

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono

Kamyla Maria Ferreira

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Kamyla Maria Ferreira

Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz

USP – São Carlos
Agosto de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F15p Ferreira, Kamyla Maria
 Problema de Roteamento de Veículos com Restrições
 de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada
 para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono /
 Kamyla Maria Ferreira; orientadora Franklina Maria
 Bragion de Toledo; coorientador Thiago Alves de
 Queiroz. -- São Carlos, 2022.
 219 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2022.

 1. Problema de roteamento de veículos. 2.
 Restrições de empacotamento bidimensional. 3.
 Entrega fracionada. 4. Logística verde. 5. Método
 exato e heurístico. I. Toledo, Franklina Maria
 Bragion de, orient. II. Queiroz, Thiago Alves de,
 coorient. III. Título.

Kamyla Maria Ferreira

**Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading and
Split Delivery Constraints for Minimization of Carbon Dioxide
Emission**

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo

Co-advisor: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz

**USP – São Carlos
August 2022**

Aos meus pais e irmã.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, saúde e sabedoria para atravessar mais essa etapa.

À minha orientadora, Profa. Dra. Franklina M. B. Toledo, e ao meu coorientador, Thiago Alves de Queiroz, pela confiança, dedicação, paciência e, principalmente, pelos ensinamentos que levarei por toda minha vida.

A todos professores que participaram desta etapa na minha vida e contribuíram para minha formação como profissional e cidadã, não somente pelo ensino do conhecimento teórico, como também por ajudarem a moldar meu caráter e minha visão de mundo.

Aos meus familiares, em especial a meus pais, pelo apoio e amor incondicional, sendo minha base em todos os momentos da vida.

Aos meus amigos pelo apoio e pela parceria de permanecer comigo tanto nos melhores momentos quanto nos momentos de dificuldade, desânimo e cansaço.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido sob o processo PROEX-10855292/D, à FAPESP – processo 2018/ 07240–0 e ao CEPID 2013/07375–0.

Meus sinceros agradecimentos a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desta tese.

*“O sucesso é ir de fracasso
em fracasso sem que se
perca o entusiasmo.”
(Winston Churchill)*

RESUMO

FERREIRA, K. M. **Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono**. 2022. 219 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho lida com três variantes do problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP): o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada (2L-SDVRP); o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional para a minimização da emissão de dióxido de carbono (G2L-CVRP); e o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada para a minimização da emissão de dióxido de carbono (G2L-SDVRP). Ao considerar a entrega fracionada, um cliente pode ser atendido por mais de um veículo. O objetivo desta tese é analisar quais benefícios, em relação ao custo de transporte e à redução de emissão de dióxido de carbono, podem ser obtidos com a incorporação das restrições de entrega fracionada e de questões ambientais. Para tanto, modelos matemáticos são propostos para cada versão do 2L-CVRP estudada. Para a resolução dos problemas, foi proposto um método exato do tipo *branch-and-cut* e uma meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável. As duas abordagens utilizam diferentes estratégias para lidar com o problema de empacotamento bidimensional, dentre elas: limitantes, heurísticas e métodos exatos. Os métodos desenvolvidos foram avaliados utilizando um conjunto de instâncias da literatura e um novo conjunto gerado neste trabalho. Os resultados mostram que não só é possível reduzir os custos do transporte com a resolução do 2L-SDVRP e do G2L-SDVRP, mas também reduzir a quantidade emitida de dióxido de carbono para o 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP quando comparado ao 2L-CVRP.

Palavras-chave: Problema de roteamento de veículos; Restrições de empacotamento bidimensional; Entrega fracionada; Logística verde; Método exato e heurístico.

ABSTRACT

FERREIRA, K. M. **Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading and Split Delivery Constraints for Minimization of Carbon Dioxide Emission**. 2022. 219 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work deals with three variants of the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints (2L-CVRP): capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints and split delivery (2L-SDVRP); vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints for minimization of carbon dioxide emission (G2L-CVRP); and vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints and split delivery for minimization of carbon dioxide emission (G2L-SDVRP). When split delivery is considered, a customer can be served by more than one vehicle. The thesis aims to analyze which benefits concerning the transportation costs and reducing carbon dioxide emissions may be obtained by aggregating split delivery constraints and environmental issues. Therefore, mathematical models are proposed for each version of the 2L-CVRP. An exact branch-and-cut method and a heuristic based on variable neighborhood search are proposed to solve the problems. Both approaches use different strategies to handle the two-dimensional packing problem: lower bounds, heuristics, and exact methods. The developed methods are evaluated using a set of benchmark instances from the literature and a new set generated in this work. The results show that it is not only possible to reduce the transportation costs by solving the 2L-SDVRP and G2L-SDVRP but also to reduce the amount of carbon dioxide emitted for 2L-SDVRP, G2L-CVRP and G2L-SDVRP when compared to 2L-CVRP.

Keywords: Vehicle routing problem; Two-dimensional loading constraints; Split delivery, Green Logistic, Exact and heuristic method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Média das atividades que compõe o custo logístico total.	33
Figura 2 – Grau de relevância das atividades logísticas na formação do custo logístico total (1 - sem relevância e 5 - extremamente relevante).	33
Figura 3 – Impacto de atividades logísticas na formação do preço final dos produtos (1 - pouco impactante e 5 - extremamente impactante).	33
Figura 4 – Divisão modal no transporte de carga, no ano de 2015, em alguns países. . .	34
Figura 5 – Emissão de CO ₂ pelo transporte – países na América e na Ásia.	36
Figura 6 – Emissões de CO ₂ por setor.	36
Figura 7 – Emissões de CO ₂ por modo de transporte de carga no Brasil.	37
Figura 8 – Componentes da logística verde.	41
Figura 9 – Aspectos da logística verde.	42
Figura 10 – Comparação entre logística verde e logística reversa.	43
Figura 11 – Representação de uma solução para um exemplo do VRP.	47
Figura 12 – Exemplo de economias obtidas com o SDVRP.	59
Figura 13 – Modelo para atingir os objetivos da logística verde em uma empresa de transporte rodoviário de carga.	66
Figura 14 – Exemplo de uma solução para o 2L-CVRP.	75
Figura 15 – Exemplo da operação de carregamento ou descarregamento.	75
Figura 16 – Exemplo das restrições de empacotamento orientado e não-orientado. . . .	76
Figura 17 – Exemplo das restrições de empacotamento irrestrito e sequencial.	77
Figura 18 – Representação do empacotamento de um item j no ponto (X_j, Y_j)	78
Figura 19 – Exemplo de empacotamentos relacionados à Condição 2.	79
Figura 20 – Exemplo de empacotamentos relacionados à Condição 3.	79
Figura 21 – Exemplo de empacotamento viável e inviável, considerando a ordem dos clientes na rota.	80
Figura 22 – Exemplo de empacotamento sequencial considerando a ordem inversa dos clientes na rota.	81
Figura 23 – Exemplo de uma solução para o 2L-SDVRP.	84
Figura 24 – Exemplo de uma solução para o G2L-CVRP.	87
Figura 25 – Exemplo de uma solução para o G2L-SDVRP.	90
Figura 26 – Exemplo de solução inválida e válida para desigualdade (3.41).	92
Figura 27 – Ciclos fracionários eliminados pelas desigualdades (3.43).	94
Figura 28 – Relações entre os problemas no contexto da otimalidade das soluções. . . .	95

Figura 29 – Procedimento de separação.	98
Figura 30 – Ilustração de um subciclo.	100
Figura 31 – Estratégia de empacotamento utilizada no método <i>branch-and-cut</i>	102
Figura 32 – Exemplo de malha de pontos para a base retangular do veículo.	105
Figura 33 – Exemplo de uma solução para o empacotamento e para o problema de corte de estoque.	109
Figura 34 – GAP das instâncias com soluções melhores que a literatura.	118
Figura 35 – Comparação das soluções do G2L-SDVRP com dos outros problemas.	122
Figura 36 – GAP médio das soluções.	123
Figura 37 – Comparação do GAP médio das soluções.	125
Figura 38 – Ilustração da solução da instância E016-05m da Classe 4.	127
Figura 39 – Ilustração da solução da instância E021-06m da Classe 4.	128
Figura 40 – Instâncias da literatura do 2L-CVRP com clientes com mais de um item.	129
Figura 41 – GAP das soluções das instâncias da Classe 6.	131
Figura 42 – Comparação do GAP médio das soluções da Classe 6.	132
Figura 43 – Princípio da VNS.	136
Figura 44 – Etapas da meta-heurística proposta baseada na VNS.	136
Figura 45 – Representação da solução da meta-heurística para o G2L-SDVRP.	139
Figura 46 – Representação da solução dos itens dos clientes nas rotas.	139
Figura 47 – Representação da vizinhança V_1	142
Figura 48 – Representação da vizinhança V_2	143
Figura 49 – Representação da vizinhança V_3	144
Figura 50 – Representação da vizinhança V_4	144
Figura 51 – Representação da vizinhança V_5	145
Figura 52 – Representação da operação de troca(2, 1) inter-rota.	147
Figura 53 – Representação da operação de inserção(2, 0) inter-rota.	148
Figura 54 – Representação da operação de inserção com entrega fracionada inter-rota.	148
Figura 55 – Representação da operação de troca com entrega fracionada inter-rota.	149
Figura 56 – Representação do empacotamento antes e após a atualização dos itens.	154
Figura 57 – Exemplo do procedimento construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009).	156
Figura 58 – Vetor usado para a representação da solução da meta-heurística de empacotamento.	158
Figura 59 – Lógica para calcular as posições mínimas e máximas dos itens no vetor solução.	160
Figura 60 – Exemplos de espaços livres.	163
Figura 61 – Características dos espaços abertos.	164
Figura 62 – Gerar um novo espaço aberto na etapa 1.	165
Figura 63 – Gerar um novo espaço aberto na etapa 2.	165

Figura 64 – GAP das instâncias da Classe 1 com diferentes soluções.	170
Figura 65 – Comparação das soluções com a BKS para a Classe 1.	170
Figura 66 – GAP das instâncias das Classes 2 a 5 com diferentes soluções.	171
Figura 67 – Comparação das soluções com a BKS para as Classes 2 a 5.	171
Figura 68 – GAP das instâncias com soluções diferentes entre o BC e a VNS para a Classe 6.	177
Figura 69 – Exemplo do procedimento de atualização de itens na largura.	203
Figura 70 – Exemplo do procedimento de atualização de itens no comprimento.	204

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo <i>branch-and-cut</i> proposto.	99
Algoritmo 2 – Procedimento para checagem do empacotamento no método exato.	103
Algoritmo 3 – Abordagem para gerar a sequência dos itens para empacotar.	106
Algoritmo 4 – Heurística construtiva.	107
Algoritmo 5 – Função de aptidão.	108
Algoritmo 6 – Meta-heurística proposta baseada na VNS	137
Algoritmo 7 – Busca local baseada na Descida em Vizinhança Variável Aleatória.	146
Algoritmo 8 – Procedimento para checagem do empacotamento na VNS.	152
Algoritmo 9 – Procedimento Construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009).	155
Algoritmo 10 – Cálculo das posições mínimas e máximas dos itens.	161
Algoritmo 11 – Meta-heurística de busca local randômica.	162
Algoritmo 12 – Estratégia <i>Open Space</i> para empacotar os itens.	166
Algoritmo 13 – Cálculo da malha <i>canonical dissections</i>	202
Algoritmo 14 – Atualização do tamanho dos itens.	203
Algoritmo 15 – Solução inicial.	205

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Logística tradicional x Logística verde.	40
Tabela 2 – Principais objetivos sustentáveis na logística verde.	42
Tabela 3 – Benefícios da logística verde.	43
Tabela 4 – Paradoxos da logística verde.	44
Tabela 5 – Exemplos de empresas que implementaram a logística verde em seus sistemas logísticos.	45
Tabela 6 – Características do problema de roteamento.	48
Tabela 7 – Variantes do empacotamento bidimensional do 2L-CVRP.	49
Tabela 8 – Características consideradas nos trabalhos da literatura na resolução do 2L- CVRP com o método exato <i>branch-and-cut</i>	50
Tabela 9 – Características consideradas nos trabalhos da literatura na resolução do 2L- CVRP com heurísticas.	52
Tabela 10 – Trabalhos relacionados às variantes do 2L-CVRP.	57
Tabela 11 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do SDVRP com métodos exatos.	60
Tabela 12 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do SDVRP com heurísticas.	62
Tabela 13 – Trabalhos relacionados às variantes do SDVRP.	64
Tabela 14 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do VRP com emissão de CO ₂	68
Tabela 15 – Trabalhos relacionados às variantes do VRP com emissão de CO ₂	70
Tabela 16 – Notação utilizada para tratar os aspectos ambientais do G2L-CVRP.	88
Tabela 17 – Desigualdades (3.41) conforme o exemplo na Figura 26a.	93
Tabela 18 – Desigualdades (3.41) conforme o exemplo na Figura 26b.	93
Tabela 19 – Intervalos para a geração dos itens.	115
Tabela 20 – Informações das instâncias.	117
Tabela 21 – Comparação dos resultados do 2L-CVRP com a literatura.	118
Tabela 22 – Número de soluções ótimas, veículos e entregas fracionadas, e tempo de execução.	120
Tabela 23 – Número de cortes adicionados pelos procedimentos de separação.	121
Tabela 24 – Comparação das soluções do 2L-CVRP com os outros problemas.	122
Tabela 25 – Diferença dos GAPS entre os problemas.	123
Tabela 26 – Resultados do teste de postos sinalizados de <i>Wilcoxon</i>	124

Tabela 27 – Solução da instância E016-05m da Classe 4.	126
Tabela 28 – Solução da instância E021-06m da Classe 4.	127
Tabela 29 – Número de soluções ótimas, tempo de execução, entregas fracionadas e cortes para as instâncias das Classes 5 e 6.	130
Tabela 30 – Comparação das soluções do G2L-SDVRP com os outros problemas para as Classe 5 e 6.	130
Tabela 31 – Exemplo de uma instância para o 2OPPUL.	159
Tabela 32 – Informações das instâncias.	168
Tabela 33 – Comparação dos resultados do 2L-CVRP com a literatura.	169
Tabela 34 – Resultados da VNS.	172
Tabela 35 – Comparação dos resultados do G2L-SDVRP obtidos pela VNS e BC.	173
Tabela 36 – GAP das instâncias com soluções diferentes entre o BC e a VNS.	173
Tabela 37 – Melhoria obtida pela VNS em comparação com a solução inicial.	174
Tabela 38 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias das Classes 2 a 5.	176
Tabela 39 – Comparação dos resultados do G2L-SDVRP obtidos pela VNS e BC para a Classe 6.	177
Tabela 40 – Melhoria obtida pela VNS em comparação com a solução inicial para a Classe 6.	178
Tabela 41 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias da Classe 6.	179
Tabela 42 – Resultados do 2L-CVRP utilizando exatamente K_{max} veículos e sem permitir rotas com um único cliente.	208
Tabela 43 – Solução inicial para o 2L-CVRP.	209
Tabela 44 – Solução inicial para o G2L-CVRP.	210
Tabela 45 – Solução do 2L-CVRP.	211
Tabela 46 – Solução do 2L-SDVRP.	212
Tabela 47 – Solução do G2L-CVRP.	213
Tabela 48 – Solução do G2L-SDVRP.	214
Tabela 49 – Solução inicial do 2L-CVRP para as instâncias da Classe 6.	215
Tabela 50 – Solução inicial do G2L-CVRP para as instâncias da Classe 6.	215
Tabela 51 – Solução do 2L-CVRP para as instâncias Classe 6.	215
Tabela 52 – Solução do 2L-SDVRP para as instâncias Classe 6.	216
Tabela 53 – Solução do G2L-CVRP para as instâncias Classe 6.	216
Tabela 54 – Solução do G2L-SDVRP para as instâncias Classe 6.	216
Tabela 55 – Resultados obtidos pela VNS para o 2L-CVRP utilizando exatamente K_{max} veículos e sem permitir rotas com um único cliente.	218
Tabela 56 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias da Classe 1.	219

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2L-CVRP	<i>Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints</i>
2L-SDVRP	<i>Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery</i>
2OPP	<i>Two-dimensional Orthogonal Packing Problem</i>
2OPPUL	<i>Two-dimensional Orthogonal Packing Problem with Unloading Constraint</i>
ABC	<i>Artificial Bee Colony</i>
AIMMS	<i>Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software</i>
AIS	<i>Artificial Immune System</i>
B&B	<i>Branch-and-Bound</i>
CO ₂	<i>Dióxido de Carbono</i>
CP	<i>Constraint Programming</i>
CSP	<i>Cutting Stock Problem</i>
CVRP	<i>Capacitated Vehicle Routing Problem</i>
DDF	<i>Dual Feasible Functions</i>
ENSL	<i>Elitist Non-dominated Sorting Local Search</i>
EVRPTWSD	<i>Emission Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Delivery</i>
G2L-CVRP	<i>Green Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints</i>
G2L-SDVRP	<i>Green Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery</i>
GRASP x ELS	<i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure with Evolutionary Local Search</i>
GVRP	<i>Green Vehicle Routing Problem</i>
IRCI	<i>Iterated Route Construction and Improvement</i>
MOPSO	<i>Multi-Objective Particle Swarm Optimization</i>
MS-BR	<i>Multistart biased-randomized</i>
NRGA	<i>Non-dominated Ranking Genetic Algorithm</i>
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II.</i>
PRMP	<i>Promise Routing-Memory Packing</i>
PRP	<i>Pollution-Routing Problem</i>
RCSP	<i>Resource Constrained Project Scheduling Problem</i>
RLS	<i>Randomized Local Search</i>
RVND	<i>Randomized Variable Neighborhood Descent</i>
SD-TOA	<i>Speed and Departure-time Optimization Algorithm</i>

SDVRP	<i>Split Delivery Vehicle Routing Problem</i>
SLPSO	<i>Self-Learning Particle Swarm Optimization</i>
SPP	<i>Set Partitioning Problem</i>
VND	<i>Variable Neighborhood Descent</i>
VNS	<i>Variable Neighborhood Search</i>
VRP	<i>Vehicle Routing Problem</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Questão de Pesquisa	31
1.2	Hipótese	31
1.3	Objetivos	31
1.4	Motivação	32
1.5	Contribuições	37
1.6	Organização do Trabalho	38
2	REVISÃO DA LITERATURA	39
2.1	Logística Verde	39
2.2	Problema de Roteamento de Veículos	46
2.3	Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional	48
2.4	Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada	58
2.5	Problema de Roteamento de Veículos com Considerações Ambientais	65
2.5.1	<i>Considerações</i>	69
3	CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS	73
3.1	Descrição do 2L-CVRP	73
3.1.1	<i>Modelagem Matemática para o 2L-CVRP</i>	81
3.2	Descrição do 2L-SDVRP	83
3.2.1	<i>Modelo Matemático para o 2L-SDVRP</i>	84
3.3	Descrição do G2L-CVRP	86
3.3.1	<i>Modelagem Matemática para o G2L-CVRP</i>	88
3.4	Descrição do G2L-SDVRP	89
3.4.1	<i>Modelagem Matemática para o G2L-SDVRP</i>	90
3.5	Desigualdades Válidas para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP	91
3.5.1	<i>Restrição de Quebra de Simetria para Frota de Veículos Homogênea</i>	91
3.5.2	<i>Restrição de Eliminação de Ciclos Fracionários</i>	93
3.6	Relações entre os Problemas	94
4	RESOLUÇÃO EXATA DO G2L-SDVRP E SEUS SUB-PROBLEMAS	97
4.1	Método <i>Branch-and-Cut</i>	98

4.2	Procedimentos de Separação para o Roteamento	100
4.3	Procedimentos de Separação para o Empacotamento	101
4.3.1	<i>Estrutura Hash para Armazenar a Viabilidade do Empacotamento das Rotas</i>	103
4.3.2	<i>Malha de Pontos</i>	104
4.3.3	<i>Heurística Construtiva H_{Leung}</i>	106
4.3.4	<i>Limitante Inferior LB_1</i>	108
4.3.5	<i>Limitante Inferior LB_2</i>	110
4.3.6	<i>Modelo do 2OPP Relaxado</i>	112
4.3.7	<i>Modelo de Programação por Restrições</i>	113
4.4	Experimentos computacionais	114
4.4.1	<i>Instâncias e Parâmetros</i>	114
4.4.2	<i>Comparação dos Resultados do 2L-CVRP com a Literatura</i>	117
4.4.3	<i>Resultados para o G2L-SDVRP</i>	119
4.4.4	<i>Resultados para o Novo Conjunto de Instâncias</i>	128
4.5	Considerações Finais	131
5	RESOLUÇÃO HEURÍSTICA DO G2L-SDVRP E SEUS SUB-PROBLEMAS 135	
5.1	Meta-Heurística de Busca em Vizinhança Variável	135
5.2	Representação da Solução	138
5.3	Solução Inicial	140
5.4	Estruturas de Vizinhança	141
5.4.1	<i>Vizinhança V_1 - Troca</i>	142
5.4.2	<i>Vizinhança V_2 - Inserção</i>	142
5.4.3	<i>Vizinhança V_3 - Troca Cruzada</i>	143
5.4.4	<i>Vizinhança V_4 - Troca de Sequências</i>	143
5.4.5	<i>Vizinhança V_5 - Inserção de Sequência</i>	145
5.5	Busca Local	145
5.6	Problema de Particionamento de Conjuntos	150
5.7	Procedimento de Diversificação	151
5.8	Procedimento para o Empacotamento	151
5.8.1	<i>Estrutura Hash para Armazenar Rotas</i>	153
5.8.2	<i>Atualização do Tamanho dos Itens</i>	153
5.8.3	<i>Limitante Inferior LB_3</i>	154
5.8.4	<i>Limitante Inferior LB_4</i>	155
5.8.5	<i>Limitante Inferior LB_5</i>	157
5.8.6	<i>Meta-Heurística $RLS+OP$</i>	158
5.9	Experimentos Computacionais	166
5.9.1	<i>Comparação dos Resultados do 2L-CVRP com a Literatura</i>	167
5.9.2	<i>Resultados do G2L-SDVRP</i>	172

5.9.3	<i>Resultados do G2L-SDVRP para as Instâncias da Classe 6</i>	175
5.10	Considerações Finais	179
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	181
REFERÊNCIAS		183
APÊNDICE A	INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES	201
A.1	Algoritmo para Obter a Malha <i>Canonical Dissections</i>	201
A.2	Algoritmo para Atualizar o Tamanho do Itens	201
A.3	Algoritmo para Obter a Solução Inicial	204
APÊNDICE B	RESULTADOS COMPLETOS PARA O MÉTODO EXATO	207
APÊNDICE C	RESULTADOS COMPLETOS PARA A HEURÍSTICA	217

INTRODUÇÃO

Devido ao constante desenvolvimento e competitividade do mercado, as empresas buscam diminuir cada vez mais os custos relacionados às atividades logísticas. Uma das principais atividades logísticas corresponde ao transporte de cargas/mercadorias, em que as empresas de distribuição procuram economizar tempo e custo de modo a atender os clientes com rapidez e eficácia. Neste sentido, o estudo do Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem - VRP*) ganha ano a ano mais relevância prática e interesse acadêmico (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016).

De modo geral, o VRP busca definir rotas para a entrega de mercadorias de um conjunto de clientes a partir de uma frota de veículos disponível em um depósito central. Um dos principais objetivos do VRP é minimizar o custo total ao percorrer rotas para atender a demanda de todos os clientes. Quando se obtém uma solução de qualidade para o VRP, é possível reduzir custos com as atividades logísticas e gerar benefícios até mesmo para o meio ambiente.

O VRP tem ampla aplicação prática na logística, em especial, na cadeia de suprimentos. Assim, desde o surgimento do VRP, inúmeros estudos foram desenvolvidos considerando diferentes variações do problema para atender as restrições práticas que surgem no dia a dia das empresas. Essas variações são formuladas por meio da adição de restrições práticas ao problema clássico.

Dentre as diversas restrições práticas do VRP, neste trabalho, são investigadas as de empacotamento bidimensional, de entrega fracionada e com abordagem ambiental, que no caso diz respeito à poluição do ar. No estado da arte (LIN *et al.*, 2014), o VRP com considerações ambientais é denotado por *Green Vehicle Routing Problem (GVRP)*. As restrições citadas anteriormente representam as seguintes variantes do VRP:

- Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Empacotamento Bidimensional (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading*

Constraints - 2L-CVRP): esta variante surge como uma combinação do problema de roteamento de veículos capacitado (*Capacitated Vehicle Routing Problem - CVRP*) e do problema de empacotamento em *bins* bidimensionais (*Two-Dimensional Bin Packing Problem*). Também é considerada a restrição de capacidade dos veículos em peso e área. Esse problema visa determinar as rotas dos veículos de modo que as mercadorias dos clientes, que correspondem a itens retangulares, sejam carregadas na base retangular do veículo sem sobreposição e respeitando as dimensões da base.

- Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery - 2L-SDVRP*): além das considerações do 2L-CVRP, neste caso as mercadorias dos clientes podem ser entregues por um ou mais veículos, em que cada veículo transporta uma fração da demanda (isto é, uma parte dos itens dos clientes). O objetivo do problema é definir as rotas dos veículos para minimizar o custo de transporte e suprir a demanda de todos os clientes. Esse problema é uma combinação do 2L-CVRP e do Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada (*Split Delivery Vehicle Routing Problem - SDVRP*).
- Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Empacotamento Bidimensional para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono (*Green Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints - G2L-CVRP*): esta variante contempla o 2L-CVRP e os aspectos da logística chamada “verde”. Neste trabalho, os danos causados ao meio ambiente são devidos à emissão de dióxido de carbono (CO_2). O objetivo do problema é minimizar a quantidade de CO_2 emitida. Essa variante está relacionada ao 2L-CVRP e ao *Pollution-Routing Problem (PRP)*, que é uma das variantes dos problemas que compõem o GVRP.
- Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono (*Green Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery - G2L-SDVRP*): este problema aborda todas as características do G2L-CVRP além de permitir que a entrega aos clientes seja fracionada.

Resolver o 2L-CVRP é computacionalmente difícil, bem como as variantes que surgem a partir dele. O 2L-CVRP é classificado como NP-difícil (*Non-deterministic Polynomial-time Hard*), visto que é uma generalização do VRP que também é NP-difícil (GAREY; JOHNSON, 1979). Logo, a dificuldade para encontrar uma solução comprovadamente ótima (isto é, a solução de melhor valor) para este problema cresce exponencialmente, nos algoritmos conhecidos atualmente, à medida que o número de clientes e, conseqüentemente, de itens aumentam. Assim, não é muito provável que através de um método exato consiga-se encontrar uma solução ótima para instâncias grandes do problema (isto é, com muitos clientes) em tempo computacional

aceitável para aplicações reais. Nesse contexto, apesar de os métodos exatos obterem a solução ótima do problema, poucos trabalhos da literatura utilizaram esses métodos para solucionar o 2L-CVRP, sendo mais comum o uso de heurísticas, que não garantem uma solução ótima, porém dentro de um tempo computacional aceitável elas obtêm uma solução satisfatória.

Diante desse contexto, esta tese propõe um estudo sobre o 2L-CVRP puro e com a incorporação da restrição de entrega fracionada. Além disso, também é estudada uma versão do problema em que questões ambientais são consideradas. Logo, procura-se desenvolver uma pesquisa sobre o 2L-CVRP, o 2L-SDVRP, o G2L-CVRP e o G2L-SDVRP em busca da otimização dos custos logísticos e da redução da poluição ao meio ambiente, em especial, a emissão de CO₂. Assim, uma formulação matemática é proposta para cada versão do 2L-CVRP abordada. Para resolver os problemas, foi utilizado um método exato do tipo *branch-and-cut* e uma abordagem meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável. A parte experimental considera um conjunto de instâncias padrão da literatura do 2L-CVRP e um novo conjunto de instâncias geradas neste trabalho para melhor avaliar as restrições de entrega fracionada.

1.1 Questão de Pesquisa

Quais os benefícios, em relação à redução de emissão de CO₂ e ao custo de transporte, obtidos com a agregação das restrições de entrega fracionada e de custos relativos à poluição ao 2L-CVRP?

1.2 Hipótese

A hipótese principal deste trabalho é que os resultados obtidos para o 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP, por meio de testes computacionais utilizando um conjunto de instâncias da literatura, vão apresentar economias/ganhos em relação às soluções obtidas ao resolver o 2L-CVRP, em termos de custo com o transporte e/ou de emissão de CO₂.

1.3 Objetivos

Neste trabalho, o objetivo principal é investigar o 2L-CVRP com a possibilidade de entrega fracionada e custos de emissão de CO₂, bem como formular modelos de programação matemática para cada variante do 2L-CVRP tratada. Em seguida, busca-se resolvê-los através de um método exato e de uma meta-heurística, além de analisar os resultados obtidos com a adição das novas restrições práticas ao 2L-CVRP.

Com base no objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- realizar um levantamento bibliográfico do 2L-CVRP, do SDVRP, do PRP e de variantes desses problemas;
- propor modelos de programação linear inteira, com base nos modelos do 2L-CVRP, do SDVRP e do PRP encontrados na literatura, para o 2L-CVRP, o 2L-SDVRP, o G2L-CVRP e o G2L-SDVRP;
- desenvolver um procedimento com diferentes estratégias para resolver o subproblema de empacotamento do 2L-CVRP e suas variantes;
- resolver instâncias do problema utilizando os modelos matemáticos por meio da aplicação de um método *branch-and-cut*;
- desenvolver uma meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável para lidar com o G2L-SDVRP e o 2L-CVRP;
- testar a abordagem exata e a meta-heurística desenvolvidas em diferentes instâncias constantes na literatura;
- analisar, através dos testes computacionais, quais são as vantagens, em relação aos custos de transporte e benefícios ao meio ambiente, com a adição das restrições de entrega fracionada e de questões ambientais ao 2L-CVRP.

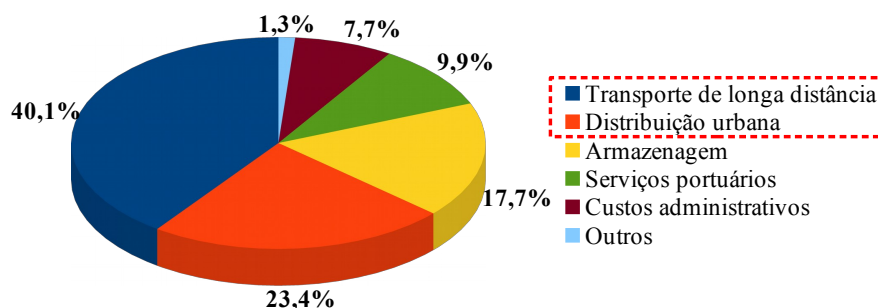
1.4 Motivação

O estudo do VRP tem atraído cada vez mais a atenção de pesquisadores, pois o transporte representa uma fração muito importante na composição do custo logístico. Na Figura 1, é possível verificar que as atividades de transporte, que correspondem ao transporte de longa distância e distribuição urbana, representam mais de 50% dos custos logísticos. Estes dados foram extraídos de uma pesquisa realizada pelo Núcleo de Logística, *Supply Chain* e Infraestrutura da Fundação Dom Cabral (RESENDE *et al.*, 2017), que visava avaliar os custos logísticos gerados pelas atividades de empresas embarcadoras de cargas no Brasil. Para tanto, a pesquisa foi realizada com um conjunto de 130 empresas que atingiram um faturamento bruto equivalente a 15,4% do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, com exceção do setor terciário, sendo que 12,4% deste valor corresponde aos custos logísticos. Além disso, entre os anos de 2014 e 2017 o custo logístico teve um incremento de 7,4%.

Na Figura 2, são apresentadas informações sobre a relevância das atividades logísticas na formação do custo logístico, sendo este valor representado por uma média geral ponderada, entre 1 (sem relevância) e 5 (extremamente relevante). As atividades que mais influenciam no custo logístico total são o transporte de longa distância de produtos acabados e de matérias-primas/insumos e a distribuição urbana de cargas. Na Figura 3, é indicado o impacto que

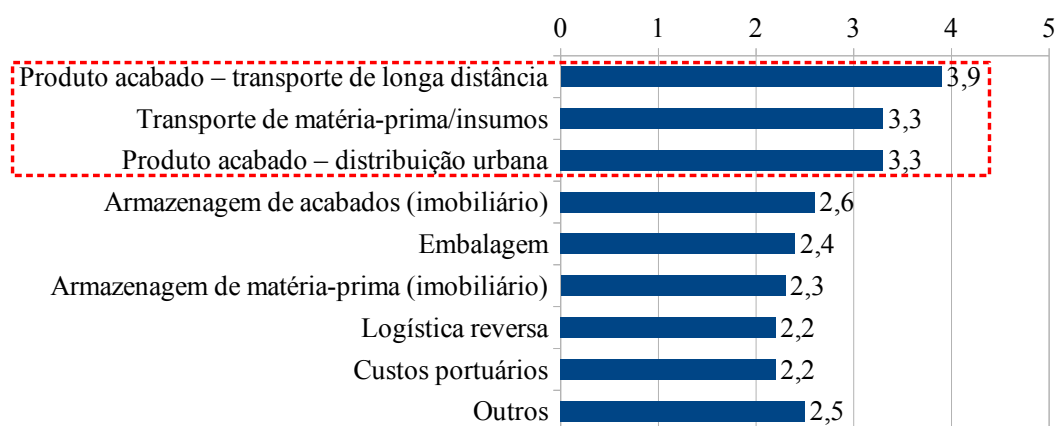
as atividades logísticas exercem no preço final do produto. As atividades de transporte e de distribuição urbana são responsáveis pelo maior impacto no preço final dos produtos.

Figura 1 – Média das atividades que compõe o custo logístico total.



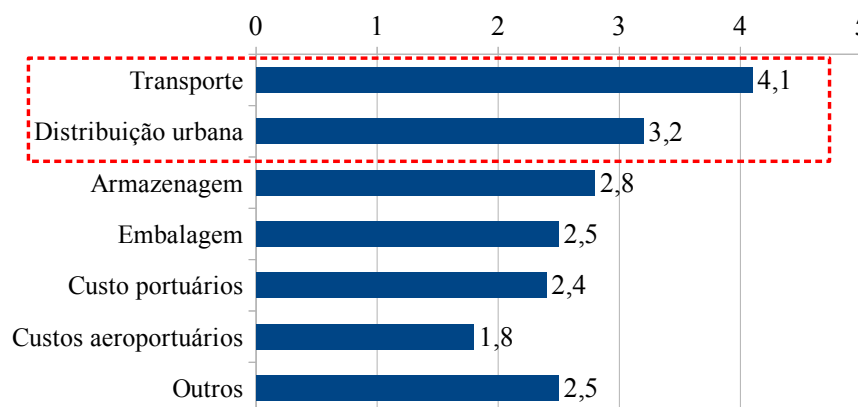
Fonte: Adaptada de Resende *et al.* (2017).

Figura 2 – Grau de relevância das atividades logísticas na formação do custo logístico total (1 - sem relevância e 5 - extremamente relevante).



Fonte: Adaptada de Resende *et al.* (2017).

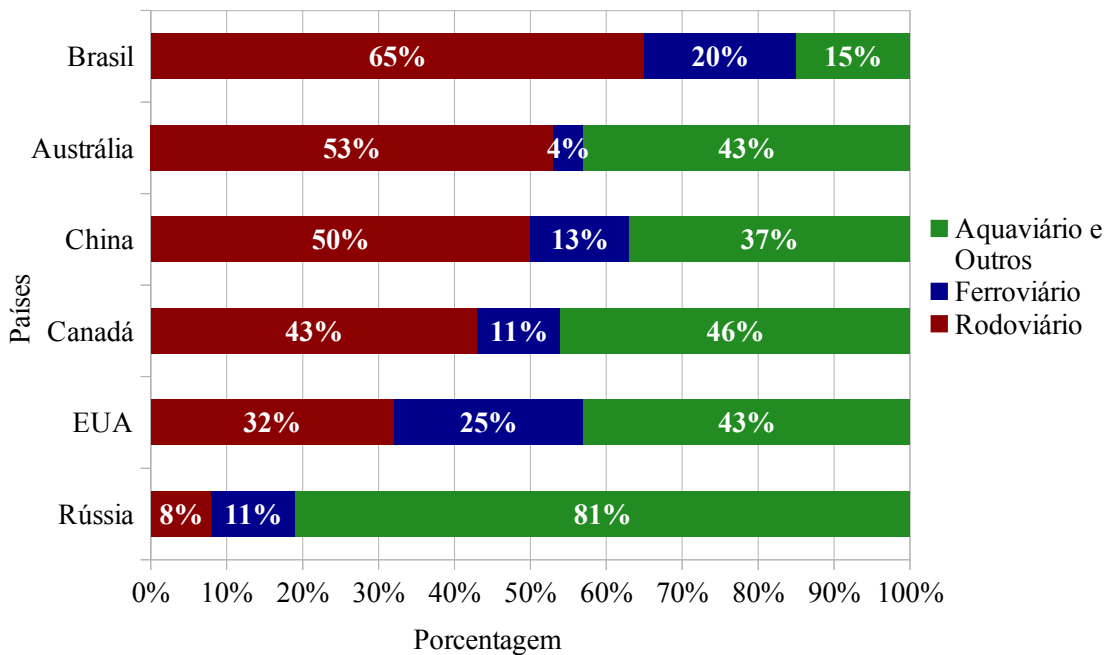
Figura 3 – Impacto de atividades logísticas na formação do preço final dos produtos (1 - pouco impactante e 5 - extremamente impactante).



Fonte: Adaptada de Resende *et al.* (2017).

Na Figura 4, é perceptível que dentre os meios de transporte há uma elevada predominância do modal rodoviário no Brasil, representando cerca de 65%. Comparado aos demais países, o Brasil apresenta o maior índice de uso do modal rodoviário. Logo, é evidente a importância do estudo do VRP, visto que o modal rodoviário é um dos mais utilizados e, assim, tem-se a presença dos veículos como principal fonte de entrega de cargas.

Figura 4 – Divisão modal no transporte de carga, no ano de 2015, em alguns países.



Fonte: [Observatório do Clima \(2018\)](#).

O uso eficiente da capacidade/volume dos veículos é um fator importante no gerenciamento dos custos e também no impacto ambiental. Uma pesquisa realizada pelo Departamento de Transportes do Reino Unido, em 2017, reporta que apenas 60% da capacidade dos veículos é utilizada quando viajam carregados. Além disto, entre os anos de 2007 e 2017, a melhoria na utilização dos veículos foi de 57% para 60%. A circulação de veículos vazios corresponde a 29,9% da distância total percorrida pelo veículo ([DEPARTMENT FOR TRANSPORT, 2018](#); [FTA, 2019](#)).

Mais especificamente, neste trabalho, o estudo do 2L-CVRP está focado no contexto de aplicações práticas de distribuição de carga, em que os itens dos clientes são de grande porte e, assim, a disposição dos itens nos veículos impacta na distribuição ao longo das rotas. Logo, padrões de empacotamento dos itens na base do veículo devem ser obtidos para gerar rotas viáveis de custo mínimo. O empacotamento bidimensional dos itens aparece em situações em que os itens não podem ser empilhados devido à forma irregular em seu topo ou fragilidade. Algumas aplicações práticas do 2L-CVRP advêm da distribuição de mercadorias, como móveis, componentes mecânicos e eletrodomésticos ([IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007](#)). Além disso, segundo [Côté, Guastaroba e Speranza \(2017\)](#), ao lidar com as decisões de rotear e

empacotar simultaneamente, economias significativas podem ser alcançadas. Em seu estudo, os autores obtiveram uma economia de aproximadamente 7% em relação às decisões do problema de forma isolada.

Além do 2L-CVRP, também é abordado o 2L-SDVRP, pois, como mostra a literatura do SDVRP, é possível obter economias, tanto em relação ao número de veículos quanto à distância total percorrida, ao se permitir que a demanda de um cliente seja atendida por mais de um veículo. Ademais, a demanda de cada cliente pode ser maior ou menor que a capacidade do veículo. No caso da demanda ser superior à capacidade do veículo, obrigatoriamente tem-se a entrega fracionada de carga. Na pesquisa realizada por [Dror e Trudeau \(1989\)](#), responsáveis pela introdução do SDVRP, os autores conseguiram obter economias nas decisões de roteamento ao considerar a entrega fracionada. Posteriormente, no ano 1990, os autores realizaram uma análise mais profunda em relação às economias obtidas com o SDVRP em respeito ao VRP. Para tanto, [Dror e Trudeau \(1990\)](#) consideraram 540 instâncias com até 150 clientes e a partir de testes computacionais puderam concluir que, quando as demandas dos clientes correspondem a menos de 10% da capacidade do veículo, a diferença do custo entre o SDVRP e o VRP é pequena. Todavia, quando as demandas dos clientes são superior a 10% da capacidade do veículo, o SDVRP proporciona economias significativas tanto em termos do número de veículos necessários quanto em distância percorrida.

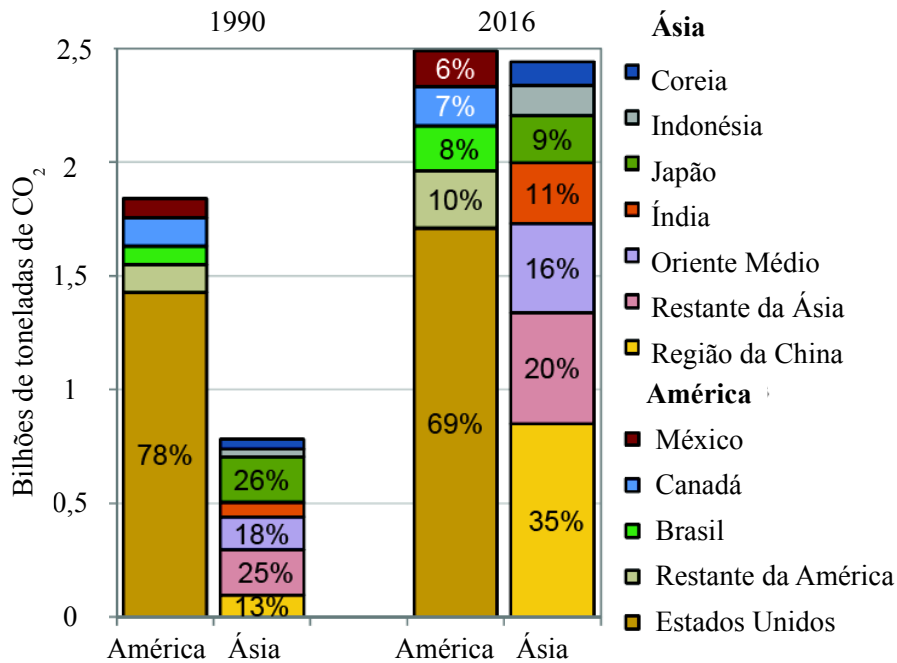
Na literatura, estudos recentes do PRP foram realizados devido ao fato que os planejamentos logísticos atuais de distribuição não são sustentáveis a longo prazo. Cada vez mais a população se preocupa com os impactos ambientais causados pelas atividades logísticas, sendo que os clientes estão buscando serviços de empresas com ações voltadas para a preservação ambiental, ecologia e responsabilidade social. Assim, torna-se necessário considerar os efeitos ambientais, ecológicos e sociais durante o planejamento logístico.

O PRP visa reduzir o impacto causado ao meio ambiente pela emissão de CO₂ gerada pelo transporte das mercadorias aos clientes. Na Figura 5, são apresentados os índices de emissão de CO₂ do transporte para alguns países da América e Ásia. Esses dados correspondem a uma pesquisa realizada pelo *International Energy Agency* ([IEA, 2018](#)) com intuito de analisar a emissão de CO₂. Como observado na figura, a quantidade de CO₂ emitida pelo transporte teve um grande aumento entre os anos de 1990 e 2016.

Na Figura 6, é descrita uma perspectiva geral da emissão de CO₂ na América, por setor, em que mais uma vez se nota que o transporte trouxe um aumento na emissão de CO₂ entre os anos 1990 e 2016. Além disso, o transporte está na quarta posição dos setores com maior porcentagem de emissão. Mais especificamente, a Figura 7 mostra a quantidade de emissão de CO₂ no Brasil em relação ao modo de transporte de carga. Ao analisar a figura, observa-se que a quantidade de emissão de CO₂ por peso de carga transportada é mais elevada para o modo rodoviário que para aos demais modos (ferroviário e hidroviário). Note que a unidade de medida *tku* (tonelada por quilômetro útil) na figura representa o deslocamento de uma tonelada de carga

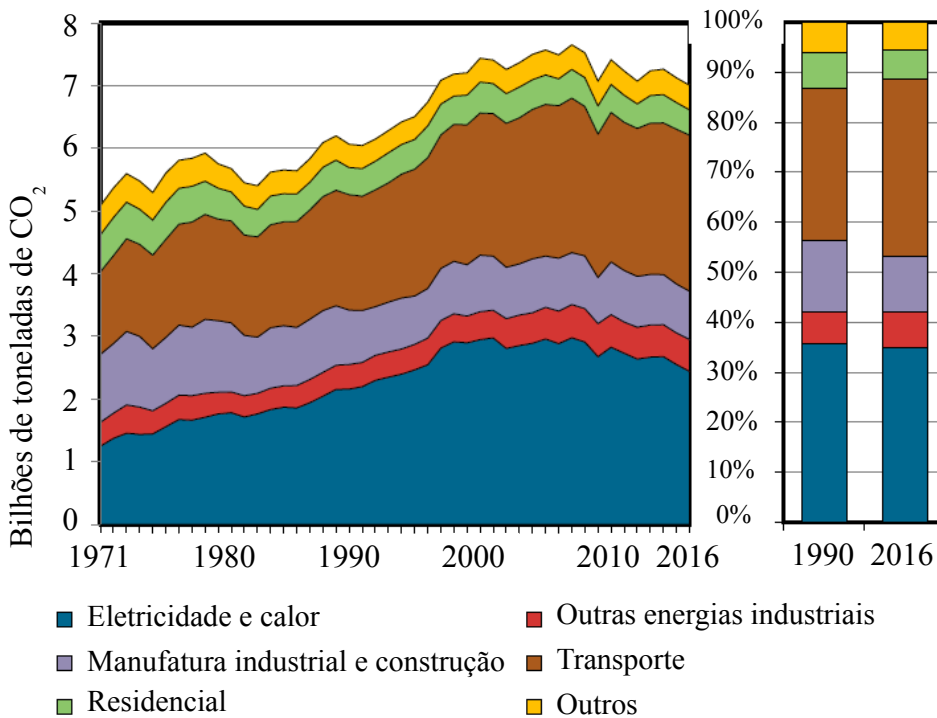
(sem contar a massa do veículo) na distância de um quilômetro (OBSERVATÓRIO DO CLIMA, 2018).

Figura 5 – Emissão de CO₂ pelo transporte – países na América e na Ásia.

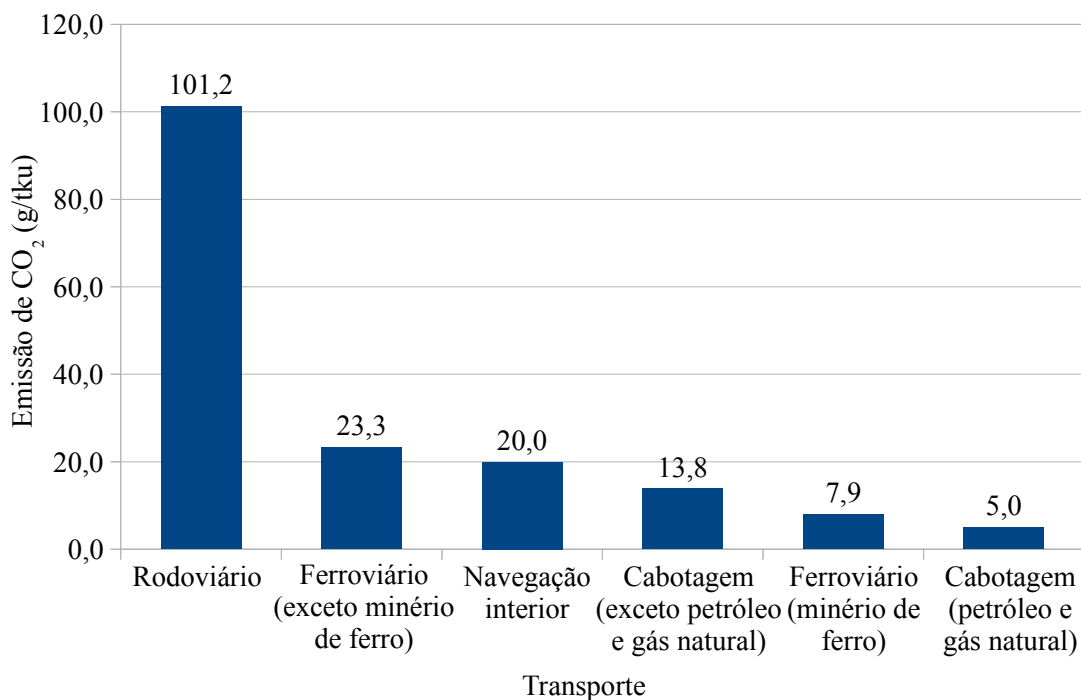


Fonte: Adaptada de IEA (2018).

Figura 6 – Emissões de CO₂ por setor.



Fonte: Adaptada de IEA (2018).

Figura 7 – Emissões de CO₂ por modo de transporte de carga no Brasil.

Fonte: Adaptada de [Observatório do Clima \(2018\)](#).

Por fim, ressalta-se que, embora muito relevante do ponto de vista prático e desafiador do ponto de vista teórico, não foi encontrado nenhum trabalho na literatura que trate de forma integrada o 2L-CVRP permitindo a entrega fracionada e considere explicitamente a emissão de CO₂. Assim, a importância prática e teórica deste trabalho compreende o estudo de uma nova variante do 2L-CVRP, por meio do desenvolvimento de modelos e métodos heurísticos para resolver o 2L-SDVRP, o G2L-CVRP e o G2L-SDVRP, além da comparação e análise dos resultados.

1.5 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são:

- apresentar um estudo sobre o 2L-SDVRP, o G2L-CVRP e o G2L-SDVRP, bem como as principais restrições práticas tratadas nesses problemas;
- proporcionar conhecimento sobre novas variantes do 2L-CVRP, ainda não estudadas na literatura;
- disponibilizar modelos matemáticos para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP com desigualdades válidas;

- descrever uma meta-heurística para o G2L-SDVRP, bem como adequações de operações de vizinhança da literatura para lidar com a entrega fracionada dos clientes;
- fornecer um procedimento para a resolução do subproblema de empacotamento no *branch-and-cut* e na meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável;
- disponibilizar uma análise dos resultados obtidos com a incorporação das novas restrições práticas ao 2L-CVRP.

1.6 Organização do Trabalho

O presente trabalho está dividido em seis capítulos. No Capítulo 1, é apresentada uma contextualização do problema em estudo, assim como os objetivos (geral e específicos) pretendidos com o desenvolvimento desta pesquisa, as justificativas para a investigação do tema e as contribuições do estudo.

Os principais conceitos relacionados à logística verde são abordados no Capítulo 2. Este capítulo também apresenta uma revisão da literatura para o 2L-CVRP, SDVRP e PRP, cujo objetivo é proporcionar o embasamento teórico para a realização do estudo.

No Capítulo 3, são discutidas as principais características do 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP, além de serem apresentados os modelos matemáticos utilizados e desenvolvidos para resolver cada problema. Ademais, algumas desigualdades válidas são apresentadas para fortalecer os modelos que lidam com a entrega fracionada. Por fim, neste capítulo, algumas propriedades dos problemas são descritas.

O Capítulo 4 apresenta a estrutura completa do método exato desenvolvido para resolver os problemas e os procedimentos de separação utilizados para tratar as restrições em número exponencial. Além disso, é descrita a abordagem utilizada para resolver o problema de empacotamento. Por fim, neste capítulo, os experimentos computacionais realizados e as conclusões são reportadas.

O Capítulo 5 descreve a meta-heurística desenvolvida para tratar o G2L-SDVRP, que envolve um algoritmo baseado na busca em vizinhança variável. Além disso, é apresentada a estratégia utilizada para resolver o problema de empacotamento, os experimentos computacionais realizados utilizando instâncias da literatura e as conclusões.

As conclusões deste trabalho e as direções para o desenvolvimento de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

REVISÃO DA LITERATURA

Como destacado na introdução, o foco de estudo desta tese é o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional. Mais especificamente, é abordado o problema em que as demandas podem ser entregues de forma fracionada e com aspectos de logística verde.

Neste contexto, este capítulo apresenta uma descrição dos principais conceitos relacionados à logística verde (Seção 2.1) e uma revisão bibliográfica sobre o problema de roteamento de veículos (Seção 2.2). Ademais, são apresentados alguns dos principais métodos, tanto exatos como heurísticos, aplicados ao problema de roteamento de veículos com foco nas versões do problema com restrições de empacotamento bidimensional (Seção 2.3), de entrega fracionada (Seção 2.4) e com abordagem ambiental (Seção 2.5).

2.1 Logística Verde

A logística tradicional busca lidar com o planejamento e controle de fluxo de materiais e informações relacionadas a eles (GHIANI; LAPORTE; MUSMANNO, 2004). A logística tradicional considera atividades de planejamento, de implementação e de controle de recursos materiais, financeiros, serviços e informações, desde a etapa de recebimento dos materiais/produtos e mão de obra até a entrega dos produtos acabados aos clientes. Deste modo, o sistema de gestão logística é responsável por gerenciar todas as operações e informações referentes à compra, à entrada de materiais, ao planejamento da produção, ao armazenamento, ao transporte e à distribuição de produtos. As decisões tomadas acerca de cada procedimento operacional devem resultar na redução de custos totais e na melhoria da satisfação dos clientes (D'AGOSTO; OLIVEIRA, 2018).

As atividades logísticas tradicionais são voltadas para o interesse empresarial de otimizar o processo de tomada de decisão sem se preocupar diretamente com os impactos causados por

tais decisões, como a poluição do meio ambiente. Contudo, devido à crescente preocupação dos governos e da população com os impactos ambientais causados pelas atividades logísticas, o conceito de sustentabilidade foi introduzido no contexto do sistema de gestão logística. Além disso, as estratégias logísticas atuais de produção e de distribuição indicam que elas não podem ser sustentáveis a longo prazo. Conforme exposto por [D'Agosto e Oliveira \(2018\)](#), diversos fatores contribuíram para o desenvolvimento de um sistema logístico que considera aspectos ambientais:

1. o aumento da emissão de gases decorrentes da queima e da combustão incompleta de combustíveis fósseis causados pelo transporte de cargas e, conseqüentemente, um aumento da poluição do meio ambiente;
2. o uso de fontes não renováveis para produzir energia, em especial, os combustíveis derivados do petróleo;
3. a geração de ruídos produzidos pelo transporte de cargas em áreas urbanas;
4. a produção de materiais sólidos e líquidos contaminados a partir das atividades de transporte e armazenagem;
5. a poluição da atmosfera e de rios ocasionados por vazamentos de resíduos contaminados;
6. a necessidade de projetar embalagens adequadas para produtos químicos, petroquímicos, defensivos agrícolas e farmacêuticos que não se rompam durante o transporte e/ou armazenagem.

Dentro desse contexto, surgiu o conceito de logística verde, que é uma atividade logística ecologicamente correta, cujo objetivo é reduzir a emissão de poluentes e utilizar os recursos de maneira sustentável. Na Tabela 1, são resumidas as principais diferenças entre a logística tradicional e a logística verde.

Tabela 1 – Logística tradicional x Logística verde.

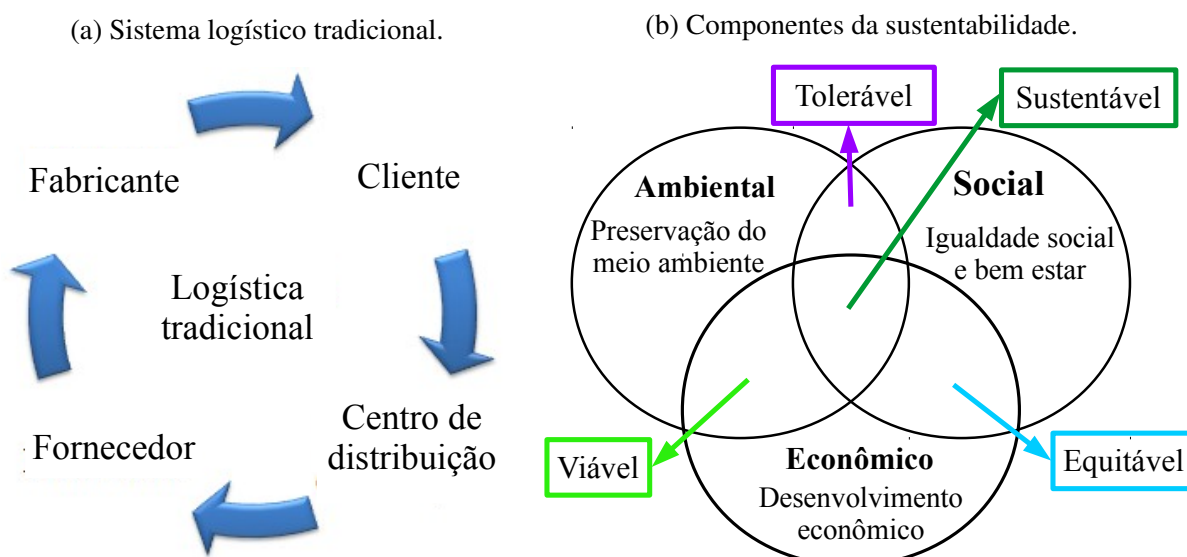
Tópico analisado	Logística	
	Tradicional	Verde
Objetivo	Atingir a melhor eficiência logística.	Alcançar a eficiência logística e no decorrer desse processo reduzir o impacto logístico causado ao meio ambiente.
Tomador de decisões	Somente os funcionários das empresas logísticas tomam as decisões e, assim, é difícil perceber a integração e alocação ótima dos recursos.	As decisões são tomadas em conjunto entre a empresa de logística, a manufatura e o varejo. A interação entre diferentes empresas permite integrar os recursos existentes, reduzir o desperdício e melhorar a utilização de recursos.

Fonte: Adaptada de [Xiu e Chen \(2012\)](#).

A logística verde visa adotar medidas durante o planejamento logístico para minimizar os impactos ambientais provenientes das atividades da logística tradicional como, por exemplo, a emissão de gases de efeito estufa e de poluentes atmosféricos. Acrescenta-se, ainda, que a logística verde busca propiciar a reciclagem de materiais, evitar o desperdício de recursos naturais e descartar os resíduos corretamente (D'AGOSTO; OLIVEIRA, 2018).

A logística verde considera todas as partes de um sistema de gestão logístico (conforme a Figura 8a) e os componentes da sustentabilidade (segundo a Figura 8b). Assim, a logística verde busca elaborar um planejamento logístico que determine as melhores decisões a serem tomadas para otimizar um dado processo de modo a reduzir os efeitos causados ao meio ambiente, isto é, busca-se um planejamento logístico eficiente e eficaz que atenda os princípios da sustentabilidade.

Figura 8 – Componentes da logística verde.

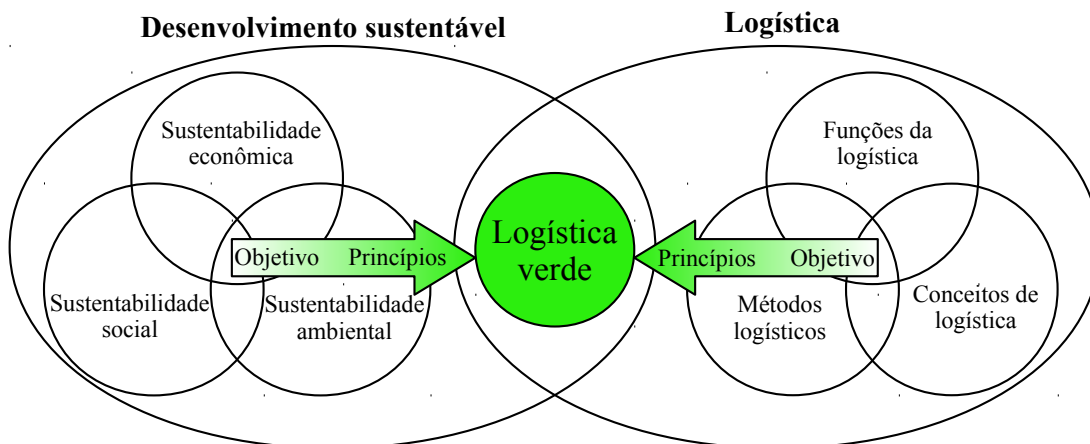


Fonte: Elaborada pela autora.

Em vista disso, a logística verde busca lidar com duas áreas simultaneamente: a logística tradicional e o desenvolvimento sustentável (conforme a Figura 9). No que diz respeito ao desenvolvimento sustentável, a logística verde se baseia nos aspectos econômico, social e ambiental, em que cada um proporciona um nível de eficiência, tem sua importância e causa um impacto diferente. Na Tabela 2, são apresentados os principais objetivos de cada componente sustentável no conceito de implementação da logística verde.

Às vezes o conceito de logística verde é confundido com o de logística reversa. A logística reversa faz parte da logística empresarial e busca tratar o fluxo de produtos, embalagens e outros materiais desde o ponto de consumo até o local de origem (DEKKER *et al.*, 2013). O objetivo da logística reversa é promover a sustentabilidade ambiental e reduzir os impactos ambientais associados ao descarte de material.

Figura 9 – Aspectos da logística verde.



Fonte: Adaptada de [Rakhmangulov et al. \(2017\)](#).

Tabela 2 – Principais objetivos sustentáveis na logística verde.

Sustentabilidade	Objetivos
Econômica	Melhorar as rotas Nível de segurança de serviço apropriado Economia dos recursos de energia
Social	Redução do número de acidentes Diminuição de congestionamento Condições de trabalho seguras
Ambiental	Redução da poluição Uso de energia de fonte renovável Redução do uso de combustível fóssil

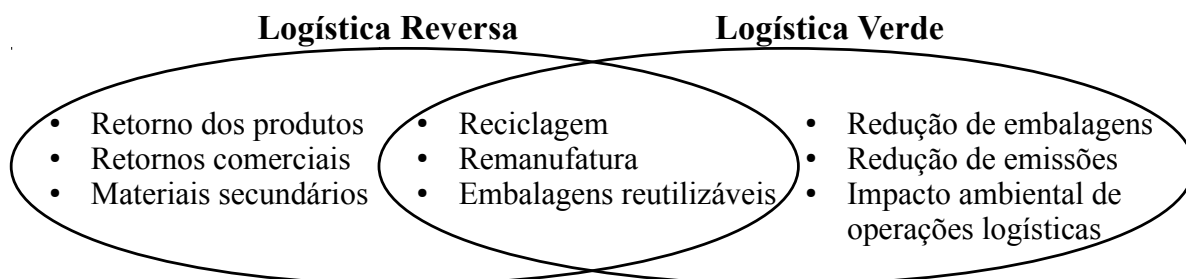
Fonte: Adaptada de [Vasiliauskas, Zinkevičiūė e Jakubauskas \(2013\)](#).

A logística reversa apresenta algumas conformidades com a logística verde que consistem no fato de ambas lidarem com os aspectos ambientais nas atividades logísticas. Contudo, a logística verde é mais abrangente do que a reversa, sendo que se preocupa de modo geral com a redução dos impactos ambientais das atividades da logística tradicional, enquanto a logística reversa está focada na movimentação de materiais para devolução e reaproveitamento. Na Figura 10, são ilustradas as relações entre a logística reversa e a logística verde.

Ao analisar a Figura 10, é possível verificar que ambas, logísticas verde e reversa, abordam os aspectos concernentes à reciclagem de materiais, remanufatura (reprocessamento adequado de materiais) e uso de embalagens reutilizáveis/retornáveis. No entanto, a logística verde também trata a redução das embalagens dos materiais, a redução de emissões (como ruídos e gases) e o impacto ambiental causado pelas operações logísticas. Enquanto a logística reversa lida com o retorno de produtos, retornos comerciais (que envolve a devolução de mercadorias devido aos erros de expedição, excesso de estoque e entre outros, que vão ser novamente inseridos no mercado por meio da redistribuição em outros pontos de vendas) e mercados secundários

(que representam um conjunto de pontos de venda alternativos para onde são enviadas algumas mercadorias de retorno em busca de recuperar o valor comercial dos itens).

Figura 10 – Comparação entre logística verde e logística reversa.



Fonte: Adaptada de [Rogers e Tibben-Lembke \(2001\)](#).

Outro aspecto a mencionar é que a logística verde fornece diversas vantagens no âmbito de desenvolvimento sustentável. [Emmett e Sood \(2010\)](#) descrevem os benefícios da logística no contexto ambiental, social e organizacional, os quais estão sumarizados na Tabela 3.

Tabela 3 – Benefícios da logística verde.

Contexto	Benefícios
Ambiental	Redução da emissão de gases de efeito estufa Redução de resíduos, de poluição e de degradação ambiental
Social	<i>Marketing</i> positivo Melhores condições de segurança e de saúde para os trabalhadores Melhores condições de vida (ar mais limpo e menos poluição sonora)
Organizacional	Aumento do lucro Redução de custos de aquisição Diminuição da geração de resíduos e uso de materiais perigosos Permite o uso mais eficiente de recursos Maior visibilidade dos benefícios financeiros e operacionais Aborda a questão do aquecimento global Mantém a organização dentro dos regulamentos ambientais

Fonte: Adaptada de [Emmett e Sood \(2010\)](#).

Apesar de a logística verde apresentar vantagens em diferentes contextos, [Rodrigue, Slack e Comtois \(2001\)](#) mostraram que existem alguns paradoxos entre a logística e a questão verde. Conforme destacado pelos autores, ao analisar as características básicas do sistema logístico detalhadamente é possível verificar que existem diversas inconsistências com relação à diminuição de seu impacto ambiental. Na Tabela 4, são apresentados os paradoxos da logística verde.

Os paradoxos da logística verde implicam em um desafio para as empresas colocarem em prática os conceitos de sustentabilidade em suas cadeias logísticas, porém não são razões suficientes para impedir a sua implementação ([SANTOS et al., 2015](#)). Um exemplo claro disso é

fornecido na Tabela 5 que apresenta algumas empresas que consideraram a logística verde como uma ferramenta empresarial em busca de reduzir os seus impactos ambientais. Outras aplicações da logística verde por empresas são destacadas nos trabalhos de Santos *et al.* (2015) e Oliveira *et al.* (2019).

Tabela 4 – Paradoxos da logística verde.

Contexto	Resultado	Paradoxo
Custo	Redução de custos através de melhorias nas embalagens e redução de desperdícios.	Alcançar a eficiência logística e no decorrer desse processo reduzir o impacto logístico causado ao meio ambiente.
Tempo/ flexibilidade	Criação de cadeias de abastecimentos integradas, em que os serviços <i>door-to-door</i> e as estratégias <i>just-in-time</i> fornecem sistemas de distribuição flexíveis e eficientes.	Aumento nas estruturas de produção, distribuição e varejo, consumindo mais espaço e energia, e produzindo mais emissões.
Rede	Aumento da eficiência de todo o sistema devido às mudanças na rede.	Concentração de impactos ambientais próximo a grandes centros e ao longo dos corredores.
Confiabilidade	Sistema de distribuição eficaz e pontual.	Os meios de distribuição utilizados, caminhões e transporte aéreo, são os menos eficientes do ponto de vista ambiental.
Armazenagem	Redução na demanda por armazéns privados.	Uso contínuo de estradas, causando aumento do congestionamento nas estradas.

Fonte: Adaptada de Rodrigue, Slack e Comtois (2001).

A Tabela 5 traz informações sobre o nome das empresas, o ramo de atividade exercida pela empresa, o nome do projeto/programa implementado, o objetivo do projeto e, por fim, os benefícios proporcionados com o desenvolvimento do projeto. Como observado na tabela, diferentes tipos de empresas adotaram estratégias baseadas na logística verde e conseguiram reduzir a poluição do ambiente e, em alguns casos, economizar gastos. Além disso, a implementação da logística verde nas empresas contribui para a melhora de suas reputações e preservam suas marcas, transmitido ao público a mensagem de que elas são verdes.

Para cumprir as exigências do desenvolvimento sustentável e facilitar o processo de tomada de decisões, é essencial ter um sistema de informação para auxiliar, visto que ele é composto por alguns módulos que contribuem para a redução da degradação do meio ambiente (ZHANG; LIU, 2009). Os principais sistemas são descritos a seguir.

1. Sistema de controle de embalagem verde: monitorar e controlar o processo de empacotamento dos produtos de modo a racionalizar a embalagem e utilizar materiais simples e biodegradáveis.

Tabela 5 – Exemplos de empresas que implementaram a logística verde em seus sistemas logísticos.

Empresas	Ramo de atividade	Setor de aplicação		Benefícios
		Projeto	Objetivo	
Ambev ^a	Produção e venda de cervejas	Programa de Compartilhamento de Frota	Compartilhar sua frota de veículos com outras empresas do segmento de alimentos e bebidas.	Redução na emissão de CO ₂ de 3 mil toneladas e economia de 5 milhões de litros de óleo diesel, em 2015.
Boticário ^b	Produtos de beleza	Boti recicla	Encorajar o descarte adequado de resíduos sólidos. Os consumidores levam as embalagens dos produtos vazios da marca até as lojas para serem transformados em objetos de decoração e luminárias.	Evita o descarte incorreto de material e promove a reciclagem.
Coca-Cola ^c	Produção e venda de bebidas	Mundo sem Resíduos	Coletar e reciclar o equivalente a cada garrafa ou lata que vende globalmente até 2030.	Reaproveitamento da embalagem ou destinação correta do material.
Dow Chemical ^d	Produtos químicos	Armazém Verde	Construção de um armazém de 5.500 metros quadrados em sua planta industrial no Guarujá, São Paulo, em julho de 2014.	Redução da emissão de CO ₂ da ordem de 30 toneladas ao ano.
HP ^e	Produção de impressoras, cartuchos e tóneres	HP Planet Partners Brasil	Recolher cartuchos e tóneres que já foram utilizados.	Proporciona o descarte correto ou a reutilização na produção de novas peças.
McDonald's ^f	Fast food	Projeto Biodiesel	Recolher o óleo utilizado nas fritadeiras para transformá-lo em biocombustível e utilizá-lo para abastecer os caminhões da empresa.	Evita o descarte incorreto de material.
Natura ^g	Produtos de Beleza	Projeto de logística verde	Utilização de mais de 20 veículos sustentáveis, como carros elétricos e bicicletas, para realizar entregas dos produtos.	Redução da emissão de 24,7 mil quilos de gases de efeito estufa na atmosfera.
		Navegação de cabotagem	Ampliação do emprego de navegação de cabotagem, para entregas nos três centros de distribuições localizados nas regiões Norte e Nordeste.	Redução da emissão de CO ₂ de mais de 2 mil toneladas no ano de 2015.
Natura ^h	Produtos de Beleza	Programa Natura Elos	Garantir a rastreabilidade, a homologação e a logística reversa em todos os seus fornecedores de materiais reciclados.	Fortalecimento do mercado de reciclagem.
Volkswagen Caminhões e Ônibus ⁱ	Produção de veículos	Drop & Hook	Implantação de um cavalo mecânico para a entrega de materiais dentro da fábrica em Resende, Rio de Janeiro.	Redução no custo de transporte de 60%, no gasto de combustível de 65% e nas emissões de CO ₂ de 67%.

^a Ambev (2016).^c Coca-Cola (2018).^e HP (2021).^g Natura (2018).ⁱ Agência Transporta Brasil (2019).^b Boticário (2006).^d Mundo Logística (2015).^f Logweb (2010).^h Natura (2019).

Fonte: Elaborada pela autora.

2. Sistemas de controle de transporte verde: desenvolver procedimentos para verificar quais operações geram impactos negativos no transporte.
3. Sistema de controle do armazém verde: acompanhar qualquer atividade que cause danos ao ambiente dentro dos armazéns.
4. Sistemas de controle de processos verde: fiscalizar a produção de produtos até a entrega ao consumidor final e inspecionar o procedimento para obter um processamento mais verde quanto o possível.
5. Sistema de controle de carga e descarga verde: analisar as atividades que ocorrem no armazenamento, no transporte e na embalagem das mercadorias.
6. Sistema de avaliação da logística verde: avaliar o desempenho ambiental dos recursos econômicos e técnicos do sistema logístico.
7. Sistema de apoio à decisão da gestão da logística verde: determinar modelos de logística verde para fornecer mais opções de estratégias otimizadas para o processo de tomada de decisões.

Dentre os sistemas apresentados acima, neste trabalho de doutorado se lida com o sistema de apoio à decisão da gestão da logística verde no contexto do problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada. Deste modo, busca-se determinar um modelo de logística verde que seja eficiente e eficaz na tomada de decisões referente à construção de rotas de entrega de mercadorias.

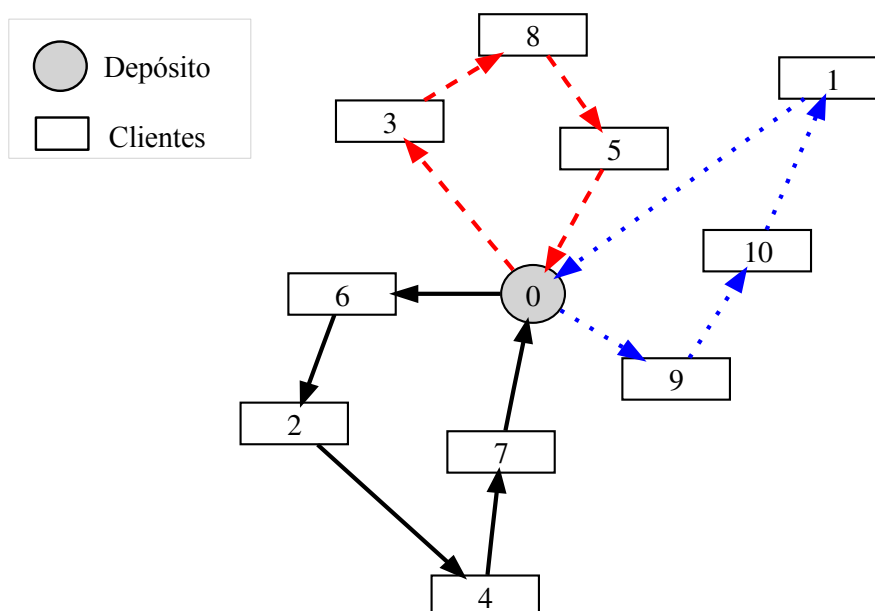
2.2 Problema de Roteamento de Veículos

O problema de roteamento de veículos (VRP) busca determinar as rotas de um conjunto de veículos para realizar a entrega e/ou coleta de mercadorias de um conjunto de clientes a partir de um depósito central. As rotas obtidas devem respeitar algumas restrições como, por exemplo, a capacidade do veículo, comprimento da rota, janelas de tempo dos clientes, atendimento de demanda dos clientes, entre outras (TOTH; VIGO, 2002).

O VRP pode ser definido formalmente sobre um grafo orientado $G' = (N, A)$, tal que $N = \{0, 1, \dots, n\}$ é o conjunto de nós e A é conjunto de arcos que ligam dois nós de N . O nó 0 representa o depósito e os demais nós $(1, \dots, n)$ retratam os clientes aos quais está associada uma demanda (d_i) . Cada arco $(i, j) \in A$ tem um custo não negativo c_{ij} associado que corresponde, por exemplo, à quilometragem ou ao tempo de viagem entre os nós i e j . Quando $c_{ij} = c_{ji}$ o problema é definido como simétrico (sendo possível representar o grafo de modo não orientado) e, caso contrário, assimétrico. No depósito central há um conjunto de K veículos disponíveis para efetuar as entregas. O objetivo é minimizar o custo total associado às rotas, seja em termos da distância, do tempo de viagem ou do número de veículos utilizados.

Na Figura 11, é ilustrado um exemplo de solução para o VRP com custo assimétrico, em que há o depósito central, denominado por 0, e 10 clientes, representados pelos números de 1 até 10. Os clientes foram atendidos utilizando 3 veículos. As rotas são dadas por: $0 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, e $0 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 0$. Vale destacar que as demais figuras deste trabalho, que envolvem roteamento, seguem a mesma legenda da Figura 11.

Figura 11 – Representação de uma solução para um exemplo do VRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os primeiros estudos envolvendo o problema de roteamento de veículos foram realizados por [Dantzig e Ramser \(1959\)](#) e [Clarke e Wright \(1964\)](#). Posteriormente, devido ao fato do VRP apresentar muitas aplicações reais, surgiram diversas variantes do problema. Mais informações sobre o VRP e suas variantes, bem como os principais trabalhos desenvolvidos na área e os métodos utilizados para sua resolução, podem ser obtidas em [Laporte e Nobert \(1987\)](#), [Laporte \(1992\)](#), [Toth e Vigo \(2002\)](#), [Golden, Raghavan e Wasil \(2008\)](#), [Lin et al. \(2014\)](#), [Montoya-Torres et al. \(2015\)](#), [Braekers, Ramaekers e Nieuwenhuys \(2016\)](#) e [Adewumi e Adeleke \(2018\)](#).

O VRP apresenta várias variantes e, assim, alguns procedimentos de classificação foram propostos, como o de [Raff \(1983\)](#). Uma classificação do VRP é apresentada na Tabela 6. Neste trabalho, são descritas em mais detalhes as variantes do VRP que estão relacionadas a esta pesquisa: VRP com entrega fracionada, VRP com considerações ambientais e VRP com restrição de empacotamento bidimensional.

Tabela 6 – Características do problema de roteamento.

Características	Possibilidades do problema
Tamanho da frota	Um veículo Múltiplos veículos
Tipo da frota	Homogênea Heterogênea Veículos Especiais
Garagem dos veículos	Um depósito Múltiplos depósitos
Tipo da demanda	Determinística Estocástica Demanda parcialmente atendida
Localização da demanda	Nós Arcos Mista
Características da rede	Não-orientada Orientada Mista Euclidiana
Restrições de capacidade dos veículos	Impostas (capacidade homogênea) Impostas (capacidade heterogênea) Não-impostas (capacidade ilimitada)
Tempo de viagem de cada rota	Imposto (mesmo tempo para todas as rotas) Imposto (diferente para rotas distintas) Não-imposto
Operações	Somente coletas Somente entregas Mista (entregas e coletas) Entregas paralelas
Custos	Variáveis Fixos ou custo de aquisição dos veículos Custos comuns de transporte
Objetivos	Minimização total dos custos de roteamento Minimização da soma dos custos fixos e variáveis Minimização do número de veículos necessários Maximização da função utilidade baseada na prioridade do cliente

Fonte: Adaptada de Raff (1983).

2.3 Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional

O problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento consiste na combinação de dois problemas clássicos de otimização combinatória: o problema de roteamento de veículos e o problema de empacotamento. Conforme exposto por Iori e Martello (2013), as decisões de rotar e de empacotar são essenciais na gestão de transporte de cargas. O VRP com restrições de empacotamento busca otimizar o roteamento de modo que o empacotamento dos itens dos clientes na base do veículo seja viável.

