u_3)$. A condição $u_i(0) = 0$, implica então $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, o que mostra que ϕ paraleliza a teia.

Prossigamos mostrando que (i) implica (ii). Seja

$$g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0 \tag{5.1}$$

uma relação abeliana não trivial da teia. Tomando primitivas convenientes $\tilde{g}_i$ de g_i podemos supor que $\sum_i \tilde{g}_i = 0$ e que $F_1(x, y) = x$ e $F_2(x, y) = y$. Considere agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\tilde{g}_1(F_1(x, y)), \tilde{g}_2(F_2(x, y))) \end{aligned}$$

Calculemos o jacobiano de ϕ :

$$J\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{g}_1(F_1(x, y)) & \partial_y \tilde{g}_1(F_1(x, y)) \\ \partial_x \tilde{g}_2(F_2(x, y)) & \partial_y \tilde{g}_2(F_2(x, y)) \end{pmatrix}$$

Agora

$$|J\phi(x, y)| = \begin{vmatrix} g_1(F_1(x, y)) & 0 \\ 0 & g_2(F_2(x, y)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_2(y) \end{vmatrix}$$

Note que derivando 5.1 com relação a x e y obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} g_1(x) + g_3(F_3(x, y))\partial_x(F_3(x, y)) & = & 0 \\ g_2(y) + g_3(F_3(x, y))\partial_y(F_3(x, y)) & = & 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Logo,

$$|J\phi(x, y)| = g_3(F_3(x, y))^2 \partial_x(F_3(x, y)) \partial_y(F_3(x, y)).$$

Pela hipótese de posição geral $\partial_x(F_3(x, y))\partial_y(F_3(x, y)) \neq 0$. De fato, caso alguma das derivadas parciais de F_3 fosse nula então as folhas de F_3 não intersectariam transversalmente as folhas de F_1 ou F_2 .

Mostraremos que $g_3(F_3) \neq 0$. Derivando a primeira equação de 5.2 com relação x obtemos:

$$g'_1(x) + g'_3(F_3(x, y))(\partial_x F_3(x, y))^2 + g_3(F_3(x, y))\partial_{xx} F_3(x, y) = 0, \quad (5.3)$$

e portanto

$$g'_1(0) + g'_3(0)(\partial_x F_3(0))^2 = 0. \quad (5.4)$$

Agora derivando a segunda equação de 5.2 novamente com relação x :

$$g'_3(F_3(x, y))\partial_x F_3(x, y)\partial_y F_3(x, y) + g_3(F_3(x, y))\partial_{xy} F_3(x, y) = 0, \quad (5.5)$$

donde segue que

$$g'_3(0)\partial_x F_3(0)\partial_y F_3(0) = 0. \quad (5.6)$$

Como

$$\partial_x F_3(0) \partial_y F_3(0) \neq 0 \text{ então } g'_3(0) = 0. \quad (5.7)$$

De 5.4 e 5.7 temos que $g'_1(0) = 0$.

Derivando sucessivamente 5.2 como fizemos acima obtemos

$$0 = g'_1(0) = g''_1(0) = \dots$$

O mesmo argumento pode ser usado para concluir também que

$$0 = g'_2(0) = g''_2(0) = \dots$$

Mas assim $g_1 \cong g_2 \cong 0$. Absurdo.

Logo ϕ é um difeomorfismo local que paraleliza a teia. $\square$

Resta mostrar a equivalência entre as afirmações (ii) e (iii) que é o teorema de Thomsen. Considera-se este artigo o marco inicial do estudo sistemático da teoria de teias e, por isso, julgamos importante apresentar esta demonstração. Apresentamos exatamente a prova encontrada em [Th 27], usando uma linguagem matemática mais atual. Como se trata de uma prova longa, com muitos cálculos, vamos destacá-la na próxima subseção.

Figura 5.1: Demonstrando o teorema de Thomsen - 1

5.1 O teorema de Thomsen

Seja então $\mathcal{W}(3)$ uma 3-teia do plano. Queremos mostrar que $\mathcal{W}$ é hexagonal se, e somente se, $\mathcal{W}$ é paralelizável.

Demonstração. Primeiro suponhamos que $\mathcal{W}$ seja paralelizável. Então

$$\mathcal{W} \equiv \mathcal{H} = \{x, y, x + y\}$$

Observe a figura 5.1. Sejam $h_{ij}, l_{ij} : L_i \mapsto L_j$ os difeomorfismos indicados na figura, onde L_1, L_2 e L_3 são as folhas de $\mathcal{H}$. É claro que $h_{31} \circ h_{23} \circ h_{12} \circ l_{31} \circ l_{23} \circ h_{12} = id$. Logo $\mathcal{H}$ é hexagonal.

Para demonstrarmos a outra implicação, suponhamos que $\mathcal{W}(3)$ seja hexagonal. Além disso já podemos supor que $\mathcal{W}(3) = \{u, v, \psi(u, v)\}$ com $\psi_u \neq 0, \psi_v \neq 0$. Escolha um ponto $P = (u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$. Por este ponto considere um hexágono fechado cujos vértices P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 têm coordenadas mostradas na figura 5.2.

Figura 5.2: Demonstrando o teorema de Thomsen - 2

Podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} \psi(u_1, v_0) = \psi(u_0, v_1) \\ \psi(u_1, v_2) = \psi(u_0, v_0) = \psi(u_2, v_1) \\ \psi(u_0, v_2) = \psi(u_2, v_0) \end{cases}$$

