UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NÃO LINEARES PERTURBADOS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NÃO LINEARES:

DEDALUS - Acervo - ICMSC
30300027410

HERMÍNIO CASSAGO JUNIOR

ORIENTADOR:
Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

T
C 342 c
T385

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS

1974

1256495

À Maria Rita e aos meus pais

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Antonio Fernandes Izé, que sugeriu este trabalho, pela orientação segura que me dispensou e pelo estímulo, sem o qual não me teria sido possível realizar tal trabalho.

Ao Professor Dr. Natalino Adelmo de Molfetta e ao Professor Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues pelo tempo dispendido em assistir várias exposições sobre o assunto aqui apresentado e durante as quais formularam valiosas críticas e sugestões.

Aos colegas do ICMSC, pelo apoio e incentivo dado aos nossos estudos.

À Sra. Célia Rondon Bezerra, que com dedicação, realizou ótimo trabalho de datilografia.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades:
CNPq : através de uma bolsa de pós-graduação em 1970, a qual possibilitou minha iniciação aos estudos de pós-graduação.
CAPES : através de auxílio para a publicação desta dissertação.
CAPES e CNPq : através de auxílios ao ICMSC para bibliografia e contratação de docentes de cursos de pós-graduação.

Abstract

Asymptotic behavior of nonlinear perturbed systems of functional differential equations and nonlinear systems of ordinary differential equations.

Hermínio Cassago Junior

Advise: Prof.Dr.Antonio Fernandes Izé

We shall investigate the asymptotic relationships between the solutions of the nonlinear differential equation.

(1) $\dot{x} = f(t,x)$

and the solutions of the nonlinear perturbed functional differential equation

(2) $\dot{y} = f(t,y) + g(t,y_t)$

The main idea is to extend results of a paper by Fennel and Proctor, quoted in the work, converning the ordinary differential equation

$\dot{y} = f(t,y) + g(t,y)$

Our technique is provided by a comparison principle and the fixed point theorem of Schauder-Tychonoff.

Indice

Introdução 1

Capítulo I : Resultados básicos

I.1 - Equações diferenciais com retardamento : generalidades 3

I.2 - Fórmula integral de Alekseev 9

Capítulo II : Equivalência assintótica

II.1 - Teoremas sobre equivalência assintótica 14

II.2 - Exemplo 48

Referências 51

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA
USP - S. Carlos

Introdução

Diversos autores tem estudado relações entre as soluções das equações diferenciais :

(1) $\dot{x} = f(t,x)$

(2) $\dot{y} = f(t,y) + g(t,y)$

onde f e g são funções contínuas de $[t_o,\infty) \times D$ em R^n e D é uma região do R^n.

Em [3], Fennell e Proctor estudam a equivalência assintótica entre estas duas equações no seguinte sentido :

(*) As equações (1) e (2) são assintóticamente equivalentes se e somente se para cada solução x(t) de (1) existe uma solução y(t) de (2) tal que

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t)\,[y(t) - x(t)] = 0$$

onde $\Delta(t)$ é uma matriz nxn contínua e não singular . Neste artigo Fennel e Proctor se restringem a um sub - conjunto aberto D_1 de D tal que $\overline{D}_1 \subset D$ tal que $\overline{D}_1 \subset D$ e a técnica utilizada envolve o princípio de comparação com uma equação diferencial ordinária escalar do tipo

$$\dot{r} = w(t,r) \ , \ r(t_o) = k$$

onde é exigida alguma condição de unicidade de soluções.

Este trabalho generaliza o de Marlin e Struble, [9], onde os autores estudam relações assintóticas entre as soluções de (1) e (2) considerando $\Delta(t) = I$ (matriz identidade) e D_1 um conjunto aberto, limitado e convexo.

Em nosso trabalho estudamos a equivalência assintótica entre os sistemas

$$(1) \quad \dot{x} = f(t,x)$$

$$(3) \quad \dot{y} = f(t,y) + g(t,y_t)$$

No Capítulo I damos alguns resultados básicos da teoria das equações diferenciais funcionais necessárias ao desenvolvimento do trabalho e está contido em Lakshimikantham e Leela, [8]. Neste capítulo demonstramos ainda a Fórmula Integral de Alekseev para a equação

$$\dot{y} = f(t,y) + g(t,y_t)$$

que é uma extensão natural da Fórmula Integral de Alekseev para equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo II, estendemos o teorema 1 de Viswanathan, [12], para equações diferenciais funcionais utilizando o teorema do ponto fixo de Schauder ao invés do método das aproximações sucessivas. A seguir estudamos a equivalência assintótica dos sistemas (1) e (3), no sentido (*), que são os teoremas II.3 e II.4, os quais contem os resultados centrais e generalizam os teoremas 1 e 2 de [3].

Capítulo I

Resultados Básicos

I.1 - Equações diferenciais com retardamento : generalidades

Daremos aqui alguns dos resultados básicos da teoria de equações diferenciais com retardamento no tempo que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

Seja $C^n = C([-\tau,0], R^n)$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[-\tau,0]$, com valores no R^n, munido da topologia da convergência uniforme.

Para cada elemento $\psi \in C^n$ definimos a norma de ψ por :

$$\|\psi\|_o = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \|\psi(\theta)\|$$

Se $t_o \in R$, $a \in R$, com $0<a<\infty$ e

$x \in C([t_o-\tau,t_o+a),R^n)$ então, para qualquer $t\in[t_o,t_o+a)$, seja $x_t \in C^n$ definido por :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \ , \ -\tau\leq\theta\leq 0$$

Se $\dot{} = \frac{d}{dt}$ e $f: J \times C^n \to R^n$ é uma dada função, dizemos que a relação

$$(I.1.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

é uma equação diferencial funcional do tipo retardado ou simplesmente equação diferencial funcional.

No caso $\tau = 0$, (I.1.1) representa uma equação diferencial ordinária.

Uma função x é dita solução de (I.1.1) se existem $t_o \in R$, $a>0$, tais que $x \in C([t_o-\tau, t_o+a), R^n)$ e $x(t)$ satisfaz a equação (I.1.1) para todo $t \in (t_o, t_o+a)$. Neste caso dizemos que x é solução de (I.1.1) em $[t_o-\tau, t_o+a)$.

Dados $t_o \in R$ e $\psi_o \in C^n$, dizemos que a função $x = x(t_o, \psi_o)$ é uma solução de (I.1.1) com função inicial ψ_o no instante $t=t_o$, ou simplesmente solução de (I.1.1) passando por (t_o, ψ_o) se existir $a>0$ tal que $x(t_o, \psi_o)$ é solução (I.1.1) em $[t_o- \ , t_o+a)$ e $x_{t_o}(t_o, \psi_o) = \psi_o$

<u>Lema I.1.1</u> : Se $x \in C([t_o-\tau, t_o+a], R^n)$, então x_t é contínua em t para todo $t \in [t_o, t_o+a]$

<u>Prova</u> :

Como x é contínua sobre $[t_o-\tau, t_o+a]$ ela é uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $|t-\sigma|<\delta \Rightarrow \|x(t)-x(\sigma)\|<\varepsilon$. Consequentemente para $t,\sigma \in [t_o, t_o+a]$ com $|t-\sigma|<\delta$ temos que

$$\|x(t+\theta) - x(\sigma+\theta)\|<\varepsilon \qquad \text{para todo} \quad -\tau\le\theta\le 0$$

Logo x_t é contínua para $t \in [t_o, t_o+a]$

<u>Lema I.1.2</u> : Seja $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções pertencentes a $C([t_o-\tau, t_o+a], R^n)$ que converge unifor

memente para uma função $x \in C([t_o-\tau,t_o+a],R^n)$. Então a sequência $\{x_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para x_t em $C([-\tau,0\ ,R^n)$ uniformemente em $t\in[t_o,t_o+a]$

<u>Prova</u>:

Como $x^n \xrightarrow{unif} x$, dado $\varepsilon>0$ e arbitrário, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $n\geq N$ temos

$$\|x^n(t) - x(t)\|<\varepsilon \quad \text{para} \quad t\in[t_o-\tau,t_o+a].$$

Logo, temos que para cada $t\in[t_o,t_o+a]$ se verifica

$$\|x^n(t+\theta)-x(t+\theta)\|< \varepsilon \quad , \quad -\tau\leq\theta\leq 0 \ , \ n\geq N$$

o que implica

$$\|x_t^n-x_t\|_o = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \| x_t^n(\theta)-x_t(\theta)\| =$$

$$= \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \|x^n(t+\theta) - x(t+\theta)\| < \varepsilon$$

para $n\geq N$, o que prova o lema.

<u>Lema I.1.3</u> : Se $t_o\in R$ e $\psi_o\in C^n$ são dados e $f:RxC^n \to R^n$ é contínua, então encontrar uma solução de (I.1.1) passando por (t_o,ψ_o) é equivalente a resolver a equação integral

$$x(t) = \psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} f(s,x_s)ds, \text{ com } t\geq t_o \quad e$$

$x_{t_o} = \psi_o$.

Prova :

É imediata.

Teorema I.1.1 : (Teorema do ponto fixo de Schauder)

Se A é um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach B e $f:A \to A$ é contínuo, então f tem um ponto fixo

Teorema I.1.2 : (Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff)

Seja C(J) o conjunto de todas as funções que são contínuas num certo intervalo J e seja $F \subset C(J)$ o subconjunto formado pelas funções x(t) que satisfazem $|x(t)| \leq u(t)$, para todo $t \in J$, onde u(t) é uma função contínua positiva fixa. Seja $T:F \to F$ satisfazendo as condições :

(i) T é contínuo no sentido de que se $x_n \in F$, $n = 1,2,\ldots$, $x_n \xrightarrow{unif} x$ em todo sub-intervalo compacto de J, então $Tx_n \xrightarrow{unif} Tx$ em todo sub-intervalo compacto de J.

