
Métodos de simulação Monte Carlo para
aproximação de estratégias de *hedging*

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

Métodos de simulação Monte Carlos para aproximação de estratégias de *hedging*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

**USP – São Carlos
Setembro de 2015**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S619m Siqueira, Vinícius de Castro Nunes de
Métodos de simulação Monte Carlo para aproximação
de estratégias de hedging / Vinícius de Castro Nunes
de Siqueira; orientador Dorival Leão Pinto Júnior. -
- São Carlos, 2015.
133 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2015.

1. Cálculo Estocástico. 2. Simulação Monte Carlo.
3. Estratégias de Hedging. 4. Modelo de Heston. 5.
Opções Multivariadas. I. Leão Pinto Júnior, Dorival,
orient. II. Título.

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

Monte Carlo simulation methods to approximate hedging
strategies

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

USP – São Carlos
September 2015

*Às meus pais,
com amor . . .*

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer a minha mãe, Aurora, por ser a pessoa mais importante na minha vida, pelo amor incondicional, por toda a disponibilidade, incentivo, dedicação e paciência comigo. Ao meu pai, Cláudio, pela oportunidade e esforço em me fornecer uma boa educação, além da inspiração em me tornar uma pessoa trabalhadora e dedicada em tudo o que eu decidir fazer. Como sempre digo, eu só gostaria de ter metade de sua dedicação e seria excepcional em qualquer atividade. Também agradeço a minha irmã, que mesmo distante, sempre me forneceu palavras de incentivo e confiança durante todo o tempo em que estive distante. Aos meus avós, Irineu, Laudicena e Edméa por todo o carinho dispensados a mim e pelos exemplos de vida que são. A todos os demais familiares, que são muitos, mas não menos importantes. Vocês sempre foram um porto seguro para mim e sua companhia sempre me foi especial.

Também agradeço ao amigo e orientador, professor Dr. Dorival Leão Pinto Júnior, por dividir um pouco do conhecimento que possui, que é bastante extenso, por ser uma pessoa extremamente agradável e de fácil conversa e ter contribuído fortemente para a realização deste trabalho. É claro que, sem sua motivação, paciência, liderança e ajuda, isto não seria possível. Agradeço, também, por todas as conversas que tivemos e que, com certeza, têm contribuído para minha visão sobre o mundo atual e me fornecido ideias para os passos futuros da minha carreira.

Aos professores doutores Pedro José Catuogno, Marinho Gomes de Andrade Filho e Ricardo Ehlers pelos comentários e contribuições tecidos em meu exame de qualificação, além das referências indicadas para a conclusão desta tese. Agradeço ao professor Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi, que contribuiu muito ao trabalho ao fornecer ideias, além de produtivas discussões por e-mail e em visitas a São Carlos que culminaram em um artigo conjunto já publicado. Agradeço também ao professor Dr. Jack Baczynski por sempre ser solícito e ter disponibilizado o cluster do LNCC para que pudéssemos realizar nossas simulações.

Um agradecimento aos amigos dos seminários de cálculo estocástico, Francys Andrews, Ricardo, Victor e Rafael, pelas calorosas e prazerosas discussões sobre os temas estudados que, certamente contribuíram para o conhecimento nesta área. Muito obrigado pela amizade de vocês e por terem me apoiado e ajudado em momentos em que estava um pouco desanimado e sem muitas perspectivas.

Agradeço a minha namorada Adriana, pela importância que representa em minha vida e pelo amor e parceria incondicional. Também agradeço a sua paciência nos momentos finais de entrega da tese em que eu, possivelmente, não estava em minhas perfeitas faculdades mentais e, ainda assim, tive todo o apoio emocional para terminar este trabalho. Obrigado por me mostrar um lado diferente e bonito da vida. Sua companhia é incrível e fundamental.

Aos meus amigos de colégio, Aline, Carol Yumi, Caroline Brito, Fábio, Layane, Leandro, Loiola, Ranieri e Viviane que, apesar da distância e do pouco tempo de contato depois do colégio, continuam sendo pessoas confiáveis e que se esforçam para que possamos, sempre que possível, realizar algum tipo de encontro e contar os rumos de nossas vidas. Nos tornamos uma família e a amizade de vocês é muito gratificante.

Um agradecimento especial a toda a equipe Estatcamp: Rubens, Bona, Hiro, Jéssica, Aline, André (Xineis), Afonso, Gustavo, Luiz, Rafael e Márcia. Trabalhar com vocês é animador e gratificante. Muito obrigado por sempre animarem o meu dia e por toda a ajuda nas diversas áreas de conhecimento. Um agradecimento especial ao Rubens, pela amizade, disposição e incentivo, mesmo que muitas vezes sem perceber. Além disso, obrigado por ser um exemplo de motivação e perseverança e por ser uma pessoa que se preocupa muito com os demais,

mesmo que, muitas vezes, acabe sendo prejudicado por isso. Também gostaria de tecer um agradecimento especial ao Bona, por toda a amizade, sintonia e parceria, além de toda a ajuda no desenvolvimento do programa computacional e na operação do cluster do LNCC. Com certeza, sem a sua ajuda, eu ainda estaria realizando as simulações e este trabalho não estaria completo.

A família da Matemática 2003 (MAT 03) e seus agregados: Augusto (Drake), Dani, Marcelo (Janela), Luiz, Rodrigo (Minhoca), Vanessa, Rodrigo (Pedra), Carla, Ronaldo (Tanaka), Vinícius (Mindú), Júlio César (Ronaldinho), Vitor (Pinguelão), Tiago (Tião), Fabio (Kerk's), Bruno (Laranja), Rafael (Sansei), Mirella (Mizy), Leandro, Anderson (Alemão), Fernando e Erika. Apesar de já ter passado um tempo desde o fim da graduação, nossa amizade continuará para sempre. A vontade que temos de estarmos juntos e nos reunirmos é mais forte do que qualquer distância física. Obrigado por serem pessoas incríveis, das quais eu nunca vou me esquecer. Obrigado por todas as festas, toda a animação e pelo ótimo grupo que somos.

Agradeço aos amigos e sócios da DigUp: Bona, Rafael e Hiro, pela confiança e por serem pessoas extremamente focadas e dedicadas no que fazem. Vamos em frente!

Um agradecimento mais do que especial a toda a turma da Zuera: Adam, Faimison, Marcos, Stevão, Rafael Mantovani, Rafael Montanari, Rodolfo, Silvana, Valéria, Jadson e Vania. Obrigado por tornarem todos os encontros, almoços, jantares, festas e quaisquer outros tipos de eventos sempre animados. Obrigado pelas discussões produtivas e por todo o apoio mútuo de nossas caminhadas na pós-graduação.

Também gostaria de agradecer a todos os amigos da famosa salinha da pós-graduação, Marina, Flávio, Cristel, Juan Pablo, Bruno, Fernando e Thales. Foram muitas as noites e finais de semana que passamos por lá estudando e apoiando uns aos outros. Não poderia deixar de fazer um agradecimento mais do que especial aos irmãos Flávio e Marina que, certamente, são duas das pessoas mais estudiosas, dedicadas e batalhadoras que eu jamais conheci. Obrigado Marina por ter me acompanhado na viagem a Bogotá para apresentação do meu trabalho e ser uma pessoa capaz de realizar 5324 atividades simultâneas, por ser guerreira e aventureira e ter um coração enorme. Suas palavras me confortam de tal forma, que eu jamais poderia

explicar. Flávio, eu só agradeço por você ser você. Mesmo sem você saber, eu costumo usá-lo como exemplo de amizade, foco, dedicação e vitória. Agradeço também quando você buscou eu e a Marina no aeroporto na volta de Bogotá. Tenho certeza que nunca ficamos tão felizes como naquele dia. Até hoje, ainda não sei o que faria com todas aquelas malas. Vocês estarão pra sempre em meu coração.

Agradeço a Noemi e ao Gabriel pela amizade, honestidade, cumplicidade e pelas pessoas incríveis que são. Muito obrigado por fazerem parte da minha vida e por todas as palavras amigas. Espero que nossa amizade perdure para sempre. Agradeço também a Lidiane, que é tão danificada quanto eu em se tratando de animais e por ter se tornado uma amiga sensacional. Ao amigo e irmão de olho puxado, Cláudio Nagafchi e sua família por serem pessoas extremamente solícitas, por me apoiarem, pelas conversas, discussões, disponibilidade e por realmente se importarem comigo e me tratarem como membro da família. Ao Jackson que, apesar de estar em Barcelona, deixou muita saudade e permanece sendo um grande amigo.

Finalmente, agradeço a todos os professores do ICMC que, por algum momento, fizeram parte da minha caminhada nos estudos. Vocês contribuíram para a minha educação e, por isso, sou muito grato. Também agradeço aos demais funcionários que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta tese e por proporcionarem um ambiente propício aos estudos.

A todos estes e aos demais que, por ventura, eu tenha esquecido de citar, o meu muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um método de simulação Monte Carlo para o cálculo do *hedging* dinâmico de opções do tipo europeia em mercados multidimensionais do tipo Browniano e livres de arbitragem. Baseado em aproximações martingales de variação limitada para as decomposições de Galtchouk-Kunita-Watanabe, propomos uma metodologia factível e construtiva que nos permite calcular estratégias de *hedging* puras com respeito a qualquer opção quadrado integrável em mercados completos e incompletos. Uma vantagem da abordagem apresentada aqui é a flexibilidade de aplicação do método para os critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média de forma geral, sem a necessidade de se considerar hipóteses de suavidade para a função *payoff*. Em particular, a metodologia pode ser aplicada para calcular estratégias de *hedging* quadráticas multidimensionais para opções que dependem de toda a trajetória dos ativos subjacentes em modelos de volatilidade estocástica e com funções *payoff* descontínuas. Ilustramos nossa metodologia, fornecendo exemplos numéricos dos cálculos das estratégias de *hedging* para opções *vanilla* e opções exóticas que dependem de toda a trajetória dos ativos subjacentes escritas sobre modelos de volatilidade local e modelos de volatilidade estocástica. Ressaltamos que as simulações são baseadas em aproximações para os processos de preços descontados e, para estas aproximações, utilizamos o método numérico de Euler-Maruyama aplicado em uma discretização aleatória simples. Além disso, fornecemos alguns resultados teóricos acerca da convergência desta aproximação para modelos simples em

que podemos considerar a condição de Lipschitz e para o modelo de volatilidade estocástica de Heston.

Palavras-chave: Método de Euler-Maruyama, Modelo de Heston, Opções multivariadas, Mercado incompleto.

Abstract

In this work, we present a Monte Carlo simulation method to compute de dynamic hedging of european-type contingent claims in a multidimensional Brownian-type and arbitrage-free market. Based on bounded variation martingale approximations for the Galtchouk-Kunita-Watanabe decomposition, we propose a feasible and constructive methodology which allows us to compute pure hedging strategies with respect to any square-integrable contingent claim in complete and incomplete markets. An advantage of our approach is the flexibility of quadratic hedging in full generality without a priori smoothness assumptions on the payoff function. In particular, the methodology can be applied to compute multidimensional quadratic hedging-type strategies for fully path-dependent options with stochastic volatility and discontinuous payoffs. We illustrate our methodology, providing some numerical examples of the hedging strategies to vanilla and exotic contingent claims written on local volatility and stochastic volatility models. The simulations are based in approximations to the discounted price processes and, for these approximations, we use an Euler-Maruyama-type method applied to a simple random discretization. We also provide some theoretical results about the convergence of this approximation in simple models where the Lipschitz condition is satisfied and the Heston's stochastic volatility model.

Keywords: Euler-Maruyama method, Heston model, Multidimensional contingent claims, Incomplete market.

Lista de Figuras

3.1	Determinação da família de \mathbb{F} -tempos de paradas $\mathcal{T}^{k,j}$ e do processo $A^{k,j}$ para j fixo.	28
3.2	Partição \mathcal{T}^k gerada a partir das famílias de tempos de parada $\mathcal{T}^{k,1}$ e $\mathcal{T}^{k,2}$ obtidas a partir de um movimento Browniano bidimensional $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$	30
5.1	Partição fina \mathcal{T}^k gerada a partir de 3 partições distintas $\mathcal{T}^{k,1}, \mathcal{T}^{k,2}$ e $\mathcal{T}^{k,3}$	100
5.2	Realização de 3 partições.	103
5.3	Conjuntos $U^{k,j}$ para o cálculo do valor esperado de H condicionado à filtragem $\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k$	103
5.4	Conjuntos $U^{k,j}$ para o cálculo do valor esperado de H condicionado à filtragem $\mathcal{F}_{T_1^{k,2}}^k$	103
5.5	Partição \mathcal{R}^k para o cálculo da esperança condicional para o primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$. Neste caso, $R = T - T_1^{k,1}$	104
5.6	Partição \mathcal{R}^k para o cálculo da esperança condicional para o primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$. Neste caso, $R = T - T_1^{k,2}$	104
5.7	Conjuntos $V^{k,j}$ para o cálculo da esperança condicional no primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$	104
5.8	Conjuntos $V^{k,j}$ para o cálculo da esperança condicional no primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$	104
5.9	Partição $\mathcal{T}^{k,j,*}$ para o cálculo da esperança condicional do primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$	105
5.10	Partição $\mathcal{T}^{k,j,*}$ para o cálculo da esperança condicional do primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$	105

5.11	Simulações de 5 trajetórias de preços descontados para o cálculo da esperança condicional $\mathbb{E}[H \mathcal{F}_{0,5}^k]$	106
5.12	Estratégia de <i>hedging</i> via simulação Monte Carlo para uma opção BLAC <i>down and out</i> em um modelo de Black-Scholes de dimensão 5.	111
5.13	Partição determinística para cálculo do erro de <i>hedging</i> no intervalo $[0, 1]$	113
5.14	Estratégia de <i>hedging</i> de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston	118
5.15	Preço de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston	119

Lista de Tabelas

4.1	Aproximação da volatilidade V_t pelo método de Euler-Maruyama (discretização aleatória) . . .	94
4.2	Aproximação da volatilidade V_t pelo método de Euler-Maruyama (discretização determinística)	95
5.1	Estratégia de <i>hedging</i> via simulação Monte Carlo para uma opção BLAC <i>down and out</i> em um modelo de Black-Scholes de dimensão 5.	110
5.2	Erro de <i>hedging</i> médio de uma opção <i>one-touch</i> escrita no modelo CEV	115
5.3	Estratégia de <i>hedging</i> de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston	118
5.4	<i>Hedging error</i> médio de uma opção <i>one-touch</i> com a decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada para o modelo de Heston	120
5.5	<i>Hedging error</i> médio de uma opção <i>one-touch</i> sob o critério de variância média para o modelo de Heston	121

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Contribuições da tese	6
2	Modelo de Mercado	11
2.1	Preliminares	12
2.2	Decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe	19
2.2.1	CrITÉrio de Minimização do Risco Local	22
2.2.2	CrITÉrio de Variância Média	23
3	Cálculo Funcional de Itô	25
3.1	Discretização Aleatória	26
3.2	Espaços B^p	35
3.3	Aproximações fracas para o processo de <i>hedging</i>	40
3.4	<i>Hedging</i> dinâmico	62
4	Método Numérico de Euler-Maruyama	71
4.1	O método	72
4.2	Convergência no caso Lipschitz	77
4.3	Convergência para o modelo de Heston	81

