**"PERIODICIDADE PARA UMA CLASSE DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS-DIFERENÇA"**

JOSÉ CARLOS RODRIGUES

Orientador : Prof. Dr. Plácido Zóegas Táboas

**Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de Mestre em Matemática.**

SÃO CARLOS

1989

A meus pais ;
A companheira Silvia ;
E a todos os trabalhadores .

AGRADECIMENTOS

A todos os meus amigos , ao Prof^o Dr. Plácido Zóegas Táboas, pela firmeza e lealdade , ao Prof^o Dr. Luiz Carlos Ladeira pela grande ajuda , à Alice Christina Vaz Ibanhes de Lima pela edição e de maneira muito especial , à querida Silvia , pelo companheirismo.

Este trabalho dependeu parcialmente das seguintes instituições : FAPESP e CAPES .

ABSTRACT

This work is concerned with the differential-difference equation

$$\dot{X}(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), \alpha > 0$$

where f_{α} is an odd simple function. We use the concept of ejectiveity to show the existence of nontrivial periodic solutions for any $\alpha > 0$. By elementary arguments we also show the uniqueness of these solutions for each $\alpha < 2$ and the existence of at least two such solutions for each $\alpha \geq 2$.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I	1
I-a) Equação diferencial com retardamento	1
I-b) Resultados importantes	6
CAPÍTULO II	14
II-a) A equação $\dot{X}(t) = -f_{\alpha}(X(t-1))$ e suas propriedades	14
II-b) Existência de soluções periódicas	16
II-c) Unicidade de soluções periódicas para $0 < \alpha \leq 1$	34
CAPÍTULO III	38
III-a) Unicidade de soluções periódicas para $1 < \alpha < 2$	39
III-b) Existência de pelo menos duas soluções periódicas para $\alpha \geq 2$	57
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um estudo de uma equação diferencial-diferença.

$$(*) \quad \dot{X}(t) = -f_{\alpha}(X(t-1))$$

onde o campo vetorial é descontínuo (f_{α} é uma função simples e ímpar) e $\alpha > 0$ é um parâmetro real. Esta equação tem sido objeto de interesse nos anos recentes, veja [H,Peters], por exemplo.

Inicialmente demos alguns fatos básicos da teoria geral das equações diferenciais com retardamento contidos em [Onuchic,N] e [Hale,J.K.] que embora não se ajustam perfeitamente a situação de campos descontínuos servem para definir um contexto conveniente para o nosso estudo.

As propriedades específicas de (*) são demonstradas explicitamente.

Nosso objetivo é demonstrar, para o estudo de soluções periódicas da equação (■) a utilidade do método funcional analítico que depende do conceito de ejetividade, devido a Browder [Browder,S.E]. Ao nosso ver esta é a primeira vez que esse método é empregado ao estudo de (■).

No capítulo III usamos argumentos elementares para mostrar que existe uma única solução periódica não trivial, com condição inicial crescente, para $0 < \alpha < 2$ e que, $\alpha \geq 2$, existem pelo menos duas, sendo $\alpha = 2$, portanto, um ponto de bifurcação.

CAPÍTULO I

I - 1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM RETARDAMENTO

Sejam $\mathbb{R}^m$ o espaço vetorial m -dimensional, $\|\cdot\|$ sua norma e $C([a,b],\mathbb{R}^m)$ o espaço de Banach das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ com valores no $\mathbb{R}^m$ e munido da norma do supremo.

Se $[a,b] = [-h,0]$ para $h \geq 0$ então $C = C([-h,0],\mathbb{R}^m)$ e se $\varphi \in C$ temos $\|\varphi\| = \sup \{ \|\varphi(\theta)\| \mid -h \leq \theta \leq 0 \}$.

Definição I-1 :

Suponhamos $A \geq 0$, $X:[t_0-h, t_0+A] \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definimos $x_t: [-h,0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ da seguinte forma

$X_t(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} X(t+\theta)$, para $t \in [t_0, t_0 + A]$ e $-h \leq \theta \leq 0$.

Observemos que:

i) X_t é contínua, isto é, $X_t \in C$.

ii) A aplicação $t \mapsto X_t$, para $t \in [t_0, t_0 + A]$ é contínua.

Definição I-2 :

Sejam D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma

aplicação e $\cdot = \frac{d}{dt}$.

Definimos como equação diferencial com retardamento a seguinte equação.

$$(I.1) \quad \dot{X}(t) = f(t, X_t).$$

Observações :

i) Se $h = 0$, então a equação (I.1) é uma equação diferencial ordinária.

ii) A diferenciabilidade de X em alguns pontos pode não existir, sendo desta maneira convecionado que a diferenciabilidade seja tomada sempre à direita, isto é ,

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt^+} .$$

I - 2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Dada a equação (I.2) $\dot{X}(t) = f(t, X_t)$ e sejam $t_0 \in \mathbb{R}$,

$A > 0$ e $\Psi \in \mathbb{C}$.

Definição I-3 :

A função $X \in \mathbb{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^m)$ é solução da equação

(I.2) com função inicial Ψ em t_0 se, e somente se:

i) $X_t \in \mathbb{C}$, para todo $t \in [t_0, t_0 + A]$

$$ii) X_{t_0} \equiv \Psi$$

$$iii) \dot{X}(t) = f(t, X_t), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + A]$$

Desta forma dizemos que $X = X(t_0, \Psi)$ é solução da equação

(I.2) com valor inicial Ψ em t_0 ou simplesmente solução de

(I.2) em $[t_0 - h, t_0 + A]$ e $X_{t_0}(t_0, \Psi) \equiv \Psi$.

Teorema I-1: Existência

Suponhamos D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua.

Se $(t_0, \Psi) \in D$ então existe uma solução da equação (I.2) passando através de (t_0, Ψ) .

Observação

Se garantirmos que f seja localmente lipschitziana em

relação à segunda variável então podemos concluir também a unicidade da solução.

1-3 Extensão das Soluções

Seja $f:D \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua e de alguma maneira temos garantida a unicidade de soluções relativamente ao problema de função inicial, então as seguintes propriedades são verdadeiras.

a) Se X é solução da equação (1.2) definida em $[t_0 - h, t_0 + A]$ para $0 < A < \infty$ e limitada neste intervalo então X é prolongável à direita como solução da equação (1.2).

b) Se X é solução da equação (1.2) definida em $[t_0 - h, t^+)$, para $t_0 \leq t^+ \leq \infty$, limitada neste intervalo e se f leva subconjuntos limitados de D em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^m$ então

garantimos que $t^+ = \infty$. Dizemos neste caso que X é limitada no futuro.

c) Em geral não podemos prolongar X como solução da equação (I.2) à esquerda de $[t_0 - h, t^+)$, isto é, não garantimos a existência de $\delta > 0$ e uma função definida em $[t_0 - h - \delta, t^+)$ que coincida com X em $[t_0 - h, t^+)$ e ainda satisfaça a equação (I.2) neste novo intervalo.

I-4 Resultados Importantes

Definição I-4:

Sejam E um espaço de Banach, M um subconjunto não vazio de E .