(ii) As funções do conjunto imagem TF são equicontínuas e limitadas em todos os pontos de J.

Então a aplicação $T : F \to F$ tem pelo menos um ponto fixo em F.

Teorema I.1.3 : (Teorema de Ascoli)

Se I é um intervalo compacto e $S \subset C(I,R^n)$, então S é relativamente compacto em $C(I,R^n)$ se e somente se S é equicontínuo em cada ponto $t_o \in I$ e S é uniformemente limitado em I

O teorema seguinte nos garante a existência local de (I.1.1)

Seja $\rho > 0$ uma dada constante e

$$C_\rho = \{\psi \in C^n \text{ tal que } \|\psi\|_o < \rho\}$$

Teorema I.1.4 : Seja $f \in C(J \times C_\rho, R^n)$. Então dada uma função inicial $\psi_o \in C_\rho$, em $t = t_o$, existe uma constante $\alpha > o$ tal que existe uma solução $x(t_o, \psi_o)$ de (I.1.1) definida em $[t_o - \tau, t_o + \alpha)$

Prova :

É dada com detalhes em [8], teorema 6.1.1, , pag. 5 .

Consideremos a seguir a existência de soluções de (I.1.1) para todo $t \geq t_o$

<u>Teorema I.1.5</u> : Seja $f \in C(J x C^n, R^n)$ satisfazendo (1.1.1) $\|f(t,\psi)\| \leq g(t,\|\psi\|_o)$, para todo $(t,\psi) \in J x C^n$, onde $g \in C(J x R_+, R_+)$ e é não decrescente em ψ para cada $t \in J$. Suponhamos que as soluções $u(t) = u(t,t_o,u_o)$ de

(1.1.2) $\dot{u} = g(t,u)$, $u(t_o) = u_o \geq 0$

existam para todo $t \geq t_o$. Então, o maior intervalo de existência de qualquer solução $x(t_o,\psi_o)$ de (I.1.1) é $[t_o,\infty)$

<u>Prova</u> :

É dada com detalhes em [8], teorema 6.1.8, pag.8

<u>Corolário I.1.1</u> :- A conclusão do teorema I.1.5 é ainda verificada quando supusermos a condição (1.1.1) válida somente para $t \in J$ e $\psi \in C^n$ satisfazendo

$$\|\psi\|_o \leq \|\psi(0)\|$$

I.2 - Fórmula integral de Alekseev

A fórmula integral de Alekseev é uma extensão da fórmula da variação das constantes para sistemas não lineares.

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias

(I.2.1) $\dot{x} = f(t,x)$

onde $f \in C(J \times D, R^n)$; D é uma região do R^n e $J = [t_o, \infty)$.

Se $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ for contínua em $J \times D$ e se a solução $x(t,t_o,x_o)$ de (I.2.1), a qual satisfaz

$$x(t_o, t_o, x_o) = x_o ,$$

estiver em D para todo $t \geq t_o$, então $x(t,t_o,x_o)$ é uma função diferenciável em relação a x_o. A matriz

$$\Phi(t,t_o,x_o) = \frac{\partial}{\partial x_o} x(t,t_o,x_o)$$

é uma matriz fundamental do sistema linear

$$\dot{z} = [\frac{\partial}{\partial x} f(t,x(t,t_o,x_o))]z$$

chamado sistema variacional correspondente à solução

$x(t,t_o,x_o)$, e $\Phi(t_o,t_o,x_o) = I$ (matriz identidade) Para uma prova deste fato ver [5], teorema 1.4,pag. 11.

Temos, também, que

$$\Psi(t,t_o,x_o) = \frac{\partial}{\partial t_o} x(t,t_o,x_o)$$

é solução do sistema variacional correspondente à solução $x(t,t_o,x_o)$, satisfazendo à condição

$$\Psi(t_o,t_o,x_o) = -f(t_o,x_o)$$

De fato, temos que $x(t_o,t_o,x_o) = x_o$, e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t_o,t_o,x_o) = 0$$

Por outro lado, $x(t_o,t_o,x_o) = x(t,\tau,x_o)$ no ponto $t = t_o$, $\tau = t_o$. Portanto, temos

$$\frac{d}{dt_o} x(t_o,t_o,x_o) = \left[\frac{\partial}{\partial t} x(t,\tau,x_o)\right]_{\substack{t=t_o \\ \tau=t_o}} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial \tau} x(t,\tau,x_o)\right]_{\substack{t=t_o \\ \tau=t_o}}$$

Logo, concluimos que

$$0 = [f(t,x(t,\tau,x_o))]_{\substack{t=t_o \\ \tau=t_o}} + [\Psi(t,\tau,x_o)]_{\substack{t=t_o \\ \tau=t_o}} =$$

$$f(t_o,x_o) + \Psi(t_o,t_o x_o)$$

Então temos

$$\Psi(t_o,t_o,x_o) = -f(t_o,x_o)$$

Como $\Phi(t,t_o,x_o)$ é matriz fundamental do sistema variacional satisfazendo $\Phi(t_o,t_o,x_o) = I$, temos que

$$\Psi(t,t_o,x_o) = -\Phi(t,t_o,x_o)f(t,x_o),$$

para todo $t \geq t_o$, $x_o \in D$

<u>Teorema I.2.1</u> : (Fórmula integral de Alekseev)

Consideremos os sistemas de equações diferenciais.

(I.2.1) $\dot{x} = f(t,x)$

(I.2.2) $\dot{y} = f(t,y)+g(t,y_t)$

onde $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ é contínua em $J \times D$ e $g(t,y_t)$ é contínua em $J \times C^n$. Seja $y(t,t_o,\psi_o)$ solução de (I.2.2) com função inicial ψ_o em $t=t_o$. Suponhamos que $y(t,t_o,\psi_o)$ existe em $[t_o-\tau,\bar{t})$, $\psi_o \in C^n$, $t_o<\bar{t}\leq\infty$ e que $x(t,s,y(s,t_o,\psi_o))$ existe em $[t_o,\bar{t})$ para todo s, $t_o \leq s<\bar{t}\leq\infty$

Então para todo $t, t_o \leq t < \bar{t}$, temos

$$y(t,t_o,\psi_o) = x(t,t_o,\psi_o(0)) \quad +$$

$$\int_{t_o}^{t} \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))\ g(s,y_s(t_o,\psi_o))\ ds$$

<u>Prova</u>:

Pelo teorema da diferenciação composta, temos

$$\frac{d}{ds}\ x(t,s,y(s,t_o,\psi_o)) = \frac{\partial}{\partial s}\ x(t,s,y(s,t_o,\psi_o)) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\ x(t,s,y(s,t_o,\psi_o))\ .\ \dot{y}(s,t_o,\psi_o) =$$

$$= \Psi(t,s,y(s,t_o,\psi_o)) +$$

$$+ \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))\ .\ \dot{y}(s,t_o,\psi_o)) =$$

$$= \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))[\dot{y}(s,t_o,\psi_o)-f(s,y(s,t_o,\psi_o)] =$$

$$= \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))g(s,y_s(t_o\psi_o))$$

Logo

$$\frac{d}{ds}x(t,s,y(s,t_o,\psi_o)) = \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))g(s,y_s(t_o,\psi_o))$$

Integrando de t_o a t, resulta

$$\int_{t_o}^{t} [\frac{d}{ds} x(t,s,y(s,t_o,\psi_o))] \, ds =$$

$$\int_{t_o}^{t} \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o)) \; g(s,y_s(t_o,\psi_o))ds$$

portanto

$$x(t,t,y(t,t_o,\psi_o)) - x(t,t_o,y(t_o,t_o,\psi_o)) =$$

$$= \int_{t_o}^{t} \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))g(s,y_s(t_o,\psi_o)) \, ds$$

Como

$$x(t,t,y(t,t_o,\psi_o)) = y(t,t_o,\psi_o)$$

e $\quad y(t_o,t_o,\psi_o) = \psi_o(0)$

concluimos que

$$y(t,t_o,\psi_o) = x(t,t_o,\psi_o(0)) \; +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \Phi(t,s,y(s,t_o,\psi_o))g(s,y_s(t_o,\psi_o)) \, ds$$

o que prova o teorema.

Capítulo II

Equivalência Assintótica

II.1 - Teoremas sobre equivalência assintótica

Estudaremos aqui a equivalência assintótica entre um sistema de equações diferenciais não linear não perturbado e um sistema de equações diferenciais funcionais perturbado não linear.

Antes daremos algumas definições.