4.3.1	Estudo de simulação	93
5	Algoritmo e Resultados Numéricos	97
5.1	Algoritmo	98
5.2	Resultados	109
5.2.1	Modelo de Black-Scholes multidimensional	109
5.2.2	Erros de <i>hedging</i> médios	111
5.2.3	Modelo de elasticidade constante da variância (CEV)	114
5.2.4	Modelo de volatilidade estocástica de Heston	116
6	Conclusões Finais	123

Introdução

O problema de precificação e *hedging* de derivativos em mercados incompletos é muito abordado em matemática financeira. De modo a formular este problema, consideramos um mercado financeiro livre de arbitragem dado por $(S, \mathbf{F}, \mathbb{P})$, em que S é um \mathbf{F} -semimartingale d -dimensional que representa o processo de preço do ativo com risco descontado da taxa de juros. Denotamos por $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ a filtragem que armazena o fluxo de informação disponível no mercado no intervalo finito $[0, T]$ e \mathbb{P} é a probabilidade física. Como o mercado é livre de arbitragem, podemos assumir que o conjunto das medidas martingales \mathbb{Q} equivalentes a \mathbb{P} tais que o processo S é um \mathbb{Q} -martingale local, é não vazio. Neste trabalho, consideramos o problema de precificação e *hedging* de opções do tipo europeia com função *payoff* H , de modo que H seja \mathbf{F}_T -mensurável em que T é o tempo de maturidade. Como a opção é europeia, utilizaremos H para denotar tanto a função *payoff* como a opção. Para que possamos calcular uma estratégia de *hedging* para esta opção, utilizaremos um *portfolio* dinâmico, dado pelo par (θ_t, γ_t) em que $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d)$, de forma que θ_t^i descreve a quantidade do i -ésimo ativo com

risco de posse do investidor no instante t e γ_t representa a quantidade do ativo sem risco. Neste caso, o valor do *portfolio* descontado é dado por

$$V_t = \theta_t S_t + \gamma_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Quando o mercado é completo, existe uma única medida martingale equivalente \mathbb{Q} e a opção H pode ser escrita como a soma de um custo inicial e uma integral estocástica com respeito ao processo de preço na forma

$$H = H_0 + \int_0^T \theta_t^{H,\mathbb{Q}} dS_t.$$

Neste caso, o processo $\theta_t^{H,\mathbb{Q}} = (\theta_t^{H,\mathbb{Q},1}, \dots, \theta_t^{H,\mathbb{Q},d})$ que representa o martingale é a única estratégia auto-financiável que replica a opção H e H_0 é o custo inicial de implementação da estratégia.

Entretanto, mesmo quando o mercado é completo, estratégias de *hedging* podem ser extremamente difíceis de serem calculadas, devido ao fato de que, geralmente, não é fácil identificar o integrando $\theta^{H,\mathbb{Q}}$ da representação martingale, como pode ser visto em Karatzas e Ocone (1991) [61] e Colwell *et al.* (1991) [20]. No caso Markoviano, métodos elementares baseados na propriedade de Markov e na regra de diferenciação de Itô podem ser aplicados para determinar o integrando em algumas integrais estocásticas, como pode ser visto em Elliott e Kohlmann (1998) [34]. Uma descrição completa da representação martingale foi obtida por Ocone (1984) [77], em que o problema é discutido utilizando métodos de cálculo de Malliavin e diferenciação fraca em determinados espaços de Sobolev. Karatzas e Ocone (1991) [61] aplicaram os resultados obtidos em Ocone (1984) [77] para determinar *portfolios* ótimos e estratégias de *hedging*. A aplicação do cálculo de Malliavin utilizando técnicas de simulação Monte Carlo levou à criação de diversos algoritmos para a avaliação de estratégias de *hedging*. Dentre eles, destacamos os trabalhos de Fournié *et al.* (1999) [38], Fournié *et al.* (2001) [37], Bermin (2002) [8] e Bernis *et al.* (2003) [9]. A principal vantagem do uso do cálculo de Malliavin surge quando nos deparamos com variáveis aleatórias absolutamente contínuas cujas densidades não são conhecidas explicitamente. No entanto, o esquema de aproximação baseado no trabalho de Fournié *et al.* (1999) [38] é bastante complicado, incluindo cálculos matemáticos avançados. Um problema

que surge, neste contexto, é o aparecimento de pesos aleatórios quando são utilizados argumentos de integração por partes. Estes pesos podem ser muito difíceis de serem simulados, uma vez que eles dependem, tipicamente, de integrais de Skorohod. Consequentemente, as fórmulas obtidas neste processo não são, em geral, úteis do ponto de vista computacional. Neste sentido veja, por exemplo, os trabalhos de Elie *et al.* (2007) [32], Kohatsu-Higa e Montero (2004) [65] e Benhamou (2003) [7].

Quando o mercado é incompleto não temos a unicidade da medida martingale equivalente e, portanto, não existe uma estratégia que seja replicável e auto-financiável simultaneamente. Neste sentido, diversos conceitos para a precificação e *hedging* de uma opção H foram desenvolvidos. Neste trabalho, lidamos com os dois principais critérios quadráticos estudados na literatura: o critério de minimização do risco local e o critério de variância média.

A decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe é fundamental para a obtenção de estratégias de *hedging* quadráticas no modelo de mercado Browniano. Se \mathbb{Q} uma medida martingale equivalente a \mathbb{P} , esta decomposição é dada por

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^T \theta_{\ell}^{H,\mathbb{Q}} dS_{\ell} + L_T^{H,\mathbb{Q}} \quad (1.1)$$

em que $L^{H,\mathbb{Q}}$ é um \mathbb{Q} -martingale local fortemente ortogonal a S e $\theta^{H,\mathbb{Q}}$ é um processo adaptado.

Uma primeira abordagem para o problema de precificação e *hedging* de opções em mercados incompletos, consiste em trabalhar com estratégias que sejam replicáveis, porém não auto-financiáveis. Neste caso, é necessário controlar o custo da opção ao longo do tempo. Desta forma, um dos primeiros conceitos para a precificação e *hedging*, em mercados incompletos, é o critério quadrático de minimização do risco local, desenvolvido inicialmente por Föllmer e Sondermann (1986) [36] e estendido por Schweizer (1991) [85] e Föllmer e Schweizer (1991) [35]. Sob algumas condições técnicas, a estratégia de minimização do risco local pode ser caracterizada por duas propriedades:

1. A estratégia é replicável: $V_T = H$;

2. O processo de custo deve ser um martingale ortogonal à parte martingale do processo de preços descontado (ver Schweizer (2008) [90]).

A existência de estratégias de *hedging* de minimização do risco local está relacionada com a existência da chamada decomposição de Föllmer-Schweizer, que pode ser vista como uma extensão da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe para semimartingales. Para maiores referências neste sentido, citamos os trabalhos de Pham (2000) [79], Heath *et al.* (2001) [49] e Schweizer (2008) [90]. Mais recentemente, temos os trabalhos de Choulli *et al.* (2010) [18] e Choulli *et al.* (2011) [19]. Veja também o trabalho de Delong (2013) [29], em que decomposições de Föllmer-Schweizer são obtidas a partir de soluções de equações diferenciais estocásticas retrógradas (BSDEs). Ressaltamos que decomposições ortogonais sem as propriedades de integrabilidade também podem ser definidas em termos da chamada decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada (veja Schweizer (1995) [87]). Neste contexto, se existe uma medida martingale equivalente $\hat{\mathbb{P}}$, denominada medida martingale minimal, a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe com respeito a $\hat{\mathbb{P}}$ coincide com a decomposição de Föllmer-Schweizer (veja Schweizer (2008) [90]) para a medida \mathbb{P} . Assim, a estratégia de *hedging* é dada por $\theta^{H, \hat{\mathbb{P}}}$ e o valor inicial para a implementação da estratégia por $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[H]$ (ver (1.1)).

Em contrapartida ao critério de minimização do risco local, no critério de variância média insistimos em estratégias que sejam auto-financiáveis. Neste caso, a estratégia de *portfolio* não replica a opção H . Portanto, nesta abordagem, a ideia é minimizar o valor esperado do erro de *hedging* quadrático sobre todos os valores iniciais do *portfolio* e todas as estratégias admissíveis $\theta \in \Theta$ (ver Capítulo 2), isto é,

$$\inf_{\theta \in \Theta, V_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| H - V_0 - \int_0^T \theta_t dS_t \right|^2 \right]. \quad (1.2)$$

Desta forma, a equação (1.2) sugere que devemos trabalhar com o subconjunto das medidas de probabilidade equivalentes a \mathbb{P} com derivada de Radon-Nikodym quadrado integrável em relação a \mathbb{P} , isto é, $\mathcal{M}_2^e := \{ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}; \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\mathbb{P}) \}$. Supondo $\mathcal{M}_2^e \neq \emptyset$ e $H \in L^2(\mathbb{P})$, a estratégia de *hedging* quadrática ótima $(V_0^{\tilde{\mathbb{P}}}, \eta^{\tilde{\mathbb{P}}})$ existe e pode ser calculada a partir da medida martingale de variância ótima $\tilde{\mathbb{P}}$ (VOMM), como pode ser visto em Rheinlander e Schweizer (1997) [82],

Gourieroux *et al.* (1998) [45] e Schweizer (1996) [88]. Em particular,

$$\eta_t^{\tilde{\mathbb{P}}} := \theta_t^{H, \tilde{\mathbb{P}}} - \frac{\tilde{\zeta}_t}{\tilde{Z}_t} \left(V_{t-}^{H, \tilde{\mathbb{P}}} - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[H] - \int_0^t \eta_\ell^{\tilde{\mathbb{P}}} dS_\ell \right); \quad 0 \leq t \leq T.$$

em que $\theta^{H, \tilde{\mathbb{P}}}$ é calculado em termos da VOMM aplicada à decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe e

$$\tilde{Z}_t := \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big| \mathbf{F}_t \right] = \tilde{Z}_0 + \int_0^t \tilde{\zeta}_\ell dS_\ell; \quad 0 \leq t \leq T$$

em que $V^{H, \tilde{\mathbb{P}}} := \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[H | \mathbf{F} \cdot]$ é o preço justo da opção sob $\tilde{\mathbb{P}}$. Para uma comparação entre os critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média, veja os trabalhos de Heath *et al.* (2001) [49] e Schweizer (2001) [89]. Veja também os trabalhos de Cerný e Kallsen (2007) [16] para o caso semimartingale geral e os trabalhos de Kallsen *et al.* (2009) [58], Kramkov e Sirbu (2006) [68] e Kramkov e Sirbu (2007) [69] para outras estratégias de *hedging* baseadas em decomposições de Galtchouk-Kunita-Watanabe.

Podemos, a partir do cálculo de variações quadráticas cruzadas $d[V^{H, \mathbb{Q}}, S]_t / d[S, S]_t$ para $\mathbb{Q} \in \{\hat{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}\}$, obter representações concretas para as estratégias de *hedging* puras $\theta^{H, \mathbb{Q}}$. Por exemplo, quando trabalhamos com opções *vanilla*, podemos obter tais estratégias a partir do teorema de Feynman-Kac (veja Heath *et al.* (2001) [49], por exemplo). No caso de opções exóticas, especialmente aquelas em que a função *payoff* depende de toda a trajetória do ativo, obter estas representações concretas que sejam computacionalmente eficientes para $\theta^{H, \mathbb{Q}}$ é relativamente mais difícil. Em particular, quando trabalhamos com opções que dependem de toda a trajetória do ativo, os argumentos de Feynman-Kac não são satisfeitos. Desta forma, é necessário trabalhar com versões não-Markovianas do teorema de Feynman-Kac a fim de obter estratégias de *hedging* robustas para estas opções.

Quando estamos trabalhando no critério quadrático de variância média, é importante observar que, para o cálculo da estratégia ótima $(V_0^{\tilde{\mathbb{P}}}, \eta^{\tilde{\mathbb{P}}})$ o processo \tilde{Z} não está relacionado com a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. Entretanto, em modelos de volatilidade estocástica, este processo pode ser expresso a partir das equações de representação fundamentais, como pode ser visto em Hobson (2004) [53] e Biagini *et al.* (2000) [10]. Em particular, Hob-

son (2004) [53] obteve fórmulas fechadas para o processo $\tilde{\zeta}$ e para qualquer medida q -ótima utilizando o modelo de Heston (1993) [50]. Neste sentido, estas expressões serão utilizadas na implementação do algoritmo e para os testes numéricos. Vale observar que, recentemente, fórmulas semi-implícitas para opções *vanilla* baseadas em caracterizações gerais de estratégias de *hedging* de variância ótimas foram apresentadas em Cerný e Kallsen (2007) [16], as quais permitem implementações numéricas factíveis em modelos afins. Veja, por exemplo, Kallsen e Vierthauer (2009) [59] e Cerný e Kallsen (2008) [17].

Outra forma de tratar o problema consiste em utilizar equações diferenciais estocásticas retrógradas para obter estratégias de *hedging* ótimas. Alguns autores propuseram métodos numéricos eficientes neste contexto. Por exemplo, Delong (2013) [29] fornece alguns métodos concretos para o caso Markoviano. Para o caso não-Markoviano, a dificuldade é maior. Um problema que surge, neste contexto, é a implementação de aproximações factíveis para o integrando martingale de equações diferenciais estocásticas retrógradas. Todos os métodos numéricos existentes para o caso não-Markoviano requerem condições de regularidade a priori sobre a condição final. Citamos os trabalhos de Gobet e Labart (2007) [41], Zhang (2004) [91], Gobet e Makhlouf (2010) [42] e Delong (2013) [29] como referências neste sentido. Mais recentemente, Briand e Labard (2014) [13] e Gobet e Takedjiev (2013) [43, 44] utilizaram o cálculo de Malliavin juntamente com métodos de regressão, para calcular valores esperados baseados em expansões de Wiener sob algumas condições de regularidade.

Alguns autores têm tratado o problema de *hedging* a partir do critério quadrático de variância média relacionando controle estocástico e equações diferenciais *backwards*. Nesta direção veja, por exemplo, Kohlmann e Zhou (2000) [66] que trataram do problema a partir de uma abordagem de controle estocástico linear-quadrático e Jeanblanc *et al.* (2012) [57] que combinaram técnicas martingales e argumentos de projeção com a abordagem de controle estocástico linear-quadrático.

1.1 Contribuições da tese

Como principais contribuições deste trabalho, podemos citar:

1. A obtenção de representações não-Markovianas multidimensionais computacionalmente eficientes para o processo de preço de opções europeias genéricas que permitem um cálculo concreto da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe $(\theta^{H,\mathbb{Q}}, L^{H,\mathbb{Q}})$.
2. A formulação de um algoritmo concreto para o cálculo do preço e de estratégias de *hedging* de opções \mathbb{Q} -quadrado integráveis gerais sob o critério de minimização do risco local baseadas na decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. Em relação ao critério de variância média, podemos calcular estratégias de *hedging* ótimas para o modelo de Heston, desde que possamos encontrar soluções para as equações de representação fundamentais apresentadas em Hobson (2004) [53] e em Biagini *et al.* (2000) [10].
3. Um estudo de convergência do método numérico de Euler-Maruyama para aproximação do preço descontado do ativo com risco S baseado no modelo de Heston a partir da discretização aleatória proposta por Leão e Ohashi (2013) [73].

