O TEOREMA DE NIELSEN EM
DIMENSÕES MAIORES QUE DOIS

José Eduardo Prado Pires de Campos

Orientador: Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aos meus pais e à
Maria do Carmo.

AGRADEÇO

ao meu orientador, Prof. Dr. Janey Antônio Daccach, pela segurança e sensibilidade com que tem me orientado;

aos professores e colegas do ICMSC-USP e do Departamento de Matemática da UFSCar pelo ambiente acolhedor e pela colaboração que deram à minha formação;

à Rosangela Casteletti pelo primoroso trabalho de datilografia;

à FAPESP, CNPq, CAPES e FINEP pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

The following theorem is known as Nielsen's Theorem on finite mapping classes: if M is a closed orientable surface and if $H : M \rightarrow M$ is a map whose n -th power is homotopic to the identity, then H is homotopic to a homeomorphism K with $K^n = \text{identity}$.

In this work we show that Nielsen's Theorem fails in dimension bigger than two. In other words for each integer $m \geq 3$ we construct a m -dimensional closed orientable manifold M together with a homeomorphism $H : M \rightarrow M$, such that the n -iterated of H is homotopic to the identity but H itself is not homotopic to a homeomorphism $K : M \rightarrow M$ satisfying $K^n = I_M$.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - PRELIMINARES	01
§1 - Fibrações e fibrados	01
§2 - Ações de grupos	03
§3 - Cohomologia de grupos	03
§4 - Extensões de grupos	05
§5 - Mais sobre extensões de grupos	12
§6 - Alguns fatos sobre o n -toro	14
 CAPÍTULO II - O TEOREMA DE NIELSEN NÃO SE GENERALIZA PARA DIMENSÃO TRÊS	 17
 CAPÍTULO III - O TEOREMA DE NIELSEN EM DIMENSÕES MAIORES QUE TRÊS E O PERÍODO DA APLICAÇÃO H	 32
§1 - O teorema de Nielsen em dimensões maiores que três.	33
§2 - Aplicações de período par	34
§3 - Aplicações de período ímpar	39
 BIBLIOGRAFIA	 52

INTRODUÇÃO

O teorema de Nielsen afirma o seguinte: "se M é uma superfície orientável fechada e $H : M \rightarrow M$ é uma aplicação contínua cuja n -ésima potência é homotópica à aplicação identidade de M , então H é homotópica a um homeomorfismo K cuja n -ésima potência é igual à identidade." O menor inteiro estritamente positivo l cuja l -ésima potência de H é homotópica à identidade é chamado o período de H .

Nosso objetivo, neste trabalho, é mostrar que o teorema de Nielsen não se generaliza para variedades de dimensões maiores que dois, no seguinte sentido: para cada inteiro $m > 2$, apresentaremos um exemplo de uma variedade fechada e orientável M , de dimensão m , e um homeomorfismo $H : M \rightarrow M$ com H homotópico à identidade de M , porém H não homotópico a nenhum homeomorfismo $K : M \rightarrow M$ com K^2 igual à identidade de M . Mostraremos também que para cada inteiro $l \geq 2$, existe uma variedade fechada e orientável M , de dimensão maior que dois, e um homeomorfismo $H : M \rightarrow M$, de período l , tal que H não é homotópico a nenhum homeomorfismo K com K^l igual à identidade de M .

A técnica utilizada consiste no seguinte: supondo que o "teorema de Nielsen" seja válido para uma determinada variedade M , de dimensão $n > 2$, e um dado homeomorfismo $H : M \rightarrow M$, de período l , obtemos uma ação do grupo $\mathbb{Z}_l$, dos inteiros módulo l , em M a qual, por sua vez, fornece uma extensão do grupo fundamental de M por $\mathbb{Z}_l$. Utilizando as teorias de extensão e cohomologia de grupos, mostramos então que a classe de conjugação da extensão obtida acima não é, na verdade, classe de conjugação de nenhuma extensão do grupo fundamental de M por $\mathbb{Z}_l$.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES§1 - FIBRAÇÕES E FIBRADOS

As demonstrações omitidas, neste parágrafo, podem ser encontradas em SWITZER [1975].

- *Definição*) Sejam E, B, X espaços topológicos, $p: E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e $i_0: X \rightarrow X \times I$, onde I é o intervalo $[0,1]$, a aplicação definida por $i_0(x) = (x, 0)$. Nessas condições, dizemos que p tem a propriedade do levantamento de homotopias (P.L.H.) com respeito ao espaço X se, para cada diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

de aplicações contínuas, existe uma aplicação contínua $F: X \times I \rightarrow E$ tal que o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & & \longrightarrow & & \\
 X & & & & E \\
 \downarrow i_0 & & \nearrow F & & \downarrow p \\
 & & G & & \\
 X \times I & \longrightarrow & & & B
 \end{array}$$

é comutativo. $p: E \rightarrow B$ é chamada uma fibração fraca se p tem a P.L.H. para todo disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $n \geq 0$. Se B tem ponto base b_0 , o espaço $F = p^{-1}(\{b_0\})$ é chamado a fibra de p .

Se $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ é uma fibração fraca com fibra $F = p^{-1}(\{b_0\})$, então $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, \{b_0\}, b_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ é uma bijeção para todo $n \geq 1$. Obtemos então a seqüência exata de homotopia da fibração fraca:

$$\begin{aligned}
 \dots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) &\xrightarrow{\partial'_*} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \\
 p_* \pi_n(B, b_0) &\rightarrow \dots \xrightarrow{\partial'_*} \pi_1(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \\
 p_* \pi_1(B, b_0) &,
 \end{aligned}$$

a qual pode ser completada com um zero no final se a fibra for conexa por caminhos.

- *Definição* Sejam E, B, F espaços topológicos e $p: E \rightarrow B$ uma aplicação contínua. A quádrupla (E, p, B, F) é chamada um fibrado se, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta U de b em B e um homeomorfismo $\phi: F \times U \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \phi(x, b') = b', \forall x \in F \text{ e } \forall b' \in U$.

Se (E, p, B, F) é um fibrado, então $p:E \rightarrow B$ é uma fibração fraca.

§2 - AÇÕES DE GRUPOS

- *Definição*) Uma ação de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo $\phi : G \rightarrow S(X)$, onde $S(X)$ é o grupo das permutações de X .
- *Definição*) Uma ação de um grupo G em um grupo H é um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$, onde $\text{Aut}(H)$ é o grupo dos automorfismos de H .
- *Definição*) Uma ação de um grupo G em um espaço topológico X é um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, onde $\text{Homeo}(X)$ é o grupo dos homeomorfismos de X .

Se ϕ é uma ação, de qualquer dos tipos acima, denotaremos $\phi(g)(x)$ por gx .

§3 - COHOMOLOGIA DE GRUPOS

- *Definição*) Sejam G um grupo e $\mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros. O anel grupo integral $\mathbb{Z}G$ é o anel cujo grupo aditivo é o grupo abeliano livre com base G e cuja multiplicação é definida por:

$$\left(\sum_{g_1} m_{g_1} g_1 \right) \left(\sum_{g_2} m_{g_2} g_2 \right) = \sum_{g_1, g_2} m_{g_1} m_{g_2} g_1 g_2,$$

$$\forall g_1, g_2 \in G, \forall m_{g_1}, m_{g_2} \in \mathbb{Z}.$$

Se G é um grupo que age em um grupo abeliano A , podemos fornecer à A uma estrutura de $\mathbb{Z}G$ - módulo, definindo:

$$\left(\sum_g m_g g \right) a = \sum_g m_g (ga),$$

$$\forall g \in G, \forall m_g \in \mathbb{Z}, \forall a \in A.$$

- Definição) Sejam $(G, \cdot)$ e $(A, +)$ grupos. Uma aplicação de n variáveis, $n \geq 1$, $f: G \times \dots \times G \rightarrow A$, é dita ser normalizada se $f(g_1, \dots, g_{i-1}, 1, g_{i+1}, \dots, g_n) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- Definição) Se $n \geq 1$, o grupo das n -cocadeias de um $\mathbb{Z}G$ - módulo A , $C^n(G, A)$, é o conjunto das aplicações normalizadas de n variáveis, $f: G \times \dots \times G \rightarrow A$, com adição ponto a ponto. $C^0(G, A) = A$. Um elemento de $C^n(G, A)$ é chamado uma n -cocadeia.

- Definição) Se $n \geq 1$, o operador cobordo

$\delta^n: C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ é definido por

$$\begin{aligned} \delta^n(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= (-1)^{n+1} \{g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n)\}. \end{aligned}$$

$\delta^0: C^0(G, A) \rightarrow C^1(G, A)$ é definido por

$$\delta^0(a)(g) = -ga + a.$$

Para todo $n \geq 0$, o operador cobordo é um homomorfismo de grupos e $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ (MAC LANE [1967]).

- Definição) O grupo dos n cociclos, $n \geq 0$, de um $\mathbb{Z}G$ - módulo A , $Z^n(G, A)$, é o núcleo de δ^n . Um elemento de $Z^n(G, A)$ é chamado um n -cociclo.

- Definição) O grupo dos n cobordos, $n \geq 1$, de um $\mathbb{Z}G$ - módulo A , $B^n(G, A)$, é a imagem de δ^{n-1} . $B^0(G, A) = 0$. Um elemento de $B^n(G, A)$ é chamado um n -cobordo.

- Definição) O n -ésimo ($n \geq 0$) grupo de cohomologia de um $\mathbb{Z}G$ - módulo A , $H^n(G, A)$, é o grupo quociente $\frac{Z^n(G, A)}{B^n(G, A)}$.

Se a estrutura de $\mathbb{Z}G$ - módulo em A for fornecida por uma ação θ do grupo G no grupo A , usaremos também as notações: $C_\theta^n(G, A)$, $Z_\theta^n(G, A)$, $B_\theta^n(G, A)$ e $H_\theta^n(G, A)$.

§4 - EXTENSÕES DE GRUPOS

- Definição) Sejam $(A, +)$ e $(G, \cdot)$ grupos. Uma extensão de A por G é uma seqüência exata curta de grupos e homomorfismos de grupos:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

Dada uma extensão de A por G , identificaremos A com o subgrupo normal $i(A)$ de E e G com o grupo quociente $\frac{E}{A}$, via o isomorfismo induzido por π .

O problema que se coloca é o de dados grupos A e G , obter todas as extensões de A por G . A resolução desse problema pode ser encontrada em MAC LANE [1967]. Nosso interesse reside em alguns fatos provenientes dessa resolução, os quais passaremos a expor.

Suponhamos, inicialmente, dada uma extensão:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

Nosso propósito consiste em exprimir o grupo E através de dados que só dependam dos grupos A e G .

O fato de A ser um subgrupo normal de E pode ser caracterizado pela existência do homomorfismo $\phi : E \rightarrow \text{Aut}(A)$, $\phi(x)(a) = x + a - x$. Como $\phi(A) \subset \text{In}(A)$, o grupo dos automorfismos internos de A , ϕ induz um homomorfismo

$$\psi : G \rightarrow \frac{\text{Aut}(A)}{\text{In}(A)} = \text{Out}(A)$$

que é chamado a classe de conjugação da extensão dada. Podemos assim reduzir o problema inicial ao seguinte: dados grupos A e G e um homomorfismo $\psi : G \rightarrow \text{Out}(A)$ obter, se existirem, todas as extensões de A por G que têm ψ como classe de conjugação. Variando ψ entre os homomorfismos de G em $\text{Out}(A)$ fica resolvido o problema inicial.

- Definição) Uma terna ordenada (G, A, ψ) , onde G e A são grupos e $\psi : G \rightarrow \text{Out}(A)$ é um homomorfismo, é chamada um núcleo abstrato.

O fato de G ser o conjunto das classes laterais de A em E motiva a seguinte

- *Definição*) Um levantamento de uma extensão

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

é uma aplicação $\mu: G \rightarrow E$ satisfazendo: $\pi \circ \mu = I_G$, a aplicação identidade do grupo G , e $\mu(1) = 0$.

Fixado um levantamento μ , a aplicação $\tilde{\mu}: A \times G \rightarrow E$, $\tilde{\mu}(a, g) = a + \mu(g)$ é uma bijeção.

- *Definição*) Uma extensão que possui algum levantamento que é um homomorfismo é dita ser cindida.