Denotaremos por $C=C([-\tau,0],R)$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[-\tau,0]$ com valores em R, e por $C_+ = C([-\tau,0],R_+)$

Seja $\rho>0$ uma dada constante e

$$\tilde{C}_\rho = \{\psi\in C_+ \quad \text{tal que} \quad |\psi|_o<\rho\}$$

Consideremos a equação diferencial funcional

(II.1) $\dot{x} = w(t,x_t)$

onde $w\in C(JxC,R)$

Para cada elemento $\psi\in C^n$ definimos a norma euclidiana de ψ como segue :

$$|\psi|(\theta)| = |\psi(\theta)| \quad , \quad -\tau\leq\theta\leq 0$$

temos que $|\psi|\in C_+$

<u>Definição II.1</u> : Seja $w \in C(J \times C, R)$. Dizemos que $w(t,\psi)$ é não decrescente em ψ para cada t fixo, $t \in J$, se dados $\psi_1, \psi_2 \in C$ com $|\psi_1| \leq |\psi_2|$ tivermos que $w(t,\psi_1) \leq$ $\leq w(t,\psi_2)$

<u>Definição II.2</u> : Seja $r(t,t_o,\psi_o)$ solução de (II.1) definida em $[t_o,t_o+a)$. Se qualquer outra solução $x(t,t_o,\psi_o)$ de (II.1) definida no mesmo intervalo $[t_o,t_o+a)$ satisfaz a desigualdade

$$x(t,t_o,\psi_o) \leq r(t,t_o,\psi_o), \text{ para } t \in [t_o,t_o+a)$$

então, $r(t,t_o,\psi_o)$ é dita <u>solução maximal</u> de (II.1)

<u>Observação II.1</u> : De maneira análoga, definimos solução minimal de (II.1)

<u>Teorema II.1</u> : Seja $w \in C(J \times C, R)$ e $w(t,\Psi)$ é não decrescente em Ψ para cada t fixo, $t \in J$,. Então dada uma função inicial $\psi_o \in C$ no instante $t = t_o$, existe $\alpha_1 > 0$ tal que (II.1) admite uma única solução maximal $r(t,t_o,\psi_o)$ definida em $[t_o,t_o+\alpha_1)$

<u>Prova</u> : é dada com detalhes em [8], teorema 6.9.3, pag. 36.

O teorema seguinte generaliza o teorema 1 de

Viswanathan, [13], onde ele trabalha com equação diferencial ordinária e usa a técnica das aproximações sucessivas.

<u>Teorema II.2</u> : Seja $m \in C([t_o-\tau, t_o+a], R_+)$ satisfazendo a desigualdade

$$m(t) \leq \psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} w(s, m_s)\, ds \quad , \quad t_o \leq t \leq t_o+a$$

onde $w \in C([t_o-\tau, t_o+a] \times C_+, R_+)$

Suponhamos que $w(t,\Psi)$ seja não decrescente em Ψ para cada t fixo, $t \in [t_o, t_o+a]$, e que $r(t, t_o, \psi_o)$, com $\psi_o \in \bar{C}_\rho$,seja a solução maximal de (II.1) existindo para $t \geq t_o$.

Então existe $\alpha > 0$ tal que $m_{t_o} \leq \psi_o$ implica que

$$m(t) \leq r(t, t_o, \psi_o) \text{ para } t_o \leq t \leq t_o+\alpha$$

<u>Prova</u> :

Definimos $y \in C([t_o-\tau, t_o+a], R)$ como segue

$$y(t) = \begin{cases} \psi_o(t-t_o) & , \quad t_o-\tau \leq t \leq t_o \\ \psi_o(0) & , \quad t_o \leq t \leq t_o+a \end{cases}$$

Então $w(t, y_t)$ é uma função contínua de t em $[t_o, t_o+a]$ e, portanto, $|w(t, y_t)| \leq M_1$

Mostraremos que existe uma constante $b \in (0, \rho - \psi_o(0))$ tal que

$$|w(t,\Psi) - w(t,y_t)|<1$$

para $t\in[t_o,t_o+a]$, $\Psi\in\tilde{C}_\rho$ e $|\Psi-y_t|_o\leq b$

Suponhamos que isto não seja verdade. Então para cada $k = 1,2,\ldots,$ existiria $t_k\in[t_o,t_o+a]$ e $\Psi_k\in\tilde{C}_\rho$ tal que $|\Psi_k-y_{t_k}|_o<\frac{1}{k}$ e ainda

$$|w(t_k,\Psi_k) - w(t_k,y_{t_k})|\geq 1$$

Escolhemos agora uma sub-sequência $\{t_{k_p}\}$ tal que exista o $\lim_{P\to\infty} t_{k_p}=t_1$, e temos uma contradição da continuidade da w em (t_1,y_{t_1})

Segue agora que $|w(t,\Psi)|\leq M=M_1+1$, para $t\in[t_o,t_o+a]$, $\Psi\in\tilde{C}_\rho$ e $|\Psi-y_t|_o\leq b$

Seja $\tilde{M} = \sup_{t_o\leq t\leq t_o+a} |w(t,m_t)|$

Seja $\overline{M} = \max\{M,\tilde{M}\}$

Escolhemos $\alpha=\min\{a,\frac{b}{\overline{M}}\}$

Seja B o espaço das funções contínuas de $[t_o-\tau,t_o+\alpha]$ em R_+, com a norma do sup. e, portanto, B é um espaço de Banach

Seja $S\subset B$ definido por

$$S=\left\{x\in B \text{ tal que: } \begin{array}{l} (i)\, x(t)=\psi_o(t-t_o)\ ,\ t_o-\tau\leq t\leq t_o \\ (ii)\, |x(t_1)-x(t_2)|\leq\overline{M}|t_1-t_2|, t_1,t_2\in[t_o,t_o+\alpha] \\ (iii)\, x(t)\geq m(t)\ ,\ t\in[t_o,t_o+\alpha] \end{array}\right\}$$

Vamos mostrar que $S\neq\emptyset$

$$\text{Seja } x(t) = \begin{cases} \psi_o(t-t_o) \ , \ \text{se } t_o-\tau\le t\le t_o \\ \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,m_s)ds \ , \ \text{se } t_o\le t\le t_o+\alpha \end{cases}$$

(i) $x(t) = \psi_o(t-t_o)$, $t_o-\tau\le t\le t_o$

(ii) $|x(t_1) - x(t_2)| = |\int_{t_o}^{t_1} w(s,m_s)ds - \int_{t_o}^{t_2} w(s,m_s)ds| =$

$=|\int_{t_1}^{t_2} w(s,m_s)ds| \le |\int_{t_1}^{t_2} |w(s,m_s)|ds| \le |\int_{t_1}^{t_2} \tilde{M}ds \ | \le$

$\le|\int_{t_1}^{t_2} \tilde{M}ds| = \overline{M}|t_1-t_2|, t_1,t_2\epsilon[t_o,t_o+\alpha]$

(iii) $x(t) = \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,m_s)ds \ge m(t)$, $t\epsilon[t_o,t_o+\alpha]$,

por hipótese

Logo $S \neq \emptyset$

Mostremos agora que S é convexo

Sejam f e g ϵS. Vamos mostrar o segmento que liga f a g tambem pertence a S, isto é, $h(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t) \ \epsilon \ S$, $0\le\lambda\le 1$ e $t\epsilon[t_o-\tau,t_o+\alpha]$

(i) $h(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t) = \lambda\psi_o(t-t_o) + (1-\lambda)\psi_o(t-t_o) =$

$= \psi_o(t-t_o)$, $t_o-\tau\le t\le t_o$

(ii) $|h(t_1)-h(t_2)| = |\lambda f(t_1)+(1-\lambda)g(t_1)-\lambda f(t_2)-(1-\lambda)g(t_2)|\le$

$\le\lambda|f(t_1)-f(t_2)|+(1-\lambda)|g(t_1)-g(t_2)|\le\overline{M}|t_1-t_2|, t_1,t_2 \ \epsilon$

$[t_o,t_o+\alpha]$

(iii) $h(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t) \ge \lambda m(t)+(1-\lambda)m(t) = m(t)$,

$t \in [t_o, t_o+\alpha]$

Logo, $h(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t) \in S$

e, portanto, S é convexo

S é fechado.

De fato, seja $x_n \in S$ e $x_n \xrightarrow{unif} x$ em B, logo $x_n \to x$ pontualmente. Para mostrar que $x \in S$, basta provar a condição (ii) pois as condições (i) e (iii) estão trivialmente satisfeitas.

Como $x_n \to x$ pontualmente, temos que $x_n(t_1) \to x(t_1)$ e $x_n(t_2) \to x(t_2)$, qualquer que sejam $t_1, t_2 \in [t_o, t_o+\alpha]$, temos que

$$|x_n(t_1)-x_n(t_2)| \leq \overline{M}\ |t_1-t_2|$$

passando ao limite temos :

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \overline{M}|t_1-t_2|$$

e, portanto, (ii) esta satisfeita. Logo S é fechado.

As funções de S são equicontínuas. Para isto , devemos mostrar que dado $\varepsilon>0$ e arbitrário e dado $t_1 \in [t_o-\tau, t_o+\alpha]$ existe $\delta=\delta(\varepsilon,t_1) > 0$ tal que $|t-t_1|<\delta \Longrightarrow |x(t) - x(t_1)|<\varepsilon$, qualquer que seja $x \in S$

Para $t_1 \in [t_o-\tau, t_o]$ temos $x(t)= \psi_o(t-t_o)$ e $x(t_1) = \psi_o(t_1-t_o)$ e, portanto, dado $\varepsilon>0$ e arbitrário existe $\delta=\delta(\varepsilon,t_1)$ tal que $|t-t_1|<\delta \Longrightarrow |x(t)-x(t_1)|<\varepsilon$, qualquer que seja $x \in S$, pois $|x(t)-x(t_1)| = |\psi_o(t-t_o) - \psi_o(t_1-t_o)|$ e ψ_o é contínua

Para $t_1 \in [t_o, t_o+\alpha]$ temos que :

$$|x(t) - x(t_1)| \leq \overline{M}|t-t_1|$$

logo, basta tomar $\delta=\varepsilon/\overline{M}$

As funções de S são uniformemente limitadas.