O ponto chave para a obtenção de representações eficientes e factíveis para a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe são aproximações fracas, desenvolvidas por Leão e Ohashi (2013) [73] para mercados Brownianos unidimensionais. Neste trabalho, estendemos os resultados obtidos por Leão e Ohashi (2013) [73] para decomposições de Galtchouk-Kunita-Watanabe multidimensionais sob condições de integrabilidade fracas. Além de estender os resultados unidimensionais para o caso multidimensional, a partir de uma simples translação baseada na propriedade forte de Markov do movimento Browniano, aplicamos os resultados para o cálculo de estratégias em qualquer instante $0 \leq t \leq T$. Desta forma, também implementamos um algoritmo simples para o cálculo do erro de *hedging* cometido pelo nosso método. Parte dos resultados obtidos nesta tese foram, recentemente, publicados em Bonetti *et al.* (2015) [11].

Além do problema de aproximação da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe a partir de aproximações fracas, também tratamos do problema numérico em se aproximar o processo de preço descontado dos ativos com risco. Neste sentido, utilizamos um método numérico do tipo Euler-Maruyama. A principal diferença do método utilizado aqui, para o método de Euler-Maruyama tradicional, consiste no fato da aproximação ser baseada em uma partição aleatória

do intervalo $[0, T]$, já que esta é determinada pelos tempos de parada fornecidos pela discretização proposta por Leão e Ohashi (2013) [73] ao invés de uma partição determinística. A construção do método é então modificada para conter estes tempos de parada, mas é similar ao esquema apresentado em Kloeden e Platen (1992) [64], Glasserman (2003) [40], Milstein (1995) [76] e Sauer (2012) [83]. Diversos trabalhos têm estudado a convergência do método de Euler-Maruyama para soluções numéricas de equações diferenciais estocásticas aplicadas em finanças, apresentando ou não alguma ordem de convergência. A grande maioria dos trabalhos parte do pressuposto de que os coeficientes do modelo de mercado satisfazem a condição de Lipschitz, entretanto, é fácil encontrar modelos em que esta condição não é satisfeita (o modelo de volatilidade estocástica de Heston, por exemplo) e, portanto, os resultados de convergência não são válidos. Kloeden e Neuenkirch (2012) [63] apresentam um resumo dos principais resultados obtidos, considerando ou não a condição de Lipschitz para os coeficientes. Neste trabalho apresentamos dois tipos distintos de estudos de convergência. O primeiro, considerando a condição global de Lipschitz e o segundo, mais interessante, aplicada ao modelo de volatilidade estocástica de Heston.

Para o modelo de volatilidade de Heston, a equação da volatilidade pode ser identificada como um processo de Cox-Ingersoll-Ross (veja Cox *et al.* (1985) [23]) em que, certamente, os coeficientes não satisfazem a condição de Lipschitz. Alguns autores tem estudado o problema de convergência deste processo, como por exemplo, Alfonsi (2005) [2], Bossy e Diop (2007) [12], Deelstra e Delbaen (1998) [24], Gyöngy e Rásonyi (2011) [47] e Higham e Mao (2005) [52]. Os resultados apresentados aqui para o modelo de Heston seguem as ideias que Higham e Mao (2005) [52] utilizaram e garantem, sob certas hipóteses, a convergência do método numérico, apesar de não fornecer uma taxa de convergência.

Considere \mathbb{Q} uma medida martingale equivalente a \mathbb{P} . Neste trabalho, \mathbb{Q} será a medida martingale minimal $\hat{\mathbb{P}}$ ou a medida martingale equivalente de variância ótima (VOMM) $\tilde{\mathbb{P}}$ e $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(p)})$ um \mathbb{Q} -movimento Browniano p -dimensional. O esquema numérico é

baseado na simulação exata da família de tempos de paradas dada por

$$T_n^{k,j} := \inf \left\{ t > T_{n-1}^{k,j} : \left| W_t^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} \right| = 2^{-k} \right\}; \quad n \geq 1$$

em que $T_0^{k,j} = 0$ para $j = 1, \dots, p$. O operador derivada fundamental que nos permite obter um esquema numérico para a estratégia de *hedging* $\theta^{H,\mathbb{Q}}$ é dado por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[H | \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[H | \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k \right]}{W_{T_1^{k,j}}^{(j)}} \right], \quad j = 1, \dots, p \quad (1.3)$$

em que $\tau_1^{k,j} := \max \left\{ T_n^k, T_n^k < T_1^{k,j} \right\}$, $T_0^k = 0$ e

$$T_n^k := \inf_{\substack{1 \leq j \leq p \\ m \geq 1}} \left\{ T_m^{k,j}, T_m^{k,j} \geq T_{n-1}^k \right\}$$

para $n \geq 1$. É importante observar que, neste caso, estamos trabalhando em um mercado composto por d ativos com risco e governado por p -movimentos Brownianos $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$ com $d \leq p$. Como caso particular, no modelo unidimensional de Heston, o mercado é composto por um único ativo com risco governado por 2 movimentos Brownianos possivelmente correlacionados. Destacamos que o cálculo de $L^{H,\mathbb{Q}}$ também está sujeito ao operador (1.3) para $j = d+1, \dots, p$. Calculamos (1.3) a partir de uma simulação Monte Carlo utilizando a estrutura discreta das σ -álgebras (3.12) geradas pelos processos de saltos

$$A_t^{k,j} := W_{T_n^{k,j}}^{(j)} \mathbf{1}_{[[T_n^{k,j}, T_{n+1}^{k,j}[[\cdot}$$

O conjunto de informações contido em $(\mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k, \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k)$ é facilmente implementado a partir do algoritmo proposto por Burq e Jones (2008) [15].

Para verificar a aplicação da nossa metodologia, realizamos simulações Monte Carlo para calcular estratégias de *hedging* para opções de compra europeias simples e exóticas que dependem de toda a trajetória de preços. Utilizamos como processos de preços os modelos de Black-Scholes, de volatilidade local e de volatilidade estocástica e calculamos as estratégias de

hedging baseadas na decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada e nos critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média. Além destes, foram realizados alguns experimentos acerca do erro de *hedging* cometido ao utilizarmos as estratégias quadráticas de minimização do risco local e de variância média para opções do tipo *one-touch* para o modelo de Heston. É importante ressaltar que, apesar do método numérico funcionar bem em condições bastante gerais, o algoritmo é fundamentado em resultados de convergência fraca ao invés de convergência em L^p ou convergência uniforme em probabilidade. Ressaltamos que, sob algumas condições de regularidade, também provamos a convergência num sentido mais forte (L^2).

A tese está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos a notação utilizada no trabalho, juntamente com o modelo de mercado básico utilizado, além de uma breve descrição da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe e dos critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média. O Capítulo 3 é o principal deste trabalho, onde apresentamos o método de discretização aleatória, juntamente com os operadores derivadas responsáveis pelas aproximações das estratégias de *hedging*, os resultados de convergência fraca e as estratégias de *hedging* dinâmico baseados na decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. No Capítulo 4, apresentamos o método numérico de Euler-Maruyama baseado na discretização aleatória e alguns resultados de convergência fortes para modelos de mercado em que a condição de Lipschitz é satisfeita e também para o modelo de Heston. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos os algoritmos gerais utilizados nas simulações Monte Carlo e os resultados obtidos nos diversos critérios estudados em modelos de volatilidade local e volatilidade estocástica.

Modelo de Mercado

Neste capítulo, apresentamos as definições básicas que serão utilizadas durante o trabalho, o modelo de mercado proposto, além dos critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média. A existência de estratégias de minimização do risco local é equivalente a existência da decomposição de Föllmer-Schweizer. Utilizando o fato do processo de preço ser contínuo, relacionamos a decomposição de Föllmer-Schweizer com a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. Para o critério de variância média, também utilizamos o fato do processo de preço ser contínuo para relacionar as estratégias de *hedging* com a existência da medida martingale equivalente de variância ótima (VOMM) e as equações fundamentais (ver Hobson (2004) [53] e Biagini *et al.* (2000) [10]).

2.1 Preliminares

Assumimos que estamos em um modelo de mercado do tipo Browniano sem oportunidades de arbitragem como em Laurent e Pham (1999) [80]. Ao longo deste trabalho, a menos que seja mencionado o contrário, também assumimos que toda atividade econômica ocorre em um intervalo de tempo finito $0 \leq t \leq T < \infty$ em uma base estocástica dada $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ gerada por um movimento Browniano p -dimensional $B = \{B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(p)}); 0 \leq t < \infty\}$ com valor inicial 0. A filtragem $\mathbf{F} := \{\mathbf{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é a \mathbb{P} -aumentada da filtragem natural gerada pelo movimento Browniano p -dimensional $\mathbf{F}_t^B := \sigma(\{B_s^{-1}(A) \mid 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\})$, ou seja, sendo \mathcal{N} os conjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathbf{F}_T^B , temos que

$$\mathbf{F}_t := \sigma(\mathbf{F}_t^B \cup \mathcal{N}).$$

Neste sentido, \mathbf{F}_t descreve toda a informação disponível sobre o mercado até o instante t .

Observação 2.1. *Ressaltamos que a diferença fundamental entre as filtrações $\mathbf{F}^B := \{\mathbf{F}_t^B\}_{0 \leq t \leq T}$ e $\mathbf{F} := \{\mathbf{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ é que \mathbf{F} é contínua à esquerda e à direita, ou seja,*

$$\mathbf{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s < t} \mathbf{F}_s\right) \quad e \quad \mathbf{F}_t = \bigcap_{t < s \leq T} \mathbf{F}_s$$

enquanto \mathbf{F}^B é, somente, contínua à esquerda.

Dado uma matriz Z , denotamos por Z^\top sua matriz transposta e, dado um vetor $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ com valores em \mathbb{R}^m , denotamos por $\text{diag}(Y)$ a matriz diagonal de dimensão $m \times m$ cujo ℓ -ésimo termo diagonal é Y_ℓ . Além disso, tendo em vista os modelos de volatilidade estocástica, vamos dividir o movimento Browniano p -dimensional em dois movimentos Brownianos multidimensionais de dimensões d e $p - d$, respectivamente. Para isto, vamos considerar $B^S := (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ e $B^I := (B_t^{(d+1)}, \dots, B_t^{(p)})$ com $d \leq p$. A seguir, denotamos por $[X, Y]$ a variação quadrática usual entre os semimartingales X e Y . Também denotamos por $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-}$ o salto usual de um processo *càdlàg* Y no instante t , em que $Y_{t-} = \lim_{u \uparrow t} Y_u$

é o limite à esquerda de Y em t . Se M é um martingale, denotaremos o compensador do submartingale M^2 por $\langle M \rangle$. Para qualquer par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \vee b := \max\{a, b\}$ e $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Além disso, para quaisquer dois tempos de parada J_1 e J_2 , denotamos os intervalos estocásticos $[[J_1, J_2]] := \{(\omega, t); J_1(\omega) \leq t < J_2(\omega)\}$, $[[J_1]] := \{(\omega, t); J_1(\omega) = t\}$. De forma análoga, podemos definir os intervalos estocásticos, $[[J_1, J_2]]$, $[[J_1, J_2]]$ e $[[J_1, J_2]]$. Finalmente, Leb denotará a medida de Lebesgue no intervalo $[0, T]$. Para qualquer outra terminologia não explicada a respeito da teoria geral de processos estocásticos, sugerimos Dellacherie e Meyer (1982) [27].

Assumimos que o mercado é composto por $d + 1$ ativos ($d \leq p$): um ativo livre de risco, denominado *money market account*, com processo de preços S_t^0 modelado segundo a equação diferencial

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1; \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

e d ativos com risco, com vetor de preços dado por $\bar{S}_t = (\bar{S}_t^1, \dots, \bar{S}_t^d)$ e que satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica

$$d\bar{S}_t = \text{diag}(\bar{S}_t) (b_t dt + \sigma_t dB_t^S), \quad \bar{S}_0 = \bar{s} \in \mathbb{R}^d; \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

em que consideramos que o processo **taxa de juros** $r = \{r_t; 0 \leq t \leq T\}$, assim como o vetor de **taxas médias de retorno** $b = \{b_t = (b_t^1, \dots, b_t^d); 0 \leq t \leq T\}$ e a **matriz de volatilidade** $\sigma = \{\sigma_t = (\sigma_t^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}; 0 \leq t \leq T\}$ são previsíveis, mensuráveis, adaptados, uniformemente limitados em $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ e satisfazem as condições usuais de forma que S^0 e \bar{S} são semimartingales positivos bem definidos (ver Karatzas e Shreeve (1991) [62]). Também assumimos que a matriz de volatilidade σ é não singular para quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

O sistema de equações diferenciais estocásticas que modela o preço descontado $S_t = S_t/S_t^0$ é, então, dado por

$$dS_t = \text{diag}(S_t) [(b_t - r_t \mathbf{1}_d) dt + \sigma_t dB_t^S], \quad S_0 = s \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{1}_d$ é um vetor d -dimensional com todos os componentes iguais a 1. Neste caso, o \mathbb{R}^d semimartingale $S = (S^1, \dots, S^d)$ que representa o ativo descontado tem decomposição canônica

dada por

$$S_t = s + M_t + N_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

em que M_t é um martingale local quadrado integrável e N_t é um processo previsível de variação finita com $N_0 = 0$ e satisfazem

$$M_t = \int_0^t \text{diag}(S_u) \sigma_u dB_u^S, \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t \text{diag}(S_u) \sigma_u \sigma_u^\top \text{diag}(S_u) du,$$

e

$$N_t = \int_0^t \text{diag}(S_u) [b_u - r_u \mathbf{1}_d] du = \int_0^t d\langle M \rangle_u [\text{diag}(S_u)]^{-1} [\sigma_u \sigma_u^\top]^{-1} [b_u - r_u \mathbf{1}_d]. \quad (2.4)$$

Se tomarmos

$$\lambda_u = [\text{diag}(S_u)]^{-1} [\sigma_u \sigma_u^\top]^{-1} [b_u - r_u \mathbf{1}_d],$$

podemos reescrever N_t da forma

$$N_t = \int_0^t d\langle M \rangle_u \lambda_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Então, o processo *mean variance tradeoff* de S é dado por

$$\hat{K}_t = \int_0^t \lambda_u^\top d\langle M \rangle_u \lambda_u = \int_0^t \|\psi_u\|_{\mathbb{R}^d}^2 du$$

em que ψ é o *market price at risk* definido por

$$\psi_t = \sigma_t^{-1} [b_t - r_t \mathbf{1}_d], \quad 0 \leq t \leq T$$

em que assumimos que

$$\int_0^T \|\psi_t\|_{\mathbb{R}^d}^2 dt < \infty \text{ q.c.} \quad (2.5)$$

Notação 2.1. *Seja X_t um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ tal que $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Suponha que X_t satisfaz as seguintes condições*

1. X_t é adaptado à filtragem \mathbf{F}_t ;

2.
$$\int_0^T \|X_t\|_{\mathbb{R}^j}^2 dt < \infty \text{ } \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

O espaço dos processos estocásticos que satisfazem as condições acima será denotado por $\mathcal{L}_{ad}^j(\Omega, L^2[0, T])$. Observamos que a condição (2) nos diz que quase todas as trajetórias de X_t são funções no espaço de Hilbert $L^2[0, T]$, de forma que a aplicação $\omega \mapsto X_t(\omega)$ é uma função mensurável de Ω em $L^2[0, T]$.