Como G é munido de uma operação tal que $\pi: E \rightarrow G$ é um homomorfismo, π aplicado a uma soma de representantes, $\mu(g_1) + \mu(g_2)$, coincide com π aplicado ao representante $\mu(g_1 g_2)$, do produto, assim $\mu(g_1) + \mu(g_2) - \mu(g_1 g_2) \in A$.

- *Definição*) Dada uma extensão $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$, uma aplicação $f_\mu: G \times G \rightarrow A$ definida por $f_\mu(g_1, g_2) = \mu(g_1) + \mu(g_2) - \mu(g_1 g_2)$, para algum levantamento μ , é chamada um conjunto fator da extensão.

Observemos que um conjunto fator é uma aplicação normalizada. Observemos também que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(a, g_1) + \tilde{\mu}(a', g_2) &= \\ &= a + \mu(g_1) + a' + \mu(g_2) - \mu(g_1 g_2) + \mu(g_1 g_2) = \\ &= a + \tilde{\mu} \circ \mu(g_1)(a') + f_\mu(g_1, g_2) + \mu(g_1 g_2) = \\ &= \tilde{\mu}(a + \tilde{\mu} \circ \mu(g_1)(a') + f_\mu(g_1, g_2), g_1 g_2). \end{aligned}$$

Denotemos $\tilde{\phi} \circ \mu$ por ϕ_μ . ϕ_μ não é, em geral, um homomorfismo. Valem, no entanto, as equações:

$$\phi_\mu(g_1)\phi_\mu(g_2)(a) = f_\mu(g_1, g_2) + \phi_\mu(g_1 g_2)(a) - f_\mu(g_1, g_2) \text{ e}$$

$$\phi_\mu(1) = I_A.$$

Notemos ainda que se $\tau : \text{Aut}(A) \rightarrow \text{Out}(A)$ é o homomorfismo quociente, então

$$\tau(\phi_\mu(g)) = \tau \circ \tilde{\phi} \circ \mu(g) = \psi \circ \pi \circ \mu(g) = \psi(g),$$

logo $\phi_\mu(g) \in \psi(g)$, $\forall g \in G$.

Como a operação em E é associativa, temos:
 $(\mu(g_1) + \mu(g_2)) + \mu(g_3) = \mu(g_1) + (\mu(g_2) + \mu(g_3))$. Desenvolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_\mu(g_1) f_\mu(g_2, g_3) + f_\mu(g_1, g_2 g_3) - f_\mu(g_1 g_2, g_3) - f_\mu(g_1, g_2) = \\ = 0. \end{aligned}$$

Demonstramos acima o seguinte

. Teorema 1) Dada uma extensão $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$, seja $\mu : G \rightarrow E$ um levantamento dessa extensão, então cada elemento de E se escreve, de maneira única, como $a + \mu(g)$ com $a \in A$ e $g \in G$. Além disso, vale a equação:

$$(a + \mu(g_1)) + (a' + \mu(g_2)) = a + \phi_\mu(g_1)(a') + f_\mu(g_1, g_2) + \mu(g_1 g_2),$$

onde as aplicações $\phi_\mu : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ e $f_\mu : G \times G \rightarrow A$,

acima definidas, satisfazem:

- (i) $\phi_\mu(1) = I_A$; (ii) f_μ é normalizada;
- (iii) $\phi_\mu(g_1)\phi_\mu(g_2)(a) = f_\mu(g_1, g_2) + \phi_\mu(g_1 g_2)(a) - f_\mu(g_1 g_2)$;
- (iv) $\phi_\mu(g_1) f_\mu(g_2, g_3) + f_\mu(g_1, g_2 g_3) - f_\mu(g_1 g_2, g_3) +$
 $- f_\mu(g_1, g_2) = 0$.

A classe de conjugação dessa extensão é dada pela classe de $\phi_\mu(g)$ em $\text{Out}(A)$.

- Teorema 2) Sejam A e G grupos, $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ e $f : G \times G \rightarrow A$ aplicações satisfazendo:

- (i) $\phi(1) = I_A$; (ii) f é normalizada;
- (iii) $\phi(g_1) \phi(g_2)(a) = f(g_1, g_2) + \phi(g_1 g_2)(a) - f(g_1, g_2)$;
- (iv) $\phi(g_1) f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1 g_2, g_3) +$
 $- f(g_1, g_2) = 0$.

Então a seqüência exata

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1,$$

onde E é o conjunto $A \times G$ munido da operação

$$(a, g_1) + (a', g_2) = (a + \phi(g_1)(a') + f(g_1, g_2), g_1 g_2),$$

$i(a) = (a, 1)$ e $\pi(a, g) = g$ é uma extensão de A por G cuja classe de conjugação é dada pela classe de $\phi(g)$ em $\text{Out}(A)$.

- Demonstração) As equações (iii) e (iv) garantem que a operação é associativa. As equações (i) e (ii) garantem que $(0, 1)$ é elemento neutro e as quatro equações garantem que $-(a, g) = (-f(g^{-1}, g) - \phi(g^{-1})(a), g^{-1})$.

Não é difícil verificar que

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

é uma seqüência exata de grupos e homomorfismos de grupos.

Para ver que a classe de conjugação é dada pela classe de $\phi(g)$ em $\text{Out}(A)$, ou seja, que $\tau \circ \tilde{\phi}(a, g) = \tau \circ \phi \circ \pi(a, g)$, onde $\tau : \text{Aut}(A) \rightarrow \text{Out}(A)$ é o homomorfismo quociente, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(a, g)(a', 1) &= \\ &= (a + \phi(g)(a') - \phi(g)f(g^{-1}, g) - \phi(g)\phi(g^{-1})(a) + f(g, g^{-1}), 1) = \\ &= (a + \phi(g)(a') + f(g, 1) - f(1, g) - f(g, g^{-1}) + f(g, g^{-1}) + \\ &\quad - \phi(1)(a) - f(g, g^{-1}) + f(g, g^{-1}), 1) = \\ &= (a, 1) + (\phi(g)(a'), 1) - (a, 1) = \\ &= (a, 1) + \phi \circ \pi(a, g)(a', 1) - (a, 1). \end{aligned}$$

Definição) O grupo E , definido no teorema 2, é chamado um grupo produto cruzado e será denotado por $A_f \Delta_\phi G$. A correspondente extensão é chamada uma extensão produto cruzado. Se $f = 0$ e A é abeliano, o grupo E é chamado o produto semi-direto de A por G com operador ϕ e será denotado por $A \Delta_\phi G$.

Suponhamos agora dado um núcleo abstrato (G, A, ψ) . Para obtermos uma extensão de A por G que tenha ψ como classe de conjugação, é suficiente obtermos aplicações $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ com $\phi(g) \in \psi(g)$, $\forall g \in G$, e $f : G \times G \rightarrow A$ satisfazendo as equações (i), (ii), (iii) e (iv) do teorema 2.

Para cada $g \in G$, escolhamos $\phi(g) \in \text{Aut}(A)$ com $\phi(g) \in \psi(g)$ e $\phi(1) = I_A$. Do fato que ψ é homomorfismo, segue que $\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_1g_2)^{-1} \in I_n(A)$. Escolhamos $f : G \times G \rightarrow A$ normalizada e satisfazendo: $\phi(g_1)\phi(g_2)(a) = f(g_1, g_2) + \phi(g_1g_2)(a) + f(g_1, g_2)$. A equação (iv), no entanto, nem sempre é verdadeira

ra, como veremos no Capítulo II.

Da equação $\phi(g_1) (\phi(g_2)\phi(g_3))(a) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(\phi(g_3)(a))$, $\forall a \in A$, segue, aplicando a equação (iii), que a conjugação por $\phi(g_1) f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3)$ coincide com a conjugação por $f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3)$, donde segue que

$$k(g_1, g_2, g_3) = \phi(g_1)f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1 g_2, g_3) - f(g_1, g_2)$$

pertence ao centro, $Z(A)$, do grupo A .

- *Definição*) A aplicação $k : G \times G \times G \rightarrow Z(A)$, definida pela equação acima, é chamada uma obstrução do núcleo abstrato (G, A, ψ) .

Quando for possível obter uma extensão de A por G que tenha ψ como classe de conjugação, diremos que a extensão é uma realização do núcleo abstrato (G, A, ψ) e que o núcleo abstrato se realiza.

Como $\phi(g) \in \text{Aut}(A)$, $\phi(g)$ induz, por restrição, $\theta(g) \in \text{Aut}(Z(A))$. Como todos os elementos de $\psi(g)$ coincidem em $Z(A)$, segue que $\theta(g)$ independe da escolha de $\phi(g)$ e portanto $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(Z(A))$ é homomorfismo, assim $Z(A)$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ - módulo.

Os seguintes teoremas estão demonstrados em MAC LANE (1967):

- *Teorema 3*) Dado um núcleo abstrato (G, A, ψ) , qualquer uma de suas obstruções é um 3-cociclo do $\mathbb{Z}G$ -módulo $Z(A)$. Além disso, todas as obstruções pertencem a mesma classe de cohomologia em $H^3_\theta(G, Z(A))$.

- Teorema 4) O núcleo abstrato (G, A, ψ) se realiza se, e somente se, a classe de cohomologia de suas obstruções é o elemento neutro de $H_{\theta}^3(G, Z(A))$.

§5 - MAIS SOBRE EXTENSÕES DE GRUPOS

Neste parágrafo apresentamos dois resultados mais específicos que serão utilizados nos próximos capítulos.

- Teorema 5) Sejam

$$0 \rightarrow A \rightarrow A_f \xrightarrow{\Delta_\phi} G \rightarrow G \rightarrow 1$$

uma extensão produto cruzado, $\xi : A \rightarrow A'$ um isomorfismo de grupos e $\tilde{\xi} : \text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(A')$ definido por $\tilde{\xi}(\omega) = \xi \circ \omega \circ \xi^{-1}$. Nestas condições,

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A'_{f'} \xrightarrow{\Delta_{\phi'}} G \rightarrow G \rightarrow 1,$$

onde $\phi' = \tilde{\xi} \circ \phi$ e $f' = \xi \circ f$, é uma extensão produto cruzado

- Demonstração) As aplicações ϕ' e f' satisfazem imediatamente as equações (i) e (ii) do teorema 2. Quanto às equações (iii) e (iv), temos:

$$\begin{aligned} \phi'(g_1)\phi'(g_2)(a) &= \xi(\phi(g_1)\phi(g_2)(\xi^{-1}(a))) = \\ &= \xi(f(g_1, g_2) + \phi(g_1g_2)(\xi^{-1}(a)) - f(g_1, g_2)) = \\ &= f'(g_1, g_2) + \phi'(g_1g_2)(a) - f'(g_1, g_2) \quad \text{e} \\ \phi'(g_1)f'(g_2, g_3) + f'(g_1, g_2g_3) - f'(g_1g_2, g_3) - f'(g_1g_2) &= \end{aligned}$$

$$= \xi(\phi(g_1)f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1 g_2, g_3) - f(g_1, g_2)) = 0.$$

Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos com ponto base x_0 e G um grupo que age no espaço X . Se α é um caminho em X e $g \in G$, $g\alpha$ denota o caminho definido por $(g\alpha)(t) = g(\alpha(t))$, $\forall t \in I$, e se α é um laço com ponto base x_0 , $\langle \alpha \rangle \in \pi_1(X, x_0)$ denota a classe de homotopia do laço α .

Para cada $g \in G$, escolhemos um caminho P_g em X , de x_0 até gx_0 . Para o elemento neutro $1 \in G$, escolhemos o caminho constante $P_1(t) = x_0$.

Para cada $g \in G$, o homomorfismo $\phi(g): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, definido por $\phi(g)\langle \alpha \rangle = \langle P_g * g\alpha * P_g^{-1} \rangle$, onde $*$ denota o produto usual de caminhos, é um automorfismo pois $\phi(g)\phi(g^{-1})$ é um automorfismo interno de $\pi_1(X, x_0)$ assim, fica definida uma aplicação $\phi: G \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(X, x_0))$. Definamos $f: G \times G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ por $f(g_1, g_2) = \langle P_{g_1} * g_1 P_{g_2} * P_{g_1 g_2}^{-1} \rangle$.

- Teorema 6) $1 \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f} G \rightarrow G \rightarrow 1$, onde ϕ e f são as aplicações acima definidas, é uma extensão produto cruzado.

- Demonstração) As equações (i) e (ii) do teorema 2 são de verificação imediata.