Iori e Martello (2013) apresentaram uma classificação para problemas que combinam as

decisões de rotear e empacotar conforme o tipo do problema de roteamento e as características da carga dos clientes. Dentre as variantes, tem-se o problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP).

O 2L-CVRP visa estabelecer as rotas dos veículos com custo mínimo, tal que a demanda de todos os clientes deve ser atendida respeitando a capacidade dos veículos e os itens retangulares dos clientes devem ser empacotados na base retangular dos veículos, sem ocorrer sobreposição entre quaisquer itens e respeitando as dimensões da base. O problema é descrito por um depósito e um conjunto de clientes, em que cada cliente demanda uma quantidade de itens retangulares que deve ser atendida e os itens empacotados de forma viável na base retangular dos veículos. Além disso, o depósito central tem um conjunto de veículos com capacidade de carga e área limitada disponível para realizar as rotas.

Assim como no VRP, o 2L-CVRP possui algumas variantes relacionadas ao roteamento e outras ao empacotamento. As variantes do VRP podem ser tratadas no 2L-CVRP, como, por exemplo, janelas de tempo, frota de veículos heterogênea, dentre outras. As variações no empacotamento podem estar relacionadas à possibilidade de rearranjar ou não os itens durante a rota (versão sequencial ou irrestrita) e à orientação do item (orientada ou rotacionada). Logo tem-se as seguintes variantes relativas ao empacotamento:

- **sequencial:** os itens devem ser empacotados respeitando a ordem de visita aos clientes de uma rota, sendo que não é permitido rearranjar os itens durante o descarregamento;
- **irrestrita:** os itens podem ser empacotados sem ter que respeitar a ordem de visita e, assim, eles podem ser rearranjados durante o descarregamento;
- **rotacionada (não-orientada):** os itens não têm orientação fixa para o empacotamento, isto é, eles podem ser rotacionados em 90°;
- **orientada:** os itens têm orientação fixa de empacotamento.

Dentro deste contexto, tem-se quatro possibilidades de variantes do 2L-CVRP no que concerne ao empacotamento bidimensional (FUELLERER *et al.*, 2009), como ilustra a Tabela 7.

Tabela 7 – Variantes do empacotamento bidimensional do 2L-CVRP.

	Sequencial	Irrestrita
Orientado	2ISOIL <i>Two-Dimensional Sequential Oriented Loading</i>	2IUOIL <i>Two-Dimensional Unrestricted Oriented Loading</i>
Rotacionado	2ISRIL <i>Two-Dimensional Sequential Rotated Loading</i>	2IURIL <i>Two-Dimensional Unrestricted Rotated Loading</i>

Fonte: Elaborada pela autora.

A seguir, são apresentados os trabalhos encontrados que trataram o 2L-CVRP. Mais detalhes sobre o 2L-CVRP podem ser obtidos nos trabalhos de Iori e Martello (2013) e Pollaris

et al. (2015). Iori e Martello (2013) apresentam um levantamento geral sobre os problemas que integram as decisões de roteamento e empacotamento. Por outro lado, Pollaris *et al.* (2015) proporcionaram uma visão geral sobre o problema de roteamento de veículos e o problema de empacotamento, e discutiram os trabalhos desenvolvidos acerca deste tema de forma detalhada.

Na Tabela 8, são apresentadas as principais características adotadas pelos trabalhos da literatura ao resolver o 2L-CVRP de maneira exata. Na primeira coluna da tabela, são trazidas informações sobre o(s) autor(es) do trabalho. A segunda coluna (TE) retrata o tipo do empacotamento (2|SOIL e/ou 2|UOIL). A terceira coluna (NR) informa se o número de rotas tem que ser exatamente igual ao número total de veículos disponíveis ($= |K|$), se pode ser menor ($\leq |K|$) ou se pode ser maior ($\geq |K|$). A quarta coluna exibe se é permitido utilizar rotas que atendam apenas um cliente (rota única - RU). Na quinta coluna, é relatado o tipo do custo das arestas, isto é, se os custos de viagem entre os clientes são valores inteiros ou reais. Na sexta coluna, é informado que tipos de procedimentos (limitantes - LI, heurísticas - H e/ou métodos exatos - ME) foram utilizados para verificar a viabilidade do empacotamento nas rotas. A última coluna aborda as instâncias utilizadas nos experimentos computacionais (Iori, Salazar-González e Vigo (2007) - B_{Iori} ; Gendreau *et al.* (2008) - $B_{Gendreau}$ e/ou Côté, Guastaroba e Speranza (2017) - B_{Cote}).

Tabela 8 – Características consideradas nos trabalhos da literatura na resolução do 2L-CVRP com o método exato *branch-and-cut*.

Autores	TE		NR	RU	Custo	Empacotamento			Instâncias		
	2 SOIL	2 UOIL				LI	H	ME	B_{Iori}	$B_{Gendreau}$	B_{Cote}
Iori, Salazar-González e Vigo (2007)	x		$= K $	Não	Inteiro	x	x	x	x		
Azevedo <i>et al.</i> (2009)	x	x	$= K $	Não	Inteiro		x	x	x		
Souza (2013)	x	x	$\leq K $	Sim	Real	x	x	x	x	x	
Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)	x		$= K $	Não	Inteiro	x	x	x	x		
Côté, Guastaroba e Speranza (2017)	x		$\geq K $	Sim	Inteiro	x	x	x	x	x	x

Fonte: Elaborada pela autora.

Ao analisar a Tabela 8, é possível perceber que os trabalhos de Iori, Salazar-González e Vigo (2007), Azevedo *et al.* (2009) e Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) abordam as mesmas características quanto ao número de rotas, ao custo e, ainda, impõem que rotas únicas não são permitidas. Todos os trabalhos trataram a versão de empacotamento 2|SOIL, sendo que Azevedo *et al.* (2009) e Souza (2013) também consideraram o 2|UOIL. Diferentemente dos demais trabalhos, Souza (2013) considerou os custos como valores reais.

Diferentemente dos outros autores, que desenvolveram seus trabalhos para mostrar a eficiência de seus métodos na resolução do 2L-CVRP, Côté, Guastaroba e Speranza (2017) buscaram analisar os benefícios obtidos com a integração do problema de roteamento de veículos com o problema de empacotamento e concluíram que os ganhos com o problema integrado foram em torno de 7%.

No que diz respeito ao método de resolução, todos os trabalhos utilizaram o método

exato do tipo *branch-and-cut* e apresentaram uma formulação de programação linear inteira de dois índices com base nos modelos de fluxo de veículos do problema de roteamento de veículos capacitado (CVRP). Devido ao fato dos modelos terem restrições de ordem exponencial em relação à capacidade e conectividade das rotas e à verificação da viabilidade do empacotamento, os autores utilizaram diferentes procedimentos de separação. Para verificar as restrições de capacidade e conectividade, [Azevedo et al. \(2009\)](#), [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) e [Côté, Guastaroba e Speranza \(2017\)](#) utilizaram como base o pacote CVRPSEP, proposto por [Lysgaard, Letchford e Eglese \(2004\)](#); e, [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) adaptaram algumas desigualdades válidas da literatura do CVRP que foram posteriormente utilizadas por [Souza \(2013\)](#).

Em relação à verificação da viabilidade do empacotamento nas rotas, [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) utilizaram o método *branch-and-bound* com alguns limitantes inferiores e superiores; [Azevedo et al. \(2009\)](#) consideraram a heurística *bottom left decreasing width* e um algoritmo exato do tipo *branch-and-bound*; [Souza \(2013\)](#) utilizou o conjunto de heurísticas definido por [Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis \(2009\)](#) e o método *branch-and-bound*; [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) consideraram diferentes limitantes, heurísticas, uma formulação de programação por restrições e uma malha de pontos para determinar onde os itens podem ser posicionados; e, [Côté, Guastaroba e Speranza \(2017\)](#) propuseram novas rotinas de separação que abordam diferentes limitantes, métodos exatos e heurísticas.

Como descrito anteriormente, o 2L-CVRP com empacotamento 2ISOIL foi abordado com as mesmas características por [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#), [Azevedo et al. \(2009\)](#) e [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#). [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) provaram a otimalidade para 55 das 60 instâncias resolvidas dentro de um tempo limite de computação de 86400 segundos (24 horas). [Azevedo et al. \(2009\)](#) utilizaram 22 das instâncias do conjunto B_{Iori} para as quais a solução ótima foi obtida em um tempo limite de 14400 segundos (4 horas). Os autores escolheram essas instâncias com base nos resultados de [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#), isto é, para todas as 22 instâncias a abordagem de [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) gastou mais de 10 segundos para resolvê-las. [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) encontraram 56 soluções iguais e 2 soluções melhores que as de [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#). Os demais trabalhos abordaram versões distintas do 2L-CVRP, logo não é possível fazer uma comparação justa entre eles.

Devido ao fato dos métodos exatos propostos para o 2L-CVRP conseguirem resolver apenas instâncias com até 75 clientes, a maioria dos trabalhos desenvolvidos na literatura optaram por utilizar heurísticas. Na Tabela 9, são apresentadas as principais características dos trabalhos do 2L-CVRP que utilizaram abordagens baseadas em heurísticas para resolver o problema. Na tabela, são descritas informações sobre o nome do(s) autor(es) do(s) trabalho(s), o tipo do empacotamento abordado (2ISOIL, 2IUOIL, 2ISRIL e 2IURIL), o método de resolução utilizado para lidar com as decisões do roteamento e, por fim, os métodos de empacotamentos empregados

para checar a viabilidade do empacotamento nas rotas.

Tabela 9 – Características consideradas nos trabalhos da literatura na resolução do 2L-CVRP com heurísticas.

Autores	Tipo do empacotamento				Método de resolução do roteamento	Método de resolução do empacotamento
	2ISOIL	2UOIL	2SRIL	2URIL		
Gendreau <i>et al.</i> (2008)	x	x			Busca tabu	Max Touching perimeter Bottom-left
Fuellerer <i>et al.</i> (2009)	x	x	x	x	Colônia de formigas	Max Touching perimeter Branch-and-bound
Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009)	x	x			Busca tabu guiada	Bottom-left fill (W-axis) Bottom-left fill (H-axis) Max touching perimeter Max touching perimeter no walls Min area
Leung <i>et al.</i> (2010)	x	x			Recozimento simulado	Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) Max Fitness Value
Strodl <i>et al.</i> (2010)		x			Busca em vizinhança variável	Max Touching perimeter Branch-and-bound
Duhamel <i>et al.</i> (2011)		x			GRASP x ELS ^a	RCPSP ^b
Leung <i>et al.</i> (2011)	x	x			Busca tabu guiada estendida	Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) Lowest reference line best-fit
Shen e Murata (2012)	x				Algoritmo genético	Bottom-left
Bin, Hong e Zhi-yong (2013)	x	x	x	x	Colônia artificial de abelhas	Bottom-left fill Max touching perimeter Lowest reference line best-fit
Souza (2013)	x	x			Geração de colunas	Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) Branch-and-bound
Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2013)	x	x			PRMP ^c	Memory packing
Abdal-Hammed, Hifi e Wu (2014)		x			Busca em vizinhança larga	Bottom-left fill
Dominguez, Juan e Faulin (2014)		x		x	MS-BR ^d	Best-fit
Wei <i>et al.</i> (2015)	x	x			Busca em vizinhança variável	Skyline
Sarwono, Ai e Wigati (2017)	x				Vizinho mais próximo	Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) Bottom-left
Pinto, Alves e Carvalho (2018)	x				Geração de colunas	Bottom-left revisada Abordagem de level packing
Wei <i>et al.</i> (2018)	x	x	x	x	Recozimento simulado	Open Space

^aGRASP x ELS: Greedy Randomized Adaptive Search Procedure with Evolutionary Local Search.

^bRCPSP: Resource constrained project scheduling problem.

^cPRMP: Promise Routing-Memory Packing.

^dMS-BR: Multistart biased-randomized.

Fonte: Elaborada pela autora.

A maioria dos trabalhos apresentados na Tabela 9 lidam com as versões de empacotamento 2ISOIL e 2UOIL, de modo que a possibilidade de rotação dos itens, em 90°, no subproblema de empacotamento (isto é, as versões 2SRIL e 2URIL), foi abordada por apenas quatro autores.

Diferentes abordagens heurísticas foram empregadas para resolver o problema de roteamento de veículos, inclusive métodos bioinspirados, sendo mais comum o uso de métodos baseados na busca tabu, busca em vizinhança, recozimento simulado e geração de colunas.

Dentre os 17 trabalhos listados na tabela, três utilizaram heurísticas baseadas na busca tabu. Gendreau *et al.* (2008) propuseram uma heurística de busca tabu que pode aceitar movimentos que produzem rotas inviáveis (em relação à capacidade do veículo em peso e área) e, conseqüentemente, uma penalidade é aplicada sobre a função objetivo. A heurística emprega estruturas de vizinhança para realizar a busca por soluções e para evitar ciclos durante a busca, as soluções que possuem atributos similares a outras já visitadas anteriormente são consideradas tabu (proibidas) durante um dado número de iterações. Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) desenvolveram um algoritmo de busca tabu guiada que incorpora a lógica da busca tabu

e da busca local guiada. A heurística explora o espaço de solução através do método de busca tabu. O comportamento da busca tabu é guiado por um mecanismo de orientação da função objetivo que implica em dobrar os custos dos percursos/arestas penalizados(as). Toda vez que um determinado número de iterações é atingido, o mecanismo de orientação é atualizado e busca localizar e remover os percursos de baixa qualidade presentes na solução, aumentando os seus custos através de penalização. [Leung et al. \(2011\)](#) consideraram um busca tabu guiada estendida, que é uma generalização da busca tabu guiada, em que um critério de aspiração é utilizado nas penalidades geradas pelo mecanismo de orientação. Os autores implementaram a ideia de critério de aspiração da busca tabu no mecanismo de orientação, isto é, se um movimento sem a consideração das penalidades produzir uma solução de melhor qualidade, então as penalidades são ignoradas.

A heurística de recozimento simulado foi utilizada por [Leung et al. \(2010\)](#) e [Wei et al. \(2018\)](#). Para explorar o espaço de solução, [Leung et al. \(2010\)](#) consideraram três estratégias de vizinhanças diferentes baseadas em operações de inserção, troca e reversão. [Wei et al. \(2018\)](#) utilizaram os mesmos operadores de [Leung et al. \(2010\)](#), com a adição de um operador que realiza troca entre sequências/blocos. A maior diferença entre estas duas heurísticas de recozimento simulado está relacionada à maneira como a temperatura do método foi reduzida ao longo do processo de otimização. [Leung et al. \(2010\)](#) seguiu a metodologia padrão da literatura, enquanto [Wei et al. \(2018\)](#) introduziram um mecanismo de arrefecimento e de aumento de temperatura repetido para ajudar a escapar de ótimos locais e melhorar a desempenho do método.

Para resolver os aspetos de roteamento do 2L-CVRP, [Strodl et al. \(2010\)](#) e [Wei et al. \(2015\)](#) desenvolveram métodos baseados em busca em vizinhança variável. A heurística proposta por [Strodl et al. \(2010\)](#) utiliza um operador de vizinhança de troca cruzada paramétrica para gerar novas soluções e aplica uma busca local baseada no operador *2-opt*. Em busca de evitar ótimos locais, após um dado número de iterações o método aceita soluções no máximo 10% piores que a solução atual. Por outro lado, a heurística de busca em vizinhança variável proposta por [Wei et al. \(2015\)](#) contém seis operadores de vizinhança baseado em movimentos de troca, inserção e *2-opt*, um procedimento de busca local aleatório que conta com seis operações de vizinhança e um mecanismo para diversificar a solução. Outra heurística baseada em busca em vizinhança foi proposta por [Abdal-Hammed, Hifi e Wu \(2014\)](#), que estudaram o método de busca em vizinhança larga. O método consiste em aplicar uma estratégia de remoção de clientes em uma solução viável para fornecer uma solução parcial, um procedimento guloso de inserção de clientes (que busca atribuir os clientes aos veículos de modo a gerar o menor custo) e uma estratégia de busca local baseada em operadores *k-opt* para refinar a qualidade das soluções.

[Souza \(2013\)](#) e [Pinto, Alves e Carvalho \(2018\)](#) utilizaram heurísticas híbridas baseadas em geração de colunas para resolver a parte de roteamento do 2L-CVRP. Em [Souza \(2013\)](#), o problema mestre linear restrito (PMLR) é dado a partir de um modelo de particionamento de conjunto e o subproblema é tratado como um problema de caminho mínimo elementar com

restrições de recurso. No início do método de geração de colunas, um conjunto de heurísticas são utilizados para gerar o *pool* inicial de colunas e, em seguida, o PMLR é resolvido de forma exata para, então, gerar novas colunas através de heurísticas construtivas e de programação dinâmica. Ao final da geração das colunas, um algoritmo do tipo *branch-and-bound* é utilizado de modo a obter uma solução inteira a partir do PMLR. Assim como Souza (2013), Pinto, Alves e Carvalho (2018) trataram o problema mestre como um problema de particionamento de conjunto. O subproblema é modelado como o problema de caminho mínimo elementar com restrições de carregamento bidimensionais. No início da heurística baseada em geração de colunas, a relaxação do problema mestre é resolvido e procedimentos construtivos são utilizados para construir iterativamente uma solução a partir da seleção de uma determinada coluna fornecida pela solução do modelo. O subproblema é resolvido por uma heurística de busca em vizinhança variável proposta anteriormente na literatura.

Outras abordagens desenvolvidas para resolver os aspectos do roteamento do 2L-CVRP são baseadas nos métodos populacionais (colônia de formigas - Fuellerer *et al.* (2009), algoritmo genético - Shen e Murata (2012) e colônia artificial de abelhas - Bin, Hong e Zhi-yong (2013)); no procedimento de busca adaptativa aleatória gulosa integrado com busca local evolucionária (GRASP + ELS - Duhamel *et al.* (2011)); na busca local controlada por um mecanismo de conceito de promessas e composta por estratégias de codificação de movimentos e estruturas de filas para guardar as informações da busca (PRMP - Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2013)); na abordagem de múltiplos reinícios combinados com um algoritmo de economia (MS-BR - Dominguez, Juan e Faulin (2014)); e, em uma heurística construtiva que visa gerar uma única solução viável para o problema (vizinho mais próximo - Sarwono, Ai e Wigati (2017)).

Para resolver o subproblema de empacotamento, os autores consideraram diversos métodos, tal que o emprego de heurísticas baseadas nas estratégias *bottom-left* e *touching perimeter* são as mais usuais. Note que grande parte dos trabalhos consideram mais de uma técnica na resolução do empacotamento, isto é, eles aplicaram vários métodos a fim de provar a viabilidade do empacotamento de uma rota. Conforme Côté, Guastaroba e Speranza (2017), a etapa de verificação da viabilidade do empacotamento dos itens dos clientes nas rotas corresponde a um gargalo na resolução do 2L-CVRP.

Em linhas gerais, as heurísticas utilizadas no empacotamento se baseiam em diferentes regras para posicionar os itens dos clientes na base do veículo a partir de uma dada ordenação dos itens. Sempre que um novo item é inserido na base do veículo, as informações referentes às posições candidatas para empacotar os itens são atualizadas.

Nas heurísticas baseadas em *touching perimeter*, é escolhida, para empacotar um item, a posição que maximiza o perímetro tocante. Na heurística *max touching perimeter*, o perímetro tocante de um item é definido pela soma de suas laterais que estão em contato com outros itens já empacotados ou com a base do veículo. Na heurística *max touching perimeter no walls*, o perímetro tocante é dado somente pela soma das laterais que tocam os itens já empacotados.

Na *bottom-left*, a posição selecionada para empacotar o item é aquela mais baixa e mais à esquerda possível. A *bottom-left fill* segue a mesma regra da *bottom-left*, no entanto, ela também considera os espaços entre os itens já empacotados (isto é, os espaços livres abaixo dos itens) como possíveis posições candidatas. Na *bottom-left fill (W-axis)* e na *bottom-left fill (H-axis)*, seleciona-se a posição de menor coordenada no eixo *W* (ao longo da largura) e no eixo *H* (ao longo do comprimento), respectivamente. Na heurística *bottom-left* revisada, o espaço livre com o melhor ajuste é selecionado e o item é posicionado na posição mais inferior e mais à esquerda desse espaço livre. Para cada posição candidata, é calculado o valor da área do espaço livre e aquele que é mais próximo da área do item a ser empacotado é considerado o valor de melhor ajuste (PINTO; ALVES; CARVALHO, 2018).

Na heurística *Min area*, a posição com menor área de superfície retangular é selecionada. Na heurística *max fitness value*, para cada posição candidata, calcula-se o valor de aptidão do item e a posição com maior valor de aptidão é selecionada para empacotar o item. Na heurística *lowest reference line best-fit*, uma linha de referência mais baixa, que representa a linha mais baixa sob a qual nenhum item pode ser colocado, é utilizada para determinar a posição do item. Em seguida, é definido se o item será inserido no canto inferior direito ou esquerdo da linha de referência, sendo que o ponto do canto inferior esquerdo é escolhido se seu comprimento for maior que do canto inferior direito. Após determinada a posição, define-se qual item é mais adequado para ser empacotado naquela posição conforme o seu valor de aptidão. O item com maior valor de aptidão é selecionado.

Diferentemente das heurísticas *bottom-left*, *touching perimeter* e *min area*, que inserem os itens a partir de uma dada ordenação, a heurística *best-fit* seleciona o item com melhor ajuste dentre aqueles que ainda não foram empacotados. A *best-fit* é um algoritmo guloso que posiciona no menor espaço disponível na base veículo o item que melhor se ajusta.

Em Duhamel *et al.* (2011), os autores transformaram as restrições de empacotamento bidimensional, através de relaxação, em restrições de um problema de planejamento de projeto com restrição de recursos (*Resource constrained project scheduling problem - RCPS*). O RCPS foi resolvido em conjunto com o CVRP pela GRASP + ELS. Ao final do processo de otimização, as soluções são transformadas em soluções do 2L-CVRP.

Na heurística de empacotamento (*memory packing*) utilizada por Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2013), a posição de um item é dada pelo valor de uma função de utilidade que considera o valor do *touching perimeter* e o número de vezes que o empacotamento já foi obtido anteriormente. As informações sobre os empacotamentos já verificados são guardadas por um mecanismo de memória.

A abordagem de *level packing* consiste em empacotar os itens em níveis horizontais para, então, colocar os níveis na base do veículo um sobre o outro. O comprimento do nível é dado pelo comprimento do primeiro item inserido e, assim, só podem ser adicionados itens com comprimento inferior ao do primeiro item. Duas estratégias são consideradas para determinar em

qual nível os itens não inseridos serão adicionados: (i) o item é colocado no primeiro nível onde se encaixa; (ii) o item é inserido no nível onde melhor se encaixa (PINTO; ALVES; CARVALHO, 2018).

A técnica *Skyline* usa diversas regras para determinar o posicionamento dos itens na base do veículo, como o desperdício, a função de aptidão (que representa o número de lados do item com tamanho igual ao do espaço onde vai ser inserido), a ordem de entrega do item do cliente e as coordenadas das posições candidatas.

A ideia da *Open Space* é utilizar os espaços livres (isto é, as áreas que não estejam ocupadas por nenhum item) que tenham um lado coincidindo com a porta traseira dos veículos (de retirada das mercadorias) de modo que o espaço com o menor canto inferior esquerdo é selecionado.

No que concerne à validação das heurísticas nos experimentos computacionais, todos os trabalhos utilizaram instâncias do conjunto B_{Iori} e $B_{Gendreau}$, porém alguns autores selecionaram apenas algumas instâncias. Dentre os métodos apresentados na Tabela 9, a heurística baseada no recozimento simulado proposta por Wei *et al.* (2018) se mostrou a mais eficiente, visto que na média superou todos os melhores resultados publicados anteriormente, isto é, para as quatro versões de empacotamento consideradas, 2|SOIL, 2|SRIL, 2|UOIL e 2|URIL, a diferença relativa média entre as soluções obtidas pelo método dos autores e da literatura foram favoráveis ao recozimento simulado.

Algumas variantes do 2L-CVRP estudadas na literatura estão resumidas na Tabela 10. A tabela traz informações sobre os autores dos trabalhos, a versão do problema abordada (isto é, quais restrições foram consideradas), o tipo do empacotamento (2|SOIL, 2|SRIL, 2|UOIL e/ou 2|URIL), o método principal usado para resolver o problema e o tamanho das instâncias utilizadas nos experimentos computacionais, sendo que n representa o número de clientes e R a quantidade de itens (que consiste na soma do número de itens demandados por todos os clientes).

Dado o escopo deste trabalho, destacam-se da Tabela 10 os trabalhos de Annouch, Bellabdaoui e Minkhar (2016) e Ji *et al.* (2021), que trataram o 2L-CVRP com a possibilidade de entrega fracionada. Annouch, Bellabdaoui e Minkhar (2016) buscam resolver o 2L-CVRP considerando as restrições de coleta, de entrega fracionada, de frota heterogênea, de janelas de tempo, de múltiplos depósitos e de múltiplos produtos. Esse problema foi estudado para resolver o problema de distribuição de gás de petróleo líquido que se caracteriza por realizar operações diárias de coleta e entrega de cilindros de gás entre os postos de abastecimento e um conjunto de depósitos de clientes. Os autores propuseram um modelo de programação linear inteira mista para tratar o problema. Testes computacionais foram realizados em um conjunto de 10 instâncias. As instâncias contêm no máximo quatro estações de abastecimento, seis clientes e sete veículos. Os experimentos indicaram que o tempo computacional aumentou de forma exponencial conforme o tamanho das instâncias.

Tabela 10 – Trabalhos relacionados às variantes do 2L-CVRP.

Autores	Versão do problema	Tipo do empacotamento				Método de resolução	Instâncias [n, R]	
		2ISOIL	2ISRIL	2UOIL	2IURIL			
Malapert <i>et al.</i> (2008)	Coleta e entrega	x				Programação por restrições	-	
Khebbache <i>et al.</i> (2009)	Janelas de tempo			x		Heurística de inserção	[252; 507]	
Khebbache-Hadji <i>et al.</i> (2013)				x		Algoritmo memético	[255; 786]	
Sbai, Limem e Krichen (2017)				x		Algoritmo genético	[75; 236]	
Muñoz (2011)	Movimentação de carga	x		x		Clarke e Wright	[20; 60]	
Guimaranas <i>et al.</i> (2016)	Estocástico			x		Clarke e Wright com recomeços	-	
Guimaranas <i>et al.</i> (2018)				x		Busca local iterada	[255; 786]	
Mahfoudh e Bellalouna (2018)					x	Heurística de varredura com B&B ^a	[255; -]	
Côté, Gendreau e Potvin (2020)			x			Algoritmo <i>L-shaped</i>	[71; 226]	
Leung <i>et al.</i> (2013)			x		x	Recozimento simulado	[255; 786]	
Dominguez <i>et al.</i> (2016b)	Frota heterogênea			x	x	Algoritmo Aleatório com recomeços	[75; -]	
Zhang <i>et al.</i> (2018)				x		ABC ^b e AIS ^c	[255; 786]	
Parameshta e Santosa (2018)			x	x		Algoritmo genético	-	
Sabar <i>et al.</i> (2020)					x	Algoritmo memético	[255; 786]	
Dominguez <i>et al.</i> (2016)			x	x		Busca local iterativa aleatória	[255; 786]	
Li e Li (2013)		Coleta e entrega simultânea			x		Busca local iterada	[75; -]
Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2016)				x	x		Busca local	[255; 786]
Martínez e Amaya (2013)	Janelas de tempo Múltiplas viagens Itens circulares			x		Inserção sequencial com busca tabu	[30; 101]	
Hamdi-Dhaoui, Labadie e Yalaoui (2014)	Conflitos parciais			x		NSGA-II	[35; 114]	
Pinto <i>et al.</i> (2015)	Coleta e entrega mista	x				Heurística de inserção	[255; 786]	
Pinto, Alves e Carvalho (2017)			x			Busca em vizinhança variável	[255; 509]	
Pinto, Alves e Carvalho (2020)			x	x		Busca em vizinhança variável	[255; 786]	
Zhu <i>et al.</i> (2015)	Múltiplos depósitos	x		x		Enxame de partículas	-	
Annouch, Bellabdaoui e Minkhar (2016)	Coleta e entrega Entrega fracionada Frota heterogênea Múltiplos depósitos Múltiplos produtos Janelas de tempo			x		<i>Branch-and-cut</i>	[6; -]	
Dominguez <i>et al.</i> (2016a)	<i>Backhauls</i>	x	x			Busca em vizinhança larga aleatória	[255; 786]	
Alinaghian, Zamanlou e Sabbagh (2017)	Dependente do tempo			x		ENSLs ^d	[100; -]	
Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2017)	Coleta e entrega <i>Backhauls</i> Bidirecional			x		Busca local	[150; -]	
Ostermeier <i>et al.</i> (2018)	Múltiplos compartimentos	x				<i>Branch-and-cut</i> Busca em vizinhança larga	[10; -]	
Escobar-Falcón <i>et al.</i> (2021)	Consumo de combustível Frota heterogênea	x				Algoritmo genético	[255; 786]	
Ji <i>et al.</i> (2021)	Entrega fracionada				x	Busca em vizinhança	-	

^aB&B: *Branch-and-Bound*.

^bABC: *Artificial Bee Colony*.

^cAIS: *Artificial Immune System*.

^dENSLs: *Elitist Non-dominated Sorting Local Search*.

Fonte: Elaborada pela autora.

Ji *et al.* (2021) resolveram o 2L-CVRP com restrição de entrega fracionada. Na versão do empacotamento abordada, os itens podiam ser rotacionados ortogonalmente em 90° e empacotados sem ter que respeitar a ordem de visita dos clientes (isto é, versão 2IURIL). Para resolver o problema, uma heurística de busca em vizinhança variável aprimorada foi utilizada, sendo que três operadores de vizinhança (inserção de clientes, troca de clientes e troca de arcos) foram aplicados para explorar o espaço de busca. Os operadores de vizinhança foram aprimorados para lidar com a entrega fracionada. Para resolver o empacotamento, uma heurística de busca tabu baseada na utilização do espaço máximo foi proposta. Testes computacionais foram realizados utilizando um conjunto de instâncias da literatura e um novo conjunto de instâncias geradas aleatoriamente. Os resultados mostram que economias podem ser obtidas com a agregação da entrega fracionada ao 2L-CVRP, em especial, quando a área total de itens de cada cliente é substancialmente grande em comparação com a área do veículo. Nas instâncias da literatura, para 25 das 80 instâncias a entrega fracionada apresentou redução no custo, com uma economia

máxima de 5,5% e média de 1,5%.

2.4 Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada

O Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada (SDVRP) é uma extensão do VRP, em que a entrega das mercadorias dos clientes pode ser realizada de forma fracionada. Logo, um cliente pode ser atendido por um ou mais veículos se a divisão de carga for benéfica e, assim, estar associado a diferentes rotas. A demanda de cada cliente pode ser maior ou menor que a capacidade do veículo e, em ambos os casos, pode haver fracionamento da entrega.

No SDVRP, somente ocorre entrega fracionada aos clientes se a divisão de carga fornecer benefícios ao problema, em termos de custo e/ou número de veículos utilizados. Deste modo, se não existir nenhuma divisão de carga que proporcione benefícios ao problema, a solução resultante atende às restrições clássicas do VRP, em que a demanda de um cliente é atendida por um único veículo e em uma única visita. Devido à possibilidade de redução dos custos das rotas e do número de veículos usados em relação ao VRP, o SDVRP tem chamado a atenção de muitos pesquisadores. Outro fator que tem impulsionado o estudo SDVRP é o cenário mais realista tratado pelo problema.

Para este problema, além de determinar as rotas, é necessário definir a quantidade de carga que cada veículo vai entregar para cada cliente, logo passa a ser uma variável de decisão do problema. Ao considerar a possibilidade de entrega fracionada, o número de maneiras de satisfazer os clientes é significativamente maior do que no VRP clássico, em que a demanda de um cliente deve ser atendida por um único veículo em uma única visita.

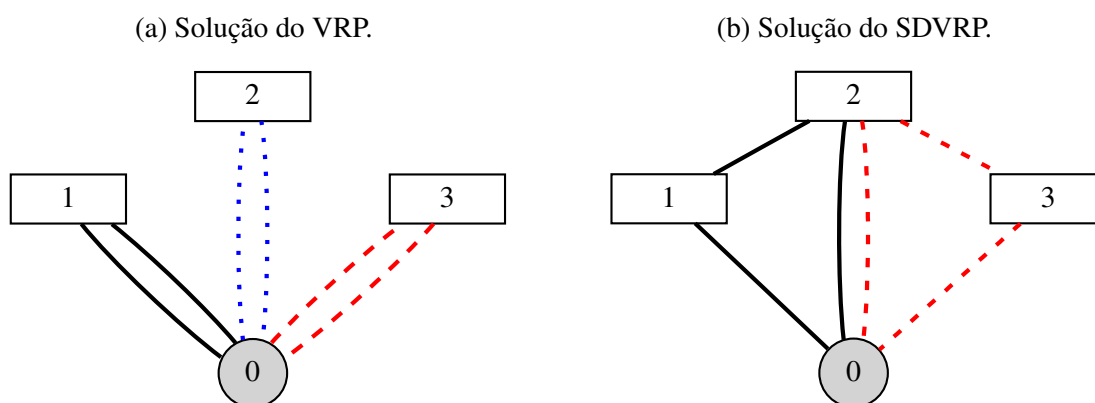
O SDVRP pode ser definido por um único depósito que deve atender completamente a demanda de um conjunto de clientes utilizando um conjunto de veículos com capacidade de carga limitada. O objetivo é definir as rotas que os veículos executarão para suprir a demanda dos clientes de modo a gerar o menor custo possível.

O SDVRP foi introduzido por [Dror e Trudeau \(1989\)](#) e [Dror e Trudeau \(1990\)](#) e segundo os autores consiste em uma relaxação do VRP clássico. No entanto, o problema continua sendo NP-difícil. Os autores buscaram mostrar as economias geradas, tanto em relação ao número de veículos quanto à distância total percorrida, ao se permitir que a demanda de um cliente possa ser distribuída por um ou mais veículos.

[Dror e Trudeau \(1989\)](#) apresentaram um exemplo simples para exemplificar os ganhos ao permitir a divisão de entrega. Sejam o depósito central (vértice 0) e três clientes (números de 1 a 3) com as seguintes demandas: $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, e $d_3 = 3$. Considere que as distâncias/custos entre os vértices (depósito e clientes) são simétricos, sendo dados por: $C_{0i} = 10, \forall i \in \{1, 2, 3\}$;

$C_{12} = C_{23} = 5$; e $C_{13} = 10$. A capacidade de carga dos veículos é 5 e, assim, para atender a demanda de todos os clientes são necessários no mínimo dois veículos. Na Figura 12, é apresentada uma solução para o VRP associado a este exemplo (Figura 12a) e ao SDVRP (Figura 12b). A solução do VRP tem um custo total de 60, para as três rotas da solução, uma rota para cada cliente. Em contrapartida, a solução do SDVRP tem um custo de 50 e apenas duas rotas foram estabelecidas ($0 - 1 - 2 - 0$ e $0 - 2 - 3 - 0$), sendo que o cliente 2 foi atendido por dois veículos.

Figura 12 – Exemplo de economias obtidas com o SDVRP.



Fonte: Adaptada de [Dror e Trudeau \(1989\)](#).

Além do exemplo ilustrado da Figura 12, [Dror e Trudeau \(1989\)](#) mostraram, através de testes computacionais, que economias podem ser obtidas tanto em relação ao número de veículos quanto à distância total percorrida. Em um trabalho posterior, [Dror e Trudeau \(1990\)](#) realizaram um estudo mais detalhado das economias geradas com a possibilidade de entrega fracionada. Para tanto, os autores consideram três conjuntos de instâncias geradas aleatoriamente, em que cada um contém 180 instâncias com 75, 115 e 150 clientes. Ao comparar os resultados do SDVRP com o VRP, concluíram que, em situações em que as demandas são inferiores a 10% da capacidade do veículo, a diferença entre as soluções dos problemas é muito pequena. Contudo, para casos em que a demanda dos clientes é superior a 10% da capacidade do veículo, economias significativas em termos de número de veículos e distância percorrida foram obtidas com o SDVRP. Posteriormente, [Archetti, Savelsbergh e Speranza \(2006\)](#) também realizaram uma análise dos benefícios do SDVRP. Os autores mostraram, que ao considerar a possibilidade de entrega fracionada, economias de até 50% podem ser alcançadas, tanto para o caso em que a demanda dos clientes é menor que a capacidade dos veículos quanto para as situações em que a demanda de cada cliente pode ser maior que a capacidade do veículo.

Na literatura, diversas abordagens foram empregadas para resolver o problema de roteamento de veículos com entrega fracionada, como pode ser observado nas revisões de [Archetti e Speranza \(2008\)](#), [Gulczynski, Golden e Wasil \(2008\)](#) e [Archetti e Speranza \(2012\)](#). O trabalho de [Gulczynski, Golden e Wasil \(2008\)](#) fornece informações sobre quais estudos foram realizados

a respeito do SDVRP de modo a sumarizar os métodos de resolução e as variantes abordadas. Por outro lado, Archetti e Speranza (2008) e Archetti e Speranza (2012), além de discutirem os trabalhos desenvolvidos, descreveram algumas propriedades e desigualdades válidas para o SDVRP.

Na Tabela 11, são resumidos os trabalhos que abordam o SDVRP de modo exato. A tabela apresenta informações sobre o nome dos autores, o método utilizado para resolver o problema e o tamanho das instâncias.

Tabela 11 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do SDVRP com métodos exatos.

Autores	Método de resolução	Tamanho das instâncias
Dror, Laporte e Trudeau (1994)	<i>Branch-and-bound</i>	20
Belenguer, Martinez e Mota (2000)	Planos de corte	100
Jin, Liu e Bowden (2007)	Algoritmo exato de dois estágios	21
Moreno, Aragão e Uchoa (2010)	Geração de colunas e planos de corte	288
Archetti, Bianchessi e Speranza (2011)	<i>Branch-and-price-and-cut</i>	144
Archetti, Bianchessi e Speranza (2014)	<i>Branch-and-cut</i>	100
Munari e Savelsbergh (2022)	<i>Branch-and-cut</i>	100

Fonte: Elaborada pela autora.

Como observado na Tabela 11, os autores utilizaram distintos métodos exatos. No que diz respeito aos modelos e às desigualdades válidas utilizadas para resolver o SDVRP, [Dror, Laporte e Trudeau \(1994\)](#) apresentaram uma formulação de fluxo em arco, bem como novas classes de desigualdades válidas foram descritas e uma hierarquia entre elas foi estabelecida. [Belenguer, Martinez e Mota \(2000\)](#) consideraram uma formulação matemática baseada na descrição do poliedro e utilizaram algumas desigualdades *facet-inducing* e outras desigualdades válidas do CVRP. [Jin, Liu e Bowden \(2007\)](#) seguiram o modelo apresentado por [Dror, Laporte e Trudeau \(1994\)](#) e introduziram um algoritmo de dois estágios com desigualdades válidas para tratar o problema. [Moreno, Aragão e Uchoa \(2010\)](#) consideraram uma formulação estendida para o problema em busca de apresentar uma estrutura mais adequada/vantajosa para a identificação de desigualdades, e propuseram diferentes desigualdades válidas para fortalecê-lo, bem como alguns cortes fracionários. [Archetti, Bianchessi e Speranza \(2011\)](#) apresentaram uma formulação de fluxo em arco e algumas desigualdades válidas para o problema. Uma vantagem do *branch-and-price-and-cut* proposto pelos autores consiste no fato das colunas geradas pelo método poderem ser utilizadas para construir uma solução heurística para o SDVRP. [Archetti, Bianchessi e Speranza \(2014\)](#) apresentaram duas formulações relaxadas para o SDVRP, baseadas no fluxo de veículos com dois índices (que corresponde a uma variação da formulação de [Belenguer, Martinez e Mota \(2000\)](#)) e no fluxo único de mercadorias. [Munari e Savelsbergh \(2022\)](#) apresentaram três modelos para o SDVRP que utiliza somente variáveis com índices para os arcos (isto é, não consideram índice para os veículos nas variáveis de decisão). Uma das formulações utiliza as restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e as outras duas consideram restrições de fluxo de mercadorias. Os autores incorporaram diferentes desigualdades válidas ao método.

Em relação à validação dos métodos, os autores utilizaram vários conjuntos de instâncias e, além disso, nos experimentos computacionais foram consideradas diferentes características, como custos reais ou arredondados/inteiros e veículos com capacidade ilimitada ou limitada. Em geral, [Belenguer, Martinez e Mota \(2000\)](#) provou a otimalidade para 5 de 25 instâncias, sendo capaz de obter uma solução ótima para instâncias com no máximo 50 clientes. [Jin, Liu e Bowden \(2007\)](#) conseguiu resolver instâncias com até 21 clientes. [Moreno, Aragão e Uchoa \(2010\)](#) obtiveram resultados, geralmente, melhores que os apresentados em [Belenguer, Martinez e Mota \(2000\)](#) e [Chen, Golden e Wasil \(2007\)](#), e provaram a otimalidade para 11 de um total de 46 instâncias. A maior instância resolvida por [Moreno, Aragão e Uchoa \(2010\)](#) na otimalidade tem 288 clientes. [Archetti, Bianchessi e Speranza \(2011\)](#) resolveram uma instância com 144 clientes, contudo as demais instâncias solucionadas na otimalidade contém até 48 clientes. Os autores conseguiram melhorar a maioria dos limites inferiores disponíveis na literatura e encontraram limites inferiores para algumas instâncias que não estavam disponíveis. [Archetti, Bianchessi e Speranza \(2014\)](#) provaram a otimalidade para 17 instâncias novas (no total o método obteve 29 soluções ótimas de 81 instâncias), sendo que uma solução ótima foi encontrada para a maioria das instâncias com até 50 clientes e duas instâncias com 75 e 100 clientes. [Munari e Savelsbergh \(2022\)](#) conseguiram obter a solução ótima de 95 instâncias em aberto na literatura e melhoram o limite inferior e/ou superior disponíveis na literatura para outras instâncias.

Como a primeira abordagem exata para o SDVRP foi proposta por [Dror, Laporte e Trudeau \(1994\)](#), os autores buscaram mostrar o desempenho das desigualdades válidas na melhora do limitante inferior. Para tanto, determinaram o limitante superior das instâncias a partir da heurística de [Dror e Trudeau \(1989\)](#). Os autores mostraram que, com a integração das novas desigualdades válidas, a diferença entre os limitantes inferior e superior foi reduzida para mais de 30% das instâncias.

Apesar dos métodos exatos obterem uma solução ótima para o problema, as abordagens exatas propostas para o SDVRP são capazes de resolver apenas instâncias com até 288 clientes para alguns casos isolados. A maioria das instâncias resolvidas contém cerca de 50 clientes. Com isso, a aplicação de métodos heurísticos para a resolução do SDVRP é encontrada com mais facilidade. As heurísticas conseguem resolver instâncias com maior número de clientes e, assim, conseguem retratar instâncias mais próximas de casos práticos. Entretanto, as heurísticas não garantem a otimalidade da solução.

Na Tabela 12, são apresentados os principais trabalhos que resolveram o SDVRP por meio de métodos heurísticos. A tabela traz as mesmas informações da Tabela 11. Diferentes métodos heurísticos foram utilizados pelos autores, e até mesmo duas *math*-heurísticas foram desenvolvidas ([Chen, Golden e Wasil \(2007\)](#) e [Archetti, Speranza e Savelsbergh \(2008\)](#)). A *math*-heurística proposta por [Chen, Golden e Wasil \(2007\)](#) consiste na combinação de uma formulação de programação inteira mista de *endpoint* com a heurística *record-to-record travel* de [Li, Golden e Wasil \(2005\)](#). Na abordagem dos autores, primeiramente, uma solução inicial é gerada pelo

algoritmo de *Clarke e Wright*, em seguida, o modelo de programação inteira mista de *endpoint* é aplicado para obter a solução e, por fim, a heurística *record-to-record travel* é utilizada para melhorar as rotas construídas. Por outro lado, [Archetti e Speranza \(2008\)](#) desenvolveram uma abordagem baseada na heurística de busca tabu de [Archetti, Speranza e Hertz \(2006\)](#) combinada com um modelo de programação inteira. O algoritmo de busca tabu foi utilizado para identificar soluções próximas ao ótimo para, em seguida, aplicar a formulação matemática para encontrar melhores soluções.

Tabela 12 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do SDVRP com heurísticas.

Autores	Método de resolução	Tamanho das instâncias
Dror e Trudeau (1989) Dror e Trudeau (1990)	Busca local de dois estágios	150
Archetti, Speranza e Hertz (2006)	Busca tabu	199
Boudia, Prins e Reghioui (2007)	Algoritmo memético com população estruturada	199
Chen, Golden e Wasil (2007)	Programação inteira mista Algoritmo <i>record-to-record travel</i>	288
Archetti, Speranza e Savelsbergh (2008)	Busca tabu Programação inteira	199
Jin, Liu e Eksioglu (2008)	Geração de coluna	-
Aleman, Zhang e Hill (2010)	Descida em vizinhança variável Algoritmo de memória adaptativa	199
Derigs, Li e Vogel (2010)	Busca local	288
Berbotto, García e Nogales (2014)	Busca tabu granular aleatória	199
Silva, Subramanian e Ochi (2015)	Busca local iterada com recomeços	288
Shi et al. (2018)	Enxame de partículas	288

Fonte: Elaborada pela autora.

Três métodos baseados na heurística de busca local foram propostos por [Dror e Trudeau \(1989\)](#), [Dror e Trudeau \(1990\)](#) e [Derigs, Li e Vogel \(2010\)](#). Nos artigos de [Dror e Trudeau \(1989\)](#) e [Dror e Trudeau \(1990\)](#), os autores implementaram um algoritmo de busca local de dois estágios, sendo que o primeiro estágio consiste na obtenção de uma solução do VRP e o segundo visa construir uma solução para o SDVRP a partir da solução do VRP. No primeiro estágio, a solução inicial do problema é gerada a partir de uma variação da heurística de *Clarke e Wright*, em seguida, novas soluções são geradas com aplicação de movimentos de troca e de uma heurística de melhoria baseada na vizinhança *2-opt*. No segundo estágio, são considerados os operadores de vizinhança do primeiro estágio com a adição de operações específicas para lidar com a entrega fracionada, tais como: trocas *k-split* e adição de rotas. Vale destacar que o trabalho de [Dror e Trudeau \(1990\)](#) é uma continuação de [Dror e Trudeau \(1989\)](#) visando proporcionar uma análise mais detalhada das economias obtidas com a entrega fracionada, sendo que o método heurístico de ambos são iguais. [Derigs, Li e Vogel \(2010\)](#) propuseram um método baseado em busca local, em que a solução inicial é gerada pelo método *route-first cluster-second* de [Beasley \(1983\)](#) e a busca por novas soluções de melhor qualidade é feita por operadores de vizinhança clássicos (troca, inserção e *2-opt*), que foram adaptados para lidar com a possibilidade de entrega fracionada. Outra estratégia baseada em busca local foi desenvolvida por [Silva, Subramanian e Ochi \(2015\)](#), que estudaram a heurística de busca local iterada com recomeços.

A solução inicial foi gerada por estratégias de inserção, enquanto a busca local foi realizada usando um método de descida em vizinhança variável randomizada composta por movimentos de troca, inserção, *2-opt*, adição de rotas e *k-split*, sendo que os dois últimos movimentos são utilizados especificamente para lidar com a entrega fracionada. Além disso, um procedimento de diversificação *multiple-k-split* foi utilizado, em que alguns clientes são removidos aleatoriamente da solução e, posteriormente, são reinseridos.

Métodos baseados em busca tabu foram desenvolvidos por Archetti, Speranza e Hertz (2006) e Berbotto, García e Nogales (2014). Na heurística de busca tabu de Archetti, Speranza e Hertz (2006), a solução inicial foi gerada com o auxílio de um procedimento de inserção de Gendreau, Hertz e Laporte (1992). Em seguida, uma nova solução vizinha é obtida com aplicação do método de inserção mais barata. Por fim, uma estratégia de melhoria é considerada, em que é realizada uma verificação da solução para ver se a mesma atende uma das propriedades de otimalidade do SDVRP e, posteriormente, o algoritmo utilizado para gerar a solução inicial é novamente aplicado em busca de uma melhor solução. Em Berbotto, García e Nogales (2014), um algoritmo de busca tabu granular aleatória é introduzido, em que a solução inicial é obtida pelo algoritmo de economia de Clarke e Wright. A busca local é realizada por meio da aplicação de sete operadores de vizinhança. Um procedimento de correção da capacidade do veículo é aplicado para verificar se a capacidade do veículo, em cada rota, é respeitada e, caso haja violação da capacidade, os clientes nestas rotas são realocados. Por fim, um algoritmo de melhoria é aplicado.

Outras abordagens heurísticas foram consideradas por Boudia, Prins e Reghioui (2007), que estudaram um algoritmo memético com gestão populacional que consiste na combinação de um algoritmo genético com busca local por intensificação e diversificação; Aleman, Zhang e Hill (2010), que utilizaram um algoritmo de memória adaptativa com a incorporação da heurística de descida em vizinhança variável; Jin, Liu e Bowden (2007), que apresentaram um método de geração de colunas; e Shi *et al.* (2018), que propuseram uma heurística bioinspirada baseada no enxame de partículas.

Para validar os métodos, os autores realizaram experimentos computacionais em instâncias da literatura. Em geral, os trabalhos apresentados por Silva, Subramanian e Ochi (2015) e Shi *et al.* (2018) têm um melhor desempenho que os demais. Para um total de 324 instâncias, Silva, Subramanian e Ochi (2015) obtiveram 55 soluções iguais a melhor conhecida na literatura e 243 soluções melhores. Por outro lado, Shi *et al.* (2018) consideraram apenas 131 instâncias, sendo que o algoritmo encontrou 32 soluções iguais a melhor conhecida e 35 soluções melhores.

Após a introdução do SDVRP, algumas variantes do problema foram propostas e consistem na adição de novas restrições. Na Tabela 13, são apresentadas as variantes do SDVRP. A tabela fornece informações sobre os autores, a versão do problema (que descreve quais restrições foram adicionadas ao SDVRP), o método de resolução e o tamanho das instâncias consideradas nos experimentos computacionais.

Tabela 13 – Trabalhos relacionados às variantes do SDVRP.

Trabalho	Versão do problema	Método de resolução	Tamanho das instâncias
Ho e Haugland (2004)	Janelas de tempo	Busca tabu	100
Desaulniers (2010)		<i>Branch-price-and-cut</i>	100
McNabb <i>et al.</i> (2015)		Busca local	100
Munari e Savelsbergh (2020)		Geração de Colunas	100
Tavakkoli-Moghaddam <i>et al.</i> (2007)	Frota heterogênea	Recozimento simulado	50
Mitra (2008)	Coleta e entrega	Técnica de agrupamento paralelo	80
Haddad <i>et al.</i> (2018)		Busca local iterada Descida em vizinhança variável aleatória <i>Branch-and-price</i>	125
Xia e Fu (2018)		Busca tabu adaptativa	100
Rattanamane <i>et al.</i> (2018)	Aberto	<i>Branch-and-cut</i>	50
Archetti, Bianchessi e Speranza (2015)	Restrição de Mercadoria	<i>Branch-price-and-cut</i>	40
Gschwind, Bianchessi e Irnich (2019)		<i>Branch-price-and-cut</i>	60
Gulczynski, Golden e Wasil (2011)	Múltiplos depósitos	Heurística baseada em programação inteira	249
Ray <i>et al.</i> (2014)		Descida por gradiente de custo de inserção estocástica	240
Wong e Moin (2017)	Estoque	Colônia de formigas	100
Wang <i>et al.</i> (2017)	<i>Cross-docking</i>	Recozimento simulado Busca tabu	-
Lei, Laporte e Guo (2012)	Estocástico	Busca em vizinhança larga adaptativa	60
Lai <i>et al.</i> (2018)	Demanda em arcos	Busca tabu	190
Batsyn <i>et al.</i> (2019)	Restrição de acesso	Algoritmo <i>cluster-first route-second</i> Algoritmos construtivos	-
Vornhusen e Kopfer (2015)	Janelas de tempo Verde Frota heterogênea	<i>Branch-and-cut</i>	10
Matos, Frota e Ochi (2018)	Dependente do tempo Verde Frota heterogênea <i>Scheduling</i>	Busca local iterada Descida em vizinhança variável aleatória Modelo de cobertura do conjunto	100
Annouch, Bellabdaoui e Minkhar (2016)	Coleta e entrega Empacotamento bidimensional Frota heterogênea Múltiplos depósitos Múltiplos produtos Janelas de tempo	<i>Branch-and-cut</i>	6
Bortfeldt e Yi (2020)	Empacotamento tridimensional	Busca local	200
Chen <i>et al.</i> (2020)	Empacotamento tridimensional Janelas de tempo	Busca tabu	-
Ji <i>et al.</i> (2021)	Empacotamento bidimensional Entrega fracionada	Busca em vizinhança	-
Rajaei, Moslehi e Reisi-Nafchi (2021)	Empacotamento tridimensional Frota heterogênea	Heurística baseada em geração de coluna	850

Fonte: Elaborada pela autora.

Dentre os trabalhos da Tabela 13, destacam-se os trabalhos de Vornhusen e Kopfer (2015) e Matos, Frota e Ochi (2018), que trataram o VRP com emissão de CO₂ em que é permitida a entrega fracionada. As variantes do SDVRP com restrição de empacotamento bidimensional foram discutidas anteriormente.

Vornhusen e Kopfer (2015) estudaram o SDVRP verde com janelas de tempo e frota de veículos heterogênea (*Emission Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Delivery* - EVRPTWSD), cujo objetivo é minimizar o custo com o transporte e reduzir a emissão de CO₂. A emissão de CO₂ foi estimada com base no peso total dos veículos em cada arco, considerando o veículo vazio e carregado. Os autores apresentaram um modelo matemático para o problema que foi validado utilizando dois conjuntos de instâncias gerados aleatoriamente. Testes computacionais foram realizados utilizando esses conjuntos de instâncias para o EVRPTWSD e para o EVRPTW (que consiste no EVRPTWSD sem a possibilidade de entrega fracionada). Os resultados do EVRPTW serviram como base para determinar os ganhos obtidos sobre

o EVRPTWSD. Além disso, os autores consideraram nos experimentos a frota de veículos homogênea e heterogênea. Para o EVRPTWSD com frota homogênea, a redução, em média, das emissões de gases do efeito estufa foi de 1,03%, da distância de viagem em 1,30% e do número de veículos utilizados em 3,69%. Para o EVRPTWSD com frota heterogênea, os ganhos foram de 16,16%, 14,00% e 15,49%, respectivamente.

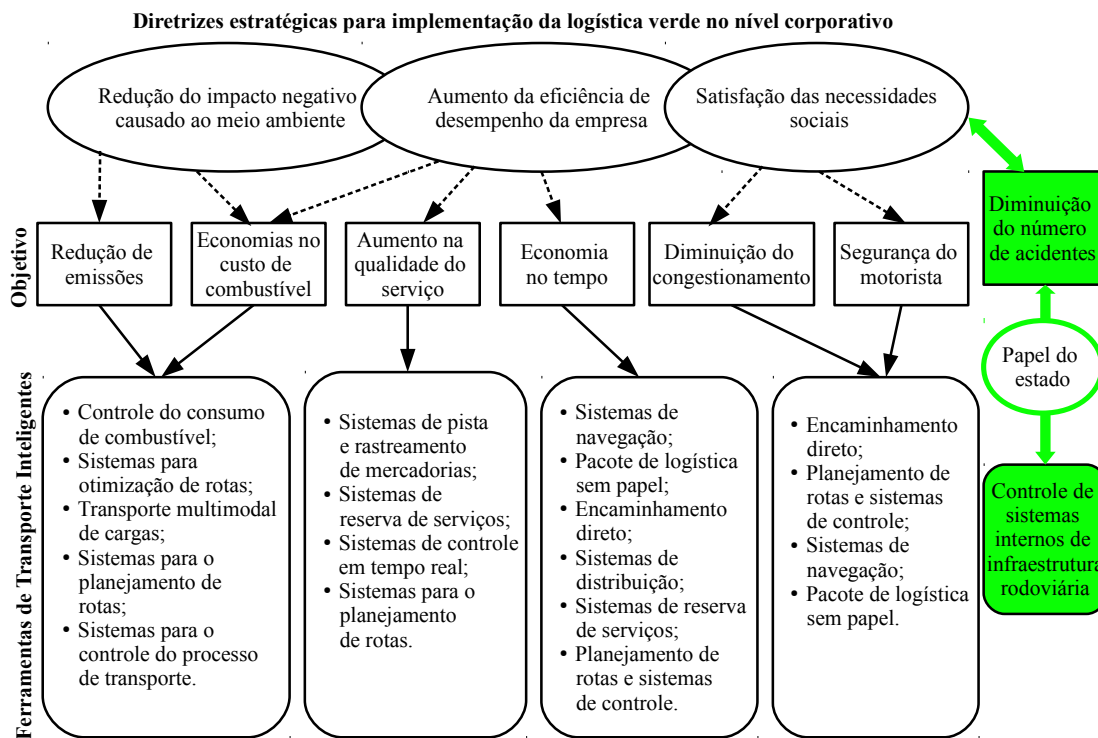
Matos, Frota e Ochi (2018) estudaram o SDVRP verde visando otimizar as rotas de uma frota de veículos heterogênea e definir os planos de entrega considerando os aspectos do tráfego que varia conforme o horário (por exemplo, os congestionamentos) para obter a maior redução possível na emissão de CO₂. A emissão de CO₂ foi medida em termos da velocidade, do peso do veículo e da distância percorrida. Os autores desenvolveram um modelo de programação linear inteira mista e um algoritmo híbrido que combina a heurística de busca local iterada com o procedimento de descida de vizinhança variável aleatória e um modelo de cobertura de conjunto. O método de descida de vizinhança variável aleatória foi utilizado como um procedimento de busca local, enquanto a formulação de cobertura de conjunto é usado como um procedimento de intensificação. Testes computacionais foram realizados em instâncias da literatura e os resultados foram comparados com os de Xiao e Konak (2016), que resolvem o mesmo problema, com exceção da restrição de entrega fracionada. Os autores conseguiram uma melhora nos resultados de 1,40%, em média, sendo que a emissão de CO₂ foi reduzida para todas as instâncias.

2.5 Problema de Roteamento de Veículos com Considerações Ambientais

Devido à preocupação mundial com os impactos ambientais, tornaram-se mais frequentes estudos acerca da logística verde para minimizar os danos causados ao meio ambiente. Saberi e Verbas (2012) destacam que no futuro os impactos ambientais causados pela sociedade, principalmente pelo setor industrial, como a emissão de gases de efeito estufa, passarão a ser monetizados. Por conseguinte, o transporte ganhou ainda mais destaque, devido ao fato de ser um dos componentes mais importantes da logística e exercer uma influência significativa sobre o meio ambiente por ser um dos maiores consumidores de petróleo e, conseqüentemente, gerar uma grande quantidade de poluentes (SALIMIFARD; SHAHBANDARZADEH; RAEESI, 2012).

O transporte verde tem como finalidade reduzir o consumo de energia, a emissão de poluentes, o descarte de material e o custo do transporte através de projetos eficazes. Transporte verde refere-se ao planejamento do fluxo e da rede de transporte que reduza as emissões de gases poluentes e o consumo de energia para fornecer rotas com menor custo. Vasiliauskas, Zinkevičiūė e Jakubauskas (2013) propuseram um modelo para auxiliar as empresas de transporte rodoviário a alcançar os objetivos da logística verde. O modelo apresentado na Figura 13 visa reduzir os impactos sociais e ambientais de modo que se obtenha o melhor desempenho financeiro possível.

Figura 13 – Modelo para atingir os objetivos da logística verde em uma empresa de transporte rodoviário de carga.



Fonte: Adaptada de [Vasiliauskas, Zinkevičiūė e Jakubauskas \(2013\)](#).

Em busca do transporte verde, alguns aspectos como escolha modal e intermodal do transporte, seleção do equipamento e combustível devem ser estudados ([DEKKER; BLOEMHOF; MALLIDIS, 2012](#)). Dentro desse contexto, a questão de transporte verde foi incorporada ao VRP, dando origem ao *Green Vehicle Routing Problem* (GVRP), cujo objetivo é minimizar os custos do transporte e os custos ambientais.

No GVRP, a quantidade de poluição produzida está associada diretamente ao consumo de combustível e às emissões de gases poluentes. Assim, torna-se necessário determinar a quantidade de combustível consumida e as emissões causadas pelo transporte. Entretanto, conforme [Palmer \(2007\)](#), o consumo de combustível e as emissões de gases produzidos pelo transporte são variáveis difíceis de se estimar e dependem de vários fatores, tais como:

- aspectos das viagens: velocidade, taxas de aceleração, estilo de direção e mudanças de marchas;
- características do veículo: tamanho do motor, tipo de combustível, carga útil e idade;
- geometria e mobilidade da estrada: curvas, inclinação, desvios e semáforos;
- condições meteorológicas: temperatura do ambiente, velocidade e direção do vento.

Segundo [Lin et al. \(2014\)](#), o GVRP vem sendo investigado desde 2006 e pode ser classificado em três categorias:

- *Green-Vehicle Routing Problem*: cujo foco é a diminuição do consumo de energia do transporte, pois com a redução do consumo de combustível derivados do petróleo, consequentemente, ocorre redução na emissão de gases poluentes. Outro foco de investigação deste problema é estudar o uso dos veículos com combustíveis alternativos (eletricidade, gás natural, biodiesel, etanol, hidrogênio e outros). Esses veículos têm como vantagem uma redução significativa nas emissões de poluentes e podem ser usados em áreas urbanas com acesso ao tráfego restrito a veículos específicos.
- *Pollution-Routing Problem (PRP)*: esta variante do problema trata explicitamente a redução da emissão de gases poluentes emitidos pelo transporte, em especial, o CO₂. Como esses gases exercem impactos negativos para a sociedade e para o ecossistema, tornou-se primordial determinar um planejamento eficiente e eficaz para o transporte, que produza a menor quantidade possível de gases poluentes.
- *Vehicle Routing Problem with Reverse Logistic*: trata dos aspectos de distribuição na logística reversa. Para [Tasan e Gen \(2012\)](#), a abordagem sobre as questões ambientais, econômicas e as exigências legais ampliaram a importância do estudo da logística reversa, sendo o roteamento de veículos uma das questões que mais afetam no seu desempenho.

O PRP foi introduzido por [Bektaş e Laporte \(2011\)](#), porém alguns estudos visando minimizar as emissões de gases no VRP foram desenvolvidos anteriormente. Mais informações sobre a variante verde do problema de roteamento de veículos podem ser obtidas em [Lin et al. \(2014\)](#) e [Demir, Bektaş e Laporte \(2014b\)](#), que apresentaram trabalhos de revisão sobre o tema. [Lin et al. \(2014\)](#) enfatizam a classificação do problema de roteamento de veículos com abordagens ambientais, bem como realizam um levantamento das pesquisas desenvolvidas. Por outro lado, [Demir, Bektaş e Laporte \(2014b\)](#) investigam diferentes modelos para estimar a emissão de poluentes causadas pelos veículos por meio da avaliação do consumo de combustível. Além disso, os autores apontaram diversos trabalhos desenvolvidos acerca do GVRP.

Como o objetivo deste trabalho é lidar com a redução de gases de efeito estufa, na Tabela 14, são apresentados os artigos que abordam a emissão de CO₂. Na tabela, são apresentadas informações sobre os autores, os parâmetros utilizados para estimar a emissão de CO₂, o objetivo do problema, o método de resolução e o tipo das instâncias (isto é, se os dados são reais ou da literatura) e o tamanho das instâncias. Vale ressaltar que na tabela há apenas trabalhos com abordagens de resolução baseados em métodos heurísticos devido ao fato que durante a revisão da literatura não foi possível encontrar nenhum trabalho que tratou o VRP puro com emissão de CO₂ de forma exata.

Tabela 14 – Características dos trabalhos da literatura na resolução do VRP com emissão de CO₂.

Autores	Estimativa de emissão de CO ₂	Objetivo (minimizar)	Método de resolução	Instâncias	
				Tipo	Tamanho
Palmer (2007)	Velocidade Características dos veículos	Emissão de CO ₂	Busca local com múltiplos inícios	Reais	2871
Adiba, Elhassania e Ahemd (2013)	Distância Peso	Emissão de CO ₂	Colônia de formigas	Literatura	300
Zhang <i>et al.</i> (2014)	Distância Peso	Distância Emissão de CO ₂	Colônia de abelhas	Literatura	51
Zhang <i>et al.</i> (2015)	Velocidade Distância Peso	Custo com a poluição	Busca tabu	Reais Literatura	50
Ehmke, Campbell e Thomas (2016)	Velocidade Distância Peso Características dos veículos	Emissão de CO ₂	Busca tabu	Reais	30
Costa <i>et al.</i> (2018)	Velocidade Peso Inclinação das ruas	Distância Emissão de CO ₂	Algoritmo genético	Reais	200
Dewi e Utama (2021)	Velocidade Distância Peso	Custo de utilização do veículo Emissão de CO ₂ Consumo de combustível	Otimização de baleias	Literatura	100

Fonte: Elaborada pela autora.

Com base na Tabela 14, observa-se que as principais características utilizadas pelos autores para estimar a emissão de CO₂ são o peso do veículo e a distância percorrida. Alguns trabalhos também consideram as características dos veículos (como eficiência energética, a força de arrasto, os componentes associados ao consumo de combustível, entre outros), a velocidade e inclinação das ruas. Apesar de o foco dos trabalhos serem a redução da emissão de CO₂, alguns autores também consideraram outros fatores na função objetivo como minimizar a distância total percorrida, custo de utilização do veículo e o consumo de combustível.

No que diz respeito à resolução do problema, diferentes métodos heurísticos foram utilizados, quatro são métodos bioinspirados. Dentre os métodos populacionais, foram utilizados colônia de formigas (ADIBA; ELHASSANIA; AHEMD, 2013), colônia de abelhas (ZHANG *et al.*, 2014), algoritmo genético (COSTA *et al.*, 2018) e otimização de baleias (DEWI; UTAMA, 2021). As abordagens utilizadas pelos demais trabalhos consiste nos métodos de busca local com múltiplos inícios (PALMER, 2007) e busca tabu (ZHANG *et al.*, 2015; EHMKE; CAMPBELL; THOMAS, 2016).

Em relação aos métodos de busca tabu, Zhang *et al.* (2014) geraram a solução inicial por um algoritmo de busca reversa gulosa e, para reduzir o tempo computacional, a solução foi representada por um método de codificação de cromossomos utilizado no algoritmo genético para resolver o problema do caixeiro viajante. Com o método de codificação de cromossomos, a solução é representada como uma rota gigante e, posteriormente, um algoritmo de divisão de rotas é utilizado para particionar a rota gigante em várias rotas secundárias. Para realizar a busca por novas soluções, procedimentos de vizinhança baseados em movimentos *2-opt*, *or-opt* e troca são aplicados. Em contrapartida, no trabalho de Ehmke, Campbell e Thomas (2016) foi implementado um algoritmo de busca tabu denominado LANTIME, que foi proposto por Maden, Eglese e Black (2010) para resolver a variante do VRP dependente do tempo. No algoritmo, a solução inicial é gerada pela heurística de Solomon (1987) e o procedimento de busca por novas

soluções é realizado pelas vizinhanças de *cross exchange*, inserção, *one exchange* e troca.

Ao analisar as instâncias, nota-se que muitos autores utilizaram dados reais. Para os casos em que instâncias da literatura foram consideradas, os autores escolheram diferentes conjuntos de instâncias. Dentro desse contexto não é possível realizar uma comparação justa entre os resultados dos trabalhos. Em linhas gerais, Palmer (2007) realizou os testes com os dados de uma semana de serviço fornecidos por um varejista de supermercados que realiza entregas em domicílio na Grã-Bretanha e obteve uma redução na quantidade de emissão de CO₂ em cerca de 5% com um aumento médio dos custos totais de 0,5%; Adiba, Elhassania e Ahemd (2013) concluiu que ao minimizar as emissões ocorre aumento na distância total; Zhang *et al.* (2014) mostram que podem ser obtidas reduções na emissão de CO₂ em média de 0,25%, mas há um aumento de 0,34% na distância total de viagem; Zhang *et al.* (2015) indicaram que existe uma relação entre o consumo de combustível, a emissão de gás carbono e o custo com o uso do veículo; Ehmke, Campbell e Thomas (2016) conseguiram reduzir a emissão de gases em um conjunto de instâncias geradas a partir de dados reais; Costa *et al.* (2018) compararam suas soluções com as usadas atualmente pelos motoristas de uma empresa de entrega de diesel e conseguiram reduzir a emissão de CO₂ sem ocasionar custos operacionais adicionais; Dewi e Utama (2021) encontraram soluções melhores que as apresentadas por Zhang *et al.* (2015).

A maioria dos trabalhos sobre o VRP, em que a poluição é tratada explicitamente, são abordados com a incorporação de outras restrições, em especial, a de janelas de tempo, pois o PRP proposto por Demir, Bektaş e Laporte (2012) é uma extensão do VRP com janelas de tempo. Assim, na Tabela 15 são apresentados alguns trabalhos com agregação de restrições práticas ao VRP com emissão de CO₂. A tabela apresenta o nome dos autores, a versão do problema abordada (as restrições consideradas), os métodos de resolução e o tamanho das instâncias. Na tabela, as variantes do VRP com emissão de CO₂ que também consideram a restrição de entrega fracionada foram discutidas anteriormente.

2.5.1 Considerações

A partir do levantamento bibliográfico, observa-se que as versões mais estudadas do 2L-CVRP, em respeito ao empacotamento, correspondem ao 2ISOIL (empacotamento bidimensional orientado e sequencial) e ao 2UOIL (empacotamento bidimensional orientado e irrestrito). Além disso, a aplicação de heurísticas para solucionar o problema é mais comum, sendo que de 22 trabalhos somente 5 utilizaram métodos exatos. Essa situação se estende às variantes do 2L-CVRP, de modo que, dos 30 trabalhos sumarizados na Tabela 10, somente 3 buscaram resolver os problemas de forma exata. Com base na Tabela 10, nota-se que diversas variantes do 2L-CVRP foram estudadas. As variantes mais estudadas são com janelas de tempo, frota heterogênea e estocástica.

Tabela 15 – Trabalhos relacionados às variantes do VRP com emissão de CO₂.

Trabalho	Versão do problema	Método de resolução	Instâncias (n)
Figliozzi (2010)		IRCI ^a	100
Bektaş e Laporte (2011)		<i>Branch-and-cut</i>	20
Demir, Bektaş e Laporte (2012)		Busca em vizinhança larga adaptativa	200
Jabali, Woensel e Kok (2012)		Busca tabu	80
Franceschetti <i>et al.</i> (2013)		<i>Branch-and-cut</i>	20
Kwon, Choi e Lee (2013)		Busca tabu	100
Pradenas, Oportus e Parada (2013)		Dependente do tempo	<i>Scatter Search</i>
Demir, Bektaş e Laporte (2014a)	Frota Heterogênea	Busca em vizinhança larga adaptativa	100
Koç <i>et al.</i> (2014)		Algoritmo evolucionário	200
Kopfer, Schönberger e Kopfer (2014)		<i>Branch-and-cut</i>	14
Tajik <i>et al.</i> (2014)		-	17
Kramer <i>et al.</i> (2015a)	Janelas de tempo Dependente do tempo	Busca local iterativa Modelo de cobertura do conjunto SD-TOA ^b	100
Kramer <i>et al.</i> (2015b)		Busca local iterativa Modelo de cobertura do conjunto Algoritmo de otimização de velocidade	20
Dabia, Demir e Woensel (2016)		<i>Branch-and-price</i>	100
Kumar <i>et al.</i> (2016)		SLPSO ^c	200
Naderipour e Alinaghian (2016)	Janelas de tempo Estocástico	Enxame de partículas	79
Qian e Eglese (2016)		Geração de coluna Busca tabu	60
Franceschetti <i>et al.</i> (2017)		Busca em vizinhança larga adaptativa	200
Liao (2017)	Janelas de tempo <i>Backhaul</i>	Algoritmo genético Busca tabu	132
Saka, Gürel e Woensel (2017)	Janelas de tempo Coleta e entrega	Busca local	200
Xiao e Konak (2017)	Janelas de tempo Multiobjetivo Produção	Programação dinâmica Algoritmo genético	15
Abad <i>et al.</i> (2018)	Dependente do tempo Aberto	NSGA-II ^e NRGA ^f MOPSO ^g	75
Costa <i>et al.</i> (2018)	<i>On-line</i>	Algoritmo genético	100
Eshtehadi <i>et al.</i> (2018)	Dependente do tempo <i>Scheduling</i>	Busca em vizinhança larga adaptativa	200
Li, Wang e Zhang (2018)	Janelas de tempo Coleta e entrega <i>Cross-docking</i> Multiobjetivo	Busca tabu	100
Majidi, Hosseini-Motlagh e Ignatius (2018)	Janelas de tempo Coleta e entrega simultânea	Busca em vizinhança larga adaptativa	200
Niu <i>et al.</i> (2018)	Janelas de tempo Aberto	Busca tabu	120
Bravo, Rojas e Parada (2019)	Janelas de tempo Coleta e entrega Frota heterogênea	Algoritmo evolucionário	16
Vornhusen e Kopfer (2015)	Janelas de tempo Entrega fracionada Frota heterogênea	<i>Branch-and-cut</i>	10
Matos, Frota e Ochi (2018)	Dependente do tempo Entrega fracionada Frota heterogênea <i>Scheduling</i>	Busca local iterada Descida em vizinhança variável aleatória Modelo de cobertura do conjunto	100
Chen, Dan e Shi (2020)	Múltiplos compartimentos Janelas de tempo	Busca em vizinhança variável	50

^aIRCI: *Iterated Route Construction and Improvement*.^bSD-TOA: *Speed and Departure-Time Optimization Algorithm*.^cSLPSO: *Self-Learning Particle Swarm Optimization*.^dAIMMS: *Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software*.^eNSGA-II: *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*.^fNRGA: *Non-dominated Ranking Genetic Algorithm*.^gMOPSO: *Multi-Objective Particle Swarm Optimization*.

No que diz respeito aos trabalhos do VRP com emissão de CO₂, todos os trabalhos discutidos desenvolveram métodos heurísticos para tratar o problema. Algumas abordagens exatas foram empregadas para resolver as variantes do VRP com restrições ambientais, isto é, dos 31 estudos apresentados na Tabela 15, 5 deles trataram o problema através de um método exato. Além disso, na maioria dos trabalhos discutidos sobre o VRP com emissão de CO₂ houve redução da poluição ao meio ambiente, mas ocorreu um pequeno aumento nos custos com o transporte e/ou distância percorrida.

Assim como no 2L-CVRP e PRP, no SDVRP a maioria dos trabalhos apresentam métodos heurísticos, bem como diferentes variantes do problema foram tratadas na literatura, sendo a restrição de janelas de tempo a mais estudada (conforme a Tabela 13). Os resultados reportados mostram que a possibilidade de entrega fracionada proporciona redução de custos e do número de veículos utilizados.

Vale destacar que na literatura não foi possível identificar nenhum trabalho que aborda o problema de roteamento de veículos com emissão de CO₂ e com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada. No entanto, alguns trabalhos envolvendo a combinação do 2L-CVRP com entrega fracionada e do SDVRP com considerações ambientais foram desenvolvidos.

Os dois trabalhos que trataram a possibilidade de entrega fracionada no 2L-CVRP obtiveram resultados contraditórios, sendo que a abordagem utilizada por [Annouch, Bellabdaoui e Minkhar \(2016\)](#) não teve um bom desempenho de modo que os autores não realizaram nenhuma análise comparativa dos resultados; enquanto a estratégia utilizada por [Ji et al. \(2021\)](#) apresentou ganhos de 1,5%, em média. Nos trabalhos de [Vornhusen e Kopfer \(2015\)](#) e [Matos, Frota e Ochi \(2018\)](#), que trataram o VRP com emissão de CO₂ e consideraram a restrição de entrega fracionada, é perceptível que com a consideração da possibilidade de entrega fracionada, houve redução na emissão de CO₂ e nos custos com as viagens.

Neste contexto, devido à sua relevância, o 2L-CVRP com restrições de entrega fracionada e emissão de CO₂ é explorado. Neste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de um modelo matemático, de um método exato e de uma meta-heurística para tratar o 2L-CVRP com consideração ambientais e restrição de entrega fracionada, bem como se busca analisar os benefícios obtidos, em relação ao custo e à emissão de CO₂.

CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

Neste capítulo, é apresentada uma contextualização do Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional (2L-CVRP), do Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada (2L-SDVRP), do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Empacotamento Bidimensional para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono (G2L-CVRP) e do Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono (G2L-SDVRP) nas Seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente. Para cada problema, suas principais características são descritas, para, em seguida, apresentar um modelo matemático. Ademais, são descritas algumas desigualdades válidas para fortalecer os modelos com possibilidade de entrega fracionada, isto é, o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP (Seção 3.5). Por fim, é realizada uma discussão sobre as relações existentes entre os problemas, no contexto do espaço de soluções e da otimalidade (Seção 3.6).

3.1 Descrição do 2L-CVRP

O 2L-CVRP consiste na resolução do problema de roteamento de veículos considerando de forma integrada as restrições de empacotamento bidimensional. O 2L-CVRP é descrito por um conjunto de clientes, um único depósito e um conjunto de veículos. Cada cliente tem uma demanda específica caracterizada por um conjunto de itens retangulares que, para o problema estudado, não podem ser empilhados, como ocorre, por exemplo, no transporte de eletrodomésticos da linha branca. Cada item contém informações sobre peso, área e sua dimensão, em termos da largura e do comprimento. O depósito central contém uma frota homogênea de veículos, os quais são caracterizados por um contêiner de base retangular com capacidade limitada de carga e de área. O objetivo do problema é encontrar um conjunto de rotas de entrega de custo total mínimo que atendam a demanda de todos os clientes, respeitando as seguintes restrições:

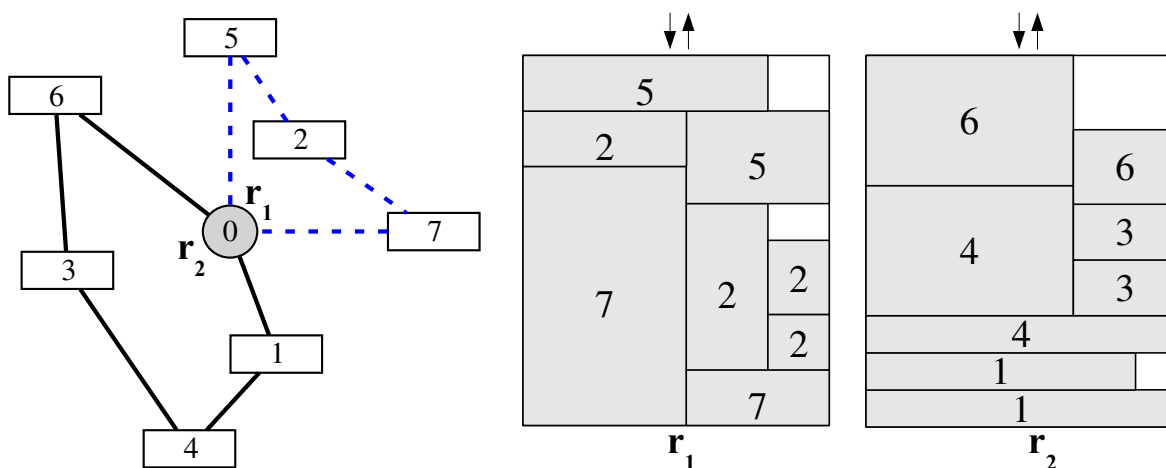
- i. cada veículo inicia e termina sua rota no depósito central;
- ii. um veículo só pode executar uma rota;
- iii. cada cliente é visitado por um único veículo e uma única vez e, assim, os itens de um dado cliente devem ser carregados em um mesmo veículo;
- iv. a capacidade dos veículos em peso e área não pode ser ultrapassada;
- v. a quantidade de rotas deve ser menor ou igual ao número de veículos disponíveis;
- vi. cada rota pode conter um ou mais clientes;
- vii. a demanda de cada cliente deve ser completamente atendida;
- viii. não pode ocorrer sobreposição entre quaisquer itens dentro da base retangular dos veículos;
- ix. todos os itens devem estar totalmente contidos na base do veículo;
- x. o empacotamento deve ser ortogonal, ou seja, os itens devem ser empacotados com seus lados paralelos ou perpendiculares às bordas da base do veículo;
- xi. o empacotamento deve ser orientado, isto é, os itens não podem ser rotacionados;
- xii. a restrição sequencial deve ser respeitada, ou seja, os itens não podem ser reorganizados durante a operação de descarregamento nos clientes.