Note que fixado $P_0 = (u_0, v_0)$ e dado $P_1 = (u_1, v_0)$ as seguintes equações servem para se determinar v_1, v_2 e u_2 dados u_0, v_0 e u_1 arbitrários:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \psi(u_1, v_0) = \psi(u_0, v_1) \\
(2) \quad & \psi(u_2, v_1) = \psi(u_0, v_0) \\
(3) \quad & \psi(u_0, v_2) = \psi(u_2, v_0)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A validade da configuração do hexágono fechado finalmente se exprime dizendo que em P_6 passam as curvas $u = u_1$ por P_1 , $v = v_2$ por P_5 e a curva $\psi(u_0, v_0)$ por P . Logo também temos a seguinte equação:

$$\psi(u_1, v_2) = \psi(u_0, v_0). \tag{5.9}$$

Portanto a aplicação ψ é tal que a equação 5.9 é satisfeita identicamente para todos os valores arbitrários de u_0, v_0, u_1 e os valores correspondentes de v_1, v_2, u_2 encontrados em 5.8. Vamos expandir a equação (1) de 5.8 por potências de $\bar{u}_i = u_i - u_0$ e $\bar{v}_i = v_i - v_0$ para $i = 1, 2$. Começemos por expandir o membro esquerdo da equação 5.8(1):

$$\begin{aligned}
\psi(u_1, v_0) &= \psi(u_0 + (u_i - u_0), v_0) = \psi(u_0 + \bar{u}_i, v_0) \\
&= \psi(u_0, v_0) + \bar{u}_i \psi_u + \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \psi_{uu} + \frac{1}{6} \bar{u}_i^3 \psi_{uuu} + \dots
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Expandindo o membro direito da equação 5.8(1):

$$\begin{aligned}
\psi(u_0, v_1) &= \psi(u_0 + 0, v_0 + (v_i - v_0)) = \psi(u_0, v_0 + \bar{v}_i) \\
&= \psi(u_0, v_0) + \bar{v}_i \psi_v + \frac{1}{2} \bar{v}_i^2 \psi_{vv} + \frac{1}{6} \bar{v}_i^3 \psi_{vvv} + \dots
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Mas 5.10 = 5.11, portanto:

$$\psi(u_0, v_0) + \bar{u}_i \psi_u + \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \psi_{uu} + \frac{1}{6} \bar{u}_i^3 \psi_{uuu} + \dots = \psi(u_0, v_0) + \bar{v}_i \psi_v + \frac{1}{2} \bar{v}_i^2 \psi_{vv} + \frac{1}{6} \bar{v}_i^3 \psi_{vvv} + \dots$$

Então consideremos a seguinte função

$$\phi(\bar{u}_i, \bar{v}_i) = u_i \psi_u - v_i \psi_v + \frac{1}{2} [\bar{u}_i^2 \psi_{uu} - \bar{v}_i^2 \psi_{vv}] + \frac{1}{6} [\bar{u}_i^3 \psi_{uuu} - \bar{v}_i^3 \psi_{vvv}] + \dots = 0$$

Note que $\phi_{\bar{v}_i}(u_0, v_0) = -\psi_v(u_0, v_0) \neq 0$. Assim pelo teorema da função implícita é possível obter $\bar{v}_i$ em função de $\bar{u}_i$. Suponhamos então que

$$\bar{v}_i = \alpha(\bar{u}_i) = A\bar{u}_i + B\bar{u}_i^2 + C\bar{u}_i^3 + \dots \tag{5.12}$$

Queremos achar os coeficientes A, B e C . Temos que $\phi(\bar{u}_i, \alpha(\bar{u}_i)) = 0$. Assim

$$u_i \psi_u - \alpha(\bar{v}_i) \psi_v + \frac{1}{2} [\bar{u}_i^2 \psi_{uu} - \alpha(\bar{u}_i)^2 \psi_{vv}] + \frac{1}{6} [\bar{u}_i^3 \psi_{uuu} - \alpha(\bar{u}_i)^3 \psi_{vvv}] + \dots = 0$$

Para acharmos A vamos derivar a equação anterior com relação a $\bar{u}_i$:

$$\psi_u - \alpha'(\bar{u}_i)\psi_v + \frac{1}{2}[2\bar{u}_i\psi_{uu} - 2\alpha(\bar{u}_i)\alpha'(\bar{u}_i)\psi_{vv}] + \frac{1}{6}[3\bar{u}_i^2\psi_{uuu} - 3\alpha(\bar{u}_i)^2\alpha'(\bar{u}_i)\psi_{vvv}] + \dots = 0$$

Assim

$$\alpha'(\bar{u}_i)\psi_v = \psi_u + [\bar{u}_i\psi_{uu} - \alpha(\bar{u}_i)\alpha'(\bar{u}_i)\psi_{vv}] + \frac{1}{2}[\bar{u}_i^2\psi_{uuu} - \alpha(\bar{u}_i)^2\alpha'(\bar{u}_i)\psi_{vvv}] + \dots = 0$$

Comparando os termos constantes (que não dependem de $\bar{u}_i$) dos dois membros da equação acima vemos que

$$A\psi_v = \psi_u \Leftrightarrow A = \frac{\psi_u}{\psi_v}.$$

Para acharmos B vamos derivar novamente :

$$\alpha''(\bar{u}_i)\psi_v = \psi_{uu} - \psi_{vv}\alpha'(\bar{u}_i)^2 - \psi_{vv}\alpha(\bar{u}_i)\alpha''(\bar{u}_i) + \bar{u}_i\psi_{uuu} - \psi_{vvv}\alpha(\bar{u}_i)\alpha'(\bar{u}_i)^2 - \psi_{vvv}\alpha(\bar{u}_i)^2\alpha'' + \dots = 0.$$

Novamente comparando os termos constantes dos dois membros segue que

$$2B = \psi_{uu} - \psi_{vv}A^2 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2\psi_v^3}(\psi_v^2\psi_{uu} - \psi_{vv}\psi_u^2).$$

Derivemos novamente para encontrar C :

$$\begin{aligned} \alpha'''(\bar{u}_i)\psi_v &= \psi_{uuu} - 3\psi_{vvv}\alpha'(\bar{u}_i)\alpha''(\bar{u}_i) + \\ &+ (1 + \alpha(\bar{u}_i))\alpha(\bar{u}_i)\alpha'''(\bar{u}_i) - 4\psi_{vvv}(\alpha(\bar{u}_i)\alpha'(\bar{u}_i)\alpha''(\bar{u}_i) - \psi_{vvv}\alpha'(\bar{u}_i)^3) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$6C\psi_v = \frac{\psi_v^3\psi_{uuu} - \psi_{vvv}\psi_u^3}{\psi_v^3} - \frac{6\psi_u\psi_v\psi_{vv}B}{\psi_v} \Leftrightarrow C = \frac{\psi_v^3\psi_{uuu} - \psi_{vvv}\psi_u^3}{6\psi_v^4} - \frac{\psi_u\psi_v\psi_{vv}B}{\psi_v^2}.$$