Verificação de (iii):

$$\begin{aligned}
 & f(g_1, g_2) + \phi(g_1 g_2) \langle \alpha \rangle - f(g_1, g_2) = \\
 & = \langle P_{g_1} * g_1 P_{g_2} * P_{g_1 g_2}^{-1} * P_{g_1 g_2} * g_1 g_2^\alpha * P_{g_1 g_2}^{-1} * P_{g_1 g_2} * \\
 & * (g_1 P_{g_2})^{-1} * P_{g_1}^{-1} \rangle = \\
 & = \langle P_{g_1} * g_1 (P_{g_2} * g_2^\alpha * P_{g_2}^{-1}) * P_{g_1}^{-1} \rangle = \\
 & = \phi(g_1) \phi(g_2) \langle \alpha \rangle .
 \end{aligned}$$

Verificação de (iv):

$$\begin{aligned}
 & \phi(g_1) f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) = \\
 & = \langle P_{g_1} * g_1 P_{g_2} * g_1 g_2 P_{g_3} * g_1 P_{g_2 g_3}^{-1} * P_{g_1}^{-1} * P_{g_1} * g_1 P_{g_2 g_3} * \\
 & * P_{g_1 g_2 g_3}^{-1} \rangle = \\
 & = \langle P_{g_1} * g_1 P_{g_2} * g_1 g_2 P_{g_3} * P_{g_1 g_2 g_3}^{-1} \rangle = \\
 & = f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3).
 \end{aligned}$$

§6 - ALGUNS FATOS SOBRE O n-TORO

Sejam S^1 o grupo topológico dos números com plexos de módulo 1 e T^n , $n \geq 2$, o produto de n cópias iguais a S^1 .

Denotemos por z_0 o ponto $(1, 0) \in S^1$, por z_0 o ponto $(z_0, \dots, z_0) \in T^n$, por $\exp$ a aplicação do conjunto dos

números reais, $\mathbb{R}$, em S^1 , definida por $\exp(t) = (\cos 2\pi it, \sin 2\pi it)$, e por $\alpha_j : I \rightarrow T^n$, $1 \leq j \leq n$, o laço definido por $\alpha_j(t) = (z_0, \dots, z_0, \exp(t), z_0, \dots, z_0)$, sendo $\exp(t)$ na coordenada j .

Dada uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de números inteiros, consideremos o homomorfismo de grupos topológicos $A : T^n \rightarrow T^n$, definido por

$$A(z_1, \dots, z_n) = (z_1^{a_{11}} \dots z_n^{a_{1n}}, \dots, z_1^{a_{n1}} \dots z_n^{a_{nn}}),$$

o qual diremos ser representado pela matriz A . Observemos que o homomorfismo identidade é representado pela matriz identidade e que se $A, B : T^n \rightarrow T^n$ são representados, respectivamente, por matrizes A e B , então $B \circ A$ é representado pela matriz BA e BA , definido por $BA(Z) = B(Z)A(Z)$, é representado pela matriz $B + A$.

Notemos que o laço $A \circ \alpha_j(t) = (\exp(a_{1j}t), \dots, \exp(a_{nj}t))$ é homotópico ao laço

$$s(t) = \begin{cases} (\exp(na_{1j}t), z_0, \dots, z_0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ (z_0, \exp(na_{2j}t - a_{2j}), z_0, \dots, z_0) & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}, \\ \dots & \dots \\ (z_0, \dots, z_0, \exp(na_{nj}t - (n-1)a_{nj})) & \text{se } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

pois seus levantamentos no espaço de recobrimento universal $\mathbb{R}^n$, começando em $(0, \dots, 0)$, são, respectivamente:

$$A \circ \alpha_j(t) = (a_{1j}t, \dots, a_{nj}t) \quad e$$

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} (na_{1j}t, 0, \dots, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ (a_{1j}, na_{2j}t - a_{2j}, 0, \dots, 0) & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}, \\ \dots \\ (a_{1j}, \dots, a_{n-1j}, na_{nj}t - (n-1)a_{nj}) & \text{se } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

os quais possuem mesmo ponto final. Portanto, o homomorfismo induzido por A em $\pi_1(T^n, z_0) \cong \mathbb{Z}^n$ é representado, em relação à base canônica de $\mathbb{Z}^n$, pela matriz A . O mesmo vale, portanto, para a induzida por A no 1º grupo de homologia de T^n com coeficientes inteiros, $H_1(T^n)$, (GREENBERG[1966]).

Observemos, por outro lado, que o anel de cohomologia de T^n com coeficientes inteiros, $H^*(T^n)$, é uma álgebra exterior em n geradores e cada aplicação contínua $f: T^n \rightarrow T^n$ induz um homomorfismo de álgebras graduadas em $H^*(T^n)$ (VICK [1973]). Portanto, a induzida no nível n , $f^n: H^n(T^n) \rightarrow H^n(T^n)$, é a multiplicação pelo determinante da matriz de $f^1: H^1(T^n) \rightarrow H^1(T^n)$ (BIRKHOFF-MAC LANE [1967]). Utilizando-se esse resultado e o índice de Kronecker não é difícil verificar que $f_n: H_n(T^n) \rightarrow H_n(T^n)$ é a multiplicação pelo determinante da matriz de $f_1: H_1(T^n) \rightarrow H_1(T^n)$. Em particular, se $A: T^n \rightarrow T^n$ é representada por uma matriz A , a induzida por A na n -ésima homologia é a multiplicação pelo determinante de A .

Algumas notações estabelecidas neste Capítulo serão também utilizadas nos Capítulos II e III. Tal é o caso, por exemplo, das notações z_0 , Z_0 , $\exp$ e α_j .

CAPITULO II

O TEOREMA DE NIELSEN NÃO SE GENERALIZA PARA
DIMENSÃO TRÊS

O seguinte resultado é conhecido como teorema de Nielsen: se S é uma superfície fechada e orientável e $H : S \rightarrow S$ é uma aplicação contínua cuja n -ésima potência, H^n , é homotópica à aplicação identidade de S , I_S , então H é homotópica a um homeomorfismo K tal que $K^n = I_S$.

Neste capítulo, apresentamos um exemplo de uma variedade fechada e orientável M^3 , de dimensão 3, e um homeomorfismo $H : M^3 \rightarrow M^3$ tal que H^2 é homotópica à I_{M^3} mas H não é homotópico a nenhum homeomorfismo K com $K^2 = I_{M^3}$.

Sejam e a restrição de $\exp$ ao intervalo I , $p_2 : T^2 \times I \rightarrow I$ a projeção no segundo fator, $\eta : T^2 \rightarrow T^2$ o homeomorfismo definido por $\eta(z_1, z_2) = (z_1, z_1^2 z_2)$, $\sim$ a relação de equivalência sobre $T^2 \times I$ dada por $(x, t) \sim (x, t)$ e $(x, 0) \sim (\eta(x), 1)$, M^3 o espaço quociente $\frac{T^2 \times I}{\sim}$ e $q : T^2 \times I \rightarrow M^3$ a aplicação quociente.

Segue do teorema da transgressão que $p = (e \circ p_2)q^{-1}$ é contínua e comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 \times I & \xrightarrow{e \circ p_2} & S^1 \\
 q \downarrow & \nearrow p & \\
 M^3 & &
 \end{array}$$

Denotemos por $\sim'$ e $\sim''$ as relações de equivalência induzidas por $\sim$ em $T^2 \times J$ e $T^2 \times L$ respectivamente, onde $J = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ e $L = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, e por $q' : T^2 \times J \rightarrow \frac{T^2 \times J}{\sim'}$ e $q'' : T^2 \times L \rightarrow \frac{T^2 \times L}{\sim''}$ as aplicações quociente.

Observemos que $\frac{T^2 \times L}{\sim''} \subset \frac{T^2 \times J}{\sim'}$ é aberto e $\frac{T^2 \times J}{\sim'}$ $\subset \frac{T^2 \times I}{\sim}$ é fechado, logo suas topologias como subespaços coincidem com a topologia quociente.

- Teorema 7) (M^3, p, S^1, T^2) é um fibrado.

- Demonstração) Distinguiremos dois casos. No primeiro, $b \in S^1$ é diferente de z_0 e $U' = S^1 - \{z_0\}$. Como $q(T^2 \times]0,1[) \subset M^3$ é aberto, $q|_{T^2 \times]0,1[}$ é homeomorfismo sobre sua imagem. Denotemos por $e' :]0,1[\rightarrow U'$ a restrição de e . Temos então o homeomorfismo $q \circ (I_{T^2} \times e'^{-1})$ de $T^2 \times U'$ em $q(T^2 \times]0,1[) = q((e \circ p_2)^{-1}(U')) = p^{-1}(U')$. Além disso $p \circ q \circ (I_{T^2} \times e'^{-1})(x, b') = b'$.

Suponhamos agora $b = z_0$ e sejam $V' = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 / -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ e $\xi : T^2 \times V' \rightarrow T^2 \times]-1,1[$ o homeomorfismo definido por $\xi(x, (\cos\theta, \sin\theta)) = (x, \frac{2\theta}{\pi})$.

A aplicação $g : T^2 \times J \rightarrow T^2 \times [-1, 1]$, definida por $g(x, t) = (x, 4t)$ se $t \in [0, \frac{1}{4}]$ e $g(x, t) = (\eta^{-1}(x), 4t - 4)$ se $t \in [\frac{3}{4}, 1]$, é contínua e $g(x, 0) = g(\eta(x), 1)$, logo fica definida a aplicação $gq'^{-1} : \frac{T^2 \times J}{\sim'} \rightarrow T^2 \times [-1, 1]$, que é contínua e comuta o diagrama:

Além disso, gq'^{-1} é sobrejeção fechada e é também injeção pois $g(x, t) = g(y, s)$ implica $(x, t) \sim' (y, s)$. Portanto a restrição gq'^{-1} é um homeomorfismo de $\frac{T^2 \times L}{\sim''}$ sobre sua imagem $T^2 \times]-1, 1[$. Logo $(gq'^{-1})^{-1} \circ \xi$ é um homeomorfismo de $T^2 \times V'$ em $\frac{T^2 \times L}{\sim''} = q(T^2 \times L) = p^{-1}(V')$. Além disso, $p \circ (gq'^{-1})^{-1} \circ \xi(x, b') = b'$.

- Corolário 1) M^3 é uma variedade fechada de dimensão três.

- Corolário 2) $p : M^3 \rightarrow S^1$ é uma fibração fraca.

Denotemos por $\sim'''$ a relação induzida por $\sim$ em $T^2 \times \{0, 1\}$, por q''' a aplicação quociente de $T^2 \times \{0, 1\}$ em $\frac{T^2 \times \{0, 1\}}{\sim'''}$ e por $g' : T^2 \times \{0, 1\} \rightarrow T^2 \times \{0\}$ a restrição de g . Como a topologia de $\frac{T^2 \times \{0, 1\}}{\sim'''}$ como subespaço de $\frac{T^2 \times J}{\sim'}$ é a topologia da identificação determinada por $q''', i = j_1 \circ (g'q''')^{-1} \circ j_2$, onde $j_2 : T^2 \rightarrow T^2 \times \{0\}$ é dada por $j_2(x) = (x, 0)$ e $j_1 : \frac{T^2 \times \{0, 1\}}{\sim'''} \rightarrow M^3$ é a inclusão, é um homeomorfismo de T^2 sobre a fibra $p^{-1}(\{z_0\})$. Identificaremos a fibra com T^2 através de i . Notemos que $g'q'''^{-1} \overline{(x, 0)} = (x, 0)$, onde $\overline{(x, 0)}$ é a classe de $(x, 0)$ em $\frac{T^2 \times \{0, 1\}}{\sim'''}$ ou, o que é o mesmo, em M^3 , logo $i(x) = \overline{(x, 0)}$.

$$\text{- Teorema 8) } H_n(M^3) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } n > 3 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 3 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

- Demonstração) Para $n = 0$ e $n > 3$ o resultado é conhecido (VICK [1973]). Para determinarmos os demais grupos de homologia utilizaremos a seqüência de Mayer-Vietoris.