De fato para qualquer $x \in S$, temos :

se $t_o-\tau\leq t\leq t_o \Longrightarrow x(t) = \psi_o(t-t_o)\leq\rho$, pois $\psi_o\in C_\rho$

se $t_o\leq t\leq t_o+\alpha \Longrightarrow |x(t)|-|\psi_o(0)| \leq |x(t)-\psi_o(0)|=|x(t)-x(t_o)|\leq$

$\leq\overline{M}|t-t_o|\leq\overline{M}|t_o+\alpha-t_o| = \overline{M}\alpha \leq \overline{M}\frac{b}{\overline{M}} = b$

logo, $|x(t)| \leq b+\psi_o(0)<\rho-\psi_o(0) + \psi_o(0) = \rho$

Portanto, pelo teorema de Ascoli, S é compacto.

Definimos agora uma aplicação T em S como segue:

Para cada elemento $x \in S$, seja

(i) $(Tx)(t) = \psi_o(t-t_o)$, $t_o-\tau\leq t\leq t_o$

(ii) $(Tx)(t) = \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds$, $t_o\leq t\leq t_o+\alpha$

Para cada $x \in S$ e $t\in[t_o,t_o+\alpha]$, temos

$$|x(t) - x(t_o)| = |x(t) -\psi_o(0)| \leq \overline{M}|t-t_o| \leq \overline{M}\alpha\leq b$$

então $|x_t-y_t|_o\leq b$ e $x_t\in\tilde{C}_\rho$, pois

$$|x_t-y_t|_o = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} |x(t+\theta) - y(t+\theta)| =$$

quando $t+\theta\leq t_o$ temos que $x(t+\theta) = y(t+\theta)\Longrightarrow|x(t+\theta)-y(t+\theta)|=0$

portanto só interessa quando $t+\theta\geq t_o\Longrightarrow t_o-t\leq\theta\leq 0$

$$= \sup_{t_o-t\leq\theta\leq 0} |x(t+\theta)-y(t+\theta) = \sup_{t_o\leq t+\theta\leq t} |x(t+\theta)-y(t+\theta)| \leq$$

$$\leq \sup_{t_o\leq t+\theta\leq t_o+\alpha} |x(t+\theta)-y(t+\theta)| =$$

fazendo $t+\theta = S$

$$= \sup_{t_o \le s \le t_o+\alpha} |x(s)-y(s)| = \sup_{t_o \le s \le t_o+\alpha} |x(s)-\psi_o(0)| \le b$$

Vamos mostrar que $x_t \in \tilde{C}_\rho$; temos que $|x(t)| \le \rho$

logo, $|x_t|_o = \sup_{-\tau \le \theta \le 0} |x(t+\theta)|$

se $t_o-\tau \le t_o+\theta \le t_o$, temos $x(t+\theta) = \psi_o(t+\theta-t_o)$

e como $\psi_o \in \tilde{C}_\rho$, temos que $x_t \in \tilde{C}_\rho$

se $t_o \le t_o+\theta \le t_o+\alpha$, temos que $|x(t+\theta)| < \rho$ e portanto, $x_t \in \tilde{C}_\rho$

Portanto $w(s,x_s)$ é contínua em s e $|w(s,x_s)| \le M$ para $t_o \le s \le t_o+\alpha$, logo a aplicação T é bem definida em S.

Mostraremos que T é contínuo

Para $t_o-\tau \le t \le t_o$

$(Tx)(t) = \psi_o(t-t_o)$ e, portanto é contínuo

Para $t_o \le t \le t_o+\alpha$

$(Tx)(t) = \psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds$, também é contínuo.

De fato, consideremos a sequência $\{x^n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ de funções de S que converge uniformemente para $x(s) \in S$ em $[t_o-\tau, t_o+\alpha]$. Então a sequência $\{x_s^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para x_s em $\tilde{C}_\rho$ uniformemente em $s \in [t_o, t_o+\alpha]$ pois :

Seja o conjunto $V=\{x_s^n \in \tilde{C}_\rho, n \in \mathbb{N}, s \in [t_o, t_o+\alpha]\}$

Pela própria definição de V, temos que V é uniformemente limitado.

Mostremos que V é equicontínuo

$$|x_s^n(\theta_1) - x_s^n(\theta_2)| = |x^n(s+\theta_1) - x^n(s+\theta_2)| \le \overline{M}|\theta_1-\theta_2|$$

se $s+\theta_1$, $s+\theta_2 \in [t_o, t_o+\alpha]$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrá

rio existe $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ tal que $|\theta_1-\theta_2| < \delta_1 \Longrightarrow |x_s^n(\theta_1)-x_s^n(\theta_2)|<$ $< \varepsilon$, pois basta tomar $\delta_1 = \varepsilon/\overline{M}$.

se $s+\theta_1$, $s+\theta_2 \in [t_o-\tau,t_o]$, temos que

$$|x_s^n(\theta_1) - x_s^n(\theta_2)|=|\psi_o(s+\theta_1-t_o)-\psi_o(s+\theta_2-t_o)|$$

como ψ_o é contínua em $[-\tau,0]$ e, portanto uniformemente contínua, temos que dado $\varepsilon>0$ e arbitrário existe $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$ tal que $|\theta_1-\theta_2|<\delta_2 \Longrightarrow |x_s^n(\theta_1)-x_s^n(\theta_2)|<\varepsilon$

Escolhendo $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, temos que dado $\varepsilon>0$ e arbitrário existe $\delta=\delta(\varepsilon)$ tal que $|\theta_1-\theta_2|<\delta \Longrightarrow$ $|x_s^n(\theta_1) - x_s^n(\theta_2)|<\varepsilon$, qualquer que seja $x_s^n \in V$, logo V é equicontínuo.

Então, pelo teorema de Ascoli, temos que $\overline{V}$ é compacto.

Como $x_s^n \xrightarrow{unif} x_s$, temos que $x_s \in \overline{V}$, logo $w(s,\Psi)$ é uniformemente contínua em $[t_o,t_o+\alpha]x\overline{V}$ e, portanto, dados $\Psi_1,\Psi_2 \in \overline{V}$ e $s \in [t_o,t_o+\alpha]$ temos que dado $\varepsilon>0$ e arbitrário existe $\delta=\delta(\varepsilon)$ tal que $|\Psi_1-\Psi_2|_o<\delta \Longrightarrow |w(s,\Psi_1)-w(s,\Psi_2)|<\varepsilon$

Como $x_s^n \to x_s$ uniformemente em s, temos que dado $\delta>0$ existe $N=N(\delta)$ tal que $n \geq N \Longrightarrow |x_s^n-x_s|_o < \delta$

Então dado $\varepsilon>o$ e arbitrário existe $N=N(\varepsilon)$ tal que $n \geq N \Longrightarrow |w(s,x_s^n)-w(s,x_s)|<\dfrac{\varepsilon}{(t_o+\alpha)-t_o}$, isto é, $w(s,x_s^n)$ converge para $w(s,x_s)$ uniformemente em $s \in [t_o,t_o+\alpha]$

Logo

$$|(Tx^n)(t)-(Tx)(t)|=|\int_{t_o}^{t} w(s,x_s^n)ds-\int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds| \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} |w(s,x_s^n)-w(s,x_s)|\,ds < \int_{t_o}^{t} \frac{\varepsilon}{(t_o+\alpha)-t_o}\,ds = \frac{\varepsilon(t-t_o)}{(t_o+\alpha)-t_o} < \varepsilon$$

e, portanto, $(Tx^n)(t) \xrightarrow{unif} (Tx)(t)$

Logo T é contínuo

Mostremos que T leva S em S

Seja $x \in S$

(i) $(Tx)(t) = \psi_o(t-t_o)$, $t_o-\tau \leq t \leq t_o$

(ii) $|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)| = |\int_{t_o}^{t_1} w(s,x_s)ds - \int_{t_o}^{t_2} w(s,x_s)ds| =$

$= |\int_{t_1}^{t_2} w(s,x_s)ds| \leq |\int_{t_1}^{t_2} |w(s,x_s)|ds| \leq |\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}\,ds| =$

$= \overline{M}\,|t_1-t_2|$, $t_1,t_2 \in [t_o,t_o+\alpha]$

(iii) $(Tx)(t) = \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds \geq \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,m_s)ds \geq$

$\geq m(t)$, $t \in [t_o,t_o+\alpha]$

A desigualdade $\psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds \geq \psi_o(0) +$

$+\int_{t_o}^{t} w(s,m_s)ds$ é válida pois : $x(s) \geq m(s)$, $s \in [t_o,t_o+\alpha]$

$x_s(\theta) = x(s+\theta)$

Se $s+\theta \leq t_o \Longrightarrow x(s+\theta) = \psi_o(s+\theta-t_o) \geq m_{t_o}(s+\theta)$, pois, por hipótese $m_{t_o} \leq \psi_o$

Se $s+\theta \geq t_o \Longrightarrow x(s+\theta) \geq m(s+\theta) = m_s(\theta)$

Logo $Tx \in S$ e, portanto, T leva S em S

Como todas as hipóteses do teorema de Schauder estão satisfeitas, temos que existe pelo menos uma

função $x \in S$ tal que :

(i) $(Tx)(t) = x(t) = \psi_o(t-t_o)$, $t_o-\tau \le t \le t_o$

(ii) $(Tx)(t) = x(t) = \psi_o(0)+\int_{t_o}^{t} w(s,x_s)ds$, $t_o \le t \le t_o+\alpha$

Desde que $x \in S$, o integrando acima é uma função contínua em s. Então para $t_o \le t < t_o+\alpha$, podemos diferenciar obtendo

$$\dot{x}(t) = w(t,x_t) \ , \ t_o \le t < t_o+\alpha$$

Como $r(t,t_o,\psi_o)$ é solução maximal da equação acima, temos $x(t) \le r(t)$, $t_o \le t < t_o+\alpha$

Como $x(t) \ge m(t)$, $t_o \le t \le t_o+\alpha$, temos que

$$m(t) \le r(t,t_o,\psi_o) \ , \ t_o \le t < t_o+\alpha$$

o que prova o teorema.