Observação 2.2. A partir da definição acima e da suposição (2.5), temos que o market price at risk $\psi_t \in \mathcal{L}_{ad}^d(\Omega, L^2[0, T])$.

Neste trabalho, uma noção fundamental é o conjunto das probabilidades martingales \mathbb{Q} equivalentes a \mathbb{P} . De acordo com Delbaen e Schachermayer (1996) [26], o conjunto das probabilidades \mathbb{P} -equivalentes \mathbb{Q} em \mathbf{F} com densidades quadrado integráveis e tais que o preço descontado S é um martingale local sob \mathbb{Q} é dado por

$$\mathcal{M}_2^e = \left\{ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\mathbb{P}); S \text{ é um } \mathbb{Q}\text{-martingale local} \right\}. \quad (2.6)$$

Sob as hipóteses do modelo de Itô, consideramos que $\int_0^T \|\psi_t\|_{\mathbb{R}^d}^2 dt$ é uniformemente limitado em $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Desta forma, podemos encontrar uma caracterização completa de \mathcal{M}_2^e em Karatzas *et al.* (1991) [60] e Schweizer (1994) [86]. No contexto dos processos de Itô, consideramos que $\mathcal{M}_2^e \neq \emptyset$ e ressaltamos que esta hipótese está relacionada com a condição de um mercado livre de arbitragem. Segundo Delbaen e Schachermayer (1994) [25], a condição $\mathcal{M}_2^e \neq \emptyset$ é, essencialmente, equivalente a ausência de oportunidades de arbitragem no mercado e, desta forma, fornecem um visão geral do teorema fundamental da precificação de ativos. A partir de Karatzas *et al.* (1991) [60], para qualquer $\nu \in \mathcal{L}_{ad}^{p-d}(\Omega, L^2[0, T])$ a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ é dada pelo processo estocástico exponencial ξ_t^ν definido por

$$\xi_t^\nu = \exp \left[- \int_0^t \psi_u dB_u^S - \int_0^t \nu_u dB_u^I - \frac{1}{2} \int_0^t (\|\psi_u\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|\nu_u\|_{\mathbb{R}^{p-d}}^2) du \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Aplicando a fórmula de Itô, temos que

$$\xi_t^\nu = 1 - \int_0^t \psi_u \xi_u^\nu dB_u^S - \int_0^t \nu_u \xi_u^\nu dB_u^I, \quad 0 \leq t \leq T.$$

de onde verificamos que ξ_t^ν é um \mathbb{P} -martingale local. Considere \mathcal{K}_2^I o subconjunto de $\mathcal{L}_{ad}^{p-d}(\Omega, L^2[0, T])$ dado por

$$\mathcal{K}_2^I = \left\{ \nu \in \mathcal{L}_{ad}^{p-d}(\Omega, L^2[0, T]) : (\xi_t^\nu)_{0 \leq t \leq T} \text{ é um } \mathbb{P} - \text{martingale quadrado integrável} \right\}$$

e então, dado $\nu \in \mathcal{K}_2^I$, podemos definir a probabilidade \mathbb{P}^ν equivalente a \mathbb{P} por $d\mathbb{P}^\nu = \xi_T^\nu d\mathbb{P}$ tal que $\xi_T^\nu \in L^2(\mathbb{P})$. Portanto, temos a seguinte caracterização do conjunto \mathcal{M}_2^e :

$$\mathcal{M}_2^e = \{ \mathbb{P}^\nu : \nu \in \mathcal{K}_2^I \}$$

Observação 2.3. Quando $\nu = 0 \in \mathcal{K}_2^I$ e a medida de probabilidade associada \mathbb{P}^0 é, exatamente, a probabilidade martingale minimal de Föllmer-Shcweizer (1991) [35]. Para verificar que o \mathbb{P} -martingale local ξ_t^ν é um \mathbb{P} -martingale, é suficiente mostrar que $\mathbb{E}[\xi_t^\nu] = 1$. Entretanto, esta condição é difícil de ser verificada e pode ser substituída pela condição de Novikov (veja, por exemplo Elliott (1982) [33], Ikeda e Watanabe (1989) [54], Øksendal (2003) [78] e Protter (2004) [81]). Quando $\nu = 0$, esta condição, dada por

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\psi_t\|^2 dt \right) \right] < \infty$$

é satisfeita. Portanto, o processo exponencial ξ_t^0 é um \mathbb{P} -martingale quadrado integrável.

Para solucionar o problema de precificação e *hedging* de uma opção, utilizaremos estratégias dinâmicas de negociação baseadas no processo descontado S . Uma forma natural de abordar estes problemas é considerar um *portfolio* dinâmico da forma (θ, γ) em que θ é um processo previsível de dimensão d e γ é adaptado de forma que θ_t^i descreve a quantidade do i -ésimo ativo de posse do investidor no instante t e γ_t descreve a quantidade do *money-market account* no instante t . Neste caso, o valor do *portfolio* (θ_t, γ_t) descontado da taxa de juros, no instante t é

dado por

$$V_t = \theta_t S_t + \gamma_t = \sum_{i=1}^d \theta_t^i S_t^i + \gamma_t. \quad (2.7)$$

A partir da ideia de *portfolio* dinâmico (θ, γ) , como definido acima, podemos definir o conjunto das estratégias admissíveis.

Definição 2.1. Dizemos que uma estratégia de *portfolio* $\phi = (V, \theta)$ é admissível quando V é um processo adaptado real tal que $V_T \in L^2(\mathbb{P})$ e $\theta \in \Theta := L^2(M) \cap L^2(N)$, em que $L^2(M)$ é o conjunto de todos os processos previsíveis com valores em \mathbb{R}^d tais que

$$\|\theta\|_{L^2(M)} = \left[\mathbb{E} \left(\int_0^T \theta_t^\top d\langle M \rangle_t \theta_t \right) \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Além disso, denotamos $L^2(N)$ como o conjunto de todos os processos previsíveis com valores em \mathbb{R}^d tais que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |\theta_t dN_t| \right)^2 \right] < \infty.$$

Desta forma, podemos notar que, se $\theta \in \Theta$, então a integral estocástica $\int \theta dS$ está bem definida e é dada por

$$\int \theta dS = \int \theta dM + \int \theta dN.$$

Também temos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \theta_u dS_u \right| \right]^2 < \infty$$

e então, segue da desigualdade de Hölder que o \mathbb{Q} -martingale local $\int \theta dS$ satisfaz

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \theta_u dS_u \right| \right]^2 < \infty, \quad \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e.$$

Portanto, concluímos que $\int \theta dS$ é um \mathbb{Q} -martingale quadrado integrável, para qualquer $\theta \in \Theta$ e $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$.

Os custos acumulados até o tempo t gerados a partir do uso de uma estratégia admissível (V, θ) são dados pelo processo

$$C_t = V_t - \int_0^t \theta_u dS_u.$$

Definição 2.2. Dizemos que uma estratégia é auto-financiável se seu processo de custos acumulados C_t é constante no tempo, ou equivalentemente, se o valor do *portfolio* descontado puder ser escrito da forma

$$V_t = V_0 + \int_0^t \theta_u dS_u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

em que $V_0 = C_0$ é o custo inicial necessário para se iniciar a estratégia.

Desta forma, o valor do *portfolio* descontado de uma estratégia auto-financiável consiste do investimento inicial e dos ganhos (ou perdas) relativos às negociações do ativo descontado S . É importante observar que qualquer flutuação em S pode ser neutralizada rebalanceando θ de forma a não resultar em nenhum lucro ou prejuízo adicional. Podemos perceber que qualquer estratégia auto-financiável é completamente descrita por V_0 e θ .

Definição 2.3. Considere uma opção com função payoff $H \in L^2(\mathbb{P})$. Dizemos que H é atingível se existe uma estratégia admissível e auto-financiável (V_0, θ) cujo valor final V_T seja igual a H com probabilidade um.

Suponha que $H \in L^2(\mathbb{P})$ seja uma opção atingível. Como nosso modelo de mercado financeiro não permite oportunidades de arbitragem, é claro que o preço de H deve ser dado por V_0 e que θ fornece uma estratégia de *hedging* contra H . Então, segue de (2.8) que H pode ser escrito como

$$H = H_0 + \int_0^T \theta_u^H dS_u, \quad \mathbb{P}\text{-q.c.},$$

ou seja, como a soma de uma constante H_0 e uma integral estocástica de $\theta^H \in \Theta$ com respeito a S . É claro que, nos casos em que a opção é atingível, dizemos que o mercado é completo e, neste caso, a estratégia auto-financiável (H_0, θ^H) resolve o problema de precificação e *hedging*. Neste caso, o preço justo da opção é dado por H_0 enquanto que a estratégia de *hedging* é dada por θ^H . Entretanto, quando $p > d$, o modelo de mercado de Itô não é completo e o problema torna-se um pouco mais complicado de ser resolvido. Para estes casos, a opção H não é atingível e, portanto, não é possível encontrar uma estratégia de *portfolio* (V, θ) que seja, ao mesmo tempo, auto-financiável e com valor final V_T igual a H . Isto ocorre quando consideramos os modelos de

volatilidade estocástica. Para estes casos, existem infinitas medidas martingales equivalentes em \mathcal{M}_e^2 .

Exemplo 2.1. *O exemplo típico estudado na literatura é o modelo de volatilidade estocástica unidimensional dado por*

$$\begin{cases} dS_t = S_t \mu(t, S_t, \sigma_t) dt + S_t \sigma_t dY_t^{(1)} \\ d\sigma_t^2 = a(t, S_t, \sigma_t) dt + b(t, S_t, \sigma_t) dY_t^{(2)} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.9)$$

em que $Y^{(1)}$ and $Y^{(2)}$ são movimentos Brownianos correlacionados com coeficiente de correlação $\rho \in [-1, 1]$, e μ , a e b são funções adequadas tal que (S, σ^2) seja um processo de Markov bidimensional bem definido. Todos os modelos de volatilidade estocástica contínuos, comumente utilizados na prática, se adequam ao sistema (2.9), em particular, destacamos os modelos de volatilidade estocástica de Heston (veja Heston (1993) [50] e Hobson (2004) [53]) e o modelo $\frac{3}{2}$ (veja Ahn and Gao (1999) [1], Koleva e Nicolato (2012) [67] e Drimus (2012) [30]). Nestes caso, $p = 2 > d = 1$ e o mercado é incompleto. Também observamos que o conjunto \mathcal{M}_e^2 é infinito. Neste caso, calcular uma estratégia de hedging dinâmico é uma tarefa bastante desafiadora, especialmente quando estamos interessados no estudo de opções exóticas, devido a aleatoriedade gerada pela volatilidade.

2.2 Decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe

A decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe é fundamental para a obtenção de estratégias de *hedging* em mercados Brownianos quando consideramos modelos de volatilidade estocástica. Neste sentido, considere $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e^2$, $\psi \in \mathcal{L}_{ad}^d(\Omega, L^2[0, T])$, $\nu \in \mathcal{L}_{ad}^{p-d}(\Omega, L^2[0, T])$ e tome $W^S := (W^{(1)}, \dots, W^{(d)})$ e $W^I := (W^{(d+1)}, \dots, W^{(p)})$ dados por

$$W_t^{(j)} = \begin{cases} B_t^{(j)} + \int_0^t \psi_u^j du, & j = 1, \dots, d \\ B_t^{(j)} + \int_0^t \nu_u^j du, & j = d+1, \dots, p \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.10)$$

Então, a partir do teorema de Girsanov (veja, por exemplo Kuo (2006) [71]) temos que $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(p)})$ é um \mathbb{Q} -movimento Browniano p -dimensional com respeito a filtragem $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ gerada por W . Observamos que a filtragem \mathbb{F} está contida em \mathbf{F} , porém elas não são, necessariamente, iguais. A seguir, fixamos uma opção $H \in L^2(\mathbb{P})$, descontada da taxa de juros r e assumimos que H é \mathcal{F}_T -mensurável.

Observação 2.4. *É importante ressaltar que, como o algoritmo obtido neste trabalho é completamente baseado na informação gerada pelo movimento Browniano multidimensional W (definido sob a medida de probabilidade \mathbb{Q} e a filtragem \mathbb{F}) e, considerando um modelo de volatilidade estocástica da forma (2.9) com função payoff $\Phi(S_t; 0 \leq t \leq T)$ em que $\Phi : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação de Borel e \mathcal{C}_T é o espaço usual de trajetórias contínuas em $[0, T]$ e, supondo que a taxa de juros é determinística, a hipótese de que H é \mathcal{F}_T -mensurável é satisfeita para uma grande classe de exemplos encontrados na prática.*

Seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável com $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$. Neste caso, o Teorema de Representação Martingale (veja, por exemplo, Øksendal (2003) [78] cap. 4) calculado em termos de (\mathbb{F}, \mathbb{Q}) nos fornece que

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^T \phi_u^{H, \mathbb{Q}} dW_u$$

em que $\phi^{H, \mathbb{Q}} := (\phi^{H, \mathbb{Q}, 1}, \dots, \phi^{H, \mathbb{Q}, p})$ é um processo p -dimensional \mathbb{F} -previsível. De forma análoga à realizada para o movimento Browniano p -dimensional $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(p)})$, vamos dividir o processo $\phi^{H, \mathbb{Q}}$ nos processos multidimensionais $\phi^{H, \mathbb{Q}, S}$ e $\phi^{H, \mathbb{Q}, I}$ dados, respectivamente, por

$$\phi^{H, \mathbb{Q}, S} := (\phi^{H, \mathbb{Q}, 1}, \dots, \phi^{H, \mathbb{Q}, d}) \quad \text{e} \quad \phi^{H, \mathbb{Q}, I} := (\phi^{H, \mathbb{Q}, d+1}, \dots, \phi^{H, \mathbb{Q}, p}). \quad (2.11)$$

Observamos que, para $j = 1, \dots, d$, temos que $W_t^{(j)} = B_t^{(j)} + \int_0^t \psi_u^j du$ em que ψ_t é o *market price at risk* definido por $\psi_t = \sigma_t^{-1} [b_t - r_t \mathbf{1}_d]$ para $0 \leq t \leq T$. Desta forma, temos que

$$dS_t = \text{diag}(S_t) [(b_t - r_t \mathbf{1}_d) dt + \sigma_t dB_t^S] = \text{diag}(S_t) \sigma_t dW_t^S, \quad S_0 = s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.12)$$

que é a equação do processo de preço do ativo descontado S escrito na dinâmica \mathbb{Q} . Portanto S é um martingale local sob a medida martingale equivalente \mathbb{Q} e, desta forma, a projeção de Galtchouk-Kunita-Watanabe para o par de martingales locais quadrado integráveis $(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_t], S)$ na medida \mathbb{Q} é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q}} dW_u \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},S} dW_u^S + \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},I} dW_u^I \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},S} [\text{diag}(S_u)\sigma_u]^{-1} \text{diag}(S_u)\sigma_u dW_u^S + L_t^{H,\mathbb{Q}} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},S} [\text{diag}(S_u)\sigma_u]^{-1} dS_u + L_t^{H,\mathbb{Q}} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] + \int_0^t \theta_u^{H,\mathbb{Q}} dS_u + L_t^{H,\mathbb{Q}}; \quad 0 \leq t \leq T,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

em que

$$\theta_t^{H,\mathbb{Q}} := \phi_t^{H,\mathbb{Q},S} [\text{diag}(S_t)\sigma_t]^{-1} \tag{2.14}$$

e

$$L_t^{H,\mathbb{Q}} = \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},I} dW_u^I. \tag{2.15}$$

O processo p -dimensional $\phi^{H,\mathbb{Q}}$ que compõe as equações (2.14) e (2.15) é fundamental em diversas estratégias de *hedging* em mercados incompletos, em particular as estratégias quadráticas de minimização do risco local e de variância média e será nosso principal objeto de estudo.