Consideremos a cobertura $\{U, V\}$ de M^3 , sendo $U = p^{-1}(U')$ e $V = p^{-1}(V')$, onde $U' = S^1 - \{z_0\}$ e $V' = \{(x, y) \in S^1 / x > 0\}$. Obtemos então a seqüência exata:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_3(M^3) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_2} & H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & \\ & & & & & & \\ & \xrightarrow{h_2} & H_2(M^3) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_1} \\ & & & & & & \\ & \xrightarrow{h_1} & H_1(M^3) & \xrightarrow{\Delta_0} & H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow \mathbb{Z}. \end{array}$$

As aplicações $(q|_{T^2 \times]0,1[})^{-1} : U \rightarrow T^2 \times]0,1[$ e $gq^{-1} : V \rightarrow T^2 \times]-1,1[$ são homeomorfismos e as aplicações $k_1 : T^2 \times \{0,1\} \rightarrow U \cap V$, $k_1(z, 0) = (z, \frac{1}{8})$ e $k_1(z, 1) = (z, \frac{7}{8})$, $k_2 : T^2 \times]-1,1[\rightarrow T^2$, $k_2(z, t) = z$, e $k_3 = k_2|_{T^2 \times]0,1[}$ são equivalências de homotopia. Identificando U e V a toros e $U \cap V$ à união de dois toros disjuntos, através das equivalências de homotopia acima, a inclusão i de $U \cap V$ em U é identificada à aplicação que leva cada uma das cópias de T^2 em T^2 pela identidade e a inclusão j de $U \cap V$ em V leva uma das cópias pela identidade e a outra pelo homeomorfismo η^{-1} .

Como qualquer ponto é um gerador da 0 - ésima homologia, temos que:

$$i_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ é dado por } i_0(a, b) = a + b,$$

$$j_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ é dado por } j_0(a, b) = a + b.$$

temos que: Como η^{-1} é representado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$i_1 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ é dado por } i_1(a, b, c, d) = (a + c, b + d),$$

$$j_1 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ é dado por } j_1(a, b, c, d) = (a + c, b - 2c + d).$$

Como o grau do homeomorfismo $\tilde{\eta}^{-1}$, $\deg \tilde{\eta}^{-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$, temos que:

$$i_2 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ é dado por } i_2(a, b) = a + b,$$

$$j_2 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ é dado por } j_2(a, b) = a + b.$$

Portanto, os homomorfismos $g_n = (i_n, -j_n)$, da sequência de Mayer-Vietoris são dados por:

$$g_0(a, b) = g_2(a, b) = (a + b, -a - b) = (a + b) (1, -1) \text{ e}$$

$$g_1(a, b, c, d) = (a + c, b + d, -a - c, -b + 2c - d) =$$

$$= (a + c) (1, 0, -1, 0) - (b + d) (0, 1, 0, -1) + 2c (0, 0, 0, 1).$$

Observemos que $((1, -1), (1, 0))$ e $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, -1, 0))$ são bases de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, respectivamente.

De

$$0 \rightarrow H_3(M^3) \xrightarrow{\Delta_2} H_2(U \cap V) \xrightarrow{g_2} H_2(U) \oplus H_2(V),$$

segue que $H_3(M^3) \cong \text{Ker}(g_2) \cong \mathbb{Z}$.

De

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_2} & H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & H_2(M^3) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_1(U \cap V) \xrightarrow{g_1} \\ & & & & & & \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V), \end{array}$$

obtemos:

$$0 \rightarrow \frac{H_2(U) \oplus H_2(V)}{\text{im}(g_2)} \xrightarrow{\tilde{h}_2} H_2(M^3) \xrightarrow{\Delta_1} \text{Ker}(g_1) \rightarrow 0, \text{ ou ainda:}$$

$$0 \rightarrow \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \rightarrow H_2(M^3) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

que, sendo uma extensão cindida de grupos abelianos, fornece $H_2(M^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

De $H_1(U \cap V) \xrightarrow{g_1} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_1} H_1(M^3) \xrightarrow{\Delta_0} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_0} H_0(U) \oplus H_0(V)$, obtemos:

$$0 \rightarrow \frac{H_1(U) \oplus H_1(V)}{\text{im}(g_1)} \xrightarrow{\tilde{h}_1} H_1(M^3) \xrightarrow{\Delta_0} \ker(g_0) \rightarrow 0, \text{ ou ainda:}$$

$$0 \rightarrow \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}} \rightarrow H_1(M^3) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \text{ que fornece:}$$

$$H_1(M^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

- Corolário) A variedade M^3 é orientável.

Denotemos por b_0 o ponto $\overline{(z_0, z_0, 0)} \in M^3$. A aplicação $h : (T^2 \times I, (z_0, z_0, 0)) \rightarrow (T^2 \times I, (z_0, z_0, 0))$, $h(z_1, z_2, t) = (z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2^{-1} e(t), t)$ tem inversa $h^{-1} : (T^2 \times I, (z_0, z_0, 0)) \rightarrow (T^2 \times I, (z_0, z_0, 0))$, $h^{-1}(z_1, z_2, t) = (z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1} e(t), t)$, ambas contínuas e preservando relações, de modo que h induz um homeomorfismo $H : (M^3, b_0) \rightarrow (M^3, b_0)$.

- Teorema 9) $H^2 : M^3 \rightarrow M^3$ é homotópica à I_{M^3} .

- Demonstração) Sejam $F_1 = \{(z_1, z_2, t, s) \in T^2 \times I^2 / t + s \leq 1\}$ e $F_2 = \{(z_1, z_2, t, s) \in T^2 \times I^2 / t + s \geq 1\}$. As aplicações $f_1 : F_1 \rightarrow M^3$, $f_1(z_1, z_2, t, s) = \overline{(z_1, z_1^2 z_2, t + s)}$ e $f_2 : F_2 \rightarrow M^3$, $f_2(z_1, z_2, t, s) = \overline{(z_1, z_2, t + s - 1)}$ são contínuas e coincidem em $F_1 \cap F_2$, logo $f : T^2 \times I^2 \rightarrow M^3$, definida por

$$f(z_1, z_2, t, s) = \begin{cases} \overline{(z_1, z_1^2 z_2, t + s)} & \text{se } t + s \leq 1 \\ \overline{(z_1, z_2, t + s - 1)} & \text{se } t + s \geq 1, \end{cases}$$

é contínua.

Por outro lado, $q \times I_I : (T^2 \times I) \times I \rightarrow M^3 \times I$ é sobre, contínua e fechada, logo é uma identificação. Além disso, $\forall x \in M^3 \times I$, f é constante em $(q \times I_I)^{-1}(\{x\})$. Portanto $0 : M^3 \times I \rightarrow M^3$, definida por

$$0(\overline{(z_1, z_2, t)}, s) = \begin{cases} \overline{(z_1, z_1^2 z_2, t + s)} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 - s \\ \overline{(z_1, z_2, t + s - 1)} & \text{se } 1 - s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é uma homotopia entre H^2 e I_{M^3} .

Suponhamos que H seja homotópica a um homeomorfismo $K : M^3 \rightarrow M^3$ tal que $K^2 = I_{M^3}$ e sejam $F : M^3 \times I \rightarrow M^3$ uma homotopia de K até H e $\sigma : I \rightarrow M^3$, $\sigma(t) = F(b_0, t)$. Temos que $H_* = \sigma_* \circ K_* : \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0)$, onde $\sigma_* : \pi_1(M^3, K(b_0)) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0)$ é definida por $\sigma_*(\langle \beta \rangle) = \langle \sigma^{-1} * \beta * \sigma \rangle$.

Denotemos por $P_0, P_1 : I \rightarrow M^3$ os caminhos $P_0(t) = b_0$ e $P_1(t) = \sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$.

Consideremos a ação do grupo $\mathbb{Z}_2$ no espaço M^3 , que leva $\bar{I}$ em K . Conforme o teorema 6, obtemos uma extensão produto cruzado:

$1 \rightarrow \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0) \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$,
onde $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M^3, b_0))$ e $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_1(M^3, b_0)$ são dadas por $\phi(g)\langle \alpha \rangle = \langle P_g * g\alpha * P_g^{-1} \rangle$ e $f(g_1, g_2) = \langle P_{g_1} * g_1 P_{g_2} * P_{g_1 g_2}^{-1} \rangle$. Além disso, temos o

- Teorema 10) A aplicação $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M^3, b_0))$, acima de
finida, é dada por $\phi(\bar{I}) = H_*$.

- Demonstração) $\forall \langle \alpha \rangle \in \pi_1(M^3, b_0)$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{I}) \langle \alpha \rangle &= \langle P_{\bar{I}} * \bar{I} \alpha * P_{\bar{I}}^{-1} \rangle = \langle P_{\bar{I}} * K \circ \alpha * P_{\bar{I}}^{-1} \rangle = \\ &= \sigma_{\bar{I}} \circ K_* \langle \alpha \rangle = H_* \langle \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Denotemos por θ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ tal que $\theta(1)$, em relação à base $((1,0), (0,1))$, é representado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e por π o produto semi-direto

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \Delta_{\theta} \mathbb{Z}.$$

- Teorema 11) $\pi_n(M^3, b_0) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } n > 1 \\ \pi & \text{se } n = 1. \end{cases}$

- Demonstração) A seqüência exata de homotopia da fibração $p: M^3 \rightarrow S^1$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(T^2, z_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(M^3, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^1, z_0) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_2(S^1, z_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(T^2, z_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M^3, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$\rightarrow 1$, fornece $\pi_n(M^3, b_0) \cong 1$ se $n > 1$ e a extensão:

$1 \rightarrow \pi_1(T^2, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M^3, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow 1$, que é cindida pois $\pi_1(S^1, z_0) \cong \mathbb{Z}$. Além disso, a aplicação $\gamma: I \rightarrow M^3$, $\gamma(t) = (z_0, z_0, t)$, é um laço com ponto base b_0 que satisfaz $p_*(\langle \gamma \rangle) = \langle e \rangle$, portanto $\pi_1(M^3, b_0)$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(T^2, z_0) \Delta_{\theta'} \pi_1(S^1, z_0)$, onde $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$, conforme o teorema 1.

$\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_1 \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha_1 \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$ é a classe de homotopia do laço

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{(z_0, z_0, 3t)} \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \overline{(\exp(3t-1), z_0, 0)} \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \overline{(z_0, z_0, 3-3t)} \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overline{(z_0, z_0, 3t)} \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \overline{(\exp(3t-1), \exp(6t-2), 1)} \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \overline{(z_0, z_0, 3-3t)} \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Observemos que o laço acima é o composto q o δ_1 , onde $\delta_1: I \rightarrow T^2 \times I$ é o laço, com ponto base $(z_0, z_0, 0)$,

$$\delta_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} (z_0, z_0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\exp(3t-1), \exp(6t-2), 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (z_0, z_0, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Consideremos o espaço de recobrimento universal $(\mathbb{R}^2 \times I, \ell)$ de $T^2 \times I$, onde $\ell: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow T^2 \times I$ é dada por $\ell(r, s, t) = (\exp(r), \exp(s), t)$, e notemos que δ_1 tem como levantamento, começando no ponto $(0, 0, 0)$, o caminho $\tilde{\delta}_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, definido por

$$\tilde{\delta}_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (3t-1, 6t-2, 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (1, 2, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

o qual possui o mesmo ponto final que o caminho $\tilde{\delta}_2: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, definido por

$$\tilde{\delta}_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} (2t, 0, 0) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 4t-2, 0) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

que é o levantamento, começando em $(0, 0, 0)$, do caminho

$\delta_2: I \rightarrow T^2 \times I$, definido por

$$\delta_2(t) = \begin{cases} (\exp(2t), z_0, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (z_0, \exp(4t-2), 0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Portanto δ_1 e δ_2 são homotópicos, e assim, q o δ_1 é homotópico à q o δ_2 que é um representante de $\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle^2 \in \pi_1(T^2, z_0)$, desde que, a inclusão i da fibra T^2 em M^3 é dada por $i(x) = \overline{(x, 0)}$, logo

$$(*) \quad \theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle^2.$$

Temos também que $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_2 \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha_2 \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$