<u>Corolário II.1</u> : Seja $m \in C([t_o-\tau,\infty),R_+)$ satisfazendo a desigualdade

$$m(t) \le \psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} w(s,m_s)ds, \quad t \ge t_o$$

onde $w \in C([t_o-\tau,\infty)xC_+,R_+)$

Suponhamos que $w(t,\Psi)$ seja não decrescente em Ψ para cada t fixo, $t \in [t_o-\tau,\infty)$ e que $r(t,t_o,\psi_o)$, com $\psi_o \in \tilde{C}_\rho$ seja a solução maximal de (II.1) existindo para $t \ge t_o$.

Então $m_{t_o} \le \psi_o$ implica que

$$m(t) \le r(t,t_o,\psi_o) \quad \text{para } t \ge t_o$$

<u>Prova</u> :

Suponhamos que o conjunto

$$Z = \{t \geq t_o \text{ tal que } m(t) > r(t,t_o,\psi_o)\}$$

é não vazio e seja $t_1 = \inf Z$, logo $m(t_1) = r(t_1,t_o,\psi_o)$ e, portanto $t_1 \notin Z$

Para $t \leq t_1$ temos que $m(t) \leq r(t,t_o,\psi_o)$

logo $m_{t_1} \leq r_{t_1}(t_o,\psi_o)$

Aplicando o teorema II.2 em t_1, temos que existe α_1 tal que para $t \in [t_1,t_1+\alpha_1]$, temos

$$m(t) \leq r(t,t_o,\psi_o)$$

o que é uma contradição, logo $Z = \emptyset$

e, portanto,

$$m(t) \leq r(t,t_o,\psi_o) \quad \text{para} \quad t \geq t_o$$

Consideremos os sistemas

(II.2) $\dot{x} = f(t,x)$

(II.3) $\dot{y} = f(t,y)+g(t,y_t)$

onde x,y,f e g são vetores nx1, $f \in C(JxD,R^n)$, $g \in C(JxC^n,R^n)$ e g leva conjuntos limitados em conjuntos limitados; onde $J = [t_o,\infty)$, D é uma região do R^n, tal que $f_x(t,x)$ existe e é contínua em J x D.

Denotaremos a solução de (II.2) passando por x_o, em $t=t_o$, por $x(t,t_o,x_o)$. Seja D_1 um aberto tal que $\overline{D}_1 \subset D$ e assumimos que para $x_o \in \overline{D}_1$ a função $x(t,t_o,x_o)$ existe para $t \geq t_o$. Denotaremos por $y(t,t_o,\psi_o)$ a solução de

(II.3) com função inicial ψ_o em $t=t_o$

Seja $E(D_1) = \{\psi \in C^n$ tal que $\psi(t) \in D_1$ para qualquer $t \in [-\tau,0]\}$

<u>Lema II.1</u> : Se D_1 é aberto em R^n então $E(D_1)$ é aberto em C^n.

<u>Prova</u>: é dada com detalhes em [11], lema 1 , pag. 19.

<u>Lema II.2</u> : Se $\overline{D} \subset D$ então $\overline{E(D_1)} \subset E(D)$

<u>Prova</u>:

Sejam $\psi \in \overline{E(D_1)}$ e $\psi_n \in E(D_1)$ tal que $\psi_n \to \psi$ em C^n. Logo $\psi_n(t) \in D_1$ para qualquer $t \in [-\tau,0]$. Como $D_1 \subset \overline{D}_1$, temos que $\psi_n(t) \in \overline{D}_1$, qualquer que seja $t \in [-\tau,0]$,portanto, $\psi(t) \in \overline{D}_1 \subset D$, qualquer que seja $t \in [-\tau,0]$, o que implica que $\psi(t) \in D$, qualquer que seja $t \in [-\tau,0]$. Logo $\psi \in E(D)$

<u>Lema II.3</u> : Sejam D um conjunto aberto de $R \times C^n$, $f: D \to R^n$ é contínua e leva conjuntos fechados e limitados em conjuntos limitados, e x é uma solução não continuável de $\dot{x} = f(t,x_t)$ em $[\sigma-r,b)$. Então para qualquer conjunto fechado e limitado $U \subset D$, existe um t_U tal que $(t\ x_t) \notin U$ para $t_U \leq t < b$

<u>Prova</u> : é dada com detalhes em [6], teor.4.2 , pag.17.

<u>Teorema II.3</u> : Seja $\Delta(t)$ uma matriz nxn, contínua e não singular, definida em $[t_o-\tau,\infty)$ e $D_2 \subset D_1$ tal que:

a) $\|\Delta(t)\gamma(t)\| \leq \rho(t)$ implica que $\gamma(t)$ está em D_1, $t \geq t_o-\tau$, onde $\rho(t) = \rho(t,t_o,u_o)$ é solução maximal de $\dot{\rho}=w(t,\rho_t)$, com função inicial $\mu_o \in \tilde{C}_\rho$ no instante $t=t_o$ existindo em $[t_o,\infty)$, tal que $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho_\infty$

b) $\|\Delta(t)\Phi(t,s,\gamma(s))g(s,\gamma_s)\| \leq w(s,\|\Delta_s\gamma_s\|)$ para $t,s \in [t_o,\infty)$, $\gamma(t) \in D_1$, onde w é definida como no corolário II.1.

c) $\|\Delta(t)x(t,t_o,\beta)\| \leq \|\psi_o(0)\|$ para $t \geq t_o$, $\beta \in D_2$

Então para ψ_o, com $\|\psi_o\|_o < \rho$, onde $\rho > \rho_\infty$ e $\|\psi_o(0)\| \leq \mu_o(0)$, existe uma solução $y(t) = y(t,t_o,\psi_o)$ de (II.3) definida para $t \geq t_o$, e para cada tal solução existe uma solução $x^*(t)$ de (II.2) definida para $t \geq t_o$ satisfazendo

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t)[y(t) - x^*(t)] = 0$$

<u>Observação II.2</u> : $\|\Delta(t)\gamma(t)\| \leq \rho(t)$, $t \geq t_o-\tau$, acarreta que $\|\Delta_t\gamma_t\| \leq \rho_t$, onde $\|\Delta_t\gamma_t\|(\theta) = \|\Delta(t+\theta)\gamma(t+\theta)\|$ e ainda, $\|\Delta_{t_o}\gamma_{t_o}\| \leq \rho_{t_o} = \mu_o$

Prova do teorema II.3 :

Usando a fórmula integral de Alekseev podemos representar qualquer solução $y(t)$ de (II.3) por :

$$y(t) = x(t,t_o,\psi_o(0)) + \int_{t_o}^{t} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds, \text{ para } t \in [t_o,t_+)$$

Temos :

$$\Delta(t)y(t) = \Delta(t)x(t,t_o,\psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} \Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\, ds$$

logo

$$\|\Delta(t)y(t)\| \leq \|\Delta(t)x(t,t_o,\psi_o(0))\| + \int_{t_o}^{t} \|\Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\|ds \leq$$

$$\leq \psi_o(0) + \int_{t_o}^{t} w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds \leq \mu_o(0) + \int_{t_o}^{t} w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds$$

portanto, pelo corolário II.1, temos que

$$\|\Delta(t)y(t)\| \leq \rho(t) \quad \text{para } t \in [t_o-\tau,t_+)$$

logo pela hipótese (a) temos que $y(t) \in D_1$

Agora precisamos mostrar que $t_+ = \infty$, para isto mostraremos que $y(t)$ é limitada em $[t_o-\tau,t_+)$. Vamos su-

por que não, então existe $t_n \to t_+$ tal que $\|y(t_n)\| \to \infty$,quando $n \to \infty$, logo existe uma constante $L>0$ e existe n_o tal que $\|y(t_n)\| \geq L>0$, para $n \geq n_o$

Vamos mostrar agora que existe $K>o$ tal que

$$K\|y(t_n)\| \leq \|\Delta(t_n)y(t_n)\|$$

que é equivalente a mostrar que existe $K>o$ tal que

$$K \leq \|\Delta(t_n)x(t_n)\| \text{ , onde } x(t_n) = \frac{y(t_n)}{\|y(t_n)\|}$$

Suponhamos que não exista $K>0$ satisfazendo a afirmação a cima, então existe uma subsequência $\{t_{n_j}\}$ tal que

$$\|\Delta(t_{n_j})x(t_{n_j})\| \to 0$$

Consideremos por comodidade $n_j = n$. Existe uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $x(t_{n_k}) \to x_o$, portanto

$$\|\Delta(t_{n_k})x(t_{n_k})\| \to \|\Delta(t_+)x_o\| = 0$$

como $\Delta(t)$ é não singular, temos que $x_o = 0$, o que é absurdo pois x_o pertence à circunferência de raio 1. Portanto $y(t)$ é limitada em $[t_o-\tau, t_+)$, então existe $R>0$ tal que $\|y(t)\| \leq R$, para $t \in [t_o-\tau, t_+)$ o que implica que $\|y_t\| \leq R$, para $t \in [t_o, t_+)$

Se $t_+ < \infty$ tomamos $t_o < b < t_+$ e o fechado

$$[t_o, b] \times (\overline{B}_R \cap \overline{E(D_1)}) \subset [t_o, t_+) \times E(D)$$

Logo, pelo lema II.3, temos que $t_+ = \infty$

Como $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho_\infty$ e $\rho(t)$ é não decrescente pois sua derivada é positiva, temos que para $\varepsilon>0$ existe um T tal que quando $T \le t_1 \le t_2$, temos $0<\rho(t_2)-\rho(t_1)<\varepsilon$

Consequentemente

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\|ds \le \int_{t_1}^{t_2} w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds \le$$

$$\le \int_{t_1}^{t_2} w(s,\rho_s)ds = \rho(t_2)-\rho(t_1)<\varepsilon$$

portanto

$\int_{t_0}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$ existe e converge uniformemente.