Definimos que M é convexo se para quaisquer φ , ψ pertencentes a M , o elemento dado por $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$ pertencer a M , para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definição 1-5:

Dizemos $K \subset E$ é um cone se satisfizer as seguintes condições:

i) K é fechado e convexo..

ii) se $\varphi \in K$ então $\lambda\varphi \in K$, para $\lambda \geq 0$.

iii) Para $\varphi \neq 0$ em E então ambos φ e $-\varphi$ não podem pertencer simultaneamente a K .

Exemplo

Seja $K \subset C([-1,0],\mathbb{R})$ onde $K = \{ \varphi \in C([-1,0],\mathbb{R}) \mid \varphi(-1)=0$

e φ é crescente em $[-1,0]$.

Desta forma K é um cone.

Definição I-6:

Definimos que K é um cone Truncado se é a intersecção de um cone com uma vizinhança conexa da origem.

Definição I-7:

Seja K um cone (ou cone truncado) em E .

i) dado $\varphi \in K$, dizemos que φ é um vetor positivo.

ii) Dado $A: D(A) \subseteq E \rightarrow E$ um operador se $A(D(A) \cap K) \subset K$

então A é chamado um operador positivo.

iii) Se A é um operador positivo e existir um vetor positivo $\varphi \neq 0$ tal que $A\varphi = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ então φ é chamado auto-vetor positivo de A .

Definição I-8:

Um operador $A: D(A) \rightarrow E$ é compacto se para todo conjunto

limitado B de $D(A)$, o conjunto $A(B)$ é relativamente compacto em E .

Definição I-9:

O operador $A:D(A) \rightarrow E$ é completamente contínuo se é compacto e contínuo.

Teorema I-2 :Ascoli - Arzela

Seja H um conjunto de aplicações contínuas $f:U \rightarrow N$ onde U é um conjunto compacto.

Afim que $H \subset C(U,N)$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que:

1) H seja equicontínuo.

2) Para cada $x \in U$, o conjunto $H(x)$ seja relativamente compacto em N .

Seja E um espaço de Banach.

Definição I-10:

Dado M um número real positivo, definimos os conjuntos

$$S_M = \{ u \in E / \| u \| = M \} \text{ e } B_M = \{ u \in E / \| u \| < M \} \text{ em } E,$$

como sendo a esfera de raio M e bola de raio M respectivamente.

Definição I-11:

Sejam $U \subset E$ convexo e $u_0 \in U$.

Dizemos que u_0 é ponto extremo de U se para quaisquer $u_1, u_2 \in U$ tal que se $u_0 \in (tu_1 + (1-t)u_2, t \in [0,1])$ então $u_0 = u_1$ ou $u_0 = u_2$.

Definição I-12:

Dados $U \subset E$, $u_0 \in U$ e um operador $S: U \setminus \{u_0\} \rightarrow E$ dizemos que u_0 é ponto ejetivo de S se existe uma vizinhança aberta G de

u_0 contida em E , tal que para todo $y \in G \cap U$ com $y \neq u_0$,

existe $n = n(y) \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(y) \notin G \cap U$.

O seguinte teorema é devido a R. Nussbaum

TEOREMA I-3

Seja E um espaço de Banach.

Se $U \subset E$ é convexo e fechado $S:U \setminus \{0\} \longrightarrow U$ é completamente contínua, 0 é ponto ejetivo de S e $\exists M > 0$ / $S(u) = \lambda u, u \in U \cap S_M$ implica que $\lambda < 1$ então S tem um ponto fixo em $U \cap B_M \setminus \{0\}$.

Se U é de dimensão infinita ou 0 é ponto extremo de U , então as condições são verdadeiras.

O próximo resultado que geometricamente é evidente será de grande utilidade.

Lema I-1

Seja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta, & \text{se } a \leq x \leq c \\ \alpha_2 x + (\alpha_1 - \alpha_2)c + \beta, & \text{se } c \leq x \leq b \end{cases}$$

onde $a < c < b$ e α_1, α_2 e $\beta \in \mathbb{R}$.

Dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$ temos que:

$$\min \{ \alpha_1, \alpha_2 \} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \max \{ \alpha_1, \alpha_2 \}$$

Demonstração

Basta considerar o caso $x_1 < c < x_2$ e mostrar que as

relações :

$$f(x_2) - f(x_1) = \alpha_2 (x_2 - c) + \alpha_1 (c - x_1) \text{ e}$$

$\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \alpha_1, \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq \alpha_2$ implicam em

$$f(x_2) - f(x_1) \leq (x_2 - x_1) \max\{\alpha_1, \alpha_2\},$$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq (x_2 - x_1) \min\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Dai concluímos o lema I-1, uma vez que os casos $x_2 < c$ e

$x_1 > c$ são consequências diretas do teorema da média.

CAPÍTULO II

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a seguinte

equação:

$$(1) \dot{X}(t) = - f_{\alpha}(X(t-1)), \quad t \geq 0 \text{ onde } \alpha > 0$$

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \\ f_{\alpha}(0) = 0 \\ f_{\alpha}(x) = - f_{\alpha}(-x) \end{cases}$$

e mais, tomando as condições iniciais no cone

$$K = \{ \varphi \in C([-1, 0], \mathbb{R}), \quad / \quad \varphi(-1) = 0 \text{ e } \varphi \text{ é crescente em } [-1, 0] \}.$$

Observemos que esta equação pode ser escrita sob a

seguinte forma :

$$\dot{X}(t) = - F_{\alpha}(X_t), \text{ onde, } F_{\alpha}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} / F_{\alpha}(\varphi) = f_{\alpha}(\varphi(-1)).$$

Desta maneira o teorema I-1 (existência) não se aplica diretamente uma vez que a função F_{α} é descontínua em $\{ \varphi \in \mathbb{C} / \|\varphi\| = 1 \}$ e $\varphi \equiv 0$.

Na verdade, a função F_{α} não satisfaz nem mesmo as condições de Caratheodory, que são mais fracas. (Veja Hale pág.55).

Por isto vamos dar uma demonstração da existência de soluções de (1) com condições iniciais no cone K.

Uma solução de (1) é uma função contínua X tal que satisfaz (1) em todos os pontos onde $f_{\alpha}(X(t-1))$ é contínua. Nos valores de t para os quais $f_{\alpha}(X(t-1))$ é descontínua, X pode não ser diferenciável.

Teorema II-1

Dada a equação (1) com condição inicial $\varphi \in K$, existe uma única solução contínua $X(\alpha, 0, \varphi, t) = X(t)$ tal que $X_0 = \varphi$ e $\dot{X}(t) = -f_\alpha(X(t-1))$, qtp, para $0 \leq t < \infty$.

Demonstração:

A demonstração deste teorema é feita por recorrência.

Se $\varphi \equiv 0$, lembrando que $f_\alpha(0) = 0$ temos, que

$X(\alpha, 0, 0, t) = 0$ para $t \in [-1, \infty)$.

Seja $\varphi \in K$, com $\varphi \not\equiv 0$.

Encontremos primeiramente solução (1) para $t \in [0, 1]$ a qual denotaremos por $X^1(t)$.