é a classe de homotopia do laço

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{(z_0, z_0, 3t)} \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \overline{(z_0, \exp(3t-1), 0)} \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \overline{(z_0, z_0, 3-3t)} \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overline{(z_0, z_0, 3t)} \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \overline{(z_0, \exp(3t-1), 1)} \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \overline{(z_0, z_0, 3-3t)} \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

que é o composto q o δ_3 , onde $\delta_3: I \rightarrow T^2 \times I$ é o laço

$$\delta_3(t) = \begin{cases} (z_0, z_0, 3t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (z_0, \exp(3t-1), 1) & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (z_0, z_0, 3-3t) & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

o qual tem como levantamento, começando em $(0, 0, 0)$, o caminho $\tilde{\delta}_3: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, definido por

$$\tilde{\delta}_3(t) = \begin{cases} (0, 0, 3t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (0, 3t-1, 1) & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (0, 1, 3-3t) & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

o qual possui o mesmo ponto final que o caminho $\tilde{\delta}_4 : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, $\tilde{\delta}_4(t) = (0, t, 0)$, que é o levantamento, começando em $(0, 0, 0)$, do caminho $\delta_4 : I \rightarrow T^2 \times I$, $\delta_4(t) = (z_0, \exp(t), 0)$. Portanto δ_3 e δ_4 são homotópicos, assim q o δ_3 é homotópico à q o δ_4 que é um representante de $\langle \alpha_2 \rangle \in \pi_1(T^2, z_0)$, logo

$$(**) \theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle.$$

Sejam $u : \pi_1(T^2, z_0) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $v : \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ os isomorfismos dados por $u(\langle \alpha_1 \rangle) = (1, 0)$, $u(\langle \alpha_2 \rangle) = (0, 1)$ e $v(\langle e \rangle) = 1$. As equações (*) e (**) mostram que $\theta'(\langle e \rangle)$ é o automorfismo de $\pi_1(T^2, z_0)$ que, relativamente à base $(\langle \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_2 \rangle)$, é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

assim, se $(a, x) \in \pi_1(T^2, z_0) \Delta_{\theta} \pi_1(S^1, z_0)$, então $u(\theta'(x)(a)) = \theta(v(x))(u(a))$. Portanto

$$v : \pi_1(T^2, z_0) \Delta_{\theta} \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \pi,$$

definido por $v(a, x) = (u(a), v(x))$ é um homomorfismo que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \rightarrow \pi_1(T^2, z_0) & \rightarrow & \pi_1(T^2, z_0) \Delta_{\theta} \pi_1(S^1, z_0) & \rightarrow & \pi_1(S^1, z_0) & \rightarrow & 1 \\ & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow v & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \rightarrow & \pi & \rightarrow & \mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

logo v é um isomorfismo.

Observemos que, para qualquer número inteiro n , vale a equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a operação em π é dada por $(a, b, c) + (x, y, z) = ((a, b) + \theta(c)(x, y), c + z) = (a + x, b + y + 2cx, c + z)$, o elemento neutro é $(0, 0, 0)$ e $-(a, b, c) = (-a, -b + 2ac, -c)$. Segue que, vale a equação: $(\dagger) (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$, $\forall (a, b, c) \in \pi$.

Cálculos diretos mostram que $\tau : \pi \rightarrow \pi$, $\tau(a, b, c) = (-a, -a - b + c, c)$ é um homomorfismo e que $\tau^2(a, b, c) = (0, 0, 1) + (a, b, c) - (0, 0, 1)$, $\forall (a, b, c) \in \pi$, em particular τ é automorfismo.

- Teorema 12) Identificando $\pi_1(M^3, b_0)$ com o grupo π , conforme o teorema 11, o automorfismo H_* , de $\pi_1(M^3, b_0)$, é identificado ao automorfismo τ , de π , acima definido.

- Demonstração) Conforme a equação $(\dagger)$ é suficiente mostrar que H_* coincide com τ nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Consideremos os seguintes laços em M^3 : $v_1(t) = \overline{(e(t), z_0, 0)}$, $v_2(t) = \overline{(z_0, e(t), 0)}$ e $\gamma(t) = \overline{(z_0, z_0, t)}$. Denotemos por c_0 o laço constante de (S^1, z_0) , por d_0 o laço constante de (T^2, Z_0) , por $\mu : \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0)$ o homomorfismo dado por $\mu(\langle e \rangle) = \langle \gamma \rangle$ e por $r : \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi_1(T^2, Z_0) \Delta_{\theta} \pi_1(S^1, z_0)$ o isomorfismo definido por $r(a + \mu(x)) = (a, x)$. Então:

$$r^{-1} v^{-1}(1, 0, 0) = r^{-1}(\langle \alpha_1 \rangle, \langle c_0 \rangle) = \langle v_1 \rangle,$$

$$r^{-1} v^{-1}(0, 1, 0) = r^{-1}(\langle \alpha_2 \rangle, \langle c_0 \rangle) = \langle v_2 \rangle,$$

$$r^{-1} v^{-1}(0, 0, 1) = r^{-1}(\langle d_0 \rangle, \langle e \rangle) = \langle \gamma \rangle.$$

Por outro lado:

$$H \circ v_1(t) = \overline{(\exp(-t), \exp(-t), 0)},$$

$$H \circ v_2(t) = \overline{(z_0, \exp(-t), 0)},$$

$$H \circ \gamma(t) = \overline{(z_0, \exp(t), t)}.$$

Temos então:

$$vr(\langle H \circ v_1 \rangle) = (-1, -1, 0),$$

$$vr(\langle H \circ v_2 \rangle) = (0, -1, 0).$$

Já $\langle H \circ \gamma \rangle$ é o produto da classe do laço s , de M^3 , definido por

$$s(t) = \begin{cases} \overline{(z_0, \exp(2t), 2t)} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{(z_0, z_0, 2(1-t))} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

com a classe de γ . O laço s é homotópico à v_2 porque s e v_2 podem ser vistos como compostos $s = q \circ s'$ e $v_2 = q \circ v_2'$ sendo que s' e v_2' são homotópicos pois seus levantamentos no espaço de recobrimento universal, começando em $(0, 0, 0)$, têm o mesmo ponto final, assim $\langle H \circ \gamma \rangle = \langle v_2 \rangle \langle \gamma \rangle$, logo

$$vr(\langle H \circ \gamma \rangle) = v(\langle \alpha_2 \rangle, \langle e \rangle) = (0, 1, 1).$$

Consideremos o isomorfismo $\xi : \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi$, $\xi = v \circ r$. Conforme os teoremas 11 e 5, a extensão produto cruzado:

$$1 \rightarrow \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0)_f \xrightarrow{\Delta_\phi} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

obtida anteriormente, dá origem a uma nova extensão produto cruzado:

$$0 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_{f, \Delta_\phi, \mathbb{Z}_2} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Além disso, a classe de conjugação desta extensão, $\psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Out}(\pi)$, é dada por $\psi(\bar{1}) = [\phi'(\bar{1})] = [\xi \circ \phi(\bar{1}) \circ \xi^{-1}] = [\xi \circ H_* \circ \xi^{-1}] = [\tau]$, onde $[\]$ denota a classe da aplicação em $\text{Out}(\pi)$, a primeira igualdade é fornecida pelo teorema 2, a penúltima pelo teorema 10 e a última pelo teorema 12.

Mostraremos, a seguir, que a hipótese de que H é homotópica a um homeomorfismo $K : M^3 \rightarrow M^3$ com $K^2 = I_{M^3}$ provoca uma contradição, mostrando que o núcleo abstrato $(\mathbb{Z}_2, \pi, \psi)$ não se realiza.

Observemos que dois elementos (a, b, c) e (x, y, z) de π comutam se, e somente se, $cx = za$. Portanto $(a, b, c) \in Z(\pi) \Leftrightarrow cx = za, \forall x, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = c = 0$, logo o centro de π , $Z(\pi)$, é o conjunto dos elementos da forma $(0, b, 0)$ com $b \in \mathbb{Z}$.

O teorema 3 permite-nos definir a obstrução de $(\mathbb{Z}_2, \pi, \psi)$ como sendo a classe de cohomologia do 3-cociclo $k : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow Z(\pi)$, $k(x, y, z) = \phi(x)f(y, z) + f(x, yz) - f(xy, z) - f(x, y)$, onde $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\pi)$ é qualquer função satisfazendo $\phi(x) \in \psi(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$, e $\phi(\bar{0}) = I_\pi$ e $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi$ é qualquer função normalizada satisfazendo $\phi(x)\phi(y)(g) = f(x, y) + \phi(x+y)(g) - f(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_2, \forall g \in \pi$. Escolhendo $\phi(\bar{1}) = \tau$, como τ^2 é a conjugação por $(0, 0, 1)$, podemos escolher $f(\bar{1}, \bar{1}) = (0, 0, 1)$.

- Teorema 13) O núcleo abstrato $(\mathbb{Z}_2, \pi, \psi)$ não se realiza.

- *Demonstração*) Conforme o teorema 4, é suficiente provar que a classe de cohomologia de k não é o elemento neutro de $H_{\phi}^3(\mathbb{Z}_2, Z(\pi))$, ou seja, que k não é um cobordo.

Relembremos que o operador cobordo $\delta^2: C_{\phi}^2(\mathbb{Z}_2, Z(\pi)) \rightarrow C_{\phi}^3(\mathbb{Z}_2, Z(\pi))$ é dado por

$$\delta^2 h(x, y, z) = (-1)^3 [\phi(x)h(y, z) - h(x+y, z) + h(x, y+z) - h(x, y)], \text{ onde } h \in C_{\phi}^2(\mathbb{Z}_2, Z(\pi)).$$

Como $h(\bar{1}, \bar{1}) = (0, b, 0)$ para algum $b \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} \delta^2 h(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) &= (-1)^3 [\phi(\bar{1})h(\bar{1}, \bar{1}) - h(\bar{0}, \bar{1}) + h(\bar{1}, \bar{0}) + \\ &\quad - h(\bar{1}, \bar{1})] = -\tau(0, b, 0) + (0, b, 0) = (0, 2b, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} k(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) &= \phi(\bar{1}) f(\bar{1}, \bar{1}) + f(\bar{1}, \bar{0}) - f(\bar{0}, \bar{1}) - f(\bar{1}, \bar{1}) = \\ &= \tau(0, 0, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Logo $k \neq \delta^2 h, \forall h \in C_{\phi}^2(\mathbb{Z}_2, Z(\pi))$.

CAPITULO III

O TEOREMA DE NIELSEN EM DIMENSÕES MAIORES QUE TRÊS E O
PERÍODO DA APLICAÇÃO H

No §1 deste capítulo, construiremos, para cada $n > 3$, uma variedade fechada e orientável M^n , de dimensão n , e um homeomorfismo $H : M^n \rightarrow M^n$ tal que H^2 é homotópico à I_{M^n} mas H não é homotópico a nenhum homeomorfismo K com $K^2 = I_{M^n}$.

Se ℓ é o menor inteiro estritamente positivo tal que a ℓ -ésima potência de um homeomorfismo $H : X \rightarrow X$ é homotópica à identidade do espaço X , diremos que ℓ é o período de H .

No §2 construiremos, para cada inteiro ℓ , $\ell \geq 2$, e cada $n \geq 3$, uma variedade M^n , de dimensão n , e um homeomorfismo $H : M^n \rightarrow M^n$, de período 2ℓ , tal que H não é homotópico a nenhum homeomorfismo K com $K^{2\ell} = I_{M^n}$.

No §3 construiremos, para cada inteiro ℓ , $\ell \geq 2$, uma variedade $M^{2\ell-1}$, de dimensão $2\ell-1$, e um homeomorfismo $H : M^{2\ell-1} \rightarrow M^{2\ell-1}$, de período ℓ , tal que H não é homotópico a nenhum homeomorfismo K com $K^\ell = I_{M^{2\ell-1}}$.

Ficará demonstrado, em particular, que "para cada $n \geq 3$, existe uma variedade de dimensão n para a qual o

teorema de Nielsen falha" e que, "para cada $\ell \geq 2$, existe um homeomorfismo H , de período ℓ , para o qual o teorema de Nielsen falha".

Como as construções deste capítulo se assemelham àquela do capítulo II, nós destacaremos apenas as diferenças.

§1 - O TEOREMA DE NIELSEN EM DIMENSÕES MAIORES QUE TRÊS

Para cada $n > 3$, consideremos a variedade fechada e orientável de dimensão n : $M^n = M^3 \times T^{n-3}$ (VICK [1973]). Denotemos por c_0 o ponto $(b_0, z_0) \in M^n$ e seja $H_n : (M^3 \times T^{n-3}, c_0) \rightarrow (M^3 \times T^{n-3}, c_0)$, definida por $H_n(x, y) = (H(x), y)$. H_n é um homeomorfismo e H_n^2 é homotópica à I_{M^n} .