Agora

$$\Delta(t)y(t) = \Delta(t)[x(t,t_0,\psi_0(0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds]-$$

$$- \Delta(t) \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))\ g(s,y_s)ds$$

Então

$$\Delta(t)[y(t) - x(t,t_0,\psi_0(0)) - \int_{t_0}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds] =$$

$$= -\Delta(t) \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\ ds$$

portanto

$$\|\Delta(t)[y(t)-x(t,t_o,\psi_o(0))-\int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds]\| \leq$$

$$\leq \int_t^{\infty}\|\Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\|\,ds \leq \int_t^{\infty} w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds \leq$$

$$\leq \int_t^{\infty} w(s,\rho_s)ds = \rho_\infty - \rho(t) \to 0 \quad \text{quando } t\to\infty$$

Resta mostrar que

$$x^*(t) = x(t,t_o,\psi_o(0)) + \int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

é solução de (II.2)

Temos :

$$(2.1)\quad x(t,T,y(T)) + \int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds - x^*(t) =$$

$$= \int_{t_o}^{T}\left[\frac{d}{ds}x(t,s,y(s))\right]ds$$

$$(2.2)\quad \int_{t_o}^{T}\left[\frac{d}{ds}x(t,s,y(s))\right]ds = \int_{t_o}^{T}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\,ds$$

(2.1) é válida, pois :

$$\int_{t_o}^{T}\left[\frac{d}{ds}x(t,s,y(s))\right]ds = x(t,T,y(T)) - x(t,t_o,\psi_o(0)) =$$

$$= x(t,T,y(T)) - x(t,t_o,\psi_o(0)) - \int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s)g(s,y_s)ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds = x(t,T,y(T)) - x^*(t) +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\,ds$$

(2.2) é válida, pois :

$$\int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} x(t,s,y(s))]ds = \int_{t_o}^{T} [\frac{\partial}{\partial s} x(t,s,y(s)) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} x(t,s,y(s)). \frac{dy}{ds}]ds =$$

$$= \int_{t_o}^{T} [-\Phi(t,s,y(s))f(s,y(s))+\Phi(t,s,y(s))\dot{y}(s)]ds =$$

$$= \int_{t_o}^{T} \Phi(t,s,y(s))[\dot{y}(s)-f(s,y(s))]ds =$$

$$= \int_{t_o}^{T} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\ ds$$

portanto de (2.1) e (2.2) temos que :

$$x^*(t) = x(t,T,y(T))+\int_{t_o}^{\infty} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds -$$

$$- \int_{t_o}^{T} \Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

logo quando $T\to\infty$ temos que $x(t,T,y(T))\to x^*(t)$ uniformemente para t pertencentes a intervalos compactos

Também

(2.3) $f(t,x^*(t))-f(t,x(t,t_o,\psi_o(0) =$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y(s)))]\ ds$$

(2.4) $\lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y(s)))]\ ds =$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} f_x(t,x,(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

uniformemente para t em intervalos compactos

(2.3) é válida, pois:

$$\int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y(s)))]ds = f(t,x(t,T,y(T))) -$$

$$- f(t,x(t,t_o,\psi_o(0)))$$

portanto

$$\lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y(s)))]ds = \lim_{T\to\infty}[f(t,x(t,T,y(T)))-$$

$$-f(t,x(t,t_o,\psi_o(0)))]=f(t,x^*(t))-f(t,x(t,t_o,\psi_o(0)))$$

(2.4) é válida, pois:

$$\int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y(s)))]ds =$$

$$=\int_{t_o}^{T}[f_x(t,x(t,s,y(s)))\frac{d}{ds} x(t,s,y(s))] ds =$$

$$= \int_{t_o}^{T} f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

portanto

$$\lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} [\frac{d}{ds}f(t,x(t,s,y(s)))]ds =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{t_o}^{T} f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

logo por (2.3) e (2.4), temos

$$\int_{t_o}^{\infty} f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\ ds =$$

$$= f(t,x^*(t)) - f(t,x(t,t_o,\psi_o(0)))$$

Portanto

$$\dot{x}^*(t) = \dot{x}(t,t_o,\psi_o(0))+\int_{t_o}^{\infty}[\frac{d}{dt}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)]ds =$$

$$= f(t,x(t,t_o,\psi_o(0))) +$$

$$+\int_{t_o}^{\infty} f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\ ds =$$

$$=f(t,x(t,t_o,\psi_o(0)))+f(t,x^*(t))-f(t,x(t,t_o,\psi_o(0))) =$$

$$= f(t,x^*(t))$$

Logo $x^*(t)=x(t,t_o,\psi_o(0))+\int_{t_o}^{\infty}\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$

é solução de (II.2)

O teorema acima generaliza o teorema 1 de [3] , onde as equações consideradas são :

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad e \qquad \dot{y} = f(t,y)+g(t,y)$$

O lema seguinte é necessário para a prova do teorema II.4

<u>Lema II.4</u> : Consideremos a equação

(2.5) $\dot{r} = w(t,r_t)$

onde $w \in C(J \times C_+, R_+)$ e $w(t,\Psi)$ é não decrescente em $\Psi \in C_+$ para cada t fixo, $t \in J$

Então as seguintes condições são equivalentes :

(A) dada qualquer função inicial $\psi_0 \in C_+$, existe $T_0 = T_0(\psi_0) > 0$ tal que a solução maximal $\rho(t,T_0,\psi_0)$ de (2.5) é limitada em $[T_0,\infty)$

(B) dado qualquer número real $\rho_\infty > 0$ existe solução $r(t)$ de (2.5) em algum intervalo $[t_1,\infty)$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \rho_\infty$$

(C) $\int^\infty w(s,M)ds < \infty$, para cada $M>0$ real

<u>Prova</u> : é dada com detalhes em [12], lema II.2.

O teorema seguinte é a recíproca do teorema II.3

<u>Teorema II.4</u> : Sejam satisfeitas as hipóteses do teorema II.3. Então para qualquer solução $x(t)$ de

(II.2) a qual existe para $t \geq t_o$ e tal que $x(t_o)$ está em D_2, existe um $t_1 \geq t_o$ e uma solução $y(t)$ de (II.3) para $t \geq t_1$ tal que :

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t)[y(t) - x(t)] = 0$$

<u>Prova</u> : Comecemos construindo uma sequência de soluções de (II.3) a qual é uniformemente convergente em sub-intervalos compactos.

Como $\lim_{t\to\infty} \rho(t,t_o,\psi_o) = \rho_\infty$ pelo lema II.4 temos que $\int^\infty w(s,M)ds<\infty$ para $M>0$ real

Se $0<\sigma<\rho_\infty-\psi_o(0)$, é possível escolher $t_1 \geq t_o$ suficientemente grande tal que

$$\int_{t_1}^\infty w(s,\sigma+\psi_o(0))ds<\sigma$$

Para cada inteiro $n \geq t_1$, seja F_n o conjunto das $v(t) = \Delta(t)y(t)$, onde $y(t)$ são contínuas, de $[t_1,n]$ em R^n satisfazendo $\|v(t)\| \leq \psi_o(0)+\sigma$ para $t_1 \leq t \leq n$

Primeiramente mostremos que (II.3) tem uma solução v_n em F_n.

Definimos um operador S em F_n por :

$$(Sv)(t) = \Delta(t)x(t)+\int_n^t \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds$$

para $t_1 \leq t \leq n$

Mostremos que S é contínuo.

Seja $\{r^m\}_{m=1}^{\infty}$ sequência de funções de F_n que converge uniformemente para $r \in F_n$ em $[t_1,n]$. Então a sequência $\{r_t^m\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente para $r_t \in C([-\tau,0],R)$ em $[t_1+\tau,n]$. Seja $\varepsilon>0$ e arbitrário e $T_1=T_1(\varepsilon)\geq t_1+\tau$ suficientemente grande tal que:

$$\int_{T_1}^{\infty} w(s,\sigma+\psi_o(0))\, ds<\frac{\varepsilon}{4}$$

Temos que :

$$\|(Sr^m)(t)-(Sr)(t)\|=\|\Delta(t)x(t) +$$

$$+ \int_n^t \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1} r_s^m)\, ds -$$

$$-\Delta(t)x(t)-\int_n^t\Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)d_s\| =$$

$$=\| \int_n^t \Delta(t)[\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1} r_s^m) -$$

$$- \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\, ds\| \leq$$

$$\leq \int_t^n \|\Delta(t)[\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$- \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1} r_s)\|ds \leq$$

$$\leq\int_t^{\infty}\| \Delta(t)[\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1} r_s^m) -$$

$$- \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|ds =$$

$$= \int_t^{T_1} \|\Delta(t)[\ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$- \ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|\ ds +$$

$$+ \int_{T_1}^{\infty} \|\Delta(t)\ [\ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$- \ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|\ ds$$

Temos que :

$$\int_{T_1}^{\infty} \|\ \Delta(t)\ [\ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$- \ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|\ ds \ \leq$$

$$\leq \int_{T_1}^{\infty} \|\Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m)\|\ ds +$$

$$+ \int_{T_1}^{\infty}\|\Delta(s)\ \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|ds \leq$$

$$\leq \int_{T_1}^{\infty} w(s,\|r_s^m\|)\ ds + \int_{T_1}^{\infty} w(s,\|r_s\|)ds \leq$$

$$\leq 2 \int_{T_1}^{\infty} w(s,\sigma+\psi_o(0))ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

pois r^m e $r \in F_n$, portanto $\|\ r^m(s)\| \leq \psi_o(0)+\sigma$ e $\|r(s)\| \leq$

$\leq \psi_o(0)+\sigma$ o que implica

$$\|r_s^m\| \leq \psi_o(0)+\sigma \quad \text{e} \quad \|r_s\| \leq \psi_o(0)+\sigma$$

e $w(s,\Psi)$ é não decrescente em Ψ para cada s fixo.