Suponhamos que não exista δ ; $0 \leq \delta < 1$ tal que

$$\varphi(-\delta) > 1, \text{ daí } \dot{X}^1(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), \quad t \in [0,1] \rightarrow$$

$$(t-1) \in [-1,0) \text{ e } X(t-1) = \varphi(t-1) \leq 1 \rightarrow f_{\alpha}(X(t-1)) = \alpha,$$

$$t \in [0,1] \rightarrow \dot{X}^1(t) = -\alpha, t \in [0,1] \rightarrow X^1(t) = \varphi(0) - \alpha(t),$$

$$t \in [0,1].$$

Caso exista δ , $0 \leq \delta < 1$ tal que $\varphi(-\delta) = 1$ e $\varphi(\theta) > 1$

para $-\delta < \theta \leq 0$, temos:

$$\dot{X}^1(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), \quad t \in [0,1-\delta], \quad \text{mas}$$

$$(t-1) \in [-1,-\delta] \Rightarrow X(t-1) = \varphi(t-1) \leq 1 \Rightarrow -f_{\alpha}(X(t-1)) = -\alpha \Rightarrow$$

$$\dot{X}^1(t) = -\alpha, t \in [0,1-\delta] \Rightarrow X^1(t) = \varphi(0) - \alpha t \text{ para } t \in [0,1-\delta].$$

$$\dot{X}^1(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), t \in [1-\delta,1]. \text{ Mas } (t-1) \in (-\delta,0)$$

$$\Rightarrow X(t-1) = \varphi(t-1) > 1. \text{ Assim } (t-1) \in (-\delta,0) \Rightarrow -f_{\alpha}(X(t-1)) = -1$$

$$\Rightarrow \dot{X}^1(t) = -1, t \in [1-\delta,1] \Rightarrow X^1(t) = \varphi(0) - \alpha(1-\delta) + (1-\delta) - t,$$

$$t \in [1-\delta,1].$$

Portanto,

$$X^1(t) = \begin{cases} \varphi(0) - \alpha t, & \text{se } t \in [0, 1-\delta] \\ \varphi(0) + (1-\delta)(1-\alpha) - t, & \text{se } t \in [1-\delta, 1] \end{cases}$$

Desta forma $X(t)$ é solução de (1) para $t \in [-1, 1]$ onde

$$X(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \in [-1, 0] \\ X^1(t), & \text{se } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Lembre-se "." está indicando derivada à direita, portanto

mesmo não sendo $X(t)$ derivável em todos os pontos, ainda assim, a

equação $\dot{X}(t) = -f_{\alpha}(X(t-1))$ está satisfeita para todo $t \in [0, 1]$.

Usando $X^1(t)$ encontremos agora solução de (1) para

$t \in [1, 2]$, a qual denotaremos por $X^2(t)$.

Observação

$X^1(t)$ é estritamente decrescente em $[0, 1]$ ($X^1(t) \downarrow$), pois

tem declividade -1 ou $-\alpha$.

Notemos que existem duas possibilidades para $X^1(t)$, isto é, existe $t = Z_1 \in [0,1]$ tal que $X^1(Z_1) = 0$ ou $X^1(t) > 0$, $t \in [0,1]$.

Caso não exista $Z_1 \in [0,1]$, construiremos $X^2(t)$ estritamente decrescente em $[1,2]$ tal que $\dot{X}^2(t) = -f_\alpha(X^1(t-1))$, $t \in [1,2]$.

Procedendo desta forma sucessivamente encontramos $X^p : [p-1,p] \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 1$, de modo que $\dot{X}^p(t) = -f_\alpha(X^{p-1}(t-1))$, $t \in [p-1,p]$ e exista $Z_1 \in [p-1,p]$ com $X^p(Z_1) = 0$.

Definimos $X : [0, Z_1] \rightarrow \mathbb{R}$ por :

$$X(t) = X^j(t), t \in [j-1, j] \cup [p-1, Z_1], j = 1, 2, \dots, p-1.$$

Observemos que não há incompatibilidade nos extremos

$t = j$, pela forma como as funções $X'(t)$ foram definidas.

O mesmo procedimento usado até agora permite estender

$X(t)$ ao intervalo $[-1, Z_1 + 1]$ de maneira que $X|_{[-1, 0]} \equiv \varphi$ e

$X|_{[Z_1, Z_1 + 1]}$ seja estritamente decrescente, com declividade

-1 ou $-\alpha$.

Deste modo, $X(t)$ é solução de (1) em $[-1, Z_1 + 1]$.

Notemos que se definirmos $\varphi \equiv -X_{Z_1 + 1}$ então $\varphi \in K$.

Lembrando que f_α é ímpar e de modo completamente

análogo, podemos mostrar que:

$\exists Z_2 > Z_1 + 1$ tal que a solução $X(t)$ de (1) pode ser estendida à $[-1, Z_2 + 1]$.

É consequência dessa construção que $X(Z_2) = 0$ e $X_{Z_2 + 1} \in K$.

A solução $X(t)$ é obtida por aplicações sucessivas do argumento acima. Além disso, fica evidente a prova que $X(t)$ é obtida por extensões sucessivas à intervalos finitos e que essas extensões são únicas, donde segue unicidade de $X(t)$. Concluindo assim a demonstração do teorema.

O próximo passo é estudar a existência de soluções periódicas.

Denotemos por $X(t) = X(\alpha, 0, \varphi)(t)$ a solução de (1) com função inicial φ em $t_0 = 0$.

Definição II-1

Diz-se que $X(t)$ é uma solução periódica de (1) com período fundamental T , se $X(t) = X(t + T)$, $t \in [-1, \infty)$ e $T = \min \{ h > 0 / X(t+h) = X(t) \}$.

Podemos notar pela própria construção que a solução $X(t)$ é oscilatória, isto é, anula-se em uma infinidade de pontos $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, sendo não negativa em um intervalo $[0, Z_1]$, não positiva em $[Z_1, Z_2]$ e assim por diante.

Seja $Z_2(\varphi)$ o segundo zero de $X(\alpha, 0, \varphi)(t)$. Vamos mostrar que para um φ conveniente a solução é periódica, com período $Z_2(\varphi) + 1$, isto é:

TEOREMA II-2

Para todo $\alpha > 0$, existe uma solução periódica

$X(t) = X(\alpha, 0, \varphi)(t)$ de (1) com $\varphi \in K$, e período fundamental

$$Z_2 + 1 = Z_2(\varphi) + 1.$$

Demonstração

Sejam $M = \max \{1, \alpha\}$ e um operador $T: K \setminus \{0\} \longrightarrow K$

onde $T\varphi = X_{\mathbb{Z}_2+1}(\alpha, 0, \varphi)$, $\varphi \in K \setminus \{0\}$ e $T(0) = 0$.

Notemos primeiramente que o operador T está bem definido, devido a unicidade de solução e verifiquemos que se $\varphi \in K \setminus \{0\}$ então $T\varphi \in K$, isto é, $T(K) \subset K$.