Na Figura 14, é ilustrada uma solução para o 2L-CVRP, em que há o depósito central, denominado por 0, e sete clientes, representados pelos números de 1 até 7. Na figura, é apresentada uma solução do roteamento (na parte esquerda) e a disposição dos itens retangulares dos clientes na base retangular dos veículos (na parte direita), sendo que os itens de cada cliente são identificados pelo seu respectivo número. Ao analisar a solução, é possível perceber que foi necessário criar duas rotas para atender os clientes, de modo que a capacidade de carga e de área dos veículos fossem respeitadas. A primeira rota (r_1 – linha tracejada) é composta por três clientes (0 – 5 – 2 – 7 – 0) e a segunda (r_2 – linha contínua) por quatro clientes (0 – 6 – 3 – 4 – 1 – 0).

As operações de carregamento e de descarregamento de mercadorias dos veículos são realizadas de maneira ortogonal ao comprimento da base do veículo. A base do veículo é retangular e os pontos (0, 0) e (L, 0) indicam o canto inferior esquerdo e direito da base, respectivamente. Enquanto os pontos (C, 0) e (L, C) correspondem aos cantos superior esquerdo e direito da base do veículo, sendo que neste lado são efetuadas tanto as operações de carga quanto de descarga. Note que L e C representam a largura e o comprimento da base retangular do veículo, respectivamente. Na Figura 15, é ilustrada a operação de carga ou de descarga, em que se tem cinco clientes (números 1, 2, 3, 4 e 5) e cada cliente demanda um único item retangular, sendo que a linha pontilhada representa a entrada do contêiner (ou seja, a porta de abertura)

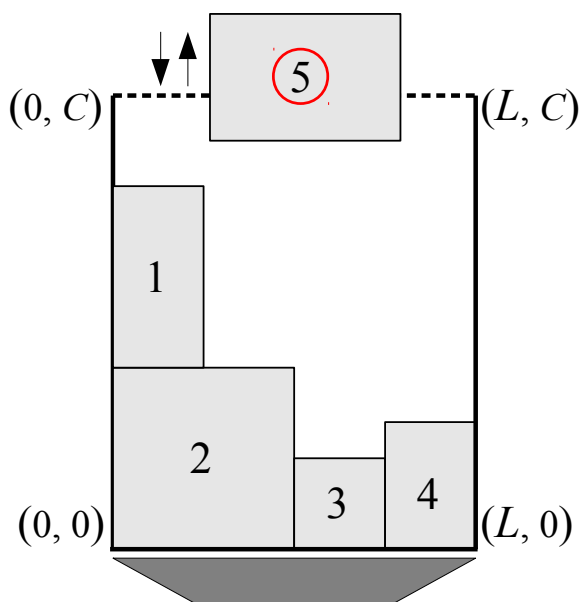
e as demais linhas contínuas indicam os lados fechados da base do veículo por onde os itens não podem ser descarregados. A figura mostra que o item do cliente 5 está sendo carregado ou descarregado da base retangular do veículo.

Figura 14 – Exemplo de uma solução para o 2L-CVRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 15 – Exemplo da operação de carregamento ou descarregamento.



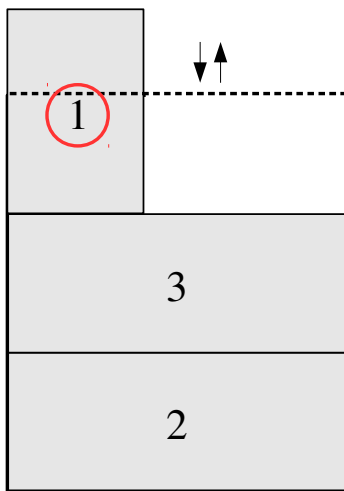
Fonte: Elaborada pela autora.

Além das restrições anteriores, o 2L-CVRP apresenta duas outras que se referem ao empacotamento bidimensional. Tais características consistem em determinar se o empacotamento deve ser orientado ou não-orientado (rotacionado) e sequencial ou irrestrito. O tipo do empacotamento (orientado ou não-orientado) refere-se à orientação dos itens, isto é, a possibilidade de rotacioná-los. No empacotamento orientado, os itens têm uma orientação fixa e no não-orientado

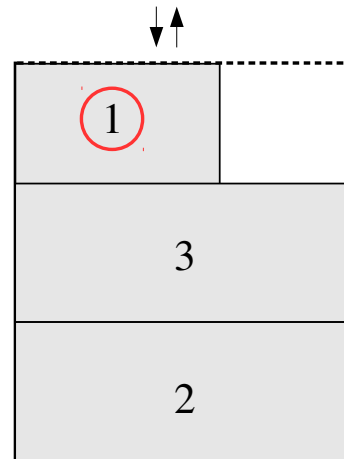
os itens podem ser rotacionados em 90° . Na Figura 16, são ilustrados exemplos das restrições de empacotamentos orientado e não-orientado, no qual se tem um veículo com base retangular de dimensão $(L, C) = (15, 20)$ e três itens com dimensões $(l_1, c_1) = (6, 10)$, $(l_2, c_2) = (15, 7)$ e $(l_3, c_3) = (15, 7)$. Na Figura 16a, é apresentado um empacotamento orientado, em que não foi possível empacotar todos os itens inteiramente na base do veículo (veja que uma parte do item 1 encontra-se parcialmente fora da base). Por outro lado, na Figura 16b todos os itens foram empacotados, visto que se permitia rotacionar os itens em 90° e, assim, rotacionou-se o item 1, que passa a estar totalmente contido dentro da base do veículo.

Figura 16 – Exemplo das restrições de empacotamento orientado e não-orientado.

(a) Empacotamento orientado.



(b) Empacotamento não-orientado.



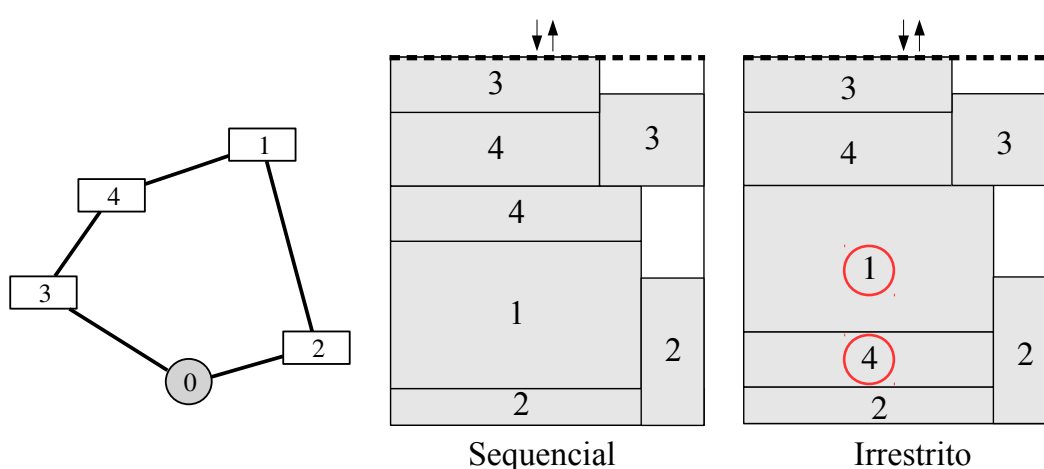
Fonte: Elaborada pela autora.

As variantes irrestrita e sequencial lidam com a alternativa de rearranjar ou não a mercadoria durante o descarregamento nos clientes. Na versão irrestrita, os itens podem ser empacotados na base retangular de um veículo sem considerar a ordem de visita ao cliente, isto é, a posição em que o item vai ser colocado no contêiner não é relevante para a rota. Assim, durante o descarregamento da carga, os itens que tiverem obstruindo o caminho para retirada de outro podem ser rearranjados. Em contrapartida, a versão sequencial não permite que os itens sejam remanejados ou movimentados dentro do veículo. Logo, somente a carga entregue ao cliente pode ser movimentada dentro do veículo para ser retirada. Essa restrição determina que quando um cliente é visitado, todos os seus itens não devem ter caminho de retirada obstruído por quaisquer itens de outros clientes que vão ser servidos posteriormente. A versão sequencial segue a restrição *Last In First Out* (LIFO) – último que entra, primeiro que sai.

Na Figura 17, são ilustrados exemplos das restrições de empacotamentos irrestrito e sequencial. Para tanto, considera-se um exemplo com uma única rota, contendo quatro clientes, representados pelos números de 1 a 4. O veículo que vai executar esta rota deve atender os quatro clientes, respeitando a sequência $0 - 3 - 4 - 1 - 2 - 0$. No empacotamento apresentado à

esquerda (que representa o caso sequencial), não há obstrução na retirada dos itens durante a rota. Contudo, no empacotamento à direita, o item do cliente 1 obstrui a passagem para retirada de um dos itens do cliente 4, que no caso é visitado antes dele e, assim, durante o descarregamento um remanejamento da carga é necessário, isto é, primeiro o item do cliente 1 que obstrui o caminho deve ser descarregado, depois o item do cliente 4 deve ser retirado e, por fim, o item do cliente 1 é recarregado no veículo. Vale lembrar que todo empacotamento válido para o caso sequencial também é válido para o irrestrito, mas o mesmo não pode ser afirmado para o contrário. Na Figura 14, ambas as rotas r_1 (0 – 5 – 2 – 7 – 0) e r_2 (0 – 6 – 3 – 4 – 1 – 0) apresentam um empacotamento sequencial.

Figura 17 – Exemplo das restrições de empacotamento irrestrito e sequencial.



Fonte: Elaborada pela autora.

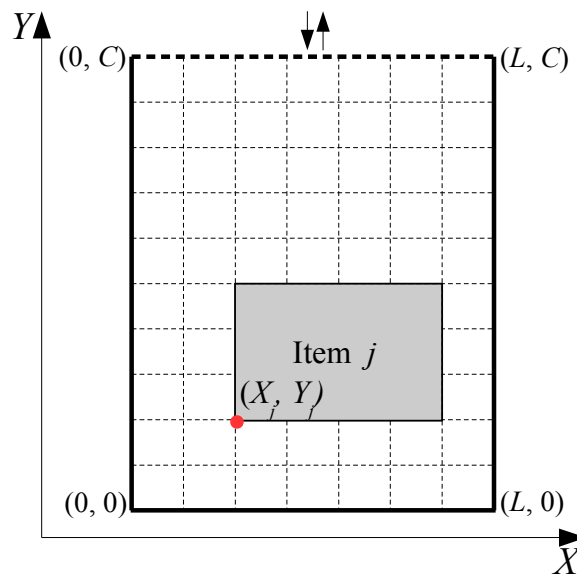
Uma definição formal de rota viável para o 2L-CVRP é apresentada por Iori, Salazar-González e Vigo (2007). Uma rota viável está associada a um subconjunto de clientes S e deve atender quatro condições, sendo que uma delas é referente à capacidade do veículo e as demais à viabilidade do empacotamento. A primeira condição necessária para garantir a viabilidade de uma rota implica a restrição de capacidade clássica do CVRP.

Condição 1: A capacidade dos veículos deve ser respeitada, tanto em relação ao peso quanto à área da base. O peso dos itens dos clientes da rota S não pode ser superior ao peso de carga suportada pelo veículo e a soma da área de todos os itens dos clientes em S deve respeitar a área total da base do veículo.

As próximas condições são referentes ao empacotamento e, antes de abordá-las, para facilitar as explicações, a base retangular do veículo é mapeada no primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesiano, com origem em $(0, 0)$, canto superior direito em (L, C) , em que o eixo X está relacionado à largura do veículo e o eixo Y está associado ao seu comprimento. A posição de um item na base do veículo pode ser definida pelo par ordenado (X_j, Y_j) representando

o ponto onde o item j tem seu canto inferior esquerdo posicionado (conforme a Figura 18). As operações de carregamento e de descarregamento são realizadas em direção ao lado traseiro da base do veículo que corresponde à coordenada C sobre o eixo Y , apresentada na Figura 18 pela linha pontilhada.

Figura 18 – Representação do empacotamento de um item j no ponto (X_j, Y_j) .



Fonte: Elaborada pela autora.

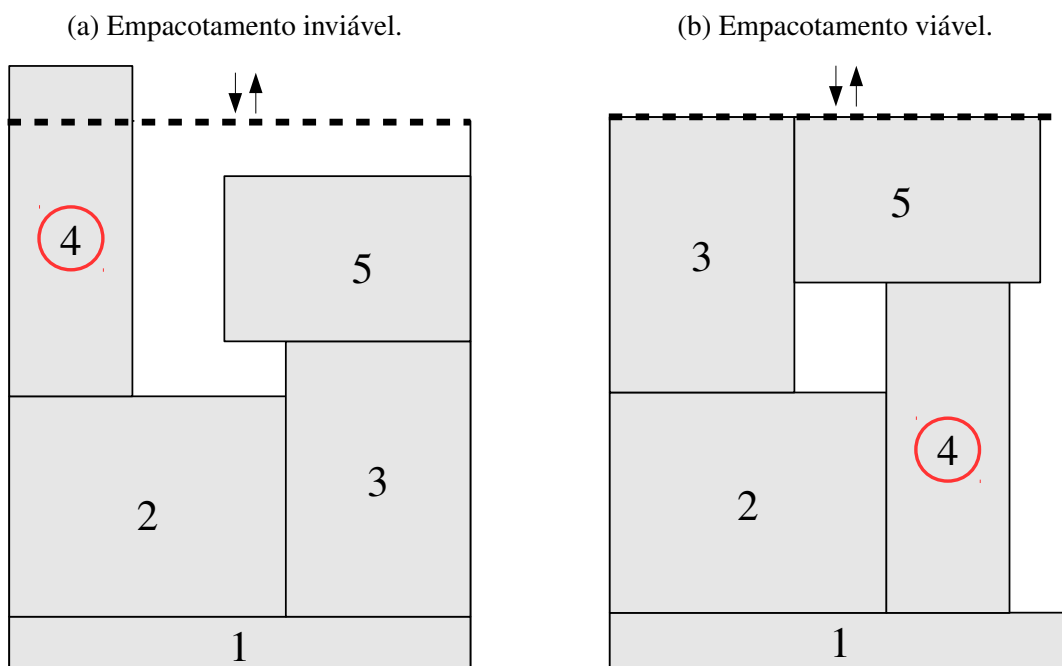
Condição 2: Todos os itens dos clientes pertencentes à rota S devem estar totalmente contidos na base retangular do veículo, tanto em relação ao comprimento quanto à largura.

Na Figura 19, é ilustrado um exemplo da Condição 2. Para tanto, a rota considerada é composta por cinco clientes $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cada cliente demanda somente um item, que está associado ao número do cliente. O empacotamento apresentado na Figura 19a é inviável, visto que o item 4 ultrapassou a dimensão da base do veículo em relação ao comprimento. A Figura 19b ilustra um empacotamento viável, sendo que alguns itens foram reposicionados para atender as exigências da Condição 2.

Condição 3: Não pode ocorrer sobreposição entre os itens, ou seja, quaisquer dois itens i e j não podem ocupar um mesmo espaço na base do veículo.

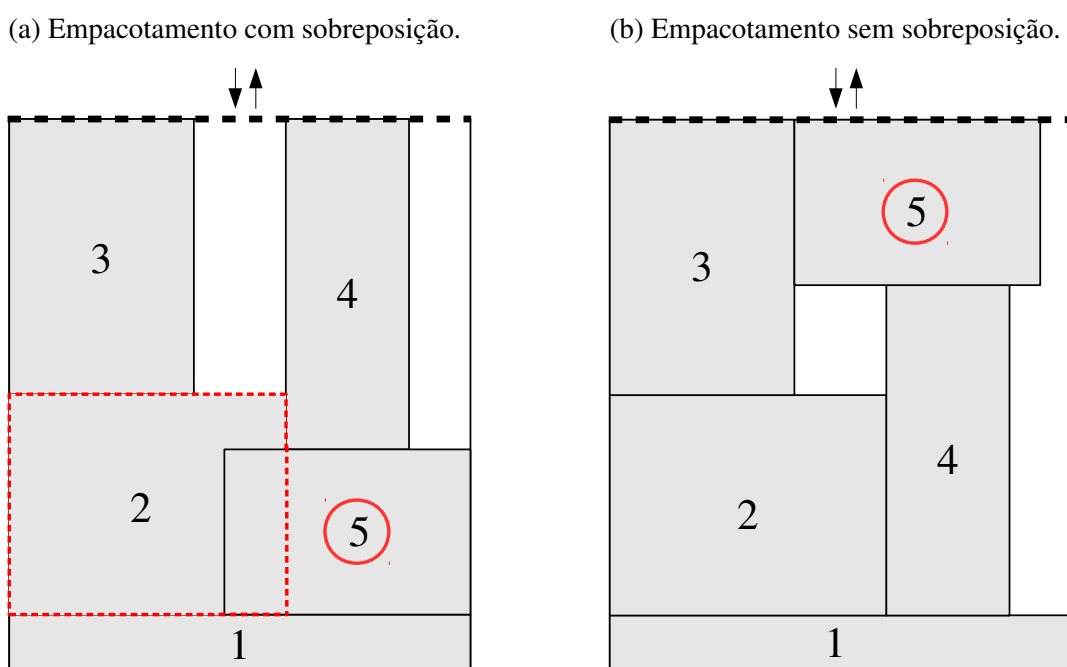
Um exemplo da Condição 3 é apresentado na Figura 20. O empacotamento da Figura 20a é inviável, visto que o item 5 sobrepôs o item 2 (que está com sua área contornada pela linha tracejada). O empacotamento da Figura 20b é viável e todos os itens foram empacotados na base retangular do veículo sem qualquer sobreposição.

Figura 19 – Exemplo de empacotamentos relacionados à Condição 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 20 – Exemplo de empacotamentos relacionados à Condição 3.



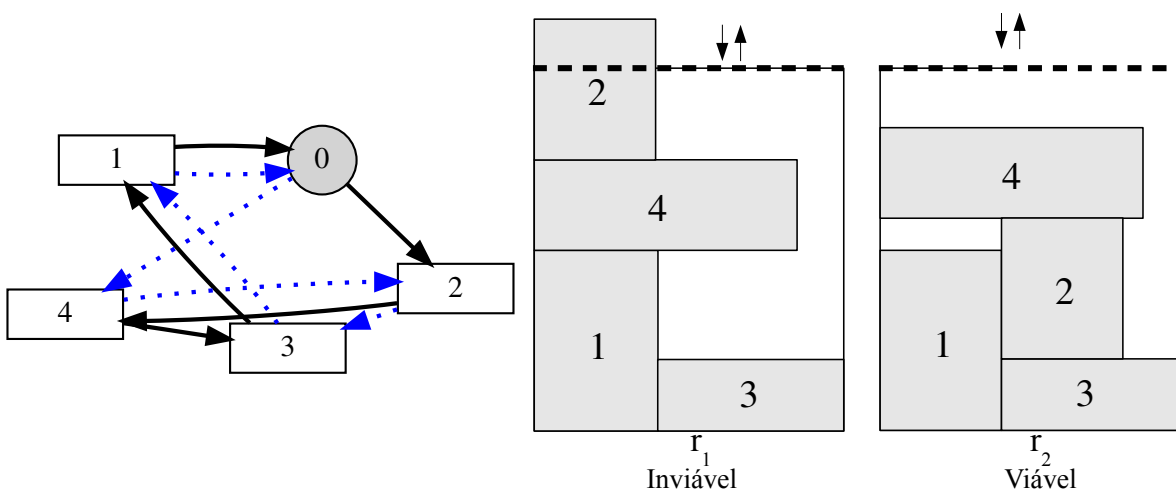
Fonte: Elaborada pela autora.

Condição 4: Os itens do cliente i devem estar em uma posição (X_i, Y_i) da base do veículo que não tenha sua passagem obstruída durante a sua retirada por qualquer outro item de um cliente j , com $j \neq i$, que vai ser atendido posteriormente na rota.

A Condição 4 somente se aplica quando se considera a versão sequencial para o empacotamento como é o caso aqui estudado. Ademais, uma ilustração dessa condição é apresentada na Figura 17.

Além de apresentarem uma definição de rota viável para o 2L-CVRP, Iori, Salazar-González e Vigo (2007) ressaltaram algumas observações importantes sobre o empacotamento sequencial. Dentre elas, a ordem que os clientes são atendidos em uma rota S é importante para sua viabilidade. Dependendo do empacotamento inicial dos itens não é possível acomodar os itens de todos os clientes de uma rota S e este procedimento de alocar os itens na base do veículo fica ainda mais difícil quando há obrigatoriedade do empacotamento ser sequencial. Uma ilustração dessa situação é apresentada na Figura 21, em que se considera quatro clientes e cada um com uma demanda por um único item. Duas rotas são geradas considerando os mesmos clientes, mas com ordem de atendimento distinta. Seja $r_1 = r_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, em que a ordem de serviço na rota r_1 é $0 - 2 - 4 - 3 - 1 - 0$ (linha contínua) e na rota r_2 é $0 - 4 - 2 - 3 - 1 - 0$ (linha tracejada). Assim, o empacotamento da esquerda na Figura 21 é inviável, pois conforme a sequência, o item do cliente 4 deve ser empacotado antes do cliente 2 e ao fazer isso ocorreu a impossibilidade de posicionar o item 2 de modo viável. Ao mudar a sequência da rota, para que o cliente 2 seja atendido depois do cliente 4, o empacotamento resultante é viável (conforme o empacotamento à direita da Figura 21).

Figura 21 – Exemplo de empacotamento viável e inviável, considerando a ordem dos clientes na rota.

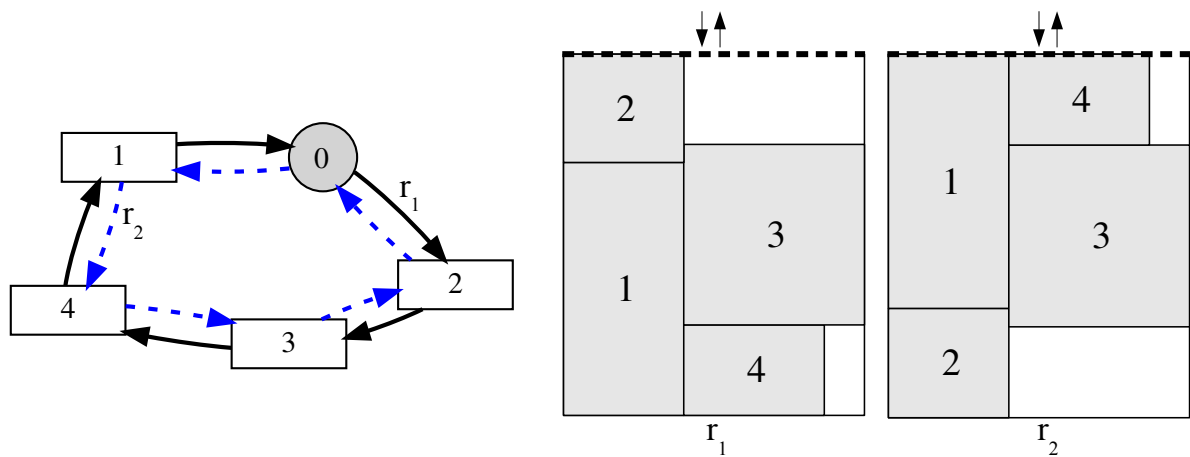


Fonte: Elaborada pela autora.

Outra observação feita por Iori, Salazar-González e Vigo (2007) quanto ao empacotamento sequencial refere-se ao sentido da rota. Se uma rota S é viável, ao considerá-la no

sentido oposto, ela permanecerá viável. Logo, se (S, σ) é uma rota viável, então (S, σ^o) também é viável, em que σ denota a ordem que o cliente $j \in S$ é servido na rota e σ^o representa a sequência de visita em ordem contrária de σ . Para obter o empacotamento de uma rota viável em ordem inversa somente é necessário realizar um cálculo de simetria em respeito à linha $Y = \frac{C}{2}$ e atualizar o par ordenado de coordenadas (X_j, Y_j) para (X_j^o, Y_j^o) , tal que $X_j^o = X_j$ e $Y_j^o = C - Y_j - c_j$. Na Figura 22, é apresentada uma ilustração dessa situação, sendo perceptível que ambas as rotas ($r_1 - 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ e $r_2 - 0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$) são viáveis quanto ao empacotamento. Por fim, a mesma conclusão pode ser aplicada a uma rota inviável, isto é, a rota inversa de uma rota inviável também é inviável.

Figura 22 – Exemplo de empacotamento sequencial considerando a ordem inversa dos clientes na rota.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.1.1 Modelagem Matemática para o 2L-CVRP

O 2L-CVRP pode ser expresso sobre um grafo completo não orientado $G = (V, E)$, em que $V = \{0, 1, \dots, n\}$ corresponde ao conjunto de vértices, que é composto pelo depósito (vértice 0) e pelos clientes (vértices $1, \dots, n$) e $E = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$ representa o conjunto de arestas que ligam dois vértices de V . Cada aresta $(i, j) \in E$ tem uma distância não-negativa associada D_{ij} . O depósito central tem um conjunto de $K = \{1, \dots, K_{max}\}$ veículos idênticos disponíveis. Os veículos são caracterizados por terem uma capacidade máxima de carga Q e uma base retangular com uma área total $A_T = LC$, em que L é largura e C é o comprimento. Além disso, as operações de carga e descarga dos itens são realizadas em um único lado do compartimento do veículo, na direção do comprimento.

Cada cliente tem um conjunto de R_j itens retangulares com peso total $P_j = \sum_{r=1}^{|R_j|} p_{jr}$ e área total $A_j = \sum_{r=1}^{|R_j|} l_{jr} c_{jr}$, em que cada item $r \in R_j$ tem largura l_{jr} , comprimento c_{jr} , peso p_{jr} e área $a_{jr} = l_{jr} c_{jr}$. Neste contexto, cada item retangular é caracterizado por um par (j, r) , em que j representa o cliente e r corresponde ao índice do item deste cliente. Por fim, assume-se,

sem perda de generalidade, que as dimensões da base retangular do veículo e dos itens admitem somente valores inteiros positivos.

Uma formulação matemática do 2L-CVRP é apresentada abaixo sendo baseada nos modelos de fluxo de veículos, em especial, o modelo apresentado por Iori, Salazar-González e Vigo (2007). Assim, além das informações sobre a descrição do 2L-CVRP fornecidas anteriormente, o modelo matemático considera o parâmetro S que corresponde a um subconjunto de clientes, $r(S)$ que representa a quantidade mínima de veículos necessários para atender um subconjunto de clientes S , o conjunto S_{inv} que contém todas as rotas cujo empacotamento é inviável, e, por fim, K_{min} que corresponde a um limitante inferior para o número de veículos necessários para atender a demanda em peso e área de todos os clientes, como descrito em (3.1).

$$K_{min} = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{j \in V \setminus \{0\}} P_j}{Q} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{j \in V \setminus \{0\}} A_j}{A_T} \right\rceil \right\} \quad (3.1)$$

O modelo de programação linear inteira para o 2L-CVRP considera as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se um veículo segue diretamente do vértice } i \text{ para } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando como base estas variáveis de decisão, o modelo para o 2L-CVRP é dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n D_{ij} x_{ij}, \quad (3.2)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} \leq K_{max}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} \geq K_{min}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = \sum_{h=0}^n x_{jh}, \quad j = 0, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq S_{inv}, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}; S \neq \emptyset, \quad (3.9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n. \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.2) indica que o custo total das rotas deve ser minimizado, representando a distância percorrida pelos veículos. A restrição (3.3) impõe que a quantidade de rotas é menor ou igual ao número de veículos disponíveis, enquanto a restrição (3.4) garante que pelos menos K_{min} rotas devem ser utilizadas. As restrições (3.5) garantem que os clientes devem ser atendidos uma única vez. As restrições (3.6) indicam que o mesmo número de arestas que chegam em um vértice devem deixá-lo. As restrições (3.7) impõem que somente uma das arestas entre os clientes i e j é percorrida. As restrições (3.8) são responsáveis por assegurar a viabilidade do empacotamento nos veículos. As restrições (3.9) são responsáveis por manter a conectividade e a viabilidade das rotas, garantindo que as rotas sejam conexas e a capacidade dos veículos em peso e área não sejam violadas. Por fim, as restrições (3.10) definem o domínio das variáveis.

Para se obter o número mínimo de veículos ($r(S)$) necessários para atender os clientes da rota S é preciso resolver um problema de empacotamento em *bins* bidimensionais, que é, no entanto, um problema NP-difícil (LODI; MARTELLO; VIGO, 2002). Todavia, um limitante inferior para o valor de $r(S)$ pode ser facilmente estimado ($r'(S)$), como descrito em (3.11), o qual é dado pelo valor máximo entre a razão do peso total dos itens dos clientes em S pela capacidade em peso do veículo e a razão da área total dos itens dos clientes em S pela área total da base do veículo.

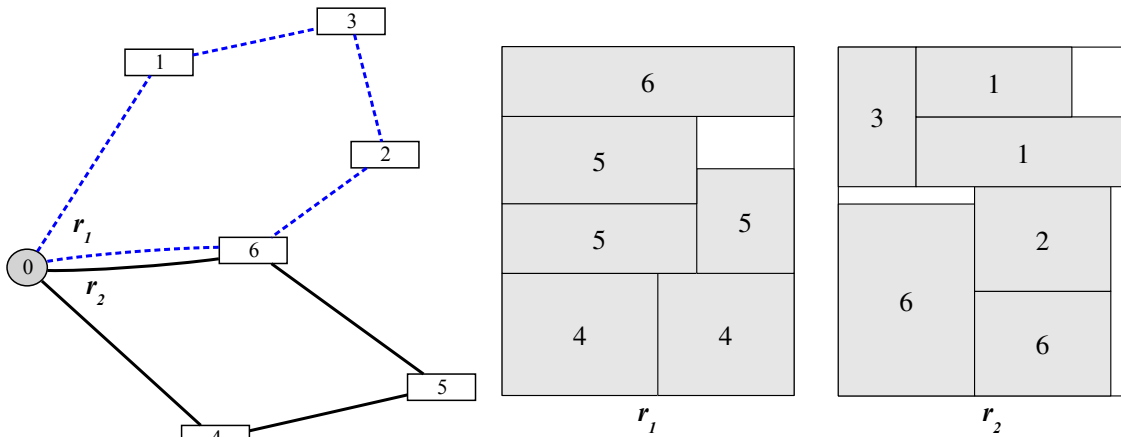
$$r'(S) = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{j \in S} P_j}{Q} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{j \in S} A_j}{A_T} \right\rceil \right\}. \quad (3.11)$$

3.2 Descrição do 2L-SDVRP

No 2L-SDVRP, os itens de um mesmo cliente podem ser empacotados em um único ou em diferentes veículos. O objetivo do 2L-SDVRP é determinar as rotas dos veículos de modo a atender todos os clientes com o menor custo possível para o transporte. Além disso, uma solução factível para o 2L-SDVRP deve respeitar as mesmas restrições do 2L-CVRP, com diferença que um cliente pode ser atendido por mais de um veículo, no entanto, um veículo só pode visitar um cliente uma única vez.

Um exemplo de uma solução do 2L-SDVRP é apresentado na Figura 23, sendo este composto pelo depósito central (caracterizado pelo número 0) e seis clientes (representado pelos números de 1 a 6). Para atender à demanda de todos os clientes e respeitar a capacidade de peso e área dos veículos foi necessário criar duas rotas, de modo que ambas as rotas atendem um cliente em comum, representado pelo número 6. A primeira rota (r_1 – linha pontilhada) consiste em $0 - 1 - 3 - 2 - 6 - 0$ e a segunda rota (r_2 – linha contínua) é dada pela sequência $0 - 6 - 5 - 4 - 0$. Ao analisar o empacotamento dos itens na base do veículo, é possível verificar que sem a possibilidade de entrega fracionada não seria possível empacotar todos os itens dos clientes somente em dois veículos.

Figura 23 – Exemplo de uma solução para o 2L-SDVRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.2.1 Modelo Matemático para o 2L-SDVRP

Para definir o 2L-SDVRP formalmente, adotam-se os mesmos conjuntos utilizados no 2L-CVRP. Assim, o modelo proposto para 2L-SDVRP tem como base o modelo (3.2) a (3.10) do 2L-CVRP. Com a adição da possibilidade de entrega fracionada, é necessário determinar quais itens de cada cliente serão carregados em cada veículo, ou seja, precisa-se distinguir quais itens estarão em cada veículo. Além disso, é necessário saber qual é o próximo ponto de parada (cliente ou depósito) para cada veículo a partir deste cliente com entrega fracionada, visto que se ele estiver presente em duas rotas, haverá dois destinos a partir dele e, assim, faz-se necessário distingui-los. Logo, para tratar essa questão, as seguintes variáveis de decisão são consideradas no modelo matemático:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o veículo } k \text{ segue diretamente do vértice } i \text{ para } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{ir}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o item } r \text{ do cliente } i \text{ é transportado pelo veículo } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo do 2L-SDVRP é uma extensão do modelo do 2L-CVRP com a inserção de algumas restrições adaptadas de Archetti e Speranza (2008). O modelo completo do 2L-SDVRP é dado por (3.12) a (3.26). Neste modelo, como nem todos os itens de um cliente são necessariamente entregues numa mesma rota devido à possibilidade de entrega fracionada, para cada cliente $i \in S$ é considerado um subconjunto de itens \mathcal{R}_i^S . \mathcal{R}_i^S contém os itens do cliente i distribuídos pelo veículo que executa a rota S , isto é, ele representa um subconjunto de itens $\mathcal{R}_i^S \subseteq R_i$ do cliente $i \in S$. Por exemplo, seja $S = \{1, 2, 3\}$ com cada cliente demandando dois itens e, assim, $R_1 = \{1, 2\}$, $R_2 = \{1, 2\}$ e $R_3 = \{1, 2\}$. Ambos os itens dos clientes 1 e 2 são

atendidos pelo veículo da rota S e, assim, $\mathcal{R}_1^S = \{1, 2\}$ e $\mathcal{R}_2^S = \{1, 2\}$. Entretanto, somente o item 2 do cliente 3 é atendido pela rota S e, assim, $\mathcal{R}_3^S = \{2\}$.

O modelo ainda considera o conjunto $A^{S_{inv}}$, que contém as arestas que ligam os clientes nas rotas S em S_{inv} cujo empacotamento é infactível. Por exemplo, seja $S \in S_{inv} = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que a ordem de serviço na rota é $1 - 2 - 3 - 4$. Logo, $A^{S_{inv}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^{K_{max}} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n D_{ij} x_{ij}^k, \quad (3.12)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k \leq 1, \quad k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K_{min}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^k \leq 1, \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^k = \sum_{h=0}^n x_{jh}^k, \quad j = 0, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.16)$$

$$x_{ij}^k + x_{ji}^k \leq 1, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.17)$$

$$\sum_{k=1}^{K_{max}} z_{ir}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n; \forall r \in R_i, \quad (3.18)$$

$$z_{ir}^k \leq \sum_{j=0}^n x_{ji}^k, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}; \forall r \in R_i, \quad (3.19)$$

$$\sum_{r \in R_i} z_{ir}^k \geq \sum_{j=0}^n x_{ij}^k, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{r \in R_i} p_{ir} z_{ir}^k \leq Q, \quad k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{r \in R_i} a_{ir} z_{ir}^k \leq AT, \quad k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.22)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{r \in \mathcal{R}_i^S} z_{ir}^k \leq \sum_{i \in S} |\mathcal{R}_i^S| - 1 + \sum_{(i,j) \in A^{S_{inv}}} (1 - x_{ij}^k), \quad \forall S \subseteq S_{inv}; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.23)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}; S \neq \emptyset; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.24)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.25)$$

$$z_{ir}^k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, K_{max}; i = 1, \dots, n; \forall r \in R_i. \quad (3.26)$$

A função objetivo (3.12) busca minimizar os custos envolvidos com o transporte que corresponde à distância percorrida por todas as rotas. As restrições (3.13) garantem que o número

de veículos utilizado deve ser menor ou igual ao número de veículos disponíveis no depósito central. Como todos os veículos são idênticos, sem perda de generalidade, as restrições (3.14) asseguram que os primeiros K_{min} veículos sejam utilizados. As restrições (3.15) impõem que um cliente seja visitado por um mesmo veículo uma única vez.

A continuidade das rotas é garantida pelas restrições (3.16), ou seja, o número de veículos que visitam um cliente é igual a quantidade de veículos que deixa este cliente. As restrições (3.17) asseguram que apenas uma das arestas i e j seja percorrida, ajudando a eliminar subciclos. As restrições (3.18) são responsáveis por garantir que todos os itens dos clientes sejam empacotados em algum veículo e indicam que os clientes podem ser atendidos por um ou mais veículos.

As restrições (3.19) garantem que cada item de um dado cliente só pode ser empacotado em um veículo que passa por aquele cliente. Adicionalmente, as restrições (3.20) impõem que um veículo só visita um cliente se existir pelo menos um de seus itens empacotado neste veículo. A capacidade do veículo em peso e área é assegurada pelas restrições (3.21) e (3.22), respectivamente.

As restrições (3.23) impõem que as rotas sejam viáveis quanto ao empacotamento, sendo que o último somatório é responsável por garantir a restrição de empacotamento sequencial, isto é, sem ele a restrição sempre proibiria a rota S com os itens $r \in \mathcal{B}_i$ independente da disposição dos clientes na rota. As restrições (3.24) eliminam os subciclos. O domínio das variáveis é definido em (3.25) e (3.26).

3.3 Descrição do G2L-CVRP

O G2L-CVRP é uma variante do 2L-CVRP que incorpora questões ambientais ao problema. Para o problema estudado é considerada a poluição do ar por meio da emissão de gases produzidos pelos veículos durante o transporte de mercadorias. Dentre os gases poluentes, foca-se no dióxido de carbono (CO_2) gerado pela combustão de produtos originados do petróleo, como a gasolina e o óleo diesel, em motores de combustão interna de caminhões, carros de passeios e outros.

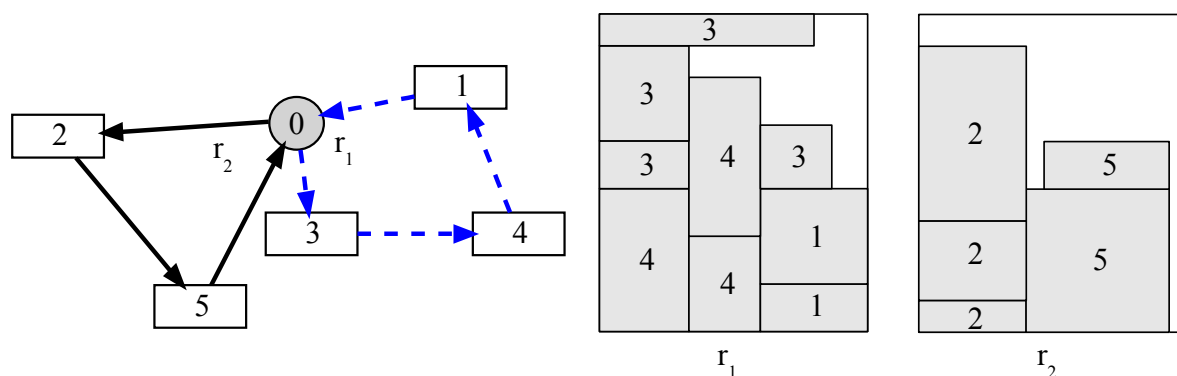
O G2L-CVRP apresenta as mesmas características do 2L-CVRP, com exceção da frota de veículos. A frota de veículos é caracterizada por possuir uma capacidade máxima em peso e área, e uma taxa de consumo de combustível por unidade de distância percorrida, bem como uma taxa de emissão de CO_2 . Ademais, o G2L-CVRP apresenta as mesmas restrições do 2L-CVRP.

A diferença entre o 2L-CVRP e o G2L-CVRP está na função objetivo, sendo que o primeiro visa exclusivamente minimizar o custo das rotas, enquanto o segundo busca definir rotas que minimize as emissões de CO_2 .

Na Figura 24, é ilustrado um exemplo de uma solução do G2L-CVRP, o qual é composto pelo depósito central (nó 0), cinco clientes (nós 1 a 5) e uma frota com dois veículos. As rotas

com a sequência em que os clientes vão ser atendidos pelos veículos, conforme ilustra a Figura 24, são $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ (rota r_1 - linha contínua) e $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ (rota r_2 - linha tracejada). As rotas estão representadas por um grafo orientado, visto que ao considerar as emissões de CO_2 , o caminho de i para j pode diferir do caminho de j para i . Essa diferença pode ocorrer devido ao percurso, dado que o caminho a ser percorrido pode ter declive em uma direção e na outra não. Além disso, a quantidade de carga no veículo influencia diretamente na quantidade de emissão de CO_2 , isto é, um veículo com cargas pesadas emite mais CO_2 que um veículo com cargas leves. Logo, ao olhar uma rota na totalidade, se os veículos, carregados com as cargas, partirem inicialmente para atender os clientes com caminhos distantes a quantidade de emissão será maior do que se eles estivessem partido para servir os clientes mais perto. Deste modo, a quantidade de emissão de CO_2 resultante pode ser distinta.

Figura 24 – Exemplo de uma solução para o G2L-CVRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como o objetivo do G2L-CVRP envolve reduzir a emissão de CO_2 , é necessário determinar a quantidade de CO_2 emitido ao percorrer as rotas. Nesse cálculo, utiliza-se a quantidade de litros de combustível consumido como base para estimar a emissão de CO_2 . Para tanto, parte-se da proposta de [Xiao et al. \(2012\)](#) para estimar a emissão de gases, que foi, também, utilizada por [Zhang et al. \(2014\)](#).

O modelo de [Xiao et al. \(2012\)](#) é baseado em uma função linear que estima o consumo de combustível, em litros por quilômetro, em função da distância e do peso bruto do veículo, considerando o peso do veículo sem carga e com carga, em cada segmento da rota. Assim, neste trabalho utiliza-se o modelo de [Xiao et al. \(2012\)](#) para calcular o consumo de combustível e, em seguida, aplica-se um fator de conversão para determinar a quantidade de CO_2 emitida com base na quantidade de litros de combustível consumida. A Tabela 16 apresenta os parâmetros utilizados para determinar a quantidade de emissão de CO_2 .

A taxa de consumo de combustível em um arco $(i, j) \in A$ de uma rota é estimada conforme definido em (3.27), sendo que A é o conjunto dos arcos entre dois nós que representa os clientes e o depósito. Os valores das taxas ρ_0 e ρ_f podem ser definidos a priori com base

nas condições do terreno, velocidade de deslocamento e características da frota de veículos. A quantidade de emissão de CO₂ em um arco $(i, j) \in A$ é dado por (3.28). Além disso, desde que o tipo de combustível seja conhecido, a taxa de emissão de CO₂ (T_{CO_2}) é fixa.

$$\rho_{ij} = \rho_0 + \frac{\rho_f - \rho_0}{Q} f_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3.27)$$

$$E_{ij} = T_{CO_2} \rho_{ij} D_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3.28)$$

Tabela 16 – Notação utilizada para tratar os aspectos ambientais do G2L-CVRP.

Notações	Significado
T_{CO_2}	Taxa de emissão de CO ₂ por litro de combustível consumido.
ρ_{ij}	Taxa de consumo de combustível no arco (i, j) .
E_{ij}	Emissão de CO ₂ no arco (i, j) .
ρ_0	Taxa de consumo de combustível com o veículo vazio.
ρ_f	Taxa de consumo de combustível com o veículo carregado.
f_{ij}	Quantidade de carga transportada no arco (i, j) .

Fonte: Adaptada de [Xiao et al. \(2012\)](#).

3.3.1 Modelagem Matemática para o G2L-CVRP

Diferentemente do 2L-CVRP e do 2L-SDVRP, o G2L-CVRP é definido por um grafo orientado, pois se assume que o custo de viajar de i para j pode ser diferente do custo de viajar de j para i . Assim, o G2L-CVRP é definido por um grafo orientado completo $G' = (N, A)$, em que $N = \{0, 1, \dots, n\}$ é o conjunto de nós que representam o depósito (nó 0) e os clientes (nós de 1 a n) e $A = \{(i, j) | i, j \in N, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos, sendo que para atravessar cada arco $(i, j) \in A$ há uma distância $\mathcal{D}_{ij} \geq 0$. Com exceção do tipo do grafo, o G2L-CVRP segue a definição do 2L-CVRP.

O modelo de programação linear inteira do G2L-CVRP é um modelo de dois índices, que apresenta as mesmas restrições do 2L-CVRP, com inclusão de uma nova variável de decisão para tratar a emissão de CO₂. Logo, o modelo considera as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se um veículo segue diretamente do nó } i \text{ para } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_{ij} \geq 0$, é o peso da carga transportada no veículo ao deixar o nó i .

Com base nas variáveis de decisão, o modelo do G2L-CVRP consiste na função objetivo (3.29) e nas restrições (3.3) a (3.8) e (3.30) a (3.34). A diferença do modelo do G2L-CVRP

para o 2L-CVRP é a função objetivo e as restrições (3.30) a (3.32), que são adicionadas para determinar a quantidade de carga transportada em cada arco e, assim, calcular a emissão de CO₂ na função objetivo.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n T_{CO_2} \left(\rho_0 x_{ij} + \frac{\rho_f - \rho_0}{Q} f_{ij} \right) D_{ij}, \quad (3.29)$$

sujeito a:

(3.3) a (3.8),

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n f_{ij} - \sum_{\substack{h=0 \\ h \neq j}}^n f_{jh} = P_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.30)$$

$$f_{ij} \leq (Q - P_i) x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n, \quad (3.31)$$

$$f_{ij} \geq P_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n, \quad (3.32)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

A função objetivo (3.29) visa definir um conjunto de rotas que minimize a emissão de CO₂. As restrições (3.30) garantem o balanceamento do fluxo de carga de modo que a demanda dos clientes de uma determinada rota seja completamente satisfeita. As restrições (3.31) e (3.32) restringem a carga total em peso que um veículo transporta, impondo um limite superior e inferior carregado em cada arco. Por fim, as restrições (3.33) e (3.34) indicam o domínio das variáveis de decisão.

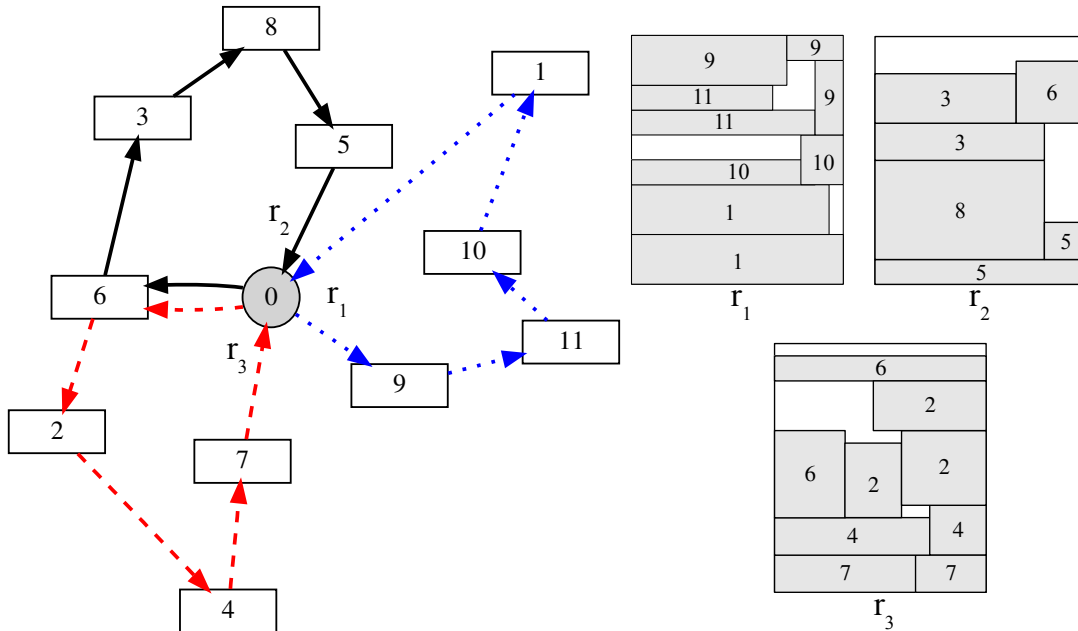
3.4 Descrição do G2L-SDVRP

O G2L-SDVRP é uma variante do 2L-CVRP que incorpora duas questões práticas relevantes. A primeira amplia o número de rotas viáveis existentes, permitindo que a entrega da demanda total de um cliente possa ser realizada de uma única vez ou dividida em várias entregas. A segunda visa reduzir a emissão de gases poluentes durante o processo de entrega, ou seja, são considerados aspectos verdes no contexto da emissão de CO₂. Deste modo, o G2L-SDVRP é uma combinação do 2L-SDVRP e do G2L-CVRP.

O G2L-SDVRP visa determinar rotas de veículos de forma que a emissão de CO₂ seja mínima. Ademais, o G2L-SDVRP apresenta as mesmas restrições do 2L-SDVRP. Um exemplo de solução do G2L-SDVRP é apresentado na Figura 25, em que se tem o depósito central (representado pelo número 0) e 11 clientes (que correspondem aos números de 1 a 11). Ao analisar a solução, é possível perceber que foi preciso criar três rotas para atender os clientes,

sendo que para respeitar todas as restrições, o cliente 6 necessitou ser atendido por duas rotas, $r_2(0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 0)$ e $r_3(0 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 0)$, indicando a entrega fracionada. A rota r_1 , por sua vez, segue a seguinte sequência de visita aos clientes $0 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Figura 25 – Exemplo de uma solução para o G2L-SDVRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.4.1 Modelagem Matemática para o G2L-SDVRP

Para definir o G2L-SDVRP formalmente, adotam-se os mesmos parâmetros, conjuntos e variáveis do G2L-CVRP. O modelo de programação linear inteira mista para o G2L-SDVRP segue os modelos do 2L-SDVRP e do G2L-CVRP e tem três variáveis de decisão.

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o veículo } k \text{ segue diretamente do nó } i \text{ para } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{ir}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o item } r \text{ do cliente } i \text{ é transportado pelo veículo } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_{ij}^k \geq 0$, é o peso da carga transportada pelo veículo k ao deixar o nó i .

O modelo completo do G2L-SDVRP é dado pela função objetivo (3.35). O modelo contém todas as restrições (3.13) a (3.23) do 2L-SDVRP com a adição das restrições (3.36) e (3.37) que são uma adaptação das restrições do G2L-CVRP.

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^{K_{max}} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n TCO_2 \left(\rho_0 x_{ij}^k + \frac{\rho_f - \rho_0}{Q} f_{ij}^k \right) D_{ij}, \quad (3.35)$$

sujeito a:

(3.13) a (3.23),

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n f_{ij}^k - \sum_{\substack{h=0 \\ h \neq j}}^n f_{jh}^k = \sum_{r \in R_j} d_{jr} z_{jr}^k, \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.36)$$

$$f_{ij}^k \leq Q x_{ij}^k, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.37)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}, \quad (3.38)$$

$$z_{ir}^k \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}; \forall r \in R_i, \quad (3.39)$$

$$f_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K_{max}. \quad (3.40)$$

A função objetivo (3.35) indica a minimização do custo total em respeito à emissão de CO₂ pelas rotas efetuadas pelos veículos. As restrições (3.36) representam o balanço de fluxo de carga em cada cliente, garantindo a entrega dos itens aos respectivos clientes e, além disso, asseguram que não ocorra subciclos. As restrições (3.37) são responsáveis por assegurar que a capacidade de carga dos veículos seja respeitada ao visitar cada cliente. As restrições (3.38), (3.39) e (3.40) indicam o domínio das variáveis de decisão.

3.5 Desigualdades Válidas para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP

Neste trabalho, algumas classes de desigualdades válidas são usadas para fortalecer a formulação do 2L-SDVRP e do G2L-SDVRP. As desigualdades apresentadas na Subseção 3.5.1 são responsáveis por eliminar a simetria em respeito à frota homogênea de veículos. As restrições introduzidas na Subseção 3.5.2 são desigualdades válidas para o SDVRP, que podem ser aplicadas ao 2L-SDVRP e ao G2L-SDVRP.

3.5.1 Restrição de Quebra de Simetria para Frota de Veículos Homogênea

O modelo proposto para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP é de três índices, sendo que um dos índices representa os veículos, que são homogêneos e, assim, a formulação pode ter simetria. Em busca de fortalecer a formulação, propõem-se as restrições (3.41), que são uma adaptação de Fischetti, González e Toth (1995) e Albareda-Sambola, Fernández e Laporte (2011) para resolver o problema de roteamento de veículos capacitados e o problema de localização de planta, respectivamente.

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ji}^k \leq \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} \sum_{\substack{h \in V \setminus \{0\} \\ h \neq j \\ h \leq i}} x_{jh}^{k-1}, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \setminus \{1\}. \quad (3.41)$$

As restrições (3.41) impõem que um cliente i só pode ser atendido pelo veículo $k \in K \setminus \{1\}$, se o veículo $k-1 \in K$ visitar um cliente j com índice menor ou igual a i . Note que i e h podem ser iguais, ou seja, representar o mesmo cliente devido à possibilidade de entrega fracionada. Por exemplo, o cliente 2 só pode ser atribuído ao veículo $k=2$, se o veículo $k-1$, que corresponde ao veículo 1, visitar o cliente 1 e/ou o cliente 2 parcialmente. Logo, o cliente 1 sempre vai ser visitado pelo veículo 1, seja parcialmente ou por completo e, assim, a desigualdade em (3.42) é válida e garante que o cliente 1 sempre vai ser atendido pelo primeiro veículo do conjunto K , com índice $k=1$.

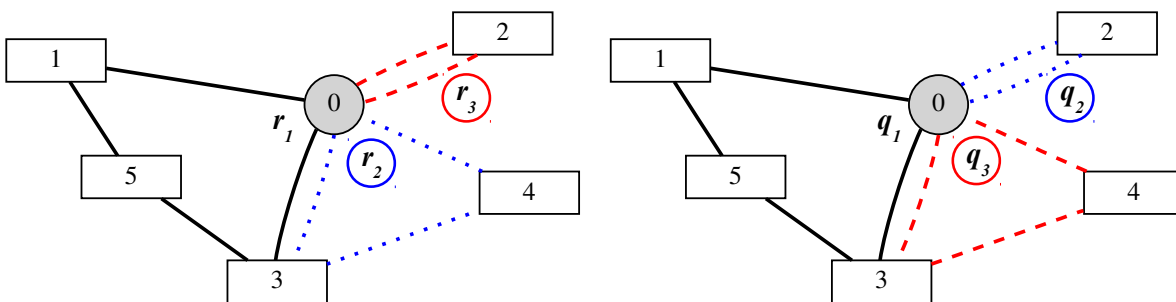
$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq 1}} x_{j1}^1 = 1. \quad (3.42)$$

Na Figura 26, é apresentado um exemplo de solução, com distribuição dos clientes aos veículos, infactível (26a) e factível (26b), conforme (3.41). Na figura, é abordado um exemplo com cinco clientes e três veículos, de modo que o veículo 1 atende a rota r_1/q_1 (linha contínua), o veículo 2 executa a rota r_2/q_2 (linha pontilhada) e, por fim, o veículo 3 serve a rota r_3/q_3 (linha tracejada). As rotas em 26a são dadas por: $0-1-5-3-0$ (r_1), $0-3-4-0$ (r_2), e $0-2-0$ (r_3). Enquanto as rotas em 26b corresponde a: $0-1-5-3-0$ (q_1), $0-2-0$ (q_2), e $0-3-4-0$ (q_3).

Figura 26 – Exemplo de solução inválida e válida para desigualdade (3.41).

(a) Solução inválida.

(b) Solução válida.



Fonte: Elaborada pela autora.

Nas Tabelas 17 e 18, as rotas r_2 e r_3 , e q_2 e q_3 são consideradas na restrição (3.41), respectivamente. Nas tabelas, a primeira coluna fornece a rota da figura, a segunda e terceira coluna representam o veículo k e o cliente i . A quarta coluna traz a desigualdade associada ao valor de k e i . A quinta e sexta coluna apresentam as variáveis com valor igual a 1 para o primeiro e o segundo somatório, respectivamente. Por fim, é apresentada a desigualdade com os valores das variáveis substituídos. Na Tabela 17, é perceptível que para $k=3$ e $i=2$ ocorre violação da desigualdade. Por outro lado, as rotas em 26b respeitam a desigualdade, conforme pode ser observado na Tabela 18.

Tabela 17 – Desigualdades (3.41) conforme o exemplo na Figura 26a.

Rota	k	i	Restrição	Primeiro somatório (variáveis igual a 1)	Segundo somatório (variáveis igual a 1)	Valor
r_2	2	3	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^5 x_{j3}^2 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^3 x_{jh}^1$	x_{03}^2	x_{51}^1, x_{13}^1	$1 \leq 2$
r_2	2	4	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^5 x_{j4}^2 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^4 x_{jh}^1$	x_{34}^2	x_{51}^1, x_{13}^1	$1 \leq 2$
r_3	3	2	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^5 x_{j2}^3 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^2 x_{jh}^2$	x_{02}^3	-	$1 \leq 0$

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 18 – Desigualdades (3.41) conforme o exemplo na Figura 26b.

Rota	k	i	Restrição	Primeiro somatório (variáveis igual a 1)	Segundo somatório (variáveis igual a 1)	Valor
q_2	2	2	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^5 x_{j2}^2 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^2 x_{jh}^1$	x_{02}^2	x_{51}^1	$1 \leq 1$
q_3	3	3	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^5 x_{j3}^3 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^3 x_{jh}^2$	x_{03}^3	x_{02}^2	$1 \leq 1$
q_3	3	4	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^5 x_{j4}^3 \leq \sum_{j=0}^5 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^4 x_{jh}^2$	x_{34}^3	x_{02}^2	$1 \leq 1$

Fonte: Elaborada pela autora.

3.5.2 Restrição de Eliminação de Ciclos Fracionários

Dror, Laporte e Trudeau (1994) apresentaram uma classe de desigualdades válidas para o SDVRP, denominada restrições de eliminação de ciclo fracionário. As desigualdades (3.43) pertencem a essas restrições e auxiliam na obtenção de uma solução de melhor qualidade para a relaxação do problema.

$$x_{ij}^k \leq \sum_{\substack{h \in V \\ h \neq i}} x_{jh}^k, \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K. \quad (3.43)$$

Dror, Laporte e Trudeau (1994) introduziram uma prova de que a restrição (3.43) é válida para o SDVRP, a qual é apresentada a seguir.

Prova 1. Para qualquer $i, j \in V \setminus \{0\}$ e qualquer veículo $k \in K$, a restrição:

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{h \in V} x_{jh}^k, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K,$$

implicam em (3.44). Logo, sempre que $x_{ij}^k = 1$, resulta em $x_{ji}^k = 0$.

$$x_{ij}^k \leq \sum_{h \in V} x_{hj}^k = \sum_{h \in V} x_{jh}^k = x_{ji}^k + \sum_{\substack{h \in V \\ h \neq i}} x_{jh}^k. \quad (3.44)$$

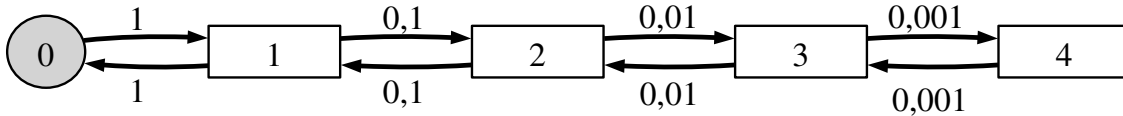
Na Figura 27, é ilustrado um exemplo de solução com entrega fracionada (do problema relaxado), o qual é composto pelo depósito (vértice 0) e quatro clientes (vértices de 1 a 4). Os vértices estão ligados por oito arestas (em que dois vértices são ligados por duas arestas, uma aresta no sentido de ida e outra no de volta) de modo que o veículo k executa a rota. Os valores apresentados nas arestas correspondem aos valores das variáveis x_{ij}^k . Para representar um ciclo fracionário proibido pela desigualdade (3.43), considere que $i = 3$ e $j = 4$ (isto é, o vértice $x_{ij}^k = x_{34}^k$), então a restrição (3.43) é reescrita por:

$$x_{34}^k \leq x_{40}^k + x_{41}^k + x_{42}^k, \quad (3.45)$$

em que $x_{40}^k = x_{41}^k = x_{42}^k = 0$ e $x_{34}^k = 0,001$. Substituindo os valores obtém-se a desigualdade em (3.46), que indica violação da restrição.

$$x_{34}^k = 0,001 \leq 0. \quad (3.46)$$

Figura 27 – Ciclos fracionários eliminados pelas desigualdades (3.43).



Fonte: Adaptada de Dror, Laporte e Trudeau (1994).

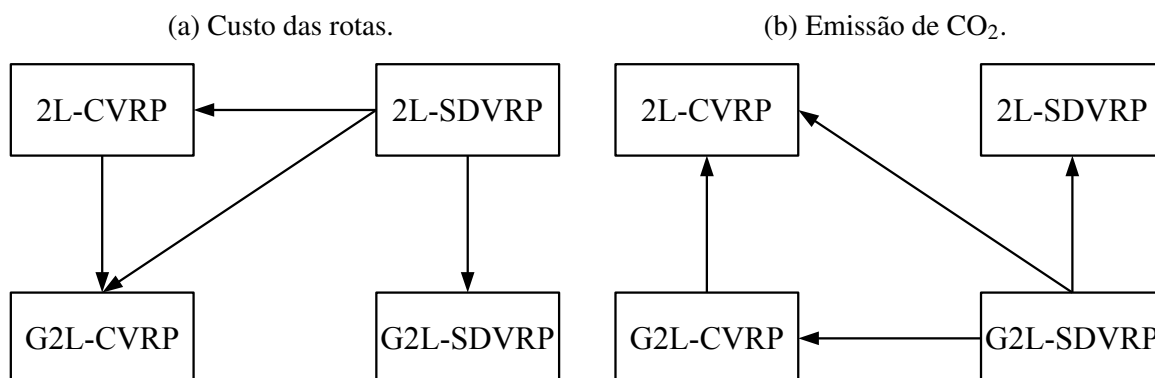
3.6 Relações entre os Problemas

O 2L-CVRP e o 2L-SDVRP possuem algumas relações, assim como o G2L-CVRP e o G2L-SDVRP. O 2L-SDVRP é uma relaxação do 2L-CVRP, bem como o G2L-CVRP é uma relaxação do G2L-SDVRP. Neste contexto, o 2L-SDVRP contém todas as soluções do 2L-CVRP mais aquelas que respeitam a restrição de entrega fracionada. Isso significa que o número de maneiras de satisfazer as demandas dos clientes (isto é, o número de possibilidades de rotas) cresce exponencialmente quando essas restrições são consideradas em comparação com o 2L-CVRP. De maneira análoga, o G2L-SDVRP é uma generalização do G2L-CVRP e, assim, além das combinações de rotas do G2L-CVRP, existem também os casos com entrega fracionada. Em relação ao espaço de soluções, o 2L-CVRP e o G2L-CVRP possuem o mesmo espaço de soluções assim como o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP.

Esses problemas também possuem algumas relações no contexto de soluções ótimas. Na Figura 28, são ilustradas essas relações em termos do custo das rotas (28a) e da emissão de CO₂ (28b). Uma seta apontando de um problema para outro indica que a solução ótima do primeiro é melhor ou igual ao segundo. A seguir, estas relações são resumidas no contexto da otimalidade das soluções:

- o custo das rotas do 2L-CVRP sempre será melhor ou igual ao G2L-CVRP;
- o custo das rotas dos 2L-SDVRP nunca será pior que do 2L-CVRP, do G2L-CVRP e do G2L-SDVRP;
- a solução do G2L-CVRP sempre será melhor ou igual ao do 2L-CVRP no contexto da redução da emissão de CO₂;
- o G2L-SDVRP nunca emitirá mais gases que o G2L-CVRP, o 2L-SDVRP e o 2L-CVRP.

Figura 28 – Relações entre os problemas no contexto da otimalidade das soluções.



Fonte: Adaptada de Ferreira, Queiroz e Toledo (2021).

RESOLUÇÃO EXATA DO G2L-SDVRP E SEUS SUB-PROBLEMAS

Neste capítulo, é apresentado o método exato do tipo *branch-and-cut* desenvolvido para o G2L-SDVRP, G2L-CVRP, 2L-SDVRP e 2L-CVRP. Ademais, é realizada uma discussão de procedimentos de separação para detectar desigualdades violadas e inseri-las quando necessário, visto que os modelos contêm restrições em número exponencial em relação à verificação de rotas inviáveis quanto ao empacotamento e/ou conectividade. Na descrição do procedimento de separação para o empacotamento, as estratégias utilizadas para checar a viabilidade do empacotamento de itens que surge em cada rota são apresentadas e consistem em heurísticas, limitantes inferiores e uma formulação de programação por restrições. Uma estrutura *hash* também é utilizada para reduzir o esforço computacional gasto na checagem da viabilidade do empacotamento.

Para avaliar o método proposto, experimentos computacionais foram realizados utilizando instâncias da literatura. Uma análise comparativa entre as soluções dos problemas é realizada, apontando os benefícios obtidos em relação ao custo total e à emissão de CO₂ quando a entrega fracionada é permitida. Além disso, uma representação gráfica da solução dos resultados de algumas instâncias é apresentada com o intuito de evidenciar a diferença entre os problemas. Por fim, as considerações finais são descritas.

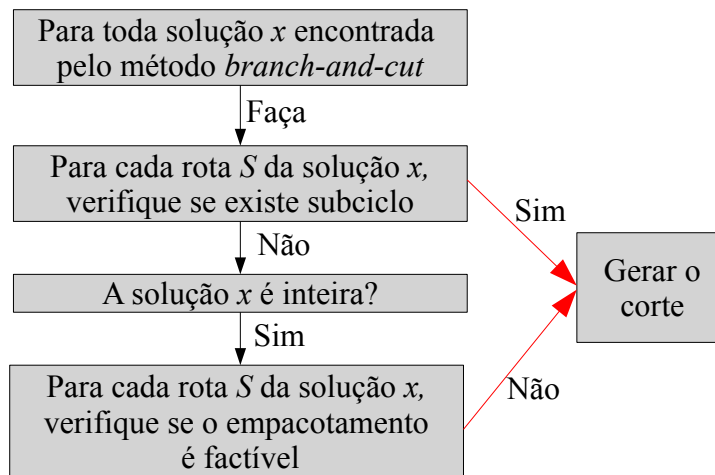
Mais precisamente, a Seção 4.1 aborda o método *branch-and-cut*. As Seções 4.2 e 4.3 fornecem mais detalhes de como é realizada a detecção de desigualdades que violam o problema e como os cortes são adicionados. A Seção 4.2 aborda as restrições de capacidade e conectividade. Na Seção 4.3, é descrita a estratégia utilizada para verificar a viabilidade do empacotamento. A Seção 4.4 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do método proposto, enquanto a Seção 4.5 traz as conclusões.

4.1 Método *Branch-and-Cut*

O método *branch-and-cut* consiste na combinação dos métodos de plano de corte e *branch-and-bound*. Nos modelos para o 2L-CVRP, G2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-SDVRP, o número de restrições responsáveis por evitar subciclos e/ou assegurar a viabilidade do empacotamento nos veículos é de ordem exponencial. Logo, uma estratégia de resolução do problema é inserir tais restrições ao longo do processo de otimização através de planos de corte identificados por procedimentos de separação.

Procedimentos de separação são rotinas usadas para detectar desigualdades violadas a partir da análise da solução (parcial) encontrada e, assim, adicionar essas restrições iterativamente com um plano de corte. Para tanto, essas restrições não são consideradas inicialmente no modelo e em cada nó da árvore de enumeração (*branch-and-cut*) um subproblema é resolvido e a solução é submetida ao procedimento de separação. Em síntese, o procedimento de separação utilizado, neste trabalho, analisa inicialmente as restrições de subciclo e é aplicado sempre que uma solução fracionária ou inteira é obtida. Assim, caso as rotas não contenham subciclos e a solução seja inteira, aplica-se o procedimento para detectar rotas com empacotamento inviável. Uma ilustração desse procedimento é apresentada na Figura 29.

Figura 29 – Procedimento de separação.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para facilitar a compreensão do procedimento de separação utilizado no método *branch-and-cut*, as restrições (3.8) e (3.9) do modelo do 2L-CVRP são consideradas como base, sendo que esta estratégia é aplicada de forma análoga ao 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP. Apenas se modifica o tipo do corte, isto é, a restrição utilizada para a inserção do corte.

O Algoritmo 1 apresenta uma descrição detalhada do método *branch-and-cut* desenvolvido neste trabalho. O algoritmo possui dois parâmetros de entrada, quais sejam: P , que corresponde à formulação do problema a ser resolvido, e T_{max} , que é o tempo limite de execução

do algoritmo. Além disso, os seguintes parâmetros são utilizados: \mathcal{P} é uma lista com os problemas ainda não resolvidos; P^i é um problema da lista \mathcal{P} ; x_i é uma solução do problema relaxado P^i ; \underline{z}^i é o valor da solução x_i ; \bar{z} é o melhor valor viável encontrado para o problema P ; x^* é a solução incumbente.

Algoritmo 1 – Algoritmo *branch-and-cut* proposto.

Entrada: P , problema com a formulação (3.2) - (3.10); T_{max} , tempo limite.
Saída: Solução do problema P ;

- 1: $P^0 \leftarrow P$ sem as restrições (3.8) e (3.9);
- 2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P^0\}$;
- 3: $\bar{z} \leftarrow \infty$;
- 4: **enquanto** $\mathcal{P} \neq \emptyset$ **E** $tm \leq T_{max}$ **faça**
- 5: Selecionar um problema P_i de \mathcal{P} e o remover de \mathcal{P} ;
- 6: Resolver a relaxação linear de P^i . Se uma solução ótima for encontrada, faça \underline{z}^i igual ao valor da solução e x^i igual à solução;
- 7: **se** P^i é factível **então**
- 8: **se** x^i viola as restrições de subciclos (3.8) **então**
- 9: Adicionar a desigualdade em (3.8) relacionada à solução x^i ;
- 10: **senão**
- 11: **se** x^i é inteira **então**
- 12: **para cada** rota $S \in x^i$ **faça**
- 13: $st \leftarrow$ Aplicar o **Procedimento de Empacotamento** em S ;
- 14: **se** st é infactível **então**
- 15: Adicionar a desigualdade em (3.9) relacionada à solução x^i ;
- 16: **se** $\underline{z}^i < \bar{z}$ **E** x^i respeita as restrições (3.9) **então**
- 17: $\bar{z} \leftarrow \underline{z}^i$;
- 18: $x^* \leftarrow x^i$;
- 19: Eliminar todos os problemas de \mathcal{P} com valor de solução maior ou igual a \bar{z} ;
- 20: **senão** Ramificar P^i em dois problemas e os adicionar em \mathcal{P} ;
- 21: **se** $\bar{z} = \infty$ **então** Problema infactível;
- 22: **retorna** x^* e \bar{z} ;

No Algoritmo 1, inicialmente, o problema P^0 é criado e contém todas as restrições de P com exceção das restrições de subciclo (3.8) e de empacotamento (3.9). Na linha 2, a lista \mathcal{P} com os problemas não resolvidos é inicializada com P^0 . Em seguida, na linha 3, a melhor solução do problema \bar{z} é inicializada. As linhas 4 a 19 representam o laço principal do método *branch-and-cut* que é repetido até que a árvore seja explorada ou o tempo limite de execução seja atingido.

A cada nó da árvore de enumeração (linhas 4 a 19), a relaxação do problema P^i é resolvida (linha 6) e, em seguida, os procedimentos de separação são aplicados se uma solução fracionária ou inteira é obtida (isto é, quando a solução da relaxação linear do problema é factível como apresentado na linha 7). O procedimento de separação analisa inicialmente as restrições

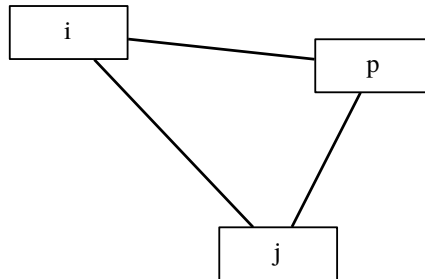
referentes ao roteamento, que correspondem às restrições de capacidade e conectividade dadas por (3.8). Se alguma violação é encontrada, um corte do tipo (3.8) é adicionado e uma nova busca é realizada em outro nó da árvore (linha 5). Caso contrário, o próximo passo é realizar o procedimento para detectar rotas com empacotamento inviável, ou seja, verificar as restrições (3.9).

A checagem da viabilidade do empacotamento é somente aplicada quando uma solução inteira é obtida (linha 11) e se nenhuma violação for encontrada no procedimento de checagem das restrições de capacidade e conectividade das rotas (linhas 8 e 9). Se alguma violação é encontrada durante a checagem da viabilidade do empacotamento (linha 12), uma desigualdade em (3.9) é adicionada (linha 14). Caso contrário, se \underline{z}^i é melhor que \bar{z} , então \bar{z} e x^* são atualizados e todos os problemas em \mathcal{P} que tiveram seu limitante inferior \underline{z}^i maior que a solução incumbente (ou limitante dual) \bar{z} são removidos da lista. A ramificação é realizada sempre que a solução relaxada x^i não é inteira. No final do laço principal (linha 20), se nenhuma solução incumbente for encontrada, o problema P é considerado inactível. Ao final do algoritmo, a solução incumbente x^* e seu respectivo valor \bar{z} são retornados na linha 21.

4.2 Procedimentos de Separação para o Roteamento

O procedimento de separação das restrições de eliminação de subciclo em (3.9) busca identificar se existe algum conjunto de clientes S na solução que não satisfaça a desigualdade. Caso seja detectado que a desigualdade é violada, uma nova restrição é adicionada. Considere como exemplo a rota $S = \{i, j, p\}$ com a seguinte sequência $i - j - p - i$ (conforme a Figura 30). Observa-se que a rota corresponde a um subciclo, logo se detecta que a desigualdade é violada e um corte deve ser inserido, conforme se nota em (4.1). Note que, se a capacidade do veículo em peso e área é respeitada na rota S , a restrição (4.1) se resume a (4.2).

Figura 30 – Ilustração de um subciclo.



Fonte: Elaborada pela autora.

$$x_{ij} + x_{ip} + x_{ji} + x_{jp} + x_{pi} + x_{pj} \leq 3 - \max \left\{ \left\{ \frac{P_i + P_j + P_p}{Q} \right\}, \left\{ \frac{A_i + A_j + A_p}{A_T} \right\} \right\}. \quad (4.1)$$

$$x_{ij} + x_{ip} + x_{ji} + x_{jp} + x_{pi} + x_{pj} \leq 3 - 1. \quad (4.2)$$

A restrição (3.9) também é responsável por assegurar que a demanda total dos clientes na rota S , em peso e área, respeite a capacidade do veículo. Portanto, se a rota S não apresentar um subciclo, mas o peso e/ou área total dos itens dos clientes em S for superior à capacidade do veículo em peso e/ou área, respectivamente, então um corte é adicionado. Em resumo, para cada rota S que violar o peso ou a área do veículo ou ocorrer subciclo, insere-se apenas um corte do tipo (3.9) que vai atender a maior das violações.

De modo análogo ao 2L-CVRP, no 2L-SDVRP o procedimento de separação busca identificar rotas que violem as restrições (3.24), que são responsáveis somente por eliminar subciclos. Assim, caso algum conjunto de clientes S não atenda esta desigualdade, um corte é inserido. Para exemplificar o corte, considera-se o exemplo utilizado acima com $S = \{i, j, p\}$ e o seguinte subciclo $i - j - p - i$. O corte em (4.3) é adicionado, em que k representa o veículo.

$$x_{ij}^k + x_{ip}^k + x_{ji}^k + x_{jp}^k + x_{pi}^k + x_{pj}^k \leq 2, \quad \forall k \in K. \quad (4.3)$$

4.3 Procedimentos de Separação para o Empacotamento

Neste trabalho, a viabilidade do empacotamento dos itens na rota S é checada por diferentes procedimentos, como apresentado no Algoritmo 2. Por simplicidade, a seguinte notação é utilizada: M é o conjunto de itens dos clientes na rota S , ou seja, $M = \bigcup_{i \in S} \mathcal{R}_i$; e, σ_i é a ordem que o item $i \in M$ é visitado na rota S . Vale ressaltar que os itens de um mesmo cliente possuem a mesma ordem de entrega.

Verificar a viabilidade do empacotamento de apenas uma rota do 2L-CVRP corresponde a resolver o Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional com Restrições de Ordem de Entrega (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem with Unloading Constraint - 2OPPUL*). O 2OPPUL busca encontrar um empacotamento viável dos itens no recipiente (que no caso se refere à base do veículo), respeitando as seguintes restrições: (i) os itens não podem se sobrepor; (ii) os itens devem estar inteiramente contidos no recipiente; (iii) os lados dos itens devem estar ortogonais às bordas do recipiente; por fim, (iv) os itens de um cliente não podem ter o seu caminho de retirada bloqueado por itens de outros clientes durante a operação de descarregamento (isto é, a restrição de ordem de entrega deve ser respeitada).

Diferentes abordagens foram utilizadas para identificar se o empacotamento de uma rota S é viável ou inviável. Em linhas gerais, neste trabalho, foram utilizados cinco estratégias baseadas em limitantes inferiores, heurística e método exato que são aplicadas sequencialmente até que o empacotamento da rota seja detectado como viável ou inviável, conforme apresentado na Figura 31. Além disso, em alguns dos procedimentos uma malha de pontos é utilizada buscando reduzir o esforço computacional (conforme a Seção 4.3.2). Uma estrutura *hash* para guardar e pesquisar rotas já examinadas é utilizada para diminuir o esforço computacional gasto na checagem da factibilidade das rotas. Mais informações sobre a estrutura *hash* são dadas na Seção 4.3.1.