Agora olhemos para a equação 5.8(2):

$$\psi(u_2, v_1) = \psi(u_0, v_0) \Leftrightarrow \psi(u_0 + (u_2 - u_0), v_0 + (v_1 - v_0)) = \psi(u_0 + \bar{u}_2, v_0 + \bar{v}_1) = \psi(u_0, v_0).$$

Assim vamos expandir o membro esquerdo da equação 5.8(2):

$$\psi(u_0, v_0) + \bar{u}_2\psi_u + \bar{v}_1\psi_v + \frac{1}{2}(\bar{u}_2^2\psi_{uu} + 2\bar{u}_2\bar{v}_1\psi_{uv} + \bar{v}_1^2\psi_{vv}) + \frac{1}{6}(\bar{u}_2^3\psi_{uuu} + 3\bar{u}_2^2\bar{v}_1\psi_{uuv} + 3\bar{u}_2\bar{v}_1^2\psi_{uvv} + \bar{v}_1^3\psi_{vvv}) \quad (5.13)$$

Vamos substituir $\bar{v}_1$ obtido na equação 5.12 na equação 5.13 e obtemos:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)\psi_u + \frac{1}{2}(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2)\psi_{uu} + \bar{u}_1\bar{u}_2\frac{\psi_u\psi_{uv}}{\psi_v} + \frac{1}{6}(\bar{u}_1^3 + \bar{u}_2^3)\psi_{uuu} + \\ + \frac{1}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2[\psi_{uvv}\frac{\psi_u^2}{\psi_v^2} + \frac{\psi_{uv}}{\psi_v^3}(\psi_{uu}\psi_v^2 - \psi_{vv}\psi_u^2)] + \\ + \frac{1}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2^2\frac{\psi_{uuv}\psi_u}{\psi_v} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Observe que do mesmo modo que obtivemos $\bar{v}_1$ em função de $\bar{u}_1$ através da equação 5.8(1), também podemos obter $\bar{v}_2$ em função de $\bar{u}_2$ pela equação 5.8(3) de modo exatamente análogo. Na verdade como nas equações (1) e (3) de 5.8 apenas trocam-se os índices 1 e 2 das variáveis u e v temos que:

$$\bar{v}_2 = A\bar{u}_2 + B\bar{u}_2^3 + C\bar{u}_2^3 + \dots \quad (5.15)$$

com os mesmos coeficientes A, B e C calculados anteriormente. Como também as equações 5.8(2) e 5.9 diferem apenas pela troca dos índices 1 e 2 das variáveis u e v , temos ao substituir $\bar{v}_2$ obtido em 5.15 na equação 5.9:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_2 + \bar{u}_1)\psi_u + \frac{1}{2}(\bar{u}_2^2 + \bar{u}_1^2)\psi_u u + \bar{u}_2\bar{u}_1 \frac{\psi_u \psi_{uv}}{\psi_v} + \frac{1}{6}(\bar{u}_2^3 + \bar{u}_1^3)\psi_{uuu} + \\ + \frac{1}{2}\bar{u}_2^2\bar{u}_1[\psi_{uvv} \frac{\psi_u^2}{\psi_v^2} + \frac{\psi_{uv}}{\psi_v^3}(\psi_{uu}\psi_v^2 - \psi_{vv}\psi_u^2)] + \\ + \frac{1}{2}\bar{u}_2\bar{u}_1^2 \frac{\psi_{uvv}\psi_u}{\psi_v} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Note que o coeficiente de $\bar{u}_1^2\bar{u}_2$ em 5.14 é o mesmo coeficiente de $\bar{u}_1\bar{u}_2^2$ em 5.16 e vice-versa. Assim devem ser iguais os coeficientes de $\bar{u}_1^2\bar{u}_2$ e $\bar{u}_1\bar{u}_2^2$ em 5.14. Donde segue:

$$\frac{\psi_{uvv}\psi_u}{\psi_v} = \psi_{uvv} \frac{\psi_u^2}{\psi_v^2} + \frac{\psi_{uv}}{\psi_v^3}(\psi_{uu}\psi_v^2 - \psi_{vv}\psi_u^2)$$

ou ainda

$$\frac{\psi_{uvv}\psi_u - \psi_{uu}\psi_{uv}}{\psi_u^2} = \frac{\psi_{uvv}\psi_v - \psi_{vv}\psi_{uv}}{\psi_v^2}$$

ou ainda

$$(\lg \psi_u)_{uv} = (\lg \psi_v)_{uv}. \quad (5.17)$$

Integrando 5.17 obtemos:

$$\frac{\psi_u}{\psi_v} = U(u)V(v)$$

que por uma mudança conveniente de coordenadas sobre as curvas $u=cte$ e $v=cte$ podemos supor $U = V = 1$. Assim a integração da equação

$$\psi_u = \psi_v$$

fornece

$$\psi = f(u + v),$$

onde f é uma função do único argumento $u + v$. Ora agora a demonstração já está terminada pois podemos tomar um sistema de coordenadas onde as três curvas são $u = cte, v = cte$ e $u + v = cte$. □

Capítulo 6

Teias algébricas e a equação de Clairaut

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar a relação entre teias algébricas e um tipo muito conhecido de equação diferencial, a saber, as equações de Clairaut. Na primeira seção deste capítulo introduzimos novos invariantes, os chamados *polinômios associados a uma d -teia* e demonstramos um resultado que nos permite caracterizar as d -teias algébricas do plano. Em seguida, na segunda seção, mostramos que, na verdade, toda teia algébrica do plano é dada, em sua forma implícita, por uma equação diferencial polinomial de Clairaut. A principal referência para este capítulo é a tese de doutorado de Olivier Ripoll em [R].