De fato,

$\forall \varphi \in K \setminus \{0\}$ temos:

$$i) \quad T\varphi(-1) = X_{\mathbb{Z}_2+1}(\alpha, 0, \varphi)(-1) \stackrel{\text{def}}{=} X(\alpha, 0, \varphi)(-1 + \mathbb{Z}_2 + 1) = 0,$$

dai $T\varphi(-1) = 0$.

ii) $T\varphi(\theta)$ é crescente em $[-1, 0]$, pois :

$$T\varphi(\theta) = X_{\mathbb{Z}_2+1}(\alpha, 0, \varphi)(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} X(\alpha, 0, \varphi)(\theta + \mathbb{Z}_2 + 1), \quad \theta \in [-1, 0].$$

$$\text{Seja } t = \theta + \mathbb{Z}_2 + 1, \quad \theta \in [-1, 0] \Rightarrow t \in [\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 + 1].$$

Desta forma, basta mostrar que $X(\alpha, 0, \varphi)(t) = X(t)$,

$t \in [\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 + 1]$ é crescente.

Como $\text{dist}(Z_1, Z_2) \geq 1$ segue que :

$$t \in [Z_2, Z_2+1] \Rightarrow (t-1) \in [Z_1, Z_2] \Rightarrow f_\alpha(X(t-1)) \leq 0,$$

$$t \in [Z_2, Z_2+1] \Rightarrow \dot{X}(t) \geq 0, t \in [Z_2, Z_2+1] \Rightarrow X_{Z_2+1}(\alpha, 0, \varphi)(\theta) \text{ é}$$

crescente em $[-1, 0]$.

Portanto por i) ii) temos $T\varphi \in K$, para todo $\varphi \in K \setminus \{0\}$.

Desta maneira como $T(0) = 0$ definimos um operador $T: K \rightarrow K$.

Observações

1) $X(\alpha, 0, \varphi)(t)$ é solução periódica de (1) com período fundamental Z_2+1 se e somente se $T\varphi = \varphi$.

2) Para cada $\varphi \in K$ com $\|\varphi\| > M$, temos que φ não pode ser ponto fixo de T , pois sendo φ uma função contínua com $\varphi(-1) = 0$ e $\varphi(0) > M$, existe um subintervalo $[a, b] \subset [-1, 0]$ tal que $\varphi(b) - \varphi(a) > (b-a)M$, isto é, a inclinação do gráfico de

φ neste subintervalo é maior que M.

Em vista da observação 1, para encontrar soluções periódicas de (1), basta achar pontos fixos de T.

A observação 2 mostra que os eventuais pontos fixos φ de T tem norma menor ou igual a M.

Vamos trabalhar com a restrição de T a um conveniente subconjunto de K.

Seja $\beta = \max \{ \alpha, 1 \}$ e definimos o subconjunto convexo

U_β de K da seguinte forma:

$$U_\beta = \{ \varphi \in K \mid (t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \beta(t_2 - t_1),$$

com $-1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 0 \}$.

Tomemos :

$$K_\beta = \bigcup_{0 \leq \delta \leq 1} \langle \delta U_\beta \rangle =$$

$$= \{ \varphi \in K \mid \delta(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \delta\beta(t_2 - t_1),$$

$$\text{com } 0 \leq \delta \leq 1 \text{ e } -1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 0 \}.$$

Observemos que:

i) K_β é fechado em K

De fato:

Seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \in K_\beta$ e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, $n \longrightarrow \infty$, é

claro que $\varphi \in K$.

Como $\varphi_n \in K_\beta \Rightarrow \exists \delta_n (0 \leq \delta_n \leq 1) \mid \varphi_n \in \delta_n U_\beta$. Desta

forma, tomando eventualmente uma subsequência de δ_n , temos que:

$$\exists \delta_0 (0 \leq \delta_0 \leq 1) \mid \delta_n \longrightarrow \delta_0, n \longrightarrow \infty.$$

Daí,

$$\delta_n(t_2 - t_1) \leq \varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1) \leq \delta_n \beta(t_2 - t_1) \longrightarrow$$

$$\delta_0(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \delta_0 \beta(t_2 - t_1), n \longrightarrow \infty \implies$$

$$\varphi \in \delta_0 U_\beta \implies \varphi \in K_\beta.$$

ii) K_β é convexo.

De fato:

Sejam $\varphi, \psi \in K_\beta$ e $0 \leq \xi \leq 1$.

Como $\varphi \in \delta_1 U_\beta$ e $\psi \in \delta_2 U_\beta$, para algum $\delta_1, \delta_2 \in [0,1]$,

decorre que:

$$\delta_1(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \delta_1 \beta(t_2 - t_1) \text{ e}$$

$$\delta_2(t_2 - t_1) \leq \psi(t_2) - \psi(t_1) \leq \delta_2 \beta(t_2 - t_1)$$

Daí,

$$[\xi \delta_1 + (1-\xi) \delta_2](t_2 - t_1) \leq [\xi \varphi + (1-\xi) \psi](t_2) - [\xi \varphi + (1-\xi) \psi](t_1) \leq \\ \leq [\xi \delta_1 + (1-\xi) \delta_2] \beta (t_2 - t_1). \text{ Notemos } \delta_0 = [\xi \delta_1 + (1-\xi) \delta_2] \in [0,1].$$

Logo,

$$\xi \varphi + (1-\xi) \psi \in \delta_0 U_\beta \Rightarrow \xi \varphi + (1-\xi) \psi \in K_\beta.$$

iii) T é invariante em relação a K_β , e mais,

$$T(K) \subset K_\beta.$$

$$\text{Denotaremos } T_\alpha \equiv T|_{K_\beta}.$$

Desta forma para demonstrarmos o teorema II-2, vamos relacionar algumas propriedades do operador $T_\alpha : K_\beta \longrightarrow K_\beta$ nos próximos lemas.

Lema II-1

O operador $T_\alpha : K_\beta \setminus \{0\} \longrightarrow K_\beta$ é contínuo.

Demonstração

Se $\varphi \in K_\beta \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(0) < 1$ então

$$X_{Z_1(\psi)+1}(\alpha, 0, \psi)(\theta) = -\alpha\theta, \quad \theta \in [-1, 0], \quad \text{para toda } \psi \text{ numa}$$

vizinhança de φ .

Desta forma, teremos que $X_{Z_i(\psi)+1}(\alpha, 0, \psi) \equiv X_{Z_i(\varphi)+1}(\alpha, 0, \varphi)$

para todo $i \in \mathbb{N}$, donde segue a continuidade de T_α nestas condições.

Se $\varphi \in K_\beta \setminus \{0\}$ tal que $\exists \theta_0 \in (-1, 0]$ com $\varphi(\theta_0) = 1$ então

$$\beta > 1 \text{ e } \varphi \in \delta U_\beta \text{ com } \delta \geq \frac{1}{\beta}.$$

De fato,

$$\text{Se } \delta < \frac{1}{\beta} \rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) < (t_2 - t_1) \rightarrow \varphi(0) < 1 \text{ (absurdo,}$$

pois, $\varphi \in K$ e $\varphi(\theta_0) = 1$).

Segue que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \geq \frac{1}{\beta} (t_2 - t_1), \quad -1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 0.$$

Desta forma, se $\varphi(0) \geq 1$ então existe um único

$\theta_\varphi \in [-1, 0]$ tal que $\varphi(\theta_\varphi) = 1$.

Caso a: $\theta_\varphi < 0$

Se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em K_β então para um n suficientemente

grande, $\exists \theta_{\varphi_n} < 0$ e da definição de K_β , temos que $\theta_{\varphi_n} \longrightarrow \theta_\varphi$,

donde segue a continuidade de T_α .

Caso b: $\theta_\varphi = 0$.