Algoritmo 2 – Procedimento para checagem do empacotamento no método exato.

Entrada: S , conjunto de clientes de uma rota, M , conjunto com os itens dos clientes na rota S com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; σ , ordem de entrega dos itens $i \in M$ na rota S ; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Se existe um empacotamento viável ou inviável para a rota S .

```

1:  $st \leftarrow True$ ;
2: se  $S$  não está em  $HashTable(S)$  então
3:   para  $k \leftarrow 1$  até 5 faça
4:     se  $k = 1$  então
5:        $st \leftarrow$  Aplicar a Heurística Construtiva  $H_{Leung}$ ;
6:     senão se  $k = 2$  então
7:        $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante Inferior  $LB_1$ ;
8:     senão se  $k = 3$  então
9:       Calcular a malha de pontos canonical dissections;
10:       $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante Inferior  $LB_2$ ;
11:     senão se  $k = 4$  então
12:        $st \leftarrow$  Aplicar o Modelo do 2OPP Relaxado;
13:     senão
14:        $st \leftarrow$  Aplicar o Modelo de Programação por Restrições;
15:     se  $(st = True \ E \ k = 1)$  OU  $(st = False \ E \ k > 1)$  então Sair do laço;
16: senão se  $HashTable(S)$  é factível então  $st \leftarrow True$ ;
17: senão se  $HashTable(S)$  é infactível então  $st \leftarrow False$ ;
18: retorna  $st$ ;

```

Em relação ao G2L-SDVRP, a restrição que lida com a viabilidade do empacotamento é dada por (3.23). O conjunto \mathcal{R}_j^S , que representa um subconjunto de itens $\mathcal{R}_j^S \subseteq R_j$ do cliente j que vão ser entregues pela rota S , é determinado a partir da variável de decisão z_{jr}^k , sendo que se o item r do cliente k é entregue pelo veículo k ($z_{jr}^k = 1$), então este item está em \mathcal{R}_j^S . Logo, quando o empacotamento dos itens na rota é infactível, um corte é adicionado ao modelo. Para tanto, considere o exemplo anterior com a rota $S = \{s, u, w\}$ com a sequência $0 - s - u - w - 0$, e $\mathcal{R}_s^S = \{1, 2\}$, $\mathcal{R}_u^S = \{1\}$ e $\mathcal{R}_w^S = \{1, 2, 3\}$, a qual é realizada pelo veículo k . O corte desta rota consiste em (4.5).

$$z_{s1}^k + z_{s2}^k + z_{u1}^k + z_{w1}^k + z_{w2}^k + z_{w3}^k \leq 5 + (1 - x_{su}^k) + (1 - x_{uw}^k), \quad \forall k \in K. \quad (4.5)$$

4.3.1 Estrutura Hash para Armazenar a Viabilidade do Empacotamento das Rotas

Apesar de a viabilidade do empacotamento ser somente verificada quando uma solução é inteira e as restrições de capacidade e conectividade são respeitadas, o número de vezes que o procedimento é chamado ainda é grande. Em busca de diminuir o esforço computacional gasto na checagem da factibilidade das rotas quanto ao empacotamento, considera-se uma estrutura de dados, denominada *hash*, para guardar e pesquisar rotas já examinadas.

A estrutura *hash* associa uma chave de busca a cada rota S de modo que o processo de pesquisa por uma chave é muito rápido e, assim, é possível detectar se uma rota já foi avaliada em tempo constante. Para o 2L-CVRP e G2L-CVRP, a chave de cada rota consiste nos clientes da própria rota. Por outro lado, para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP, a chave de cada rota é dada pelos clientes e itens devido à possibilidade de entrega fracionada. Em complemento, na chave da rota, cada cliente é separado por “|” e os itens por “-”. Por exemplo, seja uma rota $S = \{2, 4, 1\}$ com cada cliente demandando dois itens e, assim, $R_2 = \{1, 2\}$, $R_4 = \{1, 2\}$ e $R_1 = \{1, 2\}$. Contudo, para o G2L-SDVRP e 2L-SDVRP, apenas o item 2 do cliente 4 é atendido na rota S , isto é, $\mathcal{R}_4 = \{2\}$. Logo, a chave do 2L-CVRP e G2L-CVRP consiste em uma *string* dada por “2|4|1” e do 2L-SDVRP e G2L-SDVRP por “2-1-2|4-2|1-1-2”.

Dado que os procedimentos utilizados na checagem do empacotamento visam diferentes objetivos (isto é, alguns buscam provar a factibilidade e outros a infactibilidade do empacotamento), cada chave de *string* está associada a um valor para determinar a viabilidade do empacotamento. O valor -1 representam as rotas com empacotamento infactível, enquanto o valor 1 corresponde às rotas com empacotamento factível.

4.3.2 Malha de Pontos

Os pontos onde os itens podem ser empacotados na base retangular do veículo são determinados por meio da discretização da base em uma malha de pontos, ao longo da largura L e do comprimento C .

Uma das malhas mais comuns na literatura é a malha unitária que considera todas as coordenadas inteiras possíveis limitadas pelas dimensões da base do veículo. A malha unitária é definida pelos conjuntos em (4.6) e (4.7), em que U^L corresponde às coordenadas ao longo da largura e U^C às coordenadas para o comprimento. Ressalta-se que a malha unitária não considera as coordenadas após $L - \min_{i \in M} \{l_i\}$ na largura e $C - \min_{i \in M} \{c_i\}$ no comprimento, visto que após essas coordenadas não é possível empacotar qualquer item sem que ultrapasse a dimensão da base do veículo.

$$U^L = \left\{ p \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq p \leq L - \min_{i \in M} \{l_i\} \right\}. \quad (4.6)$$

$$U^C = \left\{ q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq C - \min_{i \in M} \{c_i\} \right\}. \quad (4.7)$$

A malha unitária gera um número considerável de pontos, sendo que quanto maior o tamanho da base mais pontos haverá na malha e, conseqüentemente, o tempo computacional gasto para obter uma solução factível aumenta. Assim, a literatura buscou desenvolver novas estratégias para reduzir o número de pontos na malha, como a malha de Herz (1972). A ideia desta malha, chamada *canonical dissections*, é realocar os itens mais à esquerda e mais abaixo possível dentro da base retangular. Esta malha é obtida a partir das combinações cônicas envolvendo as dimensões dos itens e a base do veículo, sendo os conjuntos de pontos para cada item i ao longo

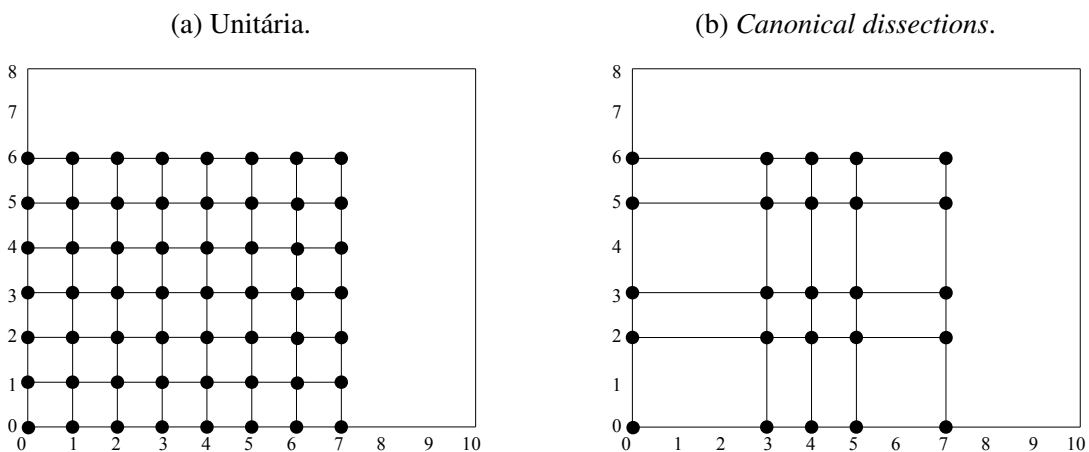
da largura e comprimento expressos, respectivamente, em (4.8) e (4.9). O conjunto completo com todos os pontos é dado por $P^L = \bigcup_{i \in M} P_i^L$ na largura e $P^C = \bigcup_{i \in M} P_i^C$ no comprimento. Vale ressaltar que o uso dessas combinações permite reduzir a quantidade de pontos na malha sem haver perda de generalidade, ou seja, a redução no número de pontos possíveis para empacotar os itens não interfere na obtenção da solução ótima. Como apresentado por Herz (1972), para qualquer solução factível do problema existe uma solução correspondente na malha *canonical dissections*.

$$P_i^L = \left\{ p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{k \in M \setminus \{i\}} \varepsilon_k l_k, 0 \leq p \leq L - l_k, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in M \setminus \{i\} \right\}. \quad (4.8)$$

$$P_i^C = \left\{ q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{k \in M \setminus \{i\}} \varepsilon_k c_k, 0 \leq q \leq C - c_k, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in M \setminus \{i\} \right\}. \quad (4.9)$$

Considere um exemplo numérico simples a fim de ilustrar os pontos obtidos para a malha unitária e a malha *canonical dissections*, sendo que para este exemplo, a base do veículo possui dimensões $(L, C) = (10, 8)$ e há quatro itens de dimensões: $(l_1, c_1) = (3, 5)$, $(l_2, c_2) = (7, 3)$, $(l_3, c_3) = (5, 3)$ e $(l_4, c_4) = (4, 2)$. Na Figura 32a, é ilustrada a malha de pontos com distância unitária e, na 32b, os pontos da malha *canonical dissections*. A malha unitária tem um total de 56 pontos disponíveis para o empacotamento (veja que o número total de pontos é dado pelo produto cartesiano $U^L \times U^C$). Por outro lado, a malha *canonical dissections* tem um total de 25 pontos, após eliminar as coordenadas após $L - \min_{i \in M} \{l_i\}$ e $C - \min_{i \in M} \{c_i\}$.

Figura 32 – Exemplo de malha de pontos para a base retangular do veículo.



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema de empacotamento abordado no 2L-CVRP contém a restrição de ordem de entrega, logo os itens com ordens de entregas maiores que i (isto é, que devem ser entregues após i), não podem bloquear a retirada de i . Portanto, ao calcular a malha *canonical dissections* para

o item i , ao longo do comprimento, somente os itens que serão entregues após i precisam ser considerados no cálculo da malha (HOKAMA; MIYAZAWA; XAVIER, 2016). Logo, a malha de pontos apresentados em (4.9) pode ser reescrita por (4.10), em que M_i^{\geq} é o conjunto de itens a serem entregues com ou após i . Neste trabalho, assume-se o uso da malha *canonical dissections* na resolução do problema de empacotamento. O Algoritmo 13 apresentado no Apêndice A.1 permite obter a malha *canonical dissections* conforme (4.8) e (4.10).

$$P_i^C = \left\{ q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{k \in M_i^{\geq} \setminus \{i\}} \varepsilon_k c_k, 0 \leq q \leq C - c_k, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in M_i^{\geq} \setminus \{i\} \right\}. \quad (4.10)$$

4.3.3 Heurística Construtiva H_{Leung}

Inicialmente, busca-se resolver o 2OPPUL através da heurística construtiva de Leung *et al.* (2012). Os autores combinaram essa heurística construtiva com o algoritmo de recozimento simulado para resolver o problema da mochila 0-1 bidimensional. A heurística construtiva é utilizada para realizar o empacotamento dos itens segundo uma dada sequência de itens fornecida pelo recozimento simulado.

Para resolver o 2OPPUL, somente a heurística construtiva de Leung *et al.* (2012) é utilizada. Dado que o propósito ao utilizar essa abordagem é verificar rapidamente se todos os itens da rota S podem ser empacotados na base do veículo, em lugar do recozimento simulado de Leung *et al.* (2012), optou-se por usar uma estratégia mais simples e rápida para gerar a sequência em que os itens podem ser empacotados. Tal estratégia consiste apenas em fornecer um número limitado de sequência dos itens com base em suas dimensões, como observado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 – Abordagem para gerar a sequência dos itens para empacotar.

Entrada: S , conjunto com os clientes da rota; M , conjunto com os itens dos clientes na rota S com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; σ , ordem de entrega dos itens $i \in M$ na rota S ; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Se o empacotamento dos itens é factível ou infactível.

```

1:  $st \leftarrow False$ ;
2: para  $i \leftarrow 1$  até 2 faça
3:   se  $i = 1$  então  $\sigma'_i \leftarrow \sigma_i, \forall i \in M$ ;
4:   senão  $\sigma'_i \leftarrow |S| - \sigma_i + 1, \forall i \in M$ ;
5:   para  $j \leftarrow 1$  até 4 faça
6:      $M' \leftarrow$  Ordenar os itens em  $M$  conforme  $Od_j$ ;
7:      $m_{pack} \leftarrow$  Aplicar a Heurística Construtiva em  $M'$ ;
8:     se  $m_{pack} = |M|$  então
9:        $st \leftarrow True$ ;
10:    retorna  $st$ ;
11: retorna  $st$ ;

```

No Algoritmo 3, quatro regras são utilizadas para ordenar os itens, quais sejam: (i) ordem original (Od_1), (ii) ordem decrescente pela largura (Od_2), (iii) ordem decrescente pelo comprimento (Od_3) e (iv) ordem decrescente pela área (Od_4). Além disso, os itens são considerados tanto na direção original de entrega quanto na ordem reversa (linhas 3 e 4). No final do método, é retornado o *status* do empacotamento, isto é, se o empacotamento de todos os itens é viável ou inviável.

Após gerada a sequência dos itens, a mesma é submetida a heurística construtiva para verificar a viabilidade do empacotamento, conforme descrito no Algoritmo 4. Dada uma sequência de itens M' , seleciona-se o item $i \in M'$, ainda não empacotado, com a melhor aptidão (segundo o Algoritmo 5) em relação a um espaço não ocupado na base do veículo e que respeita a restrição de ordem de entrega (σ'_i) para realizar o empacotamento.

No Algoritmo 4, os seguintes parâmetros são utilizados: m_{pack} , contador para marcar o número de itens empacotados; s , um espaço vazio; $(s.x, s.y)$, canto inferior esquerdo de s ; $s.l$, largura de s ; $s.c$, altura de s ; $s.e$, altura da parede esquerda de s ; $s.d$, altura da parede direita em s ; e, por fim, ES , conjunto com os espaços vazios. No início do algoritmo, esses parâmetros são inicializados (linhas 1-3).

Algoritmo 4 – Heurística construtiva.

Entrada: M' , conjunto dos itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M'$; σ' , ordem de entrega dos itens $i \in M'$; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Número de itens empacotados.

```

1:  $m_{pack} \leftarrow 0$ ;
2:  $s.x \leftarrow 0$ ;  $s.y \leftarrow 0$ ;  $s.l \leftarrow L$ ;  $s.c \leftarrow C$ ;  $s.e \leftarrow C$ ;  $s.d \leftarrow C$ ;
3:  $ES \leftarrow s$ ;
4: enquanto  $M' \neq \emptyset$  E  $ES \neq \emptyset$  faça
5:    $s \leftarrow$  Selecionar o espaço de  $ES$  com o menor valor de  $s.y$ ;
6:   para cada  $i \in M'$  faça
7:      $Ap_i \leftarrow$  Aplicar o Algoritmo 5 para calcular a aptidão do item  $i$  no espaço  $s$ ;
8:    $r \leftarrow$  Escolher o item  $i \in M'$  com maior aptidão  $Ap_i$  e que respeita a ordem de entrega em  $\sigma'_i$ ;
9:   se  $s.l \geq l_r$  E  $s.c \geq c_r$  então
10:     se  $s.e \geq s.d$  então Empacotar o item  $r$  do lado esquerdo no espaço  $s$ ;
11:     senão Empacotar o item  $r$  do lado direito no espaço  $s$ ;
12:     Atualizar o conjunto de espaços  $ES$  após ter empacotado  $r$ ;
13:     Remover o item  $r$  do conjunto  $M'$ ;
14:      $m_{pack} \leftarrow m_{pack} + 1$ ;
15:   Selecionar os espaços em  $ES$  que não são viáveis para empacotar qualquer item  $r \in M'$  e realizar a união deles com o espaço vazio ao seu lado;
16: retorna  $m_{pack}$ ;

```

A cada iteração do Algoritmo 4 (linhas 4 a 15) é escolhido o espaço com menor coordenada em y e o item que será empacotado. O item selecionado deve conter o maior valor de

aptidão possível e atender a restrição de ordem de entrega. Neste contexto, os itens com maior valor de ordem de entrega são selecionados e dentre estes itens (que representam itens de um mesmo cliente, isto é, com mesmo valor de ordem de entrega) é escolhido o item com maior valor de aptidão. O maior valor de aptidão é dado pelo item que melhor ocupar o espaço s em relação à largura e ao comprimento.

Determinado o espaço e o item, passa-se para a realização do empacotamento. Um item pode ser empacotado à direita ou esquerda do espaço vazio, sendo do lado esquerdo se $s.e \geq s.d$, caso contrário, do lado direito. Quando um item é empacotado, os espaços vazios são atualizados: (i) horizontalmente, da esquerda para a direita, até que alcance um item ou a borda da base do veículo; (ii) verticalmente, de baixo para cima, até atingir um item ou a borda da base do veículo. Por fim, o item empacotado é removido do conjunto de itens, o número de itens empacotados é atualizado e os espaços em que não cabem nenhum item são unidos a outros espaços vazios. Ao final do método é retornado o número de itens empacotados.

Algoritmo 5 – Função de aptidão.

Entrada: l_i , largura do item i ; c_i comprimento do item i ; s , espaço com s_l , s_c , s_e e s_d .

Saída: Valor de aptidão do item i para o espaço s .

```

1: se  $s_e > s_d$  então
2:   se  $s_l = l_i$  E  $s_e = c_i$  então  $apt \leftarrow 4$ ;
3:   senão se  $s_l = l_i$  E  $s_e < c_i$  E  $s_c \geq c_i$  então  $apt \leftarrow 3$ ;
4:   senão se  $s_l = l_i$  E  $s_e > c_i$  então  $apt \leftarrow 2$ ;
5:   senão se  $s_l > l_i$  E  $s_e = c_i$  então  $apt \leftarrow 1$ ;
6:   senão se  $s_l \geq l_i$  E  $s_c \geq c_i$  então  $apt \leftarrow 0$ ;
7:   senão  $apt \leftarrow -1$ ;
8: senão
9:   se  $s_l = l_i$  E  $s_d = c_i$  então  $apt \leftarrow 4$ ;
10:  senão se  $s_l = l_i$  E  $s_d < c_i$  E  $s_c \geq c_i$  então  $apt \leftarrow 3$ ;
11:  senão se  $s_l = l_i$  E  $s_d > c_i$  então  $apt \leftarrow 2$ ;
12:  senão se  $s_l > l_i$  E  $s_d = c_i$  então  $apt \leftarrow 1$ ;
13:  senão se  $s_l \geq l_i$  E  $s_c \geq c_i$  então  $apt \leftarrow 0$ ;
14:  senão  $apt \leftarrow -1$ ;
15: retorna  $apt$ ;

```

4.3.4 Limitante Inferior LB_1

O limitante inferior LB_1 é baseado na formulação de Gilmore e Gomory (1961) para o Problema de Corte de Estoque (*Cutting Stock Problem* - CSP), sendo que a versão unidimensional do problema é considerada. O CSP unidimensional busca realizar cortes unidimensionais em barras em estoque, gerando barras de tamanhos menores para atender toda demanda dos clientes. O objetivo é minimizar o número de barras em estoque cortadas.

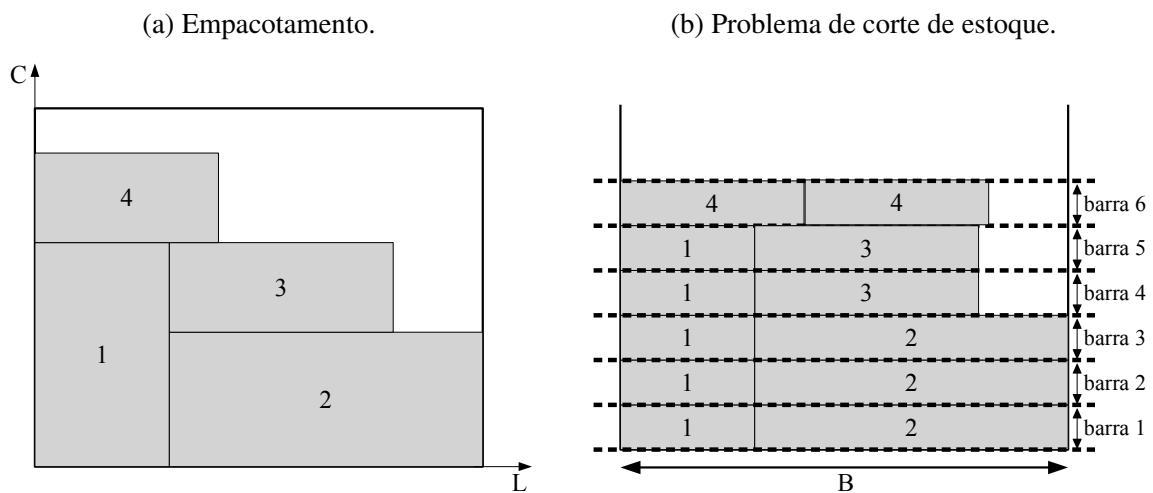
Com base na formulação do CSP unidimensional, dois limitantes são gerados para a base

do veículo, LB_1^C e LB_1^L . O limitante LB_1^C indica qual é a largura mínima da base retangular do veículo para empacotar os itens $i \in M$. Enquanto, o limitante LB_1^L mostra o comprimento mínimo da base do veículo necessária para empacotar todos os itens. Neste contexto, conhecida a solução do CSP unidimensional, a rota S é considerada inviável se $LB_1^L > C$ ou $LB_1^C > L$.

Para exemplificar a ideia do CSP unidimensional, considere o exemplo utilizado na Seção 4.3.2, em que a base do veículo possui dimensões $(L, C) = (10, 8)$ e há quatro itens de dimensões: $(l_1, c_1) = (3, 5)$, $(l_2, c_2) = (7, 3)$, $(l_3, c_3) = (5, 3)$ e $(l_4, c_4) = (4, 2)$. Para a formulação do limitante LB_1^L , o tamanho das barras em estoque para cortar as peças/barras dos clientes é $B = 10$ e a demanda dos clientes são: 5 barras de tamanho 3 (cliente 1), 3 barras de tamanho 7 (cliente 2), 3 barras de tamanho 5 (cliente 3) e 2 barras de tamanho 4 (cliente 4). Note que, para calcular o LB_1^L , o comprimento dos itens são considerados como as demandas, a largura dos itens representam o tamanho das barras requerida pelos clientes e L é o tamanho da barra em estoque. Em outras palavras, cada item $i \in M$ representa um tipo de barra b_i com tamanho t_i igual a l_i e demanda d_i igual a c_i .

A Figura 33 ilustra o exemplo citado acima em relação à solução do empacotado e à solução do CSP unidimensional para o limitante LB_1^L . Na Figura 33b, é perceptível que 6 barras foram utilizadas, logo LB_1^L é igual a 6 (ou seja, é necessária uma base retangular de comprimento, no mínimo, igual a 6 para empacotar todos os itens no 2OPPUL). Na solução do CSP, cada retângulo entre as linhas pontilhadas indicam uma barra usada para cortar as barras menores demandadas pelos clientes. Os itens passam a ter dimensão igual a 1 ao longo do comprimento. Além disso, em cada barra existe um tipo de padrão de corte. Um padrão de corte representa a maneira como uma barra em estoque é cortada para a produção de barras menores.

Figura 33 – Exemplo de uma solução para o empacotamento e para o problema de corte de estoque.



Fonte: Elaborada pela autora.

O modelo do CSP unidimensional apresentado em (4.11) a (4.13) considerada o limitante LB_1^L . O limitante LB_1^C pode ser obtido de forma análoga. Vale ressaltar que esses limitantes

também foram utilizados por [Côté, Gendreau e Potvin \(2014\)](#).

O modelo de programação linear inteira do CSP para LB_1^L é dado em (4.11) a (4.13) e utiliza a variável de decisão v_k que representa o número de vezes que a barra é cortada usando o padrão k . Neste modelo, um padrão de corte é definido por um subconjunto $M' \subset M$, sendo este factível se $\sum_{i \in M'} l_i \leq L$. O conjunto de todos os padrões de cortes factíveis é dado por \mathcal{K}^L . Por fim, c_i é demanda do item i e a_{ik} é igual 1 se o item i está no padrão de corte k e 0, caso contrário.

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in \mathcal{K}^L} v_k, \quad (4.11)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^L} a_{ik} v_k \geq c_i, \quad \forall i \in M, \quad (4.12)$$

$$v_k \geq 0, \quad \forall v_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathcal{K}^L. \quad (4.13)$$

A função objetivo (4.11) busca minimizar o número de barras utilizadas/cortadas. As restrições (4.12) garantem o atendimento da demanda de todos os itens. Por fim, as restrições (4.13) definem o domínio das variáveis de decisão.

Devido ao fato do CSP ser um problema NP-difícil, ele é usualmente resolvido pelo método de geração de colunas ([HOKAMA; MIYAZAWA; XAVIER, 2016](#); [CÔTÉ; GENDREAU; POTVIN, 2014](#)). Neste contexto, a integralidade das variáveis é relaxada e um padrão de corte é dado pela solução do problema da mochila.

4.3.5 Limitante Inferior LB_2

O limitante inferior LB_2 consiste em uma estimativa do comprimento da base do veículo ([CÔTÉ; GENDREAU; POTVIN, 2014](#)). Para tanto, a posição mínima e máxima que cada item $i \in M$ pode ocupar na base do veículo ao longo do comprimento é calculada, respeitando a ordem de entrega dos itens. Desta forma é possível gerar mais restrições para as posições dos itens ao longo do comprimento da base.

Para determinar as posições mínimas e máximas que cada item pode assumir, [Côté, Gendreau e Potvin \(2014\)](#) definiram as seguintes definições:

- $M_i^<$: conjunto de itens que devem ser entregues antes do item i ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j < \sigma_i\}$).
- $M_i^{<,w}$: conjunto de itens que devem ser entregues antes do item i com largura maior que w ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j < \sigma_i \text{ e } l_j > w\}$).
- $M_i^>$: conjunto de itens que devem ser entregues depois do item i ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j > \sigma_i\}$).
- $M_i^{>,w}$: conjunto de itens que devem entregues depois do item i com largura maior que w ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j > \sigma_i \text{ e } l_j > w\}$).

- $M_i^{\leq, w}$: conjunto de itens que devem ser entregues antes ou em conjunto com o item i , com largura maior que w ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j \leq \sigma_i \text{ e } l_j > w\}$).
- $M_i^{\geq, w}$: conjunto de itens a serem entregues depois ou em conjunto com o item i , com largura maior que w ($\{j \in M \setminus \{i\} \mid \sigma_j \geq \sigma_i \text{ e } l_j > w\}$).
- $\Sigma_{(i)}^> = \sum_{\substack{j \in M \setminus \{i\} \\ \sigma_j > \sigma_i}} l_j w_j$: área total dos itens a serem entregues depois de i .
- $\Sigma_{(i)}^{\geq, w} = \sum_{\substack{j \in M \setminus \{i\} \\ \sigma_j > \sigma_i \\ l_j > w}} l_j c_j$: área total dos itens a serem entregues depois do item i com largura maior que w .
- $\Sigma_{(i,k)}^< = \sum_{\substack{j \in M \setminus \{i,k\} \\ \sigma_i < \sigma_j < \sigma_k}} l_j c_j$: área total dos itens a serem entregues depois do item i , mas antes do item k .
- $\Sigma_{(i,k)}^{\leq, w} = \sum_{\substack{j \in M \setminus \{i,k\} \\ \sigma_i < \sigma_j < \sigma_k \\ l_j > w}} l_j c_j$: área total dos itens a serem entregues depois do item i , mas antes do item k com largura maior que w .

Para calcular a posição mínima (y_i^{min}) e a máxima (y_i^{max}) de cada item $i \in M$, os valores $y_i^{min,1}$, $y_i^{min,2}$, $y_i^{max,1}$ e $y_i^{max,2}$ devem ser calculados:

$$y_i^{min,1} = \max \left\{ \left[\frac{\Sigma_{(i)}^{>, L-l_i}}{L}, \max_{k \in M_i^{>, L-l_i}} \{c_k\} \right] \right\}, \quad \forall i \in M. \quad (4.14)$$

$$y_i^{min,2} = \left\lceil \frac{[\Sigma_{(i)}^> - C(L-l_i) + \sum_{j \in M_i^{\leq, l_i}} c_j(l_j-l_i)]^+}{l_i} \right\rceil, \quad \forall i \in M. \quad (4.15)$$

$$y_i^{max,1} = C - \max \left\{ \left[\frac{\Sigma_{(i)}^{\leq, L-l_i}}{L} \right], \max_{j \in M_i^{\leq, L-l_i}} \{c_j\} \right\}, \quad \forall i \in M. \quad (4.16)$$

$$y_i^{max,2} = C - \left\lfloor \frac{[(\Sigma_{(i)}^{\leq} - C(L-l_i) + (\sum_{j \in M_i^{\geq, l_i}} c_j)(l_j-l_i)]^+}{l_i} \right\rfloor, \quad \forall i \in M. \quad (4.17)$$

As equações (4.14) são obtidas considerando somente os itens após i e o cálculo de $y_i^{min,1}$ consiste em obter o valor máximo entre o relaxamento contínuo sobre todos os itens e o item de maior comprimento. Assim como na equação (4.14), a equação (4.15) apenas trata os itens a serem entregues após i e o de valor $y_i^{min,2}$ representa a posição de comprimento obtida através do deslocamento do item i para baixo até alcançar a borda do fundo da base do veículo ou um item onde não é possível empurrá-lo para mais a direita sem que outro item saia da base. As equações (4.16) e (4.17) são análogas as (4.14) e (4.15), mas ao invés de utilizar os itens com ordem de entrega após i , os itens considerados, no cálculo de $y_i^{max,1}$ e $y_i^{max,2}$, devem ser entregues antes de

i. Vale lembrar que o símbolo “+” em (4.15) e (4.17) indica que somente valores positivos são considerados.

As equações (4.18) e (4.19) representam a posição mínima (y_i^{min}) e a posição máxima (y_i^{max}) que o item $i \in M$ pode ocupar na base do veículo, respectivamente. Em outras palavras, y_i^{min} indica a menor posição que a parte inferior do item i pode ocupar e y_i^{max} mostra a maior posição que a parte superior do item i pode ocupar. Além dos valores das equações apresentadas acima, as equações (4.18) e (4.19) utilizam dois outros termos. O terceiro termo trata os itens que não podem estar ao lado de i , isto é, se $l_j + l_i > L$ para $i, j \in M$, o item j é um limite inferior para o item i em (4.18) e superior em (4.19). O quarto termo considera a malha *canonical dissections*.

$$y_i^{min} = \max \left\{ y_i^{min,1}, y_i^{min,2}, \max_{j \in M_i^{>,L-l_i}} \{y_j^{min} + c_j\}, \min\{y : y \in P_i^C\} \right\}, \quad \forall i \in M. \quad (4.18)$$

$$y_i^{max} = \min \left\{ y_i^{max,1}, y_i^{max,2}, \min_{j \in M_i^{<,L-l_i}} \{y_j^{max} - c_j\}, \max\{y : y \in P_i^C + c_i\} \right\}, \quad \forall i \in M. \quad (4.19)$$

Portanto, a partir das definições de y_i^{min} e y_i^{max} , o limitante LB_2 é dado em (4.20). Se LB_2 for maior que C , a solução do 2OPPUL é infactível.

$$LB_2 = \max_{i \in M} \{y_i^{min} + c_i + (C - y_i^{max})\}. \quad (4.20)$$

4.3.6 Modelo do 2OPP Relaxado

O Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem* - 2OPP) é uma simplificação do 2OPPUL. Logo, o 2OPP possui as mesmas características do 2OPPUL com exceção das restrições de ordem de entrega. Por conseguinte, o 2OPP busca verificar se um conjunto de itens pode ser empacotados dentro de um recipiente, garantindo que não haja sobreposição entre os itens e que os itens estejam completamente dentro do recipiente.

Neste trabalho, uma relaxação para o 2OPP é resolvida. O objetivo é verificar se os itens dos clientes em S podem ser empacotados na base retangular do veículo respeitando a dimensão da base. Trata-se de um problema de factibilidade e não de otimização. Portanto, o problema relaxado não tem função objetivo e as restrições consistem em (4.21) a (4.26). O modelo possui as seguintes variáveis de decisão:

$$\delta_{rp}^L = \begin{cases} 1, & \text{se o item } r \in M \text{ é empacotado na coordenada } p \in P_r^L, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\delta_{rq}^C = \begin{cases} 1, & \text{se o item } r \in M \text{ é empacotado na coordenada } q \in P_r^C, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\sum_{r \in M} \sum_{\{s \in P_r^L: p-l_r+1 \leq s \leq p\}} c_r \delta_{rs}^L \leq C, \quad \forall p \in P^L, \quad (4.21)$$

$$\sum_{r \in M} \sum_{\{t \in P_r^C: q-c_r+1 \leq t \leq q\}} l_r \delta_{rt}^C \leq L, \quad \forall q \in P^C, \quad (4.22)$$

$$\sum_{p \in P_r^L} \delta_{rp}^L = 1, \quad \forall r \in M, \quad (4.23)$$

$$\sum_{q \in P_r^C} \delta_{rq}^C = 1, \quad \forall r \in M, \quad (4.24)$$

$$\delta_{rp}^L \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in M, \forall p \in P_r^L, \quad (4.25)$$

$$\delta_{rq}^C \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in M, \forall q \in P_r^C. \quad (4.26)$$

As restrições (4.21) asseguram que a soma do comprimento dos itens que interceptam a coordenada p quando empacotados em alguma coordenada s ao longo do eixo X deve respeitar o comprimento C da base do veículo. As restrições (4.22) são análogas às restrições (4.21) para a dimensão da largura, ou seja, a soma das larguras dos itens que cobrem a coordenada q quando empacotados em alguma coordenada t ao longo do eixo Y deve respeitar a largura L da base do veículo. As restrições (4.23) e (4.24) asseguram que todos os itens devem ser empacotados em alguma coordenada ao longo da largura e do comprimento, respectivamente. As restrições (4.25) e (4.26) indicam que as variáveis de decisão são binárias.

4.3.7 Modelo de Programação por Restrições

Um modelo básico de Programação por Restrições (*Constraint Programming* - CP) para o 2OPPUL é definido em (4.27) a (4.30), conforme Clautiaux *et al.* (2008). O modelo possui como variáveis de decisão ψ_i^x e ψ_i^y , que representam as coordenadas com relação ao eixo x e y , respectivamente, em que cada item $i \in M$ é empacotado com seu canto inferior esquerdo na base do veículo. Os domínios das variáveis de decisão são $\psi_i^x \in P_i^L$ e $\psi_i^y \in P_i^C$ para cada $i \in M$.

$$\psi_i^x + l_i \leq \psi_j^x \text{ ou } \psi_j^x + l_j \leq \psi_i^x \text{ ou } \psi_i^y + c_i \leq \psi_j^y \text{ ou } \psi_j^y + c_j \leq \psi_i^y, \quad \forall i, j \in M, i \neq j, \quad (4.27)$$

$$\psi_i^x + l_i \leq \psi_j^x \text{ ou } \psi_j^x + l_j \leq \psi_i^x \text{ ou } \psi_j^y + c_j \leq \psi_i^y, \quad \forall i, j \in M, i \neq j, \sigma_j > \sigma_i. \quad (4.28)$$

As restrições (4.27) garantem que não haja sobreposição entre quaisquer itens i e j . Assim como as restrições (4.27), as restrições (4.28) impõem que não ocorra sobreposição de itens, contudo elas também são responsáveis por atender a restrição de ordem de entrega. Logo, essas restrições garantem que todo item j entregue após i ($\sigma_j > \sigma_i$) seja empacotado em alguma posição que evite o remanejamento dos itens durante o descarregamento.

Em busca de melhorar o desempenho do modelo de programação por restrições, Clautiaux *et al.* (2008) estudaram restrições baseadas em escalonamento de tarefas e propuseram (4.29) a (4.32). Essas restrições tratam os itens como tarefas que devem ser processadas nos recursos R^L e R^C . Os recursos R^L e R^C tem capacidade C e L , respectivamente. Cada tarefa $i \in M$ deve

ser processada dentro do tempo l_i e c_i . Quando uma tarefa $i \in M$ é processada no recurso R^L , ela consome uma quantidade c_i do recurso R^C e ao ser processada em R^C , ela consome uma quantidade l_i do recurso R^L .

O objetivo dessas restrições é determinar o instante em que cada tarefa $i \in M$ começa a ser processada, respeitando a capacidade dos recursos e relacionando estes instantes com as coordenadas/pontos onde os itens são empacotados ψ_i^L e ψ_i^C . Para tanto, o modelo deste problema considera as seguintes variáveis de decisão para cada tarefa $i \in M$: φ_i^L e φ_i^C que indicam os instantes que as tarefas/itens começam a ser processadas nos recursos R^L e R^C , respectivamente. O domínio dessas variáveis é $\varphi_i^L \in P_i^L$ e $\varphi_i^C \in P_i^C$. Logo, as restrições baseadas em escalonamento são apresentadas em (4.29) a (4.32).

$$\sum_{\varphi_i^L \leq s \leq \varphi_i^L + l_i} c_i \leq R^C, \quad \forall i \in M, \quad s = 0, \dots, L, \quad (4.29)$$

$$\sum_{\varphi_i^C \leq s \leq \varphi_i^C + c_i} l_i \leq R^L, \quad \forall i \in M, \quad s = 0, \dots, C, \quad (4.30)$$

$$\varphi_i^L = \psi_i^x, \quad \forall i \in M, \quad (4.31)$$

$$\varphi_i^C = \psi_i^y, \quad \forall i \in M. \quad (4.32)$$

As restrições (4.29) e (4.30) são responsáveis por garantir que a soma das quantidades de recurso que as tarefas gastam não violem as capacidades de cada recurso. As restrições (4.31) e (4.32) relacionam as variáveis de decisão do escalonamento com as variáveis do modelo de CP.

4.4 Experimentos computacionais

Os modelos do 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP foram codificados utilizando a linguagem de programação C++ e os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-8700 de 3,2 GHz, 7,5 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 LTS. Para resolução dos modelos foi utilizado o método exato *branch-and-cut* disponível no *software Gurobi Optimizer*, na versão 8.1 e as bibliotecas do *CP Optimize* do pacote *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.8*.

Para cada instância, o tempo limite de execução de 3600 segundos foi considerado como critério de parada. Também foi atribuído para cada chamada do modelo 2OPP relaxado e do CP um tempo limite de 60 e 120 segundos, respectivamente.

4.4.1 Instâncias e Parâmetros

Os testes computacionais consideram dois conjuntos de instâncias. O primeiro conjunto é composto por 60 instâncias da literatura do 2L-CVRP¹. O segundo conjunto é composto por 12 instâncias geradas aleatoriamente.

¹ <http://www.or.deis.unibo.it/>

O primeiro conjunto de instâncias foi proposto por Iori, Salazar-González e Vigo (2007) e é baseado nas instâncias de Reinelt (1991) e Toth e Vigo (2002) para o VRP com restrição de capacidade para os veículos. Iori, Salazar-González e Vigo (2007) propuseram uma fórmula para calcular o número e a dimensão dos itens de forma uniforme aleatória, além de preestabelecer as dimensões da base do veículo como sendo 20 de largura (L) e 40 de comprimento (C). A Tabela 19 traz as informações sobre a geração dos itens das instâncias do 2L-CVRP, em que R_j é o número de itens do cliente j , e l_{jr} e c_{jr} são a largura e o comprimento do item r do cliente j , respectivamente. Os autores propuseram um total de 60 instâncias, as quais estão divididas em cinco classes com 12 instâncias cada uma.

Tabela 19 – Intervalos para a geração dos itens.

Classe	$ R_j $	Vertical		Homogêneo		Horizontal	
		c_{jr}	l_{jr}	c_{jr}	l_{jr}	c_{jr}	l_{jr}
1	1	1	1	1	1	1	1
2	[1, 2]	[0,4C; 0,9C]	[0,1L; 0,2L]	[0,2C; 0,5C]	[0,2L; 0,5L]	[0,1C; 0,2C]	[0,4L; 0,9L]
3	[1, 3]	[0,3C; 0,8C]	[0,1L; 0,2L]	[0,2C; 0,4C]	[0,2L; 0,4L]	[0,1C; 0,2C]	[0,3L; 0,8L]
4	[1, 4]	[0,2C; 0,7C]	[0,1L; 0,2L]	[0,1C; 0,4C]	[0,1L; 0,4L]	[0,1C; 0,2C]	[0,2L; 0,7L]
5	[1, 5]	[0,1C; 0,6C]	[0,1L; 0,2L]	[0,1C; 0,3C]	[0,1L; 0,3L]	[0,1C; 0,2C]	[0,1L; 0,6L]

Fonte: Adaptada de Iori, Salazar-González e Vigo (2007).

Classe 1: as instâncias dessa classe correspondem ao VRP com capacidade limitada, visto que cada cliente tem apenas um item de dimensões (1, 1) e, assim, desde que a capacidade de carga do veículo seja respeitada qualquer sequência de clientes é viável para o empacotamento.

Classe 2 a 5: cada cliente j demanda um conjunto R_j de itens retangulares, com valor inteiro uniformemente aleatório no intervalo $[1, p]$, em que $p = \{2, \dots, 5\}$ representa a classe das instâncias. Ademais, cada item $r \in R_j$ pode ser: (i) vertical, em que o intervalo das larguras dos itens são menores que os dos comprimentos; (ii) homogênea, em que os itens têm dimensões geradas no mesmo intervalo; e, por fim, (iii) horizontal, em que as larguras dos itens são maiores que os comprimentos.

Neste trabalho, as instâncias do 2L-CVRP foram adaptadas para os problemas com entrega fracionada (2L-SDVRP e G2L-SDVRP). Como elas não fornecem o peso individual de cada item, apenas o peso total, foi preciso distribuir o peso para cada item. Optou-se por determinar o peso individual de cada item com base em sua área. A demanda de cada item r do cliente j é dada por (4.33), em que P_j e A_j é o peso e a área total dos itens, respectivamente, a_{jr} é área do item r e p_{jr} é o peso calculado do item r do cliente j . Note que ao final do procedimento de determinar o peso dos itens pode ocorrer de a soma dos pesos dos itens (p_{jr}) ser inferior ao peso total (P_j) e, neste caso, o restante da demanda é adicionado ao item r com maior área (a_{jr}).

$$p_{jr} = \left\lfloor \frac{a_{jr} P_j}{A_j} \right\rfloor. \quad (4.33)$$

O segundo conjunto de instâncias foi gerado com base no procedimento proposto por Iori, Salazar-González e Vigo (2007), o qual foi descrito acima. Esta é a Classe 6 e contém um total de 12 instâncias. Essas instâncias foram geradas com objetivo de melhor avaliar a importância da entrega fracionada, visto que nas instâncias do 2L-CVRP da literatura existem clientes demandando um único item.

Nas instâncias da Classe 6, o número de clientes, a demanda total de cada cliente, as coordenadas geográficas, a capacidade dos veículos e a dimensão da base dos veículos são os mesmos das Classes 1 a 5. O número de itens retangulares por cliente e suas dimensões são gerados conforme a Classe 5 (Tabela 19), em que o número de itens R_j por cliente j está no intervalo $[2, 5]$. O número de veículos disponíveis para atender os clientes é igual à Classe 5. Inicialmente, buscou-se utilizar a mesma estratégia empregada por Iori, Salazar-González e Vigo (2007) para definir o número de veículos, que consiste em aplicar uma adaptação da heurística de Martello, Pisinger e Vigo (2000). Contudo, o algoritmo de Martello, Pisinger e Vigo (2000) não considera a restrição de agrupamento/rota dos clientes e de ordem de entrega e, assim, o número de veículos resultante pode ser menor que o número mínimo de veículos necessários para empacotar todos os itens atendendo as restrições do 2L-CVRP. Nas instâncias de Iori, Salazar-González e Vigo (2007), essa situação não aconteceu. Por outro lado, ao utilizar esta abordagem nas instâncias da Classe 6 houve alguns casos em que não foi possível obter uma solução factível para o 2L-CVRP. Logo, optou-se por definir o número de veículos das instâncias da Classe 6 igual à Classe 5 e, assim, os experimentos mostraram que para todas as instâncias uma solução factível pode ser encontrada.

Na Tabela 20, são apresentados detalhes das instâncias, incluindo o nome da instância, o número de clientes e, para cada classe do problema (de 1 a 6), é fornecida a quantidade total de itens e o número de veículos disponível no depósito. Em síntese, o número de clientes das instâncias varia entre 15 e 39, o número de itens entre 15 e 114 e o número de veículos entre 3 e 11. Por fim, vale destacar que o custo das arestas/arcos é dado pela distância Euclidiana e é o valor inteiro arredondado para baixo.

Os valores dos parâmetros associados à emissão de CO_2 para o G2L-CVRP e G2L-SDVRP foram obtidos a partir da literatura. Os valores de ρ_0 e ρ_f foram determinados com base nos trabalhos de Xiao *et al.* (2012) e Zhang *et al.* (2015), dado que ρ_0 e ρ_f devem ser definidos a partir das características dos veículos e essa informação não está disponível.

Xiao *et al.* (2012) realizaram uma análise da influência do parâmetro ρ_f no consumo de combustível. Logo, com base em seus resultados, testes preliminares foram realizados com ρ_0 fixado em 1 e ρ_f variando no intervalo $\{1, 2, 3\}$ para verificar o impacto causado na quantidade de emissão de CO_2 . Os resultados mostraram haver uma maior taxa de emissão de CO_2 para ρ_f igual a 3 e, conseqüentemente, ocorre uma redução mais significativa nas emissões de CO_2 no G2L-CVRP e G2L-SDVRP em relação ao 2L-CVRP. Portanto, os seguintes valores são utilizados: $\rho_0 = 1$ e $\rho_f = 3$.

Tabela 20 – Informações das instâncias.

Instância	Clientes	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5		Classe 6	
		Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos
E016-03m	15	15	3	24	3	31	3	37	4	45	4	48	4
E016-05m	15	15	5	25	5	31	5	40	5	48	5	48	5
E021-04m	20	20	4	29	5	46	5	44	5	49	5	66	5
E021-06m	20	20	6	32	6	43	6	50	6	62	6	66	6
E022-04g	21	21	4	31	4	37	4	41	4	57	5	68	5
E022-06m	21	21	6	33	6	40	6	57	6	56	6	68	6
E023-03g	22	22	3	32	5	41	5	51	5	55	6	70	6
E023-05s	22	22	5	29	5	42	5	48	5	52	6	70	6
E026-08m	25	25	8	40	8	61	8	63	8	91	8	79	8
E030-03g	29	29	3	43	6	49	6	72	7	86	7	91	7
E033-03n	32	32	3	44	7	56	7	78	7	102	8	99	8
E036-11h	35	35	11	56	11	74	11	93	11	114	11	109	11

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor de T_{CO_2} é determinado com base no teor de carbono no diesel por galão, sendo 2778,00 gramas de CO_2 (USEPA, 2005). Assim, um litro de diesel tem 0,734 kg de teor de carbono e o CO_2 é 3,67 vezes mais pesado que o carbono, portanto, um litro de diesel consumido ocasiona a emissão de 2,69 kg de CO_2 , ou seja, $T_{CO_2} = 2,69$ kg/litro.

4.4.2 Comparação dos Resultados do 2L-CVRP com a Literatura

Para analisar a qualidade do método proposto, é realizada uma comparação dos resultados do 2L-CVRP com os da literatura. Para tanto, os resultados do 2L-CVRP estudado por Iori, Salazar-González e Vigo (2007) e Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) são considerados. Os autores trataram a versão do 2L-CVRP em que o número de rotas deve ser igual à quantidade de veículos disponíveis no depósito central e rotas com um único cliente não são permitidas.

A Tabela 21 apresenta um resumo dos resultados obtidos pelo método exato proposto neste trabalho (denominado BC), em que se faz a devida comparação com os resultados obtidos pelo método BC_{Iori} de Iori, Salazar-González e Vigo (2007) e BC_{Hokama} de Hokama, Miyazawa e Xavier (2016). Os resultados completos estão disponíveis na Tabela 42 no Apêndice B.

Na Tabela 21, para cada classe é reportado o número de soluções ótimas (OPT), o número de soluções em que o método terminou ao atingir o tempo limite ou em que o CP não foi capaz de provar a factibilidade ou infactibilidade do empacotamento de alguma rota (TL), e o tempo computacional médio gasto em segundos. Além disso, é apresentada uma comparação com a literatura em relação ao número de soluções melhores, iguais, piores e a diferença relativa média (GAP), em porcentagem. O GAP corresponde à diferença entre a solução do BC e da literatura, dado por $100 \times ((\text{Solução do BC} - \text{Solução da literatura}) / \text{Solução da literatura})$. Na tabela, GAP_{Iori} e GAP_{Hokama} representam o GAP em relação aos trabalhos de Iori, Salazar-González e Vigo (2007) e Hokama, Miyazawa e Xavier (2016), respectivamente. Para facilitar a compreensão do GAP, valores negativos indicam que a abordagem deste trabalho (BC) é melhor que a literatura e valores nulos correspondem a soluções iguais.

Ao analisar os resultados da Tabela 21, é possível perceber que uma solução ótima foi encontrada para 55 de 60 instâncias, enquanto para as demais instâncias o método parou pelo tempo limite. Para todas as instâncias, o BC obteve soluções melhores ou iguais aos métodos da literatura e, assim, conseguiu melhorar as soluções de Iori, Salazar-González e Vigo (2007) e Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) por 0,17% e 0,05%, respectivamente.

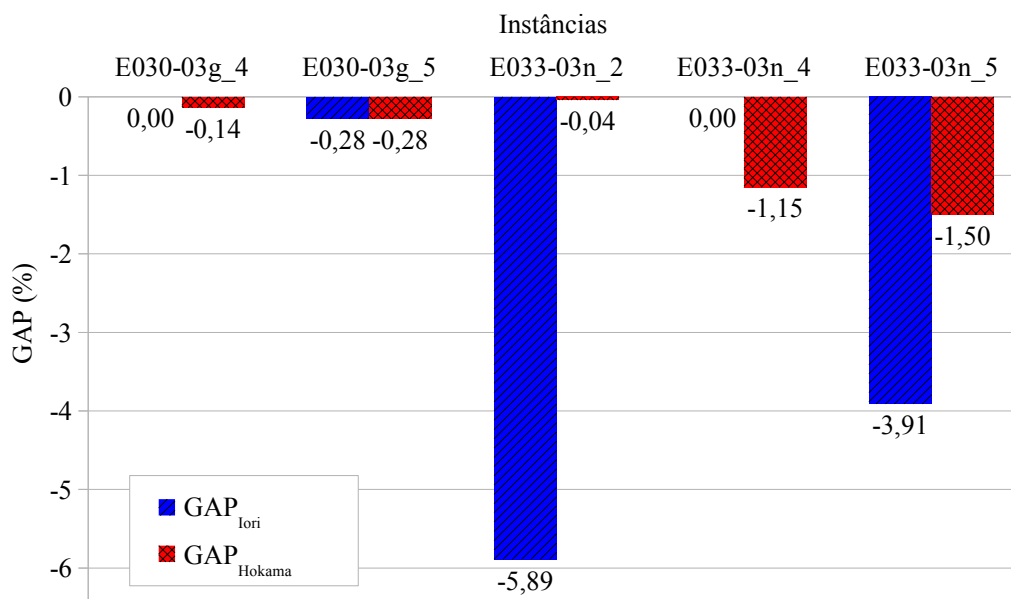
Tabela 21 – Comparação dos resultados do 2L-CVRP com a literatura.

Classe	BC			BC x BC _{Iori}				BC x BC _{Hokama}			
	OPT	TL	Tempo (s)	Melhor	Igual	Pior	GAP _{Iori}	Melhor	Igual	Pior	GAP _{Hokama}
1	12	0	90,84	0	12	0	0,00	0	12	0	0,00
2	11	1	446,50	1	11	0	-0,49	1	11	0	0,00
3	12	0	185,37	0	12	0	0,00	0	12	0	0,00
4	10	2	597,85	0	12	0	0,00	2	10	0	-0,11
5	10	2	202,55	2	10	0	-0,35	2	10	0	-0,15
1-5	55	5	304,62	3	57	0	-0,17	5	55	0	-0,05

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 34 ilustra uma comparação dos GAPs das soluções em que o método desenvolvido neste trabalho obteve melhores resultados que um dos algoritmos da literatura. Logo, a figura apresenta o GAP de cinco de instâncias. Ao considerar a melhor solução entre os dois métodos da literatura, o maior ganho do BC foi de 1,50% para a instância E033-03n da Classe 5. Em geral, o método exato proposto retornou soluções competitivas com as de outros métodos da literatura.

Figura 34 – GAP das instâncias com soluções melhores que a literatura.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.4.3 Resultados para o G2L-SDVRP

Para analisar a influência da entrega fracionada no custo das rotas e na emissão de CO₂, é realizada uma comparação entre as soluções do 2L-CVRP e dos outros problemas, as quais estão sumarizadas nas Tabelas 22 a 26 e nas Figuras 35 a 37. Os resultados completos dos problemas são reportados no Apêndice B, nas Tabelas 45 a 48.

Os experimentos preliminares mostraram que para algumas instâncias não foi possível obter nem uma única solução factível, em especial, para os problemas com entrega fracionada e, assim, dificultando realizar uma análise da importância da entrega fracionada. Logo, para contornar essa situação, optou-se por fornecer uma solução de partida para o método exato em todos os problemas. Para tanto, o $\overline{2L-CVRP}$ e o $\overline{G2L-CVRP}$ com restrições que proíbem rotas com um único cliente e obrigam o número de rotas a serem iguais ao número de veículos disponíveis são resolvidos. A solução do $\overline{2L-CVRP}$ é usada como ponto de partida para o 2L-CVRP e 2L-SDVRP e do $\overline{G2L-CVRP}$ é fornecida para o G2L-CVRP e G2L-SDVRP. Dado que o objetivo ao resolver o $\overline{2L-CVRP}$ e o $\overline{G2L-CVRP}$ é obter uma solução factível, o parâmetro do Gurobi relacionado ao foco da busca foi alterado para encontrar soluções viáveis de boa qualidade rapidamente. Os resultados completos obtidos através da resolução dos modelos $\overline{2L-CVRP}$ e o $\overline{G2L-CVRP}$ são apresentados nas Tabelas 43 e 44, respectivamente, no Apêndice B.

Para resolver o $\overline{2L-CVRP}$ e o $\overline{G2L-CVRP}$, um tempo limite total de 300 segundos é considerado e para cada chamada do 2OPP relaxado e do CP, um tempo de 10 segundos é atribuído. Neste contexto, o tempo limite de execução do método exato para os modelos do 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP é dado por 3600 segundos menos o tempo gasto na resolução do $\overline{2L-CVRP}$ ou do $\overline{G2L-CVRP}$, dependendo do problema.

Os resultados descritos a seguir não apresentam nenhuma informação sobre a Classe 1. Note que para as instâncias da Classe 1 nunca ocorrerá entrega fracionada, visto que todos os clientes demandam apenas um único item (veja a Tabela 20) e, conseqüente, não traria nenhum benefício aos problemas com entrega fracionada. Contudo, os resultados obtidos para esta classe se encontram no Apêndice B.

A Tabela 22 apresenta um resumo dos resultados obtidos ao resolver o 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP. Na tabela, para cada classe é fornecido o número de soluções ótimas (OPT), o número de soluções em que o método parou pelo tempo limite e/ou o CP não conseguiu provar a factibilidade ou infactibilidade de alguma rota (TL), o tempo computacional médio gasto em segundos, o número de veículos utilizados (VH), a diferença relativa percentual média entre o limitante inferior e o limitante superior retornado pelo método exato (GAP_{LI}) e, por fim, para os problemas com entrega fracionada (2L-SDVRP e G2L-SDVRP), o número de clientes que tiveram sua entrega fracionada (CS).

Como pode ser observado na Tabela 22, o tempo gasto para resolver o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP foi bem maior que do 2L-CVRP e G2L-CVRP, porém isto já era esperado, visto

que os modelos com entrega fracionada são de três índices e o número de maneiras de satisfazer os clientes é significativamente maior do que no 2L-CVRP e G2L-CVRP. Logo, ao aumentar as possibilidades de entrega no 2L-SDVRP e no G2L-SDVRP, o espaço de soluções factíveis aumentou, e, como mostraram os resultados, o problema ficou mais difícil de se resolver. Para o G2L-CVRP, o método exato proposto obteve 18 soluções ótimas a mais que no G2L-SDVRP. Por outro lado, a diferença de soluções ótimas do 2L-CVRP e 2L-SDVRP é de 10 instâncias a favor do 2L-CVRP. Ademais, o GAP_{LI} mostra que para o 2L-SDVRP e G2L-SDVRP há um maior espaço de busca para tentar melhorar a qualidade das soluções comparado ao 2L-CVRP e G2L-CVRP.

Em resumo, o melhor desempenho, em relação ao número de soluções ótimas, é para o G2L-CVRP, e o pior é para o 2L-SDVRP. Para os problemas com o objetivo de reduzir a emissão de CO_2 (G2L-CVRP e G2L-SDVRP), a abordagem proposta obteve mais soluções ótimas do que para os problemas com foco no custo das rotas (2L-CVRP e 2L-SDVRP). No G2L-SDVRP e G2L-CVRP, o método exato encontrou a solução ótima para 3 e 10 instâncias a mais que o 2L-SDVRP e 2L-CVRP, respectivamente. No que diz respeito à entrega fracionada, as soluções do G2L-SDVRP têm um número maior de clientes atendidos por mais de um veículo comparado ao 2L-SDVRP.

Tabela 22 – Número de soluções ótimas, veículos e entregas fracionadas, e tempo de execução.

Classe	2L-CVRP					2L-SDVRP					
	OPT	TL	Tempo (s)	VH	GAP_{LI}	OPT	TL	Tempo (s)	VH	CS	GAP_{LI}
2	7	5	1614,87	70	2,25	6	6	2445,54	70	6	12,90
3	9	3	957,89	68	1,29	3	9	2717,24	71	5	16,02
4	7	5	1093,57	70	1,50	4	8	2570,61	71	12	19,86
5	6	6	1148,71	64	0,65	4	8	2524,53	70	13	17,41
2-5	29	19	1203,76	272	1,42	17	31	2564,48	282	36	16,54
Classe	G2L-CVRP					G2L-SDVRP					
	OPT	TL	Tempo (s)	VH	GAP_{LI}	OPT	TL	Tempo (s)	VH	CS	GAP_{LI}
2	10	2	931,77	71	2,29	5	7	2279,18	70	12	5,76
3	11	1	715,47	70	0,65	4	8	2571,01	70	13	5,23
4	10	2	605,17	71	0,48	6	6	2260,16	71	18	5,11
5	8	4	510,06	68	0,00	5	7	2381,68	68	15	5,49
2-5	39	9	690,62	280	0,85	20	28	2373,01	279	58	5,40

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Tabela 23, são resumidas as informações sobre o número de cortes adicionados no procedimento de separação para cada um dos problemas. Logo, para cada classe é fornecido o número total de cortes realizados para o roteamento e o empacotamento. O maior número de cortes de eliminação de subciclos é realizado no G2L-CVRP, seguido pelo 2L-CVRP e 2L-SDVRP. O G2L-SDVRP não apresenta nenhum corte no roteamento, dado que a eliminação de subciclos é realizada pelas restrições de fluxo de carga. Em relação aos cortes nas rotas por viabilidade do empacotamento, o maior número de cortes é do 2L-CVRP, seguido pelo

2L-SDVRP, G2L-SDVRP e G2L-CVRP.

Tabela 23 – Número de cortes adicionados pelos procedimentos de separação.

Classe	Procedimento do Roteamento				Procedimento do Empacotamento			
	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP
2	3759935	24122	6761448	0	3995	2924	1031	1096
3	1777763	22228	3207408	0	1163	1948	178	405
4	693240	14440	1310058	0	360	348	139	463
5	608473	17204	1236731	0	75	79	31	41
Total	6839411	77994	12515645	0	5593	5299	1379	2005

Fonte: Elaborada pela autora.

Os melhores resultados obtidos pelo método *branch-and-cut* proposto são compilados nas Tabelas 24 a 26. Considerando todas as versões dos problemas, apenas 54,69% das soluções obtidas são comprovadamente ótimas. Logo, ressalta-se que as conclusões apresentadas estão baseadas nestas soluções.

Na Tabela 24, é apresentada uma comparação entre os resultados do 2L-CVRP com os outros problemas. Para cada classe é descrito o número de instâncias em que as soluções do 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP são melhores, iguais ou piores que as do 2L-CVRP. Por fim, é apresentada a diferença percentual média (GAP) entre essas soluções. O valor de GAP é dado pela diferença entre o valor total das rotas (ou quantidade de emissão de CO₂) para as soluções do 2L-CVRP e do G2L-CVRP (ou G2L-SDVRP, 2L-SDVRP), ou seja,

$$GAP(2L-CVRP \times G2L-CVRP) = 100 \times \left(\frac{G2L-CVRP(\text{rota}) - 2L-CVRP(\text{rota})}{2L-CVRP(\text{rota})} \right).$$

Analogamente, é calculado o valor para a emissão de CO₂. Para facilitar a compreensão da diferença percentual, considere o valor de GAP do G2L-CVRP. Se a diferença percentual tiver valores negativos, indica que a solução do G2L-CVRP é melhor que a do 2L-CVRP. Valores nulos correspondem a soluções iguais e valores maiores que zero apontam que o resultado do 2L-CVRP é melhor que do G2L-CVRP.

Os resultados da Tabela 24 mostram que as soluções do 2L-SDVRP comparadas ao 2L-CVRP são melhores em relação ao custo das rotas e piores quanto à emissão de CO₂, com diferença percentual de 0,06% e 0,22%, respectivamente. O G2L-CVRP reduziu a emissão de CO₂ do 2L-CVRP em 2,10%, na média, com um aumento de 2,43% nos custos das rotas. O G2L-SDVRP reduziu as emissões de CO₂ em comparação com o 2L-CVRP em 3,00% e aumentou os custos das rotas em 1,13%. Para a emissão de CO₂, o G2L-SDVRP sempre apresentou soluções melhores ou iguais as do 2L-CVRP, com exceção de duas instâncias, sendo que a maioria das soluções foi melhor. Além disso, o G2L-SDVRP apresentou resultados melhores que o G2L-CVRP, conseguindo obter mais melhorias em relação ao 2L-CVRP. Isso evidencia que a entrega fracionada oferece benefícios ao G2L-CVRP em relação à emissão de CO₂. Por fim, como se pode observar, quando é considerada a emissão de CO₂ as rotas acabam por ser levemente mais longas, isto é, de maior custo de transporte.

Tabela 24 – Comparação das soluções do 2L-CVRP com os outros problemas.

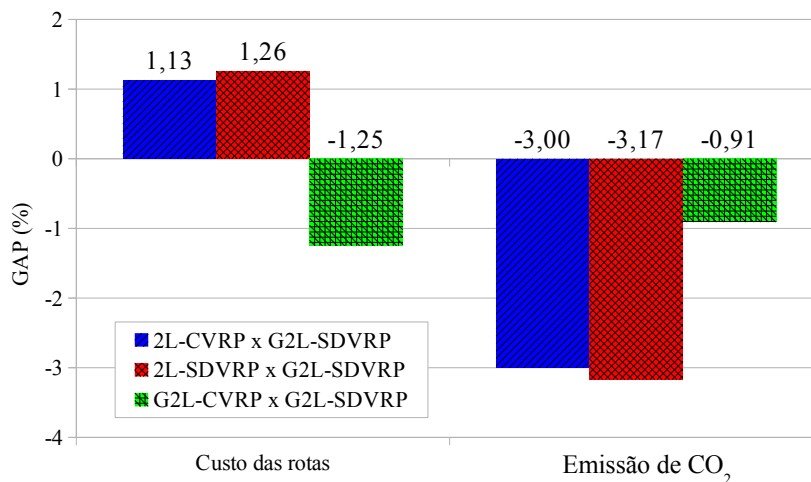
Custo das Rotas												
Classe	2L-SDVRP				G2L-CVRP				G2L-SDVRP			
	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)
2	5	7	0	-1,28	0	3	9	2,74	3	0	8	1,13
3	3	7	2	0,48	0	1	11	2,38	2	1	9	1,60
4	6	3	3	-0,27	1	2	9	1,81	5	2	6	-0,10
5	4	5	3	0,82	0	1	11	2,80	3	1	8	1,90
2-5	18	22	8	-0,06	1	7	40	2,43	13	4	31	1,13

Emissão de CO ₂												
Classe	2L-SDVRP				G2L-CVRP				G2L-SDVRP			
	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)
2	5	7	0	-0,79	8	3	1	-0,11	11	0	1	-1,38
3	2	7	3	0,31	11	1	0	-1,70	11	1	0	-2,61
4	5	2	5	0,91	11	1	0	-3,30	12	0	0	-4,42
5	3	4	5	0,45	11	1	0	-3,31	10	1	1	-3,59
2-5	15	20	13	0,22	41	6	1	-2,10	44	2	2	-3,00

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 35 ilustra uma comparação da solução do G2L-SDVRP com o 2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-CVRP em relação ao GAP do custo das rotas e emissão de CO₂ de todas as instâncias independente da solução ser ótima ou não. Como esperado, o G2L-SDVRP emitiu menos CO₂ que todos os outros problemas. Em geral, as soluções do G2L-SDVRP reduziram a emissão de CO₂ em relação ao 2L-CVRP em 3,00%; do 2L-SDVRP em 3,17%; e, do G2L-CVRP em 0,91%. No que diz respeito ao custo das rotas, as soluções do G2L-SDVRP possuem rotas de menor custo que as do G2L-CVRP com diferença de 1,26%. Contudo, a redução na emissão de CO₂ pelo G2L-SDVRP em relação ao 2L-CVRP e 2L-SDVRP ocasionou um aumento no custo das rotas em cerca de 1,13% e 1,26%, respectivamente.

Figura 35 – Comparação das soluções do G2L-SDVRP com dos outros problemas.

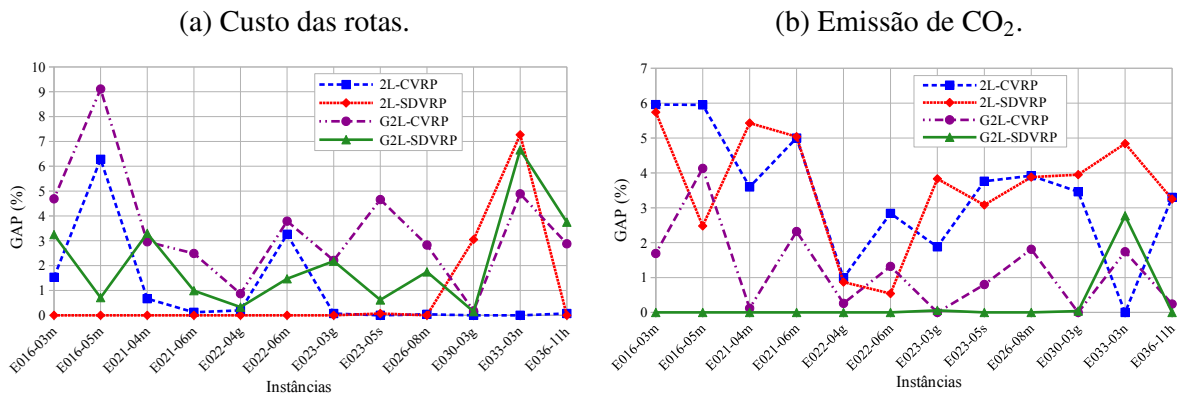


Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 36 traz o gráfico com informações sobre os GAPs das soluções de todos os problemas. Para cada instância de cada problema, é calculado o valor médio considerando as

quatro classes (2-5). Então, para cada instância, o menor valor médio entre os quatro problemas (isto é, 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP) é usado como base para calcular o GAP do custo das rotas e da emissão de CO₂. Na Figura 36a, as soluções do 2L-SDVRP têm o melhor custo de rotas, exceto para três instâncias (E023-05s, E030-03g, E033-03n). Assim como o 2L-SDVRP, o G2L-SDVRP emitiu a menor quantidade de CO₂ para a maioria das instâncias, perdendo apenas nas instâncias E023-03g, E030-03g e E033-03n (conforme a Figura 36b). O GAP médio geral para o custo das rotas é de 1,02%, 0,87%, 2,10% e 3,46% para o 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-SDVRP e G2L-CVRP, respectivamente. Por outro lado, o GAP médio em relação à emissão de CO₂ é de 0,24%, 1,20%, 3,39% e 3,58% para o G2L-SDVRP, G2L-CVRP, 2L-CVRP e 2L-SDVRP, respectivamente.

Figura 36 – GAP médio das soluções.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Tabela 25, cada coluna e linha representa um problema com informações da mediana do GAP (os valores em negrito na diagonal) e a diferença entre os GAPs médios de cada par de problemas (os resultados acima da diagonal). No que diz respeito à comparação dos GAPs, os problemas na linha apresentam GAP melhor do que os da coluna se os valores forem positivos. Caso contrário, o problema da coluna tem GAP melhor que o da linha. Ao analisar os resultados do custo das rotas, é possível verificar que a mediana do 2L-SDVRP é zero, indicando que para mais da metade das instâncias o GAP é igual a zero. A maior diferença nos custos das rotas ocorreu entre o 2L-CVRP e G2L-CVRP, e o 2L-SDVRP e G2L-CVRP, com diferença superior a 2%. Para emissão de CO₂, a mediana do G2L-SDVRP é igual a zero. Para maioria dos problemas, a diferença entre os GAPs é superior a 2%.

Tabela 25 – Diferença dos GAPs entre os problemas.

Problema	Custo das Rotas				Emissão de CO ₂			
	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP
2L-CVRP	0,09	-0,15	2,44	1,08	3,53	0,19	-2,19	-3,15
2L-SDVRP		0,00	2,60	1,23		3,86	-2,37	-3,34
G2L-CVRP			2,92	-1,37			1,06	-0,96
G2L-SDVRP				1,61				0,00

Fonte: Elaborada pela autora.

A Tabela 26 apresenta os resultados para o teste estatístico não-paramétrico de postos sinalizados de *Wilcoxon*. O teste de *Wilcoxon* independe da normalidade dos dados e visa detectar diferença estatística entre dois conjuntos de dados/amostras (ou seja, busca analisar o comportamento de duas amostras) (DERRAC *et al.*, 2011). Logo, ao aplicar o teste de postos sinalizados de *Wilcoxon*, deseja-se verificar se existe diferença nos resultados de dois problemas ou métodos. O teste de *Wilcoxon* foi realizado utilizando o *software* estatístico R. O nível de significância α é de 1% (ou seja, um intervalo de confiança de 99% é considerado). A hipótese alternativa é a bicaudal, indicando que a mediana das soluções dos problemas são diferentes.

Na Tabela 26, é apresentado o p – valor obtido com o teste estatístico de postos sinalizados de *Wilcoxon* para cada par de problemas. Se o p – valor for menor que $\alpha = 0,01$, a hipótese alternativa pode ser aceita, caso contrário não há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula, indicando que as medianas seriam iguais. Se a hipótese alternativa é aceita, isso significa que as soluções dos problemas nas linhas da tabela são estatisticamente diferentes daquelas dos problemas nas colunas. Em relação à emissão de CO₂, o teste indica diferença estatística nas soluções do 2L-CVRP em relação ao G2L-CVRP e G2L-SDVRP. Analogamente, as soluções do 2L-SDVRP são estatisticamente diferentes das soluções do G2L-CVRP e do G2L-SDVRP, e as soluções do G2L-CVRP são estatisticamente diferentes das soluções do G2L-SDVRP. No que diz respeito ao custo das rotas, os resultados indicam que há diferença nas soluções do G2L-CVRP e G2L-SDVRP.

Tabela 26 – Resultados do teste de postos sinalizados de *Wilcoxon*.

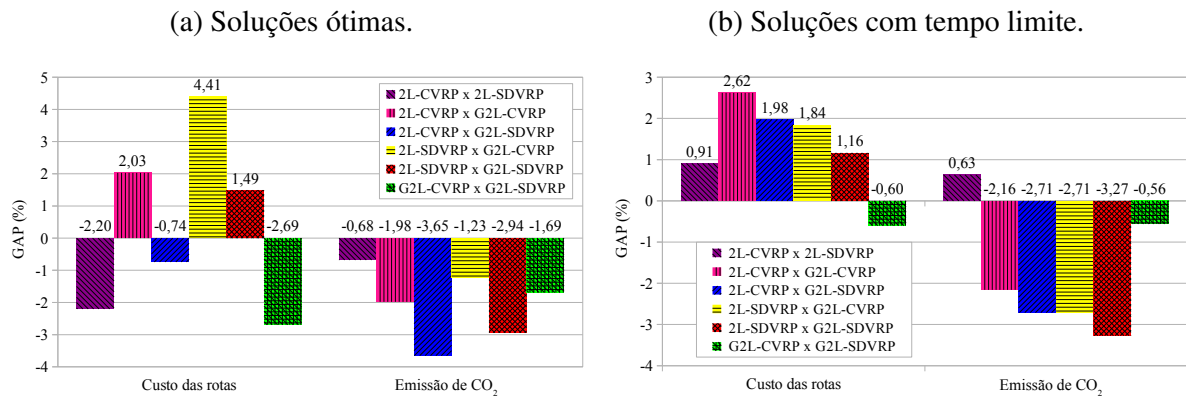
Problema	Custo das rotas			Emissão de CO ₂				
	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP	2L-CVRP	2L-SDVRP	G2L-CVRP	G2L-SDVRP
2L-CVRP		0,3012	1,0000	0,9967		0,5136	1,58E-07	4,66E-07
2L-SDVRP			0,9988	0,9907			1,97E-05	4,67E-08
G2L-CVRP				0,0032				8,61E-05

Fonte: Elaborada pela autora.

Para uma análise mais detalhada da qualidade das soluções dos problemas, as soluções são divididas em duas partes: a primeira contendo somente as soluções ótimas para todos os problemas (Figura 37a) e a segunda com as soluções em que o método terminou pelo tempo limite (Figura 37b). Em geral, os resultados, em respeito à solução ótima, que corresponde a 15 instâncias de um total de 48, mostram que: o 2L-SDVRP conseguiu rotas de custo menor que o 2L-CVRP com diferença de 2,20% e emitiu cerca de 0,68% a menos de CO₂; o G2L-CVRP emitiu menos CO₂ que o 2L-CVRP, com uma diferença de 1,98%, contudo ocasionou um aumento nos custos das rotas de 2,03%; o G2L-SDVRP melhorou as rotas e reduziu a quantidade de emissão de CO₂ do 2L-CVRP em 0,74% e 3,65%, respectivamente; o G2L-CVRP apresentou rotas de qualidade inferior ao 2L-SDVRP em cerca de 4,41%, contudo emitiu cerca de 1,23% a menos de CO₂; o G2L-SDVRP reduziu as emissões em 2,94% com um aumento nos custos das rotas de 1,49% em relação ao 2L-SDVRP, e, por fim o G2L-SDVRP diminuiu a quantidade de emissão de CO₂ e melhorou as rotas do G2L-CVRP em 1,69% e 2,69%, respectivamente. Com

base nos resultados da Figura 37a, verifica-se que em relação ao custo das rotas o 2L-SDVRP tem o melhor desempenho, seguido do G2L-SDVRP, 2L-CVRP e G2L-CVRP. Por outro lado, em relação à redução da emissão de CO₂, o G2L-SDVRP apresenta as melhores soluções, seguido do G2L-CVRP, do 2L-SDVRP, e do 2L-CVRP. Para as 33 instâncias terminadas pelo tempo limite (Figura 37b), as conclusões da solução ótima, com uma diferença nos valores de GAPs, são válidas com exceção das relacionadas ao 2L-CVRP com o 2L-SDVRP e ao 2L-CVRP com o G2L-SDVRP.

Figura 37 – Comparação do GAP médio das soluções.



Fonte: Elaborada pela autora.

Nas Tabelas 27 e 28, são detalhadas as soluções de duas instâncias para todos os problemas, que são ilustradas nas Figuras 38 e 39. A escolha das instâncias foi feita considerando as soluções dos problemas com maior diferença nas soluções e com menor número de clientes, visto que para as instâncias com muitos clientes as figuras têm pouca nitidez. Nas tabelas, para cada rota, são apresentados os clientes na ordem em que são visitados, a demanda atendida pelo veículo, o custo da rota (C_{rota}) e a quantidade de emissão de CO₂ (E_{CO_2}). A última linha das tabelas mostra o custo total da solução.

Na Tabela 27, é descrita a solução da instância E016-05m da Classe 4, a qual é composta por 15 clientes, 5 veículos e 40 itens. Os veículos têm uma capacidade em peso e área de 55 e 800, respectivamente. Ao comparar as rotas do 2L-CVRP e 2L-SDVRP, apenas a terceira rota se manteve idêntica em ambos os problemas. Na solução do 2L-SDVRP, os clientes 6 e 12 são atendidos por dois veículos e, assim, permitiu uma melhor redistribuição dos clientes nas rotas de modo a economizar 8,33%, no custo das rotas, em relação ao 2L-CVRP. O 2L-SDVRP reduziu o custo das rotas e a emissão de CO₂ do G2L-CVRP em 10,39% e 0,59%, respectivamente. As soluções do 2L-CVRP e G2L-CVRP são iguais quanto aos clientes nas rotas, contudo a ordem dos clientes nas rotas são diferentes (conforme as rotas 1 e 5 de ambos os problemas). Essa diferença na configuração da ordem dos clientes nas rotas resultou em diferentes custos das rotas e níveis de emissão de CO₂. O 2L-CVRP emitiu 2,66% a mais de CO₂ que o G2L-CVRP, contudo reduziu o custo das rotas em 1,19%. Na solução do G2L-SDVRP, o cliente 6 foi atendido

por dois veículos, reduzindo o custo das rotas e a emissão de CO₂ do 2L-CVRP em 8,33% e 6,83%, respectivamente. O G2L-SDVRP economizou cerca de 4,28% nos custos das rotas e emitiu 9,41% a menos de CO₂ que o G2L-CVRP. As soluções do 2L-SDVRP e G2L-SDVRP têm o mesmo custo para as rotas (valor igual a 308), mas a distribuição e a demanda dos clientes nas rotas 3 e 4 são distintas, o que resultou em diferentes níveis de emissão de CO₂. Logo, o G2L-SDVRP reduziu a emissão de CO₂ do 2L-SDVRP em 3,72%. Uma ilustração das rotas é dada na Figura 38.