Suponhamos H_n homotópica a um homeomorfismo $K : M^n \rightarrow M^n$ com $K^2 = I_{M^n}$. Como no capítulo II, obtemos uma extensão produto cruzado:

$$1 \rightarrow \pi_1(M^n, c_0) \rightarrow \pi_1(M^n, c_0) \xrightarrow{\Delta_\phi} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

com $\phi(I) = (H_n)_*$.

Identificando $\pi_1(M^n, c_0)$ com $\pi_1(M^3, b_0) \oplus \pi_1(T^{n-3}, z_0)$, da maneira natural, a aplicação $(H_n)_*$ é identificada à $H_* \oplus I_{\pi_1(T^{n-3}, z_0)}$. Identificando $\pi_1(M^3, b_0) \oplus \pi_1(T^{n-3}, z_0)$ com $\pi \oplus \mathbb{Z}^{n-3}$ ($\mathbb{Z}^{n-3} = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$, $n - 3$ cópias), da maneira apropriada, a aplicação $H_* \oplus I_{\pi_1(T^{n-3}, z_0)}$ é identificada à $\tau \oplus I_{\mathbb{Z}^{n-3}}$. Obtemos assim um isomorfismo $\xi : \pi_1(M^n, c_0) \rightarrow \pi \oplus \mathbb{Z}^{n-3}$ e, por conseguinte, uma extensão produto cruzado:

$$0 \rightarrow \pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3} \rightarrow (\pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3})_f \xrightarrow{\Delta_\phi} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

cuja classe de conjugação $\psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Out}(\pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3})$ é dada por $\psi(\bar{1}) = [\tau \otimes I_{\mathbb{Z}^{n-3}}]$. Por outro lado, o núcleo abstrato $(\mathbb{Z}_2, \pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3}, \psi)$ não se realiza. Para verificar isso, procedemos como no teorema 13, escolhendo $\phi(\bar{1}) = \tau \otimes I_{\mathbb{Z}^{n-3}}$ e $f(\bar{1}, \bar{1}) = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ e observando que se $h \in C_\phi^2(\mathbb{Z}_2, Z(\pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3}))$, então $h(\bar{1}, \bar{1}) = (0, x_2, 0, x_4, \dots, x_n)$, donde segue que $\delta^2 h(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = (0, 2x_2, 0, \dots, 0)$, enquanto uma obstrução k satisfaz: $k(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, logo $k \neq \delta^2 h$, $\forall h \in C_\phi^2(\mathbb{Z}_2, Z(\pi \otimes \mathbb{Z}^{n-3}))$.

§2 - APLICAÇÕES DE PERÍODO PAR

Fixemos um inteiro $\ell \geq 1$. A única diferença, com relação ao Capítulo II, na definição do espaço M^3 é o homeomorfismo $\eta : T^2 \rightarrow T^2$ que é, agora, definido por $\eta(z_1, z_2) = (z_1, z_1^{2\ell} z_2)$. Como no Capítulo II, obtemos a aplicação $p : M^3 \rightarrow S^1$ e demonstramos que (M^3, p, S^1, T^2) é um fibrado, de onde segue que M^3 é uma variedade fechada de dimensão três e que $p : M^3 \rightarrow S^1$ é uma fibração fraca com fibra T^2 , sendo que $i : T^2 \rightarrow p^{-1}(\{z_0\})$, $i(x) = (\overline{x}, 0)$, é um homeomorfismo.

No cálculo das homologias as alterações são as seguintes: $j_1 : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ é, agora, dado por

$$j_1(a, b, c, d) = (a + c, b - 2\ell c + d), \text{ logo}$$

$$g_1 = (i_1, -j_1) \text{ é dado por } g_1(a, b, c, d) =$$

$$= (a + c, b + d, -a - c, -b + 2\ell c - d) =$$

$$= (a + c)(1, 0, -1, 0) + (b + d)(0, 1, 0, -1) + 2\ell c(0, 0, 0, 1)$$

assim, obtemos a sequência exata:

$$0 \rightarrow \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 2\ell \mathbb{Z}} \rightarrow H_1(M^3) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

que fornece $H_1(M^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2\ell}$. Os demais grupos de homologia não se alteram e, em particular, M^3 é orientável.

O homeomorfismo $H: (M^3, b_0) \rightarrow (M^3, b_0)$ é definido como no Capítulo II e, por indução, verifica-se que $H^{2\ell}(\overline{z_1, z_2, t}) = \overline{(z_1, z_1^{2\ell} z_2, t)}$.

Na demonstração do teorema 9, fazemos as seguintes modificações nas aplicações f_1 , f e 0 :

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, t, s) &= \overline{(z_1, z_1^{2\ell} z_2, t + s)}, \\ f(z_1, z_2, t, s) &= \begin{cases} \overline{(z_1, z_1^{2\ell} z_2, t + s)} & \text{se } t + s \leq 1 \\ \overline{(z_1, z_2, t + s - 1)} & \text{se } t + s \geq 1 \end{cases} \\ 0(\overline{(z_1, z_2, t)}, s) &= \begin{cases} \overline{(z_1, z_1^{2\ell} z_2, t + s)} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 - s \\ \overline{(z_1, z_2, t + s - 1)} & \text{se } 1 - s \leq t \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

assim 0 é uma homotopia entre $H^{2\ell}$ e I_{M^3} .

Denotemos por θ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ tal que $\theta(1)$, em relação à base $((1, 0), (0, 1))$, é representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ell & 1 \end{pmatrix}$$

e por π o produto semi-direto $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \Delta_{\theta} \mathbb{Z}$. Segue, como no teorema 11, que

$$\pi_n(M^3, b_0) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } n > 1 \\ \pi & \text{se } n = 1, \end{cases}$$

sendo que, na demonstração do referido teorema, devemos fazer as seguintes modificações: $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_1 \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha_1 \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$ é a classe de homotopia do laço

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_0, z_0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\exp(3t-1), \exp((3t-1)2\ell), 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (z_0, z_0, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\delta_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} (z_0, z_0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\exp(3t-1), \exp((3t-1)2\ell), 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (z_0, z_0, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\tilde{\delta}_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (3t-1, (3t-1)2\ell, 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (1, 2\ell, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\tilde{\delta}_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} (2t, 0, 0) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 4\ell t - 2\ell, 0) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\delta_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} (\exp(2t), z_0, 0) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (z_0, \exp(4\ell t - 2\ell), 0) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

assim q o δ_2 é representante de $\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle^{2\ell} \in \pi_1(T^2, z_0)$ e nós obtemos:

$$(*) \quad \theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle^{2\ell}.$$

$$(**) \quad \theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle$$

segue sem alterações. Portanto, $\theta'(\langle e \rangle)$ é o automorfismo de $\pi_1(T^2, z_0)$ que, relativamente à base $(\langle \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_2 \rangle)$, é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ell & 1 \end{pmatrix}$$

e o teorema é concluído como no Capítulo II.

Para qualquer inteiro c , vale a equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ell & 1 \end{pmatrix}^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\ell c & 1 \end{pmatrix},$$

portanto a operação em π é dada por $(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y + 2\ell c x, c + z)$. O elemento neutro é $(0, 0, 0)$ e $-(a, b, c) = (-a, -b + 2\ell a c, -c)$, vale a equação $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$, $\forall (a, b, c) \in \pi$ e $Z(\pi) = \{(a, b, c) \in \pi \mid a = c = 0\}$.

O homomorfismo $\tau: \pi \rightarrow \pi$ é definido como no capítulo II e, por indução sobre $s \geq 0$, verifica-se que

$$\tau^{2s}(x, y, z) = (x, 2s x + y, z)$$

$$\tau^{2s+1}(x, y, z) = (-x, -(2s+1)x - y + z, z)$$

e como a conjugação por $(a, b, c) \in \pi$, $\sigma_{(a, b, c)}$, é dada por

$$\sigma_{(a, b, c)}(x, y, z) = (x, y + 2\ell(cx - az), z),$$

segue que $\tau^{2\ell} = \sigma_{(0, 0, 1)}$ e, fazendo $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, que τ^s não é automorfismo interno se $1 \leq s \leq 2\ell$.

O teorema 12 vale sem alterações em sua prova e como τ^s não é automorfismo interno se $1 \leq s < 2\ell$, segue que H tem período 2ℓ .

Suponhamos H homotópica a um homeomorfismo $K: M^3 \rightarrow M^3$ com $K^{2\ell} = I_{M^3}$ e sejam F, σ, σ_- como no Capítulo II. Consideremos a ação do grupo $\mathbb{Z}_{2\ell}$ no espaço M^3 , que leva $\bar{1}$ em K . Escolhendo os caminhos $P_{\bar{0}}$ e $P_{\bar{1}}$ como no Capítulo II e os demais caminhos P_g arbitrariamente, com $P_g(0) = b_0$ e $P_g(1) = g b_0$, obtemos uma extensão produto cruzado:

$$1 \rightarrow \pi_1(M^3, b_0) \rightarrow \pi_1(M^3, b_0) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow 0,$$

com $\phi: \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M^3, b_0))$ dada por $\phi(\bar{1}) = H_*$.

Procedendo como no capítulo anterior, obtemos uma extensão produto cruzado:

$$0 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_f \cdot \Delta_\phi \cdot \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow 0,$$

cuja classe de conjugação $\psi : \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow \text{Out}(\pi)$ é dada por $\psi(\bar{1}) = [\tau]$.

Como a obstrução de $(\mathbb{Z}_{2\ell}, \pi, \psi)$ é a classe de cohomologia de um 3-cociclo k cujo domínio é $\mathbb{Z}_{2\ell} \times \mathbb{Z}_{2\ell} \times \mathbb{Z}_{2\ell}$ e como a escolha natural de k fornece, por exemplo, $k(\bar{\ell}, \bar{\ell}, \bar{\ell}) = 0$ se ℓ é par, o método utilizado no capítulo II para mostrar que o núcleo abstrato não se realiza é pouco eficaz nesse caso. Procederemos de outro modo para fazê-lo (o caso $\ell = 1$ fornece outra demonstração para o teorema 13):

- Teorema 14) O núcleo abstrato $(\mathbb{Z}_{2\ell}, \pi, \psi)$ não se realiza.

- Demonstração) Suponhamos que exista uma extensão

$$0 \rightarrow \pi \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow 0$$

cuja classe de conjugação é ψ . Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{\phi}' & & \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \psi \\ 1 & \rightarrow & \text{In}(\pi) & \rightarrow & \text{Aut}(\pi) & \rightarrow & \text{Out}(\pi) \rightarrow 1, \end{array}$$

onde $\tilde{\phi}(x)(a) = x + a - x$ e $\tilde{\phi}'$ é a restrição apropriada de $\tilde{\phi}$, comuta. Como existe um elemento $e' \in E$ com $\tilde{\phi}(e') \in [\tau] \in \text{Out}(\pi)$, temos que $\tau = \tilde{\phi}(e')$ o $\tilde{\phi}(\alpha)$ para algum $\alpha \in \pi$, assim $\tau = \tilde{\phi}(e)$, onde $e = e' + \alpha \in E$.

Seja μ um levantamento da extensão

$$0 \rightarrow \pi \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}_{2\ell} \rightarrow 0,$$

então existem $a \in \pi$ e $y \in \mathbb{Z}_{2\ell}$ tais que $e = a + \mu(y)$, assim $2\ell e \in \pi$, pois $\mu(2\ell y) = 0$. $\tau(2\ell e) = e + 2\ell e - e = 2\ell e$, então $2\ell e = (0, b, 2b)$ para algum $b \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, $\tilde{\phi}(2\ell e) = (\tilde{\phi}(e))^{2\ell} = \tau^{2\ell} = \tilde{\phi}(0, 0, 1)$, então $-(0, 0, 1) + (0, b, 2b) = (0, b, 2b - 1) \in Z(\pi)$, o que é absurdo.

Para obtermos exemplos em variedades de di mensão $n > 3$, consideramos $M^n = M^3 \times T^{n-3}$ e procedemos como no §1 deste capítulo, exceto a demonstração final que é, agora, uma adaptação simples da do teorema 14.

§3 - APLICAÇÕES DE PERÍODO ÍMPAR

Seja ℓ um número inteiro maior ou igual a 2.