Observação 2.5. *É importante observar que se tomarmos $\nu^j = 0$ para $j = d+1, \dots, p$ e se a densidade correspondente é um martingale, então a medida martingale minimal $\hat{\mathbb{P}} := \mathbb{P}^0$ fornece uma decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe em que $L^{H,\hat{\mathbb{P}}}$ é um \mathbb{P} -martingale local ortogonal ao componente martingale de S sob \mathbb{P} . Neste caso, é natural implementar uma estratégia de hedging baseada em $\theta^{H,\hat{\mathbb{P}}}$ independentemente da existência da decomposição de Föllmer-Schweizer. Se este é o caso, esta estratégia de hedging pode ser baseada na decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada.*

2.2.1 Critério de Minimização do Risco Local

Para o caso em que a opção H não é atingível, sabemos, por definição, que é impossível encontrar uma estratégia auto-financiável com valor final $V_T = H$. Uma primeira tentativa de contornar este problema é insistir na condição terminal $V_T = H$. Como o processo γ é adaptado, isto sempre pode ser alcançado através da escolha de γ_T , ou seja, basta pagar no tempo de maturidade. Porém, como tais estratégias não são auto-financiáveis, em geral, uma “boa” estratégia deve ter um processo de custos “bem comportado”. O critério quadrático de minimização do risco local foi, primeiramente, proposto por Föllmer e Sondermann (1986) [36] para o caso em que S é um martingale e a existência e unicidade de estratégias de *hedging* foram provadas como uma aplicação do teorema de decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. A extensão para o caso semimartingale geral deve-se a Schweizer (1988) [84] e Föllmer e Schweizer (1991) [35]. A ideia básica da minimização do risco local pode ser definida da seguinte forma

Definição 2.4. Dizemos que uma estratégia (V, θ) minimiza o risco localmente se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $V_T = H$;
2. O processo de custo C é um \mathbb{P} -martingale quadrado integrável e ortogonal a M sob \mathbb{P} .

Como o processo $\int_0^T \|\psi_u\|_{\mathbb{R}^d}^2 du$ é uniformemente limitado, sabemos que $H \in L^2(\mathbb{P})$ admite uma única decomposição de Föllmer-Schweizer (Pham (2000) [79], Teorema 4.1), de forma que

$$H = H_0 + \int_0^T \theta_u^H dS_u + L_T^H, \quad \mathbb{P} - \text{q.c.},$$

em que $H_0 \in \mathbb{R}$, $\theta^H \in \Theta$ e L_T^H é um \mathbb{P} -martingale quadrado integrável ortogonal a M . Então, é óbvio que a estratégia (V^H, θ^H) é localmente mínima, em que

$$V_t^H = H_0 + \int_0^t \theta_u^H dS_u + L_t^H, \quad \mathbb{P} - \text{q.c.}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

De fato, é suficiente notar que, para tal estratégia, o processo de custo é dado por

$$C_t = H_0 + L_t^H, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Portanto, o problema de minimização do risco local é reduzido a encontrar a decomposição de Föllmer-Schweizer de H sob \mathbb{P} . Usamos a probabilidade martingale minimal $\hat{\mathbb{P}}$ para relacionar a decomposição de Föllmer-Schweizer e a estratégia de minimização do risco local. A expressão minimal foi introduzida em Föllmer e Schweizer (1991) [35] e motivada pela propriedade de que qualquer \mathbb{P} -martingale quadrado integrável e ortogonal a M permanece um martingale sob $\hat{\mathbb{P}}$. Desta forma, segundo o Teorema 1.6 de Schweizer (2008) [90], a estratégia de minimização do risco local é dada por

$$V_t^{H, \hat{\mathbb{P}}} = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}} [H | \mathcal{F}_t] \text{ e } \theta_t^{H, \hat{\mathbb{P}}} = \theta_t^H, \quad 0 \leq t \leq T.$$

em que θ^H , o integrando na decomposição de Föllmer-Schweizer, pode também ser identificado como a projeção de Galtchouk-Kunita-Watanabe do $\hat{\mathbb{P}}$ -martingale $V^{H, \hat{\mathbb{P}}}$ no $\hat{\mathbb{P}}$ -martingale S .

2.2.2 Critério de Variância Média

Enquanto que, no critério quadrático de minimização do risco local, o objetivo era insistir na condição terminal $V_T = H$ \mathbb{P} -q.c, no critério quadrático de variância média, para uma opção não atingível H , insistimos em estratégias que sejam auto-financiáveis. Desta forma, para uma estratégia auto-financiável (V_0, θ) , a diferença ao se aproximar H a partir de (V_0, θ) é dada por

$$H - V_T(V_0, \theta) = H - V_0 - \int_0^T \theta_t dS_t$$

Basicamente, a ideia é minimizar o valor esperado do erro de *hedging* quadrático sobre todos os valores iniciais V_0 e todas as estratégias admissíveis adequadas $\theta \in \Theta$, ou seja, tratar do seguinte problema de otimização

$$\inf_{\theta \in \Theta, V_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| H - V_0 - \int_0^T \theta_t dS_t \right|^2 \right]. \quad (2.16)$$

Para obter a estratégia de variância média $(V_0^{\tilde{\mathbb{P}}}, \eta^{\tilde{\mathbb{P}}})$, é necessário considerar a medida martingale de variância ótima (VOMM), definida por

Definição 2.5. *Considere \mathcal{M}_2^e o conjunto de todas as medidas martingales equivalentes a \mathbb{P} definido em (2.6). A medida martingale de variância ótima é o único elemento de \mathcal{M}_2^e que minimiza*

$$\left\| \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right\|_{L^2(\mathbb{P})} = \sqrt{1 + \text{Var} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right]}$$

sobre todas as medidas $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$. A VOMM será denotada aqui por $\tilde{\mathbb{P}}$.

A demonstração da existência da VOMM para processos contínuos não é um resultado simples e foi demonstrada inicialmente em Delbaen and Schachermayer (1996) [26] e generalizada em Rheinlander e Schweizer (1997) [82] e Gouieroux, Laurent e Pham (1998) [45]. Neste caso, a estratégia de *hedging* quadrática ótima é dada por $(V_0^{H, \tilde{\mathbb{P}}}, \eta^{H, \tilde{\mathbb{P}}})$ em que

$$V_0^{H, \tilde{\mathbb{P}}} = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[H] \tag{2.17}$$

e

$$\eta^{H, \tilde{\mathbb{P}}} = \theta_t^{H, \tilde{\mathbb{P}}} - \frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{Z}_t} \left(V_{t^-}^{H, \tilde{\mathbb{P}}} - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[H] - \int_0^t \eta_\ell^{H, \tilde{\mathbb{P}}} dS_\ell \right); \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.18}$$

em que $\theta^{H, \tilde{\mathbb{P}}}$ é calculado em termos da VOMM $\tilde{\mathbb{P}}$ e $\tilde{\zeta}$ é obtido a partir de

$$\tilde{Z}_t := \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathbf{F}_t \right] = \tilde{Z}_0 + \int_0^t \tilde{\zeta}_\ell dS_\ell; \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.19}$$

e $V_0^{H, \tilde{\mathbb{P}}}$ é o processo relacionado ao preço da opção sob $\tilde{\mathbb{P}}$. É importante observar que o processo \tilde{Z}_t não está relacionado com a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe. Entretanto, Hobson (2004) [53] mostrou que, em modelos de volatilidade estocástica (em particular o modelo de Heston), este processo pode ser calculado a partir da equações de representação fundamentais dadas por (5.15), (5.16) e (5.17) e explicadas com mais detalhes no Capítulo 5.

Cálculo Funcional de Itô

Neste Capítulo, desenvolvemos uma aproximação factível para o cálculo das estratégias de *hedging*. Inicialmente, apresentamos o esquema de discretização aleatória proposto por Leão e Ohashi (2013) [73] baseado nas trajetórias do movimento Browniano. Na seção 3.3 apresentamos os resultados teóricos obtidos para aproximar as estratégias de *hedging* no instante $t = 0$ e, na Seção 3.4 estendemos os resultados para obter aproximações para estratégias de *hedging* em qualquer instante $t \in [0, T)$. Ressaltamos que os resultados teóricos apresentados neste capítulo, juntamente com o método numérico de Euler-Maruyama desenvolvido no Capítulo 4 são fundamentais para a construção do algoritmo apresentado no Capítulo 5 e utilizado para o cálculo das estratégias de *hedging* em mercados completos e incompletos.

3.1 Discretização Aleatória

Nesta seção, apresentamos as ideias e resultados fundamentais da discretização aleatória proposta por Leão e Ohashi (2013) [73]. Neste sentido, consideramos $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ uma medida de probabilidade fixa, equivalente a medida \mathbb{P} , e H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável. Nesta seção, também fixamos um \mathbb{Q} -movimento Browniano p -dimensional $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(p)})$ e, a menos que seja especificado o contrário, todos os valores esperados sob a medida \mathbb{Q} serão denotados, simplesmente, por \mathbb{E} . Ressaltamos que a escolha da medida de probabilidade $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ está totalmente condicionada ao modelo de mercado e ao método de precificação e estratégia de *hedging* escolhidos.

A fim de definir o método de discretização aleatória, seja k um inteiro positivo e então, para cada $j = 1, \dots, p$ definimos os tempos de parada dados por $T_0^{k,j} := 0$ quase certamente e

$$T_n^{k,j} := \inf\{T_{n-1}^{k,j} < t < \infty; |W_t^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)}| = 2^{-k}\}, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Desta forma, para cada $j \in \{1, \dots, p\}$, a família $\mathcal{T}^{k,j} := \{T_n^{k,j}; n \geq 0\}$ é uma sequência de \mathbb{F} -tempos de parada em que os incrementos $\{\Delta T_n^{k,j} = T_n^{k,j} - T_{n-1}^{k,j}; n \geq 1\}$ são independentes e igualmente distribuídos com a mesma distribuição de $T_1^{k,j}$. A seguir, apresentamos um resultado importante acerca do primeiro e segundo momento dos incrementos $\Delta T_n^{k,j}$.

Lema 3.1. *Seja $k \geq 1$ um inteiro positivo fixo e considere os tempos de parada $T_n^{k,j}$ definidos pela equação (3.1) com $j = 1, \dots, p$. O primeiro e o segundo momento dos incrementos de tempo $\Delta T_n^{k,j}$ são dados, respectivamente, por*

$$\mathbb{E} [\Delta T_n^{k,j}] = 2^{-2k} \quad e \quad \mathbb{E} [(\Delta T_n^{k,j})^2] = \frac{5}{3} 2^{-4k} \quad (3.2)$$

Demonstração. Os incrementos de tempo $\{\Delta T_n^{k,j}; n \geq 1\}$ são independentes, pois os incrementos $W_{T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)}$ são independentes, de modo que basta verificar (3.2) para $\Delta T_1^{k,j}$. Considere a variável aleatória $\tau = \inf\{t \geq 0; |W_t^{(j)}| = 1\}$. Da relação de escala do movimento Browniano

$W^{(j)}$, temos que

$$T_1^{k,j} = 2^{-2k} \tau$$

em distribuição e, portanto,

$$\mathbb{E} [\Delta T_1^{k,j}] = 2^{-2k} \mathbb{E} [\tau] \text{ e } \mathbb{E} \left[\left(\Delta T_1^{k,j} \right)^2 \right] = 2^{-4k} \mathbb{E} [\tau^2]. \quad (3.3)$$

Burq e Jones (2008) [15], a partir do martingale exponencial $M_\lambda(t) = \exp\{\lambda W_t - \lambda^2 t/2\}$, encontraram uma fórmula explícita para a transformada de Laplace de τ que é dada por

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E} [\exp\{-\lambda\tau\}] = \frac{1}{\cosh \sqrt{2\lambda}}.$$

Desta forma, temos que $\mathbb{E} [\tau]$ e $\mathbb{E} [\tau^2]$ podem ser calculados a partir das derivadas $\psi'(0)$ e $\psi''(0)$, que são dados, respectivamente, por 1 e $\frac{5}{3}$. Então, utilizando as relações (3.3), temos que

$$\mathbb{E} [\Delta T_1^{k,j}] = 2^{2k} \text{ e } \mathbb{E} \left[\left(\Delta T_1^{k,j} \right)^2 \right] = \frac{5}{3} 2^{-4k}.$$

□

A partir da sequência de tempos de parada definidos em (3.1), construímos o processo p -dimensional $A^k := (A^{k,1}, \dots, A^{k,p})$ dado, componente a componente, pelos processos de saltos definidos por

$$A_t^{k,j} := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_n^{k,j} \mathbb{1}_{\{T_n^{k,j} \leq t\}}; \quad 0 \leq t \leq T \text{ e } k \geq 1, \quad (3.4)$$

em que

$$\eta_n^{k,j} := \begin{cases} 1; & \text{se } W_{T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} = 2^{-k} \text{ e } T_n^{k,j} < \infty \\ -1; & \text{se } W_{T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} = -2^{-k} \text{ e } T_n^{k,j} < \infty \\ 0; & \text{se } T_n^{k,j} = \infty \end{cases} \quad (3.5)$$

para $n \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$.

Dado um $j \in \{1, \dots, p\}$ fixo, a Figura 3.1, exemplifica, a partir de um movimento Browniano unidimensional (3.1(a)), como determinamos a família de tempos de parada $\mathcal{T}^{k,j}$ (3.1(b)) e como

o processo $A^{k,j}$, definido em (3.4), é construído (processo de saltos determinado pelo gráfico azul representado nas Figuras (3.1(c)) e (3.1(d))).