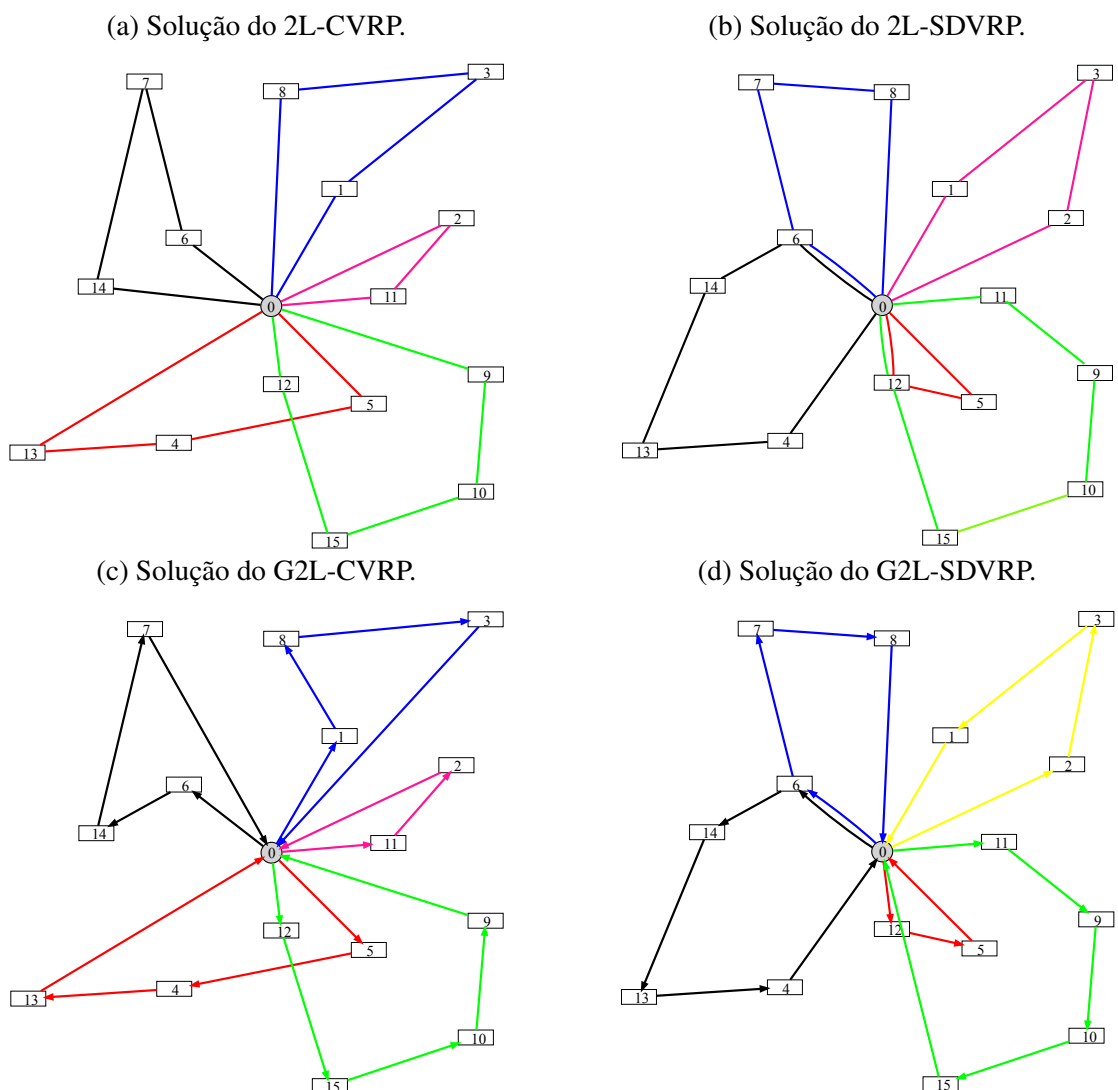
Tabela 27 – Solução da instância E016-05m da Classe 4.

Rotas	2L-CVRP					2L-SDVRP				
	Clientes	Demanda	Área	C _{rota}	E _{CO₂}	Clientes	Demanda	Área	C _{rota}	E _{CO₂}
1	1 3 8	46	518	75	361,00	2 3 1	53	403	68	338,55
2	11 2	49	349	43	202,53	6 14 13 4	55	431	71	371,56
3	12 15 10 9	55	347	74	319,18	11 9 10 15 12	55	577	75	382,91
4	5 4 13	53	427	78	378,75	12 5	40	241	31	133,18
5	6 7 14	55	495	66	342,46	6 7 8	55	475	63	325,88
Total	15	258	2136	336	1603,92	15	258	2127	308	1552,08
Rotas	G2L-CVRP					G2L-SDVRP				
	Clientes	Demanda	Área	C _{rota}	E _{CO₂}	Clientes	Demanda	Área	C _{rota}	E _{CO₂}
1	1 8 3	46	518	77	340,46	2 3 1	53	403	68	338,55
2	11 2	49	340	43	202,53	6 14 13 4	55	431	71	371,56
3	12 15 10 9	55	347	74	319,18	11 9 10 15	45	542	75	317,37
4	5 4 13	53	427	78	378,75	12 5	50	276	31	141,00
5	6 14 7	55	495	68	320,26	6 7 8	55	475	63	325,88
Total	15	258	2127	340	1561,18	15	258	2127	308	1494,36

Fonte: Elaborada pela autora.

Detalhes das soluções dos problemas para a instância E021-06m da Classe 4 são apresentados na Tabela 28. Essa instância possui 20 clientes, 6 veículos e um total de 50 itens. Os veículos têm capacidade em peso de 58 e em área de 800. Note que tanto em respeito ao custo das rotas quanto à emissão de CO₂, a solução do G2L-SDVRP é melhor que a do G2L-CVRP e do 2L-CVRP. O G2L-SDVRP reduziu a emissão de CO₂ em 3,29% e o custo das rotas de 3,75% comparado com a solução do G2L-CVRP. Diferentemente do 2L-SDVRP que atendeu os clientes 2 e 7 com entrega fracionada, o G2L-SDVRP visitou o cliente 4 duas vezes e, assim, reduziu a emissão de CO₂ em 7,17% sem ocasionar aumento nos custos. O 2L-SDVRP conseguiu rotas de menor custo que o 2L-CVRP, porém a quantidade de emissão de CO₂ foi maior. Logo, o 2L-SDVRP economizou cerca de 0,46% nos custos das rotas e emitiu 0,17% a mais de CO₂ que o 2L-CVRP. O G2L-CVRP reduziu a emissão de CO₂ em 3,85% com um aumento no custo das rotas de 3,42% comparado com a solução do 2L-CVRP. Na Figura 39, é ilustrada a solução obtida para esta instância para o 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP.

Figura 38 – Ilustração da solução da instância E016-05m da Classe 4.



Fonte: Elaborada pela autora.

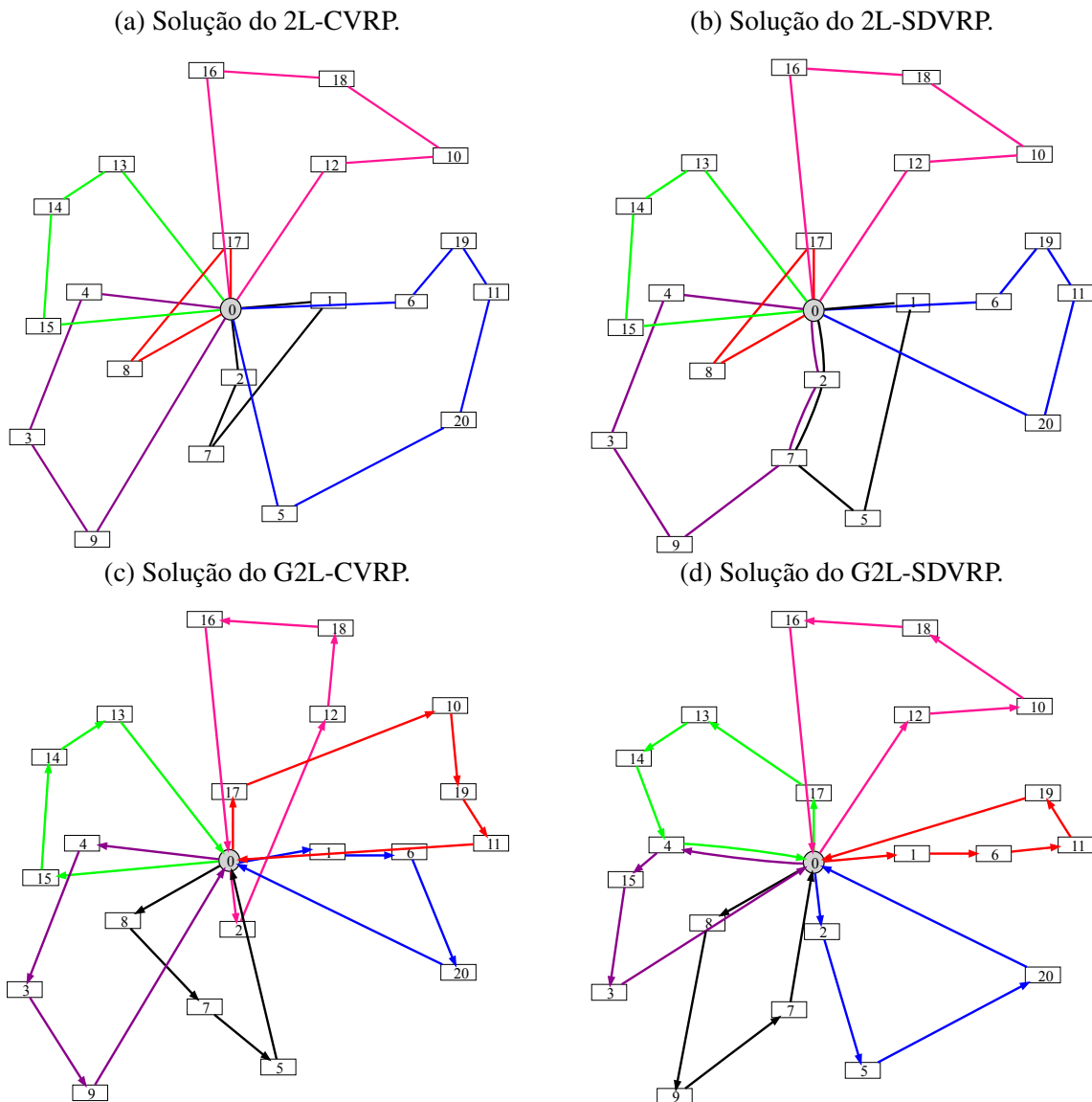
Tabela 28 – Solução da instância E021-06m da Classe 4.

Rotas	2L-CVRP					2L-SDVRP				
	Cientes	Demanda	Área	C _{rota}	ECO ₂	Cientes	Demanda	Área	C _{rota}	ECO ₂
1	2 7 1	51	580	52	236,63	2 7 5 1	56	545	65	316,77
2	6 19 11 20 5	58	641	101	512,58	6 19 11 20	48	550	83	392,74
3	8 17	56	277	41	209,45	8 17	56	277	41	209,45
4	4 3 9	53	553	81	371,50	4 3 9 7 2	58	679	84	414,82
5	12 10 18 16	57	535	95	471,03	12 10 18 16	57	535	95	471,03
6	15 14 13	54	460	68	345,25	15 14 13	54	460	68	345,25
Total	20	329	3046	438	2146,44	20	329	3046	436	2150,06

Rotas	G2L-CVRP					G2L-SDVRP				
	Cientes	Demanda	Área	C _{rota}	ECO ₂	Cientes	Demanda	Área	C _{rota}	ECO ₂
1	1 6 20	53	266	67	297,20	2 5 20	58	417	78	338,20
2	17 10 19 11	57	597	85	398,21	1 6 11 19	48	539	68	280,13
3	8 7 5	54	464	63	266,68	8 9 7	53	581	68	278,74
4	4 3 9	53	553	81	371,50	4 15 3	58	289	66	330,50
5	2 12 18 16	58	706	89	384,95	12 10 18 16	57	535	95	471,03
6	15 14 13	54	460	68	345,25	17 13 14 4	55	685	61	297,29
Total	20	329	3046	453	2063,79	20	329	3046	436	1995,89

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 39 – Ilustração da solução da instância E021-06m da Classe 4.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.4.4 Resultados para o Novo Conjunto de Instâncias

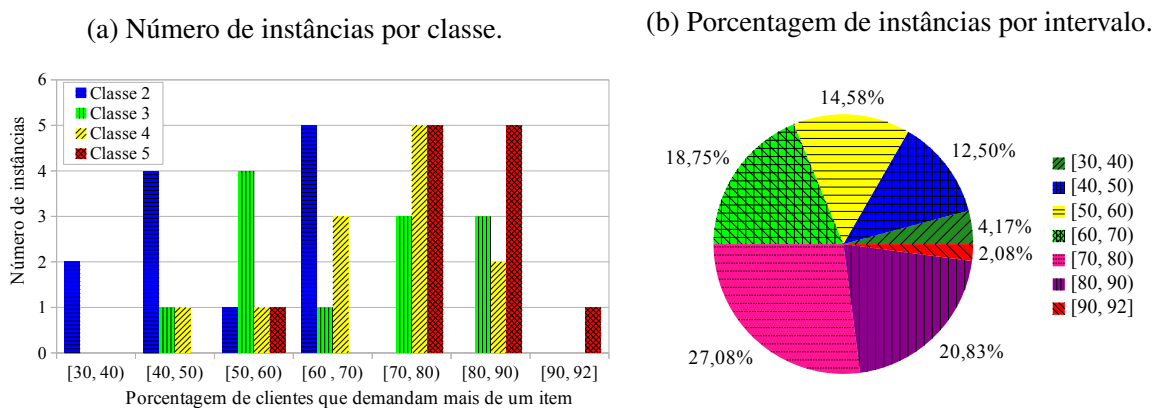
Nas instâncias da literatura do 2L-CVRP, os clientes podem demandar um único item e, assim, é impossível realizar entrega fracionada. A Figura 40 apresenta o percentual de clientes com mais de um item nas instâncias do 2L-CVRP.

Na Figura 40a, é ilustrado o número de instâncias para cada classe com o percentual de clientes com mais de um item. Pode-se observar que para a Classe 2, metade das instâncias (isto é, 6 instâncias de um total de 12) possuem menos de 50% dos clientes com mais de um item e outra metade possui no máximo 70% dos clientes com mais de um item. Na Classe 3, todas as instâncias possuem no mínimo 40% e máximo 90% dos clientes com dois ou mais itens. Na Classe 4, para mais da metade das instâncias, o número de clientes com dois ou mais itens é de

cerca de 70% a 90%. A Classe 5 tem o maior número de instâncias com clientes com mais de um item, sendo que todas as instâncias possuem no mínimo 50% dos clientes demandando dois ou mais itens.

Na Figura 40b, é apresentada a porcentagem total de instâncias por intervalo percentual de clientes demandando mais de um item. Em geral, cerca de 50% das instâncias possuem acima de 70% dos clientes com mais de um item e 16% das instâncias tem menos de 50% dos clientes demandando dois ou mais itens. A maioria das instâncias (isto é, 27,08% das instâncias) possuem entre 70% a 80% dos clientes com dois ou mais itens.

Figura 40 – Instâncias da literatura do 2L-CVRP com clientes com mais de um item.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para contornar a situação apresentada na Figura 40, as instâncias da Classe 6 foram geradas, nas quais o número de itens por cliente é no mínimo dois e, assim, existe a possibilidade de atender todos os clientes com entrega fracionada. Os resultados obtidos para as instâncias da Classe 6 estão sumarizados nas Tabelas 29 e 30. Os resultados completos podem ser vistos nas Tabelas 49 a 54 do Apêndice B. Vale ressaltar que assim como nas instâncias da literatura do 2L-CVRP, uma solução de partida foi fornecida ao método exato para as instâncias da Classe 6.

Na Tabela 29, os resultados das Classes 5 e 6 são comparados. Para cada problema, as seguintes informações são apresentadas: o número de instâncias com solução ótima (OPT); o número de instâncias que atingiram o limite de tempo (TL); o tempo computacional médio em segundos; o número de veículos (VH); o número de clientes com entrega fracionada (CS); a diferença relativa média entre o limitante inferior e o limitante superior retornado pelo método exato (GAP_L); e, por fim, o número de cortes associados aos procedimentos de separação de roteamento ($Corte_R$) e empacotamento ($Corte_E$).

Os resultados mostram que, para o 2L-CVRP e o G2L-CVRP, o número de soluções ótimas obtidas na Classe 6 é maior que na Classe 5. Contudo, para o 2L-SDVRP e G2L-SDVRP acontece o oposto, isto é, o método exato provou a otimalidade para mais instâncias da Classe 5 que da Classe 6. O tempo computacional gasto para resolver as instâncias da Classe 6 é inferior ao da Classe 5, com exceção dos problemas com entrega fracionada. As soluções das instâncias

da Classe 6 utilizaram mais veículos em comparação à Classe 5, com exceção do 2L-SDVRP. Vale lembrar que as instâncias da Classe 5 e 6 possuem o mesmo número de veículos disponíveis no depósito central. No G2L-SDVRP, o número de clientes atendidos com entrega fracionada na Classe 6 é superior ao da Classe 5. O GAP_{LI} indica que se pode melhorar as soluções da Classe 6 mais que da Classe 5 para os problemas com entrega fracionada.

Tabela 29 – Número de soluções ótimas, tempo de execução, entregas fracionadas e cortes para as instâncias das Classes 5 e 6.

Problema	Classe 5								Classe 6							
	OPT	TL	Tempo (s)	VH	CS	GAP_{LI}	$Corte_R$	$Corte_E$	OPT	TL	Tempo (s)	VH	CS	GAP_{LI}	$Corte_R$	$Corte_E$
2L-CVRP	6	6	1148,71	64	-	0,65	608473	75	10	2	540,33	70	-	0,32	603304	19
2L-SDVRP	9	3	2524,53	70	13	3,00	17204	79	2	10	2743,00	67	13	15,12	18592	25
G2L-CVRP	8	4	510,06	68	-	0,00	1236731	31	11	1	394,02	71	-	0,30	1401011	1
G2L-SDVRP	5	7	2381,68	68	15	5,49	0	41	4	8	2487,44	70	22	5,29	0	15

Fonte: Elaborada pela autora.

A Tabela 30 mostra uma comparação das soluções do G2L-SDVRP com os outros problemas (2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-CVRP). Para cada par de problemas é apresentado o número de instâncias em que as soluções do G2L-SDVRP são melhores, iguais e piores que as do 2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-CVRP, além de apresentar o GAP em porcentagem. No que diz respeito ao custo das rotas, em ambas as classes, o G2L-SDVRP tem rotas piores que o 2L-CVRP e o 2L-SDVRP. Contudo, o custo das rotas da Classe 6 é inferior ao da Classe 5. Em relação à emissão de CO₂, em ambas as classes, o G2L-SDVRP emite menos CO₂ que os demais problemas. O ganho obtido na Classe 6 pelo G2L-SDVRP comparado ao 2L-SDVRP é menor que o da Classe 5. Por outro lado, ao comparar o G2L-SDVRP e o G2L-CVRP, a Classe 6 retorna um ganho de 0,87% comparado com a Classe 5.

Tabela 30 – Comparação das soluções do G2L-SDVRP com os outros problemas para as Classe 5 e 6.

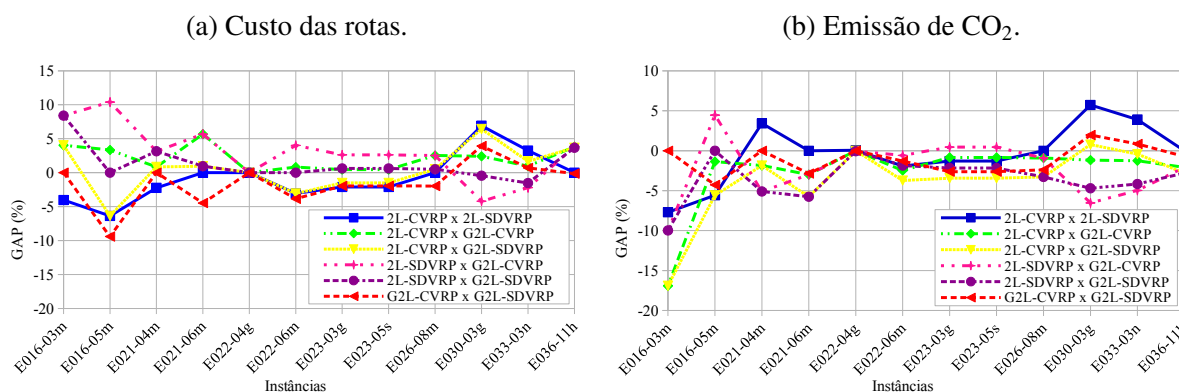
Problemas	Custo das rotas							
	Classe 5				Classe 6			
	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)
2L-CVRP x G2L-SDVRP	3	1	8	1,90	4	1	7	0,47
2L-SDVRP x G2L-SDVRP	4	1	7	1,18	2	3	7	1,33
G2L-CVRP X G2L-SDVRP	6	5	1	-0,86	7	3	2	-1,59
Problemas	Emissão de CO ₂							
	Classe 5				Classe 6			
	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP (%)
2L-CVRP x G2L-SDVRP	10	1	1	-3,59	10	1	1	-3,87
2L-SDVRP x G2L-SDVRP	11	1	0	-3,99	11	1	0	-3,50
G2L-CVRP X G2L-SDVRP	6	5	1	-0,29	7	3	2	-1,16

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 41, para cada instância da Classe 6, é apresentada uma comparação dos GAPs para cada par de problemas. Ao analisar o custo das rotas, a maior diferença entre as soluções ocorreu para a instância E016-05m, sendo que as soluções dos problemas com entrega fracionada

são iguais. Na instância E016-05m, os problemas com entrega fracionada apresentaram os melhores resultados em que o GAP entre o 2L-SDVRP e o 2L-CVRP é de 6,38%, e o G2L-SDVRP e o G2L-CVRP é de 9,41%. No que diz respeito à emissão de CO₂, as soluções mais distantes ocorrem para a instância E016-03m, em que o G2L-SDVRP conseguiu melhorar a solução do 2L-CVRP em 16,91%. As soluções obtidas pelos problemas para as últimas instâncias (isto é, as instâncias a partir da E030-03g) mostram que os problemas com entrega fracionada quase não tiveram ganho ou até mesmo tiveram soluções piores que os problemas sem considerar entrega fracionada. Contudo, essas instâncias não foram resolvidas na otimalidade e apresentam um grande espaço de busca para tentar melhorar as soluções. Na instância E030-03g, por exemplo, o GAP_{LI} do 2L-SDVRP e do G2L-SDVRP é de 61,02% e 22,27%, respectivamente.

Figura 41 – GAP das soluções das instâncias da Classe 6.



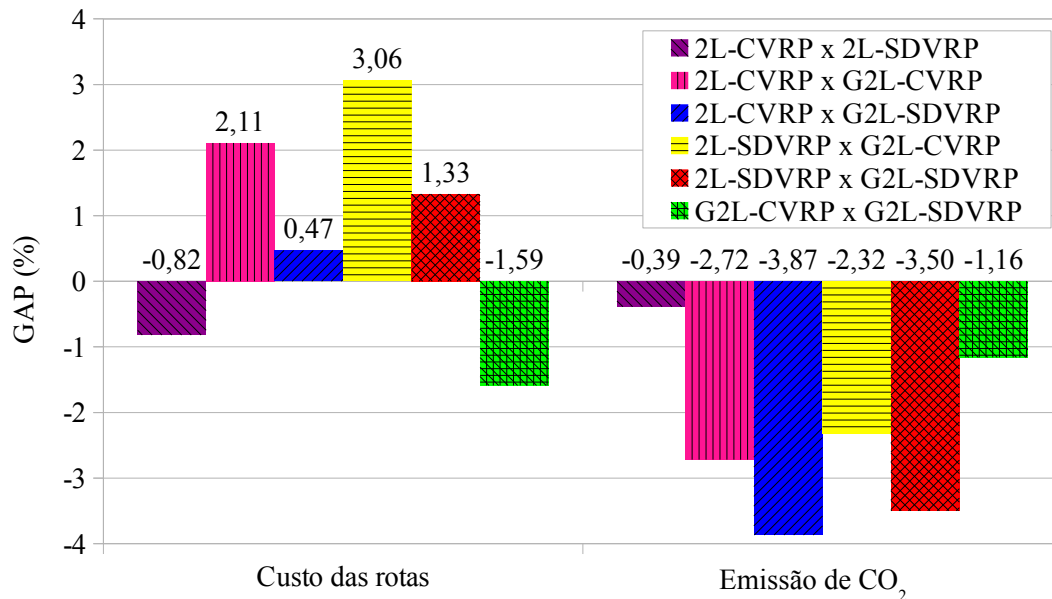
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 42, é apresentada uma comparação entre os GAPs médios do 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e o G2L-SDVRP. Em resumo, o 2L-CVRP obteve rotas com custos piores que o 2L-SDVRP em 0,82% e ainda gerou 0,39% a mais de emissão de CO₂. O G2L-CVRP reduziu a emissão de CO₂ do 2L-CVRP em 2,72% com um aumento no custo das rotas de 2,11%. O G2L-SDVRP emitiu 3,87% a menos de CO₂, contudo aumentou o custo das rotas em 0,47% comparado ao 2L-SDVRP. O G2L-SDVRP apresentou soluções melhores que o G2L-CVRP tanto em termos do custo das rotas quanto da emissão de CO₂, com diferença percentual de 1,16% e 1,59%.

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo, um método exato do tipo *branch-and-cut* foi apresentado para resolver o 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRPP. O método desenvolvido é composto por procedimentos de separação para detectar as restrições violadas devido ao empacotamento, subciclos e conectividade, e inseri-las conforme necessário. Na checagem da viabilidade do empacotamento, algumas heurísticas, limitantes inferiores e um modelo de programação por restrições são considerados.

Figura 42 – Comparação do GAP médio das soluções da Classe 6.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para o modelo do 2L-CVRP apresentado na literatura, o método exato proposto é eficiente, conseguindo melhorar algumas soluções obtidas por outros métodos exatos apresentadas anteriormente para o 2L-CVRP em cerca de 0,17% e 0,05%, em média. O método exato proposto provou a otimalidade para 55 instâncias, sendo suas soluções iguais as da literatura. Logo, para o conjunto de instâncias considerado, apenas para 5 de 60 instâncias havia espaço para melhoria das soluções, sendo que o método proposto obteve soluções melhores que a literatura em todas estas instâncias, contudo não foi possível provar a otimalidade.

Para analisar quais ganhos são obtidos em relação ao custo das rotas e à emissão de CO₂, os resultados obtidos pelo método exato para o 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP foram comparados uns com os outros. Logo, as seguintes comparações foram realizadas entre os problemas: 2L-CVRP × 2L-SDVRP; 2L-CVRP × G2L-CVRP; 2L-CVRP × G2L-SDVRP; 2L-SDVRP × G2L-CVRP; e, por fim, 2L-SDVRP × G2L-SDVRP.

Nos experimentos realizados, o método exato conseguiu obter a solução ótima para 29, 17, 39 e 20 instâncias do 2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-CVRP e G2L-SDVRP, respectivamente. Os problemas com entrega fracionada tiveram o menor número de soluções ótimas, logo o tempo médio de resolução destes problemas (2L-SDVRP e G2L-SDVRP) foi superior ao 2L-CVRP e G2L-CVRP. Para realizar uma comparação justa entre os problemas, apenas as instâncias em que o método exato conseguiu provar a otimalidade no tempo limite para todos os problemas foram consideradas, totalizando 15 de 48 instâncias. Os resultados mostram que a possibilidade de entrega fracionada leva a uma redução nos custos das rotas, bem como a redução da emissão de CO₂.

Ao comparar as soluções do 2L-CVRP com do 2L-SDVRP, economias significativas podem ser obtidas com a possibilidade de entrega fracionada, sendo que o 2L-SDVRP conseguiu uma melhoria média nos custos das rotas de 2,20% em relação ao 2L-CVRP. O G2L-SDVRP conseguiu obter uma redução de custos nas rotas do 2L-CVRP de 0,74%. As rotas do G2L-SDVRP tiveram qualidade inferior ao 2L-SDVRP em cerca de 1,49%, na média. O G2L-CVRP apresentou os maiores custos para as rotas, apresentado uma diferença média de 2,03% em relação ao 2L-CVRP. No que diz respeito à emissão de CO₂, o G2L-SDVRP gera a menor quantidade, conseguindo melhorar os resultados do 2L-CVRP, 2L-SDVRP e G2L-CVRP em 3,65%, 2,94% e 1,69, respectivamente. O G2L-CVRP também reduziu a emissão de CO₂ do 2L-CVRP e do 2L-SDVRP em cerca de 1,98% e 1,23%. Como esperado, o 2L-CVRP emitiu a maior quantidade de CO₂.

Para a nova classe de instâncias gerada, em que todos os clientes demandam dois ou mais itens, o método exato obteve a solução ótima para o G2L-SDVRP de somente 4 das 12 instâncias. Para o 2L-SDVRP, esta situação é ainda pior, a otimalidade foi provada somente para 2 instâncias. Contudo, para o 2L-CVRP e G2L-CVRP, a solução ótima foi obtida para 10 e 11 instâncias, respectivamente. Apesar do número de soluções ótimas dos problemas de entrega fracionada serem inferiores aos demais problemas, as soluções obtidas para ambos são melhores que dos problemas sem possibilidade de entrega fracionada. As soluções do G2L-SDVRP permitiram uma melhora nos custos das rotas e uma redução nas emissões de CO₂ em 1,59% e 1,16%, respectivamente, comparado ao G2L-CVRP. O 2L-SDVRP melhorou as rotas do 2L-CVRP em 0,82% e, ainda conseguiu reduzir a emissão de CO₂ em 0,39%.

Neste contexto, o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP conseguiram melhorar os resultados do 2L-CVRP e G2L-CVRP, indicando que a entrega fracionada proporciona benefícios na redução do custo das rotas e da emissão de CO₂. O G2L-SDVRP apresentou o melhor desempenho na redução das emissões de CO₂ com um aumento dos custos de 1,31% quando comparado ao 2L-SDVRP. O 2L-SDVRP conseguiu soluções com o custo das rotas mais baratas, contudo gerou um aumento na emissão de CO₂ de 3,36% em relação ao G2L-SDVRP.

Vale ressaltar que o G2L-SDVRP mostrou-se mais difícil de resolver que as demais variantes do problema. No entanto, os ganhos proporcionados por esta variante do problema são significativos, o que indica ser promissor investir em métodos para encontrar melhores soluções para esse problema.

RESOLUÇÃO HEURÍSTICA DO G2L-SDVRP E SEUS SUB-PROBLEMAS

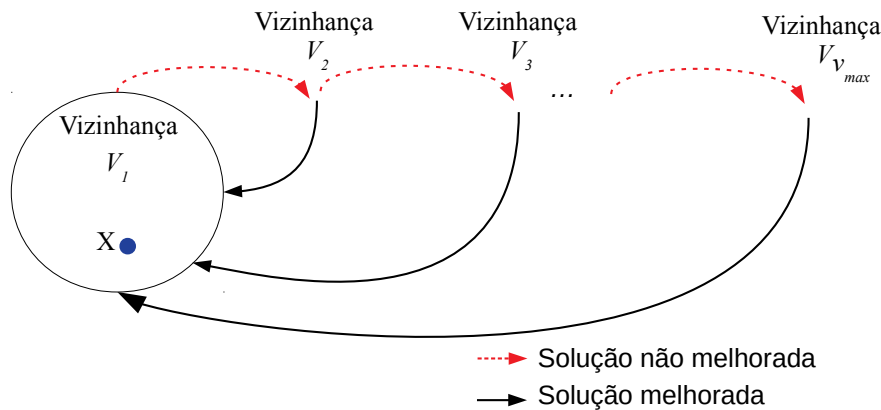
Neste capítulo, é apresentada uma meta-heurística para obter soluções para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional e Entrega Fracionada para a Minimização da Emissão de Dióxido de Carbono (G2L-SDVRP). A meta-heurística é composta por um método baseado em busca em vizinhança variável e pela estratégia de empacotamento *Open Space*. Assim, sempre que uma solução nova do problema de roteamento de veículos é encontrada na busca em vizinhança variável, a viabilidade de empacotamento de seus itens nas rotas é verificada através da aplicação da estratégia *Open Space*.

Mais especificamente, na Seção 5.1, é descrita a estrutura completa da meta-heurística. Nas Seções 5.2 e 5.3, são apresentadas a representação de uma solução na meta-heurística e como uma solução inicial é obtida, respectivamente. As estruturas de vizinhança, a busca local, a formulação do problema de particionamento de conjuntos e o procedimento de diversificação são sumarizadas, respectivamente, nas Seções 5.4 a 5.7. Na Seção 5.8, são discutidos o procedimento de empacotamento e as diferentes estratégias para agilizar a checagem das rotas. Os resultados obtidos com a meta-heurística são resumidos na Seção 5.9. Por fim, as conclusões são apresentadas na Seção 5.10.

5.1 Meta-Heurística de Busca em Vizinhança Variável

A meta-heurística de busca em vizinhança variável (*Variable Neighborhood Search* - VNS) foi proposta por [Mladenović e Hansen \(1997\)](#). Essa meta-heurística consiste em explorar o espaço de soluções através de mudanças sistemáticas de vizinhanças quando um movimento de melhoria não é alcançado. A Figura 43 ilustra o princípio da VNS, sendo que $V = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{v_{max}}\}$ representa o conjunto de vizinhanças utilizadas na busca e $V_v(X)$ para $v = 1, \dots, v_{max}$ corresponde ao conjunto de soluções na v -ésima vizinhança de X .

Figura 43 – Princípio da VNS.



Fonte: Adaptada de Rezgui *et al.* (2019).

Na VNS, as estruturas de vizinhanças são ordenadas de maneira que as primeiras envolvam movimentos mais simples/fáceis que as últimas. Ao considerar essa ordenação nas estruturas de vizinhanças, geralmente, o tempo computacional cresce ao mudar de vizinhança, visto que movimentos mais caros computacionalmente são realizados. A VNS pode incluir, também, um método de busca local que é aplicado sobre a solução gerada pelas estruturas de vizinhança. De acordo com Mladenović e Hansen (1997), a VNS possui os seguintes princípios:

- um ótimo local de uma vizinhança não necessariamente é um ótimo local em relação a outra vizinhança;
- um ótimo global é um ótimo local para todas as estruturas de vizinhança;
- frequentemente, ótimos locais de estruturas de vizinhança com características comuns são relativamente próximos.

Em geral, a VNS é composta por três etapas, que são aplicadas até que um critério de parada seja atingido: (i) obter uma nova solução vizinha por meio da aplicação de estruturas de vizinhança; (ii) aplicar o método de busca local na nova solução; e, por fim, (iii) aceitar a nova solução e mudar de estrutura de vizinhança (HANSEN *et al.*, 2017).

As etapas da meta-heurística VNS proposta, neste trabalho, podem ser resumidos em: gerar uma solução inicial, perturbar solução, aplicar a busca local, realizar uma intensificação na solução e diversificar, conforme ilustrado na Figura 44.

Figura 44 – Etapas da meta-heurística proposta baseada na VNS.



Fonte: Elaborada pela autora.

O pseudocódigo completo da meta-heurística baseada na VNS utilizada neste trabalho é apresentado no Algoritmo 6. O algoritmo possui dois parâmetros de entrada: NN , que representa o número máximo de iterações consecutivas permitidas sem que a melhor solução encontrada melhore; e T_{max} , que corresponde ao tempo limite de execução, em segundos. Na VNS, a solução do problema é representada por uma matriz conforme descrito na Seção 5.2.

Algoritmo 6 – Meta-heurística proposta baseada na VNS .

Entrada: NN , número de iterações consecutivas sem que a melhor solução encontrada melhore;
 T_{max} , tempo limite.

Saída: Melhor solução encontrada pelo método.

- 1: Gerar uma **Solução Inicial** X ;
- 2: Adicionar as rotas de X ao *pool* de rotas (P_{cover});
- 3: $X'' \leftarrow$ Aplicar a **Busca Local** em X ;
- 4: $X^* \leftarrow X''$; $X \leftarrow X''$;
- 5: $nn \leftarrow 0$; $v_{max} \leftarrow 4$;
- 6: $OV \leftarrow \{1, \dots, v_{max}\}$;
- 7: Embaralhar a ordem das estruturas de vizinhança OV ;
- 8: **enquanto** $nn < NN$ **E** $tm < T_{max}$ **faça**
- 9: $nn \leftarrow nn + 1$;
- 10: **para** $k \leftarrow 1$ até K_{max} **faça**
- 11: $v \leftarrow 1$;
- 12: **enquanto** $v \leq v_{max}$ **faça**
- 13: Gerar aleatoriamente uma solução X' na vizinhança $V_{OV_v}(X)$;
- 14: $X'' \leftarrow$ Aplicar a **Busca Local** em X' ;
- 15: **se** X'' é melhor do que X **então**
- 16: $X \leftarrow X''$;
- 17: Embaralhar a ordem das estruturas de vizinhança OV ;
- 18: $v \leftarrow 0$;
- 19: $v \leftarrow v + 1$;
- 20: **se** X é melhor que X^* **então** $X^* \leftarrow X$; $nn \leftarrow 0$;
- 21: $X \leftarrow$ Resolver o problema de **Particionamento de Conjunto** em X^* ;
- 22: **se** X é melhor do que X^* **então** $X^* \leftarrow X$; $nn \leftarrow 0$;
- 23: **senão** $X \leftarrow$ Aplicar o procedimento de **Diversificação** em X^* ;
- 24: **retorna** X^* ;

O Algoritmo 6 retorna a melhor solução obtida durante a otimização. A melhor solução é salva na matriz X^* . Vale ressaltar que, apesar do pseudocódigo do Algoritmo 6 não apresentar implicitamente a chamada do método de empacotamento, sempre que uma nova rota é obtida o procedimento de empacotamento é aplicado para checar sua viabilidade. Se a rota for infactível, a mesma é descartada, visto que apenas soluções factíveis são aceitas.

No início do algoritmo, gera-se uma solução inicial X através do procedimento apresentado na Seção 5.3. A seguir, as rotas da solução inicial são armazenadas no *pool* P_{cover} . Na linha 3, a solução X é submetida ao procedimento de busca local descrito na Seção 5.5. Na linha 4, as soluções X^* e X são atualizadas. Na linha 5, inicializa-se o parâmetro nn que é utilizado para contar o número de iterações consecutivas sem melhoria e v_{max} que corresponde ao número de

estruturas de vizinhança. Nas linhas 6 e 7, o vetor OV com a ordem de aplicação das estruturas de vizinhança é montado e, em seguida, o mesmo é embaralhado.

A cada iteração realizada no laço das linhas 10 a 19, uma nova solução X' é obtida a partir da aplicação da estrutura de vizinhança V_v em X conforme um dos operadores descritos na Seção 5.4. Posteriormente, busca-se melhorar a solução X' por meio do procedimento de busca local. Se a solução X'' retornada pela busca local tiver um custo menor que a solução corrente X , a solução X é atualizada, o vetor OV é embaralhado e o processo de aplicação dos operadores reinicia. O laço das linhas 10 a 19 chega ao fim quando K_{max} iterações são executadas. Vale lembrar que K_{max} representa o número máximo de veículos disponíveis no depósito central.

Na linha 20, é verificado se o valor da solução X é menor que o de X^* e, se for verdadeiro, X^* é atualizada e o contador de iterações nn é reinicializado em zero. Em seguida, o problema de particionamento de conjuntos é resolvido conforme descrito na Seção 5.6 e, se o custo da solução X obtida através do modelo for menor que o de X^* , então X^* é atualizada. Caso contrário, aplica-se o procedimento de diversificação apresentado na Seção 5.7. O algoritmo termina quando o tempo limite T_{max} é atingido ou quando a melhor solução X^* não é melhorada após NN iterações consecutivas. Finalmente, a melhor solução obtida é retornada na linha 24.

5.2 Representação da Solução

A solução do G2L-SDVRP é representada na forma de um vetor. Como foi assumido que cada rota é realizada por um único veículo, então, para cada rota da solução, existe um vetor contendo a sequência em que os clientes atendidos por aquele veículo são visitados. A solução possui K_{max} vetores (isto é, K_{max} rotas). Cada posição do vetor possui um cliente que é identificado conforme seu número de nó ($1, \dots, n$). Além disso, sabe-se que cada rota inicia e finaliza no depósito, logo essa informação não foi adicionada ao vetor.

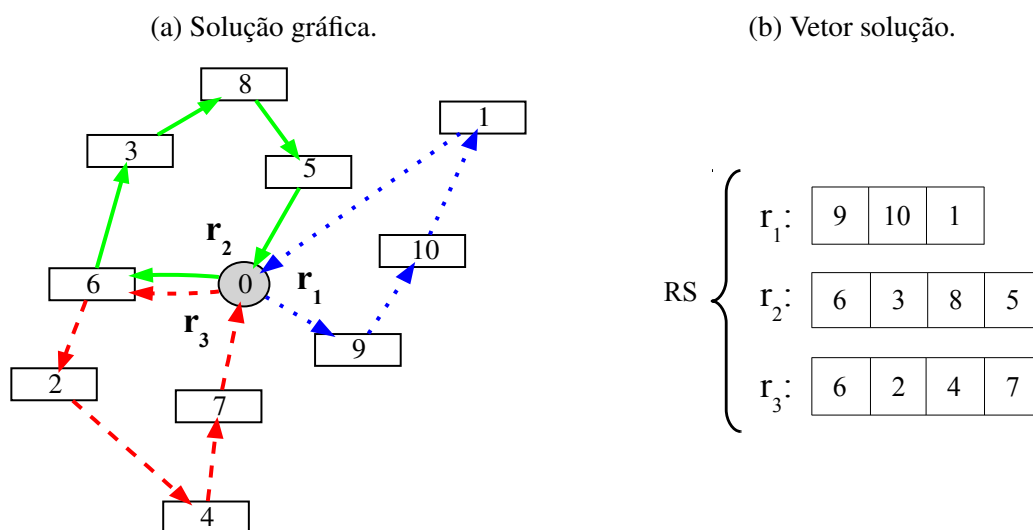
Na Figura 45, é ilustrada uma solução gráfica do G2L-SDVRP (45a) e seus respectivos vetores soluções (45b). O exemplo é composto pelo depósito central (nó 0) e por 10 clientes (nós de 1 a 10). No depósito, há 3 veículos disponíveis para visitar todos os clientes (isto é, K_{max} é igual a 3).

Na Figura 45b, cada vetor r_k , para $k = 1, 2, 3$, apresenta a ordem que os clientes são visitados pelos veículos. A Figura 45a traz uma ilustração das rotas da solução RS , em que a rota r_1 é representada pela linha pontilhada, a r_2 pela linha contínua e a r_3 pela linha tracejada. A seta entre os nós indica a ordem/trajeto de visita aos clientes.

No exemplo da Figura 45, o cliente 6 é atendido por duas rotas distintas (r_2 e r_3). Logo, para saber quais itens do cliente 6 estão em cada rota, um vetor, é criado. A variável ID_{RS} guarda as informações sobre os itens de todos os clientes nas rotas. Cada linha de ID_{RS} é um vetor que está associado à um cliente e seus respectivos itens. Cada posição de um vetor possui o número

da rota que atenderá aquele item do cliente. Seja o exemplo anterior com 10 clientes, em que os cinco primeiros clientes (1 a 5) demandam dois itens cada e os cinco últimos clientes (6 a 10) requerem três itens cada. As informações de entrega dos itens da solução RS é dada na Figura 46. Na figura, na linha com o cliente 6, o primeiro e o último item (1 e 3) são entregues pelo veículo que executar a rota 2 e o item 2 é transportado pelo veículo da rota 3.

Figura 45 – Representação da solução da meta-heurística para o G2L-SDVRP.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 46 – Representação da solução dos itens dos clientes nas rotas.

ID _{RS}	Item		
	Item 1	Item 2	Item 3
Cliente 1	1	1	
Cliente 2	3	3	
Cliente 3	2	2	
Cliente 4	3	3	
Cliente 5	2	2	
Cliente 6	2	3	2
Cliente 7	3	3	3
Cliente 8	2	2	2
Cliente 9	1	1	1
Cliente 10	1	1	1

Fonte: Elaborada pela autora.

5.3 Solução Inicial

A solução inicial é gerada por um procedimento de duas fases e segue a proposta de [Wei et al. \(2018\)](#). A primeira fase consiste na aplicação do algoritmo de economias de [Clarke e Wright \(1964\)](#), que foi desenvolvido com o objetivo de resolver o problema de roteamento quando o número de veículos é ilimitado. Contudo, nas instâncias utilizadas neste trabalho, o número de veículos disponíveis é limitado e, assim, para algumas instâncias, não é possível obter uma solução em que o número de rotas seja menor ou igual ao número de veículos disponíveis devido às restrições de capacidade do veículo e de empacotamento. Para contornar essa situação, uma segunda fase é utilizada para reduzir o número de rotas.

Na primeira fase, o algoritmo de economias de [Clarke e Wright \(1964\)](#) é utilizado para gerar as rotas. Este algoritmo é um método construtivo, isto é, a solução é construída de maneira incremental. O princípio deste algoritmo é baseado no conceito de economias, sendo que a cada passo do algoritmo, um conjunto de rotas é substituído por outro com maior economia através da combinação de duas rotas. Vale ressaltar que duas rotas só podem ser conectadas se as restrições do problema forem atendidas, por exemplo, no caso deste trabalho, as restrições de capacidade do veículo, em peso e área, e de empacotamento.

O algoritmo começa pela pior solução possível, em que cada veículo atende somente um cliente, isto é, para cada cliente $i = 1, \dots, n$ uma rota $(0 - i - 0)$ é criada. Em seguida, as economias são calculadas conforme (5.1). As economias são então ordenadas de forma decrescente. A seguir, em cada passo, duas rotas são unidas conforme a maior economia. Para tanto, o arco (i, j) a partir do topo da lista de economias é considerada. Se os clientes i e j podem ser unidos e as restrições do problema são respeitadas, o arco (i, j) é adicionado e os arcos $(i, 0)$ e $(0, j)$ são removidos.

$$S_{i,j} = D_{i,0} + D_{0,j} - D_{i,j}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, \quad (5.1)$$

em que n é o número total de clientes, $D_{i,j}$ é a distância entre os nós i e j , e o número 0 representa o depósito.

O algoritmo de [Clarke e Wright \(1964\)](#) possui duas versões: paralela e sequencial. A versão paralela busca a melhor combinação factível. Logo, todas as uniões viáveis de rotas da lista de economias são testadas e, assim, a maior economia sempre é implementada. Por outro lado, na versão sequencial, é realizada uma extensão da rota, sendo que se busca a primeira união de rotas viável na lista e a rota resultante é expandida (isto é, unida com as rotas restantes) até que nenhuma união para esta rota seja mais viável. Conforme [Cordeau et al. \(2002\)](#), a versão paralela do algoritmo costuma ser mais eficiente que a sequencial. Logo, neste trabalho, a versão paralela é considerada. Além disso, as economias são geradas sem considerar a emissão de CO₂, isto é, somente os custos das rotas são utilizados. Para calcular a emissão de CO₂, é necessário saber o peso transportado entre dois nós/clientes e, assim, sempre que uma nova rota é unida com outra é necessário recalcular as economias, ocasionando um consumo de tempo computacional

extra. Experimentos computacionais preliminares mostraram que, para algumas instâncias, é necessário cerca de 1200 segundos (ou 20 minutos) para obter uma solução inicial.

Após a execução do algoritmo de economias, o número de rotas é checado e, caso seja maior que o número de veículos disponíveis, a segunda fase é aplicada. Na segunda fase, em cada iteração do algoritmo, a rota com menor área de ocupação na base do veículo é removida da solução e seus clientes são guardados em um *pool*. Em seguida, os clientes do *pool* são ordenados de forma decrescente pela área e reinsertidos na solução. Para tanto, o algoritmo de inserção mais barata é utilizado e, assim, cada cliente no *pool* é inserido em alguma posição de uma rota que minimize seu custo e respeite todas as restrições do problema. Devido às restrições de capacidade do veículo em peso e área, e de empacotamento, existem casos em que um cliente não pode ser inserido em nenhuma rota de forma viável. Assim, uma rota é selecionada aleatoriamente e os seus clientes são gradativamente removidos e adicionados no *pool* até que o cliente em questão seja inserido nessa rota. O pseudocódigo deste método é detalhado no Algoritmo 15 apresentado no Apêndice A.3.

5.4 Estruturas de Vizinhaça

Na meta-heurística desenvolvida, as operações na vizinhaça de uma solução ocorrem a partir de cinco estruturas de vizinhaça, representadas pelo conjunto $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$. Os operadores de vizinhaça realizam alterações em uma única ou em uma sequência de posições da solução, isto é, modificam um ou mais clientes de uma mesma rota ou de múltiplas rotas. As estruturas de vizinhaças em V são compostas pelos seguintes movimentos: troca (V_1), inserção (V_2), troca cruzada (V_3), troca de sequências (V_4) e inserção de sequência (V_5). Em geral, nas vizinhaças, todas as escolhas de clientes, posições e rotas, que serão modificadas, são feitas aleatoriamente.

Cada estrutura de vizinhaça pode realizar operações em uma única rota (intra-rota) e em duas rotas distintas (inter-rota). O movimento intra- ou inter-rota é escolhido aleatoriamente, sendo que todas as rotas da solução têm chances iguais de serem escolhidas. Para tanto, em cada operação de vizinhaça, inicialmente, escolhe-se duas rotas. Caso as rotas sejam iguais, o movimento é intra-rota, caso contrário, é inter-rota.

Os movimentos intra-rota buscam somente reduzir a distância/custo de uma rota, explorando a melhor configuração/ordem de visita dos clientes nas rotas. Enquanto os movimentos inter-rota visam minimizar a distância/custo de percorrer uma rota e o número de rotas. Em algumas operações, uma rota pode ser eliminada (isto é, todos os clientes de uma rota podem ser inseridos em outra rota).

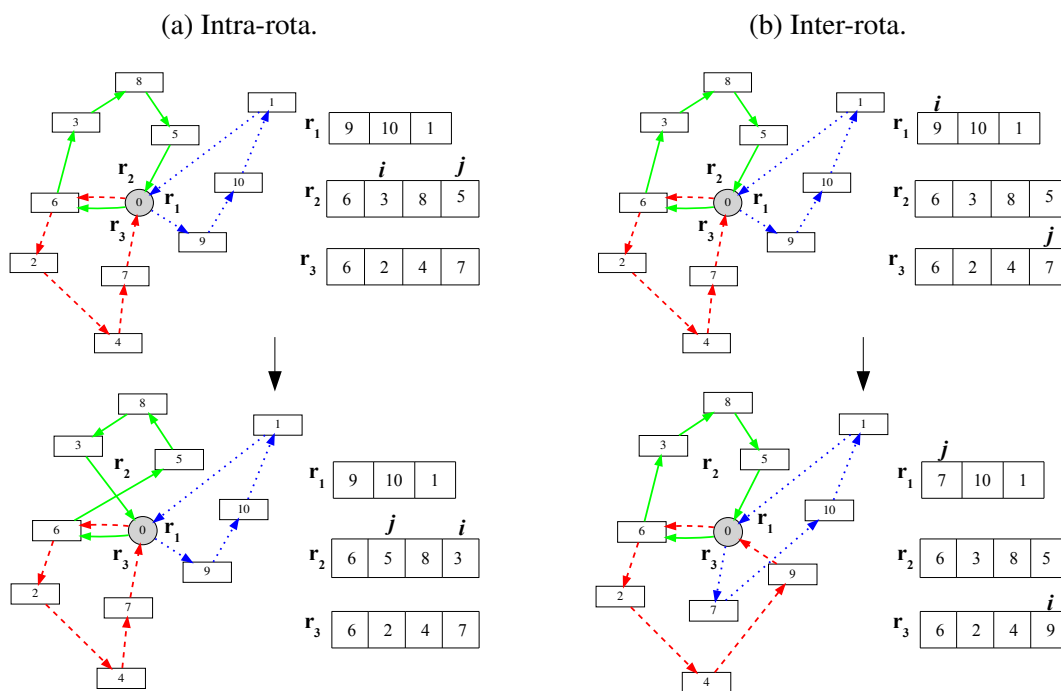
Para cada vizinhaça detalhada a seguir, é ilustrado um exemplo que considera a solução apresentada na Figura 45 como base para aplicação dos operadores. Nessas figuras, a solução apresentada acima da seta é a solução base para realizar a operação de vizinhaça e a ilustrada

abaixo da seta é a solução resultante do movimento. Vale ressaltar que, para todas as vizinhanças, somente as operações que resultam em soluções vizinhas viáveis são efetivamente executadas.

5.4.1 Vizinhança V_1 - Troca

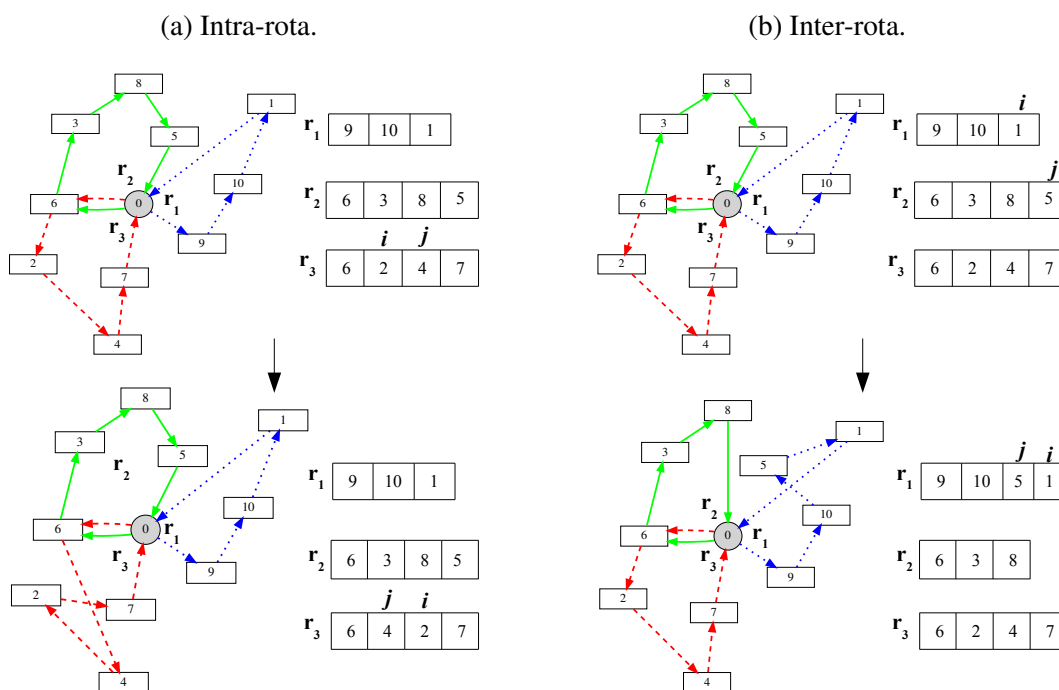
A vizinhança V_1 , exemplificada na Figura 47, realiza a troca dos clientes que estão nas posições i e j . Na Figura 47a, é ilustrado o movimento intra-rota, em que os clientes 3 e 5 da rota r_2 têm suas posições i e j , respectivamente, trocadas. Na Figura 47b, a troca de clientes em duas rotas distintas é realizada e envolve a troca do cliente 9 da rota r_1 com o cliente 7 da rota r_3 .

Figura 47 – Representação da vizinhança V_1 .



5.4.2 Vizinhança V_2 - Inserção

Na vizinhança V_2 , o movimento consiste em remover um cliente de uma posição j e inseri-lo imediatamente antes de outro na posição i . A ilustração deste movimento para operações intra-rota está expressa na Figura 48a e para inter-rota na Figura 48b. No movimento intra-rota, o cliente 4 na posição j foi inserido imediatamente antes do cliente 2 em i . No movimento inter-rota, por sua vez, o cliente 5 na posição j da rota r_2 foi inserido antes do cliente 1 na posição i da rota r_1 .

Figura 48 – Representação da vizinhaça V_2 .

5.4.3 Vizinhaça V_3 - Troca Cruzada

Ilustrada na Figura 49, a vizinhaça V_3 consiste em escolher dois clientes, isto é, duas posições i e j da matriz solução. Se os clientes pertenceram a uma mesma rota, é realizada uma inversão entre os clientes das posições i e j , isto é, a sequência de clientes entre as posições i e j , incluindo eles próprios, passam a ser considerados em ordem inversa. A Figura 49a evidencia este movimento, em que a sequência entre os clientes 6 e 5 na rota r_2 são invertidos, logo a ordem de visita dos clientes na rota r_2 passa de $0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 0$ para $0 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 0$. Por outro lado, na inter-rota, os clientes atendidos depois da posição i são inseridos após o outro cliente selecionado na posição j e os clientes visitados depois de j serão inseridos após i . Este movimento inter-rota consiste em trocar os arcos $(i, i+1)$ e $(j, j+1)$ por $(i, j+1)$ e $(j, i+1)$. Na Figura 49b, é possível perceber que os arcos entre os clientes (9, 10) e (3, 8) são trocados resultando nos arcos (9, 8) e (3, 10).

5.4.4 Vizinhaça V_4 - Troca de Sequências

A Figura 50 apresenta a solução após utilizar a vizinhaça V_4 , a qual consiste em trocar duas sequências de posições. Os tamanhos de ambas as sequências são limitados por 4 posições e as duas sequências podem ter tamanhos diferentes. No caso da intra-rota, exemplificado na Figura 50a, ambas as sequências possuem tamanho 2, sendo seq_i composta pelos clientes 6 e 3, e seq_j por 8 e 5. No movimento inter-rota apresentado na Figura 50b, a primeira sequência (seq_i) possui tamanho 1 e contém apenas o cliente 9 da rota r_1 , enquanto a segunda sequência

(seq_i) tem tamanho 2 e é composta pelos clientes 4 e 7 da rota r_3 .

Figura 49 – Representação da vizinhança V_3 .

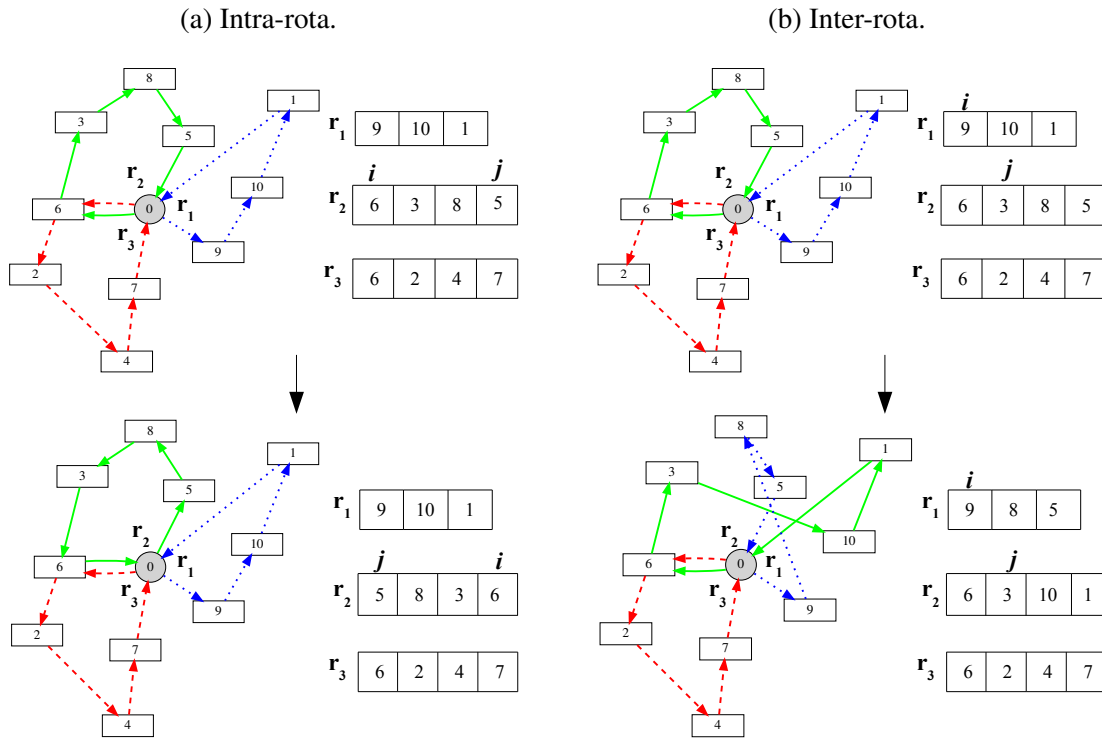
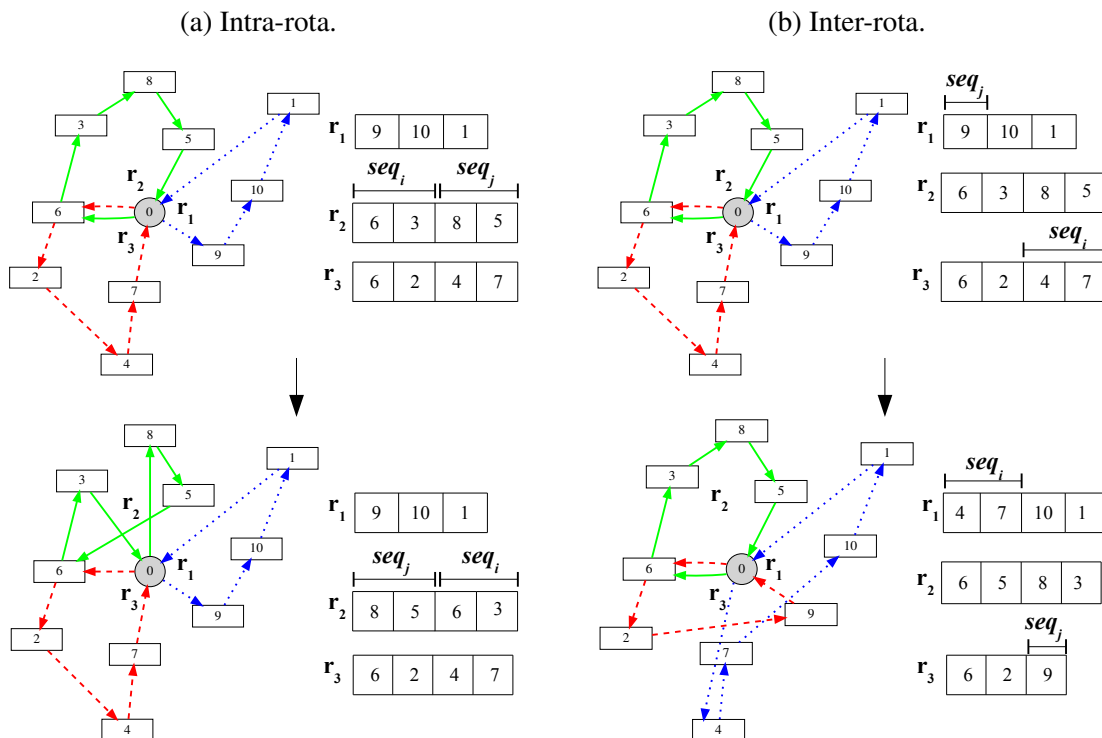


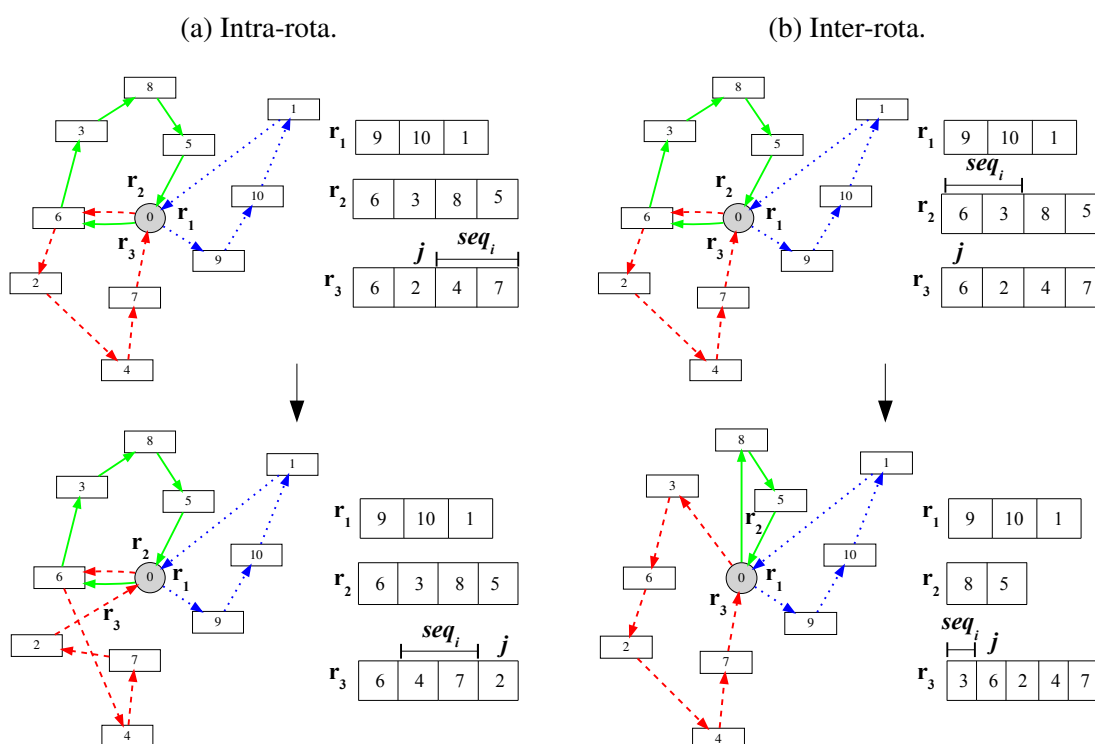
Figura 50 – Representação da vizinhança V_4 .



5.4.5 Vizinhança V_5 - Inserção de Sequência

A última estrutura de vizinhança, V_5 , consiste em inserir uma sequência seq_i de clientes antes de uma dada posição j . Assim como na vizinhança V_4 , na V_5 o tamanho da sequência é limitado por 4 posições. Na intra-rota, a posição onde a sequência de clientes será inserida precisa estar fora do intervalo de posições da sequência (conforme a Figura 51a). No caso da inter-rota, pode-se observar na Figura 51b que a sequência seq_i é composta pelos clientes 6 e 3 da rota r_2 e deve ser inserida na rota r_3 antes da posição j dada pelo cliente 6. A rota resultante deste movimento seria $0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7$, contudo para o problema estudado não é permitido que um único veículo passe em um mesmo cliente mais de uma vez. Logo, duas configurações da rota são avaliadas: $0 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7$ e $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 0$. A rota que gerar o menor custo é considerada e, neste caso, é a rota $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 0$. Caso essa situação aconteça nas demais vizinhanças, esse procedimento de avaliar as duas configurações da rota é aplicado.

Figura 51 – Representação da vizinhança V_5 .



Fonte: Elaborada pela autora.

5.5 Busca Local

A busca local é realizada por um procedimento baseado no método de descida em vizinhança variável (*Variable Neighborhood Descent* - VND). A VND foi proposta por [Mladenović e Hansen \(1997\)](#) e consiste em uma formulação mais simples da VNS que foca na ideia de

intensificação de uma solução. A VND busca explorar o espaço de soluções através de mudanças sistemáticas de estruturas de vizinhança, aceitando somente movimentos que melhorem a solução. Quando uma vizinhança não gera mais melhorias para uma solução, a próxima vizinhança passa a ser explorada até que todas as vizinhanças sejam analisadas. A solução final retornada pela VND é um ótimo local em relação a todas as estruturas de vizinhança e, assim, a chance de alcançar o ótimo global é maior comparado com o uso de somente uma única vizinhança (MLADENOVIĆ; HANSEN, 1997).

Ao explorar cada vizinhança, pode-se encontrar a melhor solução (*best improvement*) ou a primeira solução que melhore a solução corrente (*first improvement*). Neste trabalho, optou-se por utilizar a estratégia de *first improvement* e, assim, a busca em uma vizinhança termina quando o primeiro movimento resultar em uma solução de custo menor do que a solução corrente.

Outro fator importante relacionado às vizinhanças é a ordem de suas aplicações. Neste trabalho, a estratégia de gerar a ordem de exploração das estruturas de vizinhança aleatoriamente é considerada. Silva, Subramanian e Ochi (2015) destacam que uma das vantagens em gerar a ordem de aplicação das vizinhanças aleatoriamente é evitar o uso de um parâmetro extra que posteriormente deverá ser calibrado, visto que o usuário precisa especificar previamente a ordenação das vizinhanças.

O Algoritmo 7 apresenta a estrutura completa da busca local baseada na descida em vizinhança variável aleatória (*Randomized Variable Neighborhood Descent - RVND*) utilizada neste trabalho. O algoritmo possui apenas dois parâmetros de entrada que consiste em uma solução inicial X' e o tempo limite de execução T_{max} .

Algoritmo 7 – Busca local baseada na Descida em Vizinhança Variável Aleatória.

Entrada: X' , solução inicial viável para o problema, T_{max} , tempo limite de execução.

Saída: Melhor solução obtida pelo método em torno de X' .

- 1: $X'' \leftarrow X'$;
 - 2: $p \leftarrow 1$; $p_{max} \leftarrow 10$;
 - 3: $OR \leftarrow \{1, \dots, p_{max}\}$;
 - 4: Embaralhar a ordem das buscas locais em OR ;
 - 5: **enquanto** $p \leq p_{max}$ **E** $time < T_{max}$ **faça**
 - 6: $X'' \leftarrow$ Aplicar a **Busca Local** V_{OR_p} em X ;
 - 7: **se** X'' é melhor que X' **então**
 - 8: $X' \leftarrow X''$;
 - 9: $p \leftarrow 0$;
 - 10: Embaralhar a ordem das buscas locais em OR ;
 - 11: Adicionar as rotas de X' ao *pool* P_{cover} ;
 - 12: $p \leftarrow p + 1$;
 - 13: **retorna** X' ;
-

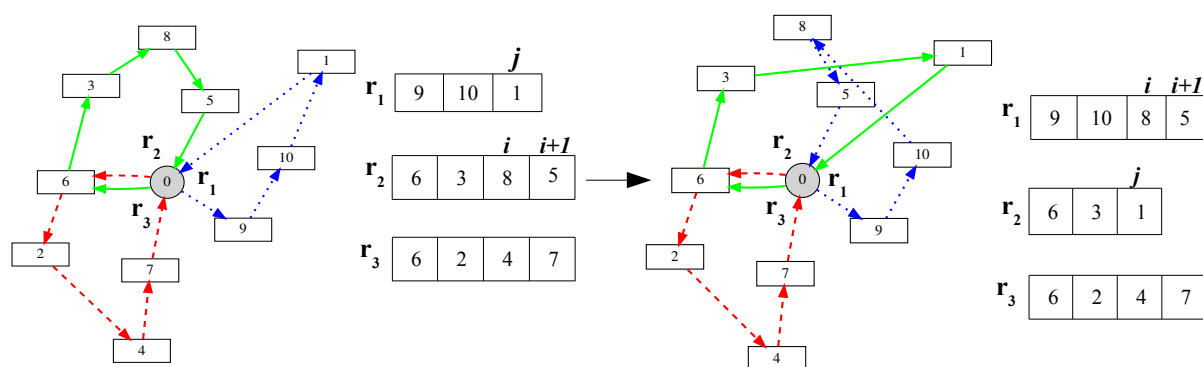
No início do Algoritmo 7, monta-se o vetor OR com a ordem de aplicação das buscas locais e, em seguida, o mesmo é embaralhado, obtendo uma ordem de exploração das buscas

locais. Em cada iteração do laço das linhas 5 a 12, um procedimento de busca local é aplicado sobre X' , obtendo a solução X'' . A solução X'' é somente aceita se o seu custo for menor que da solução corrente X' . Se a solução X'' é aceita, é realizada a atualização da solução X' , o processo de aplicação das buscas locais é reiniciado e uma nova ordenação das buscas locais é gerada. Além disso, a solução X' atualizada é adicionada ao *pool* P_{cover} do problema de particionamento de conjuntos. O Algoritmo 7 chega ao fim quando nenhuma das buscas locais melhorar a solução X' ou quando o tempo limite de execução for atingido.

No Algoritmo 7, são utilizadas dez buscas locais de modo que três são baseadas em movimentos intra-rota e sete em operações inter-rota. Dentre as setes buscas locais com movimentos inter-rota, duas são específicas para realizar operações que resultem em entrega fracionada aos clientes. Além disso, seis das dez buscas locais consistem na aplicação das estruturas de vizinhança V_1 , V_2 e V_3 descritas na Seção 5.4. Os outros operadores da busca local consistem em:

Busca Local Inter-rota de Troca(2, 1): trocar as posições de dois clientes adjacentes com um único cliente de outra rota, isto é, trocar os clientes nas posições adjacentes $i \in X'(s)$ e $i+1 \in X'(s)$ da rota $s \in X'$ com o cliente na posição $j \in X'(r)$ da rota $r \in X'$, tal que $s \neq r$. A Figura 52 apresenta um movimento desta operação, em que os clientes 8 e 5 da rota r_2 são trocados pelo cliente 1 da rota r_1 .

Figura 52 – Representação da operação de troca(2, 1) inter-rota.



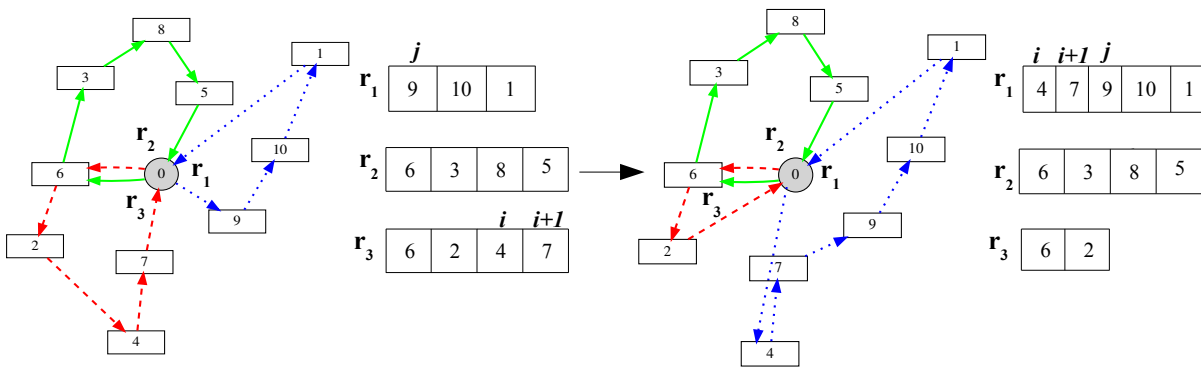
Fonte: Elaborada pela autora.

Busca Local Inter-rota de Inserção(2, 0): dois clientes adjacentes i e $i+1$ são removidos de uma rota e inseridos em outra rota. Ou seja, os clientes nas posições adjacentes $i \in X'(r)$ e $i+1 \in X'(r)$ da rota $r \in X'$ são removidos e inseridos antes da posição $j \in X'(s)$ na rota $s \in X'$ tal que $r \neq s$. Na Figura 53, os clientes 4 e 7 da rota r_3 são inseridos imediatamente antes do cliente 9 da rota r_1 .

Busca Local Inter-rota de Inserção com Entrega Fracionada: esta operação é uma variação da busca local de inserção inter-rota, em que apenas uma parte da demanda de um cliente é removida/inserida em outra rota. Em resumo, um item do cliente h , na posição $j \in X'(r)$ da

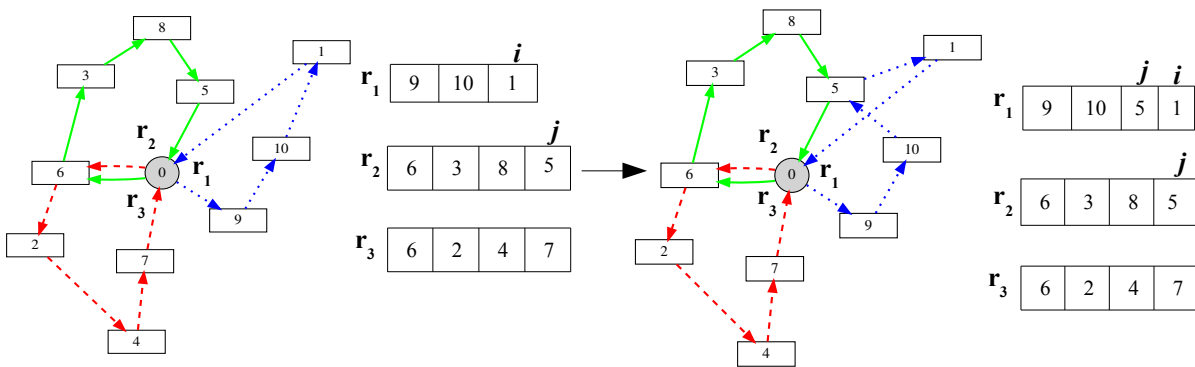
rota $r \in X'$ é removido desta rota e inserido antes da posição $i \in X'(s)$ da rota $s \in X'$. Para cada item do cliente h aplica-se este movimento e, assim, a inserção do primeiro item que gerar um menor custo para a solução é considerada. A Figura 54 traz uma representação desta operação, sendo que o cliente 5 passou a ser atendido com entrega fracionada. Do exemplo apresentado na Figura 46, sabe-se que o cliente 5 requer 2 itens. Ao aplicar o procedimento de inserção apenas o item 2 pode ser transferido para a rota r_1 sem violar a restrição de capacidade do veículo e empacotamento. Logo, a linha da matriz ID_{RS} do cliente 5 passa de $\{2, 2\}$ para $\{2, 1\}$.

Figura 53 – Representação da operação de inserção(2, 0) inter-rota.



Fonte: Elaborada pela autora.

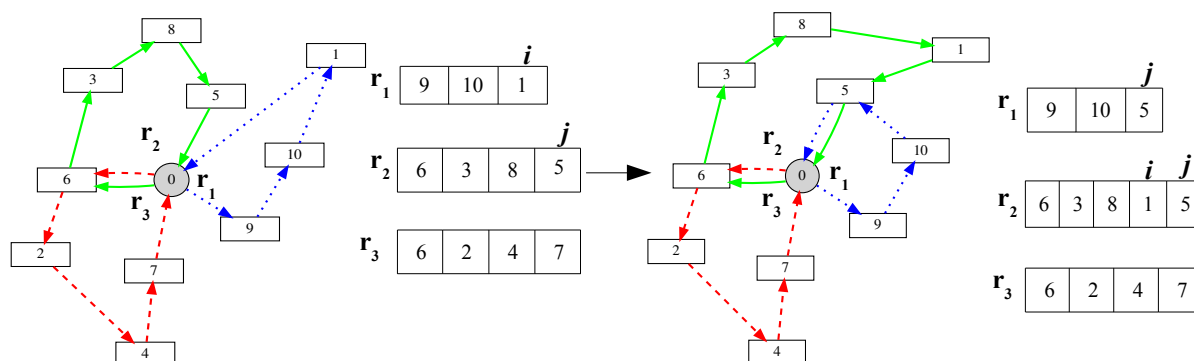
Figura 54 – Representação da operação de inserção com entrega fracionada inter-rota.



Fonte: Elaborada pela autora.

Busca Local Inter-rota de Troca com Entrega Fracionada: o cliente na posição $i \in X'(r)$ da rota $r \in X'$ é inserido antes do cliente na posição $j \in X'(s)$ da rota $s \in X'$ e um dos itens do cliente na posição $j \in X'(s)$ é inserido antes da posição $i \in X'(r)$ na rota $r \in X'$. A ilustração dessa operação é dada na Figura 55. Na figura, o cliente 5 passou a ser atendido pelas rotas r_1 e r_2 , e o cliente 1 foi transferido para rota r_2 .