Tomemos ψ numa vizinhança de φ .

i) Se $\psi(0) < 1$ então $X_{Z_i(\psi)+1}(\alpha, 0, \psi) \equiv X_{Z_i(\varphi)+1}(\alpha, 0, \varphi)$

$i \in \mathbb{N} \Rightarrow T_\alpha$ é contínuo.

ii) Se $\psi(0) \geq 1$ então $\exists \theta_\psi < 0$ tal que $\psi(\theta_\psi) = 1 \rightarrow \theta_\psi$

está numa vizinhança de θ_ψ , donde segue a continuidade de T_α .

Lema II-2

O operador $T_\alpha: K_\beta \setminus \{0\} \rightarrow K_\beta$ é uma aplicação compacta.

De fato,

Afirmção 1

$T_\alpha(K_\beta \setminus \{0\})$ é uniformemente limitado, pois, para todo

$\varphi \in K_\beta \setminus \{0\}$ temos:

$$|T_\alpha \varphi(\theta)| = |T_\alpha \varphi(\theta) - T_\alpha \varphi(-1)| \leq M |\theta + 1|, \text{ devido ao}$$

lema I-1.

Portanto, $\|T_\alpha \varphi\| \leq M$.

Logo $T_\alpha(K_\beta \setminus \{0\})$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ uniformemente

limitado.

Afirmação 2

$T_{\alpha}(K_{\beta} \setminus \{0\})$ é equicontínuo, pois, para todo $\varphi \in K_{\beta} \setminus \{0\}$ temos

$$|T_{\alpha}\varphi(\theta_1) - T_{\alpha}\varphi(\theta_2)| = |X(Z_2 + 1 + \theta_1) - X(Z_2 + 1 + \theta_2)| \leq M |\theta_1 - \theta_2|,$$

devido ao lema I-1.

Portanto

$T_{\alpha}(K_{\beta} \setminus \{0\})$ é um conjunto de $\mathbb{C}$ que é equicontínuo.

Usando teorema I-3 (Ascoli - Arzela) temos $T_{\alpha}(K_{\beta} \setminus \{0\})$ é relativamente compacto.

Desta forma o operador $T_{\alpha}: K_{\beta} \setminus \{0\} \rightarrow K_{\beta}$ é uma aplicação compacta.

Usando os lema II-1 e lema II-2 temos o seguinte corolário.

Corolário II-1

O operador $T_{\alpha}: K_{\beta} \setminus \{0\} \rightarrow K_{\beta}$ é completamente contínuo.

Lema II-3

O ponto $0 \in K_\beta$ é ponto ejetivo de T_α .

De fato,

Seja $G = \{\varphi \in \mathbb{C} / \|\varphi\| < \min\{\alpha, 1\}\}$, (notemos que G é

uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}$).

$\forall \varphi \in G \cap K_\beta$ com $\varphi \neq 0$, temos $\|T_\alpha \varphi\| > \min\{\alpha, 1\}$, isto é,

$$T_\alpha \varphi \notin G \cap K_\beta.$$

Lema II-4

Se existe $\varphi \in K_\beta \cap S_M$ tal que $T_\alpha \varphi = \lambda \varphi$ então $\lambda < 1$.

Demonstração

Como $\varphi \in K_\beta \cap S_M \Rightarrow \|\varphi\| = M$ e

$$\|T_\alpha \varphi\| = \|X_{\mathbb{Z}_2 + 1}(\alpha, 0, \varphi)\| < M.$$

Desta forma temos :

$$\begin{cases} \| T_{\alpha} \varphi \| = \| \lambda \varphi \| = \lambda \| \varphi \| = \lambda M \\ \| T_{\alpha} \varphi \| < M \end{cases}$$

Dai,

$$\lambda M < M \iff \lambda < 1$$

Desta maneira com o corolário II-1, o lema II-3 e o

Lema II-4 estamos aptos a utilizar o teorema I-3 e garantirmos a

existência de $\varphi^* \in K_{\beta} \cap B_M \setminus \{0\}$ tal que $T_{\alpha} \varphi^* = \varphi^*$.

Portanto assim fica demonstrado o teorema II-2.

Vamos inicialmente analisar os casos para $0 < \alpha \leq 1$.

Para isto, demostremos o seguinte teorema.

TEOREMA II-3

Seja a equação (1) $\dot{X}(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), t \in [0, \infty)$ e $\alpha > 0$

onde

$$f_{\alpha}(X) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } 0 < X \leq 1 \\ 1, & \text{se } X > 1 \\ f_{\alpha}(0) = 0 \\ f_{\alpha}(X) = -f_{\alpha}(-X) \end{cases}$$

Se $0 < \alpha \leq 1$ então existe uma única solução X periódica não trivial de (1), com período fundamental Z_2+1 e condição inicial $\varphi(\theta) = \alpha(\theta+1)$.

Demonstração

Seja $\varphi \in K \setminus \{0\}$.

$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = X(t)$ é estritamente decrescente em $[0, Z_1]$,

onde $Z_1 = Z_1(\varphi)$ é o primeiro zero de $X(t)$ em $[0, +\infty)$.

Como $X(t)$ é seccionalmente linear com declividades $\pm\alpha$ e ± 1 , segue-se que $1 \geq X(t) > 0$, $Z_1-1 \leq t \leq Z_1$.

Assim $\dot{X}(t) = -f_\alpha(x(t-1)) = -\alpha$, $Z_1 \leq t \leq Z_1+1$.

Uma repetição desse argumento mostra, com adaptações óbvias, que $\dot{X}(t) = \alpha$, $Z_2 \leq t \leq Z_2+1$, onde $Z_2 = Z_2(\varphi)$ é o segundo zero de $X(t)$ em $[0, \infty)$.

Desta forma, $\forall \varphi \in K \setminus \{0\}$, temos :

$$T_\alpha \varphi(\theta) = \alpha(\theta + 1), \theta \in [-1, 0].$$

Logo, a condição inicial φ tal que $\varphi(\theta) = \alpha(\theta + 1)$, $\theta \in [-1, 0]$ dá origem a uma solução periódica.

A demonstração acima, mostra ainda que, essa solução é a única solução periódica não trivial de (1).

Observação

Com esse resultado temos que o período fundamental da solução da equação (1) é sempre $Z_2+1 = 4$, já que $Z_2 = 3$ para

valores de $\alpha \in [0,1]$.

Exemplo

A figura a seguir é do gráfico da solução da equação

(1) onde a função inicial é:

$$\varphi(\theta) = \alpha(\theta + 1), \text{ para } \theta \in [-1,0] \text{ e } \alpha = 3/4$$

CAPÍTULO III

Sejam $K = \{ \varphi \in C([-1, 0]; \mathbb{R}) / \varphi(-1) = 0 \text{ e } \varphi \text{ é crescente} \}$

e

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ f_{\alpha}(x) = -f_{\alpha}(-x) \end{cases}$$

Neste capítulo, estudaremos a equação (1)

$X(t) = -f_{\alpha}(X(t-1))$, para $t \geq 0$, $\alpha > 1$ e com condições iniciais do cone K . Exploramos as simetrias do campo vetorial f_{α} e utilizamos exclusivamente argumentos elementares.