Neste parágrafo, J denota a matriz identida de de ordem $\ell - 1$. Um ponto $\tilde{z}$ de $T^{2\ell-2} \times I$ será, algumas vezes, denotado por (z, t) com $z \in T^{2\ell-2}$ e $t \in I$ e, outras vezes, por $(z_1, z_2, t) \in T^{\ell-1} \times T^{\ell-1} \times I$. Analogamente, um ponto $\tilde{x} \in \mathbb{B}^{2\ell-1}$ será algumas vezes denotado por $(x, x) \in \mathbb{B}^{2\ell-2} \times \mathbb{B}$ e outras por $(x_1, x_2, x) \in \mathbb{B}^{\ell-1} \times \mathbb{B}^{\ell-1} \times \mathbb{B}$. Se t é um número real, denotaremos a n -úpla ($n \geq 1$) de números reais $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$, onde t ocupa a j -ésima posição, por $e_j^n(t)$. Abreviaremos $e_j^{2\ell-1}(t)$ por $e_j(t)$ e $e_j^{2\ell-2}(t)$ por $e'_j(t)$. $\tilde{\alpha}_j$ denota a aplicação $\tilde{\alpha}_j : \mathbb{R} \rightarrow T^{2\ell-2}$, definida por $\tilde{\alpha}_j(t) = (z_0, \dots, z_0, \exp(t), z_0, \dots, z_0)$, com $\exp(t)$ na j -ésima coordenada, assim a restrição $\tilde{\alpha}_j|_{[0,1]}$ coincide com α_j . Se A e B são aplicações de $T^{2\ell-2}$ em $T^{2\ell-2}$, seu produto será denotado por AB e a composta por $A \circ B$, no entanto, a notação de potência será reservada para a composição e por aplicação inversa de A entendemos a inversa de A com relação à composição.

Sejam $\eta : T^{2\ell-2} \rightarrow T^{2\ell-2}$ o homeomorfismo re apresentado pela matriz

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix},$$

$\sim$ a relação de equivalência sobre $T^{2\ell-2} \times I$ dada por $(Z, t) \sim (Z, t)$ e $(Z, 0) \sim (\eta(Z), 1)$ e $M^{2\ell-1}$ o espaço quociente $\frac{T^{2\ell-2} \times I}{\sim}$.

De maneira análoga ao Capítulo II (basta substituir T^2 por $T^{2\ell-2}$), obtemos $p : M^{2\ell-1} \rightarrow S^1$ e mostramos que $(M^{2\ell-1}, p, S^1, T^{2\ell-2})$ é um fibrado, de onde segue que $M^{2\ell-1}$ é uma variedade fechada de dimensão $2\ell - 1$ e que $p : M^{2\ell-1} \rightarrow S^1$ é uma fibração fraca. Além disso, $i : T^{2\ell-2} \rightarrow p^{-1}(\{z_0\})$, dada por $i(x) = (\overline{x}, 0)$, é homeomorfismo.

O cálculo da $(2\ell - 1)$ -ésima homologia de $M^{2\ell-1}$ é análogo ao cálculo de $H_3(M^3)$ feito no capítulo II, sendo que T^2 é substituído por $T^{2\ell-2}$ e, desde que

$$\deg \eta^{-1} = \det \begin{pmatrix} J & 0 \\ -\ell J & J \end{pmatrix} = 1,$$

a induzida por η^{-1} em $H_{2\ell-2}(T^{2\ell-2}) \cong \mathbb{Z}$ é a identidade, assim $i_{2\ell-2}$, $j_{2\ell-2}$ e $g_{2\ell-2}$ coincidem, respectivamente, com i_2 , j_2 e g_2 do Capítulo II. Portanto $H_{2\ell-1}(M^{2\ell-1}) \cong \text{Ker}(g_{2\ell-2}) \cong \mathbb{Z}$, logo $M^{2\ell-1}$ é orientável.

Denotemos por b_0 o ponto $(\overline{z_0}, 0) \in M^{2\ell-1}$ e por C a matriz companheira do polinômio $p(x) = \frac{x^\ell - 1}{x - 1}$, isto é ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

a qual possui inversa:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a aplicação $A : T^{2\ell-2} \rightarrow T^{2\ell-2}$ representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ C & C \end{pmatrix}$$

possui inversa A^{-1} , a qual é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sejam $h, g : (T^{2\ell-2} \times I, (z_0, 0)) \rightarrow (T^{2\ell-2} \times I, (z_0, 0))$ as aplicações definidas por

$$h(z, t) = (A(z)\alpha_\ell(t), t)$$

$$g(z, t) = (A^{-1}(z)\alpha_\ell(t)(\alpha_{\ell+1}(t))^{-1}, t).$$

Temos então:

$$h \circ g(z, t) =$$

$$= (z A(\alpha_\ell(t)) (A(\alpha_{\ell+1}(t))^{-1} \alpha_\ell(t), t) =$$

$$\begin{aligned}
&= (Z (\alpha_{2\ell-2}(t))^{-1} (\alpha_{\ell}(t) (\alpha_{2\ell-2}(t))^{-1})^{-1} \alpha_{\ell}(t), t) = \\
&= (Z, t) \quad e \\
g \circ h (Z, t) &= \\
&= (Z A^{-1}(\alpha_{\ell}(t)) \alpha_{\ell}(t) (\alpha_{\ell+1}(t))^{-1}, t) = \\
&= (Z (\alpha_{\ell}(t))^{-1} \alpha_{\ell+1}(t) \alpha_{\ell}(t) (\alpha_{\ell+1}(t))^{-1}, t) = \\
&= (Z, t),
\end{aligned}$$

logo $g = h^{-1}$. Além disso, h e h^{-1} são contínuas e como a matriz

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix}$$

comuta com as matrizes

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ C & C \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix},$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
h(Z, 0) &= (A(Z), 0) \sim (\eta(A(Z)), 1) = \\
&= (A(\eta(Z)), 1) = h(\eta(Z), 1)
\end{aligned}$$

e analogamente

$$h^{-1}(Z, 0) \sim h^{-1}(\eta(Z), 1),$$

logo h e h^{-1} preservam relações.

Seja $H : (M^{2\ell-1}, b_0) \rightarrow (M^{2\ell-1}, b_0)$ o homeo morfismo induzido por h .

- Teorema 15) $H^{\ell} : M^{2\ell-1} \rightarrow M^{2\ell-1}$ é homotópica à $I_{M^{2\ell-1}}$.

- Demonstração) Segue, por indução sobre $s \geq 1$, que

$$\begin{aligned}
h^s(Z, t) &= (A^s(Z) A^{s-1}(\alpha_{\ell}(t)) \dots A(\alpha_{\ell}(t)) \alpha_{\ell}(t), t), \\
&\text{em particular,}
\end{aligned}$$

$$h^{\ell}(Z, t) = (A^{\ell}(Z) (A^{\ell-1} \dots A I_{T^{2\ell-2}}) (\alpha_{\ell}(t)), t).$$

Como o polinômio característico de C é $\pm p(x)$, a matriz

$$\begin{pmatrix} C^{\ell-1} + \dots + C + J & 0 \\ (\ell-1)C^{\ell-1} + \dots + 1C & C^{\ell-1} + \dots + C + J \end{pmatrix},$$

que representa $A^{\ell-1} \dots A I_{T^{2\ell-2}}$, é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\ell-1)C^{\ell-1} + \dots + 1C & 0 \end{pmatrix},$$

portanto $(A^{\ell-1} \dots A I_{T^{2\ell-2}}) (\alpha_{\ell}(t)) = z_0$.

Por outro lado, A^{ℓ} é representada por

$$\begin{pmatrix} C^{\ell} & 0 \\ \ell C^{\ell} & C^{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix},$$

assim $A^{\ell} = \eta$.

Temos portanto: $h^{\ell}(Z, t) = (\eta(Z), t)$.

Sejam $F_1 = \{(Z, t, s) \in T^{2\ell-2} \times I \times I / t + s \leq 1\}$ e $F_2 = \{(Z, t, s) \in T^{2\ell-2} \times I \times I / t + s \geq 1\}$. As aplicações $f_1 : F_1 \rightarrow M^{2\ell-1}$, $f_1(Z, t, s) = (\eta(Z), t + s)$, e $f_2 : F_2 \rightarrow M^{2\ell-1}$, $f_2(Z, t, s) = (\eta(Z), t + s - 1)$, são contínuas e coincidem em $F_1 \cap F_2$, logo $f : T^{2\ell-2} \times I \times I \rightarrow M^{2\ell-1}$, definida por

$$f(Z, t, s) = \begin{cases} (\eta(Z), t + s) & \text{se } t + s \leq 1 \\ (\eta(Z), t + s - 1) & \text{se } t + s \geq 1, \end{cases}$$

é contínua.

Por outro lado, $q \times I_I : (T^{2\ell-2} \times I) \times I \rightarrow M^{2\ell-1} \times I$, definida por $q \times I_I((Z, t), s) = (\overline{(Z, t)}, s)$, é uma identificação e, pelo teorema da transgressão, nós obtemos a homotopia $0 : M^{2\ell-1} \times I \rightarrow M^{2\ell-1}$, definida por

$$0(\overline{(Z, t)}, s) = \begin{cases} (\overline{n(Z)}, t+s) & \text{se } 0 \leq t \leq 1-s \\ (\overline{Z}, t+s-1) & \text{se } 1-s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

entre H^ℓ e $I_{M^{2\ell-1}}$.

Suponhamos que H seja homotópica a um homeomorfismo $K : M^{2\ell-1} \rightarrow M^{2\ell-1}$ com $K^\ell = I_{M^{2\ell-1}}$ e consideremos a ação do grupo $\mathbb{Z}_\ell$ no espaço $M^{2\ell-1}$ que leva $\bar{1}$ em K . Sejam $P_{\bar{0}}$ e $P_{\bar{1}}$ caminhos em $M^{2\ell-1}$ definidos como no Capítulo II e P_g , $g \in \{\bar{2}, \dots, \overline{\ell-1}\}$, caminhos arbitrários ligando b_0 à gb_0 . Obtemos então uma extensão produto cruzado:

$$1 \rightarrow \pi_1(M^{2\ell-1}, b_0) \rightarrow \pi_1(M^{2\ell-1}, b_0) \rtimes_{\Delta_\phi} \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0$$

e, como no Capítulo II, segue que $\phi(\bar{1}) = H_*$.

Denotemos por θ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{2\ell-2})$ tal que $\theta(1)$, em relação à base canônica de $\mathbb{Z}^{2\ell-2}$, é representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix}$$

e por π o produto semi-direto $\mathbb{Z}^{2\ell-2} \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$.

$$\text{- Teorema 16) } \pi_n(M^{2\ell-1}, b_0) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } n > 1 \\ \pi & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

- Demonstração) A sequência exata de homotopia da fibração $p : M^{2\ell-1} \rightarrow S^1$, fornece $\pi_n(M^{2\ell-1}, b_0) \cong 1$ se $n > 1$ e a ex

tensão cindida:

$$1 \rightarrow \pi_1(T^{2\ell-2}, z_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M^{2\ell-1}, b_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow 1.$$

O laço $\gamma : I \rightarrow M^{2\ell-1}$, $\gamma(t) = (\overline{z_0}, t)$ satisfaz $p_*(\langle \gamma \rangle) = \langle e \rangle$, portanto $\pi_1(M^{2\ell-1}, b_0)$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(T^{2\ell-2}, z_0) \Delta_{\theta'} \pi_1(S^1, z_0)$, onde $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$, conforme o teorema 1.

$\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_j \rangle = \langle \gamma \rangle \langle \alpha_j \rangle \langle \gamma \rangle^{-1}$ é a classe de homotopia do laço

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{z_0}, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\overline{\tilde{\alpha}_j(3t-1)}, 0) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (\overline{z_0}, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (\overline{z_0}, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\eta(\tilde{\alpha}_j(3t-1)), 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (\overline{z_0}, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

que é o composto q o δ_j , onde $\delta_j : I \rightarrow T^{2\ell-1} \times I$ é o laço, com ponto base $(z_0, 0)$,

$$\delta_j(t) = \left\{ \begin{array}{l} (z_0, 3t) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\eta(\tilde{\alpha}_j(3t-1)), 1) \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (z_0, 3-3t) \text{ se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Denotemos por $\tilde{\delta}_j$ o levantamento, começando em $e_1(0)$, de δ_j no espaço de recobrimento universal $R^{2\ell-2} \times I$ de $T^{2\ell-2} \times I$ e observemos que

$$\eta(\tilde{\alpha}_j(3t-1)) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_j(3t-1) \text{ se } j \geq \ell \\ \tilde{\alpha}_j(3t-1) \tilde{\alpha}_{j+\ell-1}(3lt-\ell) \text{ se } j < \ell. \end{array} \right.$$

Consideremos separadamente os casos $j \geq l$ e $j < l$.