6.1 Polinômios associados

Nesta seção estabeleceremos alguns invariantes de uma d -teia obtidos via o método implícito, ou seja, considerando uma d -teia dada implicitamente por uma equação diferencial (cf. 3.2.3). Consideremos, então, uma d -teia dada pela equação diferencial $F(x, y, p) = 0$, onde $p = y'$. Denotamos por $R = \text{Result}(F, \partial_p(F))$ a p -resultante de F e $\partial_p F$ e supomos que $R(0) \neq 0$. Existe uma relação entre os polinômios F , $\partial_p(F)$, $\partial_x(F) + p\partial_y(F)$ que desempenha um papel importante no estudo da superfície de $\mathbb{C}^3$ definida pela equação $F(x, y, p) = 0$ e a resultante R . É uma relação análoga à relação de Bezout associada à resultante de dois polinômios que nos permitirá estabelecer alguns outros invariantes.

Proposição 6.1.1. *Seja $d \geq 3$ um inteiro e $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia dada pela equação diferencial*

$$F(x, y, p) := a_0(x, y)p^d + a_1(x, y)p^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0.$$

Então para cada inteiro $1 \leq i \leq d-3$, existem dois polinômios

$$U_i := u_2^i p^{d-2} + u_3^i p^{d-3} + \dots + u_d^i \text{ e } V_i := v_1^i p^{d-1} + v_2^i p^{d-2} + \dots + v_d^i$$

ambos em $\mathcal{O}[1/R][p]$, de graus $d-2$ e $d-1$, respectivamente, tais que vale a identidade seguinte:

$$p^i \cdot (\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = U_i \cdot F + V_i \cdot \partial_p(F). \quad (6.1)$$

Para $1 \leq i \leq d-3$, os pares de polinômios (U_i, V_i) são chamados de polinômios associados a F de ordem i , e omitiremos o índice 0 dos polinômios U_0 e V_0 bem como de seus coeficientes.

Demonstração. A demonstração é simples. Primeiramente observemos que se tais polinômios U_i e V_i existem, seus coeficientes devem satisfazer a um sistema (S) uma vez que temos identicamente a relação $U_i \cdot F + V_i \cdot \partial_p(F) = p^i(\partial_x F + p\partial_y F)$. Se denotarmos por $\mathcal{M}$ a matriz de ordem $2d-1$ associada ao sistema S , vemos que

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & da_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & & 0 & (d-1)a_1 & da_0 & & 0 \\ a_2 & a_1 & & 0 & (d-2)a_2 & (d-1)a_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-2} & a_{d-3} & & a_0 & da_{d-2} & 3a_{d-3} & \dots & 0 \\ a_{d-1} & a_{d-2} & & a_1 & a_{d-1} & 2a_{d-2} & \dots & da_0 \\ a_d & a_{d-1} & & a_2 & 0 & a_{d-1} & \dots & (d-1)a_1 \\ 0 & a_d & & a_3 & 0 & 0 & \dots & (d-2)a_2 \\ 0 & 0 & & a_4 & 0 & 0 & \dots & (d-3)a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_d & 0 & 0 & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

e, portanto, o sistema (S) se escreve como

$$(S) \quad \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} u_2^i \\ \vdots \\ u_d^i \\ v_1^i \\ \vdots \\ v_d^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \vdots \\ \partial_x(a_{i-1}) + \partial_y(a_i) \\ \vdots \\ \partial_x(a_d) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

O segundo membro da equação 6.2 tem i zeros na parte inferior e $d - 3 - i$ zeros na parte superior. Agora note que o determinante da matriz $\mathcal{M}$ nada mais é que a resultante entre os polinômios F e $\partial_p F$. Como $R(0) \neq 0$, a fórmula 6.1 é obtida por um sistema de Cramer, o que nos dá a existência e unicidade. $\square$

Por exemplo, para $d = 3$ e $i = 0$

$$\begin{cases} F := & a_0(x, y)p^3 + a_1(x, y)p^2 + a_2(x, y)p + a_3(x, y) \\ \partial_p(F) = & 3a_0(x, y)p^2 + 2a_1(x, y)p + a_2(x, y) \\ U = & u_2p + u_3 \\ V = & v_1p^2 + v_2p + v_3 \end{cases}$$

Assim, de $\partial_x(F) + p\partial_y(F) = U.F + V.\partial_p(F)$ temos

$$\begin{aligned} & (\partial_y(a_0))p^4 + (\partial_x(a_0) + \partial_y(a_1))p^3 + (\partial_x(a_1) + \partial_y(a_2))p^2 + (\partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) + \partial_x(a_3)) = \\ & = (u_2p + u_3)(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) + (v_1p^2 + v_2p + v_3)(3a_0p^2 + 2a_1p + a_2) \\ & = p^4(u_2a_0 + v_13a_0) + p^3(u_3a_0 + u_2a_1 + v_12a_1 + v_23a_0) + p^2(u_2a_2 + u_3a_1 + v_1a_2 + v_22a_1 + v_33a_0) + \\ & + p(u_2a_3 + u_3a_2 + v_2a_2 + v_32a_1) + (u_3a_3 + v_3a_2) \end{aligned}$$

de onde segue o sistema (S)

$$(S) \quad \begin{cases} a_0 u_2 + 3a_0 v_1 & = \partial_y(a_0) \\ a_0 u_3 + a_1 u_2 + 2a_1 v_1 + 3a_0 v_2 & = \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ a_2 u_2 + a_1 u_3 + a_2 v_1 + 2a_1 v_2 + 3a_0 v_3 & = \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ a_3 u_2 + a_2 u_3 + a_2 v_2 + 2a_1 v_3 & = \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ a_3 u_3 + a_2 v_3 & = \partial_x(a_3) \end{cases}$$

que em forma matricial se escreve como

$$(S) \quad \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 3a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 2a_1 & 3a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & a_2 & 2a_1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3) \end{pmatrix}$$