Para este caso, continuamos utilizando as notações do capítulo anterior. Assim, para cada $\varphi \in K$, denotamos $X(\alpha, 0, \varphi, t) = X(t)$, a solução de (1) com condição inicial $(0, \varphi)$; e

dada uma solução $X(t)$ de (1), denotamos por $Z_1 = Z_1(\varphi)$ e $Z_2 = Z_2(\varphi)$ o primeiro e o segundo zeros de $X(t)$ respectivamente.

Nosso objetivo agora é mostrar que quando fazemos o parâmetro α variar na equação (1) passando pelo valor $\alpha_0 = 2$ o número de soluções (Z_2+1) periódicas de (1) varia ; dizemos que α_0 é um ponto de bifurcação. Tomemos inicialmente $\alpha \in \mathbb{R}$,tal que $1 < \alpha < 2$.

Definimos um operador $S:K \setminus \{0\} \longrightarrow K / S\varphi = - X_{Z_1+1}$ e

$S(0) = 0$,onde $X_{Z_1+1}(\cdot) = X_{Z_1+1}(\alpha,0,\varphi,\cdot)$; veremos

posteriormente que S desempenhará um papel muito importante.

Além disso , notemos que se estendermos este operador S para $\hat{S}:K \cup (-K) \longrightarrow K \cup (-K)$; onde $\hat{S}|_K = S$, garantimos que o primeiro zero $Z_1 = Z_1(\varphi)$ da solução $X(\alpha,0,\varphi)$ de (1) coincide com o primeiro zero da solução $X(\alpha,0,-\varphi)(t)$ de (1), e mais, $\hat{S}(-\varphi) = - S(\varphi)$. De fato ;

$\forall t \in [0,1]$, temos que:

$$\begin{aligned} X(\alpha, 0, \varphi)(t) &= \varphi(0) - \int_0^t f_\alpha(\varphi(s-1)) ds = \\ &= -\varphi(0) + \int_0^t -f_\alpha(-\varphi(s-1)) ds = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t). \end{aligned}$$

daí;

$$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t), t \in [0,1].$$

De maneira análoga, temos:

$$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t), t \in [1,2] \text{ e assim}$$

sucessivamente.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq Z_1 < n+1$, como

$$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t), t \in [n, n+1] \longrightarrow$$

$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t)$, $t \in [n, Z_1]$. Desta forma Z_1 é o primeiro zero de $X(\alpha, 0, -\varphi)(t)$, e mais,

$$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t), t \in [Z_1, Z_1+1], \text{ donde segue que :}$$

$$\hat{S}(-\varphi) = -X_{Z_1+1}(\alpha, 0, -\varphi) = X_{Z_1+1}(\alpha, 0, \varphi) = -S(\varphi).$$

Observemos que se tomarmos a equação

$$(1') \quad X(t) = -f_{\alpha}(X(t-1)), \quad t \geq Z_1 + 1 \text{ e } X_{Z_1+1} \equiv X_{Z_1+1}(\alpha, 0, \varphi)$$

então de maneira análoga temos:

$$i) \quad \text{O primeiro zero da solução } X(\alpha, Z_1+1, X_{Z_1+1}(\alpha, 0, \varphi))(t)$$

de (1') coincide com da solução $X(\alpha, Z_1+1, -X_{Z_1+1}(\alpha, 0, -\varphi))(t)$,

$$\text{e mais } Z_1 = Z_1(X_{Z_1+1}(\alpha, 0, \varphi)) = Z_2(\varphi) = Z_2.$$

$$ii) \quad X(\alpha, Z_1+1, X(\alpha, 0, \varphi))(t) = -X(\alpha, Z_1+1, -X_{Z_1+1}(\alpha, 0, -\varphi))(t)$$

$t \in [Z_1, Z_1+1]$, donde segue que ;

$$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = -X(\alpha, 0, -\varphi)(t) , t \in [Z_2, Z_2+1].$$

Com estas considerações, notamos que o operador S desempenha o mesmo papel que o operador T do capítulo II. Isto acarreta o seguinte lema.

Lema III-1

A cada ponto fixo do operador S corresponde uma

solução periódica de (1).

Observações :

1) o lema III-1 transforma o problema de encontrar soluções periódicas de (1) no de obter pontos fixos de S. Como já vimos no capítulo II toda solução de (1) é uma função seccionalmente linear, isto é, seu gráfico é constituído de segmentos de reta cujas as inclinações são ± 1 e $\pm \alpha$.

Deste modo, os eventuais pontos fixos de S deverão ser funções deste tipo.

2) As funções $\varphi^1(\theta) = \theta + 1$ e $\varphi^2(\theta) = \alpha(\theta+1)$, para $\theta \in [-1,0]$, não são pontos fixos de S.

De fato,

a) A solução $X(t) = X(\alpha, 0, \varphi^1)(t)$ é dada por :

$$X(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ -\alpha t + 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 + 1/\alpha \\ \alpha t - 2\alpha - 1, & \text{se } 1 + 1/\alpha \leq t \leq 1 + 2/\alpha \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

donde segue que $z_1 = 1/\alpha$ e $X(t) = -\alpha t + 1$, $t \in [z_1, z_1 + 1]$, isto é,

$$X_{z_1+1}(\theta) = -\alpha(\theta+1).$$

Assim

$$S\varphi^1 = -X_{z_1+1} \neq \varphi^1.$$

Exemplo

Tomemos $\varphi(\theta) = \theta + 1$, $\theta \in [-1, 0]$ e $\alpha = \frac{3}{2}$.

b) A solução $X(t) = X(\alpha, 0, \varphi^2)(t)$ é dada por

$$X(t) = \begin{cases} \alpha(t+1) & , \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ -\alpha(t-1) & , \text{se } 0 \leq t \leq -\frac{1}{\alpha} \\ -t + \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} & , \text{se } \frac{1}{\alpha} \leq t \leq 2 - \frac{1}{\alpha} \\ -\alpha t + \frac{3\alpha^2 - 4\alpha + 2}{\alpha} & , \text{se } 2 - \frac{1}{\alpha} \leq t \leq \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ \vdots & \end{cases}$$

Notemos que; como $1 < \alpha < 2$ temos que :

$$X\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha - 1 > 0 \quad \text{e} \quad X\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{\alpha} < 0$$

donde segue que $Z_1 = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha}$ e que :

$$X(t) = \begin{cases} -t + \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} & , \text{se } Z_1 \leq t \leq 2 - \frac{1}{\alpha} \\ -\alpha t + \frac{3\alpha^2 - 4\alpha + 2}{\alpha} & , \text{se } 2 - \frac{1}{\alpha} \leq t \leq Z_1 + 1 \end{cases}$$

Desta forma, $S\varphi^2 = -X_{Z_1+1}$ terá inclinações 1 e α

respectivamente.

Assim $S\varphi^2 \neq \varphi^2$.

Além disto, temos que se $\varphi \in K$ tal que $S\varphi = \varphi$ então

necessariamente φ tem que satisfazer as seguintes condições :

i) $1 < \varphi(0) < \alpha$

ii) $\exists -\delta \in [-1 + \frac{1}{\alpha}, 0) / \varphi(-\delta) = 1$.

Exemplo

Se $\alpha = \frac{3}{2}$ então o gráfico de φ tem que estar

contido na seguinte região.