Se $j \geq l$,

$$\tilde{\delta}_j(t) = \begin{cases} e_{2l-1}(3t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ e_j(3t-1) + e_{2l-1}(1) & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ e_j(1) + e_{2l-1}(3-3t) & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

assim $\tilde{\delta}_j$ possui mesmo ponto final que $\tilde{\lambda}_j : I \rightarrow \mathbb{R}^{2l-2} \times I$,
 $\tilde{\lambda}_j(t) = e_j(t)$, que é o levantamento, começando em $e_1(0)$,
de $\lambda_j(t) = (\alpha_j(t), 0)$, logo $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_j \rangle$ é a classe de homotopia do laço q o $\lambda_j(t) = (\alpha_j(t), 0)$ que é um representante de $\langle \alpha_j \rangle \in \pi_1(T^{2l-2}, z_0)$.

Se $j < l$,

$$\tilde{\delta}_j(t) = \begin{cases} e_{2l-1}(3t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ e_j(3t-1) + e_{j+l-1}(3lt-l) + e_{2l-1}(1) & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ e_j(1) + e_{j+l-1}(l) + e_{2l-1}(3-3t) & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

assim $\tilde{\delta}_j$ possui mesmo ponto final que

$$\tilde{\beta}_j(t) = \begin{cases} e_j(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ e_j(1) + e_{j+l-1}(2lt-l) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que é o levantamento, começando em $e_1(0)$, de

$$\begin{aligned} \beta_j(t) &= \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\alpha}_j(2t), 0) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\tilde{\alpha}_{j+l-1}(2lt-l), 0) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_j(2t), 0) \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((\alpha_{j+l-1}(2t-1))^l, 0) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{array} \right. \end{aligned}$$

logo $\theta'(\langle e \rangle) \langle \alpha_j \rangle$ é a classe de homotopia do laço $\alpha \circ \beta_j$ que é um representante de $\langle \alpha_j \rangle \langle \alpha_{j+\ell-1} \rangle^\ell$.

Resumindo, $\theta'(\langle e \rangle)$ é o automorfismo de $\pi_1(T^{2\ell-2}, \mathbb{Z}_0)$ que, relativamente à base $(\langle \alpha_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_{2\ell-2} \rangle)$, tem matriz

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix}.$$

A demonstração é concluída de forma completamente análogo à do teorema 11.

Para qualquer inteiro n vale a equação:

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} J & 0 \\ n\ell J & J \end{pmatrix},$$

portanto a operação em π é dada por

$$(X_1, X_2, x) + (Y_1, Y_2, y) = \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ x\ell J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, x + y \right),$$

ou ainda $(X, x) + (Y, y) = (X + Y + x\ell EY, x + y)$, onde E denota a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

de ordem $2\ell-2$,

$$-(X_1, X_2, x) = \left(\begin{pmatrix} -J & 0 \\ x\ell J & -J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, -x \right)$$

e $\forall (x_1, \dots, x_{2\ell-1}) \in \pi$, vale a equação

$$(x_1, \dots, x_{2\ell-1}) = x_1 e_1(1) + \dots + x_{2\ell-1} e_{2\ell-1}(1).$$

Seja $\tau : \pi \rightarrow \pi$ a aplicação definida por

$$\tau(X, x) = (AX + e'_\ell(x), x).$$

Como E e A comutam e $E e'_\ell(y) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \tau((X, x) + (Y, y)) &= \\ &= (AX + AY + x\ell A E Y + e'_\ell(x+y), x+y) = \\ &= (AX + e'_\ell(x) + AY + e'_\ell(y) + x\ell E (AY + e'_\ell(y)), x+y) = \\ &= \tau(X, x) + \tau(Y, y), \end{aligned}$$

assim τ é homomorfismo.

Por indução sobre $s \geq 1$, segue que

$$\tau^s(X, x) = (A^s X + A^{s-1} e'_\ell(x) + \dots + A e'_\ell(x) + e'_\ell(x), x).$$

Por outro lado, a conjugação por um elemento

$(B, b) = (B_1, B_2, b) \in \pi$, $\sigma_{(B,b)}$, é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{(B,b)}(X, x) &= \\ &= (B, b) + (X, x) - (B, b) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ b\ell J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ (b+x)\ell J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J & 0 \\ b\ell J & -J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. x \right) = \\ &= (X + b\ell EX - x\ell EB, x). \end{aligned}$$

$$\text{Se } \tau^s(X_1, X_2, x) = \sigma_{(B_1, B_2, b)}(X_1, X_2, x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{pmatrix} C^s & 0 \\ sC^s & C^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^{s-1} + \dots + C + J & 0 \\ (s-1)C^{s-1} + \dots + 1C & C^{s-1} + \dots + C + J \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ e_1^{\ell-1}(x) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b \ell \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - x \ell \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (C^s - J)X_1 = 0$ e, variando X_1 , obtemos $C^s = J$, o que não pode ocorrer se $1 \leq s < \ell$ pois o polinômio minimal de C é $p(x)$.

Se $s = \ell$, temos

$$\begin{aligned} \tau^\ell(X_1, X_2, x) &= \\ &= \begin{pmatrix} J & 0 \\ \ell J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + 1\ell \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - x \ell \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_{e_{2\ell-1}(1)}(X_1, X_2, x), \end{aligned}$$

$$\text{logo } \tau^\ell = \sigma_{e_{2\ell-1}(1)}.$$

- Teorema 17) Identificando $\pi_1(M^{2\ell-1}, b_0)$ com o grupo π , conforme o teorema 16, o automorfismo H_* , de $\pi_1(M^{2\ell-1}, b_0)$, é identificado ao automorfismo τ , de π , acima definido.

- Demonstração) É suficiente provar que H_* coincide com τ nos pontos $e_j(1)$, $1 \leq j \leq 2\ell - 1$.

Consideremos os laços v_j , $1 \leq j \leq 2\ell - 2$, e γ em $M^{2\ell-1}$, definidos por $v_j(t) = (\overline{a_j(t)}, 0)$ e $\gamma(t) = (\overline{z_0}, t)$.

Com as notações do teorema 12 (T^2 é substituído por $T^{2\ell-2}$, M^3 por $M^{2\ell-1}$ e $\mathbb{S}^2$ por $\mathbb{S}^{2\ell-2}$), obtemos:

$$r^{-1}v^{-1}(e_j(1)) = r^{-1}(\langle \alpha_j \rangle, \langle c_0 \rangle) = \langle v_j \rangle \quad \text{se } 1 \leq j \leq 2\ell - 2,$$

$$r^{-1}v^{-1}(e_{2\ell-1}(1)) = r^{-1}(\langle d_0 \rangle, \langle e \rangle) = \langle \gamma \rangle.$$

Por outro lado:

$$H \circ v_j(t) = H(\overline{\alpha_j(t)}, 0) = (\overline{A(\alpha_j(t))}, 0),$$

$$H \circ \gamma(t) = H(\overline{Z_0}, t) = (\overline{\alpha_\ell(t)}, t).$$

Temos então:

$$\begin{aligned} vr(\langle H \circ v_j \rangle) &= vr(\langle \overline{A \circ \alpha_j}, 0 \rangle) = \\ &= v(\langle A \circ \alpha_j \rangle, \langle c_0 \rangle) = (A e'_j(1), 0) = \tau(e_j(1)). \end{aligned}$$

Já $\langle H \circ \gamma \rangle$ é o produto da classe do laço s , de $M^{2\ell-1}$, definido por

$$s(t) = \begin{cases} \overline{\alpha_\ell(2t)}, 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2(1-t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

com a classe de γ . O laço s é homotópico à v_ℓ pois eles podem ser vistos como compostos: $s = q \circ s'$ e $v_\ell = q \circ v'_\ell$, com s' e v'_ℓ homotópicos, assim $\langle H \circ \gamma \rangle = \langle v_\ell \rangle \langle \gamma \rangle$, logo

$$vr(\langle H \circ \gamma \rangle) = v(\langle \alpha_\ell \rangle, \langle e \rangle) = (e'_\ell(1), 1) = \tau(e_{2\ell-1}(1)).$$

- *Corolário*) A aplicação H tem período ℓ .

- *Demonstração*) Segue do teorema 15 e do fato que a induzida por H^s em $\pi_1(M^{2\ell-1}, b_0)$ não é automorfismo interno se $1 \leq s < \ell$.

Procedendo como no Capítulo II, obtemos uma extensão produto cruzado:

$$0 \rightarrow \pi \rightarrow \pi \times \Delta \dots \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0,$$

cuja classe de conjugação $\psi: Z_\ell \rightarrow \text{Out}(\pi)$ é dada por $\psi(\bar{1}) = \{\tau\}$.

Para concluir, demonstraremos que o núcleo abstrato (Z_ℓ, π, ψ) não se realiza. Com esse propósito, observe-mos inicialmente que (X_1, X_2, x) comuta com (A_1, A_2, a) se, e só se, $x A_1 = a X_1$, de onde segue que $Z(\pi) = \{(A_1, A_2, a) \in \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z} / A_1 = 0 \text{ e } a = 0\}$.

- Teorema 18) O núcleo abstrato $(\mathbb{Z}_\ell, \pi, \psi)$ não se realiza.

- Demonstração) Como no teorema 14 (substituindo 2ℓ por ℓ), obtemos $\ell e = (X_1, X_2, x) \in \pi$ com $\tau(\ell e) = \ell e$. Obtemos então a equação

$$\left(\begin{pmatrix} C & 0 \\ C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + e'_\ell(x), x \right) = (X_1, X_2, x),$$

em particular $C X_1 = X_1$, portanto $X_1 = 0$, desde que 1 não é auto-valor de C . Segue então que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ C X_2 \end{pmatrix} + e'_\ell(x), x \right) = (0, X_2, x)$$

ou, em coordenadas:

$$\begin{cases} x_{\ell+1} + x = x_\ell \\ x_{\ell+2} = x_{\ell+1} \\ \vdots \\ x_{2\ell-2} = x_{2\ell-3} \\ -x_\ell - x_{\ell+1} - \dots - x_{2\ell-2} = x_{2\ell-2}, \end{cases}$$

logo $x = -\ell x_{\ell+1}$ e assim ℓ divide x , em particular $x \neq 1$.

Por outro lado, $\bar{\phi}(\ell e) = (\bar{\phi}(e))^\ell = \tau^\ell = \bar{\phi}(e_{2\ell-1}(1))$, então $-e_{2\ell-1}(1) + \ell e \in Z(\pi)$, o que é ab

BIBLIOGRAFIA

- CONNER; P.E. & RAYMOND, F. Manifolds with few periodic homeomorphisms. In: PROCEEDINGS of the second conference on compact transformation groups. Berlin, Springer - Verlag, 1972. v.2, p. 1-76. (Lecture Notes in Mathematics, 299).

- DUGUNDJI, J. Topology. Boston, Allyn and Bacon, 1966. 447 p. (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics).

- GREENBERG, M.J. Lectures on algebraic topology. Menlo Park, Ca., W. A. Benjamin, 1966. 235 p. (Mathematics Lecture Notes).

- HILTON, P.J. An introduction to homotopy theory. Cambridge, University Press, 1964. 142 p. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 43).

- MAC LANE, S. Homology. Berlin, Springer - Verlag, 1967. 422 p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 114).

- MAC LANE; S. & BIRKHOFF, G. Algebra. New York, Macmillan; London, Collier - Macmillan, 1967. 598 p.

- RAYMOND, F. & SCOTT, L.L. Failure of Nielsen's theorem in higher dimensions. Arch. Math., 29(6): 643-54, 1977.

- ROTMAN, J.J. Notes on homological algebras. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970. 211 p. (Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, 26).
- SPANIER, E.H. Algebraic topology. New York, Mc Graw-Hill , 1966. 528 p. (Mc Graw-Hill Series in Higher Mathematics).
- SWITZER, R.M. Algebraic topology: homotopy and homology . Berlin, Springer - Verlag, 1975. 526p. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 212).
- VICK, J.W. Homology theory: an introduction to algebraic topology. New York, Academic Press, 1973. 237p. (Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks).