UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CAMPUS DE SÃO CARLOS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

DESDOBRAMENTOS UNIVERSAIS DE GERMES DE APLICAÇÕES DO PLANO NO PLANO

Alice Kimie Miwa

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SÃO CARLOS

1976

DESDOBRAMENTOS UNIVERSAIS
DE GERMES DE APLICAÇÕES
DO PLANO NO PLANO

ALICE KIMIE MIWA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: PROF. Dr. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. G.F. Loibel, pela dedicação e orientação neste trabalho de iniciação em pesquisa e pelo apoio moral nos momentos difíceis, a minha profunda gratidão.

Aos professores do ICM de São Carlos e aos colegas da pós-graduação, o meu carinho e agradecimento pela compreensão e incentivo durante os cursos.

Aos professores da F.F.E.F.C.L. de Jacarezinho, que possibilitaram minha vinda ao ICM como estagiária, agradeço a oportunidade concedida e as demonstrações de amizade.

Aos professores da UFSCar pela solidariedade e incentivo na fase final do trabalho.

Ao Prof. Brasil Terra Leme pelas observações e sugestões, a minha amizade e os meus agradecimentos.

Agradeço também:

À F.F.E.F.C.L. de Jacarezinho pela ajuda financeira durante os anos em que permaneci como estagiária no ICM.

Ao CNPq que como bolsista elaborei a presente dissertação.

A CAPES, CNPq, FINEP e FAPESP, cujos variados apoios financeiros, sob diversos aspectos, contribuiram tanto na minha formação de pós-graduação como facilitaram a elaboração da presente dissertação.

Ao Walter

e

em memória de meus pais

ÍNDICE

CAPÍTULO I - Preliminares

§ 1. Germes de Aplicações 1

§ 2. Módulos sobre Anéis de Funções Diferenciáveis 2

§ 3. Noções e Identificações do Espaço dos k-jatos 4

§ 4. Os Grupos de Transformações 7

§ 5. Resultados Algébricos que estão Utilizados 9

§ 6. Lema usado para Provar a Existência de Certo Difeomorfismos Locais 10

§ 7. Campos Vetoriais ao Longo de f 12

CAPÍTULO II - Germes Finitamente Determinados de Aplicações do Plano no Plano

§ 1. Equivalência Local 14

§ 2. Germes Finitamente Determinados 15

§ 3. Dimensões de Certos Espaços Vetoriais 23

CAPÍTULO III - Desdobramentos Universais do Plano no Plano

§ 1. Morfismos entre Desdobramentos de Germes de Aplicações do Plano no Plano 27

§ 2. Desdobramentos Universais 30

§ 3. Desdobramentos $r\ell$-k-transversais 32

INTRODUÇÃO

Em [7], Ruzante A. desenvolveu sua tese de Doutoramento sobre Singularidades de Restrições de Aplicações Diferenciáveis.

O Prof. Dr. G.F. Loibel propôs que iniciassemos nosso estudo sobre Singularidades não genéricas de aplicações do $R^m \xrightarrow{f} R^n$ que se tornam genéricas quando f é mergulhada em uma família de funções $f_t: R^m \to R^n$, com $t \in R^r$ e verificar o número de parametros necessários para que tal aconteça.

As primeiras informações indicavam uma forte correlação com a teoria de Mather sobre os germes finitamente determinados. Utilizamos para o nosso estudo o trabalho de Ruas.M.A [6].

Porém, em [8], Wassermann G. nos cap. II e III estabeleceu as relações para germes de aplicações com valores reais.

Assim o Prof. Loibel resolveu que seguissemos a linha de [8] para germes de aplicações do plano no plano. Em [8], Wassermann citava resultados de um trabalho não publicado de Mather, cujos resultados nós reelaboramos nesta dissertação.

No Cap.I do nosso trabalho, estão os pré-requisitos necessários à leitura do mesmo.

No Cap.II, obtivemos condições algébricas que nos forneceram equivalências entre germes de aplicações diferenciáveis do plano no plano finitamente determinados e restrições sobre as dimensões de certos espaços vetoriais.

No Cap.III, desenvolvemos toda a teoria necessária para podermos relacionar germes finitamente determinados com desdobramentos $r\ell$-k-transversais e desdobramentos $r\ell$-universais.

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

§ 1. Germes de Aplicações

Definição 1.1:

Sejam X e Y espaços topológicos e $x \in X$. Um germe de aplicação $f: X \to Y$, em x, é uma classe de equivalência de aplicações contínuas $g: U \to Y$, onde U é uma vizinhança de x em X, com a seguinte relação de equivalência:

$(g: U \to Y) \sim (h: V \to Y)$ se existe uma vizinhança W de x com $W \subset U \cap V$ tal que $g|_W = h|_W$

Qualquer elemento $\tilde{f}$ da classe de equivalência de f é um representante de f e diremos que f é o germe em x de $\tilde{f}$.

Observação 1.2:

Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $x \in X$.

Um germe de aplicação $f: X \to Y$, em x, é diferenciável ou C^∞, se f tem um representante que é diferenciável.

Observação 1.3:

Sejam $f: X \to Y$ um germe de aplicação em $x \in X$ e $g: Y \to Z$ um germe de aplicação em $f(x) \in Y$.

Podemos definir um germe de aplicação $g \circ f: X \to Z$, em x, da seguinte maneira:

tomamos os representantes de f e de g, compomos e consideramos o germe da composta.

§ 2. Módulos sobre Anéis de Funções Diferenciáveis

Definição 1.4:

$\varepsilon(n,p)$ é o conjunto de todos os germes de aplicações diferenciáveis $f: R^n \to R^p$, em $0 \in R^n$.

Se $p = 1$, então $\varepsilon(n,1)$ é denotado por $\varepsilon(n)$.

Observação 1.5:

$\varepsilon(n,p)$ pode ser considerado como um espaço vetorial real.

$\varepsilon(n)$ tem uma estrutura natural de R-álgebra, induzida pela R-álgebra R.

$\varepsilon(n)$ é um anel local e seu único ideal maximal é denotado por $M(n)$ que é constituído por todos os germes de aplicações $f: R^n \to R$, em $0 \in R^n$, com $f(0) = 0$.

Definição 1.6:

Seja $g \in \varepsilon(n,p)$ com $g(0) = 0$. Para qualquer r, g induz uma aplicação R-linear $g^*: \varepsilon(p,r) \to \varepsilon(n,r)$ definida por $g^*(f) = fog$, onde $f \in \varepsilon(p,r)$. g^* é chamada aplicação "pull-back" ou induzida de f por g.

No caso particular de r ser igual a 1, $g^*: \varepsilon(p) \to \varepsilon(n)$ é um homomorfismo de R-álgebras.

Os resultados que seguem serão utilizados no nosso estudo e encontram-se demonstrados em [6].

Lema 1.7:

Sejam $0 \leq r \leq n$ e $i: R^{n-r} \to R^n$ o mergulho linear definido por

$i(t_1,\ldots,t_{n-r}) = (0,\ldots,0,t_1,\ldots,t_{n-r})$. Seja

$K = i(R^{n-r}) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n | x_1 = \ldots = x_r = 0\}$

Seja M o ideal de $\varepsilon(n)$ gerado por $x_1,\ldots, x_r$, isto é, pelos germes em 0, das primeiras r funções coordenadas de R^n.

Então, para $f \in \varepsilon(n)$ as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $f \in M^{k+1}$

b) f tem um representante $\tilde{f}: U \to R$ que se anula, juntamente com todas as suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k, em $K \subset U$.

Corolário 1.8:

$M(n)$ é gerado pelos germes $x_1,\ldots, x_n$

Corolário 1.9:

$M(n)^k$ consiste dos germes que se anulam em 0, juntamente com suas derivadas de ordem menor a k.

Definição 1.10:

$$M(n)^\infty = \bigcap_k M(n)^k$$

Definição 1.11:

Seja $f \in \varepsilon(n)$ com $f(0) = 0$, f é uma singularidade se f tem um representante $\tilde{f}: U \to R$ tal que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0) = 0$, $1 \leq i \leq n$, ou seja, $f \in M(n)^2$.

Definição 1.12:

Sejam S um anel comutativo e A um S-módulo

Se $a_1,\ldots, a_r$ são elementos de A, denotamos o S-módulo de A, ge

rado pelos a_i's por $\langle a_1,\ldots,a_r\rangle_s$ ou por $\langle a_1,\ldots,a_r\rangle$, simplesmente, caso não haja perigo de ocorrer ambiguidade quanto ao anel que atua sobre A.

§ 3. Noções e identificações do espaço dos k-jatos

Definição 1.13:

Sejam X e Y variedades diferenciáveis, $x \in X$ e k um inteiro positivo. Um k-jato $z: X \to Y$, em x, é uma classe de equivalência de aplicações diferenciáveis $g: U \to Y$, onde U é uma vizinhança de x, com a relação da equivalência:

$$(g: U \to Y) \sim (h: V \to Y) \quad \text{se}$$

$h(x) = g(x)$ e todas suas derivadas parciais de todas as ordens menores ou iguais a k, em x, coincidem, em um sistema de coordenadas locais, próximo de $x \in X$ e próximo de $g(x) = h(x)$ em Y.

Se g é qualquer elemento da classe de z, então z é o k-jato de g em x, denotado por $j^k g(x)$.

Além disso, o k-jato de g, em x, depende somente do germe em x de g, podemos, então falar do k-jato em x de um germe de aplicação de f em x, cuja notação será a mesma $j^k f(x)$.

Da definição 1.13, concluimos que $M(n)^k$ consiste dos germes de aplicação do R^n em R, em 0, cujo (k-1)-jato se anula em 0 e a definição 1.11 torna-se equivalente a dizer que $j^1 f(0) = 0$.

Observação 1.14:

Dados $f,g \in \varepsilon(n,p)$. Então, $j^k f(0) = j^k g(0)$ se $f_i - g_i \in M(n)^{k+1}$, $1 \leq i \leq p$.

Definição 1.15:

Seja k um inteiro não negativo

$J^k(n,p)$ é o conjunto de todos os k-jatos, em 0, de germes em $\varepsilon(n,p)$.

Observação 1.16:

Podemos considerar $J^k(n,p)$ como um espaço vetorial real. Neste caso, $J^k(n,p)$ é isomorfo a R^N, onde $N = p\binom{n+k}{k}$ (ver [8], por exemplo).

Se $k \leq r$, então, dois germes que tem o mesmo r-jato em 0, tem também o mesmo k-jato em 0. Assim existe uma projeção $\pi_{r,k}: J^r(n,p) \to J^k(n,p)$ que abandona os termos de ordem superior a k. Da observação 1.16, $\pi_{r,k}$ é uma projeção linear entre espaços euclideanos.

Temos, também, para cada k, a projeção canônica $\pi_k:\varepsilon(n,p)\to J^k(n,p)$ que associa a cada germe o seu k-jato em 0.

Observação 1.17:

Sejam $f \in \varepsilon(n,p)$ com $f(0) = 0$ e $g \in \varepsilon(p,r)$.

O k-jato em 0 da composta $gof \in \varepsilon(n,r)$ depende somente do k-jato em 0 de f e de g.

Assim, para cada k, o germe f induz uma aplicação R-linear ${}_kf^*: J^k(p,r) \to J^k(n,r)$ definida por ${}_kf^*\pi_k(g)=\pi_k(gof)$, onde $g \in \varepsilon(p,r)$.

Analogamente, se $z \in J^k(n,p)$ e se $\pi_{k,0}(z) = 0$, então z induz uma aplicação R-linear $z^*: J^k(p,r) \to J^k(n,r)$ definida por $z^* = {}_kf^*$, onde $f \in \varepsilon(n,p)$ é qualquer representante de z.

Definição 1.18:

Seja $f: U \to R^p$, diferenciável, onde U é um subconjunto aberto do R^n. Para cada k, definimos uma aplicação diferenciável $J^k f: U \to J^k(n,p)$, chamada a k-secção de f, da seguinte maneira:

para cada $x \in U$, definimos um germe $f_x \in \varepsilon(n,p)$ por $f_x(z)=f(x+z)$ para z próximo do $0 \in R^n$. A seguir, definimos $J^k f$, tomando $J^k f(x)$ como sendo o k-jato em 0 de f_x.