Tomemos $\varphi \in K$ satisfazendo as condições i) e ii) e analisemos as possíveis equações para $S\varphi$.

Primeiramente construiremos a solução :

$$X^1(t) = X^1(\alpha, 0, \varphi)(t), \quad t \in [0, 1] \text{ de (1).}$$

$$X^1(t) = \begin{cases} \varphi(0) - \alpha t, & t \in [0, 1 - \delta] \\ \varphi(0) + (1 - \delta)(1 - \alpha) - t, & t \in [1 - \delta, 1] \end{cases}$$

Notemos que $1 - \alpha < X^1(1 - \delta) < 1$.

Caso 1

Se $0 \leq X^1(1 - \delta) < 1$ então $-1 < X^1(1) < 0$.

Desta forma

$$X(t) = \begin{cases} \varphi(0) + (1 - \delta)(1 - \alpha) - t, & t \in [Z_1, 1 + \tau] \\ \varphi(0) + (\tau + \delta)(\alpha - 1) - \alpha t, & t \in [1 + \tau, Z_1 + 1] \end{cases}$$

onde : $Z_1 = \varphi(0) + (1 - \delta)(1 - \alpha)$ e $\tau = \frac{\varphi(0) - 1}{\alpha}$

Caso 2

Se $1 - \alpha < X^1(1 - \delta) < 0$, então $X^1(1) > -1$

Desta forma

$$X(t) = \begin{cases} \varphi(0) - \alpha t, & t \in [Z_1, 1 - \delta] \\ \varphi(0) + (1 - \delta)(1 - \alpha) - t, & t \in [1 - \delta, 1 + \tau] \\ \varphi(0) + (\delta + \tau)(\alpha - 1) - \alpha t, & t \in [1 + \tau, Z_1 + 1] \end{cases}$$

onde, $Z_1 = \frac{\varphi(0)}{\alpha}$ e $\tau = \frac{\varphi(0) - 1}{\alpha}$

Observações:

1) De acordo com o caso 1, se $\varphi^* \in K$ é ponto fixo de S , isto é, $S\varphi^* = \varphi^*$ então existe γ , $-1 < \gamma < 0$ tal que :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^*(\theta) = 1, & \text{para } -1 < \theta < \gamma \\ \dot{\varphi}^*(\theta) = \alpha, & \text{para } \gamma < \theta < 0 \end{cases}$$

2) No caso 2 se existir $\varphi^* \in K$ com $S\varphi^* = \varphi^*$ então

necessariamente existirá μ, γ tais que :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^*(\theta) = \alpha, -1 < \theta < \mu \\ \dot{\varphi}^*(\theta) = 1, \mu < \theta < \gamma \\ \dot{\varphi}^*(\theta) = \alpha, \gamma < \theta < 0 \end{cases}$$

Da observação 1 se $\varphi^* \in K$ é ponto fixo de S então φ^* ficará determinada se caracterizarmos o "tempo" em que φ^* permanece com inclinação 1 (e conseqüentemente, o "tempo" em que φ permanece com inclinação α), e mais, o gráfico de φ^* intercepta a reta $y=1$ com inclinação α , isto é, $\dot{\varphi}^*(-\delta) = \alpha$.

Desta forma, $\delta = \frac{\varphi(0) - 1}{\alpha}$ com isto a equação do caso 1

fica :

$$(2) \quad X(t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\varphi(0)(2\alpha-1)+1-\alpha^2}{\alpha} - t, & t \in \left[\frac{\varphi(0)(\alpha-1)+1-\alpha^2}{\alpha}, \frac{\alpha+\varphi(0)-1}{\alpha} \right] \\ \varphi(0) \left(\frac{3\alpha-2}{\alpha} \right) - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha} - \alpha t, & t \in \left[\frac{\alpha+\varphi(0)-1}{\alpha}, \frac{\varphi(0)(2\alpha-1)-\alpha^2+\alpha+1}{\alpha} \right] \end{cases}$$

Motivados pela observação, temos o seguinte lema

Lema III-2

Existe $\varphi^* \in K$ com

$$\varphi^*(\theta) = \begin{cases} \theta + 1, & -1 \leq \theta \leq \gamma \\ \alpha(\theta - \gamma) + (\gamma + 1), & \gamma \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

tal que $S\varphi^* = \varphi^*$.

Demonstração

Tomemos a equação (2) e exigimos que $X(Z_1+1) = -\varphi(0)$,

daí como

$$X(Z_1+1) = \varphi(0) \left[\frac{-2\alpha^2 + 4\alpha - 2}{\alpha} \right] - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha} + \alpha^2 - \alpha - 1$$

então:

$$(3) \quad \varphi(0) = \frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha - 1}$$

Agora substituindo (3) em (2) temos :

$$X(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in \left[1, \frac{3\alpha - 2}{2\alpha - 1} \right] \\ \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 1}{2\alpha - 1} - \alpha t, & t \in \left[\frac{3\alpha - 2}{2\alpha - 1}, 2 \right] \end{cases}$$

Como $t \in [Z_1, Z_1 + 1] \longrightarrow t = \theta + Z_1 + 1, \theta \in [-1, 0]$

Desta forma

$$X_{Z_1 + 1}(\theta) = X(\theta + Z_1 + 1) = X(t), \quad \theta \in [-1, 0],$$

daí,

$$X_{Z_1 + 1}(\theta) = \begin{cases} -(1+\theta), & \theta \in \left[-1, \frac{-\alpha}{2\alpha - 1}\right] \\ -\frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha - 1} - \alpha\theta, & \theta \in \left[\frac{-\alpha}{2\alpha - 1}, 0\right] \end{cases}$$

Portanto escolhendo $\varphi^*(\theta) = -X_{Z_1+1}(\theta)$ temos que

$$S\varphi^* = \varphi^*.$$

Exemplo:

Tomemos,

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 + \theta, & \theta \in [-1, -\frac{3}{4}] \\ \frac{11}{8} + \frac{3}{2} \theta, & \theta \in [-\frac{3}{4}, 0] \end{cases}$$

Da observação (2) se $\varphi^* \in K / S\varphi^* = \varphi^*$ então para podermos determinar φ^* é preciso caracterizar o "tempo" em que φ^* permanece com inclinação α e também o "tempo" que fica com inclinação 1, além disto, o gráfico de φ^* corta a reta $y = 1$ com inclinação α , pois, $X(1 + \tau) > -1$. Desta forma $\delta = \frac{\varphi^*(0) - 1}{\alpha}$, pois, $\varphi^*(-\delta) = 1$.