Os polinômios associados (U_i, V_i) à F nos permitirão definir alguns invariantes da d -teia definida por F . Estes invariantes nos servirão para caracterizar as teias algébricas. Temos a seguinte proposição:

Proposição 6.1.2. *Seja $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia dada pela equação diferencial $F(x, y, p) = 0$ e sejam também $(U_i(F), V_i(F))$ os polinômios associados a F de ordem i . Sejam igualmente $(U_i(g.F), V_i(g.F))$ os polinômios associados à equação $g.F = 0$ que define a mesma teia, onde $g \in \mathcal{O}^*$. São verificadas as seguintes relações:*

$$\begin{cases} U_i(g.F) = U_i(F) + \frac{1}{g} \cdot p^i \cdot (\partial_x(g) + p \partial_y(g)) \\ V_i(g.F) = V_i(F) \end{cases}$$

Assim, os $(2d-3)(d-2)$ elementos de $\mathcal{O}$

$$\begin{cases} u_2^i, \dots, \widehat{u_{d-i-1}^i}, \widehat{u_{d-i}^i}, \dots, u_d^i, \\ v_1^i, \dots, v_d^i \end{cases}$$

e para $k = 0, \dots, d-2$, as $(d-3)(d-2)$ diferenças

$$\begin{cases} u_{d-i+1}^i - u_d & \text{para } i = 2, \dots, d-2 \\ u_{d-j+1}^{j-2} - u_{d-1} & \text{para } j = 3, \dots, d-1 \end{cases}$$

bem como as $d-2$ formas

$$d(u_{d-i}^i dx + u_{d-i-1}^i dy)$$

são invariantes da teia. Em particular os polinômios V_i associados a F são invariantes e diremos simplesmente que são os polinômios V_i associados à d -teia $\mathcal{W}$.

Demonstração. Considerando a equação $g.F = 0$ e seus polinômios associados $(U_i(gF), V_i(gF))$ temos por 6.1.1:

$$p^i(\partial_x(g.F) + p\partial_y(g.F)) = U_i(gF).g.F + V_i(gF).\partial_p(g.F),$$

que também se escreve como

$$p^i(\partial_x(g) + p\partial_y(g))F + p^i(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = gU_i(gF).F + V_i(gF).g\partial_p(F)$$

ou ainda

$$p^i(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = \left(U_i(gF) - \frac{1}{g}p^i(\partial_x(g) + p\partial_y(g))\right)F + V_i(gF)\partial_p(F).$$

Desta última igualdade obtemos outros pares de polinômios associados à F e, pela unicidade, temos que $U_i = U_i(gF) - \frac{1}{g}p^i(\partial_x(g) + p\partial_y(g))$ e $V_i = V_i(gF)$. As outras relações são obtidas escrevendo explicitamente as igualdades correspondentes. $\square$

Exemplo 6.1.1. Encontraremos os polinômios associados de ordem 1 da 4-teia dada pela equação $F := p^4 + xp^3 - yp^2 + 1 = 0$. Da relação $p(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = U_1.F + V_1.\partial_p(F)$, onde $U_1 = u_2^1p^2 + u_3^1p + u_4^1$ e $V_1 = v_1^1p^3 + v_2^1p^2 + v_3^1p + v_4^1$ temos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = u_4^1y + u_2^1 + 3v_4^1x + 2v_3^1y \\ 0 = u_3^1 + u_2^1x + 4v_2^1 + 3v_1^1x \\ 2 = 4v_3^1 + 3v_2^1x + 2v_1^1y + u_4^1 + u_3^1x + u_2^1y \\ 0 = 4v_4^1 + 3v_3^1x + 2v_2^1y + u_4^1x + u_3^1y \\ 0 = u_4^1y + u_2^1 + 3v_4^1x + 2v_3^1y \\ 0 = u_3^1 + 2v_4^1y \\ 0 = u_4^1 \end{array} \right.$$

Logo,

$$U_1 = \frac{1}{\lambda}[(-32(2y^3 - 8y + 9x^2))p^2 + (-16x(y^2 + 12)y)p]$$

e

$$V_1 = \frac{1}{\lambda}[(8(2y^3 - 8y + 9x^2))p^3 + (2x(9x^2 + 16y + 4y^3))p^2 + (-4(3yx^2 - 8y^2 + 32))p + (8x(y^2 + 12))]$$

onde $\lambda = -16y^4 + 128y^2 - 144yx^2 + 4x^2y^3 - 256 + 27x^4$.

Antes de caracterizar as d -teias do plano que são algébricas via os polinômios associados precisaremos do lema abaixo:

Lema 6.1.1. *Seja $P \in \mathbb{C}[s, t]$ uma equação afim de uma curva algébrica reduzida de grau d . Considere a d -teia algébrica $\mathcal{W}$ obtida através de P . Então $\mathcal{W}$ é dada, na forma implícita, por uma equação da forma $F(x, y, p) = g.P(y - px, p)$, onde $g \in \mathcal{O}^*$.*

Demonstração. Consideraremos $\mathbb{C}^2$ mergulhado em $(\mathbb{P}\mathbb{C}^2)^*$ através do mergulho $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (1 : x : -y)$. Em uma vizinhança da origem considere um ponto $z = (1 : x : -y) \in (\mathbb{P}\mathbb{C}^2)^*$. A este ponto, por dualidade projetiva, corresponde em uma carta afim de $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ a uma reta genérica $L : s + xt - y = 0$. A reta L intersecta $P(s, t)$ em d pontos distintos que correspondem em $(\mathbb{P}\mathbb{C}^2)^*$ a d retas que passam por $(1 : x : -y)$ e são tangentes à curva dual $P^*(s, t)$. Logo, como $s = y - tx$ e $P(s, t) = 0$ temos que $P(y - tx, t) = 0$, onde t é a inclinação da reta dual correspondente ao ponto de intersecção de L com $P(s, t)$. Fazendo $t = p$ o resultado segue. $\square$

Com isto em mãos podemos caracterizar as d -teias algébricas do plano via os polinômios associados.

Teorema 6.1.1. *[Teias algébricas] Sejam $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia dada pela equação diferencial $F(x, y, p) = 0$ e (U_i, V_i) os polinômios associados à F de ordem i para $1 \leq i \leq d - 3$. Temos que as três afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{W}(d)$ é algébrica;
- (ii) Existe $\phi \in \mathcal{O}$ e um inteiro i , $0 \leq i \leq d - 3$ tais que $V_i = 0$ e $U_i = p^i(\partial_y(\phi)p + \partial_x(\phi))$;
- (iii) Existe $\phi \in \mathcal{O}$ tal que $V_i = 0$ e $U_i = p^i(\partial_y(\phi)p + \partial_x(\phi))$ para todo i , $0 \leq i \leq d - 3$.

Além disto, neste caso, existe um polinômio $P \in \mathbb{C}[s, t]$ tal que $F(x, y, p) = e^\phi P(y - px, p)$.

Demonstração. É claro que (iii) implica (ii). Mostremos que (i) $\Rightarrow$ (iii). Para isto, seja $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia algébrica. Pelo lema 6.1.1 temos que a equação diferencial que define a teia é da forma $F(x, y, p) = e^\phi P(y - px, p)$, onde $\phi \in \mathcal{O}$ e $P \in \mathbb{C}[s, t]$. Logo para todo $1 \leq i \leq d - 3$ temos:

$$p^i(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = p^i e^\phi [P(y - px, p)(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi)) + \partial_x(P(y - px, p) + p\partial_y(P(y - px, p)))]$$

Agora,

$$\partial_x(P) + p\partial_y(P) = \partial_s(P)(-p) + \partial_t(P).0 + p[\partial_s(P).1 + \partial_t(P).0] = 0.$$

Desta forma temos que $p^i(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = p^i(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi))$ e, pela proposição 6.1.1 segue que $U_i = p^i(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi))$ e $V_i = 0$, mostrando que (i) implica (iii). Reciprocamente, seja $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia definida por $F(x, y, p) = 0$ e $(U_i(F), V_i(F))$ seus polinômios associados de ordem i . Por hipótese, para todo $1 \leq i \leq d-3$ temos que $V_i = 0$ e $U_i = p^i(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi))$. Defina $G(x, y, p) = e^{-\phi}F(x, y, p)$. Logo, pela proposição 6.1.2 temos que

$$\begin{cases} V_i(G) = 0 \\ U_i(G) = U_i(F) + e^{\phi}p^i(\partial_x(e^{-\phi}) + p\partial_y(e^{-\phi})). \end{cases}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \partial_x(G) + p\partial_y(G) &= -\partial_x(\phi)e^{-\phi}F + e^{-\phi}\partial_x(F) + p(-\partial_y(\phi)e^{-\phi}F + e^{-\phi}\partial_y(F)) \\ &= -(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi))e^{-\phi}F + e^{-\phi}(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) \\ &= -(\partial_x(\phi) + p\partial_y(\phi))e^{-\phi}F + e^{-\phi}U_i(F).F = 0. \end{aligned}$$

Os polinômios $y - px$ e p são duas soluções independentes da equação $\partial_x(G) + p\partial_y(G) = 0$. Desta forma, o teorema de Frobenius garante que existe uma função analítica $\gamma(\alpha, \beta)$ de duas variáveis tal que para $\alpha = y - px$ e $\beta = p$ temos:

$$G(x, y, p) = \gamma(y - px, p).$$

Devemos mostrar agora que γ é um polinômio. Para $j > d$ temos que

$$0 = \partial_p^j(G) = (-1)^j x^j \partial_\alpha^j(\gamma) + \partial_\beta^j(\gamma).$$

Assim, se $x = 0$, para todo par (y, p) temos $0 = \partial_p^j(G)(y, p) = \partial_\beta^j(\gamma)(y, p) = 0$ e, portanto, para x não nulo e para todo par (y, p) temos $\partial_\alpha^j(\gamma)(y, p) = 0$. A transformação $(y, p) \mapsto (y - px, p)$ é bijetiva para x fixado e temos para todo (x, y, p) que $\partial_\alpha^j(\gamma) = 0$ o que prova que γ é um polinômio. A segunda equivalência decorre desta. $\square$

6.2 Equações de Clairaut

Um tipo muito conhecido de equação diferencial é a chamada equação de Clairaut. Demonstraremos que toda d -teia algébrica do plano é dada implicitamente por uma equação diferencial polinomial de Clairaut.

Seja $F(x, y, p) = 0$ uma equação diferencial implícita de ordem d . Como já dissemos, no estudo de equações diferenciais podemos considerar a equação $F(x, y, p) = 0$

e estudar a superfície $M = F^{-1}(0)$ que esta equação define em $\mathbb{C}^3$ juntamente com a projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$. Estamos supondo que $\text{grad}(F)(0) \neq 0$, ou seja, $F = 0$ define uma superfície suave numa vizinhança da origem. Também vamos supor que $\partial_{pp}F(0) \neq 0$, de maneira que o conjunto singular de π seja uma curva regular em M . Se denotarmos o conjunto singular em M da aplicação π por $\sum \pi|_M$, a imagem do conjunto singular pela projeção π em $\mathbb{C}^2$ é chamada de *curva discriminante*, que denotaremos por D . Logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F = 0 \text{ e } \partial_p F = 0\}$. Suponha que a solução geral da equação $F(x, y, p) = 0$ seja dada pela família de curvas $\phi(x, y, c) = 0$. Para as ternas $(x, y, p) \in \mathbb{C}^3$ nas quais se verifica $\partial_p F \neq 0$, a equação $F = 0$ pode ser desdobrada em um número finito de equações diferenciais ordinárias

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \dots, y' = f_d(x, y)$$

cujas soluções são

$$\phi_1(x, y) = c, \quad \phi_2(x, y) = c, \dots, \phi_d(x, y) = c$$

e a reunião destas soluções forma a solução geral. Pode acontecer de obtermos novas soluções que pertençam à curva discriminante. Nem sempre isso acontece, mas como veremos com as equações diferenciais de Clairaut, a curva discriminante associada a uma equação diferencial de Clairaut é sempre uma solução singular da equação. Quais condições, então, deve satisfazer a curva discriminante para que seja uma solução da equação diferencial $F = 0$?

Como já observado no parágrafo acima, desconsideraremos os pontos em que $\partial_{pp}F = 0$. Logo, se $\partial_{pp}F$ é diferente de zero, de $\partial_p F = 0$ podemos explicitar a variável p em função de x e y , ou seja, podemos encontrar $p = p(x, y)$ ou uma coleção de tais funções. Uma vez obtido p desta forma, substituindo na equação $F(x, y, p) = 0$ temos

$$F(x, y, p(x, y)) := D(x, y) = 0,$$

de onde segue que

$$\partial_x D = \partial_x F + \partial_p F \cdot \partial_x p = \partial_x F$$

e

$$\partial_y D = \partial_y F + \partial_p F \cdot \partial_y p = \partial_y F.$$

Eliminando agora os pontos onde $\partial_x F = \partial_y F = 0$, $D(x, y)$ será uma curva onde estão definidas em cada ponto $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$. Analisando a derivada total ao longo da curva discrimi-

nante temos

$$d[D(x, y)] = \frac{\partial D}{\partial x} dx + \frac{\partial D}{\partial y} dy = \partial_x F dx + \partial_y F dy = 0,$$

ou seja, para que $D(x, y) = 0$ seja uma solução da equação diferencial será preciso que $\partial_x F + p\partial_y F = 0$. O que podemos concluir é que as soluções singulares da equação diferencial estão incluídas nos pontos da curva discriminante que satisfaçam também a equação $\partial_x F + p\partial_y F = 0$. É claro que estão excluídos os pontos onde $F_x = F_y = 0$ e $F_{pp} = 0$.

Que relação existe entre as soluções singulares e a solução geral da equação? As soluções singulares podem estar incluídas na geral, mas nem sempre. Suponha que a família de curvas $\phi(x, y, c) = 0$ admita uma envoltória. Esta é caracterizada pelo par de equações

$$\phi(x, y, c) = 0 \text{ e } \phi_c(x, y, c) = 0.$$

Vamos excluir deste lugar geométrico os pontos em que $\phi = 0$, $\phi_y = 0$ e $\phi_{cc} = 0$. A curva discriminante $E(x, y) = 0$ definida por $\phi = 0$ e $\phi_c = 0$ satisfaz às mesmas equações diferenciais satisfeitas pela família de curvas $\phi(x, y, c) = 0$. Além disso, pode-se demonstrar que as soluções que satisfizerem $E(x, y) = 0$ satisfarão, também, $D(x, y) = 0$, de modo que são soluções singulares. Como corolário, observe que se a família de curvas $\phi = 0$ (solução geral de F) admitir envoltória, esta será solução e, na verdade, solução singular da equação diferencial (uma vez que ela se encontra em $E = 0$).

Definimos agora as equações de Clairaut cuja solução geral, como veremos, admite uma envoltória.

Definição 6.2.1. Uma *equação diferencial de Clairaut* é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na forma

$$y = f(p) + xp, \tag{6.3}$$

onde $p = y'$ e f é uma função analítica de uma variável. Se f é uma função polinomial diremos que a equação 6.3 é uma *equação polinomial de Clairaut*.

É interessante que, se supusermos que $f''(p) \neq 0$ as equações diferenciais de Clairaut possuem como soluções retas que podemos parametrizar por

$$x \rightarrow mx + f(m) \tag{6.4}$$

cuja envoltória também é uma solução da equação 6.3, dita *solução singular* de 6.3. Logo, as retas 6.4 são tangentes à curva parametrizada

$$\begin{cases} x(m) = -f'(m) \\ y(m) = -mf'(m) + f(m) \end{cases}$$

De fato, seja

$$F(x, y, p) := f(p) + xp - y = 0 \quad (6.5)$$

uma equação de Clairaut. Diferenciando em relação à x obtemos

$$p = p + (x + f'(p))p',$$

ou ainda,

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

Se $p' = 0$ então $p = c$, onde c é uma constante e a solução geral de 6.5 será pois

$$y = cx + f(c).$$

Note que a solução geral é uma família de retas. No segundo caso, como $f(p)$ e $f'(p)$ são funções conhecidas de p , temos que a equação 6.5 juntamente com $x + f'(p) = 0$ constituem um par de equações paramétricas que dão x e y em função do parâmetro p :

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases} \quad (6.6)$$

Esta é solução singular de 6.5 pois

$$\partial_p F = f'(p) + x = 0.$$

Logo, para as equações diferenciais de Clairaut, a curva discriminante, que é uma envoltória de uma família de retas (sendo estas a solução geral), é solução singular da equação.

O Teorema seguinte caracteriza as d -teia algébricas do plano dadas implicitamente. Note que é um caso particular do Teorema 6.1.1 quando os polinômios associados são identicamente nulos.

Teorema 6.2.1. *Seja $\mathcal{W}(d)$ uma d -teia plana dada em sua forma implícita pela equação diferencial $F(x, y, p) = 0$. Então $\mathcal{W}$ é algébrica se, e somente se, F é uma equação diferencial polinomial de Clairaut.*