Definição 1.19:

Para cada inteiro não negativo k, definimos $J_0^k(n,p)$ como sendo o conjunto de todos os k-jatos em 0, de germes de $\varepsilon(n,p)$ tais que o o-jato em o é zero, isto é:

$$J_0^k(n,p) = \{z \in J^k(n,p) \mid \pi_{k,0}(z) = 0\}$$

$J_0^k(n,p)$ é um subespaço linear de $J^k(n,p)$, então tem uma estrutura de variedade diferenciável, de dimensão finita. Então podemos considerar, para cada k, uma projeção canônica $\rho_k: J^k(n,p) \to J_0^k(n,p)$ definida por $\rho_k J^k h(0) = j^k(h-h(0))(o)$.

Da observação 1.17 segue que ${}_k f^*(J_0^k(p,r)) \subset J_0^k(n,r)$ e $z^*(J_0^k(p,r)) \subset J_0^k(n,r)$.

Se $f: U \to R^p$ é uma aplicação diferenciável, onde U é uma vizinhança aberta do $0 \in R^n$, então, para cada k, podemos definir uma aplicação diferenciável, $J_0^k f: U \to J_0^k(n,p)$ por $J_0^k f = \rho_k J^k f$, onde $f \in \varepsilon(n,p)$.

Notação:

Seja M uma variedade diferenciável e $x \in M$.

Denotamos por T_xM o espaço tangente a M em x.

Se $g: M \to M'$ é uma aplicação diferenciável entre variedades e $x \in M$, denotamos por $T_xg: T_xM \to T_{g(x)}M'$, a diferencial de g em x.

Da observação 1.16, segue que se $z \in J^k(n,p)$ então $T_zJ^k(n,p)$ pode ser identificado com R^N, $N = p\binom{n+k}{k}$

§ 4. Os Grupos de Transformações $L(n)$, $L(p)$ e $L(p) \times L(n)$

Definição 1.20:

Tomando-se como operação a composição de germes em $\varepsilon(n,n)$, podemos definir o grupo $L(n)$ constituido por elementos de $\varepsilon(n,n)$ que levam a origem na origem e são não singulares em 0, isto é,

$L(n) = \{\phi \in \varepsilon(n,n) \mid \phi(0) = 0$ e ϕ é não singular em $0\}$

$L(n)$, assim definido, é o grupo de germes de difeomorfismos locais do R^n em 0.

$L(n)$ é um grupo de transformação que atua à direita sobre $\varepsilon(n,p)$, sendo a ação dada por: $\phi.f = f\circ\phi^{-1}$, onde $\phi \in L(n)$ e $f \in \varepsilon(n,p)$.

Definimos também o grupo de transformação $L(p)$, da seguinte maneira:

$L(p) = \{\Psi \in \varepsilon(p,p) \mid \Psi(0) = 0$ e Ψ é não singular em $0\}$

$L(p)$ atua à esquerda sobre $\varepsilon(n,p)$, tomando-se $\Psi \in L(p)$ e $f \in \varepsilon(n,p)$ e definindo-se a ação por $\Psi.f = \Psi\circ f$

Finalmente, definimos o grupo de transformação $L(p) \times L(n)$

$L(p) \times L(n)$ atua à direita e à esquerda, sobre $\varepsilon(n,p)$ tomando-se $\phi \in L(n)$, $\Psi \in L(p)$ e $f \in \varepsilon(n,p)$ e definindo-se a ação por $(\Psi,\phi).f = \Psi\circ f\circ\phi^{-1}$.

No nosso caso, estaremos interessados no grupo $L(p) \times L(n)$, embora o grupo $L(n)$ seja usado algumas vezes. No entanto, pensamos que com o grupo $L(n)$, poucos resultados podem ser obtidos por tratar-se de germes de aplicações do plano no plano.

Chamaremos a ação à direita por r-ação e a ação à direita e à esquerda por $r\ell$-ação.

Da obs. 1.17, concluimos que a def.1.20 pode ser estendida a nível de jatos, isto é:

Definição 1.21

Seja k um inteiro não negativo. Para cada k, definimos o grupo $L^k(n)$ com a operação induzida do grupo $L(n)$, por:

$L^k(n) = \{z \in J^k(n,n) \mid z$ é o k-jato em 0, de um elemento de $L(n)\}$.

Observação 1.22

O grupo $L^k(n)$ é um subconjunto aberto de $J_0^k(n,p)$. Logo tem uma estrutura de variedade diferenciável. Além disso, $L^k(n)$ e $L^k(p) \times L^k(n)$ são grupos de Lie [ver(4)].

Então $L^k(n)$ atua diferenciavelmente a direita sobre $J_0^k(n,p)$ e $L^k(p) \times L^k(n)$ atua diferenciavelmente a direita e a esquerda sobre $J_0^k(n,p)$, induzidas pelas ações de $L(n)$ e de $L(p) \times L(n)$ sobre $\varepsilon(n,p)$, respectivamente.

$J_0^k(n,p)$ é invariante sob a ação de $L^k(n)$ sobre $J^k(n,p)$; isto é: qualquer que seja $z_0 \in J_0^k(n,p)$ e $\bar{z} \in L^k(n)$, $\bar{z}.z_0 \in J_0^k(n,p)$. Então $L^k(n)$ atua também sobre $J_0^k(n,p)$.

Definição 1.23

Seja $z \in J_0^k(n,p)$. A $L^k(n)$-órbita de z será denotada por $z\,L^k(n)$ e a $L^k(p) \times L^k(n)$-órbita de z por $L^k(p)\,z\,L^k(n)$.

Observação 1.24

As órbitas sob a ação dos grupos definidos são subvariedades imersas de $J_0^k(n,p)$ (ver [2]). Então se $z \in J_0^k(n,p)$, o plano tangente a órbita em z, $T_z\,z\,L^k(n)$ ou $T_z\,L^k(p)\,z\,L^k(n)$ pode ser identificado a um subespaço linear de $J_0^k(n,p)$.

§. 5 Resultados algébricos que serão utilizados

Os resultados que seguem são encontrados nesta forma em [8].

Lema 1.26 (Lema de Nakayama)

Sejam R um anel comutativo com unidade e I um ideal em R tal que $1 + Z$ é invertível para todo $z \in I$. Sejam A e B sub-módulos de algum R-módulo M e suponhamos A finitamente gerado sobre R.

Se (a) $B + IA \supseteq A$, então (b) $B \supseteq A$.

Se valer a igualdade em (a) então vale a igualdade em (b)

Corolário 1.27:

Sejam A um $\varepsilon(n)$ - módulo finitamente gerado e B um sub-módulo de A tal que para algum k, $\dim_R \dfrac{A}{m(n)^{k+1}A+B} \leq k$. Então $m(n)^k A \subseteq B$.

Teorema 1.28: (Teorema de Preparação de Malgrange)

Seja $f \in \varepsilon(n,p)$ com $f(0) = 0$. Seja C um $\varepsilon(n)$-módulo finitamen

te gerado. Então C pode ser considerado como um $\varepsilon(p)$-módulo, via f^*. Sejam A um $\varepsilon(p)$-sub-módulo de C, finitamente gerado e B um $\varepsilon(n)$-submódulo de C. Se (a) $A + B + f^*m(p)C = C$ então (b) $A + B = C$.

Teorema 1.29

Seja $f \in \varepsilon(n,p)$ com $f(0) = 0$. Seja C um $\varepsilon(n)$-módulo finitamente gerado. C é também um $\varepsilon(p)$-módulo, via f^*.

Sejam B um $\varepsilon(n)$-submódulo de C e A um $\varepsilon(p)$-submódulo de C finitamente gerado. Se $k = \dim_R \frac{A}{m(p)A}$.

Então (a) $A + B + (f^*m(p) + m(n)^{k+1})C = C$ implica (b) $A + B = C$.

§ 6 . Lema usado para provar a existência de certos difeomorfismos locais.

Para a demonstração ver (8).

Lema 1.30

Seja $F \in \varepsilon(n+1,p)$ com $F(0) = 0$. Supondo-se que existam germes $\zeta \in \varepsilon(n+1,n)$ e $\eta \in \varepsilon(p+1,p)$ tais que para cada i, $i \leq i \leq p$ e para qualquer x próximo do $0 \in R^n$ e qualquer t próximo do $0 \in R$, valham as seguintes equações:

a) $$\frac{\partial F_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x,t)}{\partial x_j} \zeta_j(x,t) + \eta_i(F(x,t),t)$$

Então existem germes $\phi \in \varepsilon(n+1,n)$ e $\lambda \in \varepsilon(p+1,p)$ tais que para x próximo do $0 \in R^n$ e y próximo do $0 \in R^p$,

b) $\phi(x,0) = x$ e $\lambda(y,0) = y$ e tais que para t próximo do $0 \in R$ e x próximo do $0 \in R^n$, tem-se:

c) $F(\phi(x,t),t) = \lambda(F(x,0),t)$

Além disso, podemos escolher ϕ e λ, univocamente, tais que:

d) $\dfrac{\partial\phi_j(x,t)}{\partial t} = -\zeta_j(\phi(x,t),t) \quad (j = 1,\ldots,n)$

e $\dfrac{\partial\lambda_i(y,t)}{\partial t} = \eta_i(\lambda(y,t),t) \quad (i = 1,\ldots,p)$

para t em R, x em R^n e $y \in R^p$.

Observação 1.3.1:

Escolhendo representantes para ϕ e λ, podemos definir para t próximo do $0 \in R$, germes $\phi_t \in \varepsilon(n,n)$ e $\lambda_t \in \varepsilon(p,p)$ da seguinte maneira:

$\phi_t(x) = \phi(x,t)$ para $x \in R^n$

$\lambda_t(y) = \lambda(y,t)$ para $y \in R^p$

Então (b) implica que para t suficientemente próximo do $0 \in R$, ϕ_t e λ_t são germes de difeomorfismos locais de R^n e R^p, respectivamente.

Podemos definir também, de maneira análoga, $F_t \in \varepsilon(n,p)$.

Então (c) pode ser reescrita como:

(c') $F_t \circ \phi_t = \lambda_t \circ F_0$, para todo k suficientemente próximo do $0 \in R$.

Observação 1.32

Seja $f \in \varepsilon(n+r+1,p)$ com $f(0) = 0$. Seja $\zeta \in \varepsilon(p+r+1,p)$.

Suponhamos que f satisfaz as equações diferenciais

$\frac{\partial f_i}{\partial t}(x,y,t) = \zeta_i(f(x,y,t),y,t)$ onde $i = 1,\ldots,p$; $x \in R^n$; $y \in R^r$ e $t \in R$ e que $f(x,y,0)$ depende somente de $y \in R^r$ e não de $x \in R^n$.

Então $f(x,y,t)$ depende somente de y e t, mas não de x.

§ 7. Campos vetoriais ao longo de f.

"Seja $f:(U,\Sigma) \to (V,\pi)$ um germe C^∞, onde U e V são variedades, $\Sigma \subset U$, $\pi \subset V$. Por um campo vetorial ao longo de f, entendemos um germe $\zeta:(U,\Sigma) \to TV$, onde TV é o fibrado tangente a V, tal que $\pi o \zeta = f$, onde $\pi: TV \to V$, é a projeção do fibrado.

Seja $\theta(f)$ o $C(U)_\Sigma$-módulo consistindo de todos os campos vetoriais C^∞ ao longo de f.

Uma outra maneira de descrever $\theta(f)$ é como o $C(U)_\Sigma$-módulo consistindo de todos os germes em Σ de seções do fibrado $\tilde{f}^*TV$, para qualquer representante $\tilde{f}: U_0 \to V$ de f.

Denotamos por $A = \theta(I_{(p,y)})$ e $B = \theta(I_{(N,S)})$, onde $I_{(p,y)}$ e $I_{(N,S)}$ são os germes da aplicação identidade $I: (P,y) \to (P,y)$ e $I: (N,S) \to (N,S)$, respectivamente.

Dada $f:(N,S) \to (P,y)$, seja $Tf:(TN,\pi_N^{-1}S) \to (TP,\pi_p^{-1}y)$, o germe da aplicação tangente a f.

O diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} (TN,\ \pi_N^{-1}S) & \xrightarrow{Tf} & (TP,\ \pi_P^{-1}y) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_p \\ (N,S) & \xrightarrow{f} & (P,y) \end{array}$$

Portanto, para qualquer $\zeta \in B$, $Tf \circ \zeta \in \theta(f)$ e para todo $\eta \in A$, $\eta \circ f \in \theta(f)$.

Podemos definir, então:

$tf: B \to \theta(f)$ e $\omega f: A \to \theta(f)$ por:

$tf:(\zeta) = Tf \circ \zeta$ e $\omega f(\eta) = \eta \circ f$

Então tf é um homomorfismo de $C(N)_S$-módulos e ωf é um homomorfismo sobre f^*, $f^*: C(P)_y \to C(N)_S''$ (ver [5]).

Transcrevemos acima algumas notações de Mather [5] que serão usadas posteriormente. No capítulo II, faremos as adaptações necessárias ao nosso caso.

CAPÍTULO II - GERMES FINITAMENTE DETERMINADOS DE APLICAÇÕES DO PLANO NO PLANO

No nosso caso, estamos interessados em germes de aplicações do plano no plano que apresentam singularidades do tipo S_1. Trabalharemos então com germes de aplicações cujo representante f tem a seguinte forma normal.

$$f(x,y) = \begin{cases} u = x \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

O objetivo deste capítulo é obter condições algébricas que nos possibilitem dizer quando um germe de aplicação do plano no plano é finitamente determinado.

§ 1. Equivalência Local

Definição 2.1

Sejam f e g germes em $\varepsilon(2,2)$. Dizemos que f e g são r-equivalentes e denotamos por $f \sim_r g$ se existe um difeomorfismo $\phi \in L(2)$ tal que $f = g.\phi$.

Observação 2.2

Se $f \sim_r g$ então usando a definição temos que $f(0) = g(0)$.

Podemos definir então f' e g' por

$f'(x,y) = f(x,y) - f(0,0)$ e $g'(x,y) = g(x,y) - g(0,0)$

Logo $f' \sim_r g'$ see $f \sim_r g$.

A partir daqui, estaremos nos referindo a germes de aplicações que

que se anulam na origem.

Definição 2.3:

Sejam $f, g \in \varepsilon(2,2)$ tais que $f(0,0) = g(0,0) = (0,0)$.

Dizemos que f e g são $r\ell$-equivalentes e denotamos por $f \sim_{r\ell} g$, se existem ϕ e Ψ $L(2)$ tais que $f = \Psi.g.\phi$

Observemos que usamos Ψ em lugar do habitual Ψ^{-1}, pois Ψ é um germe de difeomorfismo local, conforme definição 1.20.

§ 2. Germes Finitamente Determinados.

1.2.1. Definições e teoremas

Definição 2.4:

Sejam $f \in \varepsilon(2,2)$ com $f(0) = 0$ e $k \in Z_+$. Sejam $\mathcal{G} = L(2)$ ou $\mathcal{G} = L(2) \times L(2)$. f é k-determinado relativamente ao grupo $\mathcal{G}$, se para qualquer $g \in \varepsilon(2,2)$ com $g(0) = 0$ tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$, a $\mathcal{G}$-órbita de f contem g, isto é, $f \sim_{\mathcal{G}} g$.

Se $\mathcal{G} = L(2)$ dizemos que f é r-k-determinado e que f e g são r-equivalentes.

Se $\mathcal{G} = L(2) \times L(2)$, dizemos que f é $r\ell$-k-determinado e que f e g são $r\ell$-equivalentes.

Se f é k-determinado para algum inteiro positivo k, relativamente ao grupo $\mathcal{G}$, então dizemos que f é finitamente determinado, em relação a $\mathcal{G}$.

Como a condição de ser k-determinado depende apenas do k-jato em 0 do germe, podemos definir:

Definição 2.5:

Seja $z \in J_0^k(2,2)$. Se para algum $f \in \varepsilon(2,2)$ com $f(0) = 0$ tal que $j^k f(0) = z$, f é $r(r\ell)$-k-determinado então z é dito o $r(r\ell)$-k-determinante de f.

Definição 2.6:

Sejam $z \in J_0^q(2,2)$ com $k \leq q$ e

$$A = \{z' \in J_0^q(2,2) \mid \pi_{qk}(z') = \pi_{qk}(z)\}$$

Então z é r-k-determinado se $A \subseteq z\, L^q(2)$ e z é $r\ell$-k-determinado se $A \subseteq L^q(2)\, Z\, L^q(2)$.

Faremos agora as adaptações de alguns resultados de Mather [5] para o nosso caso.

Comparando, temos que A e B são o $C(R^2)_0$ - módulo consistindo de todos os germes em 0 de campos vetoriais em R^2.

Identificando $(1, \zeta)$ com ζ, temos:

$A = \{\zeta \in C^\infty \mid \zeta\colon (R^2,0) \to (R^2,0)\}$

$B = \{\eta \in C^\infty \mid \eta\colon (R^2,0) \to (R^2,0)\}$

Então $Tf\colon (R^2,0) \to (R^2,0)$ é o germe da aplicação tangente a f. Confundindo o germe com seu representante, Tf no ponto (x,y) pode ser descrito através da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ se (x,y) são coordenadas de R^2 em torno da origem.

Temos então as aplicações $tf\colon B \to \theta(f)$ e $wf\colon A \to \theta(f)$ descritas da seguinte forma:

$$tf(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1(x,y) \\ \zeta_2(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \zeta_1(x,y) \\ v_x(x,y)\zeta_1(x,y) + v_y(x,y)\zeta_2(x,y) \end{pmatrix} \text{ e}$$

$wf(\eta) = (\eta_1(x,v(x,y)),\ \eta_2(x,v(x,y)))$

Logo $tf(\zeta) + wf(\eta) = \zeta_1(x,y)\begin{pmatrix}1\\ v_x(x,y)\end{pmatrix} + \zeta_2(x,y)\begin{pmatrix}0\\ v_y(x,y)\end{pmatrix} +$

$+ f^*\begin{pmatrix}\eta_1(x,y)\\ \eta_2(x,y)\end{pmatrix}$

Lembremos que um elemento de $M^k\theta(f)$ é da forma

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{k} \lambda_i(x,y)x^{k-i}y^i\\ \sum_{j=0}^{k} \mu_j(x,y)x^{k-j}y^j\end{pmatrix}$$ onde $\lambda_i(x,y)$ e $\mu_j(x,y)$ pertencem a $\varepsilon(2)$.

Observemos que $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2 \in m(2)$. Então podemos dizer que

$tf(B) = m(2)\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix} + m(2)\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix} = m(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle$

e

$wf(A) = f(m(2) \oplus m(2))$ ou $f^*\begin{pmatrix}m(2)\\ m(2)\end{pmatrix}$

Como $f:R^2,_0 \to R^2,_0$ induz $f^*: \varepsilon(2) \to \varepsilon(2)$ uma aplicação R-linear, $tf: B \to \theta(f)$ da maneira como foi definida é um homomorfismo de $\varepsilon(2)$--modulos.

$wf: A \to \theta(f)$, $wf = f^*$ é homomorfismo sobre f^*.

Então $(wf, tf, A, B, \theta(f))$ homomorfismo misto sobre f^* do tipo finito (ver [5]).

Usaremos o seguinte lema:

Lema 2.7:

Seja $f:(N,S) \to (P,y)$ um germe de aplicação C^∞.

Suponhamos (α,β,A,B,C) um homomorfismo misto do tipo finito sobre f^*. Seja $a = \dim_R \frac{A}{myA}$. Seja C_0 um $C(N)_S$ - submódulo de C tal que

$\frac{G}{H_x}$, existe uma vizinhança A de q e uma aplicação diferenciável $\sigma: Q \to G$ tal que $\pi_0\sigma = id_Q$ (ver [2]).

Usando a observação (b) e considerando-se a aplicação $\tau: Q \to M$ dada por $\tau(g) = \alpha(g)(x)$, então $\operatorname{Im} \tau = O_x$. Além disso τ é constante nas classes laterais de $\frac{G}{H_x}$ e assim induz uma aplicação biunívoca λ de $\frac{G}{H_x}$ sobre O_x, logo existe $\lambda^{-1}: O_x \to \frac{G}{H_x}$. Tomando-se v, vetor tangente a O_x em x, é possível encontrar w, vetor tangente a G em 1 tal que $T\alpha(w) = v$.

Lema 2.8:

Dada $f \in \varepsilon(2,2)$ por $\begin{cases} u = x \\ v = v(x,y) \end{cases}$

Sejam $k \in Z_+$ e $z = \pi_k(f) \in J_0^k(2,2)$ onde $\pi_k: \varepsilon(2,2) \to J_0^k(2,2)$. Então:

a) $$\pi_k^{-1}[T_z\, z\, L^k(2)] = m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

b) $$\pi_k^{-1}[T_z\, L^k(2)\, z\, L^k(2)] = m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Demonstração:

Observemos primeiramente que π_k pode ser visto como $\pi_k: \varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2) \to J_0^k(2,1) \oplus J_0^k(2,1)$, onde $J_0^k(2,1) = \{z \in J^k(2,1) \mid \pi_{k,0}(z) = 0\}$

Da observação 1.22, $L^k(2)$ é um subconjunto aberto de $J_0^k(2,2)$, então o plano tangente a $L^k(2)$ na identidade pode ser identificado com $J_0^k(2,2)$.

Seja $(\lambda,\beta) \in J_0^k(2,2) \times J_0^k(2,2)$ vetor tangente a $L^k(2) \times L^k(2)$ na identidade.

Tomemos representantes $\lambda' \in \varepsilon(2,2)$ e $\beta' \in \varepsilon(2,2)$ e para $t \in R$, definamos $\eta_t \in \varepsilon(2,2)$ e $\delta_t \in \varepsilon(2,2)$ por

$$\eta_t(x,y) = (x,y) + t\lambda'(x,y) \quad \text{e} \quad \delta_t(x,y) = (x,y) + t\beta'(x,y)$$

(λ,β) é portanto o vetor velocidade do caminho $t \to (\pi_k\, \eta_t, \pi_k\, \delta_t)$ em $t = 0$.

Usando a afirmação feita acima segue que um elemento de $T_z(L^k(2)\ z\ L^k(2))$ é da forma: $\frac{\partial}{\partial t}\,(\pi_k \eta_t o z o \pi_k\, \delta_t)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\pi_k(\eta_t o f o \delta_t))\Big|_{t=0} = \pi_k\left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta_t o f o \delta_t)\Big|_{t=0}\right) = \pi_k\left(\frac{\partial}{\partial t}\,(f(x,y)+t\beta'(x,y))+\right.$$

$$\left. + t\lambda'(f((x,y) + t\beta'(x,y)))\Big|_{t=0}\right) =$$

$$= \pi_k \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1'(x,y) \\ \beta_2'(x,y) \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \pi_k \begin{bmatrix} \beta_1'(x,y) + \lambda_1'(x,v(x,y)) \\ v_x(x,y)\beta_1'(x,y) + v_y(x,y)\beta_2'(x,y) + \lambda_2'(x,v(x,y)) \end{bmatrix}$$

Como $\beta_i' \in m(2)$ e $\lambda_i' \in m(2)$ $i = 1,2$, então

$$Tz(L^k(2) z\ L^k(2)) = \pi_k \left[m(2)\begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix} + m(2)\begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \pi_k \left[m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} \right]$$

Logo:

$$\pi_k^{-1} \left[Tz(L^k(2) z\, L^k(2)) \right] = m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Se $\lambda = 0$, (λ,β) é o vetor tangente a $L^k(2)$ na identidade.

Neste caso, escolhemos $\lambda' = 0$ e $\beta' \in \varepsilon(2,2)$ e definimos para $t \in R$, $\eta_t(x,y) = (x,y)$ e $\delta_t(x,y) = (x,y) + t\beta'(x,y)$.

Com cálculo análogo ao anterior, obtemos:

$$Tz(zL^k(2)) = \pi_k \left[m(2) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix} + m(2) \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right] = \pi_k \left[m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

Ou seja

$$\pi_k^{-1}(Tz(zL^k(2))) = m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Corolário 2.9

Seja $q \in Z_+$. Sejam $z \in J_0^q(2,2)$, f um representante de z e $k \leq q$. Se z é $r\ell$-k-determinado, então

$$\begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \subseteq m(2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{q+1} \\ m(2)^{q+1} \end{pmatrix}$$

Prova:

Seja $A = \{z' \in J_0^q(2,2)$ tal que $\pi_{qk}(z') = \pi_{qk}(z)\}$

Então $A \subset J_0^q(2,2)$ e $T_zA = \pi_q(m(z)^{k+1} \oplus m(2)^{k+1})$

Se z é $r\ell$-k-determinado, então $A \subset L^q(2)\ zL^q(2)$

Logo $T_zA \subseteq T_z(L^q(2)zL^q(2))$

Do lema 2.8, temos:

$$T_z(L^q(2)zL^q(2)) = \pi_q\left[m(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix}\right]$$

Portanto,

$$\pi_q\begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\m(2)^{k+1}\end{pmatrix} \subseteq \pi_q\left[m(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix}\right]$$

ou seja

$$\begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\m(2)^{k+1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m(2)^{q+1}\\m(2)^{q+1}\end{pmatrix} \subseteq m(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\right\rangle +$$

$$+ f^*\begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m(2)^{q+1}\\m(2)^{q+1}\end{pmatrix}$$

Como $k \leq q$, então

$$\begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\m(2)^{k+1}\end{pmatrix} \subseteq m(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m(2)^{q+1}\\m(2)^{q+1}\end{pmatrix}$$

Corolário 2.10

Seja $k \in Z_+$. Se f é $r\ell$-$(k-1)$ determinado, então para $q \geq k-1$

$$\begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{q+1} \\ m(2)^{q+1} \end{pmatrix}$$

Prova:

Se f é $r\ell$-$(k-1)$-determinado, então $\pi_q(f)$, $q \geq k$ também é $(k-1)$-determinado, pois se considerarmos

$A = \{z' \in J_0^q(2,2)t_q.\ \pi_{qk-1}(z') = \pi_{qk-1}(z)\}$ onde

$\pi_q(f) = z$ e $\pi_q(g) = z'$, temos $A \subset L^q(2)\ z\ L^q(2)$.

De fato, se $z' \in A$, então z e z' tem o mesmo $(k-1)$-jato.

Como f é $r\ell$-$(k-1)$-determinado, então existem $\phi, \Psi \in L(2)$ tais que $f = \Psi\ g\ \phi$. Em nível de jatos, temos

$\pi_q(f) = \pi_q(\Psi\ g\ \phi) = \pi_q(\Psi).\pi_q(g).\pi_q(\phi)$, onde $\pi_q(\Psi), \pi_q(\phi) \in L^q(2)$.

Logo z' está na órbita de z, segundo a $r\ell$-ação.

Segue, portanto, do corolário 2.9 que $\forall\ q \geq k - 1$,

$$\begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{q+1} \\ m(2)^{q+1} \end{pmatrix}$$

§ 3. Dimensões de certos espaços vetoriais

Definição 2.11

Definimos:

$$\sigma(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon(2) + \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}}$$

Se $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sigma_k(f) = \dim_R \frac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}}$$

Se $k \leq q$, então $\sigma_k(f) \leq \sigma_q(f) \leq \sigma(f)$

Teorema 2.12:

As seguintes afirmações são equivalentes

a) f é finitamente determinado

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}$ para algum k finito.

c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}$ para algum k finito.

d) $\sigma(f) < \infty$

e) Existe d finito tal que para qualquer q, $\sigma_q(f) \leq d$.

Prova:

($a \Rightarrow b$) Se f é finitamente determinado, então f é $r\ell$-$(k-1)$-determinado para algum k finito. Então, para $q \geq k$, temos pelo corolário 2.10 que:

$$\begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{q+1} \\ m(2)^{q+1} \end{pmatrix}$$

Aplicando o lema 2.7, temos:

$$\begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}$$

(b $\Rightarrow$ c) imediato

(c $\Rightarrow$ a) Se existe k finito tal que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}$$

então usando o resultado de Mather em [5] segue que f é finitamente determinado.

(b $\Rightarrow$ d) $$\sigma(f) = \dim_R \frac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}} \leq$$

$$\leq \dim_R \frac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{m(2)^k \oplus m(2)^k} < \infty$$

(d $\Rightarrow$ e) $\sigma(f) < \infty$ então existe d tal que $\sigma_q(f) < d$, $\forall\, q$.

Basta escolhermos d suficientemente grande tal que $\sigma_q(f) \leq \sigma(f) \leq d$.

(e $\Rightarrow$ c) Chamemos $$\sigma_q = \dim_R \frac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^q \\ m(2)^q \end{pmatrix}}$$

Então $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_q \leq d$

Logo, existe k tal que $\sigma_{k+1} = \sigma_k$

Portanto,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}$$

Observação 2.13

Seja $f \in \varepsilon(2,2)$ com $f(0,0) = 0$ dado por suas funções coordenadas u e v.

Observemos que u e v podem ser finitamente determinados e f não o ser.

Por exemplo, seja $f(x,y) = \begin{cases} u = x \\ v = x^3 + y^3 \end{cases}$, u e v são finitamente determinados (ver [6]), porém f não o é.

CAPÍTULO III - DESDOBRAMENTOS UNIVERSAIS DO PLANO NO PLANO

O objetivo deste capítulo é obter condições algébricas equivalentes a existência de desdobramentos $r\ell$-universais de germes de aplicações do plano no plano que apresentam singularidades do tipo S_1. Para isso, vamos obter primeiro condições algébricas para um desdobramento ser $r\ell$-k-transversal.

§ 1. Morfismos entre Desdobramentos de Germes de Aplicações do Plano no Plano

Definição 3.1:

Dado $f \in \varepsilon(2,2)$ definido por $f = \begin{cases} u = x \\ v = v(x,y) \end{cases}$ com $f(0) = 0$, dizemos que $F \in \varepsilon(2+r,2)$ é um desdobramento de f, de dimensão r, se $F|_{R^2} = f$.

Definição 3.2:

Consideremos $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+s,2)$ dois desdobramentos de f. Um $r\ell$-morfismo de F para G é um par (ϕ,λ) onde $\Phi \in \varepsilon(2+r,2+s)$, e $\lambda \in \varepsilon(2+r,2)$, satisfazendo:

a) $\Phi|_{R^2} = id_{R^2}$

b) Se $\Phi = (\phi,\Psi)$, $\phi \in \varepsilon(2+r,2)$ e $\Psi \in \varepsilon(2+r,s)$ então $\Psi \in \varepsilon(r,s)$, isto é, Φ leva cada fibra $R^2 \times \{t\} \subset R^2 \times R^r$ em alguma fibra $R^2 \times \{\Psi(t)\} \subset R^2 \times R^s$.

c) $\lambda|_{R^2} = id_{R^2}$

d) $F(x,y,t) = \lambda(G(\phi(x,y,t),t))$, $\forall\ (x,y,t) \in R^{2+r}$, ou seja o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd}
R^2 \times U \subset R^2 \times R^r \arrow[r, "F"] \arrow[d, "(\Phi, id_U)"'] & R^2 \\
R^2 \times V \times U \subset R^2 \times R^s \times R^r \arrow[r, "(G \times id_U)"] & R^2 \times U \subset R^2 \times R^r \arrow[u, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Observemos que se (Φ,λ) é um $r\ell$-morfismo de F para G, então escolhendo t próximo do $0 \in R^r$, podemos definir $\lambda_t \in \varepsilon(2,2)$ por $\lambda_t(x,y) = \lambda(x,y,t)$ para (x,y) próximo do $0 \in R^2$.

Neste caso, a condição (c) nos diz que λ_t é um germe de um difeomorfismo local do R^2.

Analogamente, podemos definir F_t, ϕ_t, $G_{\Psi(t)}$ para t próximo do $0 \in R^r$. Usando as condições acima, podemos escrever a condição (d) na seguinte forma: $F_t(x,y) = \lambda_t(G_{\Psi(t)}(\phi_t(x,y)))$, ou $F_t = \lambda_t o G_{\Psi(t)} o \phi_t$.

Definição 3.3:

Sejam F e G dois desdobramentos de f. F é $r\ell$-induzida de G, se existe um $r\ell$-morfismo de F para G.

Observação 3.4:

Os desdobramentos de um dado germe f constituem uma $r\ell$-categoria, tomando-se como objetos todos os desdobramentos de f e como morfismos os $r\ell$-morfismos entre os desdobramentos.

De fato, dado $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f, F pode ser $r\ell$-induzida de F. Basta tomar o $r\ell$-morfismo (Φ,λ) onde

$\phi \in \varepsilon(2+r,2+r)$ é a identidade de R^{2+r} e $\lambda \in \varepsilon(2+r,2)$ é a primeira projeção.

Além disso, dados $F \in \varepsilon(2+r,2)$, $G \in \varepsilon(2+s,2)$, $H \in \varepsilon(2+p,2)$ desdobramentos de f. Suponhamos que existam $r\ell$-morfismos (Φ,λ) de F para G e (Φ',λ') de G para H. Então a composta é um $r\ell$-morfismo (Φ'',λ'') de F para H, dada por $(\Phi'',\lambda'') = (\Phi',\lambda').(\Phi,\lambda)$, onde $\Phi'' = \Phi' o \Phi \in \varepsilon(2+r,2+p)$ e $\lambda'' \in \varepsilon(2+r,2)$ definida por $\lambda''(x,y,t) = \lambda(\lambda'((x,y),\Psi(t)),t)$ ou seja $\lambda''_t = \lambda_t o \lambda'_{\Psi(t)}$ e satisfaz a propriedade associativa.

Temos também que para cada desdobramento F de f, existe o $r\ell$-morfismo (Φ,λ) de F para F, tal que qualquer que seja o $r\ell$-morfismo (Φ',λ') de F para G,

$(\Phi,\lambda).(\Phi',\lambda') = (\Phi',\lambda').(\Phi,\lambda) = (\Phi',\lambda')$

De fato, $(\Phi,\lambda).(\Phi',\lambda') = (\bar{\Phi},\bar{\lambda})$, onde $\bar{\Phi} = \Phi o \Phi' \Rightarrow \bar{\Phi} = \Phi'$ e

$\bar{\lambda}(x,y,t) = \lambda'(\lambda((x,y),\Psi'(t)),t) = \lambda'((x,y),t) = \lambda'_t$

$(\Phi',\lambda') . (\Phi,\lambda) = (\bar{\Phi},\bar{\lambda})$ onde $\bar{\Phi} = \Phi' . \Phi = \Phi'$

$\bar{\lambda}(x,y,t) = \lambda(\lambda'((x,y),\Psi(t)),t) = \lambda'((x,y),\Psi(t)) = \lambda'_{\Psi(t)} = \lambda'_t$, pois $\Psi : R^r \to R^r$ é a id_{R^r} .

Definição 3.5:

Dados $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+s,2)$ de f, então F e G são $r\ell$-isomorfos se eles são objetos isomorfos da $r\ell$-categoria de desdobramentos de f.

Observação 3.6:

Uma condição necessária e suficiente para um $r\ell$-morfismo (Φ,λ) entre dois desdobramentos de f de mesma dimensão onde $\Phi = (\phi,\Psi)$ com

$\phi \in \varepsilon(2+r,2)$ e $\Psi \in \varepsilon(r,r)$ seja um $r\ell$-isomorfismo é que $\Psi \in L(r)$.

Definição 3.7:

Um desdobramento constante de f, de dimensão r, é um desdobramento $F \in \varepsilon(2+r,2)$ definido por $F(x,y,t) = f(x,y)$ para $(x,y,t) \in R^{2+r}$

Definição 3.8:

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+s,2)$ desdobramentos de f.

Definamos um desdobramento $F \oplus G \in \varepsilon(2+r+s,2)$ por

$(F \oplus G)(x,y,t,z) = F(x,y,t) + G(x,y,z) - f(x,y)$

$F \oplus G$ é um desdobramento de f de dimensão $r + s$, pois

$F \oplus G(x,y,0,0) = F(x,y,0) + G(x,y,0) - f(x,y) = f(x,y)$

$F \oplus G$ pode ser visto também como um desdobramento de F de dimensão r e como um desdobramento de G de dimensão s.

§ 2. Desdobramentos Universais

Definição 3.9:

Seja F um desdobramento de f. F é um desdobramento $r\ell$-universal de f, se todo desdobramento de f pode ser $r\ell$-induzida de F, isto é, qualquer que seja G, desdobramento de f, existe um $r\ell$-morfismo de G para F.

Lema 3.10:

Seja $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f. Se G é qualquer desdobramento de F e, portanto de f, temos:

a) F pode ser $r\ell$-induzida de G

b) Qualquer desdobramento constante de F pode ser $r\ell$-induzida de F

c) Se G é um desdobramento constante de F, então G é um $r\ell$-desdobramento universal de f see F é um desdobramento universal de f.

Prova:

a) Devemos mostrar que existe um $r\ell$-morfismo de F para G. Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f e $G \in \varepsilon(2+r+s,2)$ um desdobramento de F e, portanto de f. Chamemos $q = 2 + r$.

Definamos $\Phi \in \varepsilon(q,q+s)$ por $\Phi(z) = (z,0)$, onde $z \in R^q$, $0 \in R^s$ e $\lambda \in \varepsilon(q,2)$ por $\lambda(x,y,t) = (x,y)$ onde $(x,y) \in R^2$ e $t \in R^r$.

(Φ,λ) é um $r\ell$-morfismo de F para G

De fato, satisfazem:

a) $\Phi|_{R^2} = id_{R^2}$, isto é, $\Phi(x,y,0) = (x,y)$, $0 \in R^r$ e $(x,y) \in R^2$

b) Se $\Phi = (\phi,\Psi)$, $\phi \in \varepsilon(q,q)$ e $\Psi \in \varepsilon(q,s)$ então $\Psi \in \varepsilon(r,s)$

c) $\lambda|_{R^2} = id_{R^2}$

d) $\lambda(G(\Phi(x,y,t),t) = G(\Phi(x,y,t)) = G(x,y,t,0) = F(x,y,t)$

Portanto F pode ser $r\ell$-induzida de G.

b) Seja G qualquer desdobramento constante de F. Mostremos que G pode ser $r\ell$-induzida de F.

Ou seja, mostremos que existe um $r\ell$-morfismo de G para F.

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ desdobramento de f, $G \in \varepsilon(2+r+s,2)$ um desdobramento constante de F e $q = r + 2$

Definamos $\Phi \in \varepsilon(q+s,q)$ por $\Phi(z,t) = z$, para $z \in R^q$ e $t \in R^s$,

e $\lambda \in \varepsilon(2+s,2)$ por $\lambda(x,y,t) = (x,y)$, para $(x,y) \in R^2$ e $t \in R^s$.

Dessa maneira, podemos verificar que (Φ,λ) é um $r\ell$-morfismo de G para F.

c) Seja G um desdobramento constante de F e suponhamos que G é um $r\ell$-desdobramento universal de f.

Mostremos que F é um desdobramento universal de f.

Para isso, seja H um desdobramento qualquer de f.

Como G é um desdobramento $r\ell$-universal de f, então existe um $r\ell$-morfismo (Φ',λ') de H para G, ou seja, H pode ser $r\ell$-induzida de G.

Além disso, G é um desdobramento constante de F, logo, pela parte (b) do lema, existe um $r\ell$-morfismo (Φ'',λ'') de G para F.

Da observação 3.4, segue que $(\Phi,\lambda) = (\Phi'',\lambda'').(\Phi',\lambda')$ é um $r\ell$-morfismo de H para F.

Reciprocamente, se F é um desdobramento $r\ell$-universal de f e G um desdobramento constante de F, então G é um $r\ell$-desdobramento universal de f.

A prova segue da parte (a) do lema.

Observemos que para a recíproca, G não precisa ser um desdobramento constante de F, basta que seja um desdobramento de F.

§ 3. Desdobramentos $r\ell$-k-transversais

Definição 3.11:

Sejam $U \subset R^{2+r}$, vizinhança aberta da origem e $F: U \to R^2$ uma aplicação diferenciável e $k \in Z_+$.

Definamos $j_1^k F : U \to J_0^k(2,2)$ da seguinte maneira: para todo

$(x,y,t) \in U$, definamos um germe $F_{(x,y,t)} \in \varepsilon(2,2)$ com $F_{(x,y,t)}(0,0) = (0,0)$ por $F_{(x,y,t)}(x',y') = F(x+x',y+y',t)-F(x,y,t)$

Então $j_1^k F: U \to J_0^k(2,2)$ é dada por $j_1^k F(x,y,t) = \pi_k(F_{(x,y,t)})$ para todo $(x,y,t) \in U$, onde $\pi_k : \varepsilon(2,2) \to J^k(2,2)$.

Podemos definir $j_1^k F$ da seguinte maneira:

Seja $i : R^2 \to R^{2+r}$ definida por $i(x,y) = (x,y,0)$ para $(x,y) \in R^2$ e $0 \in R^r$. Para cada k, esta aplicação induz uma aplicação R-linear ${}_k i^* : J^k(2+r,2) \to J^k(2,2)$.

Se U é uma vizinhança aberta do $0 \in R^{2+r}$ e $F: U \to R^2$ é diferenciável, então definimos para cada k, $j_0^k F: U \to J_0^k(2+r,2)$, por $j_0^k F = \rho_k \circ j^k F$ onde $j^k F : U \to J^k(2+r,2)$ e $\rho_k : J^k(2+r,2) \to J_0^k(2+r,2)$.

Finalmente, definimos $j_1^k F$ como $j_1^k F = {}_k i^* \circ j_0^k F$.

Observemos que se $F \in \varepsilon(2,2)$ com $f(0,0) = (0,0)$ e se $F \in \varepsilon(2+r,2)$ é um desdobramento de f, então

$j_1^k F(0) = \pi_k(F_{(0,0,0)}(x',y')) = \pi_k(F(x',y',0) - F(0,0,0)) = \pi_k(f)$.

Definição 3.12:

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f, $k \in Z_+$ e $z = \pi_k(f) \in J_0^k(2,2)$

Dizemos que F é r-k-transversal se $j_1^k F$ é transversal em 0 a $zL^k(2)$ e que F é $r\ell$-k-transversal se $j_1^k F$ é transversal em 0, a $L^k(2)zL^k(2)$.

Definição 3.13:

Seja $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f.

Para $1 \leq i \leq r$, tomemos $\gamma_i(F) = \left.\frac{\partial F}{\partial t_i}\right|_{R^2} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial t_i}\right|_{R^2} \\ \left.\frac{\partial \bar{v}}{\partial t_i}\right|_{R^2} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

Definamos $V_F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R$

$W_F = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R$

Lema 3.14:

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ desdobramento de f, definido por

$$F(x,y,t) = \begin{cases} \bar{u}(x,y,t) = u(x,y) + \phi(x,y,t) \\ \bar{v}(x,y,t) = v(x,y) + \Psi(x,y,t) \end{cases}$$ e $k \in \mathbb{Z}_+$. Então

a) F é r-k-transversal sse

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + V_F + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

b) F é $r\ell$-k-transversal sse:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} + W_F = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

Prova:

Como R^{2+r} e $J_0^k(2,2)$ são espaços euclidianos, podemos identificar o espaço tangente a R^{2+r} em 0 com o próprio R^{2+r} e o espaço tangente a $J_0^k(2,2)$ em $\pi_k(F)$ com o próprio $J_0^k(2,2)$.

Associado a $j_1^k F$ existe uma aplicação linear $Tj_1^k F: R^{2+r} \to J_0^k(2,2)$

O espaço tangente a R^{2+r} em 0 é gerado sobre R pelos vetores

tangentes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_r}$

Para cada $(x,y,t) \in U$, $t = (t_1,\ldots,t_r)$ definimos

$$F_{(x,y,t)}(x',y') = F(x+x',y+y',t) - F(x,y,t)$$

Como F é $r(r\ell)$-k-transversal então pela definição 3.12, $J_1^k F$ é transversal em 0 a $z\,L^k(2)$ $(L^k(2)z\,L^k(2))$, ou seja a imagem de $T\,j_1^k\,F$ juntamente com o espaço tangente à órbita $z\,L^k(2)\,(L^k(2)z\,L^k(2))$ geram $J_0^k(2,2)$.

Verifiquemos quem é a imagem de $T\,j_1^k\,F$.

$$T\,j_1^k\,F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,j_1^k\,F\Big|_{(x,y,t)=0} = \frac{\partial}{\partial x}\,\pi_k(F_{(x,y,t)})\Big|_{(x,y,t)=0} =$$

$$= \pi_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\,F_{(x,y,t)}\Big|_{(x,y,t)=0}\right)$$

Porém, $\frac{\partial}{\partial x}\,F_{(x,y,t)}(x',y')\Big|_{(x,y,t)=0} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(F(x+x',y+y',t)-F(x,y,t))\Big|_{(x,y,t)=0} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\,(x',y',0) - \frac{\partial F}{\partial x}\,(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\,(x',y',0) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(0,0,0) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\,(x',y',0) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_x \end{pmatrix}$$

Analogamente, teremos

$$\frac{\partial}{\partial y}\,F_{\substack{(x',y')\\(x,y,t)}}\Big|_{(x,y,t)=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix}$$

Para $1 \leq j \leq r$, teremos

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(x',y',0) - \frac{\partial F}{\partial t_j}(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_j}(x',y',0) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_j}(0,0,0) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t_j}(x',y',0) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t_j}(0,0,0) \end{pmatrix}$$

que tem o mesmo germe em 0 que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_j}(x',y') - \frac{\partial u}{\partial t_j}(0,0) \\ \frac{\partial v}{\partial t_j}(x',y') - \frac{\partial v}{\partial t_j}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j - \frac{\partial u}{\partial t_j}(0,0) \\ \beta_j - \frac{\partial v}{\partial t_j}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_j \\ \tilde{\beta}_j \end{pmatrix}$$

Seja $z = \pi_k(F)$. Então, usando o lema 2.8, e o fato de que F é r-k-transversal, seque que:

$$\pi_k\left[m(2)\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix} + m(2)\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\right] + \left\langle \pi_k\begin{pmatrix}0\\v_x\end{pmatrix}, \pi_k\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}, \pi_k\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\\tilde{\beta}_1\end{pmatrix}, \ldots, \right.$$

$$\left. \ldots, \pi_k\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_r\\\tilde{\beta}_r\end{pmatrix}\right\rangle_R = \pi_k\begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix} \quad \text{ou}$$

$$m(2)\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix} + m(2)\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\v_x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\\tilde{\beta}_1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_r\\\tilde{\beta}_r\end{pmatrix}\right\rangle_R +$$

$$+\begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\m(2)^{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m(2)\\m(2)\end{pmatrix}$$

ou equivalentemente

$$m(2)\begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix} + m(2)\begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\v_x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\v_y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix}, \ldots, \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix}\alpha_r\\\beta_r\end{pmatrix}\right\rangle_R + \begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\m(2)^{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\\varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

Observemos que $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\v_x\end{pmatrix}\right\rangle_R = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\v_x\end{pmatrix}\right\rangle_R$

$$m(2)\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix} + \left\langle\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle_R = \varepsilon(2)\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$m(2)\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix} + \left\langle\left\langle\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle_R = \varepsilon(2)\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}$$

Temos então

$$\varepsilon(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_r\\ \beta_r\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle_R +$$

$$+\begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\ m(2)^{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

isto é,

$$\varepsilon(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + V_F + \begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\ m(2)^{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

Do fato de F ser $r\ell$-k-transversal, segue analogamente que:

$$\varepsilon(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}m(2)\\ m(2)\end{pmatrix} + \left\langle\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle_R +$$

$$+\left\langle\left\langle\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_r\\ \beta_r\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle_R + \begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\ m(2)^{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$\varepsilon(2)\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\ m(2)^{k+1}\end{pmatrix} + W_F = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

Corolário 3.15:

Dada $f \in \varepsilon(2,2)$ definida por $\begin{cases} u = x \\ v = v(x,y) \end{cases}$. Então para todo in

teiro não negativo k, pode-se encontrar um desdobramento F de f que é $r\ell$-k-transversal.

Prova:

Seja k um inteiro não negativo

Então podemos considerar $\dfrac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}}$

como um espaço vetorial real de dimensão finita.

Escolhemos elementos $a_1, \ldots, a_r \in \varepsilon(2)$ e $b_1, \ldots, b_r \in \varepsilon(2)$ tais que módulo o denominador, geram este espaço vetorial.

Definimos então $F \in \varepsilon(2+r,2)$ por

$$F(x,y,t) = \begin{cases} \bar{u} = x + t_1 a_1(x,y) + \ldots + t_r a_r(x,y) \\ \bar{v} = v(x,y) + t_1 b_1(x,y) + \ldots + t_r b_r(x,y) \end{cases}$$

Observemos que F é um desdobramento de f e que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t_i}\right|_{R^2} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t_i}\right|_{R^2} \\ \left.\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t_i}\right|_{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$

Então os $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ geram W_F.

Portanto, pela escolha dos a_i, b_i, segue que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} + W_F = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

Então, pelo lema 3.14, F é $r\ell$-k-transversal.

Corolário 3.16:

Seja $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento $r\ell$-universal de f. Então F

é $r\ell$-k-transversal, para todo inteiro não negativo k.

Prova:

Dado $k \in Z_+$. Pelo corolário 3.15, podemos encontrar um desdobramento G de F que é $r\ell$-k-transversal, onde $G \in \varepsilon(2+s,2)$, para algum s.

Como F é $r\ell$-universal, então existe um $r\ell$-morfismo (Φ,λ) de G para F.

Por definição de $r\ell$-morfismo, se $\Phi = (\phi,\Psi)$ então $\Psi \in \varepsilon(s,r)$ e vale ainda $G(x,y,w) = \lambda(F(\phi(x,y,w),\Psi(w)),w)$ para $(x,y,w) \in R^{2+s}$.

Então se $1 \leq \ell \leq s$, temos para $(x,y) \in R^2$.

$$\alpha_\ell(G)(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda 1}{\partial t_1}(F(x,y,0),0) & \frac{\partial \lambda 1}{\partial \lambda_2}(F(x,y,0),0) \\ \frac{\partial \lambda 2}{\partial t_1}(F(x,y,0),0) & \frac{\partial \lambda 2}{\partial t_2}(F(x,y,0),0) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F1}{\partial x}(x,y,0) & \frac{\partial F1}{\partial y}(x,y,0) \\ \frac{\partial F2}{\partial x}(x,y,0) & \frac{\partial F2}{\partial y}(x,y,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi 1}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \\ \frac{\partial \phi 2}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F1}{\partial u_1}(x,y,0) \dots \frac{\partial F1}{\partial u_r}(x,y,0) \\ \frac{\partial F2}{\partial u_1}(x,y,0) \dots \frac{\partial F2}{\partial u_r}(x,y,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi 1}{\partial \omega_\ell}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi r}{\partial \omega_\ell}(0) \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda 1}{\partial \omega_\ell}(F(x,y,0),0) \\ \frac{\partial \lambda 2}{\partial \omega_\ell}(F(x,y,0),0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda 1}{\partial t_1}(f(x,y),0) & \frac{\partial \lambda 1}{\partial t_2}(f(x,y),0) \\ \frac{\partial \lambda 2}{\partial t_1}(f(x,y),0) & \frac{\partial \lambda 2}{\partial t_2}(f(x,y),0) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi 1}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \\ \frac{\partial \phi 2}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F1}{\partial u_i}(x,y,0) \frac{\partial \Psi i}{\partial \omega_\ell}(0) \\ \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F2}{\partial u_i}(x,y,0) \frac{\partial \Psi i}{\partial \omega_\ell}(0) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda 1}{\partial \omega_\ell}(f(x,y),0) \\ \frac{\partial \lambda 2}{\partial \omega_\ell}(f(x,y),0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi 1}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \\ \frac{\partial \phi 2}{\partial \omega_\ell}(x,y,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(F) \frac{\partial \Psi i}{\partial \omega_\ell}(0) \\ \sum_{i=1}^{r} \beta_i(F) \frac{\partial \Psi i}{\partial \omega_\ell}(0) \end{pmatrix} \right. +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\omega_\ell}(f(x,y),0) \\ \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\omega_\ell}(f(x,y),0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\omega_\ell}(x,y,0) \\ \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\omega_\ell}(x,y,0) \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(F)\frac{\partial\Psi_i}{\partial\omega_\ell}(0) \\ \\ \sum_{i=1}^{r} \beta_i(F)\frac{\partial\Psi_i}{\partial\omega_\ell}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\omega_\ell}(f(x,y),0) \\ \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\omega_\ell}(f(x,y),0) \end{pmatrix}$$

Assim $W_G \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + W_F + f^*\begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$

Logo se G é $r\ell$-k-transversal, então F também é.

Lema 3.17:

Suponhamos f $r\ell$-k-determinado e $k \in Z_+$.

Se $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+r,2)$ são desdobramentos $r\ell$-k-transversais de f, de mesma dimensão, então F e G são $r\ell$-isomorfos.

Demonstração:

Dado k um inteiro não negativo, consideremos f $r\ell$-k-determinado e F e $G \in \varepsilon(2+r,2)$, desdobramentos $r\ell$-k-transversais de f.

Devemos construir um $r\ell$-isomorfismo de F para G.

Mostremos que basta fazer isto, no caso especial em que para todo número real $s \in [0,1]$ o desdobramento $H_s = sG + (1-s)F$ é também $r\ell$-k-transversal.

Neste caso, diremos que F e G são $r\ell$-elementarmente k-homotopicas e diremos que F e G são $r\ell$-k-homotópicas se pudermos encontrar uma sequência finita de desdobramento $F = F_0,\ldots,F_{p-1}$, $F_p=G$ tal que F_i e F_{i+1} são $r\ell$-elementarmente k-homotópicas para $i = 0,1,\ldots, p-1$.

Seja $A \subseteq J^k(2,2)$ definido por

$$A = \pi_k\left[\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}\right]$$

Se $H \in \varepsilon(2+r,2)$ é qualquer desdobramento de f, então H é $r\ell$-k-transversal see $\pi_k(W_H)$ é transversal a A.

De fato, do lema 3.14, H é $r\ell$-k-transversal see

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m(2)^{k+1}\\ m(2)^{k+1}\end{pmatrix} + W_H = \begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}$$

que, em nível de jatos, é equivalente a:

$$\pi_k\left[\left\langle\begin{pmatrix}1\\ v_x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ v_y\end{pmatrix}\right\rangle + f^*\begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix}\right] + \pi_k(W_H) = \pi_k\begin{pmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(2)\end{pmatrix} = J^k(2,2)$$

$\therefore\ A + \pi_k(W_H) = J^k(2,2)$

Observação 1:

Se $\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix},\ldots\begin{pmatrix}a_r\\ b_r\end{pmatrix}$ são quaisquer r elementos de $J^k(2,2)$ então f tem um desdobramento $H' \in \varepsilon(2+r,2)$ tal que $\pi_k(\alpha_i(H')) = \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}$ para $i = 1,\ldots, r$

Para isto basta escolher elementos $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \gamma_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\mu_r\\ \gamma_r\end{pmatrix}$ em $\varepsilon(2,2)$ tais que $\pi_k\begin{pmatrix}\mu_i\\ \gamma_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}$ para $i = 1,\ldots, r$

e definir

$$H'(x,y,z) = \begin{cases} x + z_1\mu_1(x,y) + \ldots + z_r\mu_r(x,y) \\ v(x,y) + z_1\gamma_1(x,y) + \ldots + z_r\gamma_r(x,y) \end{cases}$$

pois $\pi_k(\alpha_i(H')) = \pi_k \begin{pmatrix} \mu_i \\ \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ \\ b_i \end{pmatrix}$ para $i = 1, \ldots, r$

onde $\alpha_i(H') = \left(\left. \frac{\partial H'}{\partial z_i} \right|_{R^2} \right) = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \\ \gamma_i \end{pmatrix}$ $i = 1, \ldots, r$

Observação 2:

Consideremos $H \in \varepsilon(2+r,2)$ qualquer desdobramento $r\ell$-k-transversal de f. Seja i um inteiro, $1 \leq i \leq r$ e $b = \begin{pmatrix} b' \\ \\ b'' \end{pmatrix} \in j^k(2,2)$ tal que $\begin{pmatrix} b' \\ \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ \\ b'' \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{r} c_j \pi_k(\alpha_j(H))$,

onde $\begin{pmatrix} a' \\ \\ a'' \end{pmatrix} \in A$, $c_j \in R$, $c_i > 0$

Escolhendo qualquer desdobramento $H' \in \varepsilon(2+r,2)$ de f tal que $\pi_k(\alpha_i(H')) = \begin{pmatrix} b' \\ \\ b'' \end{pmatrix}$ e tal que $\pi_k(\alpha_j(H')) = \pi_k(\alpha_j(H))$, $j \neq i$.

Então H' é também $r\ell$-k-transversal, isto é, $\pi_k(W_{H'})$ é transversal a A. De fato:

$$\pi_k \left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} \right) + \pi_k(W_{H'}) = A + \langle \pi_k\alpha_1(H'),$$

$$\ldots, \pi_k\alpha_i(H'), \ldots, \pi_k\alpha_r(H') \rangle_R =$$

$$= A + \langle \pi_k\alpha_1(H), \ldots, a + c_1\pi_k\alpha_1(H) + \ldots + c_r\pi_k\alpha_r(H), \ldots, \pi_k\alpha_r(H) \rangle_R$$

$$= A + \langle \pi_k\alpha_1(H), \ldots, c_1\pi_k\alpha_1(H) + \ldots + c_r\pi_k\alpha_r(H), \ldots, \pi_k\alpha_r(H) \rangle_R =$$

$= A + \langle \pi_k\alpha_1(H), \ldots, \pi_k\alpha_i(H), \ldots, \pi_k\alpha_r \rangle_R = J^k(2,2)$, pois H é $r\ell$-k-transversal.

Além disso, H' é $r\ell$-elementarmente k-homotópica a H, pois como $c_i > 0$, vê-se que $\pi_k(W_{sH'+(1-s)H})$ é transversal a A para todo $s \in [0,1] \subset R$.

De fato $A + \pi_k(W_{sH'+(1-s)H}) = A + \langle s\pi_k\alpha_1(H') + (1-s)\pi_k\alpha_1(H), \ldots$
$\ldots s\pi_k\alpha_r(H') + (1-s)\pi_k\alpha_r(H)\rangle_R = A + \langle \pi_k\alpha_1(H), \ldots, sa + sc_1\alpha_1(H) +$
$+ \ldots + sc_i\alpha_i + \ldots + sc_r\alpha_r(H) + (1-s)\pi_k\alpha_i(H), \ldots, \pi_k\alpha_r(H)\rangle_R =$

$= A + \langle \pi_k\alpha_1(H), \ldots, \pi_k\alpha_i(H), \ldots, \pi_k\alpha_r(H)\rangle_R = J^k(2,2)$ pois H é $r\ell$-k-transversal a A.

Temos um isomorfismo de $J^k(2,2)$ a um espaço euclidiano, então temos também um produto-interno em $J^k(2,2)$; assim podemos falar no espaço ortogonal a A, $A^\perp$.

Seja $\dim_R A^\perp = q$ e escolhamos uma base $\begin{pmatrix} b_1 \\ \bar{b}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_q \\ \bar{b}_q \end{pmatrix}$ de $A^\perp$.

Seja $H \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento $r\ell$-k-transversal de f.

Aplicando sucessivamente a obs. 2, vemos que H é $r\ell$-k-homotópica a um desdobramento $H' \in \varepsilon(2+r,2)$ de f, com a propriedade:

Se $q > 0$, $\pi_k\alpha_1(H') = \pm\begin{pmatrix} b_1 \\ \bar{b}_1 \end{pmatrix}$; $1 < j \leq q$, $\pi_k\alpha_j(H') = \begin{pmatrix} b_j \\ \bar{b}_j \end{pmatrix}$ e

$q < j \leq r$ então $\pi_k\alpha_j(H') = 0$.

De fato, consideremos $A^* = [\pi_k\alpha_1(H), \ldots, \pi_k\alpha_r(H)]$ onde $A^* + A = J^k(2,2)$.

Tomemos a projeção de $\pi_k\alpha_1(H)$ sobre $A^\perp$. Se $\rho(\pi_k\alpha_1(H)) \neq 0$, então fazemos $\pi_k\alpha_1(H) = u_1$. Se $\rho(\pi_k\alpha_1(H)) = 0$, então $\pi_k\alpha_1(H) \in A$.

Tomamos o vetor v_1 e consideramos $u_1 = v_1 + \pi_k\alpha_1(H)$.

Mas $v_1 = a_1 + \sum_{j=1}^{r} c_j\pi_k\alpha_j(H)$ onde consideramos $c_1 > 0$, pois se não o for somamos e subtraimos outro múltiplo de $\pi_k\alpha_1(H)$ e colocamos os coeficientes negativos em A.

Então $u_1 = a_1 + \sum_{j=1}^{r} c_j\pi_k\alpha_j(H) - \pi_k\alpha_j(H)$; como $\pi_k\alpha_j(H) \in A$, chamamos $\bar{a}_1 = a_1 - \pi_k\alpha_j(H)$. Logo $u_1 = \bar{a}_1 + \sum_{j=1}^{r} c_j\pi_k\alpha_j(H)$ com $c_1 > 0$.

Definimos $\pi_k\alpha_1(\tilde{H}_1) = u_1$ e $\pi_k\alpha_j(\tilde{H}_1) = \pi_k\alpha_j(H)$ $j = 2, \ldots, r$.

Aplicando a obs.2 $\tilde{H}_1$ é $r\ell$-elementarmente k-homotopica a H.