A equação do caso (2) fica determinada por (4)

$$X(t) = \begin{cases} \varphi(0) - \alpha t, & t \in \left[\frac{\varphi(0)}{\alpha}, \frac{\alpha+1-\varphi(0)}{\alpha} \right] \\ \frac{\varphi(0)(2\alpha - 1) + 1 - \alpha^2}{\alpha} - t, & t \in \left[\frac{\alpha+1-\varphi(0)}{\alpha}, \frac{\alpha+\varphi(0)-1}{\alpha} \right] \\ \varphi(0) \frac{3\alpha - 2}{\alpha} - 2 \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha t, & t \in \left[\frac{\alpha+\varphi(0)-1}{\alpha}, \frac{\varphi(0)+\alpha}{\alpha} \right] \end{cases}$$

Desta forma, para garantimos a existência de uma outra $\varphi_0 \in K$, diferente da anterior, que é ponto fixo de S deveremos procurar $\varphi_0 \in K$, tal que :

$$\dot{\varphi}_0(\theta) = \begin{cases} \alpha, & -1 < \theta < \mu \\ 1, & \mu < \theta < \gamma \\ \alpha, & \gamma < \theta < 0 \end{cases}$$

$$e S \varphi_0 = \varphi_0 .$$

Para isto ,tomemos a equação (4) e exigimos que

$$X(Z_1+1) = - \varphi(0);$$

$$\text{como } X(Z_1+1) = 2\varphi(0)\frac{(\alpha-1)}{\alpha} - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha} - \alpha \text{ e daí,}$$

$$(5) \quad \varphi(0) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2}{3\alpha - 2}$$

substituindo (5) em (4) temos

$$X(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2}{3\alpha - 2} - \alpha t, & t \in \left[\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2}{\alpha(3\alpha - 2)}, \frac{2\alpha - 1}{3\alpha - 2} \right] \\ -\frac{\alpha^2 + 5\alpha - 3}{3\alpha - 2} - t, & t \in \left[\frac{2\alpha - 1}{3\alpha - 2}, \frac{4\alpha - 3}{3\alpha - 2} \right] \\ \alpha - \alpha t, & t \in \left[\frac{4\alpha - 3}{3\alpha - 2}, \frac{4\alpha^2 - 2}{\alpha(3\alpha - 2)} \right] \end{cases}$$

Observemos que $\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2}{\alpha(3\alpha - 2)} < \frac{2\alpha - 1}{3\alpha - 2} \iff \alpha < 1$ ou

$\alpha > 2$.

Concluimos desta forma, que não existe $\varphi_0 \in K$ nestas condições tal que, $S\varphi_0 = \varphi_0$.

Da observação acima, do lema III - 2 e do teorema II - 3

temos :

Teorema III - 1

Seja a equação (1) $\dot{X}(t) = -f_\alpha(X(t-1))$, $t \geq 0$ e $\alpha > 0$

onde:

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ f_{\alpha}(x) = -f_{\alpha}(-x) \end{cases}$$

Se $0 < \alpha < 2$ e $\varphi \in K$ então existe uma única solução

$X(\alpha, 0, \varphi)(\cdot)$ periódica não trivial de (1) com período fundamental

$$Z_2(\varphi) + 1.$$

Tomemos agora $\alpha \geq 2$ e verifiquemos que :

Lema III - 3

Se $\varphi(\theta) = \alpha(\theta + 1)$, $\theta \in [-1, 0]$ e $\alpha \geq 2$ então

$X(\alpha, 0, \varphi)(t)$ é periódica e com período fundamental $Z_2(\varphi) + 1$.

Demonstração

Temos que $\varphi(0) = \alpha$ e $\delta = 1 - \frac{1}{\alpha}$, pois, $\varphi(-\delta) = 1$,

$$\text{logo } X(\alpha, 0, \varphi)(t) = X(t) = \alpha - \alpha(t), \quad t \in [0, \frac{1}{\alpha}] \implies X(\frac{1}{\alpha}) \geq 1$$

Desta forma, a solução $X(t)$ intercepta a reta $y = 1$ com

Verifiquemos se é possível encontrar $\varphi^* \in K$ tal que:

i)

$$\dot{\varphi}^*(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq \theta < \gamma \\ \alpha, & \text{se } \gamma \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

ii) $S\varphi^* = \varphi^*$

Para isto tomemos $\varphi \in K$ tal que:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 + \theta, & \text{se } -1 \leq \theta \leq \eta \\ \alpha(\theta - \eta) + \eta + 1, & \text{se } \eta \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

Observemos que ;

i) $1 < \varphi(0) < \alpha$

ii) $\exists -\delta \in [-1,0] / \varphi(-\delta) = 1$ e mais $\delta = \frac{\varphi(0) - 1}{\alpha}$.

Dentro das várias possibilidades da solução

$X(\alpha, 0, \varphi)(t) = X(t)$, analisemos a que garanta a existência de

$t_1 \in [0, 1 - \delta]$ tal que $X(t_1) = 1$ e $-1 < X(1 + t_1) < 0$.

Desta forma ,utilizando as observações anteriores temos:

$$X(t) = \begin{cases} \varphi(0) + (1 - \delta).(1 - \alpha) - t, & t \in [\mathbb{Z}_1, 1 + \delta] \\ \varphi(0) + 2\delta.(1 - \alpha) - \alpha t, & t \in [1 + \delta, \mathbb{Z}_1 + 1] \end{cases}$$

onde $\mathbb{Z}_1 = \varphi(0) + (1 - \delta).(1 - \alpha)$ e $\delta = \frac{\varphi(0) - 1}{\alpha}$

daí,fazendo $X(\mathbb{Z}_1 + 1) = -\varphi(0)$,temos $\varphi(0) = \frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha - 1}$ e mais,

$$X_{\mathbb{Z}_1 + 1}(\theta) = \begin{cases} -(1 + \theta) , & \theta \in \left[-1 , \frac{-\alpha}{2\alpha - 1} \right] \\ -\frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha - 1} - \alpha\theta , & \theta \in \left[\frac{-\alpha}{2\alpha - 1} , 0 \right] \end{cases}$$

Desta maneira ,tomemos $\eta = -\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$,temos que :

Lema III - 4

$$\text{Se } \varphi(\theta) = \begin{cases} 1 + \theta , & \theta \in \left[-1 , -\frac{\alpha}{2\alpha - 1} \right] \\ \frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{2\alpha - 1} + \alpha\theta , & \theta \in \left[-\frac{\alpha}{2\alpha - 1} , 0 \right] \end{cases}$$

e $\alpha \geq 2$ então a solução $X(\alpha, 0, \varphi)(t)$ de (1) é periódica e com período fundamental $Z_2(\varphi) + 1$.

Exemplo:

Tomemos

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 + \theta, & \theta \in [-1, -\frac{3}{5}] \\ \frac{11}{5} + 3\theta, & \theta \in [-\frac{3}{5}, 0] \end{cases}$$

Concluimos através do teorema III-1 ,e lema III-3 e lema III-4 que para $\alpha \geq 2$ existem duas soluções periódicas de (1) com período fundamental $\mathbb{Z}_2+1$ e portanto , que o valor $\alpha_0 = 2$ é um ponto de bifurcação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Browder,S.E.] "On a Generalization of the Schauder
Fixed-point Theorem ", Duke Math.
J. - 26 (1959), 291 - 303.
- [Hale,J.K.] "Theory of Functional Differential
Equations", Springer-Verlag, New York Inc
(1977).
- [H,Peters] "Comportement Chaotique d' une Equation
Differentielle Retardee", C.R., Acad. SA,
Paris, Ser A 290 (1980), 1119 - 1122.
- [Onuchic,N] "Equações Diferenciais com Retardamento "
8^o Colóquio Brasileiro de Matemática
(1971).
- [Royden,H.L.] "Real Analysis ", The Macmillan Company,
New York (1968).