Figura 55 – Representação da operação de troca com entrega fracionada inter-rota.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em busca de reduzir o tempo computacional gasto com as buscas locais, uma estrutura *hash* é criada para guardar as rotas em que não é possível realizar nenhuma melhoria aplicando as estruturas de vizinhança. Essa estrutura é semelhante à utilizada para guardar rotas já checadas na estratégia de empacotamento, contudo a chave da *string* é uma simplificação da utilizada no empacotamento. Para cada procedimento de busca local é criada uma estrutura *hash*, sendo que na intra-rota apenas as informações de uma rota são guardadas e na inter-rota são armazenados os dados das duas rotas. A chave de cada rota é dada pelos clientes, custo, demanda e área total da rota, sendo que os clientes são separados por “|”, o custo, a demanda e área são separados por “-” e as rotas são separadas por “+”. Por exemplo, seja a solução *RS* com suas rotas $r_1 = \{1, 2, 3\}$ e $r_2 = \{4, 5, 6\}$ em que o custo, a demanda e área total da rota r_1 são iguais 135, 70 e 300, respectivamente, e da rota r_2 é 95, 85 e 350. Suponha que a aplicação da busca local de troca intra-rota na rota r_1 não gere nenhuma melhoria, logo esta rota pode ser adicionada no *hash* e sua chave consiste em uma *string* dada por “1|2|3-135-79-300”. Por outro lado, se r_1 e r_2 foram inviáveis para qualquer movimento da busca local de troca inter-rota, a chave é dada pela *string* “1|2|3-135-79-300+4|5|6-95-85-350”.

Algumas outras estratégias, além da estrutura *hash*, podem ser utilizadas para reduzir o tempo computacional. Com base nas características do problema, sabe-se que as rotas obtidas pela remoção de clientes continuam sendo viáveis quanto ao empacotamento e à capacidade do veículo. Logo, nas buscas locais, as rotas que tiverem um ou mais clientes removidos não precisam passar pela checagem do empacotamento, desde que a ordem dos clientes restantes permaneça a mesma e nenhum outro cliente seja adicionado. Esta estratégia pode ser aplicada nas buscas locais inter-rota de inserção, inserção de uma sequência, inserção(2,0) e inserção com entrega fracionada. Além disso, em todos os movimentos realizados nas buscas locais, o custo da solução é avaliado antes de checar a viabilidade do empacotamento e, somente se houver redução no custo, o procedimento de empacotamento é aplicado. Ao utilizar esta abordagem, evita-se a análise de viabilidade do empacotamento de rotas não promissoras (isto é, com custo pior que a solução corrente) e, assim, o tempo computacional é economizado (WEI *et al.*, 2015).

5.6 Problema de Particionamento de Conjuntos

Uma adaptação do problema de particionamento de conjuntos (*Set Partitioning Problem* - SPP) é utilizada para representar o G2L-SDVRP. A ideia do SPP é particionar um conjunto qualquer em que as partições minimizem algum critério. Neste trabalho, o SPP consiste em formar os subconjuntos/rotas de clientes de modo a minimizar o custo total.

Uma estratégia similar foi utilizada por [Matos, Frota e Ochi \(2018\)](#) na resolução do problema de roteamento de veículos com entrega fracionada. Contudo, os autores utilizaram uma formulação baseada no problema de cobertura de conjuntos. Para tanto, os autores consideraram que um cliente podia ser atendido por um número ilimitado de vezes desde que o custo fosse reduzido. Por outro lado, neste trabalho, o número de vezes que um cliente pode ser visitado é limitado pelo número de itens associados a ele.

Dentro do contexto do problema deste trabalho, sejam: SR , o conjunto de todas as rotas viáveis conhecidas para o G2L-SDVRP, tal que SR contém todas as rotas guardadas no pool P_{cover} ; $SR_i \subseteq SR$, o subconjunto de rotas que contém o cliente $i \in V \setminus \{0\}$; C_k , o custo da rota $k \in SR$; e, τ_{ik} , o número de itens do cliente i atendido pela rota k . A formulação de programação linear inteira para o SPP é dada por (5.3) a (5.7) em que as variáveis de decisão são:

$$\phi_k = \begin{cases} 1, & \text{se a rota } k \in SR \text{ é utilizada,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in SR} C_k \phi_k, \quad (5.3)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in SR_i} \tau_{ik} \phi_k = |R_i|, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (5.4)$$

$$\phi_s = \phi_k, \quad \forall k, s \in SR, \text{ tal que as rotas } k \text{ e } s \text{ tratam clientes com entrega fracionada,} \quad (5.5)$$

$$\sum_{k \in SR} \phi_k \leq K_{max}, \quad (5.6)$$

$$\phi_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in SR. \quad (5.7)$$

A função objetivo (5.3) calcula os custos de todas as rotas utilizadas na solução. As restrições (5.4) garantem que um cliente i seja atendido $|R_i|$ vezes, em que R_i é o número de itens do cliente i . As restrições (5.5) são responsáveis por assegurar que rotas com entrega fracionada sempre estão na mesma solução, isto é, se uma rota de um cliente atendido por entrega fracionada é selecionada, conseqüente, a outra rota que visita este cliente também é escolhida. Essas restrições foram adaptadas de [Matos, Frota e Ochi \(2018\)](#). A restrição (5.6) assegura que no máximo K_{max} rotas sejam utilizadas. O domínio das variáveis é definido em (5.7).

Como o SSP é resolvido várias vezes na meta-heurística, para agilizar a resolução das instâncias, a melhor solução conhecida até o momento é fornecida como solução inicial para o

solver de otimização. Além disso, estratégias de *hashing* são utilizadas para evitar a duplicação de rotas.

O número de rotas do conjunto SR é exponencial no tamanho da instância e , assim, apenas N_r rotas são consideradas. Após o modelo ultrapassar esse limite de rotas, é realizada sua resolução e, a seguir, todas as rotas são deletadas com exceção daquelas pertencentes às soluções incumbentes obtidas durante a execução do método exato. Deste modo, as melhores soluções são mantidas. Com base em testes preliminares, o valor de N_r é definido em 10000.

5.7 Procedimento de Diversificação

Em busca de escapar de ótimos locais, um procedimento de diversificação é utilizado para gerar mudanças significativas na melhor solução e redirecionar a busca para espaços de soluções que não foram suficientemente explorados.

O procedimento utilizado para diversificar a solução consiste basicamente em selecionar alguns clientes aleatoriamente e removê-los da solução, para, a seguir, adicioná-los novamente. Para tanto, um mecanismo de destruição-reconstrução é aplicado e segue a proposta de [Wei et al. \(2015\)](#).

Na etapa de destruição, N_c clientes são escolhidos aleatoriamente e removidos da solução. Tais clientes são colocados em um *pool*. Note que caso um cliente com entrega fracionada seja selecionado, ele é removido de todas as rotas em que é visitado. Terminado o processo de destruição, a etapa de reconstrução é aplicada e consiste basicamente em utilizar a Fase II do método da solução inicial. O número de clientes removidos N_c é igual a $\min\{0,5 \times n, 0,1 \times n + nn\}$, conforme definido por [Wei et al. \(2015\)](#). Note que n é o número total de clientes e nn é o número de iterações consecutivas executadas pela VNS sem que a melhor solução encontrada melhore.

5.8 Procedimento para o Empacotamento

O procedimento para verificar a viabilidade do empacotamento de uma rota é utilizado várias vezes ao longo da meta-heurística VNS, portanto, é preciso que ele seja rápido. Este procedimento é composto por seis estratégias para verificar a viabilidade de um empacotamento, por uma estrutura *hash* para armazenar as rotas já verificadas e por uma estratégia de atualização das dimensões dos itens para agilizar a checagem. As estratégias para verificar a viabilidade das rotas são apresentadas no Algoritmo 8 e dispõem de abordagens com limitantes inferiores, uma heurística e um método exato.

O Algoritmo 8 possui seis parâmetros de entrada com as informações sobre os clientes, os itens, as dimensões da base do veículo e a diferença percentual entre a solução corrente e a solução modificada (ϑ). Para ser mais claro, ϑ é igual a $100 \times ((\text{Solução corrente} -$

Solução modificada)/Solução modificada), em que a solução modificada é dada por alguma alteração na solução corrente por meio da aplicação de um movimento de vizinhança. Vale ressaltar que somente na busca local é permitido o uso do modelo de programação por restrições.

Algoritmo 8 – Procedimento para checagem do empacotamento na VNS.

Entrada: S , conjunto de clientes de uma rota; M , conjunto dos itens dos clientes na rota S com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; σ , ordem em que os itens serão entregues na rota S ; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente; ϑ , diferença percentual de custo entre duas soluções.

Saída: Se existe um empacotamento viável ou inviável na rota S .

```

1:  $str \leftarrow$  Criar uma string da rota  $S$  com itens em  $M$ ;
2:  $st \leftarrow False$ ;
3: se  $S$  está em  $Hash(str)$  então  $st \leftarrow Status$  de  $Hash(str)$ ;
4: senão se  $S$  não está em  $Hash(str)$  então
5:    $M' \leftarrow$  Aplicar a estratégia de Atualização dos itens em  $M$ ;
6:    $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_3$  em  $M'$ ;
7:   se  $st = True$  então
8:      $area_{total} \leftarrow$  Área total dos itens em  $M'$ ;
9:     se  $area_{total} < 0,8A_r$  então
10:      para  $k \leftarrow 1$  até 5 faça
11:        se  $k = 1$  então  $st \leftarrow$  Aplicar a Meta-heurística RLS+OP em  $M'$ ;
12:        senão se  $k = 2$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_4$  em  $M'$ ;
13:        senão se  $k = 3$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_5$  em  $M'$ ;
14:        senão se  $k = 4$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_2$  em  $M'$ ;
15:        senão se  $k = 5$  E  $\vartheta \geq 0,5$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Modelo de CP em  $M'$ ;
16:        se  $(st = True \text{ E } k = 1)$  OU  $(st = False \text{ E } k > 1)$  então Sair do laço;
17:      senão
18:        para  $k \leftarrow 1$  até 5 faça
19:          se  $k = 1$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_4$  em  $M'$ ;
20:          senão se  $k = 2$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_5$  em  $M'$ ;
21:          senão se  $k = 3$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Limitante inferior  $LB_2$  em  $M'$ ;
22:          senão se  $k = 4$  então  $st \leftarrow$  Aplicar a Meta-heurística RLS+OP em  $S'$ ;
23:          senão se  $k = 5$  E  $\vartheta \geq 0,5$  então  $st \leftarrow$  Aplicar o Modelo de CP em  $M'$ ;
24:          se  $(st = True \text{ E } k = 4)$  OU  $(st = False \text{ E } k < 4)$  então Sair do laço;
25:      Adicionar  $str$  no Hash com o status em  $st$ ;
26: retorna  $st$ ;

```

No início do algoritmo, é criada uma *string*, denominada de str , com os clientes da rota S e seus receptivos itens. Em seguida, o parâmetro com o *status* da rota é inicializado em *False*, visto que, se nenhum dos procedimentos provar a factibilidade ou infactibilidade, a rota é considerada como infactível e adicionada na estrutura *hash*. Na linha 3, é verificado se a *string* da rota está no *hash*, em caso afirmativo, seu *status* é retornado. Caso contrário, primeiramente, os itens têm suas dimensões atualizadas pela estratégia descrita na Subseção 5.8.2.

Na linha 6, é aplicado o limitante inferior LB_3 descrito na Subseção 5.8.3 e, se tiver valor

False, a rota é adicionada ao *hash* com *status* de inactível. O próximo passo é calcular a área total dos itens para, então, saber qual ordem de aplicação das estratégias. Se a área total dos itens for menor que 80% da área da base do veículo (linha 9), inicia-se pela meta-heurística ao invés dos limitantes inferiores, visto que existe uma maior chance do empacotamento da rota ser viável. Em cada iteração das linhas 10 a 16, uma estratégia é aplicada e, no momento que alguma prove a factibilidade ou inactibilidade, o laço é finalizado (linha 16). Por outro lado, se a área total dos itens for maior que 80% da área da base, os limitantes inferiores são aplicados primeiro conforme descrito nas linhas 18 a 24. Por fim, a rota é adicionada na estrutura *hash* com seu respectivo *status*. Ao final do algoritmo, é retornado se o empacotamento da rota *S* é viável ou inviável.

5.8.1 Estrutura Hash para Armazenar Rotas

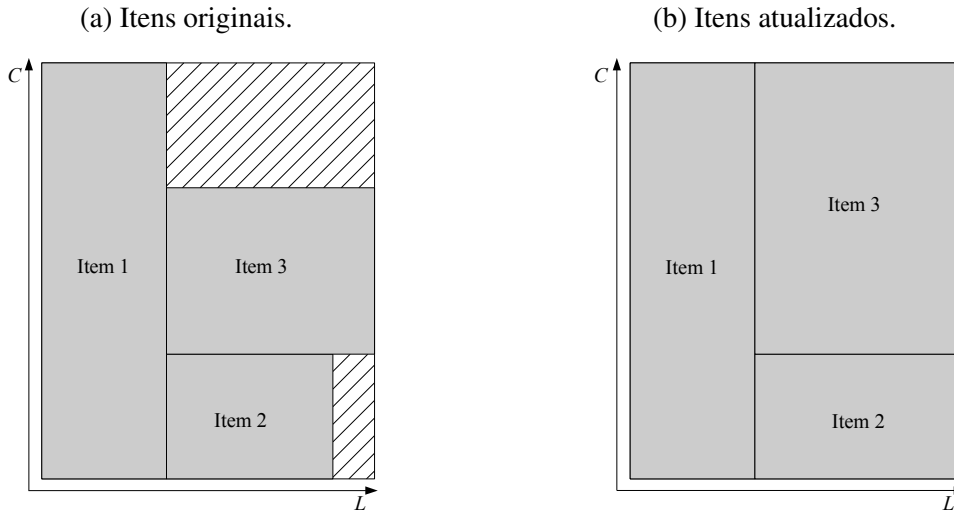
Quando a viabilidade ou inviabilidade do empacotamento de uma rota é conhecida, não é necessário realizar verificações subsequentes. Neste contexto, uma estrutura *hash* é utilizada para armazenar as rotas já verificadas no empacotamento e, assim, reduzir o esforço computacional.

A estrutura *hash* segue a ideia apresentada na Subseção 4.3.1 com uma pequena modificação no valor associado à chave da *string*. No Algoritmo 8, seis estratégias diferentes são empregadas na checagem do empacotamento. Algumas dessas estratégias não consideram a ordem de entrega para calcular a inviabilidade do empacotamento e, assim, se uma rota for inactível implica que qualquer combinação de sequência com estes clientes também é inactível. Assim, na estrutura *hash*, as *string* estão associadas a três valores de *status*: 1, rotas com empacotamento factível (meta-heurística RLS+OP e modelo de programação por restrições); -1, rotas com empacotamento inactível (limitante inferior LB_2 e modelo de programação por restrições); -2, rotas com empacotamento inactível independente da sequência que os clientes são visitados (limitantes inferiores LB_3 , LB_4 e LB_5).

5.8.2 Atualização do Tamanho dos Itens

Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) propuseram um procedimento para aumentar o tamanho dos itens sem que haja perda da otimalidade da solução. Este procedimento busca aumentar as dimensões dos itens, tanto na largura quanto no comprimento, visando uma melhor ocupação da área da base do veículo não utilizada pelos itens originais. A Figura 56 ilustra um exemplo do procedimento de atualização dos itens, sendo que para este exemplo, a base do veículo possui dimensões $(L, C) = (8, 10)$ e há três itens de dimensões: $(l_1, c_1) = (3, 10)$, $(l_2, c_2) = (4, 3)$ e $(l_3, c_3) = (5, 4)$. Na Figura 56a, a região hachurada indica os espaços não utilizados, que permitem aumentar o tamanho dos itens. A Figura 56b mostra que os itens 2 e 3 tiveram os tamanhos aumentados. O item 2 teve sua largura aumentada, enquanto o item 3 teve o comprimento aumentado. Contudo, em vez de aumentar o item 3 no comprimento é possível aumentar o item 2 que passaria a ter as dimensões $(5, 7)$.

Figura 56 – Representação do empacotamento antes e após a atualização dos itens.



Fonte: Elaborada pela autora.

O aumento da largura e do comprimento de cada item $i \in M$ é realizado conforme (5.8) e (5.9), respectivamente. Logo, as novas dimensões do item $i \in M$ na largura é $l_i + (L - l_i^*)$ e no comprimento é $c_i + (C - c_i^*)$.

$$l_i^* = \max \left\{ l = \sum_{k \in M' \setminus \{i\}} \varepsilon_k l_k + l_i \mid l \leq L, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in M' \setminus \{i\} \right\}. \quad (5.8)$$

$$c_i^* = \max \left\{ c = \sum_{k \in M' \setminus \{i\}} \varepsilon_k c_k + c_i \mid c \leq C, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in M' \setminus \{i\} \right\}. \quad (5.9)$$

O problema em (5.8) e (5.9) busca obter a máxima ocupação do restante do recipiente e, assim, sua solução pode ser obtida através da resolução do problema da mochila 0-1 unidimensional pelo algoritmo de programação dinâmica de Martello e Toth (1990). Mais detalhes de como calcular o aumento dos tamanhos dos itens estão disponíveis no Apêndice A.2.

5.8.3 Limitante Inferior LB_3

O limitante inferior LB_3 consiste basicamente em verificar se área total dos itens é respeitada. LB_3 fornece o comprimento mínimo necessário para empacotar todos os itens, conforme (5.10).

$$LB_3 = \left\lceil \frac{\sum_{i \in M} l_i c_i}{L} \right\rceil. \quad (5.10)$$

O limitante inferior LB_3 é obtido rapidamente e, por isso, é o primeiro a ser aplicado para a verificação de factibilidade de um empacotamento.

5.8.4 Limitante Inferior LB_4

O limitante inferior LB_4 segue a proposta do procedimento construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009). O procedimento busca transformar as instâncias do problema, modificando as dimensões dos itens. Se os itens modificados não cabem na base do veículo, então a instância original também não têm empacotamento viável. O Algoritmo 9 apresenta o procedimento construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009).

Algoritmo 9 – Procedimento Construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009).

Entrada: M , conjunto dos itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Se o empacotamento dos itens é inviável.

```

1:  $st \leftarrow True$ ;
2:  $M' \leftarrow M$ ;  $L' \leftarrow L$ ;  $C' \leftarrow C$ ;
3:  $l'_i \leftarrow l_i$ ,  $c'_i \leftarrow c_i$ , para cada  $i \in M$ ;
4: enquanto  $M' \neq \emptyset$  faça
5:    $j \leftarrow$  o item com  $\min_{i \in M'} \{\min\{L' - l'_i, C' - c'_i\}\}$ ;
6:   se  $l'_j > L'$  Ou  $c'_j > C'$  então
7:      $st \leftarrow False$ ;
8:     Sair do laço;
9:   se  $L' - l'_j \leq C' - c'_j$  então
10:     $C' \leftarrow C' - c'_j$ ;
11:    para cada  $k \in M'$  faça
12:      se  $k \neq j$  E  $l'_k \leq L' - l'_j$  então
13:         $c'_k \leftarrow \max\{c'_k - c'_j, 0\}$ ;
14:        se  $c'_k = 0$  então  $M' \leftarrow M' \setminus \{k\}$ ;
15:     $M' \leftarrow M' \setminus \{j\}$ ;
16:   senão se  $L' - l'_j > C' - c'_j$  então
17:     $L' \leftarrow L' - l'_j$ ;
18:    para cada  $k \in M'$  faça
19:      se  $k \neq j$  E  $c'_k \leq C' - c'_j$  então
20:         $l'_k \leftarrow \max\{l'_k - l'_j, 0\}$ ;
21:        se  $l'_k = 0$  então  $M' \leftarrow M' \setminus \{k\}$ ;
22:     $M' \leftarrow M' \setminus \{j\}$ ;
23: retorna  $st$ ;

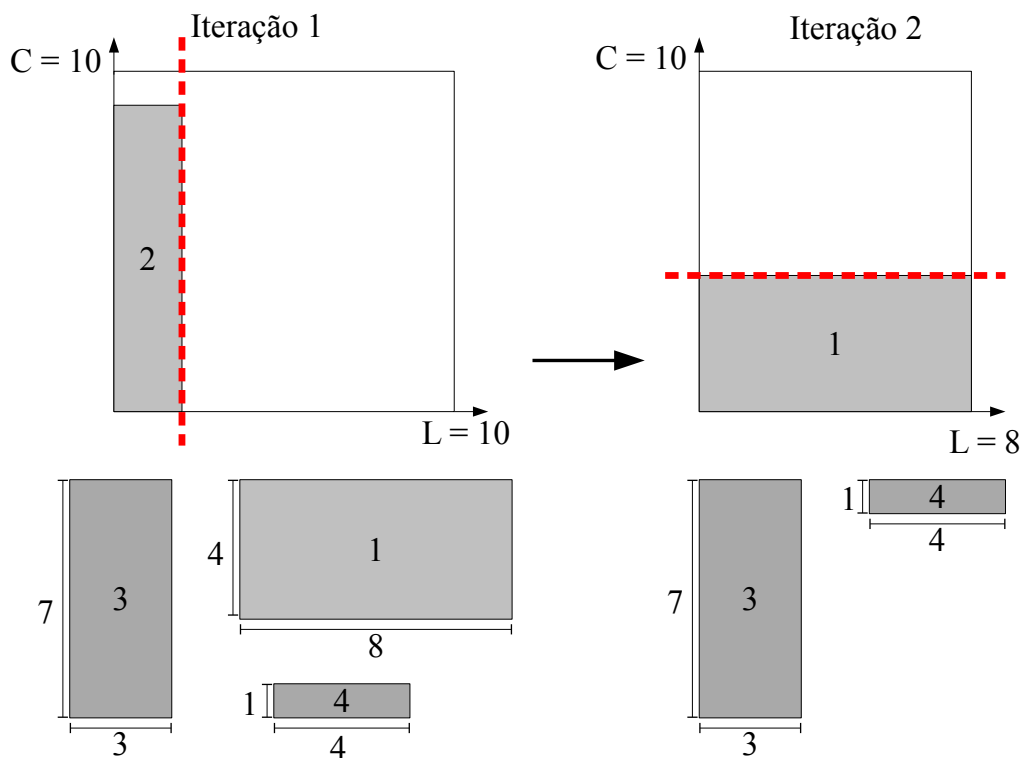
```

No início do algoritmo, são criadas as variáveis auxiliares que guardam as informações das dimensões dos itens e da base do veículo modificadas (linhas 2 e 3). Em seguida, a cada iteração (linhas 4 a 22), o item j de menor dimensão na largura ou comprimento é selecionado para ser empacotado. Se o item j não couber na base do veículo, então não há empacotamento viável. Caso contrário, o empacotamento do item é realizado, sendo que se $L' - l'_j \leq C' - c'_j$, o item j é arranjando na parte inferior da base do veículo e, assim, o comprimento da base e dos itens ainda não empacotados que respeitem a desigualdade $l'_k \leq L' - l'_j$ são atualizados/modificados.

Caso contrário, o item j é alocado no lado esquerdo da base e, assim, a largura da base e a largura dos itens que atendam $c'_k \leq C' - c'_j$ são atualizados.

A Figura 57 ilustra um exemplo do procedimento construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009). Para tanto, considere o exemplo descrito pelos autores, no qual a dimensão da base é $(L, C) = (10, 10)$ e dos itens são $(l_1, c_1) = (8, 4)$, $(l_2, c_2) = (2, 9)$, $(l_3, c_3) = (3, 7)$ e $(l_4, c_4) = (6, 1)$. Na primeira iteração, o item 2 é selecionado para ser empacotado, pois conforme a linha 5, tem-se: $\min\{\min\{2, 6\}, \min\{8, 1\}, \min\{7, 3\}, \min\{4, 9\}\} = 1$. O valor 1 é obtido a partir da dimensão do comprimento do item 2. O item 2 respeita a dimensão da base (linha 6) e, então, é empacotado verticalmente ($10 - 2 > 10 - 9$). Na primeira iteração, a área antes da linha tracejada em vermelho é recortada (isto é, a dimensão do veículo é reduzida) e o item 4 teve seu tamanho modificado. Em outras palavras, após o empacotamento do item 2, a base é atualizada para $(8, 10)$ e, como o item 4 satisfaz a desigualdade $c_4 \leq 10 - c_2$, sua largura (com tamanho igual a 6) é reduzida para 4. Na segunda iteração, o item 1 é empacotado horizontalmente e, assim, a base passa ter dimensão $(8, 6)$ e nenhum dos itens restante tem seus tamanhos modificados. Na terceira iteração, o próximo item a ser empacotado é o 3, contudo seu comprimento excede o da base do veículo e, assim, os itens não podem ser arranjados na base do veículo.

Figura 57 – Exemplo do procedimento construtivo de Alvarez-Valdés, Parreño e Tamarit (2009).



Fonte: Elaborada pela autora.

5.8.5 Limitante Inferior LB_5

O limitante inferior LB_5 é baseado em funções duais viáveis (*Dual Feasible Functions - DFF*) e sua descrição é dada por [Boschetti e Montaletti \(2010\)](#). Os autores referenciaram em seu trabalho esse limitante como L_{dff}^{BM} , que é calculado através do uso de quatro funções duais viáveis. Contudo, diferentemente desses autores, apenas as três primeiras funções duais viáveis foram utilizadas neste trabalho, pois a quarta exige um maior esforço computacional. Tal abordagem também foi utilizada por [Côté, Guastaroba e Speranza \(2017\)](#).

As DFFs têm sido usadas para calcular limitantes para diferentes problemas de empacotamento ([ALVAREZ-VALDÉS; PARREÑO; TAMARIT, 2009](#); [BOSCHETTI; MONTALETTI, 2010](#); [CÔTÉ; GUASTAROBA; SPERANZA, 2017](#)). A ideia de uma DFF é basicamente transformar o vetor $l = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ com a largura dos itens em um vetor $\mathcal{F} = \{f(l_1), f(l_2), \dots, f(l_n)\}$, que contém uma solução dual viável. Neste contexto, se o vetor original l com as larguras dos itens não pode ser empacotado na base do veículo, conseqüente, o vetor modificado pela DFF também não tem empacotamento viável.

Definição 1. A função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é chamada de função dual viável se, para qualquer conjunto finito de números reais não negativos pertencentes ao domínio \mathcal{S} , a seguinte relação é verdadeira:

$$\sum_{\mu \in \mathcal{S}} \mu \leq 1 \Rightarrow \sum_{\mu \in \mathcal{S}} f(\mu) \leq 1.$$

As DFFs usadas neste artigo são descritas a seguir, sendo que (5.11) e (5.12) foram proposta por [Fekete e Schepers \(1997\)](#), [Fekete e Schepers \(1998\)](#), [Fekete e Schepers \(2000\)](#), e (5.13) foi apresentada por [Carlier, Clautiaux e Moukrim \(2007\)](#).

Função Dual Viável 1. Seja $\alpha \in \Omega_1 \subseteq \mathbb{N}$:

$$f_{\alpha}^1(l) = \begin{cases} l, & \text{se } (\alpha + 1)\frac{l}{K} \in \mathbb{Z}, \\ \left\lfloor (\alpha + 1)\frac{l}{L} \right\rfloor \frac{L}{\alpha}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Função Dual Viável 2. Seja $\alpha \in \Omega_2 = [1, L/2], \Omega_2 \subseteq \mathbb{N}$:

$$f_{\alpha}^2(l) = \begin{cases} L, & \text{se } l > L - \alpha, \\ \alpha, & \text{se } \alpha \leq l \leq L - \alpha, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Função Dual Viável 3. Seja $\alpha \in \Omega_3 = [1, L/2], \Omega_3 \subseteq \mathbb{N}$:

$$f_{\alpha}^3(l) = \begin{cases} 2 \left(\left\lfloor \frac{L}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-l}{\alpha} \right\rfloor \right), & \text{se } l > \frac{L}{2}, \\ \left\lfloor \frac{L}{\alpha} \right\rfloor, & \text{se } l = \frac{L}{2}, \\ 2 \left\lfloor \frac{l}{\alpha} \right\rfloor, & \text{se } l < \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Conforme [Boschetti e Montaletti \(2010\)](#), o limitante inferior LB_5 é dado por (5.14), em que $\Omega_1 = \{1, \dots, L\}$ e $\Omega_k = \{l_i : l_i \leq L/2, i \in M\} \cup \{L - l_i : l_i > L/2, i \in M\}$ para $k = 2, 3$. LB_5 fornece o comprimento mínimo necessário para empacotar todos os itens. Logo, se $LB_5 > C$ o empacotamento dos itens em M é inviável.

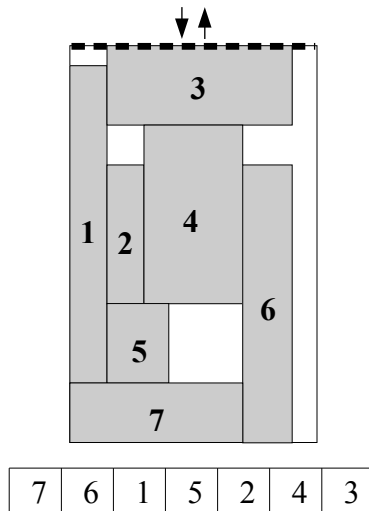
$$LB_5 = \max_{k=1,2,3} \left\{ \max_{\substack{\alpha \in \Omega_k \\ \beta \in \Omega_2}} \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i \in M} f_{\alpha}^k(f_{\beta}^2(l_i))c_i}{f_{\alpha}^k(f_{\beta}^2(L))} \right\rceil \right\} \right\}. \tag{5.14}$$

5.8.6 Meta-Heurística RLS+OP

O método utilizado para checar a viabilidade do empacotamento das rotas no G2L-SDVRP é baseado na aplicação da meta-heurística de busca local randômica (*Randomized Local Search - RLS*) combinada com a técnica *Open Space*. Tal método foi denominado de RLS+OP. A RLS é responsável por gerar a sequência/ordem em que itens serão empacotados na base do veículo para, então, aplicar a técnica *Open Space* visando efetivar o empacotamento dos itens.

Na meta-heurística RSL, a solução do Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional com Restrições de Ordem de Entrega (2OPPUL) é representada na forma de um vetor, que corresponde à ordem de empacotamento dos itens, como ilustrado na Figura 58 para o exemplo descrito na Tabela 31. Cada linha da tabela corresponde aos dados de um item (nome/identificador, ordem de entrega, largura e comprimento). Para este exemplo, a largura e o comprimento do veículo são 20 e 40, respectivamente. De acordo com as ordens de entrega dos itens na Tabela 31, observa-se que os itens são de três clientes, dado que ordens iguais correspondem aos itens de um mesmo cliente. A solução ilustrada na Figura 58 respeita a ordem de entrega, ou seja, o item 1 pode ser retirado sem que os outros sejam movimentados. Em seguida pode-se retirar os itens 2, 3, 4 e os demais.

Figura 58 – Vetor usado para a representação da solução da meta-heurística de empacotamento.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 31 – Exemplo de uma instância para o 2OPPUL.

Item (i)	Ordem de entrega (σ_i)	Largura (l_i)	Comprimento (c_i)
1	1	3	32
2	2	3	14
3	2	15	8
4	2	8	18
5	3	5	8
6	3	4	28
7	3	14	6

Fonte: Elaborada pela autora.

O Algoritmo 11 apresenta a estrutura completa da RLS e possui três parâmetros iniciais, que estão relacionados aos itens e à base do veículo e são os mesmos abordados no Algoritmo 8. Além deles, o parâmetro $Iter_{max}$ corresponde ao número de iterações do método de busca local, $area_{emp}$ indica a área total dos itens já empacotados, Pos_{min} e Pos_{max} representam os vetores com as posições mínima e máxima, respectivamente, que os itens podem assumir no vetor solução do problema e pos mostra qual é a posição no vetor do último item empacotado. As variáveis p_1 e p_2 são iteradores utilizados para acessar/indicar as posições no vetor de itens.

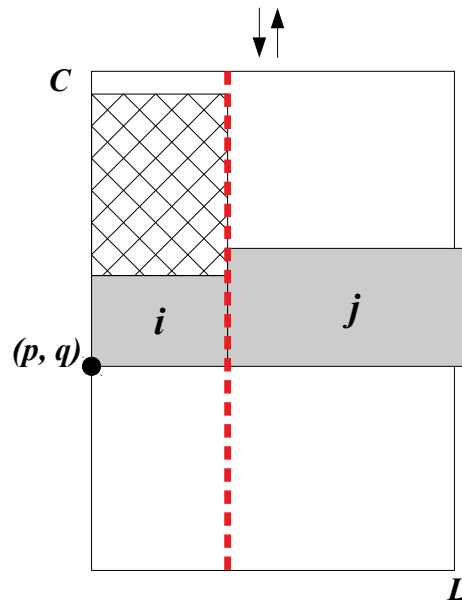
O valor do parâmetro $Iter_{max}$ consiste no maior valor entre o número total de itens do conjunto M e a área ocupada pelos itens na base do veículo. O valor de $Iter_{max}$ foi definido conforme Wei *et al.* (2018). Os autores utilizaram $Iter_{max}$ para definir o número de vezes que uma mesma rota pode ser checada no procedimento de empacotamento antes de adicioná-la em uma estrutura *hash* e proibi-la de ser examinada novamente. Contudo, diferentemente desses autores, neste trabalho a viabilidade do empacotamento de uma rota é verificada uma única vez e, em seguida, é inserida no *hash* e, assim, a meta-heurística de busca local randômica (linhas 6 a 29) é aplicada $Iter_{max}$ iterações. Em resumo, tem-se a aplicação da RLS com $Iter_{max}$ reinícios.

Os vetores Pos_{min} e Pos_{max} são calculados com base na ordem de entrega dos itens. Eles contêm os índices mínimo e máximo que cada item i pode ser alocado dentro do vetor solução. Para determinar esses valores é verificado se dois itens com diferentes ordens de entrega não podem ser arranjados lado a lado na base do veículo, visto que devido à restrição de ordem de entrega, os itens com ordens superiores a i (isto é, que devem ser entregues depois de i), não podem bloquear a retirada de i . Logo, estes itens devem ser empacotados abaixo de i ou na lateral de i . A Figura 59 ilustra essa situação, em que a região hachurada marca a área onde nenhum item $j \in M$, com $\sigma_j > \sigma_i$, pode ocupar, uma vez que haverá obstrução, pelo item j , ao retirar i . Note que não é possível arranjar o item j em qualquer posição (s, t) após o final do item i (linha tracejada), pois a soma das larguras dos itens i e j ultrapassa a largura L da base.

As posições mínimas e máximas que cada item pode assumir no vetor solução são geradas conforme o Algoritmo 10. No algoritmo, as linhas 4 a 11 trazem o cálculo da posição mínima de cada item no vetor solução e as linhas 12 a 20 da posição máxima. As posições no

vetor solução são representados pelos números 1 até m , tal que m é o número de itens em M (isto é, $m = |M|$). Vale ressaltar que os itens com ordem de entrega maiores tendem a assumir as primeiras posições do vetor solução e, assim, serão empacotados mais próximos do canto inferior da base do veículo.

Figura 59 – Lógica para calcular as posições mínimas e máximas dos itens no vetor solução.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para determinar a posição mínima, inicialmente os itens são ordenados de forma decrescente pela ordem de entrega e, em caso de empate, o item de maior largura é considerado primeiro. Em seguida, para cada par de posições i e j , é verificado se o item em M'_i é entregue antes do M'_j e se a soma de suas larguras não respeita a dimensão da base do veículo. Se ambas as condições são verdadeiras, então, os itens M'_i e M'_j não podem ser empacotados lado a lado. Logo, o item M'_i deve ser empacotado em algum ponto abaixo do item M'_j e, conseqüente, deve assumir uma posição no vetor solução posterior à posição j . Essa combinação de posições i e j , para definir a posição mínima do item i , é aplicada até encontrar um item M'_j com ordem igual a M'_i . Ao atingir este critério (linha 9), se a largura de M'_i é igual à largura da base, a posição j é um limitante para M'_i . A seguir passa-se para a próxima posição.

No caso da posição máxima, os itens também são ordenados de forma decrescente pela ordem de entrega, contudo o critério de desempate é a menor largura. Para cada posição i , inicialmente, é checado se o item M'_i tem largura igual à base e, em caso afirmativo, a posição máxima de M'_i no vetor solução é i . Caso contrário, para cada posição i e j , é verificado se a ordem de entrega de M'_j é menor que M'_i e a soma das larguras dos itens é maior que a largura da base. Desde que as hipóteses sejam verdadeiras, a posição máxima do item M'_i é $j - 1$. Esse processo é aplicado até que todas as posições i e j sejam percorridas.

Algoritmo 10 – Cálculo das posições mínimas e máximas dos itens.

Entrada: M , conjunto dos itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; σ , ordem em que os itens serão entregues; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Posições mínimas e máximas que os itens podem assumir no vetor solução.

- 1: $m \leftarrow$ número de itens no conjunto M ;
- 2: $M' \leftarrow M$;
- 3: $\sigma'_i \leftarrow \sigma_i$, $l'_i \leftarrow l_i$, para $i \leftarrow 1, \dots, m$;
- 4: $Pos_{min}(i) \leftarrow 0$, para $i \leftarrow 1, \dots, m$;
- 5: $M' \leftarrow$ Ordenar os itens de M' , bem como l' e σ' , de maneira decrescente pela ordem de entrega e se houver empate considere o item de maior largura primeiro;
- 6: **para** $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
- 7: **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
- 8: **se** $\sigma'_j > \sigma'_i$ **E** $l'_i + l'_j > L$ **então** $Pos_{min}(M'_i) \leftarrow j + 1$;
- 9: **senão se** $\sigma_j = \sigma_i$ **então**
- 10: **se** $l'_i = L$ **então** $Pos_{min}(M'_i) \leftarrow j$;
- 11: Sair do laço;
- 12: Sair do laço;
- 13: **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
- 14: **se** $\sigma'_j < \sigma'_i$ **E** $l'_i + l'_j > L$ **então**
- 15: $Pos_{max}(M'_i) \leftarrow j - 1$;
- 16: Sair do laço;
- 17: Sair do laço;
- 18: **se** $l'_i = L$ **então** $Pos_{max}(M'_i) \leftarrow i$;
- 19: **senão**
- 20: **para** $j \leftarrow i + 1$ **até** m **faça**
- 21: **se** $\sigma'_j < \sigma'_i$ **E** $l'_i + l'_j > L$ **então**
- 22: $Pos_{max}(M'_i) \leftarrow j - 1$;
- 23: Sair do laço;
- 24: Sair do laço;
- 25: **retorna** Pos_{min} e Pos_{max} ;

Para ilustrar o Algoritmo 10, considera-se o exemplo apresentado na Tabela 31. Em geral, os itens 1, 2, 5 e 6 podem ser empacotados lado a lado com qualquer um dos outros itens ou entre eles mesmo e, assim, suas posições mínimas e máximas são 1 e 7, respectivamente. Para calcular as posições mínimas, os itens são ordenados conforme a linha 5 e tem-se : $M' = \{7, 5, 6, 3, 4, 2, 1\}$, $l' = \{14, 5, 4, 15, 8, 3, 3\}$ e $\sigma' = \{3, 3, 3, 2, 2, 2, 1\}$. Ao considerar i igual às três primeiras posições de M' que corresponde aos itens 7, 5 e 6, a hipótese da linha 9 é aceita para todos eles, visto que a ordem de entrega de σ'_i , para $i = 1, 2, 3$, é igual a de σ'_j , para $j = 1$. Os itens 3 e 4, referentes as posições 4 e 5 de M' , quando combinados com item 7, ultrapassam a largura do veículo. Logo, para $i = 4, 5$ e $j = 1$, a condição na linha 8 é satisfeita e, assim, a posição mínima no vetor solução dos itens 3 e 4 é 2. Na posição máxima, a ordenação dos itens é dada por $M' = \{6, 5, 7, 2, 4, 3, 1\}$, $l' = \{4, 5, 14, 3, 8, 15, 3\}$ e $\sigma' = \{3, 3, 3, 2, 2, 2, 1\}$. Apenas o item 7, referente à posição 3 de M' , possui posição máxima diferente de m . Para $i = 3$ e $j = 5$, a condição na linha 18 é satisfeita e, conseqüentemente, a posição máxima do item 7 é 4. Portanto, os vetores com as posições mínimas e máximas dos itens $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ no

vetor solução são $Pos_{min} = \{1, 1, 2, 2, 1, 1, 1\}$ e $Pos_{max} = \{7, 7, 7, 7, 7, 7, 4\}$.

No início do Algoritmo 11, os valores de alguns parâmetros são inicializados e as posições mínimas e máximas dos itens no vetor solução são determinadas. O próximo passo do algoritmo (linhas de 5 a 24) consiste em aplicar $Iter_{max}$ iterações do método de busca local. Em seguida, uma solução inicial é gerada a partir do uso de três regras de ordenação, sendo elas: ordem decrescente pela área ($Ordem_1$), ordem decrescente pelo comprimento ($Ordem_2$) e, por fim, ordem decrescente pela largura ($Ordem_3$). Dada uma ordenação, o empacotamento é realizado pela estratégia *Open Space*, que retorna a área total empacotada (linha 8) e a posição no vetor do último item arranjando na base (linha 10). Se a área total do empacotamento ($area'$) é igual à área total dos itens ($area_{total}$), a solução do 2OPPUL é factível.

Algoritmo 11 – Meta-heurística de busca local randômica.

Entrada: M , conjunto dos itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; σ , ordem em que os itens serão entregues; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Se existe um empacotamento viável na rota S .

```

1:  $m \leftarrow$  número de itens no conjunto  $M$ ;
2:  $area_{total} \leftarrow$  área total dos itens no conjunto  $M$ ;
3:  $Iter_{max} \leftarrow \max\{m, \lceil 100 \times (1 - (\frac{area_{total}}{L \times H})) \rceil\}$ ;
4:  $Pos_{min}, Pos_{max} \leftarrow$  Calcular as posições que os itens podem assumir no vetor solução conforme o Algoritmo 10;
5: para  $i \leftarrow 1$  até  $Iter_{max}$  faça
6:   para  $k \leftarrow 1$  até 3 faça
7:      $M' \leftarrow$  Ordenar os itens em  $M$  conforme  $Ordem_k$ ;
8:      $area' \leftarrow$  Aplique a Heurística Open Space em  $M'$ ;
9:      $pos \leftarrow$  posição do último item empacotado pela Open Space;
10:    se  $area' = area_{total}$  então retorna True;
11:    para  $j \leftarrow 1$  até  $m$  faça
12:       $p_1 \leftarrow$  Gerar um número aleatório entre 1 e  $pos$ ;
13:       $p_2 \leftarrow$  Gerar um número aleatório entre  $Pos_{min}(M'_{p_1})$  e  $Pos_{max}(M'_{p_1})$ ;
14:       $M'' \leftarrow$  Trocar os itens nas posições  $p_1$  e  $p_2$  de  $M'$ ;
15:       $area'' \leftarrow$  Aplique a Heurística Open Space em  $M''$ ;
16:      se  $area'' > area'$  então
17:         $j \leftarrow 1$ ;
18:         $M' \leftarrow M''$ ;
19:         $area' \leftarrow area''$ ;
20:         $pos \leftarrow$  posição do último item empacotado pela Open Space;
21:        se  $area' = area_{total}$  então retorna True;
22:      senão se  $area'' = area'$  então
23:         $M' \leftarrow M''$ ;
24:         $pos \leftarrow$  posição do último item empacotado pela heurística Open Space;
25: retorna False;

```

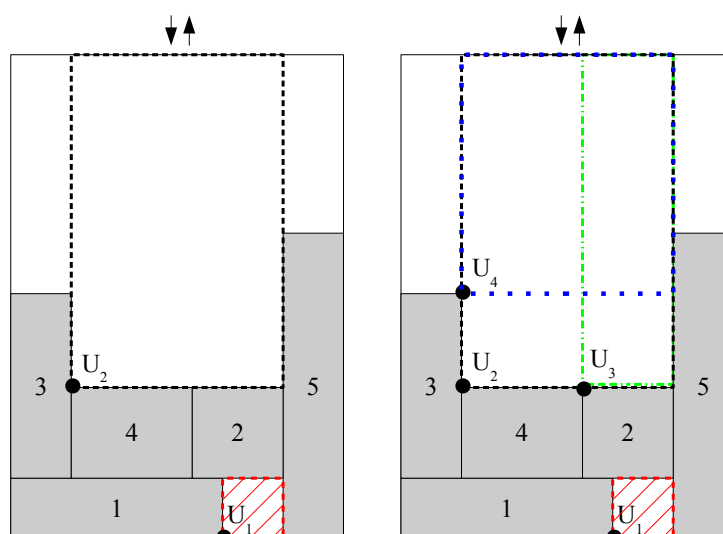
O laço de 11 a 24 é repetido até que a melhor solução não seja melhorada por m iterações consecutivas. A cada iteração do laço, dois itens têm suas posições trocadas. As posições p_1 e p_2 são escolhidas aleatoriamente, sendo que p_1 deve ser igual a umas das posições dos itens já

empacotados e p_2 é selecionado com base no intervalo de posição mínima e máxima que o item na posição p_1 de M' pode assumir. Selecionadas as posições, é realizado o movimento de troca e a nova solução é submetida à heurística *Open Space*. Posteriormente, realiza-se a avaliação da solução M'' , a qual é aceita caso tenha uma área maior que da solução corrente M' . No momento que a área empacotada da solução for igual à área total, o procedimento é finalizado com status de viável. Se isso não ocorrer, o método retorna o status *False* que, neste caso, significa solução indefinida.

A heurística *Open Space* desenvolvida neste trabalho segue a proposta de [Wei et al. \(2018\)](#) e [Wei et al. \(2019\)](#). A heurística *Open Space* é utilizada para realizar o empacotamento dos itens um por um conforme a sequência fornecida pela RLS. A ideia da *Open Space* é utilizar as regiões que não estejam ocupadas por nenhum item e que tenha um lado coincidindo com o lado de entrada/retirada dos itens.

Na heurística *Open Space*, um padrão de empacotamento é representado pelo espaço empacotado (que representa a área ocupada pelos itens) e o livre (que corresponde à área não utilizada para empacotar qualquer item). Na Figura 60, a região em cinza representa os espaços empacotados e em branco, os espaços livres. Um espaço livre é definido por uma área retangular que não contém qualquer item empacotado e, assim, a união de todos os espaços livres é igual à área não ocupada. Um espaço aberto é um tipo especial de espaço livre que tem um lado coincidente com o lado de retirada dos itens e representa as posições candidatas para empacotar os itens. Na Figura 60, os espaços U_1 (região hachurada), U_2 (região dentro do retângulo com linha tracejada), U_3 (região dentro do retângulo com linha de pontos e traços) e U_4 (região dentro do retângulo com linha pontilhada) são espaços livres. Contudo, U_1 não é um espaço aberto, pois nenhum de seus lados coincide com o lado que dá acesso a retirada/entrada de itens no veículo. Logo, o espaço livre U_1 é considerado como desperdício.

Figura 60 – Exemplos de espaços livres.

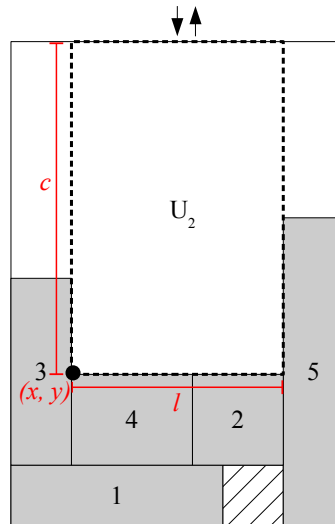


Fonte: Adaptada de [Wei et al. \(2018\)](#).

Cada espaço aberto U é descrito por quatro atributos (conforme a Figura 61), quais sejam:

- $U.x$: coordenada x do canto inferior esquerdo de U ;
- $U.y$: coordenada y do canto inferior esquerdo de U ;
- $U.l$: largura de U ;
- $U.c$: comprimento de U .

Figura 61 – Características dos espaços abertos.



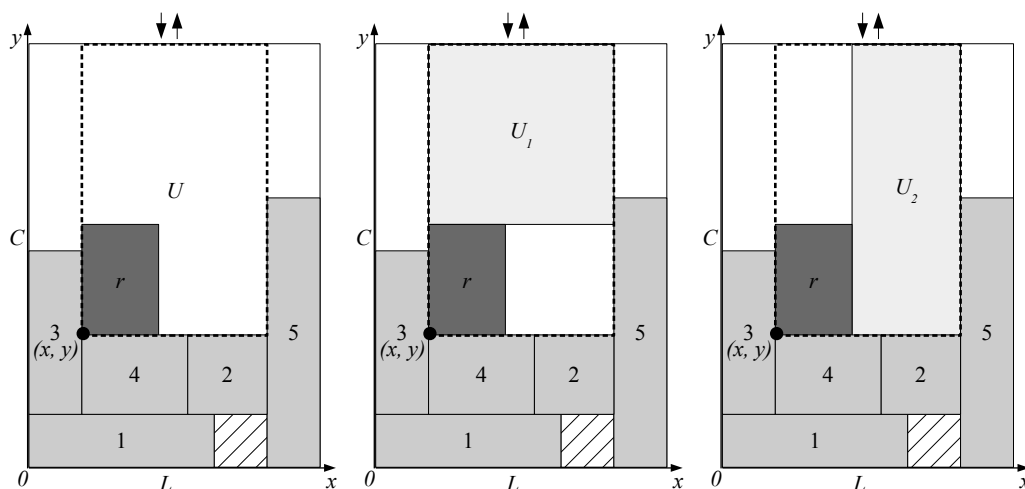
Fonte: Adaptada de [Wei et al. \(2018\)](#).

Dados dois espaços abertos U_i e U_j com $i \neq j$, U_j é dominado por U_i somente se os cantos inferiores esquerdos de U_i e U_j tiverem a mesma coordenada em x e U_j estiver contido em U_i , ou seja, $(U_i.x = U_j.x)$ e $(U_j.y \geq U_i.y)$ e $(U_j.l \leq U_i.l)$. Na Figura 60, U_4 é dominado por U_2 . Logo, não há necessidade de manter U_4 na lista de espaços abertos.

A atualização da lista de espaços abertos é realizada sempre que um item r é empacotado em um espaço aberto U e consiste em duas etapas. Na primeira etapa, U é removido da lista e dois novos espaços abertos são gerados como ilustrado na Figura 62. U_1 é gerado selecionando as bordas superior, esquerda e direita de U e a borda superior do item r . Enquanto, U_2 é formado pela borda superior, inferior e direita de U e a borda direita do item r .

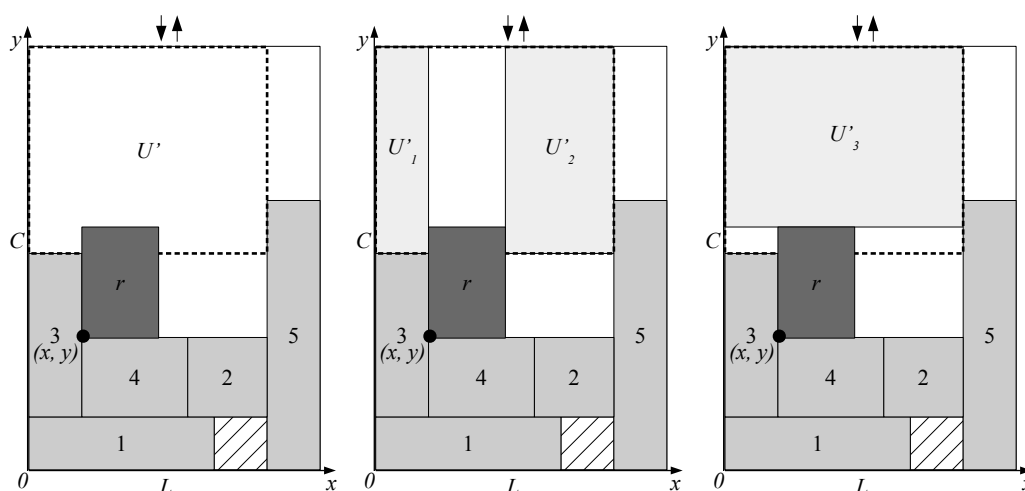
Na segunda etapa, para qualquer U' sobreposto pelo item r , U' é removido da lista e, em seguida, até três novos espaços abertos são gerados. Na Figura 63, U'_1 é formado pela borda superior, esquerda e inferior de U' e a borda direita do item r . U'_2 , por sua vez, é gerado a partir das bordas superior, direita e inferior de U' e a borda esquerda do item r . Por fim, U'_3 é composto pela borda superior, esquerda e direita de U' e a borda superior do item r .

Figura 62 – Gerar um novo espaço aberto na etapa 1.



Fonte: Adaptada de [Wei et al. \(2018\)](#).

Figura 63 – Gerar um novo espaço aberto na etapa 2.



Fonte: Adaptada de [Wei et al. \(2018\)](#).

Antes de um novo espaço ser adicionado à lista, é necessário verificar se o mesmo não é dominado por qualquer outro espaço aberto já pertencente à lista. Logo, ele é adicionado na lista somente se não for dominado por outro existente. Nas Figuras 62 e 63, U'_2 não é inserido na lista, pois o mesmo é dominado por U_2 . Então, somente os espaços U_1 , U_2 , U'_1 e U'_3 são adicionados na lista. Vale ressaltar que os espaços abertos que não podem conter qualquer item, devido a sua dimensão não ser suficiente, são removidos da lista.

A estrutura completa da *Open Space* é apresentada no Algoritmo 12. O método resume-se em atualizar os espaços abertos, que são as posições candidatas para posicionar os itens, sempre que um novo item é empacotado. Um item é empacotado no espaço aberto com a menor coordenada possível em y e que respeite a restrição de ordem de entrega. O algoritmo busca empacotar o maior número possível de itens e, ao final, são retornadas as informações referentes

à área total dos itens empacotados e à posição no vetor solução do último item empacotado.

Na linha 1 do Algoritmo 12, os parâmetros de saída da heurística são inicializados, sendo que $area_{emp}$ guarda a área dos itens empacotados e pos_{item} salva a posição do último item $r \in M$ empacotado. Em seguida, a lista com os espaços abertos é criada e o primeiro espaço é dado pela coordenada $(x, y) = (0, 0)$ e pelas dimensões $(l, c) = (L, C)$. No laço da linha 5 a 15, a cada iteração, seleciona-se o primeiro item $r \in M'$ ainda não empacotado e, a seguir, a lista de espaços abertos U é ordenada de forma crescente pela coordenada y . No próximo passo, busca-se encontrar o primeiro espaço aberto $u \in U$ da lista que pode acomodar r e que respeite a restrição de ordem de entrega. Se nenhum espaço aberto viável for encontrado para empacotar o item r , o laço em 5 a 15 é interrompido (linha 15). Caso contrário, o item r é empacotado em u , as informações de $area_{emp}$ e pos_{item} são incrementadas, a lista U é atualizada e, por fim, o item r é removido do conjunto com a sequências dos itens.

Algoritmo 12 – Estratégia *Open Space* para empacotar os itens.

Entrada: M , conjunto com a ordem de empacotamento dos itens e as dimensões (l_i, c_i) de cada item $i \in M$; σ , ordem em que os itens serão entregues; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Área total dos itens empacotados e posição do último item empacotado.

```

1:  $area_{emp} \leftarrow 0$ ;  $pos_{item} \leftarrow 0$ ;
2:  $M' \leftarrow M$ ;
3:  $u.x \leftarrow 0$ ;  $u.y \leftarrow 0$ ;  $u.l \leftarrow L$ ;  $u.c \leftarrow C$ ;
4:  $U \leftarrow u$ ;
5: enquanto  $U \neq \emptyset$  E  $M' \neq \emptyset$  faça
6:    $r \leftarrow$  o primeiro item não empacotado de  $M'$ ;
7:    $U \leftarrow$  ordenar os espaços em  $U$  em ordem crescente pela posição  $s.y$ ;
8:    $u \leftarrow$  encontre o primeiro espaço em  $U$  que pode acomodar o item  $r$  e respeite a
   restrição de ordem de entrega;
9:   se  $u$  é encontrado então
10:     Empacote o item  $r$  no espaço  $u$ ;
11:      $area_{emp} \leftarrow area_{emp} + (l_r \times c_r)$ ;
12:      $pos_{item} \leftarrow$  posição do item  $r$  em  $M$ ;
13:     Atualize o conjunto de espaços  $U$  após ter empacotado  $r$ ;
14:     Remova o item  $r$  do conjunto  $M'$ ;
15:   senão Sair do laço;
16: retorna  $area_{emp}$  e  $pos_{item}$ ;

```

5.9 Experimentos Computacionais

A meta-heurística e suas rotinas foram codificadas em linguagem C++ e os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-8700 de 3,2 GHz, 7,5 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 LTS. Para a resolução do modelo de particionamento de conjuntos foi utilizado o *Gurobi Optimizer*, na versão 8.1,

e para a resolução do modelo de programação por restrições, foram utilizadas as bibliotecas do *CP Optimize* do pacote *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.8*. Para cada instância foram realizadas dez execuções da meta-heurística, uma vez que ela possui parâmetros internos aleatórios, com o valor da semente variando de 1 até 10. Assim, para cada instância, é reportado o valor da melhor solução.

Os testes consideram dois conjuntos de instâncias. O primeiro é composto por 180 instâncias da literatura do 2L-CVRP¹, sendo que 60 dessas instâncias são as mesmas descritas na Subseção 4.4.1. As demais foram propostas por *Gendreau et al. (2008)*, que utilizaram o procedimento de *Iori, Salazar-González e Vigo (2007)* para gerar mais 120 instâncias contendo até 255 clientes e 786 itens. O segundo conjunto contém 36 instâncias que foram geradas neste trabalho seguindo o procedimento de *Iori, Salazar-González e Vigo (2007)*. Deste conjunto, 12 das 36 instâncias foram utilizadas na Subseção 4.4.1.

As instâncias apresentam informações sobre o número de clientes, de veículos e de itens, a capacidade do veículo, as dimensões da base do veículo, as coordenadas cartesianas dos clientes e do depósito, as dimensões dos itens e o peso dos itens. O número de clientes varia de 15 a 255 e o número total de itens de 15 a 786. O número de veículos disponíveis para atender os clientes varia de 3 a 51. O custo de cada arco é um valor inteiro, dado pela distância Euclidiana e arredondada para baixo. A Tabela 32 traz o nome das instâncias, o número utilizado para identificá-las e o número de clientes. Além disso, para cada classe é informado o número total de itens e veículos. As Classes 1 a 5 representam as instâncias da literatura do 2L-CVRP, enquanto que a Classe 6 corresponde ao novo conjunto de instâncias geradas.

Os valores dos parâmetros associados à quantidade de emissão de CO₂ na função objetivo do G2L-SDVRP são os mesmos utilizados na Seção 4.4, os quais são: $\rho_0 = 1$, $\rho_f = 3$ e $T_{CO_2} = 2,69 \text{ kg/litro}$. Na meta-heurística, há dois parâmetros de entrada, sendo que o tempo limite T_{max} é igual a 1800 segundos se $n \leq 50$ e, caso contrário, 3600 segundos. O valor de T_{max} segue a proposta de *Wei et al. (2018)*. Por outro lado, o valor de NN (que representa o número de iterações consecutivas sem que a solução melhore) foi definido com base nos testes preliminares, sendo os valores 50, 100 e 150 considerados. Ao final dos testes, o valor de 100 mostrou-se mais eficiente (isto é, obteve melhores resultados), logo NN é igual a 100. Além disso, um tempo limite de 60 e 1 segundos é atribuído ao modelo do SP e do CP, respectivamente.

5.9.1 Comparação dos Resultados do 2L-CVRP com a Literatura

Para verificar a qualidade da meta-heurística proposta baseada na VNS, foi resolvido o 2L-CVRP para as instâncias estudadas por *Wei et al. (2015)* e *Wei et al. (2018)*. Na literatura, existem outros trabalhos que resolveram este mesmo problema, contudo se optou por realizar uma comparação com os trabalhos mais recentes.

¹ <http://www.or.deis.unibo.it/>

Tabela 32 – Informações das instâncias.

Instância		Clientes	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5		Classe 6	
Número	Nome		Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos	Itens	Veículos
1	E016-03m	15	15	3	24	3	31	3	37	4	45	4	48	4
2	E016-05m	15	15	5	25	5	31	5	40	5	48	5	48	5
3	E021-04m	20	20	4	29	5	46	5	44	5	49	5	66	5
4	E021-06m	20	20	6	32	6	43	6	50	6	62	6	66	6
5	E022-04g	21	21	4	31	4	37	4	41	4	57	5	68	5
6	E022-06m	21	21	6	33	6	40	6	57	6	56	6	68	6
7	E023-03g	22	22	3	32	5	41	5	51	5	55	6	70	6
8	E023-05s	22	22	5	29	5	42	5	48	5	52	6	70	6
9	E026-08m	25	25	8	40	8	61	8	63	8	91	8	79	8
10	E030-03g	29	29	3	43	6	49	6	72	7	86	7	91	7
11	E030-04s	29	29	4	43	6	62	7	74	7	91	7	91	7
12	E031-09h	30	30	9	50	9	56	9	82	9	101	9	93	9
13	E033-03n	32	32	3	44	7	56	7	78	7	102	8	99	8
14	E033-04g	32	32	4	47	7	57	7	65	7	87	8	99	8
15	E033-05s	32	32	5	48	6	59	6	84	8	114	8	99	8
16	E036-11h	35	35	11	56	11	74	11	93	11	114	11	109	11
17	E041-14h	40	40	14	60	14	73	14	96	14	127	14	124	14
18	E045-04f	44	44	4	66	9	87	10	112	10	122	10	137	10
19	E051-05e	50	50	5	82	11	103	11	134	12	157	12	156	12
20	E072-04f	71	71	4	104	14	151	15	178	16	226	16	219	16
21	E076-07s	75	75	7	114	14	164	17	168	17	202	17	232	17
22	E076-08s	75	75	8	112	15	154	16	198	17	236	17	232	17
23	E076-10e	75	75	10	112	14	155	16	179	16	225	16	232	16
24	E076-14s	75	75	14	124	17	152	17	195	17	215	17	232	17
25	E101-08e	100	100	8	157	21	212	21	254	22	311	22	306	22
26	E101-10c	100	100	10	147	19	198	20	247	20	310	20	306	20
27	E101-14s	100	100	14	152	19	211	22	245	22	320	22	306	22
28	E121-07c	120	120	7	183	23	242	25	299	25	384	25	371	25
29	E135-07f	134	134	7	197	24	262	26	342	28	422	28	414	28
30	E151-12b	150	150	12	225	29	298	30	366	30	433	30	459	30
31	E200-16b	199	199	16	307	38	402	40	513	42	602	42	608	42
32	E200-17b	199	199	17	299	38	404	39	497	39	589	39	608	39
33	E200-17c	199	199	17	301	37	407	41	499	41	577	41	608	41
34	E241-22k	240	240	22	370	46	490	49	604	50	720	50	728	50
35	E253-27k	252	252	27	367	45	507	50	634	50	762	50	758	50
36	E256-14k	255	255	14	387	47	511	51	606	51	786	51	766	51

Fonte: Elaborada pela autora.

Neste contexto, os resultados obtidos pela VNS foram comparados com os da VNS_w de [Wei et al. \(2015\)](#) e SA de [Wei et al. \(2018\)](#). Além disso, a melhor solução conhecida (*Best Known Solution* - BKS) foi utilizada como base para comparação das soluções entre as meta-heurísticas. A BKS foi obtida a partir dos trabalhos apresentados anteriormente na literatura, os quais estão sumarizados na Tabela 9. Os resultados completos obtidos pela VNS estão disponíveis no Apêndice C, na Tabela 55.

Nas meta-heurísticas da literatura propostas para resolver o 2L-CVRP, o custo das arestas é calculado como a distância Euclidiana e não é arredondado. Logo, para realizar uma comparação com a literatura, estes valores não foram arredondados. No entanto, como destacado anteriormente, para as instâncias do G2L-SDVRP estes valores são arredondados para permitir a comparação com os resultados obtidos pelo método exato.

A Tabela 33 apresenta uma comparação dos resultados da VNS em relação à literatura. Na tabela, para cada meta-heurística é apresentado o número de soluções piores, iguais e melhores que a BKS, o GAP, em porcentagem, e o tempo computacional médio, em segundos, gasto para obter a melhor solução. Note que o tempo computacional não se refere ao tempo final de parada da VNS ao atingir algum critério, mas o tempo computacional gasto para obter a última solução de

melhor qualidade. Essa abordagem segue a ideia utilizada por [Wei et al. \(2015\)](#) e [Wei et al. \(2018\)](#) e como os resultados da VNS desenvolvida neste trabalho são comparados com esses autores, optou-se por seguir a mesma linha. No entanto, na Tabela 55 do Apêndice C está disponível o tempo total de execução da VNS e o tempo gasto para obter a melhor solução. Por fim, destaca-se que o tempo computacional é fornecido como uma curiosidade, pois as configurações dos computadores (isto é, a velocidade da CPU, o sistema operacional, o compilador, entre outras) são diferentes e, assim, tornando injusta a comparação do tempo de computação.

Os resultados da Tabela 33 mostram que a VNS é competitiva com os métodos da literatura, sendo que apresenta o menor valor de GAP, tanto para a Classe 1 quanto para as Classes 2 a 5. Nos resultados da Classe 1, todas as meta-heurísticas obtiveram mais de 50% das soluções iguais a BKS. A VNS conseguiu melhorar o resultado de cinco instâncias. Nos resultados das Classes 2 a 5, a VNS conseguiu melhorar as soluções da BKS, com uma diferença relativa, em média, de 0,09%. A VNS obteve 17 soluções melhores que a BKS.

Tabela 33 – Comparação dos resultados do 2L-CVRP com a literatura.

Meta-heurística	Classe 1					Classes 2 a 5				
	Pior	Igual	Melhor	Gap (%)	Tempo (s)	Pior	Igual	Melhor	Gap (%)	Tempo (s)
VNS _w	8	28	0	0,04	460,53	22	14	0	0,28	975,32
SA	7	29	0	0,02	448,63	6	30	0	0,02	1062,95
VNS	4	27	5	0,01	55,49	12	7	17	-0,09	1033,65

Fonte: Elaborada pela autora.

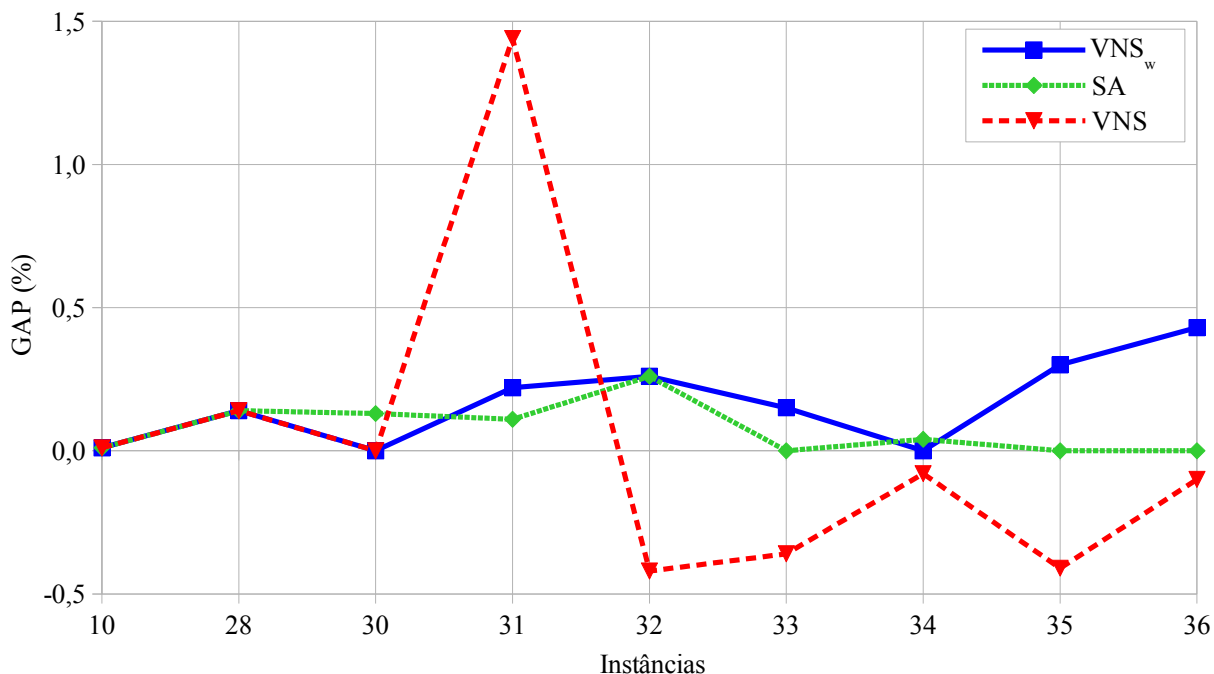
A Figura 64 traz um gráfico comparando os resultados da VNS_w, SA e VNS para as instâncias da Classe 1 em que uma das soluções dos três métodos divergiram da BKS. Na figura, observa-se que para um total de 9 instâncias, as soluções das meta-heurísticas foram diferentes da BKS. Para a instância 31, a VNS teve uma solução pior que a BKS com uma diferença relativa de 1,44%. O maior ganho da VNS foi para a instância 32, sendo este igual a 0,42%. A VNS_w e SA tiveram seu GAP variando entre 0 e 0,5%.

Na Figura 65, é ilustrado o número de soluções, em porcentagem, piores, melhores e iguais a BKS para as instâncias da Classe 1. Ao analisar a figura, nota-se que a meta-heurística VNS_w obteve 22,22% de soluções piores que a BKS, enquanto a SA e VNS teve 19,44% e 11,11%, respectivamente. O maior número de soluções iguais a BKS foi para a SA com 80,56%. A VNS melhorou a solução de 13,89% das instâncias. Em geral, para cerca de 88% das instâncias, a solução da VNS sempre é igual ou melhor que a BKS, sendo que para a SA e VNS_w este valor é de 80% e 77%, respectivamente.

Na Figura 66, para cada instância, em que a solução de uma das meta-heurísticas é diferente da BKS, é apresentado o GAP médio das Classes 2 a 5. A Figura mostra que apenas para as cinco primeiras instâncias, as meta-heurísticas VNS_w, SA e VNS tiveram as mesmas soluções da BKS. A VNS_w obteve as soluções mais distantes da BKS, sendo que para três instâncias, o GAP foi superior a 1%. A SA, em geral, teve um GAP variando entre 0 e 0,5%. A

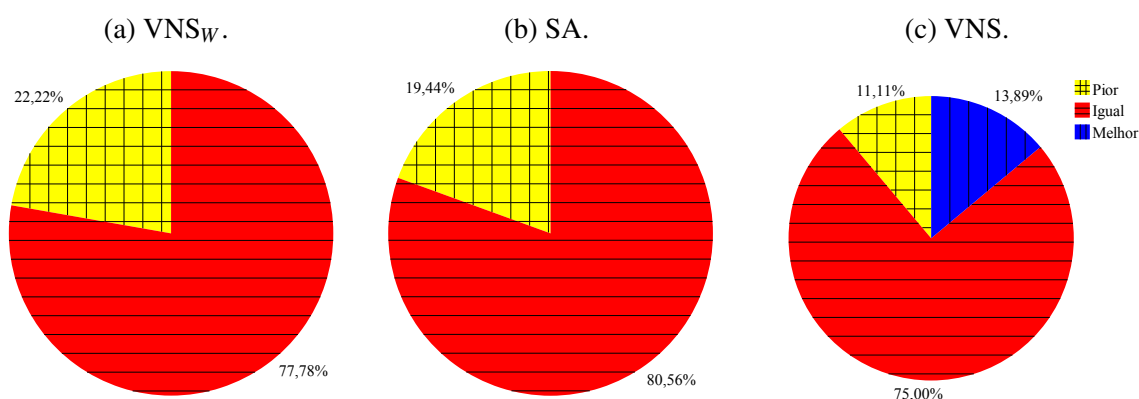
VNS, por sua vez, não teve nenhum GAP maior que 0,5%, contudo obteve uma solução melhor que a BKS com diferença superior a 1%.

Figura 64 – GAP das instâncias da Classe 1 com diferentes soluções.



Fonte: Elaborada pela autora.

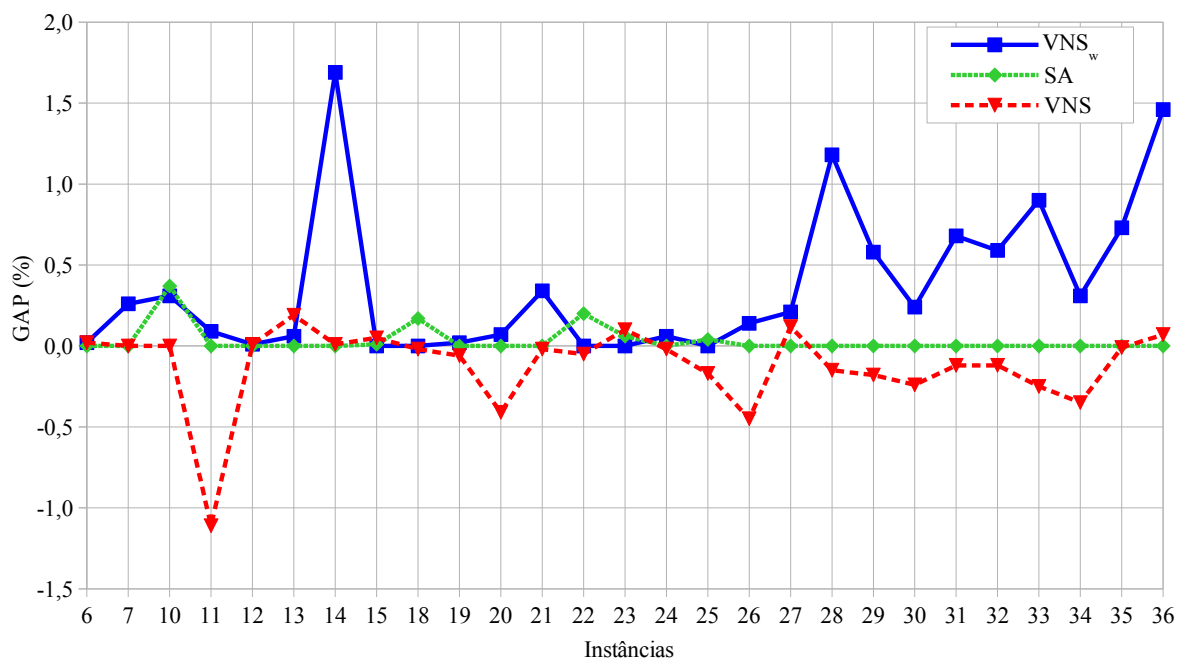
Figura 65 – Comparação das soluções com a BKS para a Classe 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

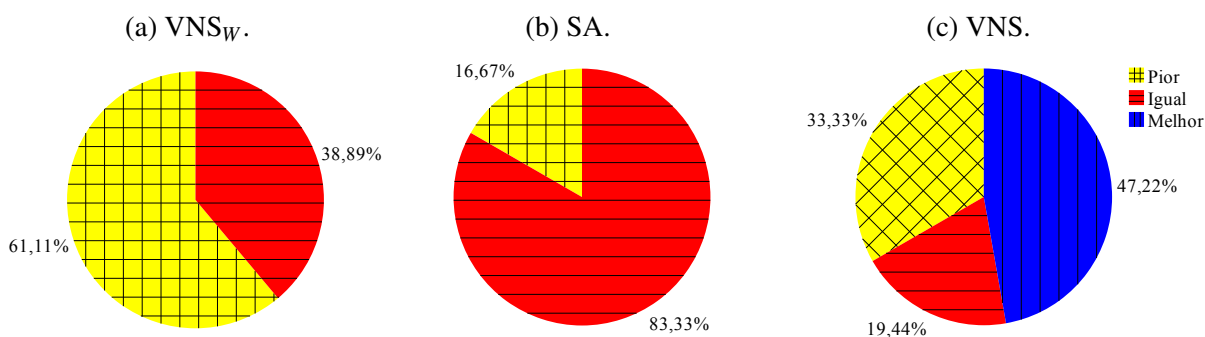
Na Figura 67, para cerca de 47,22% das instâncias das Classes 2 a 5, a VNS obteve solução melhor que a BKS. A SA teve o maior número de soluções iguais a BKS (com valor igual a 83,33%), seguida da VNS_w e da VNS com valor de 83,33% e 38,89%, respectivamente. A VNS_w teve desempenho inferior comparada com as outras heurísticas, tendo o maior número de soluções piores que a BKS.

Figura 66 – GAP das instâncias das Classes 2 a 5 com diferentes soluções.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 67 – Comparação das soluções com a BKS para as Classes 2 a 5.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Tabela 34, são resumidos os resultados obtidos pela VNS para cada classe das instâncias em comparação com a BKS. Logo, para cada classe é fornecido o número de soluções piores, iguais e melhores que a BKS, o GAP e o tempo computacional. Na tabela, o tempo computacional aumenta a medida que o número de itens por cliente aumenta nas instâncias. Logo, o maior tempo computacional médio foi para a Classe 5, com valor de 1195,64 segundos. A VNS teve maior dificuldade em resolver as instâncias da Classe 5. Esse desempenho pode ser reflexo do número de itens por cliente, que na Classe 5 é maior, dificultando o empacotamento dos itens e também ampliando o espaço de busca das vizinhanças.

Os testes computacionais indicam que a VNS desenvolvida é competitiva com a literatura, sendo no geral melhor que a literatura.

Tabela 34 – Resultados da VNS.

Classe	Pior	Igual	Melhor	GAP (%)	Tempo (s)
1	4	27	5	0,01	55,49
2	3	24	9	-0,14	676,67
3	0	19	17	-0,18	1072,21
4	3	14	19	-0,25	1190,06
5	23	13	0	0,37	1195,64
1-5	33	97	50	-0,04	838,02

Fonte: Elaborada pela autora.

5.9.2 Resultados do G2L-SDVRP

As Tabelas 35 e 36 trazem uma comparação dos resultados obtidos, para o G2L-SDVRP, pela meta-heurística VNS e pelo método exato *branch-and-cut* (BC). Na Tabela 35, para cada classe de instâncias, tanto para o BC e a VNS, são dados: o tempo computacional médio em segundos, o número de veículos utilizados (VH), o número de clientes que tiveram sua entrega fracionada (CS). Em seguida, são reportados o número de instâncias em que as soluções obtidas pela VNS são melhores, iguais ou piores que do método BC. Por fim, é apresentada a diferença percentual média (GAP) entre essas soluções. Estes dados são reportados tanto em relação às rotas quanto a emissão de CO₂.

$$GAP = 100 \times \left(\frac{\text{Solução da VNS (rota)} - \text{Solução do BC (rota)}}{\text{Solução do BC (rota)}} \right).$$

Para facilitar a compreensão da diferença percentual, se o GAP tiver valores negativos indica que a solução da VNS é melhor que a do BC, valores nulos correspondem a soluções iguais e valores maiores que zero apontam que o resultado do BC é melhor que da VNS. Além disso, as instâncias da Classe 1 não foram consideradas nas análises dos resultados, visto que nelas não é possível ocorrer entrega fracionada, já que os clientes demandam apenas um item. Os resultados obtidos pela VNS para as instâncias da Classe 1 estão disponíveis no Apêndice C, na Tabela 56.