Construimos, portanto, $A_1^* = [u_1, \pi_k\alpha_2(\tilde{H}_1), \ldots, \pi_k\alpha_r(\tilde{H}_1)]$ onde A_1^* juntamente com A ainda nos dão o espaço todo $J^k(2,2)$.

Tomemos $\rho(\pi_k\alpha_2(\tilde{H}_1))$. Se esse vetor não pertencer $[u_1]$, então fazemos $\rho(\pi_k\alpha_2(\tilde{H}_1)) = u_2$. Se pertencer então tomamos um vetor v_2 $\ell.i.$ com u_1 que estará no complementar de $[u_1]$.

Consideramos então $u_2 = v_2 + \rho(\pi_k\alpha_2(\tilde{H}_1)) = v_2 + \lambda u_1$

Logo $u_2 = a_2 + \lambda u_1 + \sum_{j=2}^{r} c_j\pi_k\alpha_j(\tilde{H}_1)$, onde consideramos $c_2 > 0$, pois se não o for, somamos e subtraimos múltiplo de $\pi_k\alpha_2(\tilde{H}_1)$ cuja parte negativa será englobado por a_2 e λu_1.

Definimos então $\pi_k\alpha_2(\tilde{H}_2) = u_2$ e $\pi_k\alpha_j(\tilde{H}_2) = \pi_k\alpha_j(\tilde{H}_1)$ $j \neq 2$

Analogamente $\tilde{H}_2$ é $r\ell$-elementarmente k-homotópica a $\tilde{H}_1$ e $A_2^* = [u_1, u_2, \pi_k\alpha_1(\tilde{H}_1), \ldots, \pi_k\alpha_r(\tilde{H}_1)]$ juntamente com A ainda nos dá $J^k(2,2)$.

Suponhamos então que tenhamos construido $A_p^* = [u_1, \ldots, u_p . \pi_k\alpha_{p+1}(\tilde{H}_p), \ldots, \pi_k\alpha_r(\tilde{H}_p)]$ nas condições acima. Com raciocínio análogo, podemos construir A_{p+1}^*, satisfazendo as condições.

Podemos construir, portanto, $A^*q = [u_1, \ldots, u_q, \pi_k\alpha_{q+1}(\tilde{H}_q), \ldots, \pi_q\alpha_r(\tilde{H}_q)]$, onde A^*q juntamente com A nos dá $J^k(2,2)$. Porém, $\dim A^{\perp} = q$, logo podemos por uma homotopia simples, reduzir, $\pi_k\alpha_j(\tilde{H}_q)$, $j = q+1, \ldots, r$ a zero. Assim construimos uma base $\tilde{A} = [u_1, \ldots, uq, 0, \ldots, 0]$ de $A^{\perp}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \pi_k\alpha_j(\tilde{H}) &= u_j, \quad j = 1, \ldots, q \\ \pi_k\alpha_j(\tilde{H}) &= 0, \quad j = q+1, \ldots, r \end{aligned}$$

onde $\tilde{H}$ é obtida por homotopias elementares a partir de H.

Temos também que $b_1, \ldots, bq$ é uma base de $A^{\perp}$.

Suponhamos que a base obtida acima e a última, tenham a mesma orientação. Queremos obter agora uma mudança da base $u_1, \ldots, uq$ para a base $b_1, \ldots, bq$. Para isso, vamos fazer uma mudança de $u_1, \ldots, uq$ para uma outra $b_1, v_2, \ldots, v_q$ por homotopias elementares e a seguir levar a base $b_1, v_2, \ldots, v_q$ para a base $b_1, w_2, \ldots, w_q$, onde $[w_2, \ldots, wq] = [b_2, \ldots, b_q]$, obtendo assim o resultado desejado.

Como $b_1 = \Sigma\, \alpha_{ij}\, u_j$, temos dois casos a considerar:

1) $\alpha_{11} \neq 0$ 2) $\alpha_{11} = 0$

1) Suponhamos $\alpha_{11} \neq 0$. Se $\alpha_{11} > 0$, então estamos nas condições e podemos substituir u_1 por b_1 e obter a base $b_1, v_2, \ldots, v_q$

Se $\alpha_{11} < 0$, substituimos a base $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_q$ pela base $-u_1, -u_2, u_3, \ldots, u_q$, usando uma rotação. Nesta nova base, b_1 se escreve como $-\alpha_{11}(-u_1) + (-\alpha_{12})(-u_2) + \ldots + \alpha_{1q}u_q$

Logo obtemos $\alpha_{11} > 0$ e caimos no caso anterior.

2) Se $\alpha_{11} = 0$, substituimos a base $u_1, \ldots, u_q$ por uma outra base $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_q$ tomando-se $\begin{cases} \bar{u}_i = u_i \ j \neq i \ \text{ onde } \ j > 1 \ \text{ é} \\ \bar{u}_j = \lambda u_1 + u_j \end{cases}$

o índice para o qual o coeficiente de b_1 é diferente de zero.

Logo

$$b_1 = (-\lambda\alpha_{1j})u_1 + \alpha_{12}u_2 + \ldots + \alpha_{1q}u_q, \quad -\lambda\alpha_{1j} = \bar{\alpha}_{11} \text{ que}$$

é diferente de zero e cai nos casos anteriores.

Obtivemos, portanto, a base $b_1, v_2, \ldots, v_q$

Fazendo a mudança da base $b_1, v_2, \ldots, v_q$ para a base $b_1, v_{22}, \ldots, v_{2q}$ dada por

$$\begin{cases} v_{21} = b_1 \\ v_{22} = v_2 - \lambda_1 b_1 \\ v_{2j} = v_j, \quad j = 3, \ldots, q \end{cases}$$

A seguir para a base $b_1, v_{22}, v_{33}, \ldots, v_{3q}$, por:

$$\begin{cases} v_{31} = b_1 \\ v_{32} = v_{22} = v_2 - \lambda_1 b_1 \\ v_{33} = v_{23} - \lambda_2 b_1 \\ v_{3j} = v_j \quad j = 4, \ldots, q \end{cases}$$

e assim sucessivamente até obtermos a base $b_1, v_{22}, v_{33}, \ldots, v_{qq}$.

$$\begin{cases} v_{q1} = b_1 \\ v_{qj} = v_{jj} \quad j = 2, \ldots, q \end{cases}$$

Chamemos esta base de $b_1, w_2, \ldots, w_q$

Observemos que a base foi obtida por uma homotopia elementar em cada passo e que cada w_i pertence ao complementar de $[b_1]$.

Como $b_1, b_2, \ldots, b_q$ é uma base de $A^{\perp}$, então $[w_2, w_3, \ldots, w_q] = [b_2, \ldots, b_q]$.

Observemos que se $\tilde{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_q, 0, \ldots, 0\}$ e $\{b_1, \ldots, b_q, 0, \ldots, 0\}$. tiverem orientação contrárias então, obteremos um desdobramento $H' \in \varepsilon(2+r,2)$ de f com a propriedade: se $q > 0$, $\pi_k \alpha_1(H') = -\begin{pmatrix} b_1 \\ \bar{b}^1 \end{pmatrix}$;

$1 < j \leq q$, $\pi_k \alpha_j(H') = \begin{pmatrix} b_j \\ \bar{b}_j \end{pmatrix}$ e $q < j \leq r$ então $\pi_k \alpha_j(H') = 0$.

Um desdobramento H' com as propriedades obtidas será chamado $r\ell$-k-ortogonal.

Então os desdobramentos F e G são $r\ell$-k-homotópicas aos desdobramentos $r\ell$-k-ortogonais F' e G', respectivamente.

Se $q > 0$ e $\pi_k\alpha_1(F') = -\pi_k\alpha_1(G')$, definimos $F''(x,y,z_1,\ldots,z_r) = F'(x,y,-z_1,\ldots,z_r)$. Se $q = 0$, $F'' = F'$.

Temos, portanto, para todo j, $1 \leq j \leq r$, $\pi_k\alpha_j(F'') = \pi_k\alpha_j(G')$ e pela observação 2, F'' é $r\ell$-elementarmente k-homotópica a G'.

Então se F e $G \in \varepsilon(2+r,2)$ são quaisquer desdobramentos $r\ell$-k-transversais de f, de mesma dimensão, então podemos encontrar desdobramentos $r\ell$-k-transversais de f, de dimensão r, $F = F_0, F_1, \ldots, F_p = G$ tais que F_i e F_{i+1} são $r\ell$-elementarmente k-homotópicas para $i = 1, 2, \ldots, p$. Então é suficiente mostrar o lema no caso em que F e G são $r\ell$-elementarmente k-homotópicas.

Então para $s \in R$, definamos um desdobramento $\tau_s \in \varepsilon(2+r,2)$ de f, por $\tau_s = (1-s)F + sG$.

Mostremos que para todo $s \in [0,1]$, se s' é suficientemente próximo a s, então $\tau_{s'}$ é $r\ell$-isomorfo a τ_s.

Então, pela compacidade de $[0,1]$ isto implica que $F = \tau_0$ é $r\ell$-isomorfo a $G = \tau_1$.

Seja, então, $s \in [0,1]$. Definimos $H \in \varepsilon(2+r+1,2)$ por $H(x,y,z,t) = \tau_{s+t}(x,y,z) = (1-s-t)F(x,y,z) + (s+t)G(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in R^{2+r}$ e $t \in R$.

Vamos construir isomorfismos entre τ_s e $\tau_{s'}$, para s' próximo de s e aplicar o lema 1.30.

Como τ_s é $r\ell$-k-transversal, temos pelo lema 3.14:

$$a)\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} + W_{\tau_s} = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

Como f é $r\ell$-k-determinado então:

$$\begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} m(2)^{k} \\ m(2)^{k} \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} \subseteq$$

$$\subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + W_{\tau s} = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\text{b)} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + f^* \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\text{c)} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{m(2)} + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R \supseteq$$

$$\supseteq \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}$$

Mas

$$f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} f_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle_R +$$

$$+ f^* \begin{pmatrix} m(2)^{k+2} \\ m(2)^{k+2} \end{pmatrix}$$

Como $f \in \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}$, então $f^* \begin{pmatrix} m(2)^{k+2} \\ m(2)^{k+2} \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} m(2)^{k+2} \\ m(2)^{k+2} \end{pmatrix}$

Então

$$\begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{m(2)} + \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \ldots, \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} f_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle_R + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R + \begin{pmatrix} m(2)^{k+2} \\ m(2)^{k+2} \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{m(2)} + \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} f_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle_R + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R +$$

$$+ \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}$$

Aplicando Nakayama, obtemos:

$$\begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{m(2)} + \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} f_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle_R + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R$$

ou

$$\text{d)} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} f_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle_R + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right\rangle_R$$

Seja $h \in \varepsilon(2+r+1,2)$. Então $h|_{R^2} \in \varepsilon(2,2)$. Por (d) podemos encontrar elementos $\mu_1, \mu_2 \in \varepsilon(2)$, $b_1, \ldots, b_{r+2} \in R$; $c_0, \ldots, c_{k+1} \in R$, tais que:

$$\text{e)} \quad \begin{pmatrix} h_1|R^2 \\ h_2|R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ v_x\mu_1 + v_y\mu_2 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k+1} c_j \left[\begin{pmatrix} f_1^j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^j \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{r+2} b_\ell \, \alpha_\ell(\tau_s)$$

Se considerarmos μ_1, μ_2 como elementos de $\varepsilon(2+r+1)$ podemos definir um elemento $h' \in \varepsilon(2+r+1,2)$ por

$$\begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x}\mu_1 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x}\mu_1 + \frac{\partial H_2}{\partial y}\mu_2 \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{k+1} c_j \left[\begin{pmatrix} H_1^j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^j \end{pmatrix}\right] -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{r+2} b_\ell \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_\ell} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_\ell} \end{pmatrix}$$

Observemos que $H|_{R^2} = f$ e $H|_{R^{2+r}} = \tau_s$

Segue de (e) que $\begin{pmatrix} h_1'|_{R^2} \\ h_2'|_{R^2} \end{pmatrix} = 0$

Então $h_1', h_2' \in m(r+1)\varepsilon(2+r+1)$ pelo lema 1.7.