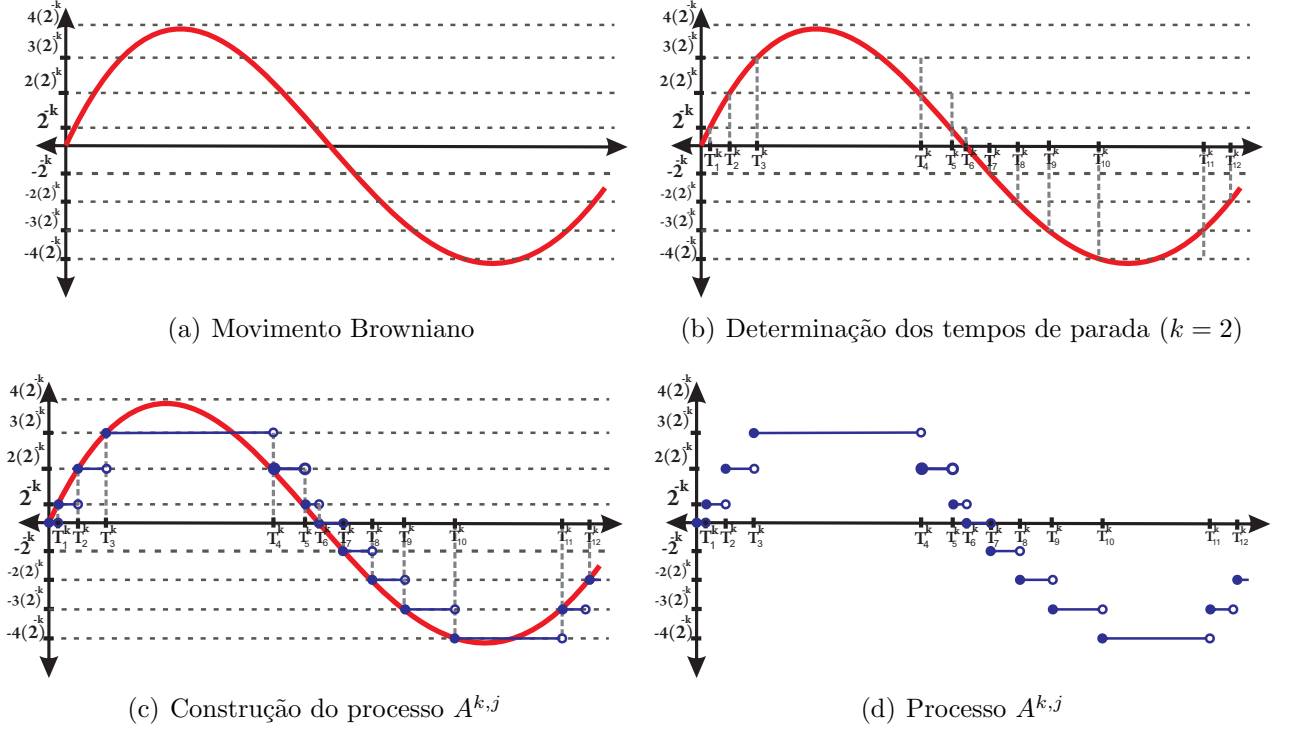


Figura 3.1: Determinação da família de \mathbb{F} -tempos de paradas $\mathcal{T}^{k,j}$ e do processo $A^{k,j}$ para j fixo.

De forma análoga à (2.11), dividimos A^k em dois processos multidimensionais dados, respectivamente, por $A^{S,k}$ e $A^{I,k}$ em que $A^{S,k}$ é o processo d -dimensional composto pelos primeiros d componentes de A^k , ou seja, $A^{S,k} = (A^{k,1}, \dots, A^{k,d})$ e $A^{I,k}$ é o processo $(p - d)$ -dimensional complementar dado por $A^{I,k} = (A^{k,d+1}, \dots, A^{k,p})$ e tomamos $\mathbb{F}^{k,j} := \{\mathcal{F}_t^{k,j} : 0 \leq t \leq T\}$ como sendo a filtragem natural gerada pelo processo $\{A_t^{k,j}; 0 \leq t \leq T\}$. É importante notar que, a partir da construção dos tempos de parada definidos em (3.1), $\mathbb{F}^{k,j}$ é uma filtragem do tipo discreta, já que

$$\mathcal{F}_t^{k,j} = \bigvee_{\ell=0}^{\infty} \left(\mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^{k,j} \cap \left\{ T_\ell^{k,j} \leq t < T_{\ell+1}^{k,j} \right\} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

em que $\mathcal{F}_0^{k,j} = \{\Omega, \emptyset\}$ e $\mathcal{F}_{T_m^{k,j}}^{k,j} = \sigma(T_1^{k,j}, \dots, T_m^{k,j}, \eta_1^{k,j}, \dots, \eta_m^{k,j})$ para $m \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$. Na equação (3.6), \vee denota a menor σ -álgebra gerada pela união das σ -álgebras. Também é fácil

perceber que $\mathcal{F}_{T_m^{k,j}}^{k,j} = \sigma(A_{s \wedge T_m^{k,j}}^{k,j}; s \geq 0)$ e, portanto,

$$\mathcal{F}_{T_m^{k,j}}^{k,j} = \mathcal{F}_t^{k,j} \text{ q.c em } \{T_m^{k,j} \leq t < T_{m+1}^{k,j}\}. \quad (3.7)$$

Com um abuso de notação, denotaremos por $\mathcal{F}_t^{k,j}$ sua filtragem \mathbb{Q} -aumentada satisfazendo as condições usuais. A partir destas definições podemos demonstrar o seguinte resultado.

Lema 3.2. *Para cada $k \geq 1$ e $j \in \{1, \dots, p\}$ fixo, temos que o processo de saltos $\{A_t^{k,j}; 0 \leq t \leq T\}$ é um $\mathbb{F}^{k,j}$ -martingale com variação localmente integrável tal que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|W_t^{(j)} - A_t^{k,j}\|_\infty \leq 2^{-k}.$$

em que $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma usual do espaço $L^\infty(\mathbb{P})$. Além disso, \mathbb{F}^k é uma filtragem quasi-contínua à esquerda e suporta apenas martingales de variação limitada.

Demonstração. De fato, se considerarmos a sequência crescente de tempos de \mathbb{F} -tempos de paradas $\{T_n^{k,j}\}_{n \geq 1}$ temos que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T_n^{k,j}} |dA_t^{k,j}| \right] = \sum_{m=1}^n |A_{T_m^{k,j}}^{k,j} - A_{T_{m-1}^{k,j}}^{k,j}| = \sum_{m=1}^n 2^{-k} = n2^{-k} < \infty$$

e, portanto, $A^{k,j}$ tem variação localmente integrável. Além disso, da própria definição do processo de saltos $A^{k,j}$, temos que

$$|W_t^{(j)} - A_t^{k,j}| = \sum_{n=0}^{\infty} |W_t^{(j)} - A_{T_n^{k,j}}^{k,j}| \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq t < T_{n+1}^{k,j}\}} \leq 2^{-k} \text{ para todo } \omega \in \Omega$$

de onde concluímos que $\sup_{0 \leq t \leq T} \|W_t^{(j)} - A_t^{k,j}\|_\infty \leq 2^{-k}$. Da propriedade martingale, temos de (3.6) que

$$\mathcal{F}_t^{k,j} = \sigma \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \cap [T_n^{k,j} \leq t < T_{n+1}^{k,j}]; A_n \in \mathcal{F}_{T_n^{k,j}}^{k,j}; n \geq 0 \right\}, t \geq 0,$$

em que $A_s^{k,j} = W_{T_n^{k,j}}^{(j)}$ em $[[T_n^{k,j}, T_{n+1}^{k,j}[[$ para cada $n \geq 1$. Neste caso, a partir do teorema da amostragem opcional, temos que

$$\mathbb{E} \left[W_T^{(j)} | \mathcal{F}_t^{k,j} \right] = A_t^{k,j} \text{ q.c.}, \quad 0 \leq t \leq T$$

e, portanto $A^{k,j}$ é um $\mathbb{F}^{k,j}$ -martingale. Também observamos que, como $T_1^{k,j}$ é uma variável aleatória absolutamente contínua e $A^{k,j}$ é um processo de saltos, temos que $\mathbb{F}^{k,j}$ é uma filtragem quasi-contínua à esquerda. O fato de que todo $\mathbb{F}^{k,j}$ -martingale tem variação limitada é uma consequência de Jacod e Skorohod (1994) [56]. \square

Também é importante introduzir a filtragem multidimensional gerada pelo processo A^k . Para isto, seja $\mathbb{F}^k := \{\mathcal{F}_t^k; 0 \leq t \leq T\}$ definida por $\mathcal{F}_t^k := \mathcal{F}_t^{k,1} \otimes \mathcal{F}_t^{k,2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_t^{k,p}$ para $0 \leq t \leq T$. Além disso, consideramos \mathcal{T}^k a partição aleatória mais fina gerada a partir da união das famílias de tempos de parada $\mathcal{T}^{k,j}$, ou seja, $\mathcal{T}^k := \{T_m^k; m \geq 0\}$ é obtida pela família de variáveis aleatórias $\{T_\ell^{k,j}; \ell \geq 0; j = 1 \dots, p\}$ e, neste caso, $T_0^k := 0$ q.c e

$$T_1^k := \inf_{1 \leq j \leq p} \{T_1^{k,j}\}, \quad T_n^k := \inf_{\substack{1 \leq j \leq p \\ m \geq 1}} \{T_m^{k,j}; T_m^{k,j} \geq T_{n-1}^k; n \geq 2\}. \quad (3.8)$$

A Figura 3.2 fornece um exemplo de como a partição \mathcal{T}^k é construída a partir de duas partições que foram, inicialmente, geradas a partir de um movimento Browniano bidimensional $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$.

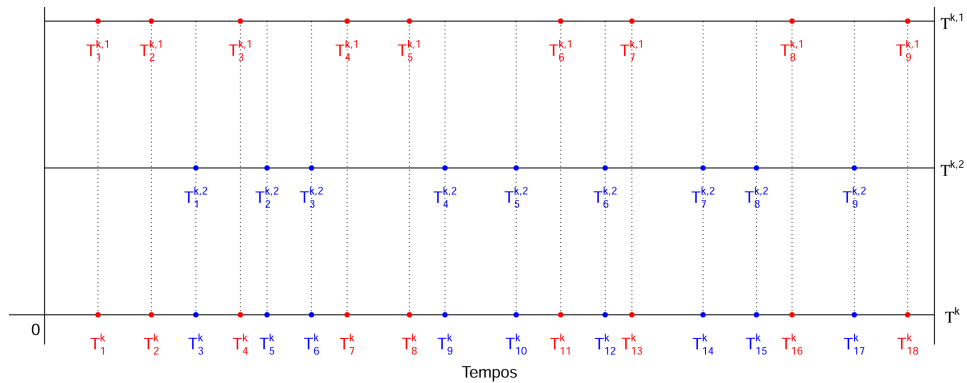


Figura 3.2: Partição \mathcal{T}^k gerada a partir das famílias de tempos de parada $\mathcal{T}^{k,1}$ e $\mathcal{T}^{k,2}$ obtidas a partir de um movimento Browniano bidimensional $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$.

Como a distribuição de $W^{(j)}$ é absolutamente contínua para cada $j = 1, \dots, p$, podemos assumir que todos os elementos de \mathcal{T}^k são distintos q.c para todo $k \geq 1$. Desta forma, temos o seguinte resultado para a partição \mathcal{T}^k .

Lema 3.3. *Para todo $k \geq 1$, o conjunto \mathcal{T}^k é uma seqüência de \mathbb{F}^k -tempos de parada tais que $\sup_{n \geq 1} |T_n^k - T_{n-1}^k| \rightarrow 0$ em probabilidade quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração. É importante observar que

$$\sup_{n \geq 1} |T_n^k - T_{n-1}^k| \leq \max_{1 \leq j \leq p} \sup_{n \geq 1} |T_n^{k,j} - T_{n-1}^{k,j}| \rightarrow 0,$$

em probabilidade quando $k \rightarrow \infty$ e $T_n^k \rightarrow \infty$ q.c quando $n \rightarrow \infty$ para cada $k \geq 1$. Provemos agora que $\mathcal{T}^k = \{T_n^k; n \geq 0\}$ é uma seqüência de \mathbb{F}^k -tempos de parada. Para isto, considere a seqüência $\{T_n^k\}_{n \geq 0}$ reescrita considerando $T_0^k = 0$ q.c e $T_1^k = \inf \{t > 0; \|A_t^k\|_{\mathbb{R}^p} = 2^{-k}\}$, em que $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ denota a norma do máximo em \mathbb{R}^p . Portanto, T_1^k é um \mathbb{F}^k -tempo de parada. A seguir, definimos uma família de variáveis aleatórias em $\mathcal{F}_{T_1^k}^k$ relacionadas ao índice j dadas por

$$\ell_1^{k,j} := \begin{cases} 0, & \text{se } |A_{T_1^k}^{k,j}| \neq 2^{-k} \\ 1, & \text{se } |A_{T_1^k}^{k,j}| = 2^{-k} \end{cases}, \text{ para qualquer } j = 1, \dots, p.$$

Então consideramos o seguinte operador translação em relação ao tempo de parada T_1^k .

$$\tilde{A}_1^k(t) := \left(\tilde{A}_1^{k,1}(t) := A_{t+T_1^k}^{k,1} - A_{T_1^k}^{k,1}; \dots; \tilde{A}_1^{k,p}(t) := A_{t+T_1^k}^{k,p} - A_{T_1^k}^{k,p} \right)$$

para $t \geq 0$. Neste caso, concluímos que \tilde{A}_1^k é adaptado à filtragem $\{\mathcal{F}_{t+T_1^k}^k; t \geq 0\}$ e o *hitting time* $S_2^k := \inf \{t > 0; \|\tilde{A}_1^k(t)\|_{\mathbb{R}^p} = 2^{-k}\}$ é um $\{F_{t+T_1^k}^k; t \geq 0\}$ -tempo de parada e $T_2^k = T_1^k + S_2^k$ é um \mathbb{F}^k -tempo de parada. Na seqüência, definimos uma família de variáveis aleatórias definidas em $\mathcal{F}_{T_2^k}^k$ relacionadas ao índice j dadas por

$$\ell_1^{k,j} := \begin{cases} 0, & \text{se } |\tilde{A}_1^{k,j}(S_2^k)| \neq 2^{-k} \\ 2, & \text{se } |\tilde{A}_1^{k,j}(S_2^k)| = 2^{-k} \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, p$. Consideramos o operador translação em relação ao tempo de parada S_2^k dado por

$$\tilde{A}_2^k(t) := \left(\tilde{A}_2^{k,1}(t) := \tilde{A}_1^{k,1}(t + S_2^k) - \tilde{A}_1^{k,1}(S_{\ell_2^{k,1}}^k); \dots; \tilde{A}_2^{k,p}(t) := \tilde{A}_1^{k,p}(t + S_2^k) - \tilde{A}_1^{k,p}(S_{\ell_2^{k,p}}^k) \right),$$

para todo $t \geq 0$. Neste caso, concluímos que \tilde{A}_2^k é adaptado à filtragem $\{\mathcal{F}_{t+T_2^k}^k; t \geq 0\}$, o *hitting time* $S_3^k := \inf\{t > 0; \|\tilde{A}_2^k(t)\|_{\mathbb{R}^p} = 2^{-k}\}$ é um $\{\mathcal{F}_{t+T_2^k}^k; t \geq 0\}$ -tempo de parada e $T_3^k = T_2^k + S_3^k$ é um \mathbb{F}^k -tempo de parada. De forma indutiva, concluímos que $\{T_n^k\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de \mathbb{F}^k -tempos de parada. \square

A partir o Lemma 3.3 e da construção da filtragem \mathbb{F}^k , o seguinte resultado é imediato e sua demonstração será omitida.