Como mostram os resultados da Tabela 35, o método exato gastou um tempo computacional muito maior que a heurística para todas as classes, sendo que a diferença média no tempo é maior que 2000 segundos. Com relação ao número de veículos e de clientes com entrega fracionada, a VNS utilizou menos veículos que o método exato e atendeu um maior número de clientes com entrega fracionada. Ao analisar as soluções, é possível verificar que a VNS obteve soluções melhores que o BC tanto em termos de rotas quanto de emissão de CO₂, sendo o GAP médio igual a 0,85% e 0,56%, respectivamente. O menor ganho obtido pela VNS na redução da emissão de CO₂ foi para as instâncias da Classe 4 (com valor de 0,26%), em que a VNS obteve 3 soluções piores que o BC. Em resumo, a VNS reduziu a emissão de CO₂ para 17 instâncias, obteve 27 soluções iguais e 4 soluções piores comparado ao BC.

Tabela 35 – Comparação dos resultados do G2L-SDVRP obtidos pela VNS e BC.

Classe	BC			VNS			BC x VNS (custo das rotas)				BC x VNS (emissão de CO ₂)			
	Tempo (s)	VH	CS	Tempo (s)	VH	CS	Melhor	Igual	Pior	GAP _R (%)	Melhor	Igual	Pior	GAP _G (%)
2	2279,18	70	12	52,70	69	15	4	8	0	-1,33	4	8	0	-0,93
3	2571,01	70	13	112,17	68	19	3	8	1	-1,08	5	7	0	-0,44
4	2260,16	71	18	278,82	71	19	4	8	0	-0,38	3	6	3	-0,26
5	2381,68	68	15	255,06	68	13	4	6	2	-0,60	5	6	1	-0,63
2-5	2373,01	279	58	174,69	276	66	15	30	3	-0,85	17	27	4	-0,56

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Tabela 36, os GAPs das instâncias para as quais as soluções da VNS foram diferentes do BC em alguma das classes são detalhados. Nos resultados, o maior ganho em relação à redução de emissão de CO₂ e o custo das rotas é de 9,38% e 12,19%, respectivamente, para a instância E033-03n da Classe 2. Nos casos em que as soluções obtidas pela VNS emitiram mais CO₂ que o BC, a maior diferença entre as soluções é de 0,26%. Um valor consideravelmente pequeno, em especial, quando se considera a diferença no tempo computacional (Tabela 35). Um resultado interessante aconteceu para a instância E016-05m da Classe 5, na qual podemos observar que as soluções da VNS e do BC foram iguais em relação à emissão de CO₂, contudo os custos das rotas foram diferente com ganho de 1,28% para a VNS.

Tabela 36 – GAP das instâncias com soluções diferentes entre o BC e a VNS.

Instâncias	Custo das rotas				Emissão de CO ₂			
	Classe 2	Classe 3	Classe 4	Classe 5	Classe 2	Classe 3	Classe 4	Classe 5
E016-05m	-	-	-	-1,28	-	-	-	0,00
E022-06m	-	-	0,00	-	-	-	0,005	-
E023-03g	-1,38	-7,92	-1,98	0,15	-0,24	-0,65	-0,68	-0,25
E023-05s	-	-	0,00	2,85	-	-	0,01	-0,82
E026-08m	-	0,32	-0,97	-1,01	-	-1,11	0,18	0,26
E030-03g	-1,27	0,00	-	-0,44	-0,31	-0,33	-	-0,30
E033-03n	-12,19	-4,04	-0,08	-7,43	-9,38	-1,27	-1,35	-5,09
E036-11h	-1,13	-1,27	-1,52	0,00	-1,21	-1,86	-1,29	-1,35

Fonte: Elaborada pela autora.

Com a aplicação do método exato BC foi possível obter uma solução comprovadamente ótima apenas para as instâncias menores. Assim, para verificar a eficiência da VNS nas instâncias de maior porte, é realizada uma comparação da solução final obtida pela VNS em relação à solução inicial encontrada através de um procedimento de duas fases apresentado na Seção 5.3. Logo, a Tabela 37 traz uma comparação entre a solução final da VNS e a solução inicial. Na tabela, para cada instância, é apresentada a solução inicial (Sol_I), a solução final (Sol_F), o GAP entre a solução final e inicial (ou seja, $100 \times (Sol_I - Sol_F) / Sol_F$), o tempo computacional gasto para obter a solução inicial (T_I) e final (T_F), e a diferença entre o tempo final e inicial (DT). Além disso, apresenta-se uma linha com a média dos resultados. Ao observar os resultados da Tabela 37, é possível verificar que a melhoria média entre as soluções inicial e final é superior a 47% para todas as classes. O tempo computacional gasto para obter a solução final é cerca de 1500 segundos maior que o tempo para encontrar a solução inicial para todas as classes.

Tabela 37 – Melhoria obtida pela VNS em comparação com a solução inicial.

Instância	Classe 2					Classe 3					Classe 4					Classe 5								
	Sol	Solf	GAP(%)	Ti	Tf	DT	Sol	Solf	GAP(%)	Ti	Tf	DT	Sol	Solf	GAP(%)	Ti	Tf	DT	Sol	Solf	GAP(%)	Ti	Tf	DT
E016-03m	2158,28	1329,64	62,32	0,40	47,43	47,03	2103,28	1345,90	56,27	1,57	98,66	97,09	1764,70	1195,44	47,62	0,32	20,72	20,40	1419,54	1152,93	23,12	0,03	26,85	26,82
E016-05m	2262,93	1558,24	45,22	0,06	5,45	5,39	2288,18	1558,88	44,86	0,15	13,71	13,56	2200,37	1494,37	47,24	0,09	8,97	8,88	2195,38	1494,37	46,91	0,01	4,57	4,56
E021-04m	2454,42	1683,62	64,78	0,01	23,27	23,26	2748,99	1638,97	67,73	0,48	44,59	44,11	2369,69	1605,27	47,60	0,01	45,35	45,34	2404,80	1577,67	52,43	0,02	20,63	20,61
E021-06m	3119,65	2022,97	64,10	0,18	12,64	12,46	3114,19	1966,85	58,33	0,07	19,86	19,79	3112,89	1995,89	55,97	0,58	34,15	33,57	3112,52	2002,84	55,41	1,07	27,99	26,92
E022-04g	2395,89	1811,93	32,23	0,03	47,94	47,91	3400,79	1769,66	92,17	0,55	44,60	44,05	3511,71	1825,55	92,36	3,71	87,36	83,65	2389,17	1751,55	36,40	0,00	20,79	20,79
E022-06m	3331,03	2326,14	43,20	0,01	18,81	18,80	2877,76	2338,15	23,08	0,03	27,63	27,60	4283,69	2308,89	85,53	0,70	167,82	167,12	3531,43	2308,77	52,96	0,01	23,25	23,24
E023-03g	3134,08	2547,63	23,02	0,06	49,22	49,16	3115,91	2502,23	24,53	0,05	15,41	15,40	3296,59	2498,22	31,96	0,02	287,30	287,28	3121,34	2437,96	28,03	0,11	162,63	162,52
E023-05s	3309,04	2464,52	34,27	0,04	39,66	39,62	3687,80	2564,96	43,78	0,11	72,81	72,70	3377,03	2494,76	35,36	0,11	121,42	121,31	3799,18	2393,99	58,70	0,24	166,86	166,62
E026-08m	4346,82	2879,20	50,97	0,17	37,28	37,11	3747,62	2885,36	29,88	0,09	135,23	135,14	4012,02	2886,15	39,01	0,11	116,86	116,75	4488,15	2797,82	60,42	0,57	65,10	64,53
E030-03g	3940,13	2663,79	47,91	0,05	16,06	16,01	3400,22	2503,73	35,81	0,09	28,27	28,26	4068,62	2657,68	53,09	0,12	417,97	417,85	3237,18	2653,00	23,32	0,19	673,49	673,30
E030-04g	4038,35	2734,84	47,66	0,13	15,61	15,59	3993,13	2674,84	49,28	0,06	46,2,84	46,2,78	3633,26	2894,96	25,50	0,10	1131,61	1131,51	3614,88	2483,86	45,53	0,43	1126,28	1125,85
E031-09h	4551,56	2876,08	58,26	1,52	78,97	77,45	4275,12	2794,28	53,00	0,25	34,46	34,21	4697,85	2844,75	65,14	1,21	332,41	331,20	4815,73	2762,39	74,33	1,47	146,49	145,02
E033-04g	13395,60	9528,91	40,58	0,04	138,14	138,10	14736,90	9101,12	62,14	0,03	332,73	332,70	13950,70	9269,25	50,29	0,15	1800,00	1799,85	14386,70	8787,90	63,71	0,30	1800,00	1799,70
E033-05h	5839,95	4718,85	23,76	0,05	288,97	288,92	6127,88	4519,54	36,58	0,09	1661,61	1661,55	5413,66	4361,11	24,13	0,23	1447,64	1447,41	5595,79	4204,27	33,10	0,65	1800,00	1799,35
E033-05s	5877,18	4548,26	29,22	0,04	61,2,03	61,1,99	7227,10	4823,86	49,82	0,70	446,09	445,39	5935,82	4921,60	20,61	0,17	1800,00	1799,83	5922,88	4912,87	20,56	0,41	1800,00	1799,59
E036-11h	5494,30	3229,32	70,14	0,29	52,49	52,20	5051,30	3230,41	56,37	0,09	119,36	119,27	5342,54	3230,45	65,38	0,13	236,74	236,61	5182,83	3230,17	60,45	0,17	66,92	66,75
E045-04f	5415,55	3620,90	49,56	0,08	1722,59	1722,51	4425,75	3705,70	19,43	0,12	1800,00	1799,88	5148,74	3762,42	36,85	0,23	1800,00	1799,77	6432,78	3972,50	61,93	0,07	114,77	114,70
E051-05e	4242,97	2850,56	48,85	0,28	1652,77	1652,49	4051,51	2871,54	41,09	0,08	1800,00	1799,92	4279,99	2861,89	49,55	0,69	1800,00	1799,31	4139,91	2578,73	60,54	0,93	1800,00	1799,07
E072-04f	2682,84	1677,44	59,94	0,85	1800,00	1799,15	2533,43	1658,53	52,75	1,57	1800,00	1798,43	2217,19	1683,04	31,74	0,31	1800,00	1799,59	1971,55	1502,95	31,18	1,03	1800,00	1798,97
E076-07s	7061,91	3807,47	85,48	1,34	1800,00	1798,66	5556,56	3961,93	40,25	0,18	1800,00	1799,82	5195,56	3601,74	44,25	0,46	1800,00	1799,64	5536,44	3401,90	62,75	0,63	1800,00	1799,37
E076-08s	6919,94	4063,90	70,28	0,92	1800,00	1799,08	6078,35	4053,98	49,94	0,99	1800,00	1799,01	5749,04	4011,51	43,31	1,47	1800,00	1798,53	5879,32	3747,38	56,89	1,05	1800,00	1798,95
E076-10e	7909,37	4439,88	78,14	1,53	1800,00	1798,47	6680,04	4413,87	51,34	0,74	1800,00	1799,26	7534,46	4358,91	72,85	5,72	1800,00	1794,28	5935,79	4065,32	46,01	0,60	1800,00	1799,40
E076-14e	9181,62	5260,99	74,52	0,68	1800,00	1799,32	7386,20	4935,29	49,66	0,80	1800,00	1799,20	7783,84	4992,21	55,92	1,55	1800,00	1798,45	7246,75	4783,90	51,48	0,41	1800,00	1799,59
E076-17e	7647,24	5007,84	52,71	0,58	3600,00	3599,42	6078,35	4053,98	49,94	0,99	1800,00	1799,01	7534,46	4358,91	72,85	5,72	1800,00	1794,28	5935,79	4065,32	46,01	0,60	1800,00	1799,40
E101-10e	8665,30	5087,44	70,33	1,82	3600,00	3598,18	7246,86	5289,94	36,99	2,57	3600,00	3597,43	8365,80	5572,86	50,12	0,40	3600,00	3588,10	6347,59	4957,78	28,03	1,19	3600,00	3598,81
E101-14s	8578,94	5707,51	50,31	1,22	3600,00	3598,78	8429,60	5755,35	46,47	1,46	3600,00	3598,54	8365,80	5572,86	50,12	0,40	3600,00	3599,60	8441,84	5345,80	57,92	1,42	3600,00	3598,58
E101-12b	11414,30	6580,92	73,45	2,97	3600,00	3597,03	12755,80	6659,61	91,54	3,44	3600,00	3596,56	12490,00	7941,28	57,28	10,49	3600,00	3589,51	9657,04	7621,06	26,72	2,16	3600,00	3597,84
E200-16b	14038,70	8473,10	63,43	7,34	3600,00	3592,66	14776,50	8491,20	74,02	16,26	3600,00	3583,74	14222,80	8737,09	62,79	26,53	3600,00	3573,47	12118,60	7725,28	56,87	3,79	3600,00	3596,87
E200-17c	13038,70	8521,11	64,75	6,29	3600,00	3593,71	13430,40	8385,21	60,17	7,19	3600,00	3592,81	14450,80	8408,03	71,87	36,72	3600,00	3563,28	12567,00	7647,62	64,33	6,57	3600,00	3593,43
E200-17e	17516,30	8483,48	106,48	10,26	3600,00	3589,74	12761,00	8707,23	46,56	9,48	3600,00	3590,52	13986,90	8711,43	60,56	29,09	3600,00	3570,91	11328,20	7670,75	47,68	3,13	3600,00	3596,87
E241-27k	7225,88	4082,64	76,99	11,84	3600,00	3588,16	6248,06	4126,09	51,50	11,89	3600,00	3588,11	6772,61	4094,53	65,41	49,26	3600,00	3550,74	5522,76	3682,77	42,63	4,42	3600,00	3595,18
E253-22k	10361,90	5166,51	100,56	21,39	3600,00	3578,61	7894,44	5318,45	48,44	21,58	3600,00	3588,42	11584,20	5505,35	110,42	118,08	3600,00	3481,92	5961,48	3662,63	25,86	7,87	3600,00	3592,53
E256-14k	7487,28	5536,86	35,23	18,40	3600,00	3581,60	7545,22	5720,10	31,91	23,16	3600,00	3576,84	6249,99	5334,09	17,17	4,57	3600,00	3595,43	5907,36	4912,34	20,26	19,53	3600,00	3580,47
Média	7048,23	4401,64	57,32	2,76	1594,89	1592,13	6565,31	4394,59	49,07	3,48	1662,09	1658,62	6721,61	4394,16	52,29	9,18	1776,67	1767,48	6018,81	4092,57	47,27	1,94	1773,52	1771,57

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Tabela 38, são apresentados os resultados obtidos pela VNS para todas as instâncias. Para cada instância, é fornecido o nome e o número de clientes, o limitante inferior (K_{min}) e superior (K_{max}) do número de veículos necessário para atender todos os clientes, o número de veículos utilizados (VH), o número de clientes atendidos com entrega fracionada (CS), o custo das rotas (Sol_R), a quantidade de emissão de CO_2 (Sol_G) e o tempo computacional, em segundos, gasto para obter a melhor solução (T_B) e o tempo total de execução da VNS (T_T). Nos resultados, observa-se que a VNS teve maior dificuldade em obter soluções de qualidade para as instâncias com maior número de clientes, em especial, aquelas com 200 ou mais clientes.

5.9.3 Resultados do G2L-SDVRP para as Instâncias da Classe 6

A Tabela 39 apresenta uma comparação dos resultados obtidos pelo BC e pela VNS para as instâncias da Classe 6 que foram geradas de forma que todo cliente demanda pelo menos dois itens. Na tabela, para cada instância, é fornecido o custo das rotas (Sol_R), a quantidade de emissão de CO_2 (Sol_G), o tempo computacional em segundos, o número de veículos utilizados (VH), o número de clientes que tiveram sua entrega fracionada (CS) para os dois métodos. Em seguida, a diferença percentual relativa média (GAP) entre as soluções da VNS e do BC para o custo das rotas (GAP_R) e a emissão de CO_2 (GAP_G) são reportados.

Os resultados da Tabela 39 mostram que o tempo computacional da VNS é menor que do BC em cerca de 2000 segundos. A VNS utilizou um menor número de veículos, bem como atendeu uma menor quantidade de clientes com entrega fracionada. Apesar da VNS obter soluções com um menor número de clientes com entrega fracionada, em algumas instâncias (E030-03g e E033-03n) atender um menor número de clientes com entrega fracionada gerou menos emissão de CO_2 . Em resumo, a VNS reduziu a emissão de CO_2 e o custo das rotas em 0,20% e 0,16%, respectivamente. Para quatro instâncias, a solução da VNS foi melhor, para cinco instâncias teve o mesmo desempenho e para três instâncias obteve resultados piores, no contexto da emissão de CO_2 .

A Figura 68 ilustra os GAPs das instâncias, em que as soluções da VNS e do BC foram diferentes. A maior redução de emissão de CO_2 aconteceu na instância E030-03g, sendo que a VNS melhorou a solução do BC em 1,96% e ainda reduziu o custo das rotas em 3,78%. A pior solução da VNS é na instância E023-03g, com diferença na emissão de CO_2 em 1,91% a favor do BC. O maior ganho no custo das rotas foi para a instância E030-03g, em que a VNS obteve rotas com custo de 3,38% menor que o BC.

A Tabela 40 apresenta uma comparação entre a solução final da VNS e sua solução inicial. As informações da tabela são análogas às da Tabela 37. Os resultados indicam uma melhoria média de 45% entre as soluções inicial e final, sendo que para mais da metade das instâncias o ganho é maior que 30%. O menor ganho foi de 16,99%, para a instância E256-14k. O tempo computacional gasto para obter a solução final é cerca de 1800 segundos maior que o tempo para encontrar a solução inicial.

Tabela 38 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias das Classes 2 a 5.

Instância	Class 2					Class 3					Class 4					Class 5												
	Nome	Clientes	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Solr	Solq	Tb	T _r	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Solr	Solq	Tb	T _r	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Solr	Solq	Tb	T _r		
E01-6-03m	E01-6-03m	15	3	3	3	1	282	1329,64	0,33	47,43	3	3	3	2	201	1345,90	18,01	98,66	3	3	4	4	0	288	1193,44	0,12	20,72	
E01-6-05m	E01-6-05m	15	5	5	5	1	330	1558,24	0,02	5,45	5	5	5	3	333	1558,88	1,60	13,71	5	5	5	5	1	308	1494,37	0,04	8,97	
E02-1-04m	E02-1-04m	20	4	5	5	1	402	1683,62	0,03	23,27	4	5	5	0	391	1638,97	0,48	44,59	4	5	5	5	0	360	1577,67	0,09	20,63	
E02-1-06m	E02-1-06m	20	6	6	6	1	443	2022,97	0,06	12,64	6	6	6	2	427	1966,85	0,30	19,86	6	6	6	6	1	436	1995,89	1,15	34,15	
E02-2-04g	E02-2-04g	21	4	4	4	1	382	1811,93	0,12	47,94	4	4	4	0	373	1769,66	0,16	44,60	4	4	4	4	1	377	1825,55	1,13	87,36	
E02-2-06m	E02-2-06m	21	6	6	6	1	473	2526,14	0,07	18,81	6	6	6	6	499	2338,15	0,03	27,65	6	6	6	6	6	2	479	2308,89	84,15	167,82
E02-3-05g	E02-3-05g	22	4	5	5	1	715	2547,63	0,14	49,22	4	5	4	1	674	2502,23	56,22	154,11	4	5	4	5	4	1	694	2498,22	151,37	287,30
E02-3-05m	E02-3-05m	22	4	5	4	2	681	2464,52	2,49	39,66	4	5	4	1	750	2564,96	1,79	72,81	4	4	4	5	5	1	699	2494,76	13,93	121,42
E02-6-08m	E02-6-08m	25	8	8	8	2	613	2879,20	10,24	37,28	8	8	8	4	621	2885,36	71,77	135,23	8	8	8	8	4	615	2886,65	29,74	116,86	
E03-0-02g	E03-0-02g	29	5	6	6	1	700	2663,79	1,62	160,06	4	6	5	1	622	2503,73	15,13	282,77	6	6	7	6	1	703	2657,68	23,42	417,97	
E03-0-04s	E03-0-04s	30	5	6	6	1	709	2734,84	1,12	156,12	6	7	6	1	705	2674,84	26,74	462,84	6	6	7	7	2	782	2894,96	579,29	1131,61	
E03-1-09h	E03-1-09h	30	9	9	9	3	609	2876,08	1,38	78,97	9	9	9	3	588	2794,28	0,50	34,46	9	9	9	9	4	606	2844,75	20,64	332,41	
E03-3-04h	E03-3-04h	32	5	7	6	1	2693	9528,91	1,72	138,14	5	7	6	0	2472	9101,12	13,66	332,73	6	6	7	7	2	2621	9266,25	1117,25	1800,00	
E03-3-04g	E03-3-04g	32	5	7	6	1	2693	9528,91	6,12	288,97	5	7	5	1	1026	4519,54	718,66	1661,64	6	6	7	7	5	2	979	4361,11	139,45	1447,64
E03-3-05s	E03-3-05s	32	5	6	5	2	1041	4548,36	218,93	612,03	6	6	6	1	1168	4823,86	12,72	446,09	6	6	8	8	7	3	1235	4921,60	435,50	1800,00
E03-6-11h	E03-6-11h	35	11	11	11	2	699	3229,52	0,24	52,49	11	11	11	4	702	3230,41	2,73	119,36	11	11	11	11	4	711	3230,45	16,18	236,74	
E04-1-14h	E04-1-14h	40	14	14	14	3	848	3981,83	0,61	72,16	14	14	14	4	847	3972,59	2,27	84,22	14	14	14	14	4	846	3976,00	0,66	103,65	
E04-5-04f	E04-5-04f	44	7	9	8	2	1048	3620,90	549,44	1722,59	8	10	9	1	1085	3705,70	1008,60	1800,00	8	10	10	10	4	1109	3764,42	755,88	1800,00	
E05-1-05e	E05-1-05e	50	9	11	11	4	769	2850,56	370,62	1652,77	10	11	11	2	797	2871,54	57,38	1800,00	10	12	11	3	799	2861,89	252,62	1800,00		
E07-2-04f	E07-2-04f	71	12	14	14	6	515	1677,44	1133,73	1800,00	13	15	14	4	512	1658,53	585,45	1800,00	13	16	15	10	525	1683,04	605,00	1800,00		
E07-6-07s	E07-6-07s	75	12	14	14	2	1047	3807,47	452,91	1800,00	14	17	17	7	1135	3961,93	1598,48	1800,00	12	17	14	5	991	3601,74	779,98	1800,00		
E07-6-08s	E07-6-08s	75	13	15	15	3	1077	4063,90	696,27	1800,00	14	16	15	3	1088	4053,98	673,04	1800,00	14	17	16	4	1076	4011,51	673,11	1800,00		
E07-6-14s	E07-6-14s	75	13	14	14	4	1077	4439,88	938,40	1800,00	14	16	16	2	1106	4413,87	451,26	1800,00	14	16	15	3	1114	4358,91	1400,69	1800,00		
E07-6-10e	E07-6-10e	100	14	17	17	6	1226	5260,99	332,74	1800,00	14	17	17	5	1124	4935,29	234,64	1800,00	14	17	17	10	1421	4959,21	1296,91	1800,00		
E01-1-08e	E01-1-08e	100	18	21	21	6	1443	5007,84	1291,87	3600,00	18	21	21	9	1401	4896,90	2974,63	3600,00	19	22	21	10	1421	4900,91	3570,39	3600,00		
E01-1-08c	E01-1-08c	100	16	19	19	5	1293	5087,44	1084,34	3600,00	17	20	20	5	1417	5428,18	3483,37	3600,00	15	20	17	5	1245	4957,78	471,85	3600,00		
E01-1-08a	E01-1-08a	100	18	21	21	6	1443	5007,84	1291,87	3600,00	18	21	21	9	1401	4896,90	2974,63	3600,00	19	22	21	10	1421	4900,91	3570,39	3600,00		
E01-1-14s	E01-1-14s	100	17	19	19	5	1371	5707,51	804,69	3600,00	19	22	21	10	1426	5755,55	1929,56	3600,00	18	22	20	8	1353	5572,86	2631,53	3600,00		
E12-1-07c	E12-1-07c	120	20	23	22	9	2694	9244,83	2225,96	3600,00	21	25	24	11	2765	9416,45	3238,10	3600,00	21	25	24	17	2691	9221,00	3436,22	3600,00		
E13-1-07c	E13-1-07c	134	21	24	24	13	2221	7939,87	3590,93	3600,00	22	26	25	18	2114	7648,45	1938,11	3600,00	24	28	27	28	24	2139	7621,06	2626,11	3600,00	
E15-1-12b	E15-1-12b	150	25	29	28	16	1835	6580,92	3531,47	3600,00	27	30	30	10	1871	6659,61	2502,64	3600,00	26	30	30	30	12	1864	6602,77	3292,26	3600,00	
E20-0-16b	E20-0-16b	199	33	38	37	13	2321	8473,10	3438,21	3600,00	35	40	40	16	2338	8491,20	3572,14	3600,00	37	42	41	41	18	2443	8737,09	2952,33	3600,00	
E20-0-17b	E20-0-17b	199	33	38	38	8	2339	8521,11	3095,67	3600,00	34	39	39	16	2329	8385,21	3412,12	3600,00	34	41	40	38	14	2431	8401,43	2004,53	3600,00	
E20-1-27c	E20-1-27c	199	32	37	37	18	2330	8483,48	2301,15	3600,00	35	41	40	13	2429	8707,23	3563,17	3600,00	36	41	40	19	2434	8718,03	3004,83	3600,00		
E24-1-27c	E24-1-27c	240	40	46	46	30	1087	4082,64	2888,34	3600,00	42	49	49	41	1098	4124,09	3224,57	3600,00	44	50	50	43	1095	4098,53	3583,11	3600,00		
E25-1-27k	E25-1-27k	252	39	45	45	17	1386	5166,51	2919,67	3600,00	43	50	50	27	1461	5318,45	3553,33	3600,00	44	50	50	31	1514	5330,35	3570,53	3600,00		
E25-6-14k	E25-6-14k	255	41	47	46	37	1719	5536,86	2989,49	3600,00	44	51	50	47	1789	5720,10	3030,62	3600,00	45	51	48	48	1649	5334,09	3507,77	3600,00		

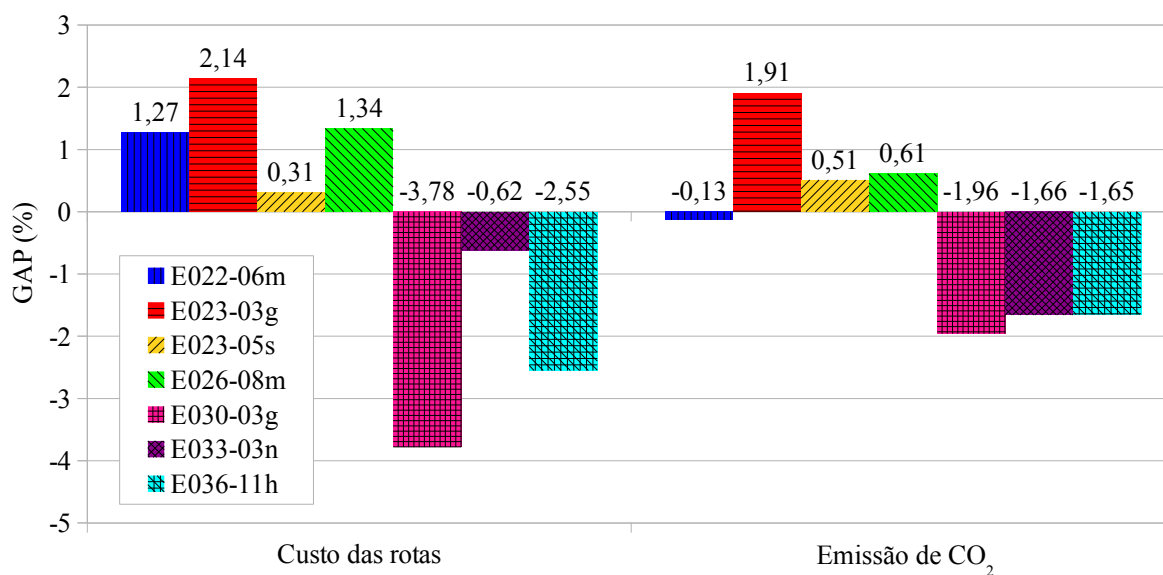
Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 39 – Comparação dos resultados do G2L-SDVRP obtidos pela VNS e BC para a Classe 6.

Instância	Método exato BC					Meta-heurística VNS					GAP (%)	
	Sol _R	Sol _G	Tempo (s)	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo (s)	VH	CS	GAP _R	GAP _G
E016-03m	284	1152,93	4,40	4	0	284	1152,93	7,46	4	0	0,00	0,00
E016-05m	308	1494,37	66,16	5	1	308	1494,37	4,26	5	1	0,00	0,00
E021-04m	360	1577,67	818,81	5	0	360	1577,67	94,48	5	0	0,00	0,00
E021-06m	427	1967,97	3598,25	6	2	427	1967,97	21,84	6	2	0,00	0,00
E022-04g	367	1751,55	158,19	4	0	367	1751,55	156,02	4	0	0,00	0,00
E022-06m	473	2311,50	3596,45	6	2	479	2308,55	22,64	6	2	1,27	-0,13
E023-03g	653	2414,24	3581,86	4	2	667	2460,34	671,70	4	2	2,14	1,91
E023-05s	653	2414,24	3581,81	4	2	655	2426,45	581,78	4	2	0,31	0,51
E026-08m	598	2828,42	3597,31	8	3	606	2845,57	38,84	8	1	1,34	0,61
E030-03g	662	2560,66	3596,88	7	2	637	2510,52	1609,72	6	1	-3,78	-1,96
E033-03n	2439	8981,47	3572,22	6	3	2424	8832,43	1409,83	6	1	-0,62	-1,66
E036-11h	707	3250,60	3299,97	11	5	689	3196,96	58,36	11	5	-2,55	-1,65
Média			2456,03	70	22			389,74	69	17	-0,16	-0,20

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 68 – GAP das instâncias com soluções diferentes entre o BC e a VNS para a Classe 6.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados completos obtidos pela VNS para as 36 instâncias da Classe 6 são apresentados na Tabela 41. A tabela fornece as mesmas informações da Tabela 38. As instâncias com maior número de clientes com entrega fracionada (superior a 15 clientes) contém um total de 120 ou mais clientes. No que diz respeito ao tempo computacional, as instâncias maiores demandaram mais tempo, sendo que as instâncias com 200 ou mais clientes tiveram a melhor solução obtida próxima dos 3600 segundos.

Tabela 40 – Melhoria obtida pela VNS em comparação com a solução inicial para a Classe 6.

Instância	Solução da VNS					
	Sol _I	Sol _F	GAP(%)	T _I	T _F	DT
E016-03m	1399,16	1152,93	21,36	0,00	7,46	7,46
E016-05m	2239,99	1494,37	49,90	0,02	4,26	4,24
E021-04m	2543,54	1577,67	61,22	0,07	94,48	94,41
E021-06m	3106,67	1967,97	57,86	0,10	21,84	21,74
E022-04g	2470,41	1751,55	41,04	0,11	156,02	155,91
E022-06m	3765,33	2308,55	63,10	0,02	22,64	22,62
E023-03g	3226,23	2460,34	31,13	0,34	671,70	671,36
E023-05s	3226,23	2426,45	32,96	0,34	581,78	581,44
E026-08m	4526,82	2845,57	59,08	0,45	38,84	38,39
E030-03g	3472,64	2510,52	38,32	0,36	1609,72	1609,36
E030-04s	3472,64	2510,52	38,32	0,36	1613,00	1612,64
E031-09h	4423,70	2760,26	60,26	0,01	99,01	99,00
E033-03n	13816,30	8832,43	56,43	0,45	1409,83	1409,38
E033-04g	6454,57	4626,17	39,52	0,66	1800,00	1799,34
E033-05s	6454,57	4626,17	39,52	0,66	1800,00	1799,34
E036-11h	5336,44	3196,96	66,92	0,01	58,36	58,35
E041-14h	5850,39	3954,48	47,94	0,00	117,47	117,47
E045-04f	4501,05	3351,76	34,29	1,40	1800,00	1798,60
E051-05e	4555,68	2604,56	74,91	0,81	1800,00	1799,19
E072-04f	2051,81	1455,88	40,93	1,01	1800,00	1798,99
E076-07s	5460,04	3432,02	59,09	1,84	1800,00	1798,16
E076-08s	5917,82	3640,26	62,57	2,21	1800,00	1797,79
E076-10e	6722,73	3983,81	68,75	1,54	1800,00	1798,46
E076-14s	7519,89	4760,28	57,97	0,56	1800,00	1799,44
E101-08e	6939,74	4308,79	61,06	3,43	3600,00	3596,57
E101-10c	6393,05	4862,55	31,48	1,77	3600,00	3598,23
E101-14s	8555,26	5198,67	64,57	2,64	3600,00	3597,36
E121-07c	9512,14	8211,17	15,84	5,02	3600,00	3594,98
E135-07f	10028,70	7174,28	39,79	6,48	3600,00	3593,52
E151-12b	8889,45	5909,77	50,42	4,97	3600,00	3595,03
E200-16b	11691,80	7544,48	54,97	7,09	3600,00	3592,91
E200-17b	11691,80	7526,24	55,35	6,62	3600,00	3593,38
E200-17c	11597,70	7471,74	55,22	6,01	3600,00	3593,99
E241-22k	4931,31	3489,76	41,31	5,65	3600,00	3594,35
E253-27k	6203,04	4630,11	33,97	11,05	3600,00	3588,95
E256-14k	5467,73	4673,65	16,99	22,19	3600,00	3577,81
Média	5956,01	4034,24	47,90	2,67	1830,73	1828,06

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 41 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias da Classe 6.

Instância		Solução da VNS							
Nome	Cliente	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	T _B	T _T
E016-03m	15	3	4	4	0	284	1152,93	0,01	7,46
E016-05m	15	5	5	5	1	308	1494,37	0,02	4,26
E021-04m	20	4	5	5	0	360	1577,67	1,91	94,48
E021-06m	20	6	6	6	2	427	1967,97	0,22	21,84
E022-04g	21	4	5	4	0	367	1751,55	0,87	156,02
E022-06m	21	6	6	6	2	479	2308,55	2,86	22,64
E023-03g	22	4	6	4	2	667	2460,34	314,81	671,70
E023-05s	22	4	6	4	2	655	2426,45	247,33	581,78
E026-08m	25	8	8	8	1	606	2845,57	0,23	38,84
E030-03g	29	5	7	6	1	637	2510,52	609,38	1609,72
E030-04s	29	5	7	6	1	637	2510,52	601,31	1613,00
E031-09h	30	9	9	9	4	585	2760,26	54,01	99,01
E033-03n	32	5	8	6	1	2424	8832,43	68,56	1409,83
E033-04g	32	5	8	6	2	1114	4626,17	535,14	1800,00
E033-05s	32	5	8	6	2	1114	4626,17	531,65	1800,00
E036-11h	35	11	11	11	5	689	3196,96	2,87	58,36
E041-14h	40	14	14	14	5	842	3954,48	5,03	117,47
E045-04f	44	7	10	8	3	949	3351,76	785,29	1800,00
E051-05e	50	8	12	10	0	689	2604,56	78,37	1800,00
E072-04f	71	11	16	12	8	438	1455,88	848,68	1800,00
E076-07s	75	11	17	12	1	901	3432,02	368,78	1800,00
E076-08s	75	11	17	12	3	910	3640,26	987,28	1800,00
E076-10e	75	11	16	12	2	943	3983,81	1252,70	1800,00
E076-14s	75	14	17	15	3	1058	4760,28	166,77	1800,00
E101-08e	100	15	22	16	6	1181	4308,79	2307,92	3600,00
E101-10c	100	15	20	16	3	1207	4862,55	299,21	3600,00
E101-14s	100	15	22	16	4	1196	5198,67	1339,07	3600,00
E121-07c	120	18	25	19	21	2303	8211,17	3595,48	3600,00
E135-07f	134	20	28	22	25	1970	7174,28	3424,41	3600,00
E151-12b	150	22	30	24	16	1610	5909,77	1962,43	3600,00
E200-16b	199	29	42	31	18	1977	7544,48	2995,43	3600,00
E200-17b	199	29	39	31	21	1989	7526,24	3438,99	3600,00
E200-17c	199	29	41	31	18	1957	7471,74	3529,41	3600,00
E241-22k	240	34	50	38	40	862	3489,76	3058,57	3600,00
E253-27k	252	36	50	40	33	1205	4630,11	3235,84	3600,00
E256-14k	255	36	51	39	53	1400	4673,65	3228,71	3600,00

Fonte: Elaborada pela autora.

5.10 Considerações Finais

Neste capítulo, uma meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável (VNS) é proposta para obter soluções para o G2L-SDVRP. A meta-heurística desenvolvida é composta de quatro operadores de vizinhança, uma busca local baseada em descida em vizinhança variável, um modelo de particionamento de conjunto, um procedimento para diversificar a solução e uma estratégia com diferentes procedimentos para verificar rapidamente a viabilidade do empacotamento das rotas.

Dois conjuntos de instâncias foram utilizados para a avaliação da qualidade da meta-heurística VNS. O primeiro conjunto é composto por 180 instâncias da literatura, enquanto o segundo foi gerado neste trabalho e contém um total de 36 instâncias. As instâncias possuem até 255 clientes e 786 itens.

Para avaliar a eficiência da meta-heurística VNS, experimentos computacionais foram

realizados para o 2L-CVRP apresentado na literatura e mostraram que a VNS proposta é eficiente, conseguindo melhorar soluções obtidas por outros métodos apresentados anteriormente para o 2L-CVRP, com diferença média de 0,4% e 0,12%. Além disso, a VNS obteve 97 soluções iguais, 50 soluções melhores e 33 soluções piores que a melhor conhecida na literatura. Em geral, a VNS retornou soluções melhores que a melhor solução conhecida com diferença percentual relativa média de 0,04%.

Ao comparar as soluções obtidas para as instâncias da literatura pelo método exato *branch-and-cut* (BC) e a meta-heurística VNS, é possível verificar que a VNS conseguiu reduzir a emissão de CO₂ em média de 0,56%. Em resumo, a VNS reduziu a emissão de CO₂ para 17 instâncias, obteve 27 soluções iguais e 4 soluções piores que o BC. Além disso, o tempo gasto pela VNS é inferior ao BC. Para a nova classe de instâncias gerada, em que todos os clientes demandam dois ou mais itens, a VNS obteve uma redução média de emissão de CO₂ de 0,20% comparado ao BC. Além disso, para quatro instâncias a solução da VNS foi melhor, cinco igual e três pior que do BC, no contexto da emissão de CO₂.

Para as demais instâncias que não foram resolvidas pelo método exato, foi realizada uma comparação com a solução inicial obtida pela meta-heurística e ganhos médios acima de 40% foram obtidos. Logo, pode-se concluir que a VNS retornou soluções de qualidade dentro de um tempo aceitável.

Neste contexto, a possibilidade de entrega fracionada proporciona benefícios na redução da emissão de CO₂. Na Seção 4.5, ficou evidente que o G2L-SDVRP conseguiu reduzir a emissão de CO₂ do 2L-SDVRP em 3,36%. Assim, como a meta-heurística VNS obteve soluções de melhor qualidade que o método exato, o ganho na redução da emissão de CO₂ é ainda maior.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, é abordado o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP) com a incorporação da possibilidade de entrega fracionada e considerando a emissão de dióxido de carbono (CO_2). O objetivo é analisar quais são as vantagens, em relação aos custos de transporte e aos benefícios ao meio ambiente, obtidas com a adição destas novas características ao 2L-CVRP. Para tanto, três versões do 2L-CVRP são estudadas: o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada (2L-SDVRP), o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional para a minimização da emissão de CO_2 (G2L-CVRP) e o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e entrega fracionada para a minimização da emissão de CO_2 (G2L-SDVRP).

Os problemas estudados visam definir as rotas dos veículos para suprir a demanda dos clientes por itens retangulares, em que o empacotamento bidimensional dos itens em cada rota deve ser viável. Além disso, no 2L-SDVRP e no G2L-SDVRP é permitido que um cliente seja atendido por mais de um veículo, e no G2L-CVRP e no G2L-SDVRP, busca-se reduzir a emissão de CO_2 .

Para cada versão do 2L-CVRP, um modelo matemático é desenvolvido e um método exato do tipo *branch-and-cut* é utilizado para resolvê-los. Como os modelos possuem um número exponencial de restrições, procedimentos de separação são utilizados para detectar desigualdades violadas e inserir cortes quando necessário. Experimentos computacionais são realizados utilizando um conjunto de instâncias da literatura e outro proposto neste trabalho. Os resultados indicam que economias nos custos das rotas e redução da emissão de CO_2 podem ser obtidas para o 2L-SDVRP e o G2L-SDVRP em relação ao 2L-CVRP. O G2L-CVRP proporciona melhorias na redução da emissão de gases quando comparado ao 2L-CVRP. Logo, a agregação das restrições de entrega fracionada e a consideração de emissão de CO_2 ao 2L-CVRP fornecem benefícios às empresas, reduzindo seus gastos com as operações de transporte e poluição ao

meio ambiente.

Além da abordagem exata, nesta tese, é desenvolvida uma meta-heurística baseada na busca em vizinhança variável com agregação de alguns procedimentos para melhor explorar o espaço de busca, tais como: operadores de vizinhança, busca local baseada na descida em vizinhança variável, procedimento de diversificação e, por fim, um procedimento para empacotar itens que considera uma estratégia de aumentar itens, diferentes limitantes inferiores, um método exato e a técnica *Open Space* combinada com uma busca local aleatória. Em geral, a meta-heurística retorna soluções competitivas com as obtidas pelo método exato *branch-and-cut*, conseguindo obter soluções para o G2L-SDVRP de melhor qualidade.

Os resultados obtidos através do método exato e da meta-heurística indicam que economias podem ser alcançadas nos custos das rotas e nas emissões de CO₂ quando o G2L-SDVRP é resolvido ao invés do 2L-CVRP. Logo, considerar a possibilidade de entrega fracionada e a emissão de CO₂ no 2L-CVRP é bastante benéfico, reduzindo os custos com transporte e a poluição ao meio ambiente.

Em trabalhos futuros seria interessante estudar variantes do G2L-SDVRP com outras restrições práticas, como janelas de tempo, coleta e entrega, e frota heterogênea, visto que tais restrições se aproximam mais dos problemas do dia a dia. Outra opção, seria permitir que um cliente seja visitado por um mesmo veículo mais de uma vez, visto que não está claro o impacto (positivo ou negativo) que isto pode causar ao problema, em especial, devido ao fato da restrição de empacotamento sequencial. Com relação às desigualdades para eliminar subciclos, seria interessante utilizar/adaptar desigualdades válidas existentes na literatura para fortalecer o modelo ou até mesmo propor desigualdades específicas para o 2L-CVRP e suas variantes.

Como observado nos resultados do método *branch-and-cut*, a resolução dos problemas com entrega fracionada (2L-SDVRP e G2L-SDVRP) demandou mais tempo e, para grande parte das instâncias, não foi possível obter uma solução comprovadamente ótima. Consequentemente, espera-se que estudos futuros envolvam a proposta de modelos mais compactos, especialmente, modelos baseados em dois índices, visto que eles mostram ser mais eficientes. Outra linha de trabalhos futuros deveria tratar o problema tendo como objetivo a ponderação do custo das rotas e da emissão de CO₂. Durante a comparação dos resultados obtidos pelo método exato com os da meta-heurística, observa-se que para algumas instâncias a meta-heurística conseguiu reduzir os custos das rotas de modo que a quantidade de CO₂ emitida foi igual a do método exato. No que diz respeito ao problema de empacotamento, seria importante incorporar restrições de estabilidade, agrupamento, fragilidade, balanceamento de carga e rotação dos itens. Por fim, seria interessante estudar e desenvolver um método híbrido (isto é, uma *math*-heurística).

REFERÊNCIAS

ABAD, H. K. E.; VAHDANI, B.; SHARIFI, M.; ETEBARI, F. A bi-objective model for pickup and delivery pollution-routing problem with integration and consolidation shipments in cross-docking system. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 193, p. 784–801, 2018. Citado na página 70.

ABDAL-HAMMED, M. K.; HIFI, M.; WU, L. Large neighborhood search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: IEEE. **2014 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)**. [S.l.], 2014. p. 054–059. Citado nas páginas 52 e 53.

ADEWUMI, A. O.; ADELEKE, O. J. A survey of recent advances in vehicle routing problems. **International Journal of System Assurance Engineering and Management**, Springer, v. 9, n. 1, p. 155–172, 2018. Citado na página 47.

ADIBA, E. B. E. I.; ELHASSANIA, M.; AHEMD, E. H. A. A hybrid ant colony system for green capacitated vehicle routing problem in sustainable transport. **Journal of Theoretical and Applied Information Technology**, v. 54, n. 2, p. 108–208, 2013. Citado nas páginas 68 e 69.

AGÊNCIA TRANSPORTA BRASIL. **VW Caminhões e Ônibus entra para o Logística Verde Brasil**. 2019. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.transportabrasil.com.br/2019/06/vw-caminhoes-e-onibus-entra-para-o-logistica-verde-brasil/>>. Citado na página 45.

ALBAREDA-SAMBOLA, M.; FERNÁNDEZ, E.; LAPORTE, G. A computational comparison of several models for the exact solution of the capacity and distance constrained plant location problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 38, n. 8, p. 1109–1116, 2011. Citado na página 91.

ALEMAN, R. E.; ZHANG, X.; HILL, R. R. An adaptive memory algorithm for the split delivery vehicle routing problem. **Journal of Heuristics**, Springer, v. 16, n. 3, p. 441–473, 2010. Citado nas páginas 62 e 63.

ALINAGHIAN, M.; ZAMANLOU, K.; SABBAGH, M. S. A bi-objective mathematical model for two-dimensional loading time-dependent vehicle routing problem. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 68, n. 11, p. 1422–1441, 2017. Citado na página 57.

ALVAREZ-VALDÉS, R.; PARREÑO, F.; TAMARIT, J. M. A branch and bound algorithm for the strip packing problem. **OR Spectrum**, Springer, v. 31, n. 2, p. 431–459, 2009. Citado nas páginas 16, 19, 155, 156 e 157.

AMBEV. **Ambev busca empresas para programa frota compartilhada**. 2016. Acesso em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.ambev.com.br/imprensa/releases/ambev-busca-empresas-para-programa-frota-compartilhada/>>. Citado na página 45.

- ANNOUCH, A.; BELLABDAOUI, A.; MINKHAR, J. Split delivery and pickup vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: IEEE. **2016 11th International Conference on Intelligent Systems: Theories and Applications (SITA)**. [S.l.], 2016. p. 1–6. Citado nas páginas 56, 57, 64 e 71.
- ARCHETTI, C.; BIANCHETTI, N.; SPERANZA, M. G. A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. **Networks**, Wiley Online Library, v. 58, n. 4, p. 241–254, 2011. Citado nas páginas 60 e 61.
- _____. Branch-and-cut algorithms for the split delivery vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 238, n. 3, p. 685–698, 2014. Citado nas páginas 60 e 61.
- _____. A branch-price-and-cut algorithm for the commodity constrained split delivery vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 64, p. 1–10, 2015. Citado na página 64.
- ARCHETTI, C.; SAVELSBERGH, M. W.; SPERANZA, M. G. Worst-case analysis for split delivery vehicle routing problems. **Transportation science**, INFORMS, v. 40, n. 2, p. 226–234, 2006. Citado na página 59.
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G. The split delivery vehicle routing problem: a survey. In: **The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 103–122. Citado nas páginas 59, 60, 62 e 84.
- _____. Vehicle routing problems with split deliveries. **International transactions in operational research**, Wiley Online Library, v. 19, n. 1-2, p. 3–22, 2012. Citado nas páginas 59 e 60.
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G.; HERTZ, A. A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem. **Transportation science**, INFORMS, v. 40, n. 1, p. 64–73, 2006. Citado nas páginas 62 e 63.
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G.; SAVELSBERGH, M. W. An optimization-based heuristic for the split delivery vehicle routing problem. **Transportation Science**, INFORMS, v. 42, n. 1, p. 22–31, 2008. Citado nas páginas 61 e 62.
- AZEVEDO, B. L. P.; HOKAMA, P. H.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: **Anais do XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2491–2502. Citado nas páginas 50 e 51.
- BATSYN, M. V.; BATSYNA, E. K.; BYCHKOV, I. S.; PARDALOS, P. M. Vehicle assignment in site-dependent vehicle routing problems with split deliveries. **Operational Research**, Springer, p. 1–25, 2019. Citado na página 64.
- BEASLEY, J. E. Route first—cluster second methods for vehicle routing. **Omega**, Elsevier, v. 11, n. 4, p. 403–408, 1983. Citado na página 62.
- BEKTAŞ, T.; LAPORTE, G. The pollution-routing problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 45, n. 8, p. 1232–1250, 2011. Citado nas páginas 67 e 70.
- BELONGUER, J.-M.; MARTINEZ, M.; MOTA, E. A lower bound for the split delivery vehicle routing problem. **Operations research**, INFORMS, v. 48, n. 5, p. 801–810, 2000. Citado nas páginas 60 e 61.

- BERBOTTO, L.; GARCÍA, S.; NOGALES, F. J. A randomized granular tabu search heuristic for the split delivery vehicle routing problem. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 222, n. 1, p. 153–173, 2014. Citado nas páginas 62 e 63.
- BIN, W.; HONG, C.; ZHI-YONG, C. Artificial bee colony algorithm for two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. In: IEEE. **International Conference on Management Science and Engineering (ICMSE)**. [S.l.], 2013. p. 406–412. Citado nas páginas 52 e 54.
- BORTFELDT, A.; YI, J. The split delivery vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 282, n. 2, p. 545–558, 2020. Citado na página 64.
- BOSCHETTI, M. A.; MINGOZZI, A.; HADJICONSTANTINO, E. New upper bounds for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting stock problem. **IMA Journal of Management Mathematics**, OUP, v. 13, n. 2, p. 95–119, 2002. Citado nas páginas 153 e 201.
- BOSCHETTI, M. A.; MONTALETTI, L. An exact algorithm for the two-dimensional strip-packing problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 58, n. 6, p. 1774–1791, 2010. Citado nas páginas 157 e 158.
- BOTICÁRIO. **Boti Recicla**. 2006. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.botiario.com.br/boti-recicla/>>. Citado na página 45.
- BOUDIA, M.; PRINS, C.; REGHIOUI, M. An effective memetic algorithm with population management for the split delivery vehicle routing problem. In: SPRINGER. **International Workshop on Hybrid Metaheuristics**. [S.l.], 2007. p. 16–30. Citado nas páginas 62 e 63.
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I. V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 99, p. 300–313, 2016. Citado nas páginas 29 e 47.
- BRAVO, M.; ROJAS, L. P.; PARADA, V. An evolutionary algorithm for the multi-objective pick-up and delivery pollution-routing problem. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 26, p. 302–317, 2019. Citado na página 70.
- CARLIER, J.; CLAUTIAUX, F.; MOUKRIM, A. New reduction procedures and lower bounds for the two-dimensional bin packing problem with fixed orientation. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 34, n. 8, p. 2223–2250, 2007. Citado na página 157.
- CHEN, J.; DAN, B.; SHI, J. A variable neighborhood search approach for the multi-compartment vehicle routing problem with time windows considering carbon emission. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 277, p. 1–14, 2020. Citado na página 70.
- CHEN, S.; GOLDEN, B.; WASIL, E. The split delivery vehicle routing problem: Applications, algorithms, test problems, and computational results. **Networks: An International Journal**, Wiley Online Library, v. 49, n. 4, p. 318–329, 2007. Citado nas páginas 61 e 62.
- CHEN, Z.; YANG, M.; GUO, Y.; LIANG, Y.; DING, Y.; WANG, L. The split delivery vehicle routing problem with three-dimensional loading and time windows constraints. **Sustainability**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 17, p. 1–21, 2020. Citado na página 64.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations research**, Informs, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964. Citado nas páginas 47 e 140.

- CLAUTIAUX, F.; JOUGLET, A.; CARLIER, J.; MOUKRIM, A. A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 944–959, 2008. Citado na página 113.
- COCA-COLA. **Mundo Sem Resíduos: The Coca-Cola Company anuncia meta ambiciosa para embalagens sustentáveis**. 2018. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.cocacolabrasil.com.br/historias/um-mundo-sem-residuos-the-coca-cola-company-anuncia-meta-ambiciosa-para-embalagens-sustentaveis>>. Citado na página 45.
- CORDEAU, J.-F.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.-Y.; SEMET, F. A guide to vehicle routing heuristics. **Journal of the Operational Research society**, Springer, v. 53, n. 5, p. 512–522, 2002. Citado na página 140.
- COSTA, P. R. d. O.; MAUCERI, S.; CARROLL, P.; PALLONETTO, F. A genetic algorithm for a green vehicle routing problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 64, p. 65–74, 2018. 8th International Network Optimization Conference - INOC 2017. Citado nas páginas 68, 69 e 70.
- CÔTÉ, J.-F.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. **Operations Research**, INFORMS, v. 62, n. 5, p. 1126–1141, 2014. Citado na página 110.
- _____. The vehicle routing problem with stochastic two-dimensional items. **Transportation Science**, INFORMS, v. 54, n. 2, p. 453–469, 2020. Citado na página 57.
- CÔTÉ, J.-F.; GUASTARROBA, G.; SPERANZA, M. G. The value of integrating loading and routing. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 257, n. 1, p. 89–105, 2017. Citado nas páginas 34, 50, 51, 54 e 157.
- DABIA, S.; DEMIR, E.; WOENSEL, T. V. An exact approach for a variant of the pollution-routing problem. **Transportation Science**, INFORMS, v. 51, n. 2, p. 607–628, 2016. Citado na página 70.
- D’AGOSTO, M.; OLIVEIRA, C. Logística sustentável: Vencendo o desafio contemporâneo da cadeia de suprimentos. In: _____. **Sustentabilidade: o desafio contemporâneo dos gestores de logística**. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2018. Citado nas páginas 39, 40 e 41.
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. **Management Science**, Inform, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959. Citado na página 47.
- DEKKER, R.; BLOEMHOF, J.; MALLIDIS, I. Operations research for green logistics—an overview of aspects, issues, contributions and challenges. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 219, n. 3, p. 671–679, 2012. Citado na página 66.
- DEKKER, R.; FLEISCHMANN, M.; INDERFURTH, K.; WASSENHOVE, L. N. van. Reverse logistics: quantitative models for closed-loop supply chains. In: _____. **A Framework for Reverse Logistics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 41.
- DEMIR, E.; BEKTAŞ, T.; LAPORTE, G. An adaptive large neighborhood search heuristic for the pollution-routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 223, n. 2, p. 346–359, 2012. Citado nas páginas 69 e 70.
- _____. The bi-objective pollution-routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 232, n. 3, p. 464–478, 2014. Citado na página 70.

_____. A review of recent research on green road freight transportation. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 237, n. 3, p. 775–793, 2014. Citado na página 67.

DEPARTMENT FOR TRANSPORT. **Domestic Road Freight Statistics, United Kingdom 2017**. 2018. Acesso em 30/04/2022. Disponível em: <https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/728937/domestic-road-freight-2017.pdf>. Citado na página 34.

DERIGS, U.; LI, B.; VOGEL, U. Local search-based metaheuristics for the split delivery vehicle routing problem. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 61, n. 9, p. 1356–1364, 2010. Citado na página 62.

DERRAC, J.; GARCÍA, S.; MOLINA, D.; HERRERA, F. A practical tutorial on the use of non-parametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. **Swarm and Evolutionary Computation**, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 3–18, 2011. Citado na página 124.

DESAULNIERS, G. Branch-and-price-and-cut for the split-delivery vehicle routing problem with time windows. **Operations Research, INFORMS**, v. 58, n. 1, p. 179–192, 2010. Citado na página 64.

DEWI, S. K.; UTAMA, D. M. A new hybrid whale optimization algorithm for green vehicle routing problem. **Systems Science & Control Engineering**, Taylor & Francis, v. 9, n. 1, p. 61–72, 2021. Citado nas páginas 68 e 69.

DOMINGUEZ, O.; GUIMARANS, D.; JUAN, A. A.; NUEZ, I. A biased-randomised large neighbourhood search for the two-dimensional vehicle routing problem with backhauls. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 255, n. 2, p. 442–462, 2016. Citado na página 57.

DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; BARRIOS, B.; FAULIN, J.; AGUSTIN, A. Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 236, n. 2, p. 383–404, 2016. Citado na página 57.

DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; FAULIN, J. A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 21, n. 3, p. 375–398, 2014. Citado nas páginas 52 e 54.

DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; NUEZ, I. A.; OUELHADJ, D. An ILS-biased randomization algorithm for the two-dimensional loading hfvpr with sequential loading and items rotation. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 67, n. 1, p. 37–53, 2016. Citado na página 57.

DROR, M.; LAPORTE, G.; TRUDEAU, P. Vehicle routing with split deliveries. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 50, n. 3, p. 239–254, 1994. Citado nas páginas 60, 61, 93 e 94.

DROR, M.; TRUDEAU, P. Savings by split delivery routing. **Transportation Science, INFORMS**, v. 23, n. 2, p. 141–145, 1989. Citado nas páginas 35, 58, 59, 61 e 62.

- _____. Split delivery routing. **Naval Research Logistics (NRL)**, Wiley Online Library, v. 37, n. 3, p. 383–402, 1990. Citado nas páginas 35, 58, 59 e 62.
- DUHAMEL, C.; LACOMME, P.; QUILLIOT, A.; TOUSSAINT, H. A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 617–640, 2011. Citado nas páginas 52, 54 e 55.
- EHMKE, J. F.; CAMPBELL, A. M.; THOMAS, B. W. Vehicle routing to minimize time-dependent emissions in urban areas. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 251, n. 2, p. 478–494, 2016. Citado nas páginas 68 e 69.
- EMMETT, S.; SOOD, V. Green supply chains: an action manifesto. In: _____. **Green Logistics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado na página 43.
- ESCOBAR-FALCÓN, L.; ÁLVAREZ-MARTÍNEZ, D.; WILMER-ESCOBAR, J.; GRANADA-ECHEVERRI, M. A specialized genetic algorithm for the fuel consumption heterogeneous fleet vehicle routing problem with bidimensional packing constraints. **International Journal of Industrial Engineering Computations**, v. 12, n. 2, p. 191–204, 2021. Citado na página 57.
- ESHTEHADI, R.; FATHIAN, M.; PISHVAEE, M. S.; DEMIR, E. A hybrid metaheuristic algorithm for the robust pollution-routing problem. **Journal of Industrial and Systems Engineering**, Iranian Institute of Industrial Engineering, v. 11, n. 1, p. 244–257, 2018. Citado na página 70.
- FEKETE, S. P.; SCHEPERS, J. A new exact algorithm for general orthogonal d-dimensional knapsack problems. In: ESA'9–5TH ANNUAL EUROPEAN SYMPOSIUM, SPRINGER. **Lecture Notes in Computer Science**. [S.l.], 1997. v. 1284, p. 144–156. Citado na página 157.
- _____. New classes of lower bounds for bin packing problems. In: 6TH INTERNATIONAL INTEGER PROGRAMMING AND COMBINATORIAL OPTIMIZATION CONFERENCE, IPCO 98, SPRINGER. **Lecture Notes in Computer Science**. [S.l.], 1998. v. 1412, p. 257–270. Citado na página 157.
- _____. **On more-dimensional packing II: Bounds**. Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Köln, Germany, 2000. (Technical Report zpr97.289). Citado na página 157.
- FERREIRA, K. M.; QUEIROZ, T. A.; TOLEDO, F. M. B. An exact approach for the green vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints and split delivery. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 136, p. 105452, 2021. Citado na página 95.
- FIGLIOZZI, M. Vehicle routing problem for emissions minimization. **Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board**, Transportation Research Board of the National Academies, n. 2197, p. 1–7, 2010. Citado na página 70.
- FISCHETTI, M.; GONZÁLEZ, J. J. S.; TOTH, P. Experiments with a multi-commodity formulation for the symmetric capacitated vehicle routing problem. In: **Proceedings of the 3rd Meeting of the EURO Working Group on Transportation**. Barcelona, Spain: [s.n.], 1995. p. 169–173. Citado na página 91.
- FRANCESCHETTI, A.; DEMIR, E.; HONHON, D.; WOENSEL, T. V.; LAPORTE, G.; STOBBE, M. A metaheuristic for the time-dependent pollution-routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 259, n. 3, p. 972–991, 2017. Citado na página 70.

FRANCESCHETTI, A.; HONHON, D.; WOENSEL, T. V.; BEKTAŞ, T.; LAPORTE, G. The time-dependent pollution-routing problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 56, p. 265–293, 2013. Citado na página 70.

FTA. **The Logistics Report 2019**. Freight Transport Association, UK, 2019. Acesso em 30/04/2022. Disponível em: <https://www.santandercb.co.uk/sites/default/files/documents/fta_logistics_report2019.pdf>. Citado na página 34.

FUELLERER, G.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F.; IORI, M. Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 655–673, 2009. Citado nas páginas 49, 52 e 54.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. [S.l.]: San Francisco: Freeman, 1979. Citado na página 30.

GENDREAU, M.; HERTZ, A.; LAPORTE, G. New insertion and postoptimization procedures for the traveling salesman problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 40, n. 6, p. 1086–1094, 1992. Citado na página 63.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Networks: An International Journal**, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 4–18, 2008. Citado nas páginas 50, 52 e 167.

GHIANI, G.; LAPORTE, G.; MUSMANNO, R. **Introduction to logistics systems planning and control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 39.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961. Citado na página 108.

GOLDEN, B. L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 43. Citado na página 47.

GSCHWIND, T.; BIANCHETTI, N.; IRNICH, S. Stabilized branch-price-and-cut for the commodity-constrained split delivery vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 278, n. 1, p. 91–104, 2019. Citado na página 64.

GUIMARANS, D.; DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; MARTINEZ, E. A multi-start simheuristic for the stochastic two-dimensional vehicle routing problem. In: IEEE. **Proceedings of the 2016 Winter Simulation Conference (WSC)**. [S.l.], 2016. p. 2326–2334. Citado na página 57.

GUIMARANS, D.; DOMINGUEZ, O.; PANADERO, J.; JUAN, A. A. A simheuristic approach for the two-dimensional vehicle routing problem with stochastic travel times. **Simulation Modelling Practice and Theory**, Elsevier, v. 89, p. 1–14, 2018. Citado na página 57.

GULCZYNSKI, D.; GOLDEN, B.; WASIL, E. The multi-depot split delivery vehicle routing problem: An integer programming-based heuristic, new test problems, and computational results. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 61, n. 3, p. 794–804, 2011. Citado na página 64.

GULCZYNSKI, D. J.; GOLDEN, B.; WASIL, E. Recent developments in modeling and solving the split delivery vehicle routing problem. In: **State-of-the-Art Decision-Making Tools in the Information-Intensive Age**. [S.l.]: INFORMS, 2008. p. 170–180. Citado na página 59.

- HADDAD, M. N.; MARTINELLI, R.; VIDAL, T.; MARTINS, S.; OCHI, L. S.; SOUZA, M. J. F.; HARTL, R. Large neighborhood-based metaheuristic and branch-and-price for the pickup and delivery problem with split loads. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 270, n. 3, p. 1014–1027, 2018. Citado na página 64.
- HAMDI-DHAOUI, K.; LABADIE, N.; YALAOUI, A. The bi-objective two-dimensional loading vehicle routing problem with partial conflicts. **International Journal of Production Research**, Taylor & Francis, v. 52, n. 19, p. 5565–5582, 2014. Citado na página 57.
- HANSEN, P.; MLADENOVIC, N.; TODOSIJEVIC, R.; HANAFI, S. Variable neighborhood search: basics and variants. **EURO Journal on Computational Optimization**, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 423–454, 2017. Citado na página 136.
- HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**, IBM, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado nas páginas 104, 105 e 201.
- HO, S. C.; HAUGLAND, D. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 1947–1964, 2004. Citado na página 64.
- HOKAMA, P.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 47, p. 1–13, 2016. Citado nas páginas 50, 51, 106, 110, 117 e 118.
- HP. **Programa de reciclagem: HP Planet Partners Brasil**. 2021. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<http://www.hp.com/latam/br/>>. Citado na página 45.
- IEA. **CO₂ emissions from fuel combustion — highlights**. International Energy Agency, 2018. Acesso em: 28/06/2019. Disponível em: <<https://www.iea.org/>>. Citado nas páginas 35 e 36.
- IORI, M.; MARTELLO, S. An annotated bibliography of combined routing and loading problems. **Yugoslav Journal of Operations Research**, v. 23, n. 3, p. 311–326, 2013. Citado nas páginas 48, 49 e 50.
- IORI, M.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J.-J.; VIGO, D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Transportation Science**, INFORMS, v. 41, n. 2, p. 253–264, 2007. Citado nas páginas 34, 50, 51, 77, 80, 82, 115, 116, 117, 118 e 167.
- JABALI, O.; WOENSEL, T. V.; KOK, A. D. Analysis of travel times and co2 emissions in time-dependent vehicle routing. **Production and Operations Management**, Wiley Online Library, v. 21, n. 6, p. 1060–1074, 2012. Citado na página 70.
- JI, B.; ZHOU, S.; SAMSON, S. Y.; WU, G. An enhanced neighborhood search algorithm for solving the split delivery vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 162, p. 107720, 2021. Citado nas páginas 56, 57, 64 e 71.
- JIN, M.; LIU, K.; BOWDEN, R. O. A two-stage algorithm with valid inequalities for the split delivery vehicle routing problem. **International Journal of Production Economics**, Elsevier, v. 105, n. 1, p. 228–242, 2007. Citado nas páginas 60, 61 e 63.

JIN, M.; LIU, K.; EKŞIOĞLU, B. A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. **Operations Research Letters**, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 265–270, 2008. Citado na página 62.

KHEBBACHE-HADJI, S.; PRINS, C.; YALAOUI, A.; REGHIOUI, M. Heuristics and memetic algorithm for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem with time windows. **Central European Journal of Operations Research**, Springer, v. 21, n. 2, p. 307–336, 2013. Citado na página 57.

KHEBBACHE, S.; PRINS, C.; YALAOUI, A.; REGHIOUI, M. Heuristics for two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem with time windows. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 42, n. 4, p. 1544–1549, 2009. Citado na página 57.

KOÇ, Ç.; BEKTAŞ, T.; JABALI, O.; LAPORTE, G. The fleet size and mix pollution-routing problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 70, p. 239–254, 2014. Citado na página 70.

KOPFER, H. W.; SCHÖNBERGER, J.; KOPFER, H. Reducing greenhouse gas emissions of a heterogeneous vehicle fleet. **Flexible Services and Manufacturing Journal**, Springer, v. 26, n. 1-2, p. 221–248, 2014. Citado na página 70.

KRAMER, R.; MACULAN, N.; SUBRAMANIAN, A.; VIDAL, T. A speed and departure time optimization algorithm for the pollution-routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 247, n. 3, p. 782–787, 2015. Citado na página 70.

KRAMER, R.; SUBRAMANIAN, A.; VIDAL, T.; ANJOS, F. C. Lucídio dos. A matheuristic approach for the pollution-routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 243, n. 2, p. 523–539, 2015. Citado na página 70.

KUMAR, R. S.; KONDAPANENI, K.; DIXIT, V.; GOSWAMI, A.; THAKUR, L. S.; TIWARI, M. Multi-objective modeling of production and pollution routing problem with time window: A self-learning particle swarm optimization approach. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 99, p. 29–40, 2016. Citado na página 70.

KWON, Y.-J.; CHOI, Y.-J.; LEE, D.-H. Heterogeneous fixed fleet vehicle routing considering carbon emission. **Transportation Research Part D**, Elsevier, v. 23, p. 81–89, 2013. Citado na página 70.

LAI, Q.; ZHANG, Z.; JIN, X.; QIN, H. Forest-based tabu search to the split-delivery capacitated arc-routing problem. In: IEEE. **2018 IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)**. [S.l.], 2018. p. 1237–1242. Citado na página 64.

LAPORTE, G. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 59, n. 3, p. 345–358, 1992. Citado na página 47.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. Exact algorithms for the vehicle routing problem. In: **North-Holland Mathematics Studies**. [S.l.]: Elsevier, 1987. v. 132, p. 147–184. Citado na página 47.

LEI, H.; LAPORTE, G.; GUO, B. The vehicle routing problem with stochastic demands and split deliveries. **INFOR: Information Systems and Operational Research**, Taylor & Francis, v. 50, n. 2, p. 59–71, 2012. Citado na página 64.

- LEUNG, S. C.; ZHANG, D.; ZHOU, C.; WU, T. A hybrid simulated annealing metaheuristic algorithm for the two-dimensional knapsack packing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 64–73, 2012. Citado na página 106.
- LEUNG, S. C.; ZHANG, Z.; ZHANG, D.; HUA, X.; LIM, M. K. A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 225, n. 2, p. 199–210, 2013. Citado na página 57.
- LEUNG, S. C.; ZHENG, J.; ZHANG, D.; ZHOU, X. Simulated annealing for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Flexible Services and Manufacturing Journal**, Springer, v. 22, n. 1-2, p. 61–82, 2010. Citado nas páginas 52 e 53.
- LEUNG, S. C.; ZHOU, X.; ZHANG, D.; ZHENG, J. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 205–215, 2011. Citado nas páginas 52 e 53.
- LI, F.; GOLDEN, B.; WASIL, E. Very large-scale vehicle routing: new test problems, algorithms, and results. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 32, n. 5, p. 1165–1179, 2005. Citado na página 61.
- LI, J.; LI, L. Vehicle routing problem of simultaneous deliveries and pickups with two-dimensional loading constraints. In: **ICTE 2013: Safety, Speediness, Intelligence, Low-Carbon, Innovation**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 2654–2660. Citado na página 57.
- LI, J.; WANG, D.; ZHANG, J. Heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem based on fuel and carbon emissions. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 201, p. 896–908, 2018. Citado na página 70.
- LIAO, T.-Y. On-line vehicle routing problems for carbon emissions reduction. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, Wiley Online Library, v. 32, n. 12, p. 1047–1063, 2017. Citado na página 70.
- LIN, C.; CHOY, K. L.; HO, G. T.; CHUNG, S. H.; LAM, H. Survey of green vehicle routing problem: past and future trends. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 41, n. 4, p. 1118–1138, 2014. Citado nas páginas 29, 47 e 67.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 123, n. 1-3, p. 379–396, 2002. Citado na página 83.
- LOGWEB. **Martin-Brower e McDonald's lançam Projeto Biodiesel**. 2010. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<http://www.logweb.com.br/martin-brower-e-mcdonalds-lancam-projeto-biodiesel/>>. Citado na página 45.
- LYSGAARD, J.; LETCHFORD, A. N.; EGGLESE, R. W. A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. **Mathematical Programming**, Springer, v. 100, n. 2, p. 423–445, 2004. Citado na página 51.
- MADEN, W.; EGGLESE, R.; BLACK, D. Vehicle routing and scheduling with time-varying data: A case study. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 61, n. 3, p. 515–522, 2010. Citado na página 68.

- MAHFOUDH, S. S.; BELLALOUNA, M. A hybrid heuristic for the probabilistic capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Science**. [S.l.], 2018. p. 241–253. Citado na página 57.
- MAJIDI, S.; HOSSEINI-MOTLAGH, S.-M.; IGNATIUS, J. Adaptive large neighborhood search heuristic for pollution-routing problem with simultaneous pickup and delivery. **Soft Computing**, Springer, v. 22, n. 9, p. 2851–2865, 2018. Citado na página 70.
- MALAPERT, A.; GUÉRET, C.; JUSSIEN, N.; LANGEVIN, A.; ROUSSEAU, L.-M. Two-dimensional pickup and delivery routing problem with loading constraints. In: **First Workshop on Bin Packing and Placement Constraints (BPPC'08)**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 184. Citado na página 57.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado na página 116.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. **Knapsack problems: algorithms and computer implementations**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1990. Citado na página 154.
- MARTÍNEZ, L.; AMAYA, C.-A. A vehicle routing problem with multi-trips and time windows for circular items. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 64, n. 11, p. 1630–1643, 2013. Citado na página 57.
- MATOS, M. R. S.; FROTA, Y.; OCHI, L. S. Green vehicle routing and scheduling problem with split delivery. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 69, p. 13–20, 2018. Citado nas páginas 64, 65, 70, 71 e 150.
- MCNABB, M. E.; WEIR, J. D.; HILL, R. R.; HALL, S. N. Testing local search move operators on the vehicle routing problem with split deliveries and time windows. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 56, p. 93–109, 2015. Citado na página 64.
- MITRA, S. A parallel clustering technique for the vehicle routing problem with split deliveries and pickups. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 59, n. 11, p. 1532–1546, 2008. Citado na página 64.
- MLADENOVIC, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997. Citado nas páginas 135, 136, 145 e 146.
- MONTOYA-TORRES, J. R.; FRANCO, J. L.; ISAZA, S. N.; JIMÉNEZ, H. F.; HERAZO-PADILLA, N. A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 79, p. 115–129, 2015. Citado na página 47.
- MORENO, L.; ARAGÃO, M. P. D.; UCHOA, E. Improved lower bounds for the split delivery vehicle routing problem. **Operations Research Letters**, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 302–306, 2010. Citado nas páginas 60 e 61.
- MUNARI, P.; SAVELSBERGH, M. A column generation-based heuristic for the split delivery vehicle routing problem with time windows. In: SPRINGER. **SN Operations Research Forum**. [S.l.], 2020. v. 1, n. 4, p. 1–24. Citado na página 64.
- _____. Compact formulations for split delivery routing problems. **Transportation Science**, INFORMS, 2022. Citado nas páginas 60 e 61.

MUNDO LOGÍSTICA. **Armazém verde da Dow e Log-In conquista selo Leed Gold para certificação sustentável**. 2015. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://revistamundologistica.com.br/noticias/armazem-verde-da-dow-e-log-in-conquista-selo-leed-gold-para-certificacao-sustentavel>>. Citado na página 45.

MUÑOZ, A. L. **Solución al problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad y reordenamiento de carga en los sitios de demanda**. Tese (Doutorado) — Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería, Santiago de Chile, 2011. Citado na página 57.

NADERIPOUR, M.; ALINAGHIAN, M. Measurement, evaluation and minimization of CO₂, NO_x, and CO emissions in the open time dependent vehicle routing problem. **Measurement**, Elsevier, v. 90, p. 443–452, 2016. Citado na página 70.

NATURA. **Poluir menos é preocupação da Natura até na hora de entregar seus produtos**. 2018. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.natura.com.br/blog/sustentabilidade/poluir-menos-e-preocupacao-da-natura-ate-na-hora-de-entregar-seus-produtos>>. Citado na página 45.

_____. **Reciclagem: o que a Natura faz por um mundo com menos lixo**. 2019. Acessado em 31/03/2021. Disponível em: <<https://www.natura.com.br/blog/sustentabilidade/reciclagem-o-que-a-natura-faz-por-um-mundo-com-menos-lixo>>. Citado na página 45.

NIU, Y.; YANG, Z.; CHEN, P.; XIAO, J. Optimizing the green open vehicle routing problem with time windows by minimizing comprehensive routing cost. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 171, p. 962–971, 2018. Citado na página 70.

OBSERVATÓRIO DO CLIMA. **Emissões dos Setores de Energia, Processos Industriais e Uso de Produtos**. SEEG Documento de Análise, 2018. Acesso em: 28/06/2019. Disponível em: <<http://seeg.eco.br/documentos-analiticos>>. Citado nas páginas 34, 36 e 37.

OLIVEIRA, A. N. C.; MELO, J. C. de; TEIXEIRA, C. R. B.; MOYA, M. T. M. Logística verde. **SITEFA-Simpósio de Tecnologia da Fatec Sertãozinho**, v. 2, n. 1, p. 354–365, 2019. Citado na página 44.

OSTERMEIER, M.; MARTINS, S.; AMORIM, P.; HÜBNER, A. Loading constraints for a multi-compartment vehicle routing problem. **OR Spectrum**, Springer, v. 40, n. 4, p. 997–1027, 2018. Citado na página 57.

PALMER, A. **The development of an integrated routing and carbon dioxide emissions model for goods vehicles**. Tese (Doutorado) — School of Management, Cranfield University, 2007. Citado nas páginas 66, 68 e 69.

PARAMESTHA, D.; SANTOSA, B. Developing cross entropy genetic algorithm for solving two-dimensional loading heterogeneous fleet vehicle routing problem (2L-HFVRP). In: IOP PUBLISHING. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. [S.l.], 2018. v. 337, n. 1, p. 012001. Citado na página 57.

PINTO, T.; ALVES, C.; CARVALHO, J. V. de. Variable neighborhood search algorithms for pickup and delivery problems with loading constraints. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 58, p. 111–118, 2017. Citado na página 57.

_____. Column generation based primal heuristics for routing and loading problems. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 64, p. 135–144, 2018. Citado nas páginas 52, 53, 54, 55 e 56.

PINTO, T.; ALVES, C.; CARVALHO, J. Valério de. Variable neighborhood search algorithms for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints and mixed linehauls and backhauls. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 27, n. 1, p. 549–572, 2020. Citado na página 57.

PINTO, T.; ALVES, C.; DE, C. J. V.; MOURA, A. An insertion heuristic for the capacitated vehicle routing problem with loading constraints and mixed linehauls and backhauls. **FME Transactions**, v. 43, n. 4, p. 311–318, 2015. Citado na página 57.

POLLARIS, H.; BRAEKERS, K.; CARIS, A.; JANSSENS, G. K.; LIMBOURG, S. Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. **OR Spectrum**, Springer, v. 37, n. 2, p. 297–330, 2015. Citado na página 50.

PRADENAS, L.; OPORTUS, B.; PARADA, V. Mitigation of greenhouse gas emissions in vehicle routing problems with backhauling. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 40, n. 8, p. 2985–2991, 2013. Citado na página 70.

QIAN, J.; EGGLESE, R. Fuel emissions optimization in vehicle routing problems with time-varying speeds. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 248, n. 3, p. 840–848, 2016. Citado na página 70.

RAFF, S. Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of the art. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 63–211, 1983. Citado nas páginas 47 e 48.

RAJAEI, M.; MOSLEHI, G.; REISI-NAFCHI, M. The split heterogeneous vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints on a large scale. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, 2021. Citado na página 64.

RAKHMANGULOV, A.; SLADKOWSKI, A.; OSINTSEV, N.; MURAVEV, D. Green logistics: element of the sustainable development concept. part 1. **NAŠE MORE: znanstveno-stručni časopis za more i pomorstvo**, Sveučilište u Dubrovniku, v. 64, n. 3, p. 120–126, 2017. Citado na página 42.