Como vale para qualquer $h \in \varepsilon(2+r+1,2)$ temos:

$$f) \begin{pmatrix} \varepsilon(2+r+1) \\ \varepsilon(2+r+1) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2)} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} H_1^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} H_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^{k+2} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_r} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_r} \end{pmatrix} \right\rangle_R +$$

$$+ m(r+1) \begin{pmatrix} \varepsilon(2+r+1) \\ \varepsilon(2+r+1) \end{pmatrix}$$

Chamemos de

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_1^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} H_1^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^{k+1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Observemos que (f) continua válida se fizermos

$$g)\quad \begin{pmatrix} \varepsilon(2+r+1) \\ \varepsilon(2+r+1) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2+r+1)} + B(\varepsilon(r+1) +$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_r} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_r} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(r+1)} + \cdot m(r+1) \begin{pmatrix} \varepsilon(2+r+1) \\ \varepsilon(2+r+1) \end{pmatrix}$$

Como B é um espaço vetorial de dimensão finita, $B(\varepsilon(r+1))$ é um $\varepsilon(r+1)$ - módulo finitamente gerado e

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_r} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_r} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(r+1)} \quad \text{é f.g. sobre } \varepsilon(r+1)$$

Observemos que $\pi: R^2 \times R^{r+1} \to R^{r+1}$ corresponde a f no lema 1.28. Então, temos: $C = \varepsilon(2+r+1) \oplus \varepsilon(2+r+1)$; $A = B\varepsilon(r+1) +$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_r} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_r} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(r+1)},$$

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2+r+1)}$$

Então pelo lema 1.28, temos:

$$h)\quad \begin{pmatrix} \varepsilon(2+r+1) \\ \varepsilon(2+r+1) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(2+r+1)} + B.\varepsilon(r+1) +$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_r} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_r} \end{pmatrix} \right\rangle_{\varepsilon(r+1)}$$

Se multiplicarmos (h) de ambos os lados por $m(r)$, obtemos:

$$\text{i)}\quad m(r)\begin{pmatrix}\varepsilon(2+r+1)\\ \\ \varepsilon(2+r+1)\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial x}\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial x}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial y}\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial y}\end{pmatrix}\right\rangle_{m(r)\varepsilon(2+r+1)} +$$

$$+ m(r)\varepsilon(r+1)B + \left\langle\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial z_1}\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial z_1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial z_r}\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial z_r}\end{pmatrix}\right\rangle_{m(r)\varepsilon(r+1)}$$

Observemos que para todos $(x,y) \in R^2$, $t \in R$,

$$H(x,y,0,t) = f(x,y)$$

Assim:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial t}(x,y,0,t)\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial t}(x,y,0,t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \\ 0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial t}\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial t}\end{pmatrix} \in m(r)\begin{pmatrix}\varepsilon(2+r+1)\\ \\ \varepsilon(2+r+1)\end{pmatrix}$$

Por (i) podemos encontrar germes $\zeta_1, \zeta_2 \in m(r)\ \varepsilon(2+r+1)$, $X_1, \ldots, X_r \in m(r)\ \varepsilon(r+1)$ e $\beta_0, \ldots, \beta_{k+1} \in m(r)\ \varepsilon(r+1)$, tais que

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial t}(x,y,z,t)\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial t}(x,y,z,t)\end{pmatrix} = \zeta_1(x,y,z,t)\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial x}(x,y,z,t)\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial x}(x,y,z,t)\end{pmatrix} +$$

$$+ \zeta_2(x,y,z,t)\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial y}(x,y,z,t)\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial y}(x,y,z,t)\end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} X_j\begin{pmatrix}\frac{\partial H1}{\partial z_j}(x,y,z,t)\\ \\ \frac{\partial H2}{\partial z_j}(x,y,z,t)\end{pmatrix} + \sum_{\ell=0}^{b+1} \beta_\ell(z,t)\begin{pmatrix}H_1(x,y,z,t)^\ell\\ \\ H_2(x,y,z,t)^\ell\end{pmatrix}$$

Definamos $w \in \varepsilon(2+r+1)$ por $w(\sigma,z,t) = \sum_{\ell=0}^{k=1} \beta_\ell(z,t)\sigma^\ell$

Então pelo lema 1.30, existem germes $\Phi \in \varepsilon(2+r+1,2)$, $\lambda \in \varepsilon(3,2)$ tais que:

a) $\phi(x,y,z,0) = (x,y,z)$

$\lambda(x,y,0) = (x,y)$

Então $\Phi(x,y,0,0) = (x,y,0) = (x,y)$ e portanto $\Phi|_{R^2} = id_{R^2}$ e $\lambda(x,y,0) = (x,y)$

b) $\Phi = (\phi,\Psi)$, $\phi \in \varepsilon(2+r+1,1)$ e $\Psi \in \varepsilon(2+r+1,1)$, temos que

$$\Psi \in \varepsilon(r+1,1)$$

Das condições

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(x,y,z,t) = -\zeta_i(\Phi(x,y,z,t),t) \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial\Psi_j}{\partial t}(x,y,z,t) = -X_j(\Psi(x,y,z,t),t) \quad j = 1, \ldots, r$$

Observamos que

$\Psi_j \in \varepsilon(r+1)$ para cada j, isto é, Ψ_j não depende de $(x,y) \in R^2$, pois $\Psi_j(x,y,z,0) = z$.

De fato $\Phi(x,y,z,0) = (\phi(x,y,z,0), \Psi(x,y,z,0)) = (x,y,z)$.

Então:

$$\Psi_j(x,y,z,0) = z$$

Além disso, Ψ satisfaz a equação diferencial.

$$\frac{\partial\Psi_j}{\partial t}(x,y,z,t) = -X_j(\Psi(x,y,z,t),t) \quad j = 1, \ldots, r.$$

O lado direito depende somente de $\Psi(x,y,z,t)$, mas não depende diretamente de x, assim pela observação 1.32, Ψ não depende de $(x,y) \in R^2$.

c) $H(\Phi(x,y,z,t),t) = \lambda(H(x,y,z,0),t)$

λ_t é um germe de difeomorfismo local.

Então:

$H(x,y,z,0) = \lambda_t^{-1}(H(\Phi(x,y,z,t) = \lambda_t^{-1}(H_t(\Phi_t(x,y,z)))$

Logo:

$\tau_s(x,y,z) = \lambda_t^{-1}(\tau_{s+t}(\Phi_t(x,y,z)))$

Portanto:

(Φ,λ) é um $r\ell$-morfismo de τ_s para τ_{s+t}

De (a) segue que (Φ,λ) é um $r\ell$-isomorfismo.

Teorema 3.18:

Suponhamos f $r\ell$-k-determinado e $k \in Z_+$.

Então um desdobramento F de f é $r\ell$-universal see F é $r\ell$-k--transversal.

Prova:

Se $F \in \varepsilon(2+r,2)$ é $r\ell$-universal então pelo corolário 3.16, F é $r\ell$-k-transversal.

Reciprocamente, suponhamos que $F \in \varepsilon(2+r,2)$ é $r\ell$-k-transversal e seja $G \in \varepsilon(2+s,2)$ qualquer desdobramento de f.

Devemos mostrar que existe um $r\ell$-morfismo de G para F.

Para isso, consideremos o desdobramento definido em 3.8.

$$G \oplus F \in \varepsilon(2+r+s,2).$$

Pelo lema 3.10(a), G pode ser $r\ell$-induzido de $G \oplus F$; pois $G \oplus F$ é um desdobramento de G de dimensão r.

$G \oplus F$ é um desdobramento $r\ell$-k-transversal de f, pois por hipótese, F é um desdobramento $r\ell$-k-transversal de f.

Usando o argumento acima, se $H \in \varepsilon(2+s+r,2)$ é um desdobramento constante de F, de dimensão s, então H é $r\ell$-k-transversal.

Assim usando o lema 3.17, $G \oplus F$ e H são $r\ell$-isomorfos.

Além disso, H é $r\ell$-induzida de F, pelo lema 3.10(b) e, portanto, existe um $r\ell$-morfismo de H para F.

Temos, portanto, $r\ell$-morfismos de G para $G \oplus F$ para H para F.

Como a composta de $r\ell$-morfismos é um $r\ell$-morfismos (obs. 3.4) segue que existe um $r\ell$-morfismo de G para F. Portanto, F é um desdobramento $r\ell$-universal de f.

Teorema 3.19:

Seja $F \in \varepsilon(2+r,2)$ um desdobramento de f. Se para todo k, F é $r\ell$-k-transversal, então F é $r\ell$-universal e f é finitamente determinado.

Prova:

Basta mostrar que f é finitamente determinado e o resultado segue do Teorema 3.18.

Do lema 3.14, se F é $r\ell$-k-transversal, então

$$\varepsilon(2)\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^*\begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} + V_F = \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix}$$

Então

$$\sigma_{k+1}(f) = \dim_R \frac{\varepsilon(2) \oplus \varepsilon(2)}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^*\begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix}} \leq$$

$$\leq \dim_R V_F \leq r+2.$$

Segue, do teorema 2.12 que f é finitamente determinado.

Teorema 3.20

f tem um desdobramento $r\ell$-universal see f é finitamente determinado.

Prova:

Se f tem um desdobramento $r\ell$-universal, então pelo Corolário 3.16, esse desdobramento é $r\ell$-k-transversal para todo k.

Então pelo teorema 3.19, f é finitamente determinado.

Reciprocamente, se f é finitamente determinado, então f tem um desdobramento $r\ell$-universal see, esse desdobramento é $r\ell$-k-transversal, pelo teorema 3.18. Mas, pelo corolário 3.15, podemos sempre encontrar um desdobramento de f que é $r\ell$-k-transversal.

Teorema 3.21:

Quaisquer dois desdobramentos $r\ell$-universais de f, de mesma dimensão são $r\ell$-isomorfos.

Prova:

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+r,2)$ dois desdobramentos $r\ell$-universais de f, de mesma dimensão. Então, pelo Teorema 3.20, f é finitamente determinado. Pelo corolário 3.16, F e G são $r\ell$-k-transversais, para todo k.

Então, pelo lema 3.17, segue que F e G são $r\ell$-isomorfos.

Corolário 3.22:

Sejam $F \in \varepsilon(2+r,2)$ e $G \in \varepsilon(2+s,2)$ desdobramentos $r\ell$-universais de f e suponhamos $s \geq r$. Então G é $r\ell$-isomorfo a um desdobramento constante de F.

Prova:

O desdobramento constante de F é $r\ell$-universal.

Se considerarmos a dimensão do desdobramento constante igual a $s-r$, então o resultado segue do teorema anterior.

Teorema 3.23:

Seja $F \in \varepsilon(2+r,2)$ desdobramento de f.

Então F é $r\ell$-universal see

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + V_F$$

Prova:

Se vale (a) então pelo lema 3.14, F é $r\ell$-k-transversal para todo k. Pelo teorema 3.19 segue que F é $r\ell$-universal.

Reciprocamente, se F é $r\ell$-universal, então f é finitamente determinado, pelo Teorema 3.20.

Assim para algum k, temos

$$\begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix}$$

Mas

$\begin{pmatrix} m(2)^{k+1} \\ m(2)^{k+1} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} m(2)^k \\ m(2)^k \end{pmatrix}$ e pelo corolário 3.16, f é $r\ell$-k-

-transversal para esse k.

Logo:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(2) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle + f^* \begin{pmatrix} m(2) \\ m(2) \end{pmatrix} + V_F$$

BIBLIOGRAFIA

1. F.S.PORTO Jr., Paulo - Sobre Aplicações Estáveis de Superfícies em Superfícies - Trabalho apresentado a EESC - USP, para obtenção do título de Mestre - 1971.

2. GOLUBITSKY, M. e GUILLEMIN, V. - Stable Mappings and their Singularities - Graduate Texts in Mathematics - 1973.

3. LOIBEL, G.F. - Singularidades de Aplicações Diferenciáveis - Curso ministrado no VI Colóquio Brasileiro de Matemática - 1967.

4. LOIBEL, G.F. - Estudo do Comportamento de Aplicações Diferenciáveis, ICM de São Carlos - USP, 1972.

5. MATHER, J.N. - Stability of C^{∞} Mappings - III - Finitely Determined Map. Germs. Publ. Math. IHES-35 - 1968.

6. RUAS, M.A. - Germes Finitamente Determinados - Trabalho apresentado ao ICM de São Carlos - USP, para obtenção do Título de Mestre - 1974.

7. RUZANTE, A. - Sobre Singularidades de Restrições de Aplicações Diferenciáveis. Tese apresentada ao ICM de São Carlos, USP - para obtenção de título de Doutor - 1972.

8. WASSERMANN, G. - Stability of Unfoldings - Lectures Notes - 1974.