Lema 3.4. *Para todo $k \geq 1$, o conjunto \mathcal{T}^k é uma sequência de \mathbb{F}^k -tempos de parada tais que*

$$\mathcal{F}_t^k = \mathcal{F}_{T_n^k}^k \text{ q.c em } \{T_n^k \leq t < T_{n+1}^k\} \quad (3.9)$$

para cada $n \geq 0$ e $k \geq 1$.

Como a opção $H \in L^2(\mathbb{P})$ e o *mean variance tradeoff* \hat{K} de S é limitado, é claro que $H \in L^2(\mathbb{Q})$. Segue então, do Teorema de Representação Martingale, que

$$\mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t] = H_0 + \int_0^t \phi_u^H dW_u; \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que $H_0 = \mathbb{E}[H]$ e $\phi^H = (\phi^{H,1}, \dots, \phi^{H,p})$ é um processo \mathbb{F} -previsível de dimensão p , adaptado e mensurável, tal que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\phi_t^H\|_{\mathbb{R}^p}^2 dt \right] < \infty.$$

A função *payoff* H induz o \mathbb{F} -martingale \mathbb{Q} -quadrado integrável $X_t := \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t]$; $0 \leq t \leq T$ e então, mergulhamos o processo X na filtragem quasi-contínua à esquerda \mathbb{F}^k por meio do

operador $\delta^k X_t$ definido por

$$\begin{aligned}\delta^k X_t &:= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[X_{T_m^k} \mid \mathcal{F}_{T_m^k}^k \right] \mathbb{1}_{\{T_m^k \leq t < T_{m+1}^k\}} \\ &= X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[X_{T_m^k} \mid \mathcal{F}_{T_m^k}^k \right] - \mathbb{E} \left[X_{T_{m-1}^k} \mid \mathcal{F}_{T_{m-1}^k}^k \right] \mathbb{1}_{\{T_m^k \leq t\}}\end{aligned}$$

para qualquer $0 \leq t \leq T$. Como X é um \mathbb{F} -martingale então, do Teorema da amostragem opcional de Dobb (veja, por exemplo o Teorema 16 do cap. 1 de Protter (2004) [81]) e do Lema 3.4, segue que $\delta^k X$ possui a seguinte representação

$$\delta^k X_t = \mathbb{E} [X_T \mid \mathcal{F}_t^k] = \mathbb{E} [H \mid \mathcal{F}_t^k], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como consequência, obtemos que $\delta^k X$ é um \mathbb{F}^k -martingale \mathbb{Q} -quadrado integrável e podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\delta^k X_t &= X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \delta^k X_{T_m^k} \mathbb{1}_{\{T_m^k \leq t\}} = X_0 + \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta \delta^k X_{T_\ell^{k,j}} \mathbb{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq t\}} \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Delta \delta^k X_{T_\ell^{k,j}}}{\Delta A_{T_\ell^{k,j}}^{k,j}} \Delta A_{T_\ell^{k,j}}^{k,j} \mathbb{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq t\}} \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^p \int_0^t \mathcal{D}^j (\delta^k X)_u dA_u^{k,j},\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que

$$\mathcal{D}^j (\delta^k X)_t := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Delta \delta^k X_{T_\ell^{k,j}}}{\Delta A_{T_\ell^{k,j}}^{k,j}} \mathbb{1}_{[[T_\ell^{k,j}]]}\tag{3.11}$$

e a integral em (3.10) é calculada no sentido de Lebesgue-Stieltjes. Para $j \in \{1, \dots, p\}$ fixo e $\ell \geq 1$, definimos $\tau_\ell^{k,j} := \max\{T_n^k; T_n^k < T_\ell^{k,j}\}$, ou seja, $\tau_\ell^{k,j}$ é o maior tempo de parada de \mathcal{T}^k menor do que $T_\ell^{k,j}$. Desta forma, temos que a filtragem $\mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k$ é igual à filtragem gerada por $\mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k$, pelo incremento $T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}$ e $\eta_\ell^{k,j}$, isto é,

$$\mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k = \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \vee \sigma \left(T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}, \eta_\ell^{k,j} \right),\tag{3.12}$$

para $\ell \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$. Portanto,

$$\mathcal{D}^j (\delta^k X)_{T_\ell^{k,j}} = \frac{\mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \right]}{W_{T_\ell^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{\ell-1}^{k,j}}^{(j)}}; \quad \ell \geq 1. \quad (3.13)$$

já que o processo $A^{k,j}$ coincide com $W^{(j)}$ nos tempos de parada $\{T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$.

Observação 3.1. *De forma análoga a mostrada em Leão e Ohashi (2013) [73] para o caso univariado, podemos mostrar que $\mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}$ fracamente e, como X possui trajetórias contínuas, então $\delta^k X \rightarrow X$ uniformemente em probabilidade quando $k \rightarrow \infty$.*

A partir do processo $\mathcal{D}^j (\delta^k X)$ em (3.13), definimos o processo $\mathbb{D}^{k,j} X$ dado por

$$\mathbb{D}^{k,j} X := \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^j (\delta^k X)_{T_\ell^{k,j}} \mathbb{1}_{[[T_\ell^{k,j}, T_{\ell+1}^{k,j}[[}, \quad k \geq 1, \quad j = 1, \dots, p \quad (3.14)$$

e, de modo que possamos trabalhar com estratégias de *hedging* não-antecipativas, definimos uma versão \mathbb{F}^k -previsível adequada de $\mathbb{D}^{k,j} X$ da forma

$$\mathbf{D}^{k,j} X := 0\mathbb{1}_{[0]} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\mathbb{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,j}}^k \right] \mathbb{1}_{]T_{n-1}^{k,j}, T_n^{k,j}]}; \quad k \geq 1, \quad j = 1, \dots, d. \quad (3.15)$$

Observação 3.2. *Seja H uma opção \mathcal{F}_T -mensurável e \mathbb{Q} -quadrado integrável. Então, para $j = 1, \dots, p$, temos que*

$$\mathbf{D}^{k,j} X_t = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k \right]}{W_{T_1^{k,j}}^{(j)} - W_{T_0^{k,j}}^{(j)}} \right]; \quad 0 < t \leq T_1^{k,j}. \quad (3.16)$$

Devemos notar que (3.16) nos remete a estratégia usual do delta hedging, porém o preço é trasladado no nível das σ -álgebras juntamente com os incrementos dos respectivos movimentos Brownianos ao invés do preço atual. No caso unidimensional ($p = d = 1$), temos que

$$\mathbf{D}^{k,1} X_t = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} [H]}{W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_{T_0^{k,1}}^{(1)}} \right]; \quad 0 < t \leq T_1^{k,1}. \quad (3.17)$$

A partir da identidade (3.16), obtemos um procedimento natural para aproximação das estratégias de *hedging* puras por meio do processo $\mathbf{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} [S_0 \sigma_0]^{-1}$ no instante inicial $t = 0$. É exatamente este procedimento que detalharemos no algoritmo apresentado na Seção 5.1 do Capítulo 5, a partir do qual obtemos os resultados numéricos fornecidos na Seção 5.2. Quando trabalhamos com modelos de volatilidade estocástica, a aleatoriedade adicional está inserida em $\mathcal{F}_{\tau_1^k, 1}^k$ que é determinada pelos *hitting times* dos movimentos Brownianos associados à volatilidade estocástica.

Na seção 3.2 a seguir, introduzimos uma topologia que é flexível para lidar com estratégias de *hedging* não suaves para *payoffs* que sejam, possivelmente, não-Markovianos e que, ao mesmo tempo, justifique as técnicas de simulação Monte Carlo que serão apresentadas na Seção 5.1. Também enfatizamos que esta topologia é fundamental para a construção de aproximações factíveis para os processos

$$\int_0^t \theta_u^H dS_u \quad \text{e} \quad L_t^{H, \mathbb{Q}} = \int_0^t \phi_u^{H, \mathbb{Q}, I} dW_u^I.$$

baseadas nas razões (3.16).

3.2 Espaços B^p

Nesta seção, apresentamos os espaços de Banach $B^p(\mathbb{F})$ para $p \geq 1$, a partir dos quais, definimos $\sigma(B^p, M^q)$ como sendo a topologia fraca de $B^p(\mathbb{F})$, ou seja, a menor topologia para a qual a forma linear $(A, X) : B^p(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Os resultados assintóticos apresentados na Seção 3.3 utilizarão os índices $p = 1$ e $p = 2$. Indicamos os trabalhos de Dellacherie e Meyer (1982) [27], Dellacherie e Meyer (1978) [28] e Meyer (1977) [75] para uma descrição mais detalhada da topologia fraca de $B^p(\mathbb{F})$ restrita ao subespaço dos martingales $H^p(\mathbb{F})$ e o trabalho de Leão e Ohashi (2013) [73] para alguns resultados assintóticos no caso unidimensional.

A seguir, apresentamos a definição dos espaços $B^p(\mathbb{F})$ para $p \geq 1$ e consideramos q o conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definição 3.1. Utilizamos a notação $B^p(\mathbb{F})$ para denotar o espaço de todos os processos \mathbb{F} -opcionais X indexados em $[0, T]$ tais que $\mathbb{E}[|X_T^*|^p] < \infty$ em que $X_T^* = \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$. Podemos induzir em $B^p(\mathbb{F})$ a norma $\|\cdot\|_{B^p(\mathbb{F})}$ dada por

$$\|X\|_{B^p} = \|X_T^*\|_{L^p} = (\mathbb{E}[|X_T^*|^p])^{\frac{1}{p}} \quad (3.18)$$

Também definimos o subespaço $H^p(\mathbb{F})$ de $B^p(\mathbb{F})$ formado por todos os martingales Z tais que $Z_0 = 0$.

O espaço $B^p(\mathbb{F})$ é completo. Da definição do subespaço $H^p(\mathbb{F}) \subset B^p(\mathbb{F})$, temos o seguinte importante resultado.

Proposição 3.1. O espaço $H^p(\mathbb{F})$ é fechado em $B^p(\mathbb{F})$.

Demonstração. De fato, seja $\{M^n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de processos em $H^p(\mathbb{F})$ que converge para $M \in B^p(\mathbb{F})$. Então, temos que

$$\|M^n - M\|_{B^p(\mathbb{F})}^p = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^n - M_t|^p \right] \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Desta forma, utilizando a desigualdade de Hölder, para todo $t \in [0, T]$, temos que

$$\mathbb{E}[|M_t^n - M_t|] = \mathbb{E}[|(M_t^n - M_t)1|] \leq \mathbb{E}[|M_t^n - M_t|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[1^q]^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \Rightarrow M_t^n \xrightarrow{L^1} M_t.$$

Portanto, para todo $0 \leq s < t \leq T$ e $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(M_t - M_s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(M_t^n - M_s^n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_t^n - M_s^n | \mathcal{F}_s] = 0 \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ e, portanto M é um martingale. Como $M_t^n \xrightarrow{L^1} M_t$, dado $\varepsilon > 0$, da desigualdade de Chebyshev, temos que

$$0 \leq \mathbb{P}(|M_t^n - M_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_t^n - M_t|^p]}{\varepsilon^p} \rightarrow 0 \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Como $M_0^n = 0$ para todo $n \geq 1$ e (3.19) é verdadeira para $t = 0$, segue que, para n suficientemente grande e $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_0^n - M_0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|M_0| \geq \varepsilon) = 0$$

e, então $M_0 = 0$ q.c, concluindo a demonstração. \square

Da Proposição 3.1, concluímos que $(H^p(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{B^p(\mathbb{F})})$ é um espaço de Banach. Será importante trabalhar com o espaço dual de $B^p(\mathbb{F})$. Quando $p > 1$, o Lema 3.5 a seguir, nos permite, exatamente, determinar seu dual.

Lema 3.5. *Sejam A^{pr} e A^{pd} processos de variação integrável de forma que A^{pr} é \mathbb{F} -previsível com $A_0 = 0$ e A^{pd} é \mathbb{F} -opcional e puramente descontínuo. Além disso, seja V o processo dado por*

$$V = \int_{0-}^T |dA_s^{pr}| + \int_0^T |dA_s^{pd}|.$$

Então, temos que

i) Se $V \in L^q(\mathbb{Q})$ e $A = (A^{pr}, A^{pd})$ então, para todo $X \in B^p(\mathbb{F})$, a aplicação $(A, X) : B^p(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(A, X) = \mathbb{E} \left[\int_{0-}^T X_{s-} dA_s^{pr} + \int_0^T X_s dA_s^{pd} \right] \quad \forall X \in B^p(\mathbb{F}) \quad (3.20)$$

está bem definida para todo $X \in B^p(\mathbb{F})$ e define uma forma linear com norma $\|(A, X)\| \leq \|V\|_{L^q}$.

ii) Reciprocamente, se a forma linear (A, X) é contínua, ela possui uma única representação da forma (3.20) e, além disso, $\|V\|_{L^q} \leq q\|(A, X)\|$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Dellacherie e Meyer (1982) [27] (Teorema 65, página 254) e será omitida. \square

O espaço topológico dual de $B^p(\mathbb{F})$, denotado por $(B^p(\mathbb{F}))' = M^q(\mathbb{F})$ pode, então, ser definido como o espaço dos processos $A = (A^{pr}, A^{pd})$ com norma $\|\cdot\|_{M^q(\mathbb{F})}$ dada por

$$\|A\|_{M^q} := \|V\|_{L^q} \quad (3.21)$$

Uma desigualdade fundamental do par dual dado por (3.20) é dada por

$$\begin{aligned} |(A, X)| &\leq \mathbb{E} \left[\int_{0-}^T |X_{s-} dA_s^{pr}| \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T |X_s dA_s^{pd}| \right] \\ &\leq \|X^*\|_{L^p} \|V\|_{L^q} = \|X\|_{B^p(\mathbb{F})} \|A\|_{M^q(\mathbb{F})} \quad \forall A \in M^q(\mathbb{F}) \text{ e } X \in B^p(\mathbb{F}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que a segunda desigualdade é consequência da desigualdade de Hölder. Neste sentido, denotamos por $\sigma(B^p, M^q)$ a topologia fraca de $B^p(\mathbb{F})$, isto é, a menor topologia que torna a forma linear $(A, X) : B^p(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Quando $p = 1$, devemos ter um pouco mais de cuidado. Para definir o dual de $B^1(\mathbb{F})$, que denotamos por $M^\infty(\mathbb{F})$, considere $A = (A^{pr}, A^{pd})$ um processo de variação integrável tal que

$$\int_0^T |dA_t| = \int_{0-}^T |dA_t^{pr}| + \int_0^T |dA_t^{pd}| \in L^\infty(\mathbb{P})$$

de forma que, para todo $X \in B^1(\mathbb{F})$, a aplicação $(A, X) : B^1(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(A, X) = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s dA_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_{0-}^T X_{s-} dA_s^{pr} + \int_0^T X_s dA_s^{pd} \right]$$

é uma forma linear e está bem definida. Desta forma, definimos o espaço $M^\infty(\mathbb{F})$ como sendo os processos de variação integrável A tais que

$$\|A\|_{M^\infty} = \left\| \int_0^T |dA_t| \right\|_{L^\infty}.$$

De forma análoga ao caso $p > 1$, definimos por $\sigma(B^1, M^\infty)$ a topologia fraca de $B^1(\mathbb{F})$. Entretanto, em nossos resultados, utilizaremos uma noção modificada de convergência. Neste sentido, consideramos o conjunto Λ^∞ dos processos \mathbb{F} -opcionais de variação limitada C da forma $C = g\mathbf{1}_{\{S \leq \cdot\}}$ com $g \in L^\infty(\mathcal{F}_S)$ em que S é um \mathbb{F} -tempo de parada (limitado por T).