A integral

$$\int_t^{T_1} \|\Delta(t)\,[\,\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$- \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pois, como $r^m(t) \xrightarrow{unif} r(t)$ em $[t_1,n]$, $r_t^m \xrightarrow{unif} r_t$ em $[t_1+\tau,n]$ e como Φ e g são contínuas, temos que

$$\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) \xrightarrow{unif}$$

$$\xrightarrow{unif} \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}\, r_s) \text{ em}$$

$[t_1+\tau,n]$

Portanto dado $\varepsilon>0$ e arbitrário existe $N=N(\varepsilon,t_1,T_1)$ tal que para todo $m\geq N$ temos

$$\|\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$-\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\| < \frac{\varepsilon}{2M(T_1-t_1)}$$

onde $M = \sup_{t\in[t_1,T_1]} \|\Delta(t)\|$

portanto

$$\int_t^{T_1} \|\Delta(t)[\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}\ r_s^m) -$$

$$-\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|ds \leq$$

$$\leq \int_t^{T_1}\|\Delta(t)\|\ \|\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r^m(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s^m) -$$

$$-\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)r(s))g(s,\Delta_s^{-1}r_s)\|ds <$$

$$< \int_t^{T_1}\|\Delta(t)\|\frac{\varepsilon}{2M(T_1-t_1)}\ ds = \frac{\|\Delta(t)\|\varepsilon(T_1-t)}{2M(T_1-t_1)} \leq$$

$$\leq \frac{M\varepsilon(T_1-t)}{2M(T_1-t)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $m \geq N(\varepsilon,t_1,T_1)$ e $t \in [t_1,T_1]$

portanto

$$\|(Sr^m)(t) - (Sr)(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $t \in [t_1,T_1]$ e $m \geq N(\varepsilon,t_1T_1)$

logo $(Sr^m)(t) \xrightarrow{unif} (Sr)(t)$ em $[t_1,n]$, portanto, S é contínuo.

S leva F_n em F_n.

De fato, seja $v \in F_n$,

$$\|(Sv)(t)-\Delta(t)x(t)\| = \|\int_n^t \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds\| \leq$$

$$\leq \int_t^n \|\Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)\| ds \leq \int_t^n w(s,\|v_s\|)ds \leq$$

$$\leq \int_t^n w(s,\psi_o(0)+\sigma)ds \leq \sigma$$

portanto

$$\|(Sv)(t)\| \leq \|\Delta(t)x(t)\| + \sigma \leq \psi_o(0)+\sigma$$

logo $SF_n \subset F_n$

As funções de SF_n são uniformemente limitadas pois, como $SF_n \subset F_n$, temos que se $v \in SF_n \Rightarrow v \in F_n$ e, portanto

$$\|v\| \leq \psi_o(0)+\sigma$$

Vamos mostrar que as funções de SF_n são equicontínuas em cada ponto de $[t_1,n]$

Para cada $v \in F_n$, definimos a função

$$z(t) = \Delta^{-1}(t)(Sv)(t)$$

logo

$$z(t) = \Delta^{-1}(t)[\Delta(t)x(t) +$$

$$+ \int_n^t \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds] =$$

$$= x(t) + \int_n^t \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)\, ds$$

portanto

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t)+\Phi(t,t,\Delta^{-1}(t)v(t))g(t,\Delta_t^{-1}v_t) +$$

$$+\int_n^t f_x(t,x(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s)))\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds=$$

$$=f(t,x(t))+g(t,y_t)+\int_n^t f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

pois : $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$

$\Phi(t,t,\gamma) = I$

$\Phi(t,s,\gamma)$ é matriz fundamental de $\dot{u}=f_x(t,x(t,s,\gamma))u$

$\Delta^{-1}(s)v(s)=y(s)$

e $\Delta_s^{-1}v_s = y_s$

Como $f(t,x(t)),g(t,y_t)$ são contínuas e, portanto, são limitadas em $[t_1,n]$ e além disso $f_x(t,x(t,s,y(s)))$, $\Phi(t,s,y(s))$ e $g(s,y_s)$ são contínuas, temos que

$$\int_n^t f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

é contínua e portanto limitada em $[t_1,n]$.

Logo $f(t,x(t)),g(t,y_t)$ e

$$\int_n^t f_x(t,x(t,s,y(s)))\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

são uniformemente limitadas em $[t_1,n]$. Portanto $\dot{z}(t)$ é uniformemente limitada em $[t_1,n]$. Logo o conjunto de todas as $z(t)$ é equicontínuo em $[t_1,n]$

Para ver que as funções de TF_n são equicontínuas em todos os pontos de $[t_1,n]$ consideremos

$$\|(Sv)(t_2)-(Sv)(t_3)\| = \|\Delta(t_2)z(t_2)-\Delta(t_3)z(t_3)\| =$$

$$=\|\Delta(t_2)[z(t_2)-z(t_3)]+[\Delta(t_2)-\Delta(t_3)]z(t_3)\| \leq$$

$$\leq\|\Delta(t_2)[z(t_2)-z(t_3)]\|+\|[\Delta(t_2)-\Delta(t_3)]z(t_3)\|$$

onde t_2, $t_3 \in [t_1,n]$. O lado direito da desigualdade acima pode tornar-se tão pequeno quanto se queira em virtude da equicontinuidade da família $z(t)$ e da continuidade de $\Delta(t)$, e portanto a família SF_n é equicontínua em cada ponto de $[t_1,n]$.

Como todas as hipóteses do teorema de Schauder -Tychonoff estão satisfeitas, temos que a aplicação $S:F_n \to F_n$ possui pelo menos um ponto fixo em F_n, o qual denotaremos por v^n. A função y^n dada por :

$$y^n(t) = \Delta^{-1}(t)v^n(t)$$

é solução de (II.3) em $[t_1,n]$ pois :

$$y^n(t) = \Delta^{-1}(t)v^n(t) = \Delta^{-1}(t)\Delta(t)[x(t) +$$

$$+\int_n^t \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v^n(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s^n)\, ds] =$$

$$= x(t) + \int_n^t \Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v^n(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s^n)ds$$

logo

$$(2.6)\quad \dot{y}^n(t)=\dot{x}(t)+\Phi(t,t,\Delta^{-1}(t)v^n(t))g(t,\Delta_t^{-1}v_t^n) +$$

$$+\int_n^t f_x(t,x(t,s,\Delta^{-1}(s)v^n(s)))\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v^n(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s^n)ds=$$

$$=f(t,x(t)) + g(t,y_t^n) +$$

$$+ \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))g(s,y_s^n)\, ds$$

Temos :

$$(2.7)\quad f(t,x(t,t,y^n(t)))-f(t,x(t)) =$$

$$= \int_n^t [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y^n(s)))]\, ds$$

$$(2.8)\quad \int_n^t [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y^n(s)))]\, ds =$$

$$= \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))[\dot{y}^n(s)-f(s,y^n(s))]ds$$

(2.7) é válida pois :

$$\int_n^t [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y^n(s)))]ds = f(t,x(t,t,t^n(t))) -$$

$$- f(t,x(t,n,y^n(n))) = f(t,y^n(t))-f(t,x(t,n,y^n(n))),$$ pois

$x(t,t,\gamma) = \gamma$, portanto resta mostrar que $x(t)=x(t,n,y^n(n))$

Sabemos que $x(t_o,t_o,y^n(t_o))=x(t_o)$, isto é, é a solução no ponto t_o, logo para $t=n$, temos :

$$x(n,n,y^n(n)) = x(n)$$

logo, pela unicidade, temos que :

$$x(t,n,y^n(n)) = x(t)$$

e, portanto, $f(t,x(t,n,y^n(n)) = f(t,x(t))$

(2.8) é válida pois

$$\int_n^t [\frac{d}{ds} f(t,x(t,s,y^n(s)))]ds =$$

$$= \int_n^t [f_x(t,x(t,s,y^n(s))) \frac{d}{ds} x(t,s,y^n(s))]ds =$$

$$= \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))[\frac{\partial}{\partial s}x(t,s,y^n(s)) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y^n} x(t,s,y^n(s)) \frac{d}{ds} y^n(s)] ds =$$

$$= \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))[\dot{y}^n(s)-f(s,y^n(s))]ds$$

Logo por (2.6),(2.7) e (2.8), temos :

$$\dot{y}^n(t) = f(t,y^n(t))-$$

$$-\int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s)))[\dot{y}^n(s)-f(s,y^n(s))]ds+$$

$$+ g(t,y_t^n)+\int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))g(s,y_s^n)ds =$$

$$= f(t,y^n(t)) + g(t,y_t^n) -$$

$$- \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))[\dot{y}^n(s)-f(s,y^n(s)) -$$

$$- g(s,y_s^n)] ds$$

portanto

$$\dot{y}^n(t)-f(t,y^n(t)) - g(t,y_t^n) =$$

$$= - \int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))[\dot{y}^n(s)-f(s,y^n(s)) -$$

$$- g(s,y_s^n)]ds$$

logo

$$w(t)= -\int_n^t f_x(t,x(t,s,y^n(s)))\Phi(t,s,y^n(s))w(s)ds$$

onde $w(t) = \dot{y}^n(t) - f(t,y^n(t)) - g(t,y_t^n)$

Mas isto implica que $w\equiv 0$ pela desigualdade de Gronwall e, portanto $y^n(t)$ é solução de (II.3) em $[t_1,n]$