RATTANAMANEE, T.; CURLEY, P.; PONGWASA, P.; VONGLAK, R. An optimization for split delivery open vehicle routing problem with manual materials handling. In: IEEE. **2018 2nd International Conference on Engineering Innovation (ICEI)**. [S.l.], 2018. p. 90–95. Citado na página 64.

RAY, S.; SOEANU, A.; BERGER, J.; DEBBABI, M. The multi-depot split-delivery vehicle routing problem: Model and solution algorithm. **Knowledge-Based Systems**, Elsevier, v. 71, p. 238–265, 2014. Citado na página 64.

REINELT, G. Tsplib—a traveling salesman problem library. **ORSA Journal on Computing**, INFORMS, v. 3, n. 4, p. 376–384, 1991. Citado na página 115.

RESENDE, P. T. V.; SOUSA, P. R.; CESAR, R. V.; QUINTÃO, A.; FONSECA, F.; FRANCESCHINI, L. **Custos Logísticos No Brasil 2017**. Relatório de Pesquisa - Fundação Dom Cabral, Nova Lima - Minas Gerais, Brasil, 2017. Acesso em: 28/06/2019. Disponível em: <<https://nucleos.fdc.org.br/logistica/>>. Citado nas páginas 32 e 33.

- REZGUI, D.; SIALA, J. C.; AGGOUNE-MTALAA, W.; BOUZIRI, H. Application of a variable neighborhood search algorithm to a fleet size and mix vehicle routing problem with electric modular vehicles. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 130, p. 537–550, 2019. Citado na página 136.
- RODRIGUE, J.-P.; SLACK, B.; COMTOIS, C. The paradoxes of green logistics. In: **Proceedings of the 9th World Conference on Transport Research**. Seoul: [s.n.], 2001. Citado nas páginas 43 e 44.
- ROGERS, D. S.; TIBBEN-LEMBKE, R. An examination of reverse logistics practices. **Journal of Business Logistics**, Wiley Online Library, v. 22, n. 2, p. 129–148, 2001. Citado na página 43.
- SABAR, N. R.; BHASKAR, A.; CHUNG, E.; TURKY, A.; SONG, A. An adaptive memetic approach for heterogeneous vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. **Swarm and Evolutionary Computation**, Elsevier, v. 58, p. 100730, 2020. Citado na página 57.
- SABERI, M.; VERBAS, İ. Ö. Continuous approximation model for the vehicle routing problem for emissions minimization at the strategic level. **Journal of Transportation Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 138, n. 11, p. 1368–1376, 2012. Citado na página 65.
- SAKA, O. C.; GÜREL, S.; WOENSEL, T. V. Using cost change estimates in a local search heuristic for the pollution routing problem. **OR Spectrum**, Springer, v. 39, n. 2, p. 557–587, 2017. Citado na página 70.
- SALIMIFARD, K.; SHAHBANDARZADEH, H.; RAEESI, R. Green transportation and the role of operation research. In: **International Conference on Traffic and Transportation Engineering (ICTTE 2012)**. [S.l.: s.n.], 2012. v. 26, p. 74–79. Citado na página 65.
- SANTOS, J. d. S.; BORTOLON, K. M.; CHIROLI, D. M. d. G.; OIKO, O. T. Logística verde: conceituação e direcionamentos para aplicação. **Revista Eletrônica em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental**, v. 19, n. 2, p. 314–331, 2015. Citado nas páginas 43 e 44.
- SARWONO, A.; AI, T.; WIGATI, S. Combination of nearest neighbor and heuristics algorithms for sequential two dimensional loading capacitated vehicle routing problem. In: **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. [S.l.: s.n.], 2017. v. 166, n. 1, p. 1–24. Citado nas páginas 52 e 54.
- SBAI, I.; LIMEM, O.; KRICHEN, S. An adaptive genetic algorithm for the capacitated vehicle routing problem with time windows and two-dimensional loading constraints. In: **14th International Conference on Computer Systems and Applications (AICCSA)**. [S.l.]: IEEE, 2017. p. 88–95. Citado na página 57.
- SHEN, Y.; MURATA, T. Pick-up scheduling of two-dimensional loading in vehicle routing problem by using ga. In: **Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists**. [S.l.: s.n.], 2012. v. 2, p. 1532–1537. Citado nas páginas 52 e 54.
- SHI, J.; ZHANG, J.; WANG, K.; FANG, X. Particle swarm optimization for split delivery vehicle routing problem. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, World Scientific, v. 35, n. 02, p. 1840006, 2018. Citado nas páginas 62 e 63.

SILVA, M. M.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L. S. An iterated local search heuristic for the split delivery vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 53, p. 234–249, 2015. Citado nas páginas 62, 63 e 146.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. **Operations Research**, *Inform*, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987. Citado na página 68.

SOUZA, V. A. A. **Algoritmos para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Carregamento Bidimensional**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brasil, 2013. Citado nas páginas 50, 51, 52, 53 e 54.

STRODL, J.; DOERNER, K. F.; TRICOIRE, F.; HARTL, R. F. On index structures in hybrid metaheuristics for routing problems with hard feasibility checks: An application to the 2-dimensional loading vehicle routing problem. In: SPRINGER. **International Workshop on Hybrid Metaheuristics**. [S.l.], 2010. p. 160–173. Citado nas páginas 52 e 53.

TAJIK, N.; TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R.; VAHDANI, B.; MOUSAVI, S. M. A robust optimization approach for pollution routing problem with pickup and delivery under uncertainty. **Journal of Manufacturing Systems**, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 277–286, 2014. Citado na página 70.

TASAN, A. S.; GEN, M. A genetic algorithm based approach to vehicle routing problem with simultaneous pick-up and deliveries. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 62, n. 3, p. 755–761, 2012. Citado na página 67.

TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R.; SAFAEI, N.; KAH, M.; RABBANI, M. A new capacitated vehicle routing problem with split service for minimizing fleet cost by simulated annealing. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 344, n. 5, p. 406–425, 2007. Citado na página 64.

TOTH, P.; VIGO, D. An overview of vehicle routing problems. In: **The vehicle routing problem**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 2002. p. 1–26. Citado nas páginas 46, 47 e 115.

USEPA, U. E. P. A. **Emission facts: Average carbon dioxide emissions resulting from gasoline and diesel fuel**. Office of Transportation and Air Quality, EPA420-F-05-001, Washington, DC, 2005. Acesso em: 15/07/2019. Disponível em: <<https://www.epa.gov/nscep>>. Citado na página 117.

VASILIAUSKAS, A. V.; ZINKEVIČIŪĒ, V.; JAKUBAUSKAS, G. The use of it applications for implementation of green logistics concept. In: TRANSPORT AND TELECOMMUNICATION INSTITUTE, LOMONOSOVA I. **Proceedings of the 13th International Conference Reliability and Statistics in Transportation and Communication**. Riga, Latvia, 2013. p. 16–19. Citado nas páginas 42, 65 e 66.

VORNHUSEN, B.; KOPFER, H. Emission vehicle routing problem with split delivery and a heterogeneous vehicle fleet. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Logistics**. [S.l.], 2015. p. 76–90. Citado nas páginas 64, 70 e 71.

WANG, J.; JAGANNATHAN, A. K. R.; ZUO, X.; MURRAY, C. C. Two-layer simulated annealing and tabu search heuristics for a vehicle routing problem with cross docks and split deliveries. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 112, p. 84–98, 2017. Citado na página 64.

WEI, L.; WANG, Y.; CHENG, H.; HUANG, J. An open space based heuristic for the 2d strip packing problem with unloading constraints. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 70, p. 67–81, 2019. Citado na página 163.

WEI, L.; ZHANG, Z.; ZHANG, D.; LIM, A. A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 243, n. 3, p. 798–814, 2015. Citado nas páginas 52, 53, 149, 151, 167, 168 e 169.

WEI, L.; ZHANG, Z.; ZHANG, D.; LEUNG, S. C. A simulated annealing algorithm for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 265, n. 3, p. 843–859, 2018. Citado nas páginas 52, 53, 56, 140, 159, 163, 164, 165, 167, 168 e 169.

WONG, L.; MOIN, N. H. Ant colony optimization for split delivery inventory routing problem. **Malaysian Journal of Computer Science**, v. 30, n. 4, p. 333–348, 2017. Citado na página 64.

XIA, Y.; FU, Z. An adaptive tabu search algorithm for the open vehicle routing problem with split deliveries by order. **Wireless Personal Communications**, Springer, v. 103, n. 1, p. 595–609, 2018. Citado na página 64.

XIAO, Y.; KONAK, A. The heterogeneous green vehicle routing and scheduling problem with time-varying traffic congestion. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier, v. 88, p. 146–166, 2016. Citado na página 65.

_____. A genetic algorithm with exact dynamic programming for the green vehicle routing & scheduling problem. **Journal of Cleaner Production**, Elsevier, v. 167, p. 1450–1463, 2017. Citado na página 70.

XIAO, Y.; ZHAO, Q.; KAKU, I.; XU, Y. Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 1419–1431, 2012. Citado nas páginas 87, 88 e 116.

XIU, G.; CHEN, X. Research on green logistics development at home and abroad. **Journal of Computers**, v. 7, n. 11, p. 2765–2772, 2012. Citado na página 40.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 195, n. 3, p. 729–743, 2009. Citado nas páginas 51 e 52.

_____. Integrated distribution and loading planning via a compact metaheuristic algorithm. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 228, n. 1, p. 56–71, 2013. Citado nas páginas 52, 54 e 55.

_____. The vehicle routing problem with simultaneous pick-ups and deliveries and two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 251, n. 2, p. 369–386, 2016. Citado na página 57.

_____. Vehicle routing strategies for pick-up and delivery service under two dimensional loading constraints. **Operational Research**, Springer, v. 17, n. 1, p. 115–143, 2017. Citado na página 57.

ZHANG, D.; DONG, R.; SI, Y.-W.; YE, F.; CAI, Q. A hybrid swarm algorithm based on abc and ais for 2l-hfcvrp. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 64, p. 468–479, 2018. Citado na página 57.

ZHANG, J.; ZHAO, Y.; XUE, W.; LI, J. Vehicle routing problem with fuel consumption and carbon emission. **International Journal of Production Economics**, Elsevier, v. 170, p. 234–242, 2015. Citado nas páginas 68, 69 e 116.

ZHANG, S.; LEE, C.; CHOY, K.; HO, W.; IP, W. Design and development of a hybrid artificial bee colony algorithm for the environmental vehicle routing problem. **Transportation Research Part D: Transport and Environment**, Elsevier, v. 31, p. 85–99, 2014. Citado nas páginas 68, 69 e 87.

ZHANG, Y.; LIU, J. The establishment of green logistics system model. In: **Proceedings of 2009 International Conference on Management Science and Engineering**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 892–897. Citado na página 44.

ZHU, X.; YAN, R.; ZHANG, Q. *et al.* A promoted hybrid heuristic algorithm for two-dimensional multi-depots vehicle routing problem. **International Journal of Simulation Modelling**, v. 14, n. 3, p. 499–510, 2015. Citado na página 57.

INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES

A seguir são apresentadas algumas informações complementares sobre as estratégias utilizadas no método exato e/ou meta-heurística desenvolvidos nesta tese.

A.1 Algoritmo para Obter a Malha *Canonical Dissections*

O Algoritmo 13 mostra como obter a malha de pontos *canonical dissections* proposta por Herz (1972). O algoritmo possui quatro parâmetros iniciais, os quais estão relacionado aos itens e às dimensões da base retangular do veículo. No início do algoritmo, os conjuntos com pontos ao longo da largura e comprimento são inicializados como vazio. Em cada iteração do laço (linhas 2 a 21), um item é considerado e os pontos onde este item pode ser posicionado na base do veículo são gerados. Nas linhas 11 e 21, a malha com todos os pontos é determinada para a largura e comprimento, respectivamente. Ao final do algoritmo é retornado o conjunto de coordenadas *canonical dissections* para a largura (P^L) e o comprimento (P^C).

A.2 Algoritmo para Atualizar o Tamanho do Itens

O Algoritmo 14 traz o procedimento de atualização das dimensões dos itens descrito por Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002). O algoritmo apresenta a atualização dos itens ao longo da largura (linhas 1 a 6) e do comprimento (linhas 7 a 12). Para descrever o funcionamento do algoritmo de aumento dos itens, a dimensão da largura é considerada.

No Algoritmo 14, inicialmente os itens são ordenados em ordem decrescente pela largura. Em seguida, a cada iteração (linhas 2 a 6), um item $i \in M'$ é selecionado e o problema em (5.8) é resolvido. Dada a solução do problema da mochila, o item tem sua largura atualizada. O tamanho da atualização do item é dada pela largura do recipiente que não foi ocupada na solução do

problema da mochila e, assim, caso toda a largura seja ocupada não há aumento no item. Por fim, o item com dimensão atualizada e os itens pertencentes a solução ε^* do problema da mochila 0-1 são removidos do conjunto M' . Vale destacar que os itens utilizados na solução do problema da mochila, para um dado item, não podem ter as suas larguras atualizadas.

Algoritmo 13 – Cálculo da malha *canonical dissections*.

Entrada: M , conjunto dos itens dos clientes na rota S com as dimensões (l_i, c_i) ; σ , ordem de entrega dos itens $i \in M$; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente.

Saída: Conjunto de coordenadas *canonical dissections* para a largura e o comprimento.

```

1:  $P^L \leftarrow \emptyset$ ;  $P^C \leftarrow \emptyset$ ;
2: para cada  $i \in M$  faça
   |   /* Calcular as coordenadas ao longo da largura                               */
3:    $T_x^i[0, \dots, L] \leftarrow 0$ ;  $T_x^i[0] \leftarrow 1$ ;
4:    $M' \leftarrow M \setminus \{i\}$ ;  $L' \leftarrow L - l_i$ ;
5:   para cada  $j \in M'$  faça
6:   |   para  $p \leftarrow L' - l_j$  até 0 faça
7:   |   |   se  $T_x^i[p] = 1$  então  $T_x^i \leftarrow 1$ ;
8:   |    $P_i^L \leftarrow \emptyset$ ;
9:   |   para  $p \leftarrow L$  até 0 faça
10:  |   |   se  $T_x^i = 1$  então  $P_i^L \leftarrow P_i^L \cup \{p\}$ ;
11:  |    $P^L \leftarrow P^L \cup P_i^L$ ;
   |   /* Calcular as coordenadas ao longo do comprimento                           */
12:  |    $T_y^i[0, \dots, C] \leftarrow 0$ ;  $T_y^i[0] \leftarrow 1$ ;
13:  |    $M' \leftarrow M \setminus \{i\}$ ;  $C' \leftarrow C - c_i$ ;
14:  |   para  $j \in M'$  faça
15:  |   |   se  $\sigma_j \geq \sigma_i$  então
16:  |   |   |   para  $q \leftarrow C' - c_j$  até 0 faça
17:  |   |   |   |   se  $T_y^i[q] = 1$  então  $T_y^i \leftarrow 1$ ;
18:  |   |    $P_i^C \leftarrow \emptyset$ ;
19:  |   |   para  $q \leftarrow C$  até 0 faça
20:  |   |   |   se  $T_y^i = 1$  então  $P_i^C \leftarrow P_i^C \cup \{q\}$ ;
21:  |   |    $P^C \leftarrow P^C \cup P_i^C$ ;
22: retorna  $P^L$  e  $P^C$ ;

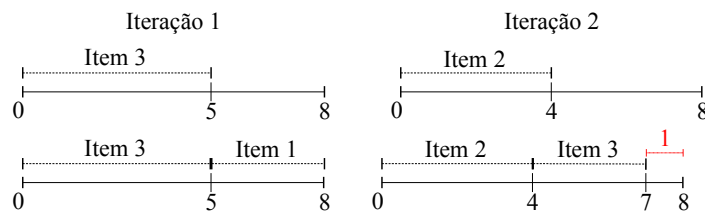
```

Para exemplificar o Algoritmo 14, seja o exemplo apresentado anteriormente, no qual as dimensões da base do veículo são $(L, C) = (8, 10)$ e as dos itens são $(l_1, c_1) = (3, 10)$, $(l_2, c_2) = (4, 3)$, $(l_3, c_3) = (5, 4)$. As Figuras 69 e 70 ilustram o procedimento de atualização do tamanho dos itens, em que a Figura 69 refere-se à largura e a Figura 70 ao comprimento.

Ao realizar o procedimento em relação à largura, a ordenação dos itens de forma decrescente pela largura é $l = (l_3, l_2, l_1) = (5, 4, 3)$. Na primeira iteração, o primeiro item é o 3 com largura igual a 5, restando 3 unidades de largura. Ao aplicar um método para resolver o

problema da mochila, obtém-se como solução o item 1 de largura 3, preenchendo toda a largura da base. Assim, a largura do item 3 permanece a mesma e o item 1 não pode mais ter seu tamanho atualizado, pois foi usado na solução do problema da mochila do item 1. Na iteração 2, o segundo item a ser analisado é o 2 com largura igual a 4, restando 4 unidades de largura da base. Após resolver (5.8), tem-se como solução o item 3, restando ainda uma unidade de largura. Logo, o item 2 tem a largura 4 sendo atualizada para 5. O próximo item do vetor de larguras a ser analisado seria o item 1, contudo o mesmo não pode ter a largura atualizada devido ao fato de ter sido utilizado anteriormente em umas das soluções do problema da mochila. A Figura 69 ilustra o passo do procedimento descrito acima.

Figura 69 – Exemplo do procedimento de atualização de itens na largura.



Fonte: Elaborada pela autora.

Algoritmo 14 – Atualização do tamanho dos itens.

Entrada: M , conjunto dos itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in M$; L , largura do recipiente; C , comprimento do recipiente; m , quantidade de itens no conjunto M .

Saída: O tamanho dos itens atualizados.

/* Atualizar o tamanho dos itens ao longo da largura */

1: $M' \leftarrow$ Ordenar os itens em M de forma decrescente pela largura l ;

2: **enquanto** $M' \neq \emptyset$ **faça**

3: $i \leftarrow$ Primeiro item em M' ;

4: Resolver o problema da mochila 0-1 unidimensional em (5.8) para obter a solução ε^* e seu valor l^* ;

5: $l_i \leftarrow l_i + (L - l_i^*)$;

6: $M' \leftarrow M' \setminus (\{i\} \cup \{k \in M' \setminus \{i\} \mid \varepsilon_k^* = 1\})$;

/* Atualizar o tamanho dos itens ao longo do comprimento */

7: $M' \leftarrow$ Ordenar os itens em M de forma decrescente pelo comprimento c ;

8: **enquanto** $M' \neq \emptyset$ **faça**

9: $i \leftarrow$ Primeiro item em M' ;

10: Resolver o problema da mochila 0-1 unidimensional em (5.9) para obter a solução ε^* e seu valor c^* ;

11: $c_i \leftarrow c_i + (C - c_i^*)$;

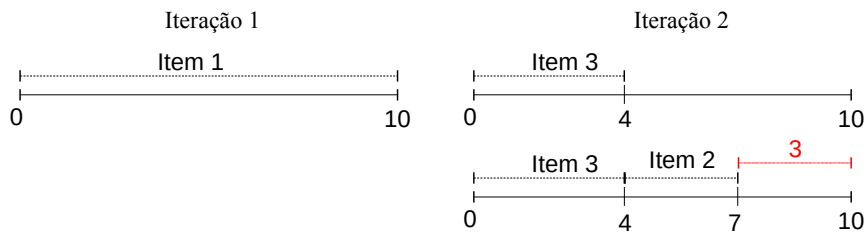
12: $M' \leftarrow M' \setminus (\{i\} \cup \{k \in M' \setminus \{i\} \mid \varepsilon_k^* = 1\})$;

13: **retorna** l e c ;

O passo a passo do procedimento de atualização em relação ao comprimento é apresen-

tado na Figura 70. A ordenação dos itens é dado por $c = (c_1, c_3, c_2) = (10, 4, 3)$. O item 1 é o primeiro a ser analisado, sendo que seu comprimento é igual a 10 e, assim, ocupa todo o comprimento da base. Deste modo, o item 1 não tem seu comprimento atualizado. O próximo item é o 3 que possui comprimento igual 4, restando 6 unidades de comprimento da base. A solução de (5.9) possui o item 2 de comprimento 3, restando ainda três unidades de comprimento. Logo, o comprimento do item 3 é atualizado de 4 para 7 e o item 2 não pode ter o seu comprimento atualizado.

Figura 70 – Exemplo do procedimento de atualização de itens no comprimento.



Fonte: Elaborada pela autora.

A.3 Algoritmo para Obter a Solução Inicial

O Algoritmo 15 descreve um pseudocódigo do método completo utilizado para obter uma solução inicial, em que γ é o *pool* utilizado para guardar os clientes removidos na fase de redução das rotas, X é uma matriz com todas as rotas, $X(s)$ é a linha s da matriz X que representa uma rota da solução, \bar{K} é o número de linhas da matriz X e L_S é a lista com todas as economias. As variáveis s e p são iteradores utilizados para acessar/indicar as linhas da matriz X . Seja PP um problema com as restrições de capacidade do veículo em peso e área e as restrições de empacotamento. As linhas 1 a 14 do algoritmo descrevem o método de economias e as linhas de 15 a 28 mostram o procedimento de redução do número de veículos. Ao final do algoritmo é retornada uma matriz com a solução das rotas (linha 29).

Algoritmo 15 – Solução inicial.

Entrada: n , número de clientes; D_{ij} , a distância/custo entre os nós i e j para $i, j \leftarrow 1, \dots, n$; K_{max} , número máximo de veículos; PP , problema com as restrições (3.21) a (3.23).

Saída: Solução com as rotas para servir os clientes.

/ Fase I - Algoritmo de economias */*

- 1: $\bar{K} \leftarrow n$;
- 2: $X(s) \leftarrow (0, s, 0)$, para $s \leftarrow 1, \dots, n$;
- 3: $L_S \leftarrow \emptyset$;
- 4: **para** $i, j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
- 5: $S_{ij} \leftarrow D_{i0} + D_{0j} - D_{ij}$;
- 6: $L_S \leftarrow L_S \cup S_{ij}$;
- 7: Ordenar as economias na lista L_S em ordem decrescente;
- 8: **para cada** $(i, j) \in L_S$ **faça**
- 9: **se** i e j são extremos de suas rotas **E** $i \in X(s)$ **E** $j \in X(p)$ **E** $p \neq s$ **então**
- 10: $Y \leftarrow X(s) \cup X(p)$;
- 11: **se** Y respeitar as restrições em PP **então**
- 12: $X(s) \leftarrow Y$;
- 13: Deletar a rota p de X ;
- 14: $\bar{K} \leftarrow \bar{K} - 1$;

/ Fase II - Eliminar rotas */*

- 15: **enquanto** $\bar{K} > K_{max}$ **faça**
- 16: $\gamma \leftarrow$ todos clientes da rota $p \in X$ dado que a rota p tem a menor área dentre as rotas em X ;
- 17: Deletar a rota p de X ;
- 18: $\bar{K} \leftarrow \bar{K} - 1$;
- 19: Ordenar os clientes em γ por ordem decrescente da área de seus itens;
- 20: **para cada** $j \in \gamma$ **faça**
- 21: **se** ao adicionar j na rota $s \in X$ todas as restrições em PP não são respeitadas **então**
- 22: Inserir j na rota $s \in X$ entre os nós $i \in X(s)$ e $i + 1 \in X(s)$ que minimize
- 23: $S_{i,i+1} \leftarrow D_{i,j} + D_{j,i+1} - D_{i,i+1}$;
- 24: **senão**
- 25: Selecionar uma rota s aleatoriamente em X ;
- 26: **enquanto** a inserção de $j \in \gamma$ na rota $X(s)$ não atender as restrições em PP **faça**
- 27: Remove um cliente $i \in X(s)$ e adicioná-lo em γ ;
- 28: Inserir j na rota $s \in X$ entre os nós $i \in X(s)$ e $i + 1 \in X(s)$ que minimize
- 29: $S_{i,i+1} \leftarrow D_{i,j} + D_{j,i+1} - D_{i,i+1}$;
- 30: Remove o cliente j de γ ;

29: **retorna** X ;

RESULTADOS COMPLETOS PARA O MÉTODO EXATO

Os resultados completos obtidos pelo método exato *branch-and-cut* desenvolvido neste trabalho de doutorado são apresentados nas Tabelas 42 a 54. A Tabela 42 apresenta os resultados para o modelo do 2L-CVRP tratado na literatura. As Tabelas 43 a 48 trazem os resultados obtidos através da resolução dos modelos do 2L-CVRP, 2L-SDVRP, G2L-CVRP e G2L-SDVRP para as instâncias da literatura, enquanto as Tabelas 49 a 54 resumem os resultados do novo conjunto de instâncias geradas neste trabalho.

Na Tabela 42, para cada instância, é fornecido o nome, a classe, o número de clientes (n), o número de itens (m), o número de veículos (K), o custo das rotas (Sol_R), o tempo total de execução ($Tempo_T$), o tempo gasto para resolver os subproblemas de empacotamento ($Tempo_E$) e número de cortes de roteamento ($Corte_R$) e de empacotamento ($Corte_E$). As soluções marcadas com “*” indicam que o limite de tempo de execução foi atingido, portanto, a solução não é comprovadamente ótima.

As Tabelas 43, 44, 49 e 50 apresentam todos os dados da Tabela 42 com a adição da informação sobre a quantidade de emissão de CO₂ (Sol_G). Além disso, nas demais tabelas, também é fornecido um limitante inferior (K_{min}) e superior (K_{max}) do número de veículos necessários para atender todos os clientes, o número de veículos na solução (VH) e, para os problemas com entrega fracionada (2L-SDVRP e G2L-SDVRP), o número de clientes atendidos com entrega fracionada (CS).

Tabela 42 – Resultados do 2L-CVRP utilizando exatamente K_{max} veículos e sem permitir rotas com um único cliente.

Nome	Instâncias				Solução do método exato				
	Classe	n	m	K	Sol _R	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	273	0,22	0,00	2358	0
	2	15	24	3	285	8,28	3,71	17412	57
	3	15	31	3	280	39,75	38,41	7285	22
	4	15	37	4	288	0,29	0,27	183	2
	5	15	45	4	279	56,95	56,93	24	1
E016-05m	1	15	15	5	329	0,18	0,00	2393	0
	2	15	25	5	342	2,75	0,10	15497	9
	3	15	31	5	347	2,63	0,28	13117	5
	4	15	40	5	336	1,04	0,34	5962	2
	5	15	48	5	329	0,27	0,08	2393	0
E021-04m	1	20	20	4	351	1,08	0,00	8930	0
	2	20	29	5	396	12,85	2,26	40008	158
	3	20	46	5	387	24,18	23,02	7122	43
	4	20	44	5	374	10,11	9,84	3022	9
	5	20	49	5	369	0,12	0,05	209	0
E021-06m	1	20	20	6	423	0,11	0,00	1587	0
	2	20	32	6	434	1,25	0,10	12409	6
	3	20	43	6	432	1,34	0,59	8954	5
	4	20	50	6	438	5,14	0,09	24951	0
	5	20	62	6	423	0,21	0,09	1587	0
E022-04g	1	21	21	4	367	0,04	0,00	112	0
	2	21	31	4	380	4,57	3,87	4260	26
	3	21	37	4	373	0,27	0,19	396	3
	4	21	41	4	377	0,35	0,24	676	1
	5	21	57	5	389	0,15	0,05	100	0
E022-06m	1	21	21	6	488	0,59	0,00	5174	0
	2	21	33	6	491	2,20	0,11	10851	3
	3	21	40	6	496	11,88	4,62	19895	14
	4	21	57	6	489	0,56	0,24	2600	0
	5	21	56	6	488	0,59	0,00	5174	0
E023-03g	1	22	22	3	558	0,03	0,00	59	0
	2	22	32	5	724	2,22	1,36	10565	30
	3	22	41	5	698	15,93	15,64	2688	28
	4	22	51	5	714	13,93	13,82	767	3
	5	22	55	6	742	0,35	0,32	36	0
E023-05s	1	22	22	5	657	0,01	0,00	20	0
	2	22	29	5	720	6,61	5,31	8430	204
	3	22	42	5	730	101,55	97,72	9515	115
	4	22	48	5	701	0,34	0,28	114	1
	5	22	52	6	721	0,07	0,06	7	0
E026-08m	1	25	25	8	609	2,50	0,00	13666	0
	2	25	40	8	612	5,76	0,05	16755	2
	3	25	61	8	615	10,90	0,39	25682	4
	4	25	63	8	626	72,46	0,17	64097	6
	5	25	91	8	609	4,21	0,00	13719	0
E030-03g	1	29	29	3	524	115,87	0,00	62877	0
	2	29	43	6	687	53,45	14,14	96802	494
	3	29	49	6	637	386,95	320,67	209861	153
	4	29	72	7	738*	617,98	617,14	5026	42
	5	29	86	7	704*	490,61	487,68	27819	4
E033-03n	1	32	32	3	1991	1,49	0,00	5532	0
	2	32	44	7	2714*	3600,20	29,21	706528	1361
	3	32	56	7	2574	921,96	163,20	419235	147
	4	32	78	7	2668*	3654,91	3596,99	83946	99
	5	32	102	8	2632*	907,26	907,07	1029	7
E036-11h	1	35	35	11	682	967,99	0,00	306391	0
	2	35	56	11	682	1657,82	0,02	372037	0
	3	35	74	11	682	707,06	0,09	279238	1
	4	35	93	11	691	2797,01	29,32	554658	13
	5	35	114	11	682	969,83	0,00	306391	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 43 – Solução inicial para o 2L-CVRP.

Nome	Instâncias			Solução do método exato						
	Classe	n	m	K	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	273	1387,62	0,28	0,00	1645	0
	2	15	24	3	285	1387,56	10,22	6,81	14025	43
	3	15	31	3	280	1399,94	59,28	57,65	6408	45
	4	15	37	4	288	1258,20	1,94	1,91	35	6
	5	15	45	4	279	1209,66	20,28	20,25	63	2
E016-05m	1	15	15	5	329	1582,75	0,19	0,00	1992	0
	2	15	25	5	342	1623,19	3,99	0,11	18959	7
	3	15	31	5	347	1659,05	7,42	0,67	26038	9
	4	15	40	5	336	1603,92	1,18	0,31	6744	2
	5	15	48	5	329	1582,75	0,22	0,06	1992	0
E021-04m	1	20	20	4	351	1683,66	1,46	0,00	9921	0
	2	20	29	5	396	1688,50	23,19	6,28	35424	447
	3	20	46	5	387	1661,06	9,07	8,53	5232	16
	4	20	44	5	374	1737,49	19,25	18,66	8638	10
	5	20	49	5	369	1719,23	0,21	0,13	525	0
E021-06m	1	20	20	6	423	2088,27	0,13	0,00	1246	0
	2	20	32	6	434	2042,27	1,61	0,32	9760	14
	3	20	43	6	432	2110,91	2,44	1,53	6756	13
	4	20	50	6	438	2146,43	3,91	0,56	21424	1
	5	20	62	6	423	2088,27	0,14	0,00	1246	0
E022-04g	1	21	21	4	367	1751,55	0,02	0,00	86	0
	2	21	31	4	380	1871,79	2,61	2,32	1671	20
	3	21	37	4	373	1769,66	0,36	0,25	400	4
	4	21	41	4	377	1836,46	0,51	0,28	1127	2
	5	21	57	5	389	1799,34	0,11	0,05	63	0
E022-06m	1	21	21	6	488	2401,09	0,49	0,00	3492	0
	2	21	33	6	491	2380,38	2,67	0,60	8192	30
	3	21	40	6	496	2392,49	14,68	6,91	16719	16
	4	21	57	6	489	2371,64	10,83	10,40	3159	2
	5	21	56	6	488	2401,09	0,48	0,00	3492	0
E023-03g	1	22	22	3	558	2406,92	0,11	0,00	69	0
	2	22	32	5	724	2554,74	2,46	1,57	8550	44
	3	22	41	5	698	2547,82	9,59	9,39	1558	32
	4	22	51	5	714	2625,73	83,50	83,16	1315	15
	5	22	55	6	742	2650,94	0,30	0,28	36	0
E023-05s	1	22	22	5	657	2513,10	0,01	0,00	20	0
	2	22	29	5	720	2575,93	10,95	9,29	9077	412
	3	22	42	5	730	2617,86	99,51	96,44	10517	182
	4	22	48	5	701	2579,12	0,43	0,33	273	1
	5	22	52	6	721	2614,43	0,07	0,07	7	0
E026-08m	1	25	25	8	609	2943,87	8,73	0,00	14672	0
	2	25	40	8	612	2941,96	18,20	0,16	26933	12
	3	25	61	8	615	2992,29	21,67	1,05	27186	10
	4	25	63	8	626	3117,71	104,08	3,90	77582	14
	5	25	91	8	609	2943,87	7,55	0,00	15414	0
E030-03g	1	29	29	3	524	2501,34	78,17	0,00	52728	0
	2	29	43	6	687	2705,57	108,93	40,92	84628	1439
	3	29	49	6	684	2733,43	303,16	299,09	12711	196
	4	29	72	7	745	2778,08	315,73	314,71	7891	65
	5	29	86	7	704	2702,19	64,17	62,01	19998	6
E033-03n	1	32	32	3	1991	8397,85	2,66	0,00	6338	0
	2	32	44	7	2714	9678,74	300,26	26,76	170162	1329
	3	32	56	7	2695	9706,25	300,53	269,69	23044	296
	4	32	78	7	2995	10768,10	317,41	316,08	4656	45
	5	32	102	8	2671	9539,87	300,42	299,93	2338	29
E036-11h	1	35	35	11	682	3343,79	300,12	0,00	183763	0
	2	35	56	11	682	3343,79	300,11	0,04	195530	0
	3	35	74	11	682	3343,79	300,12	0,05	166162	0
	4	35	93	11	701	3508,60	300,27	41,43	164286	21
	5	35	114	11	682	3343,79	300,02	0,00	182564	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 44 – Solução inicial para o G2L-CVRP.

Nome	Instâncias				Solução do método exato					
	Classe	n	m	K	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	273	1277,63	9,68	0,00	25316	0
	2	15	24	3	308	1456,43	300,17	16,67	283825	132
	3	15	31	3	304	1372,92	300,07	54,62	194119	52
	4	15	37	4	288	1195,44	12,27	12,14	184	8
	5	15	45	4	284	1152,93	10,05	10,03	3	1
E016-05m	1	15	15	5	340	1561,18	0,43	0,00	2102	0
	2	15	25	5	353	1601,63	1,60	0,03	8165	2
	3	15	31	5	357	1633,81	6,27	0,17	23391	4
	4	15	40	5	340	1561,18	0,70	0,29	1745	1
	5	15	48	5	340	1561,18	0,50	0,07	2102	0
E021-04m	1	20	20	4	372	1642,42	44,29	0,00	48851	0
	2	20	29	5	396	1688,50	43,85	3,75	69105	272
	3	20	46	5	391	1638,97	7,42	6,30	4710	9
	4	20	44	5	381	1608,46	12,76	12,06	1787	4
	5	20	49	5	375	1579,03	0,45	0,15	578	0
E021-06m	1	20	20	6	447	2025,85	1,48	0,00	4959	0
	2	20	32	6	434	2042,27	6,95	0,37	14059	23
	3	20	43	6	434	2042,27	4,57	0,22	10168	2
	4	20	50	6	453	2063,79	9,96	0,46	21342	1
	5	20	62	6	447	2025,85	1,47	0,00	4959	0
E022-04g	1	21	21	4	367	1751,55	0,61	0,00	1038	0
	2	21	31	4	390	1819,87	15,17	5,30	29369	39
	3	21	37	4	373	1769,66	9,00	7,34	2053	6
	4	21	41	4	377	1836,46	42,97	22,93	33778	15
	5	21	57	5	401	1770,11	0,24	0,03	195	0
E022-06m	1	21	21	6	492	2341,64	2,43	0,00	5998	0
	2	21	33	6	492	2354,96	5,86	0,39	13850	11
	3	21	40	6	500	2361,82	19,69	6,29	24762	15
	4	21	57	6	490	2346,22	1,87	0,17	4280	0
	5	21	56	6	492	2341,64	3,32	0,05	6673	0
E023-03g	1	22	22	3	564	2298,92	5,04	0,00	37792	0
	2	22	32	5	725	2553,81	2,84	1,19	12844	25
	3	22	41	5	732	2518,70	3,71	2,41	3636	7
	4	22	51	5	741	2539,19	30,66	29,59	4527	5
	5	22	55	6	773	2618,47	10,73	10,13	879	1
E023-05s	1	22	22	5	700	2460,17	1,00	0,00	6604	0
	2	22	29	5	741	2539,19	17,64	3,80	47490	77
	3	22	42	5	750	2565,05	24,02	19,73	30879	22
	4	22	48	5	732	2518,70	9,32	7,58	1965	2
	5	22	52	6	748	2589,80	0,83	0,20	2284	0
E026-08m	1	25	25	8	625	2918,76	2,31	0,00	7366	0
	2	25	40	8	625	2918,76	2,49	0,13	7475	5
	3	25	61	8	628	2946,33	8,13	0,37	26793	3
	4	25	63	8	655	2976,71	77,31	0,33	88560	9
	5	25	91	8	625	2918,76	2,34	0,04	7366	0
E030-03g	1	29	29	3	555	2525,04	300,18	0,00	205215	0
	2	29	43	6	709	2672,04	300,13	26,58	522248	762
	3	29	49	6	643	2554,81	300,03	188,11	301003	147
	4	29	72	7	739	2747,78	231,96	196,67	86629	42
	5	29	86	7	710	2688,36	109,71	92,16	74969	9
E033-03n	1	32	32	3	2034	8145,22	300,16	0,00	237778	0
	2	32	44	7	3243	11174,50	300,15	16,39	184222	813
	3	32	56	7	2575	9221,70	300,05	63,22	183712	84
	4	32	78	7	2730	9760,29	323,48	307,79	13257	41
	5	32	102	8	2699	9524,40	122,32	101,77	50994	10
E036-11h	1	35	35	11	708	3274,33	300,04	0,00	267115	0
	2	35	56	11	708	3274,33	300,08	0,13	263110	7
	3	35	74	11	711	3291,48	300,09	2,86	273079	13
	4	35	93	11	717	3300,71	300,05	56,55	234521	13
	5	35	114	11	708	3274,33	300,10	0,00	265139	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 45 – Solução do 2L-CVRP.

Instâncias				Solução do método exato								
Nome	Classe	n	m	K _{min}	K _{max}	VH	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	3	3	273	1387,62	0,38	0,00	5207	0
	2	15	24	3	3	3	285	1387,56	11,56	6,78	22132	41
	3	15	31	3	3	3	280	1399,94	34,63	33,20	9986	18
	4	15	37	3	4	4	288	1258,20	0,79	0,17	6074	2
	5	15	45	3	4	3	273*	1277,63*	121,93	121,68	2970	1
E016-05m	1	15	15	5	5	5	329	1582,75	0,18	0,00	2714	0
	2	15	25	5	5	5	342	1623,19	5,20	0,07	18929	6
	3	15	31	5	5	5	347	1659,05	10,22	0,20	23443	4
	4	15	40	5	5	5	336	1603,92	1,64	0,29	10223	2
	5	15	48	5	5	5	329	1582,75	0,23	0,04	2714	0
E021-04m	1	20	20	4	4	4	351	1683,66	0,44	0,00	4109	0
	2	20	29	4	5	5	396*	1688,50*	3577,07	6,16	490785	431
	3	20	46	4	5	5	387	1661,06	73,60	4,45	62786	14
	4	20	44	4	5	5	360	1706,79	43,81	36,85	24239	24
	5	20	49	4	5	4	351	1683,66	1,70	0,07	11381	0
E021-06m	1	20	20	6	6	6	423	2088,27	5,16	0,00	22141	0
	2	20	32	6	6	6	434	2042,27	40,93	0,17	50577	11
	3	20	43	6	6	6	432	2110,91	11,79	0,50	26446	6
	4	20	50	6	6	6	438	2146,43	47,11	0,05	54580	0
	5	20	62	6	6	6	423	2088,27	7,04	0,00	25750	0
E022-04g	1	21	21	4	4	4	367	1751,55	0,11	0,00	160	0
	2	21	31	4	4	4	380	1871,79	2,59	1,37	9013	11
	3	21	37	4	4	4	373	1769,66	0,34	0,08	694	2
	4	21	41	4	4	4	377	1836,46	0,58	0,24	1414	2
	5	21	57	4	5	4	367	1751,55	0,21	0,14	203	0
E022-06m	1	21	21	6	6	6	488	2401,09	1,07	0,00	8550	0
	2	21	33	6	6	6	491	2380,38	5,09	0,10	15498	3
	3	21	40	6	6	6	496	2392,49	14,62	7,05	16053	12
	4	21	57	6	6	6	489	2371,64	1,26	0,11	8055	0
	5	21	56	6	6	6	488	2401,09	1,07	0,00	8550	0
E023-03g	1	22	22	3	3	3	558	2406,92	0,07	0,00	119	0
	2	22	32	4	5	5	724	2554,74	1255,36	2,31	332414	82
	3	22	41	4	5	4	693	2589,44	164,56	82,32	81244	148
	4	22	51	4	5	4	693*	2584,01*	772,45	752,08	32351	63
	5	22	55	3	6	4	647*	2486,17*	855,10	841,56	28393	7
E023-05s	1	22	22	3	5	3	558	2406,92	0,08	0,00	54	0
	2	22	29	4	5	4	716*	2602,79*	3589,22	25,96	716458	1266
	3	22	42	4	5	5	730	2617,86	76,95	40,88	49749	60
	4	22	48	4	5	4	687*	2570,64*	991,20	984,19	20260	23
	5	22	52	3	6	3	612*	2519,89*	3830,88	3825,29	9293	29
E026-08m	1	25	25	8	8	8	595	2924,37	10,75	0,00	27565	0
	2	25	40	8	8	8	598	2922,46	14,24	0,03	27188	3
	3	25	61	8	8	8	601	2972,79	59,45	0,31	57822	4
	4	25	63	8	8	8	612	3098,21	116,15	0,22	74035	12
	5	25	91	8	8	8	595	2924,37	11,73	0,00	29408	0
E030-03g	1	29	29	3	3	3	524	2501,34	64,51	0,00	59162	0
	2	29	43	5	6	6	687*	2705,57*	3491,49	54,01	1310586	1762
	3	29	49	4	6	5	616*	2583,45*	3296,90	764,62	681437	492
	4	29	72	6	7	7	740*	2753,27*	3291,40	3285,95	11453	102
	5	29	86	5	7	5	676*	2791,44*	3658,81	3488,55	110374	29
E033-03n	1	32	32	3	3	3	1991	8397,85	0,64	0,00	4426	0
	2	32	44	5	7	7	2714*	9678,74*	3300,29	7,10	411857	379
	3	32	56	5	7	6	2520*	9226,64*	3323,54	343,62	424852	403
	4	32	78	6	7	6	2606*	9605,66*	3397,29	3110,75	137169	122
	5	32	102	5	8	5	2321*	8842,23*	1301,69	1274,50	37235	9
E036-11h	1	35	35	11	11	11	682*	3343,79*	3300,09	0,00	342089	0
	2	35	56	11	11	11	682*	3343,79*	3300,12	0,02	354498	0
	3	35	74	11	11	11	682*	3343,79*	3300,30	0,02	343251	0
	4	35	93	11	11	11	701*	3508,60*	3300,08	23,14	313387	8
	5	35	114	11	11	11	682*	3343,79*	3300,20	0,00	342202	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 46 – Solução do 2L-SDVRP.

Instâncias				Solução do método exato									
Nome	Classe	n	m	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	3	3	0	273	1387,62	0,46	0,00	52	0
	2	15	24	3	3	3	1	279	1366,28	43,51	39,20	102	80
	3	15	31	3	3	3	0	280	1399,94	65,15	60,26	78	38
	4	15	37	3	4	4	0	288	1258,20	64,61	50,84	142	5
	5	15	45	3	4	3	1	262	1287,67	1,10	0,22	34	0
E016-05m	1	15	15	5	5	5	0	329	1582,75	0,77	0,00	2	0
	2	15	25	5	5	5	1	329	1589,01	12,32	0,55	132	37
	3	15	31	5	5	5	2	329	1569,74	22,12	1,55	160	39
	4	15	40	5	5	5	2	308	1552,08	2,85	0,00	24	0
	5	15	48	5	5	5	2	308	1546,31	5,52	0,04	22	0
E021-04m	1	20	20	4	4	4	0	351	1683,66	18,59	0,00	122	0
	2	20	29	4	5	5	0	396*	1688,50*	3576,81	8,57	1844	585
	3	20	46	4	5	5	0	387*	1661,06*	3590,93	18,97	980	33
	4	20	44	4	5	4	2	353	1755,75	1821,40	160,82	822	43
	5	20	49	4	5	4	2	348	1753,63	1322,38	0,41	738	0
E021-06m	1	20	20	6	6	6	0	423	2088,27	9,63	0,00	32	0
	2	20	32	6	6	6	0	434	2042,27	3009,36	0,25	444	14
	3	20	43	6	6	6	0	432*	2110,91*	3597,56	0,32	490	4
	4	20	50	6	6	6	2	436*	2150,05*	3596,09	1,47	656	6
	5	20	62	6	6	6	0	423*	2088,27*	3599,86	0,00	590	0
E022-04g	1	21	21	4	4	4	0	367	1751,55	4,65	0,00	148	0
	2	21	31	4	4	4	1	377	1863,40	42,76	0,74	360	10
	3	21	37	4	4	4	0	373	1769,66	52,57	0,07	256	2
	4	21	41	4	4	4	0	377	1836,46	135,59	3,06	384	56
	5	21	57	4	5	4	0	367	1751,55	144,50	0,03	228	0
E022-06m	1	21	21	6	6	6	0	488	2401,09	121,57	0,00	248	0
	2	21	33	6	6	6	1	473	2326,14	2274,56	0,08	620	1
	3	21	40	6	6	6	2	487*	2369,64*	3585,32	1,37	594	3
	4	21	57	6	6	6	1	471*	2316,66*	3589,17	0,14	698	0
	5	21	56	6	6	6	3	471*	2319,50*	3599,52	0,00	996	0
E023-03g	1	22	22	3	3	3	0	558	2406,92	1,13	0,00	44	0
	2	22	32	4	5	5	0	724*	2554,74*	3597,54	31,80	1584	1027
	3	22	41	4	5	5	1	682*	2610,52*	3590,41	187,72	1888	506
	4	22	51	4	5	4	1	702*	2756,15*	3516,50	3148,91	1334	84
	5	22	55	3	6	4	2	647*	2488,36*	3599,70	2657,61	984	22
E023-05s	1	22	22	3	5	3	0	558	2406,92	3,12	0,00	124	0
	2	22	29	4	5	4	2	680	2521,56	2331,94	16,95	1848	760
	3	22	42	4	5	5	0	730*	2617,86*	3500,49	106,64	1032	330
	4	22	48	4	5	5	2	687*	2537,70*	3599,57	1862,95	1040	47
	5	22	52	3	6	4	2	650*	2566,74*	3599,93	3678,14	500	34
E026-08m	1	25	25	8	8	8	0	595	2924,37	366,29	0,00	56	0
	2	25	40	8	8	8	0	598*	2922,46*	3581,80	0,01	470	1
	3	25	61	8	8	8	0	601*	2972,79*	3578,33	0,11	478	1
	4	25	63	8	8	8	1	611*	3094,17*	3495,93	0,07	840	0
	5	25	91	8	8	8	0	595*	2924,37*	3592,45	0,00	646	0
E030-03g	1	29	29	3	3	3	0	524*	2501,34*	3521,83	0,00	15408	0
	2	29	43	5	6	6	0	687*	2705,57*	3491,07	0,80	11374	29
	3	29	49	4	6	6	0	667*	2699,71*	3296,84	797,43	10280	126
	4	29	72	6	7	7	0	745*	2778,08*	3284,27	2750,21	4366	47
	5	29	86	5	7	7	1	703*	2701,53*	3535,83	755,71	8826	6
E033-03n	1	32	32	3	3	3	0	1991	8397,85	55,23	0,00	218	0
	2	32	44	5	7	7	0	2714*	9678,74*	3299,74	7,24	4966	380
	3	32	56	5	7	7	0	2672*	9661,51*	3299,47	785,64	5462	866
	4	32	78	6	7	7	0	2859*	10318,8*	3282,59	2405,55	3356	60
	5	32	102	5	8	8	0	2655*	9500,36*	3299,58	2080,00	2942	17
E036-11h	1	35	35	11	11	11	0	682*	3343,79*	3299,88	0,00	58	0
	2	35	56	11	11	11	0	682*	3343,79*	3299,89	0,02	378	0
	3	35	74	11	11	11	0	682*	3343,79*	3299,88	0,02	530	0
	4	35	93	11	11	11	1	699*	3501,70*	3299,73	0,06	778	0
	5	35	114	11	11	11	0	682*	3343,79*	3299,98	0,00	698	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 47 – Solução do G2L-CVRP.

Instâncias				Solução do método exato								
Nome	Classe	n	m	K _{min}	K _{max}	VH	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	3	3	273	1277,63	1,00	0,00	4912	0
	2	15	24	3	3	3	285	1387,56	1005,58	27,69	638987	113
	3	15	31	3	3	3	304	1372,92	246,09	35,54	229833	26
	4	15	37	3	4	4	288	1195,44	0,29	0,16	180	3
	5	15	45	3	4	4	284	1152,93	0,04	0,00	18	0
E016-05m	1	15	15	5	5	5	340	1561,18	0,25	0,00	1110	0
	2	15	25	5	5	5	353	1601,63	1,07	0,03	5714	2
	3	15	31	5	5	5	357	1633,81	2,61	0,16	13270	4
	4	15	40	5	5	5	340	1561,18	0,26	0,00	1110	0
	5	15	48	5	5	5	340	1561,18	0,29	0,04	1110	0
E021-04m	1	20	20	4	4	4	372	1642,42	6,73	0,00	26554	0
	2	20	29	4	5	5	396	1688,50	89,72	1,35	107374	106
	3	20	46	4	5	5	391	1638,97	2,05	0,09	6742	0
	4	20	44	4	5	5	381	1608,46	0,81	0,04	3146	0
	5	20	49	4	5	5	360	1577,67	0,68	0,08	1540	0
E021-06m	1	20	20	6	6	6	447	2025,85	1,06	0,00	4706	0
	2	20	32	6	6	6	434	2042,27	1,25	0,02	5303	1
	3	20	43	6	6	6	434	2042,27	1,31	0,08	5315	1
	4	20	50	6	6	6	453	2063,79	3,02	0,03	10987	0
	5	20	62	6	6	6	447	2025,85	1,07	0,00	4706	0
E022-04g	1	21	21	4	4	4	367	1751,55	0,31	0,00	448	0
	2	21	31	4	4	4	390	1819,87	3,10	0,97	13944	6
	3	21	37	4	4	4	373	1769,66	0,58	0,09	1541	2
	4	21	41	4	4	4	377	1836,46	4,36	0,09	20147	0
	5	21	57	4	5	4	367	1751,55	0,53	0,04	741	0
E022-06m	1	21	21	6	6	6	492	2341,64	0,87	0,00	3427	0
	2	21	33	6	6	6	492	2354,96	1,67	0,16	7305	7
	3	21	40	6	6	6	500	2361,82	5,69	3,48	10925	6
	4	21	57	6	6	6	490	2346,22	1,14	0,11	3543	0
	5	21	56	6	6	6	492	2341,64	0,86	0,00	3427	0
E023-03g	1	22	22	3	3	3	564	2298,92	1,44	0,00	15525	0
	2	22	32	4	5	5	725	2553,81	221,72	0,57	266742	15
	3	22	41	4	5	5	732	2518,70	97,50	11,55	189575	14
	4	22	51	4	5	5	708	2515,22	16,50	5,45	59873	1
	5	22	55	3	6	4	651	2437,96	843,79	723,43	145714	6
E023-05s	1	22	22	3	5	3	564	2298,92	1,51	0,00	15173	0
	2	22	29	4	5	5	741	2539,19	1587,08	1,93	971197	92
	3	22	42	4	5	5	750	2565,05	37,18	6,02	70680	6
	4	22	48	4	5	5	732	2518,70	586,13	191,84	340044	7
	5	22	52	3	6	4	650	2393,99	408,71	366,21	88612	3
E026-08m	1	25	25	8	8	8	610	2897,58	1,76	0,00	8314	0
	2	25	40	8	8	8	610	2897,58	1,78	0,00	8303	0
	3	25	61	8	8	8	613	2925,15	6,41	0,27	29045	3
	4	25	63	8	8	8	640	2955,53	45,96	0,08	92121	7
	5	25	91	8	8	8	610	2897,58	1,76	0,00	8314	0
E030-03g	1	29	29	3	3	3	541	2489,95	3300,25	0,00	1022582	0
	2	29	43	5	6	6	709	2672,04	3300,12	12,84	3669344	343
	3	29	49	4	6	5	622	2504,33	2011,81	160,22	1491356	60
	4	29	72	6	7	6	704	2661,52	1706,26	1687,77	75367	35
	5	29	86	5	7	6	689	2633,06	1037,50	720,67	282598	6
E033-03n	1	32	32	3	3	3	2034	8145,22	3299,93	0,00	908872	0
	2	32	44	5	7	7	3099	10699,70	3301,00	7,23	795835	346
	3	32	56	5	7	7	2575	9221,70	3300,51	34,30	494875	53
	4	32	78	6	7	6	2615	9342,10	3278,75	2810,26	246838	81
	5	32	102	5	8	5	2369	8738,20	2681,68	2001,88	258098	16
E036-11h	1	35	35	11	11	11	708	3274,33	581,56	0,00	441853	0
	2	35	56	11	11	11	708	3274,33	370,18	0,01	271400	0
	3	35	74	11	11	11	691	3289,71	1590,79	0,13	664251	3
	4	35	93	11	11	11	717	3300,71	565,28	18,02	456702	5
	5	35	114	11	11	11	708	3274,33	581,66	0,00	441853	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 48 – Solução do G2L-SDVRP.

Instâncias				Solução do método exato									
Nome	Classe	n	R	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	1	15	15	3	3	3	0	273	1277,63	6,28	0,00	0	0
	2	15	24	3	3	3	1	282	1329,64	236,56	8,49	0	66
	3	15	31	3	3	3	2	291	1345,90	824,73	101,98	0	115
	4	15	37	3	4	4	0	288	1195,44	93,17	75,50	0	13
	5	15	45	3	4	4	0	284	1152,93	3,78	0,00	0	0
E016-05m	1	15	15	5	5	5	0	340	1561,18	3,78	0,00	0	0
	2	15	25	5	5	5	1	330	1558,24	151,82	0,16	0	11
	3	15	31	5	5	5	3	333	1558,88	214,02	0,70	0	17
	4	15	40	5	5	5	1	308	1494,37	71,16	0,07	0	0
	5	15	48	5	5	5	1	312	1494,37	46,52	0,04	0	0
E021-04m	1	20	20	4	4	4	0	372	1642,42	50,62	0,00	0	0
	2	20	29	4	5	5	1	402*	1683,62*	3556,15	1,83	0	143
	3	20	46	4	5	5	0	391*	1638,97*	3592,58	34,09	0	10
	4	20	44	4	5	5	1	380	1605,27	653,54	0,04	0	0
	5	20	49	4	5	5	0	360	1577,67	338,41	0,07	0	0
E021-06m	1	20	20	6	6	6	0	447	2025,85	30,65	0,00	0	0
	2	20	32	6	6	6	1	443	2022,97	857,03	0,02	0	0
	3	20	43	6	6	6	2	427	1966,85	629,00	0,07	0	1
	4	20	50	6	6	6	1	436	1995,89	2372,69	0,16	0	0
	5	20	62	6	6	6	1	436*	2002,84*	3598,53	0,00	0	0
E022-04g	1	21	21	4	4	4	0	367	1751,55	4,98	0,00	0	0
	2	21	31	4	4	4	1	382	1811,93	159,58	1,37	0	22
	3	21	37	4	4	4	0	373	1769,66	64,41	0,08	0	2
	4	21	41	4	4	4	1	377	1825,55	478,57	39,55	0	305
	5	21	57	4	5	4	0	367	1751,55	48,17	0,03	0	0
E022-06m	1	21	21	6	6	6	0	492	2341,64	55,50	0,00	0	0
	2	21	33	6	6	6	1	473	2326,14	415,44	0,12	0	5
	3	21	40	6	6	6	1	499*	2338,15*	3580,31	4,19	0	13
	4	21	57	6	6	6	2	479	2308,78	1772,29	0,27	0	0
	5	21	56	6	6	6	2	479	2308,77	2928,73	0,11	0	0
E023-03g	1	22	22	3	3	3	0	564	2298,92	29,41	0,00	0	0
	2	22	32	4	5	5	0	725*	2553,81*	3597,16	2,74	0	108
	3	22	41	4	5	5	0	732*	2518,70*	3596,29	111,07	0	79
	4	22	51	4	5	5	0	708*	2515,22*	3569,34	262,01	0	6
	5	22	55	3	6	4	1	650*	2444,04*	3589,27	605,40	0	5
E023-05s	1	22	22	3	5	3	0	564	2298,92	76,26	0,00	0	0
	2	22	29	4	5	4	2	681*	2464,52*	3582,36	4,23	0	188
	3	22	42	4	5	5	1	750*	2564,96*	3575,98	0,05	0	0
	4	22	48	4	5	5	2	699*	2494,53*	3590,68	974,88	0	41
	5	22	52	3	6	4	0	632*	2413,90*	3599,17	989,06	0	9
E026-08m	1	25	25	8	8	8	0	610	2897,58	163,52	0,00	0	0
	2	25	40	8	8	8	2	613*	2879,20*	3597,51	0,03	0	0
	3	25	61	8	8	8	1	619*	2917,75*	3591,87	0,25	0	3
	4	25	63	8	8	8	4	621*	2880,88*	3522,69	0,28	0	0
	5	25	91	8	8	8	4	594*	2790,43*	3597,66	0,08	0	0
E030-03g	1	29	29	3	3	3	0	549*	2523,88*	3299,82	0,00	0	0
	2	29	43	5	6	6	0	709*	2672,04*	3299,87	1,48	0	47
	3	29	49	4	6	5	2	622*	2512,13*	3299,97	77,37	0	49
	4	29	72	6	7	6	1	703*	2657,68*	3368,04	1003,50	0	26
	5	29	86	5	7	6	2	689*	2632,92*	3490,29	842,50	0	7
E033-03n	1	32	32	3	3	3	0	2034	8145,22	442,47	0,00	0	0
	2	32	44	5	7	7	1	3067*	10515,70*	3299,85	9,41	0	506
	3	32	56	5	7	7	1	2576*	9218,05*	3299,95	109,03	0	115
	4	32	78	6	7	6	2	2623*	9396,29*	3276,52	760,22	0	71
	5	32	102	5	8	5	4	2572*	9258,79*	3477,68	2533,93	0	20
E036-11h	1	35	35	11	11	11	0	708*	3274,33*	3299,96	0,00	0	0
	2	35	56	11	11	11	1	707*	3268,83*	3299,92	0,01	0	0
	3	35	74	11	11	11	0	711*	3291,48*	3299,91	0,07	0	1
	4	35	93	11	11	11	3	722*	3272,57*	3299,95	0,24	0	1
	5	35	114	11	11	11	0	708	3274,33*	3299,90	0,00	0	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 49 – Solução inicial do 2L-CVRP para as instâncias da Classe 6.

Instâncias				Solução do método exato					
Nome	n	R	K	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	4	277	1205,96	0,02	0,00	9	0
E016-05m	15	48	5	329	1582,75	0,17	0,00	1992	0
E021-04m	20	66	5	369	1719,23	0,77	0,66	791	0
E021-06m	20	66	6	423	2088,27	0,14	0,00	1246	0
E022-04g	21	68	5	389	1793,96	0,44	0,37	79	0
E022-06m	21	68	6	488	2401,09	0,58	0,00	3492	0
E023-03g	22	70	6	746	2628,45	2,86	2,81	53	0
E023-05s	22	70	6	746	2628,45	2,89	2,84	53	0
E026-08m	25	79	8	609	2943,87	21,06	10,08	18469	1
E030-03g	29	91	7	690	2640,98	2,61	2,36	746	0
E033-03n	32	99	8	2628	9394,20	23,89	23,74	187	2
E036-11h	35	109	11	682	3343,79	300,02	0,00	178271	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 50 – Solução inicial do G2L-CVRP para as instâncias da Classe 6.

Instâncias				Solução do método exato					
Nome	n	R	K	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	4	284	1152,93	0,0384075	5,2916E-05	3	0
E016-05m	15	48	5	340	1561,18	0,471424	4,1791E-05	2102	0
E021-04m	20	66	5	375	1579,03	0,614788	0,397774	521	0
E021-06m	20	66	6	447	2025,85	1,75057	0,0842029	4959	0
E022-04g	21	68	5	401	1770,11	0,641874	0,435282	197	0
E022-06m	21	68	6	492	2341,65	3,55244	0,216893	5991	0
E023-03g	22	70	6	762	2618,53	18,1422	17,4778	632	1
E023-05s	22	70	6	762	2618,53	18,1868	17,4739	632	1
E026-08m	25	79	8	625	2918,76	2,69095	0,0351428	7477	0
E030-03g	29	91	7	690	2639,19	3,11522	0,692687	4956	0
E033-03n	32	99	8	2629	9391,67	27,7822	23,8142	3278	2
E036-11h	35	109	11	708	3274,33	300,033	0,10476	247014	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 51 – Solução do 2L-CVRP para as instâncias Classe 6.

Instâncias			Solução do método exato								
Nome	n	R	K _{min}	K _{max}	VH	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	3	4	3	273	1387,62	0,56	0,28	2727	0
E016-05m	15	48	5	5	5	329	1582,75	0,22	0,00	2714	0
E021-04m	20	66	4	5	5	357	1607,45	4,69	0,78	13438	0
E021-06m	20	66	6	6	6	423	2088,27	4,52	0,00	18156	0
E022-04g	21	68	4	5	4	367	1751,55	0,35	0,24	190	0
E022-06m	21	68	6	6	6	488	2401,09	1,25	0,00	8550	0
E023-03g	22	70	4	6	5	663	2500,14	4,58	1,85	18927	0
E023-05s	22	70	4	6	5	663	2500,14	4,57	1,88	18927	0
E026-08m	25	79	8	8	8	595	2924,37	9,51	0,00	21038	0
E030-03g	29	91	5	7	6	622	2541,21	47,70	37,75	16673	0
E033-03n	32	99	5	8	6	2399*	9019,20*	2750,29	2369,15	139365	19
E036-11h	35	109	11	11	11	682*	3343,79*	3300,27	0,00	342599	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 52 – Solução do 2L-SDVRP para as instâncias Classe 6.

Instâncias			Solução do método exato									
Nome	n	R	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	3	4	3	1	262	1280,74	4,68	0,36	60	0
E016-05m	15	48	5	5	5	1	308	1494,37	8,58	0,00	18	0
E021-04m	20	66	4	5	4	1	349*	1662,39*	3599,23	365,12	614	3
E021-06m	20	66	6	6	6	0	423*	2088,27*	3599,86	0,00	552	0
E022-04g	21	68	4	5	4	2	367*	1752,62*	621,51	315,79	280	2
E022-06m	21	68	6	6	6	1	473*	2355,21*	3599,42	0,00	764	0
E023-03g	22	70	4	6	4	1	649*	2467,68*	3518,40	155,12	856	1
E023-05s	22	70	4	6	4	1	649*	2467,68*	3556,41	153,56	856	1
E026-08m	25	79	8	8	8	0	595*	2924,37*	3578,94	0,00	562	0
E030-03g	29	91	5	7	7	1	665*	2686,83*	3597,39	428,68	10918	3
E033-03n	32	99	5	8	5	4	2477*	9372,25*	3576,11	1886,45	2060	15
E036-11h	35	109	11	11	11	0	682*	3343,79*	3299,98	0,00	1052	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 53 – Solução do G2L-CVRP para as instâncias Classe 6.

Instâncias			Solução do método exato									
Nome	n	R	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	3	4	4		284	1152,93	0,05	0,00	18	0
E016-05m	15	48	5	5	5		340	1561,18	0,26	0,00	1110	0
E021-04m	20	66	4	5	5		360	1577,67	0,83	0,21	1611	0
E021-06m	20	66	6	6	6		447	2025,85	1,07	0,00	4706	0
E022-04g	21	68	4	5	4		367	1751,55	0,71	0,36	457	0
E022-06m	21	68	6	6	6		492	2341,64	0,88	0,00	3427	0
E023-03g	22	70	4	6	5		666	2479,15	17,43	7,48	47228	0
E023-05s	22	70	4	6	5		666	2479,15	17,63	7,63	47228	0
E026-08m	25	79	8	8	8		610	2897,58	1,80	0,00	8314	0
E030-03g	29	91	5	7	6		637	2511,29	147,72	13,91	250160	0
E033-03n	32	99	5	8	6		2422*	8906,06*	3572,67	120,86	594899	1
E036-11h	35	109	11	11	11		708	3274,33	590,17	0,00	441853	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 54 – Solução do G2L-SDVRP para as instâncias Classe 6.

Instâncias			Solução do método exato									
Nome	n	R	K _{min}	K _{max}	VH	CS	Sol _R	Sol _G	Tempo _T	Tempo _E	Corte _R	Corte _E
E016-03m	15	48	3	4	4	0	284	1152,93	4,40	0,00	0	0
E016-05m	15	48	5	5	5	1	308	1494,37	66,16	0,00	0	0
E021-04m	20	66	4	5	5	0	360	1577,67	818,81	0,21	0	0
E021-06m	20	66	6	6	6	2	427*	1967,97*	3598,25	0,00	0	0
E022-04g	21	68	4	5	4	0	367	1751,55	158,19	0,35	0	0
E022-06m	21	68	6	6	6	2	473*	2311,50*	3596,45	0,00	0	0
E023-03g	22	70	4	6	4	2	653*	2414,24*	3581,86	2,24	0	0
E023-05s	22	70	4	6	4	2	653*	2414,24*	3581,81	3,55	0	0
E026-08m	25	79	8	8	8	3	598*	2828,42*	3597,31	0,30	0	0
E030-03g	29	91	5	7	7	2	662*	2560,66*	3596,88	245,60	0	1
E033-03n	32	99	5	8	6	3	2439*	8981,47*	3572,22	1458,16	0	14
E036-11h	35	109	11	11	11	5	707*	3250,60*	3299,97	0,00	0	0

Fonte: Elaborada pela autora.

RESULTADOS COMPLETOS PARA A HEURÍSTICA

A seguir são apresentados os resultados obtidos com a meta-heurística baseada em busca em vizinhança variável (*Variable Neighborhood Search* - VNS) desenvolvida neste trabalho. A Tabela 55 apresenta os resultados obtidos para o 2L-CVRP estudado na literatura, enquanto a Tabela 56 sumariza os resultados obtidos pela VNS para as instâncias da Classe 1.

A Tabela 55 apresenta informações sobre o nome da instância e, para cada classe, o valor da melhor solução conhecida (*Best Known Solution* - BKS) obtida a partir dos trabalhos da literatura, o valor da solução obtida pela VNS, e o tempo computacional, em segundos, gasto para obter a melhor solução (T_B), o tempo total de execução da VNS (T_T) e o GAP, em porcentagem, que corresponde a diferença entre a solução em relação a BKS, sendo dado por $100 \times ((\text{Solução} - BKS)/BKS)$. Os resultados em negrito indicam que a solução encontrada é igual ou melhor que a da coluna BKS.

Na Tabela 56, para cada instância, é fornecido o nome e o número de clientes, o limitante inferior (K_{min}) e superior (K_{max}) do número de veículos necessário para atender todos os clientes, o número de veículos utilizados (VH), o custo das rotas (Sol_R), a quantidade de emissão de CO_2 (Sol_G), e o tempo computacional, em segundos, gasto para obter a melhor solução (T_B) e o tempo total de execução da VNS (T_T).

Tabela 55 – Resultados obtidos pela VNS para o 2L-CVRP utilizando exatamente K_{max} veículos e sem permitir rotas com um único cliente.

Inst.	Classe 1				Classe 2				Classe 3				Classe 4				Classe 5				
	BKS	Solução	T _b	T _r	BKS	Solução	T _b	T _r	BKS	Solução	T _b	T _r	BKS	Solução	T _b	T _r	BKS	Solução	T _b	T _r	
1	278,73	278,73	0,00	0,88	290,84	290,84	0,50	2,647	284,52	284,52	0,94	39,81	294,25	294,25	0,25	15,23	278,73	278,73	11,67	44,98	
2	334,96	334,96	0,00	0,49	347,73	347,73	0,02	1,79	352,16	352,16	0,05	5,12	342,00	342,00	0,00	3,38	334,96	334,96	0,00	0,74	
3	358,40	358,40	0,00	1,05	403,93	403,93	0,03	16,11	394,72	394,72	1,80	31,51	368,56	368,56	1,44	32,14	358,40	358,40	0,11	12,77	
4	430,88	430,89	0,00	0,94	440,94	440,94	0,05	4,92	440,68	440,68	0,35	8,12	447,37	447,37	1,15	17,19	430,88	430,89	0,13	11,76	
5	375,28	375,28	0,00	1,36	388,72	388,72	0,78	29,92	381,69	381,69	0,62	22,84	383,87	383,88	2,99	47,24	375,28	375,28	0,01	14,77	
6	495,85	495,85	0,00	1,77	499,08	499,08	0,10	8,10	504,68	504,68	1,54	15,23	498,32	498,32	0,25	35,89	495,85	495,85	0,26	6,95	
7	568,56	568,56	0,00	5,95	734,65	734,65	0,11	23,47	702,59	702,59	13,27	80,18	703,49	703,49	15,08	229,83	658,64	658,64	4,89	192,17	
8	568,56	568,56	0,00	5,02	725,91	725,91	2,55	29,43	741,12	741,12	0,38	48,07	697,92	697,92	11,01	132,72	621,85	621,85	11,25	429,97	
9	607,65	607,65	0,00	1,83	611,49	611,49	0,01	7,82	613,90	613,90	0,10	18,39	625,10	625,10	1,37	18,57	607,65	607,65	0,01	9,53	
10	535,74	535,80	0,00	7,68	700,20	700,20	1,72	89,78	628,94	628,94	10,02	223,30	715,82	715,82	125,74	405,82	690,96	690,96	69,10	646,95	
11	505,01	505,01	0,00	5,60	721,54	721,54	1,28	110,38	717,37	717,37	7,25	124,08	815,68	793,07	719,07	1036,21	624,82	624,82	56,08	861,57	
12	610,00	610,00	0,19	4,45	619,63	619,63	1,48	108,09	610,00	610,00	0,23	7,68	618,23	618,23	17,00	135,14	610,00	610,23	0,52	44,44	
13	2006,34	2006,34	0,00	11,20	2669,39	2669,39	1,47	108,09	2486,44	2486,44	25,64	228,91	2609,36	2609,36	306,47	703,08	2416,04	2434,99	19,99	971,81	
14	837,67	837,67	0,00	85,76	1092,51	1092,51	136,15	461,17	1039,06	1037,59	607,97	1008,23	982,25	981,95	4,10	454,71	922,75	925,04	99,29	1800,15	
15	837,67	837,67	0,00	97,39	1041,75	1044,78	792,79	1102,33	1181,68	1181,68	29,10	633,34	1246,49	1245,90	460,81	1381,20	1246,49	1245,90	460,81	1656,77	
16	698,61	698,61	0,08	6,10	698,61	698,61	0,03	14,88	698,61	698,61	0,29	18,21	708,20	708,20	7,39	58,25	698,61	698,61	0,05	11,33	
17	861,79	861,79	0,09	8,50	870,86	870,86	0,23	13,02	861,79	861,79	0,15	10,16	861,79	861,79	0,11	17,07	861,79	861,79	0,21	11,04	
18	723,54	723,54	0,10	16,52	1053,09	1059,44	35,46	453,78	1102,17	1102,17	792,22	1316,89	1134,11	1128,23	623,12	1673,68	926,34	926,34	37,95	1800,68	
19	524,61	524,61	0,12	11,40	792,07	792,07	44,46	340,55	801,13	801,13	40,87	460,27	801,21	799,31	74,44	848,09	652,15	652,15	131,73	1800,22	
20	241,97	241,97	0,11	22,88	545,68	545,68	813,14	1616,73	541,58	536,71	1538,69	1801,20	551,72	549,78	1637,66	1801,87	478,15	478,15	1764,84	1801,24	
21	687,60	687,60	0,18	69,15	1060,72	1060,72	426,97	1155,26	1149,90	1149,20	266,39	1364,35	1000,25	990,44	1095,04	1800,60	886,00	895,51	1650,67	1802,45	
22	740,66	740,66	0,39	41,10	1081,44	1081,44	103,13	646,55	1094,66	1094,16	888,91	1801,30	1089,27	1079,27	524,48	1801,83	948,60	956,86	1462,27	1804,33	
23	835,26	835,26	5,92	57,39	1093,27	1093,27	150,43	911,29	1117,54	1117,09	1076,72	1801,99	1093,01	1092,82	2,67,14	1650,96	948,68	955,05	1680,08	1801,34	
24	1024,69	1024,69	4,85	52,36	1222,43	1222,43	92,77	470,87	1118,44	1118,44	92,19	702,21	1141,97	1137,38	11,38,31	1801,36	1046,08	1049,58	317,39	1382,69	
25	826,14	826,14	0,99	135,96	1453,98	1453,98	331,01	1163,64	1433,92	1425,18	2709,13	3600,00	1435,18	1432,50	32,69,58	3600,00	1183,63	1192,91	3454,88	3600,00	
26	819,56	819,56	0,03	44,42	1323,23	1309,65	1660,81	2544,72	1392,43	1389,60	3337,81	3600,00	1447,03	1437,73	2285,40	3600,00	1252,65	1254,60	2635,37	3600,00	
27	1082,65	1082,65	1,79	165,72	1367,85	1367,85	412,15	1586,10	1423,74	1422,34	583,42	2403,14	1353,06	1347,31	1868,41	3600,00	1259,17	1277,67	2708,90	3600,00	
28	1040,70	1042,12	0,27	52,16	2637,55	2635,74	2050,61	3600,00	2737,42	2723,20	2701,26	3600,00	2690,69	2682,01	2574,80	3600,00	2399,25	2405,90	3103,80	3600,00	
29	1162,96	1162,96	0,56	106,55	2285,84	2278,61	2125,55	3600,00	2150,35	2145,46	2828,70	3600,00	2299,32	2294,56	3183,75	3600,00	2179,12	2179,64	3103,80	3600,00	
30	1028,42	1028,42	44,78	182,32	1875,38	1865,82	2025,00	3600,00	1912,09	1905,34	1820,33	3600,00	1904,42	1898,98	2878,16	3600,00	1565,96	1572,38	3596,81	3600,00	
31	1299,56	1318,29	55,53	156,90	2341,08	2329,05	2283,00	3600,00	2354,21	2341,01	3398,93	3600,00	2459,59	2451,07	2836,66	3600,00	2053,57	2076,61	3444,84	3600,00	
32	1296,91	1291,50	433,76	3600,00	2365,99	2343,18	1774,55	3600,00	2350,35	2304,94	3338,95	3600,00	2343,29	2339,51	2983,86	3600,00	2016,58	2048,01	2067,06	3600,00	
33	1296,13	1291,50	300,74	3119,32	2349,98	2337,33	1204,12	3600,00	2447,20	2433,33	3501,94	3600,00	2446,05	2446,05	3310,56	3600,00	2044,88	2048,55	2808,43	3600,00	
34	708,39	707,81	265,76	3600,00	1219,02	1209,02	3211,11	3600,00	1239,84	1239,84	2244,98	3600,00	1241,13	1233,99	3575,56	3600,00	1062,18	1070,71	2573,87	3600,00	
35	862,79	859,29	198,63	3600,00	1434,99	1422,06	3080,15	3600,00	1511,66	1504,65	3272,87	3600,00	1550,24	1557,06	3585,61	3600,00	1278,90	1291,33	3533,00	3600,00	
36	583,98	583,38	682,77	3600,00	1733,53	1743,55	1596,51	3600,00	1833,97	1827,40	3405,61	3600,00	1713,71	1715,53	3255,55	3600,00	1541,07	1562,70	3600,00	3600,00	
Média			55,49	524,46			67,67	1260,37			107,21	1493,74			1190,06	1647,27			1195,64	1725,57	
																					0,37

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 56 – Soluções obtidas pela VNS para as instâncias da Classe 1.

Instância		Solução da VNS						
Nome	Clientes	K_{min}	K_{max}	VH	Sol _R	Sol _G	T _B	T _T
E016-03m	15	3	3	3	273,00	1277,63	0,00	1,54
E016-05m	15	5	5	5	340,00	1561,18	0,00	1,61
E021-04m	20	4	4	4	372,00	1642,42	0,01	2,74
E021-06m	20	6	6	6	447,00	2025,85	0,00	3,58
E022-04g	21	4	4	4	367,00	1751,55	0,00	2,84
E022-06m	21	6	6	6	492,00	2341,64	0,01	4,84
E023-03g	22	3	3	3	564,00	2298,92	0,01	11,69
E023-05s	22	3	5	3	564,00	2298,92	0,03	13,52
E026-08m	25	8	8	8	610,00	2897,58	0,00	5,96
E030-03g	29	3	3	3	525,00	2464,22	0,10	13,50
E030-04s	29	3	4	4	495,00	2185,30	0,02	13,97
E031-09h	30	9	9	9	606,00	2827,11	0,15	10,61
E033-03n	32	3	3	3	2034,00	8145,22	0,04	18,38
E033-04g	32	4	4	4	861,00	4045,62	0,05	26,63
E033-05s	32	4	5	4	861,00	4045,62	0,08	38,74
E036-11h	35	11	11	11	708,00	3274,33	0,19	18,63
E041-14h	40	14	14	14	878,00	4073,65	0,43	31,85
E045-04f	44	4	4	4	736,00	2909,50	1,61	94,67
E051-05e	50	5	5	5	525,00	2518,48	0,70	46,10
E072-04f	71	4	4	4	238,00	1020,40	18,32	574,92
E076-07s	75	7	7	7	684,00	3121,38	5,77	430,39
E076-08s	75	8	8	8	753,00	3420,07	11,39	350,10
E076-10e	75	10	10	10	848,00	3861,76	52,79	269,62
E076-14s	75	14	14	14	1020,00	4759,95	7,02	136,28
E101-08e	100	8	8	8	822,00	3699,21	39,09	2147,75
E101-10c	100	10	10	10	806,00	3972,05	4,99	1620,29
E101-14s	100	14	14	14	1100,00	5029,00	46,18	1936,46
E121-07c	120	7	7	7	1013,00	5141,91	11,04	2386,11
E135-07f	134	7	7	7	1158,00	5300,29	154,49	3600,00
E151-12b	150	12	12	12	1032,00	4651,17	92,19	3600,00
E200-16b	199	16	16	16	1323,00	6116,15	3391,45	3600,00
E200-17b	199	16	17	17	1303,00	5906,19	693,56	3600,00
E200-17c	199	16	17	17	1303,00	5906,19	1668,14	3600,00
E241-22k	240	22	22	22	570,00	2785,49	3033,74	3600,00
E253-27k	252	26	27	26	851,00	3835,96	2037,94	3600,00
E256-14k	255	14	14	14	527,00	2376,83	3403,32	3600,00

Fonte: Elaborada pela autora.