Demonstração. Primeiro suponhamos que F seja uma equação polinomial de Clairaut, ou seja, $F(x, y, p) := f(p) - xp - y = 0$, para alguma função polinomial f . Note que $\partial_x(F) + p\partial_y(F) = -p + p = 0$ de onde segue que $V_i = 0$ e $U_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-3$. Pelo Teorema 6.1.1 segue que $\mathcal{W}$ é uma teia algébrica.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{W}$ é algébrica e dada por uma equação diferencial $F(x, y, p) = 0$. Então $\partial_x(F(x, y, p)) + \partial_y(F(x, y, p)) = 0$ e, como vimos na demonstração do Teorema 6.1.1, podemos escrever F na forma

$$F(x, y, p) = \gamma(y - px, p),$$

onde $\gamma(\alpha, \beta)$ é um polinômio. Como estamos supondo a origem um ponto regular, a menos de uma mudança linear de coordenadas, podemos afirmar que $\partial_\alpha(\gamma)(0, 0) \neq 0$. Logo, pelo teorema da função implícita, temos em uma vizinhança da origem que $\alpha = g(\beta)$, ou seja,

$$y - px = g(p) \Leftrightarrow y = xp + g(p)$$

que é uma equação polinomial de Clairaut. □

Referências Bibliográficas

- [AG-2] M. Akivis e V. Goldberg, *Differential geometry of webs*, in “Handbook of differential geometry Vol. 1”, pp. 1-152, North-Holland, 2000.
- [AGL 04] M. Akivis, V. Goldberg e V. Lychagin, *Linearizability of d -webs, $d \geq 4$, on two-dimensional manifolds*, arXiv:math.DG/0209290 (2002).
- [BB 34] W. Blaschke, E. Bompiani, *Ragionamenti enumerativi sui tessuti misti*, Rend. Accad. Lincei (1934), pp.469-473.
- [BB] W. Blaschke e G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin (1938).
- [Bol] G. Bol, *Über 3-Gewebe in vierdimensionalen Raum*, Math. Ann. **110** (1935), pp.431-463.
- [Bl 28] W. Blaschke, *Thomsens Sechseckgewebe Zueinander diagonale Netze*, Math. Z. **28** (1928), pp. 150-157. (JFM **54**, pp. 744-745).
- [Bl 55] W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Basel, Stuttgart (1955).
- [Bl 33-1] W. Blaschke, *Textilegeometrie und Abelshce Integrale* , Jber. Deutsche Math.-ver. 43 (1933), pp. 87-97.
- [Bom 34] E. Bompiani, *Sui tessuti misti di superficie e di curve*, Abh. Hambourg **10** (1934), pp. 317-324.
- [C] Manfredo P. do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer-Verlag, 1992.
- [Cer 92] D. Cerveau, *Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés*, Complex analytic methods in dynamical systems, Astérisque **222** (1994), pp. 49-92.

- [CG 78-1] S. S. Chern e P. Griffiths, *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), pp. 539-557.
- [CG 78] S. S. Chern e P. Griffiths, *Abel's Theorem and Webs*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **80** (1978), pp. 13-110.
- [Chern 36] S. S. Chern, *Abzählungen für Gewebe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1-2) (1936), pp.163-170.
- [Ch 82] S. S. Chern, *Web Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), pp. 1-8.
- [Ch 85] S. S. Chern, *Wilhelm Blaschke and Web Geometry*, Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke, Vol 5 Thales, Essen (1985), pp. 21-23.
- [Ch 92] S. S. Chern, *My mathematical education*, in Chern-a great geometer of the twentieth century, Internat. Press, Hong Kong (1992), pp. 1-17.
- [CN] C. Camacho, A. Lins Neto, *Teoria geométrica das folheações*, Livro do Projeto Euclides, 1977.
- [Da 83] D. Damiano, *Webs and characteristic forms of Grassmann manifolds*, Amer. J. Math. **105** (1983), pp. 1325-1345.
- [Dar 80] G. Darboux, *Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bulletin Soc. Math. France, **4** (1880), pp. 348-384.
- [Dou 53] A. Dou, *Cuatritejidos Planos*, Mem. Real Acad. Ci. Art. Barcelona **31** (1953), pp. 133-218.
- [F Kl] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Verlag von A. Deichert, Erlangen (1872), (JFM **4**, pp 229-231).
- [G] V. Goldberg, *Theory of multcodimensional $(n+1)$ -webs*, Mathematics and its Applications, Vol. **44**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [GM 82] I. Gelfand e R. MacPherson, *Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm*, Adv. in Math. **44** (1982), pp. 279-312.
- [Gol 86] V. Goldberg, *Isoclinic webs $W(4, 2, 2)$ of maximum 2-rank*, Lecture Notes in Math., **1209** (1986), pp.168-183.

- [Gol 87] V. Goldberg, *Nonisoclinic 2-codimensional 4-webs of maximum 2-rank*, Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1987), pp. 701-708.
- [G-S] Gutierrez C. e Sotomayor J., *Structurally Stable Configuration of lines of Principal Curvature*, Asterisque, pp. 98-99, 1982.
- [GS 24] H. Graf e R. Sauer, *Über dreifach Geradensysteme*, Akad. Math.-naturwiss. Abt. (1924), pp. 135-198.
- [Hé 93] A. Hénaut, *Sur la linéarisation des tissus de $\mathbb{C}^2$* , Topology **32** (1993), pp. 531-542.
- [Hé 04-1] A. Hénaut, *On planar web geometry through abelian relations and connections*, Annals of Math. (2004).
- [J] Y. N.A. Joseph, *Generic webs on the complex projective plane*, Tese de Doutorado do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - 2003.
- [Lit 89] J. Little, *On webs of maximum rank*, Geom. Dedicata **31** (1989), pp. 19-35.
- [MP] D. Marin, J.V. Peirera, *Global web geometry on projective surfaces*,
- [Na 96] I. Nakai, *Web geometry and the equivalence problem of the first order partial differential equations*, em [W], pp. 150-204.
- [NS] A. Lins Neto, B. Azevedo Scárdua, *Folheações Algébricas Complexas*, IMPA -21º Colóquio Brasileiro de Matemática - 1997.
- [P] L. Pirio, *Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus*, Tese de Doutorado, Universidade de Paris VI, 2004.
- [R] O. Ripoll, *Geometrie des tissus du plan e equations différentielles*, Tese de Doutorado da Université du Bordeaux, 2005.
- [Th 27] G. Thomsen, *Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica sulle supericie isotermo-asintotiche*, Boll. Un. Mat. Ital. Bologna **6** (1927), pp. 80-85
- [V] V. Israel, *Introdução às curvas algébricas planas* livro do 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.
- [Va 61] G. Vaona, *Sul teorema fondamentale della nomografia*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **16** (1961), pp. 258-263.

-
- [W] J. Grifone e E. Salem (editores), *Web theory and related topics*, World scientific, 2001.