Seja N um inteiro maior que t_1 e consideremos a sequência v^n, $n=N,N+1,\ldots$, de pontos fixos obtidos acima. Temos que

$\|v^n(t)\|\leq\psi_o(0)+\sigma$, pois $v^n(t)\in F_n$ para $t_1\leq t\leq N$ e a sequência $\{v^n\}_{n=N}^{\infty}$ é equicontínua neste intervalo. Pelo teorema de Ascoli existe uma sub-sequência $\{v^{n_1}\}$ de $\{v^n\}$ convergindo uniformemente em $[t_1,N]$. Analogamente a sequência $\{v^{n_1}\}$ é definida em $[t_1,N+1]$ para $n_1\geq N+1$ e é equicontínua em $[t_1,N+1]$. Portanto existe uma subsequência $\{v^{n_2}\}$ de $\{v^{n_1}\}$, convergindo uniformemente neste intervalo. É claro que no intervalo $[t_1,N]$ as duas subsequências convergem para o mesmo limite. E assim, sucessivamente definimos uma função v em $[t_1,\infty)$ e uma série de sub-sequências

$\{v^{n_k}\}$ tal que $\{v^{n_k}\}$ converge uniformemente para v em $[t_1, N+k]$. A sequência $\{\bar{v}^n\}_{n=1}^{\infty}$, onde $\bar{v}^n = v^{n_n}$, então converge para v uniformemente sobre intervalos compactos de $[t_1, \infty)$

Usando a hipótese (b) do teorema II.3 é fácil ver que

$$\int_t^{\infty} \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds$$

existe e que

$$\lim_{n\to\infty} \int_t^n \Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)\bar{v}^n(s))g(s,\Delta_s^{-1}\bar{v}_s^n)ds =$$

$$= \int_t^{\infty}\Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)ds$$

As funções $\bar{y}^n(t) = \Delta^{-1}(t)\bar{v}^n(t)$ são soluções de (II.3), consequentemente $y(t)=\Delta^{-1}(t)v(t)$ também é uma solução de (II.3) e assim

$$\Delta(t)[y(t)-x(t)]=\Delta(t)[\Delta^{-1}(t)v(t)-x(t)]= v(t)-\Delta(t)x(t)=$$

$$= \Delta(t)x(t)+ \int_t^{\infty}\Delta(t)\Phi(t,s,\Delta^{-1}(s)v(s))g(s,\Delta_s^{-1}v_s)\, ds \; -$$

$$- \Delta(t)x(t) = \int_t^{\infty}\Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)ds$$

portanto

$\Delta(t)[y(t)-x(t)]$ tende a zero quando $t\to\infty$

pois

$$\int_t^\infty \|\Delta(t)\Phi(t,s,y(s))g(s,y_s)\|ds \le \int_t^\infty w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds$$

para $t,s\in[t_1,\infty)$, e como

$\int_t^\infty w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds$ é convergente

temos que

$\int_t^\infty w(s,\|\Delta_s y_s\|)ds \longrightarrow 0$, quando $t\to\infty$

o que prova o teorema

Como ilustração segue o seguinte exemplo :

II.2 - <u>Exemplo</u> :

Consideremos as equações diferenciais

(1) $\dot{x} = -e^{-t}x^2$, $x(t_o) = x_o \ge 0$

(2) $\dot{y} = -e^{-t}y^2 + g(t,y_t)$, $\psi_0(0) = x_o$

A solução de (1) é dada por :

$$x(t,t_o,x_o) = x_o[1-x_o(e^{-t}-e^{-t_o})]^{-1} \quad , \; t\ge t_o\ge 0$$

A matriz fundamental do sistema variacional , $\dot{z} = (-2e^{-t}x)z$, correspondente à solução $x(t,t_o,x_o)$ é dada por :

$$\Phi(t,t_o,x_o) = [1-x_o(e^{-t}-e^{-t_o})]^{-2}$$

Notamos que $\Phi(t,t_o,x_o)\leq 1$ para todo $t\geq t_o$ e $x_o\geq 0$

Usando a fórmula integral de Alekseev a solução $y(t)=y(t,t_o,\psi_o)$ de (2) é dada por :

$$y(t)=x(t,t_o,x_o)+\int_{t_o}^{t}[1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2}g(s,y_s)ds$$

Consideremos $\Delta(t)=1$ e a equação de comparação

(3) $\dot{\rho}(t) = w(t,\rho_t) = e^{-t}\rho(t-1)$

com função inicial μ_o tal que $\mu_o(t_o)\geq x_o$

Uma solução de (3) é dada por :

$$\rho(t) =\rho(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-s}\rho(s-1)ds$$

Como $\rho(t)\geq 0$, para $t\geq t_o\geq 0$ e $\rho(t_1)\leq\rho(t_2)$, $t_1\leq t_2$, temos que:

$$\rho(t)\leq\rho(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-s}\rho(s)ds$$

e pela desigualdade de Granwall, temos

$$\rho(t) \leq \rho(t_o)\, e^{\int_{t_o}^{t} e^{-s}\, ds}$$

logo $\rho(t)$ é limitado, pois $\int^{\infty} e^{-s}ds<\infty$

Como $\Delta(t)=1$ e $\Phi(t,t_o,x_o)\leq 1$ para $t\geq t_o\geq 0$ e $x_o\geq 0$ e se $|g(s,y_s)|\leq e^{-s}\rho(s-1)$, temos que as condições do teorema II.3 estão satisfeitas, pois :

(a) $|y(t,t_o,\psi_o)|\leq|x(t,t_o,\psi_o(0)) +$

$$+ \int_{t_o}^{t} |[1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2}||g(s,y_s)|ds \leq$$

$$\leq x_o+\int_{t_o}^{t} |g(s,y_s)|ds \leq x_o+\int_{t_o}^{t} e^{-s}\rho(s-1)ds$$

e pelo corolário II.1, temos

$$|y(t,t_o, \psi_o)| \leq \rho(t)$$

onde $\rho(t)$ é limitada, isto é, $\lim_{t\to\infty} \rho(t)=\rho_\infty<\infty$

(b) trivial

(c) $$|x(t,t_o,x_o)|= \frac{x_o}{|1-x_o(e^{-t}-e^{-t_o})|} \leq x_o = \psi_o(0)$$

Então

$$y(t,t_o,\psi_o)=x(t,t_o,x_o)+\int_{t_o}^{t}[1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2} g(s,y_s)ds =$$

$$=x(t,t_o,x_o)+\int_{t_o}^{\infty} [1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2}g(s,y_s)ds -$$

$$- \int_{t}^{\infty} [1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2}g(s,y_s) ds$$

Seja

$$x^*(t)=x(t,t_o,x_o)+\int_{t_o}^{\infty}[1-x_o(e^{-t}-e^{-s})]^{-2}g(s,y_s)ds$$

temos que $x^*(t)$ é solução de (1)

logo

$$|y(t,t_o,\psi_o)-x^*(t)|\leq\int_{t}^{\infty}|g(s,y_s)|ds\leq\int_{t}^{\infty}e^{-s}\rho(s-1)ds =$$

$$=\rho_\infty - \rho(t)\to 0 \text{ quando } t\to\infty$$

Referências

[1] Brauer,F. - Perturbations of nonlinear systems of differential equations.J.Math.Anal.Appl.14(1966) 198-206.

[2] Coppel,W.A. - Stability and Asymptotic behavior of differential equations. Boston,Heath,1965

[3] Fennell,R.E. and Proctor,T.G. - On asymptotic behavior of perturbed nonlinear systems.Proc.Amer.Math. Soc.31,nº2(1972), 499-504

[4] Ladas,G,Lakshmikanthan,V. and Leela,S. - On the perturbability of the asymptotic manifold of a perturbed system of differential equations. Proc. Amer.Math.Soc. 27(1); 65-71 (1971)

[5] Halany,A. - Differential equations:stability, oscillations, time lags. Academic Press, New York, 1966

[6] Hale,J. - Functional differential equations. New York, Springer-Verlag,1971.(Applied Mathematical Sciences, 3)

[7] Hallan,T.G. and Heidel,J.W. - The asymptotic manifolds of a perturbed linear system of differential equations. Trans.Amer.Math.Soc.149 (1970), 233-241

[8] Lakshimikanthan,V. and Leela,S. - Differential and integral inequalities, theory and aplications. New York, Academic Press, 1969, vols. I-II

[9] Marlin,J.A. and Struble,R.A. - Asymptotic equivalence of nonlinear systems, J.Differential Equations, 6 (1969),578-596

[10] Molfeta,N.A. - A fórmula integral de Alekseev e aplicações em problemas de estabilidade - Dissertação de Mestrado apresentada ao Dep. de Mat. do Instituto Tecnológico de Aeronáutica de São José dos Campos - 1968.

[11] Rodrigues,H.M. - Invariança para sistemas não autônomos de equações diferenciais com retardamento e aplicações - Dissertação de Mestrado apresentada ao Dep. de Mat. da Escola de Engenharia de São Carlos - 1970.

[12] Udo,T. - Desigualdades diferenciais funcionais e aplicações ao comportamento assintótico e perturbabilidade de variedades assintóticas de um sistema de equações diferenciais funcionais - Dissertação de mestrado apresentada ao ICMSC-USP - 1973.

[13] Viswanathan,B. - A generalisation of Bellman's Lemma- Proc.Amer.Math.Soc.14(1);15-18(1963)

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS - S. Carlos
Biblioteca