O espaço Λ^∞ completa $B^1(\mathbb{F})$ no sentido de que

$$\|X\|_{B^1} = \sup \{ |(X, C)|; C \in \Lambda^\infty, \|C\|_{M^\infty} \leq 1 \}. \quad (3.23)$$

A relação (3.23) pode ser encontrada em Dellacherie *et al.* (1978) [28] e então, podemos dotar $B^1(\mathbb{F})$ com a topologia fraca $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$ induzida pela família de seminormas

$$X \mapsto |(X, C)|; \quad C \in \Lambda^\infty.$$

É importante observar que $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$ é mais fraco do que $\sigma(B^1, M^\infty)$. Porém, a relação (3.23) garante que o subespaço $\Lambda^\infty \subset M^\infty$ é ω^* -denso em M^∞ .

O seguinte resultado, obtido por Mokobodzki, será muito importante nos resultados obtidos na Seção 3.3.

Lema 3.6. *Seja X^n uma sequência de processos opcionais tais que $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n|$ é uniformemente integrável e, para todo \mathbb{F} -tempo de parada S , a sequência X_S^n converge fracamente em L^1 relativamente a \mathcal{F}_S . Então existe um processo opcional X tal que $X^n \rightarrow X$ em $\sigma(B^1, M^\infty)$. Além disso, se $X^n \rightarrow X$ em $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$ e $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n|$ é uniformemente integrável, temos a convergência em $\sigma(B^1, M^\infty)$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Meyer (1977) [75]. \square

3.3 Aproximações fracas para o processo de hedging

O principal objetivo desta seção é obter aproximações martingales fracas de variação limitada para os processos

$$\int_0^t \theta_u^{H,\mathbb{Q}} dS_u \quad \text{e} \quad L_t^{H,\mathbb{Q}} = \int_0^t \phi_u^{H,\mathbb{Q},I} dW_u^I \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq T.$$

da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe (2.13).

Vale observar que estas aproximações estarão condicionadas a obtenção de uma aproximação para os processos $(\phi^{H,\mathbb{Q},S}, \phi^{H,\mathbb{Q},I})$. Para facilitar a notação, considerando uma medida $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e^2$ fixa, substituímos $(\phi^{H,\mathbb{Q},S}, \phi^{H,\mathbb{Q},I})$ por $(\phi^{H,S}, \phi^{H,I})$ e os processos $\theta^{H,\mathbb{Q}}$ e $L^{H,\mathbb{Q}}$ por θ^H e L^H , respectivamente, de forma que, a partir das equações (2.14) e (2.15), podemos reescrever os processos θ_t^H e L_t^H nas formas

$$\theta_t^H = \phi_t^{H,S} [\text{diag}(S_t)\sigma_t]^{-1} \quad \text{e} \quad L_t^H := \int_0^t \phi_\ell^{H,I} dW_\ell^I; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.24)$$

Estamos assumindo aqui, que a obtenção de $\phi_t^{H,S}$ será suficiente para o cálculo de θ_t^H , ou seja, que a volatilidade associada ao ativo subjacente, apesar de não observável, é conhecida (via calibração ou através de algum modelo de volatilidade estocástica). Como exemplos típicos, temos a decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada e as estratégias quadráticas de minimização do risco local e de variância média comentadas no Capítulo 2. Os passos realizados nas aproximações obtidas nesta seção podem ser facilmente implementados, de forma que todos os elementos da aproximação são passíveis de uma análise numérica que será apresentada na Seção 5.2 do Capítulo 5. Além disso, considerando simples condições de integrabilidade, as aproximações fracas para o processo ϕ obtidas na medida martingale equivalente \mathbb{Q} podem ser trazidas para a medida física \mathbb{P} .

Uma definição chave deste trabalho é a definição de energia finita para martingales dada abaixo.

Definição 3.2. Dizemos que um \mathbb{F} -martingale Y possui energia finita ao longo da família de filtrações $\{\mathbb{F}^k\}_{k \geq 1}$ se

$$\mathcal{E}_2(X) = \sup_{k \geq 1} \mathbb{E}([\delta^k Y, \delta^k Y]_T) < \infty. \quad (3.25)$$

Como exemplo, seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável e considere o \mathbb{F} -martingale \mathbb{Q} -quadrado integrável $X_t := \mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t]$. Além disso, seja $\{\delta^k X\}_{k \geq 1}$ a sequência de \mathbb{F}^k -martingales dada por (3.10). Então, o processo X terá energia finita se

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}([\delta^k X, \delta^k X]_T) = \sup_{k \geq 1} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right] < \infty.$$

Lema 3.7. Seja X o \mathbb{F} -martingale \mathbb{Q} -quadrado integrável dado por $X_t = \mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t]$. Então, existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_{T_n^k} - X_{T_{n-1}^k}|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right] \\ &\quad + C \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} |X_{T_\ell^{k,j}} - X_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

para todo $k \geq 1$. Consequentemente, X tem energia finita.

Demonstração. Da definição, temos que $\mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k = \sigma(A_{s \wedge T_\ell^{k,j}}^{k,m}; s \geq 0, m = 1, \dots, p)$ e

$$[\delta^k X, \delta^k X]_T = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_n^k}|^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} = \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_\ell^{k,j}}|^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}}.$$

Como definido anteriormente, para $j = 1, \dots, p$ e $\ell \geq 1$, consideramos o \mathbb{F}^k -tempo de parada $\tau_\ell^{k,j} = \max\{T_n^k; T_n^k < T_\ell^{k,j}\}$. Podemos reescrever $\tau_\ell^{k,j}$ como

$$\tau_\ell^{k,j} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}^k \mathbf{1}_{\{T_n^k = T_\ell^{k,j}\}},$$

de forma que

$$\mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k = \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \vee \sigma(\xi_\ell^{k,j}, \eta_\ell^{k,j}), \text{ em que } \xi_\ell^{k,j} = T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}. \quad (3.27)$$

Então, tomando um j fixo, consideramos $\tilde{W}_t := W_{T_{\ell-1}^{k,j}+t} - W_{T_{\ell-1}^{k,j}}$ e seja $\mathbb{F}^{\tilde{W}} = \{\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}; t \geq 0\}$ a filtragem natural gerada por \tilde{W} . Da propriedade forte de Markov, temos que W é um $\mathbb{F}^{\tilde{W}}$ -movimento Browniano de dimensão p independente de $\mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}$, ou seja, $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$ é independente de $\mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}$ para todo $t > 0$. Portanto

$$\sigma(\xi_\ell^{k,j}, \eta_\ell^{k,j}) \text{ é independente de } \mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}. \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28), concluímos que

$$\mathbb{E} \left[X_{T_{\ell-1}^{k,j}} | \mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}^k \right] = \mathbb{E} \left[X_{T_{\ell-1}^{k,j}} | \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k, (\xi_\ell^{k,j}, \eta_\ell^{k,j}) \right] = \mathbb{E} \left[X_{T_{\ell-1}^{k,j}} | \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \right] \quad (3.29)$$

e então, aplicando a desigualdade de Jensen e utilizando (3.29), temos que

$$\begin{aligned} |\Delta \delta^k X_{T_\ell^{k,j}}|^2 &= |\delta^k X_{T_\ell^{k,j}} - \delta^k X_{\tau_\ell^{k,j}}|^2 = \left| \mathbb{E} \left[X_{T_\ell^{k,j}} | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[X_{\tau_\ell^{k,j}} | \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \right] \right|^2 \\ &= \left| \mathbb{E} \left[X_{T_\ell^{k,j}} - X_{T_{\ell-1}^{k,j}} | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] + \mathbb{E} \left[X_{T_{\ell-1}^{k,j}} | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[X_{\tau_\ell^{k,j}} | \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \right] \right|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[\left| X_{T_\ell^{k,j}} - X_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^2 | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] + 2\mathbb{E} \left[\left| X_{T_{\ell-1}^{k,j}} - X_{\tau_\ell^{k,j}} \right|^2 | \mathcal{F}_{\tau_\ell^{k,j}}^k \right]. \end{aligned}$$

Como $|X_{T_{\ell-1}^{k,j}} - X_{\tau_\ell^{k,j}}|^2 \leq 2|X_{T_{\ell-1}^{k,j}} - X_{T_\ell^{k,j}}|^2 + 2|X_{T_\ell^{k,j}} - X_{\tau_\ell^{k,j}}|^2$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left([\delta^k X, \delta^k X]_T \right) &\leq 2 \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(X_{T_\ell^{k,j}} - X_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right)^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\quad + 4 \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(X_{T_{\ell-1}^{k,j}} - X_{T_\ell^{k,j}} \right)^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\quad + 4 \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(X_{T_\ell^{k,j}} - X_{\tau_\ell^{k,j}} \right)^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\leq 6 \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(X_{T_\ell^{k,j}} - X_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right)^2 \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\quad + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(X_{T_n^k} - X_{T_{n-1}^k} \right)^2 \mathbf{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \right]. \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

A seguir, definimos a noção de δ -covariação e observamos que esta definição é similar a noção de covariação introduzida em Leão, Ohashi e Simas [72] e Leão e Ohashi (2013) [73].

Definição 3.3. *Seja $\{Y^k; k \geq 1\}$ uma sequência de \mathbb{F}^k -martingales \mathbb{Q} -quadrado integráveis e considere $A^{k,j}$ como o processo de saltos dado em (3.4). Quando o limite*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [Y^k, A^{k,j}]_t$$

existe fracamente em $L^1(\mathbb{Q})$ para todo $t \in [0, T]$, dizemos que $\{Y^k; k \geq 1\}$ tem δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$.

Esta definição difere um pouco da apresentada em Leão, Ohashi e Simas [72] e Leão e Ohashi (2013) [73] uma vez que, no nosso caso de interesse, $\{Y^k; k \geq 1\}$ não é, necessariamente, uma sequência de processos \mathbb{F}^k -adaptados com puro saltos. De fato, como estamos no caso martingale puro, podemos relaxar tal hipótese como demonstrado pelo seguinte Lema.

Lema 3.8. *Seja $\{Y_t^{k,j} = \int_0^t H_s^{k,j} dA_s^{k,j}; k \geq 1, j = 1, \dots, p\}$ uma sequência de integrais estocásticas tal que $H^{k,j}$ é um processo de saltos com saltos definidos nos \mathbb{F} -tempos de parada $T_n^{k,j}$, $n \geq 1$ e seja $Y^k := \sum_{j=1}^p Y^{k,j}$. Suponha que*

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}([Y^k, Y^k]_T) < \infty. \quad (3.30)$$

Então $Z := \lim_{k \rightarrow \infty} Y^k$ existe fracamente em $B^2(\mathbb{F})$ com $Z \in H^2(\mathbb{F})$ se, e somente se, $\{Y^k; k \geq 1\}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$. Neste caso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [Y^k, A^{k,j}]_t = \lim_{k \rightarrow \infty} [Y^{k,j}, A^{k,j}]_t = [Z, W^{(j)}]_t \text{ fracamente em } L^1(\mathbb{Q}); t \in [0, T] \quad (3.31)$$

para $j = 1, \dots, p$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração deste resultado em alguns passos.

Passo 1. A sequência $\{Z_t^k; k \geq 1\}$ de \mathbb{F} -martingales \mathbb{Q} -quadrado integráveis tais que $Z_t^k := \mathbb{E}[Y_t^k | \mathcal{F}_t]$ admite uma subsequência convergente em $\sigma(B^2, M^2)$.

De fato, observamos que $Z_0^k = 0$ e, a partir da hipótese (3.30) e da desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy, existe uma constante C_2 tal que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t^k|^2 \right] \leq C_2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} ([Z^k, Z^k]_T) = C_2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} ([Y^k, Y^k]_T) < \infty$$

e, portanto, $\{Z_t^k; k \geq 1\}$ é uma sequência limitada em $H^2(\mathbb{F})$. Da Proposição 3.1, $H^2(\mathbb{F})$ é fechado em $B^2(\mathbb{F})$ e, portanto, temos que $\{Z_t^k; k \geq 1\}$ é $\sigma(B^2, M^2)$ -relativamente compacto. Então, qualquer sequência em $\{Z_t^k; k \geq 1\}$ admite uma subsequência convergente em $\sigma(B^2, M^2)$. Com um abuso de notação, utilizamos $\{Z_t^k; k \geq 1\}$ para denotar esta subsequência e seja $Z \in H^2(\mathbb{F})$ tal que (A, Z_t^k) converge para (A, Z_t) para $A \in M^2(\mathbb{F})$.

Passo 2. Temos que $Y^k \rightarrow Z$ em $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$.

Mostrar que $Y^k \rightarrow Z$ em $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$ é equivalente a mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int Y_S^k g d\mathbb{Q} = \int Z_S g d\mathbb{Q}$$

para todo $g \in L^\infty(\mathcal{F}_S)$. Observamos que é suficiente mostrar para a função indicadora $g = \mathbb{1}_G$ em que $G \in \mathcal{F}_S$. A partir do Lema 3.3 de Leão e Ohashi (2013) [73], existe uma sequência de tempos de paradas S_k e $G^k \in \mathcal{F}_{S_k}^k$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{Q}[G - G^k] = 0$ e que $S_k = S$ em G^k para todo $k \geq 1$. Da definição de esperança condicional e do fato de Y^k ser um \mathbb{F}^k -martingale, temos que

$$\begin{aligned} \int_G Z_S^k d\mathbb{Q} &= \int_{G-G^k} Y_T^k d\mathbb{Q} + \int_{G^k} \mathbb{E}[Y_T^k | \mathcal{F}_{S_k}^k] d\mathbb{Q} \\ &= \int_{G-G^k} Y_T^k d\mathbb{Q} - \int_{G-G^k} Y_S^k d\mathbb{Q} + \int_G Y_S^k d\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

E então, temos que

$$\left| \int_G Z_S^k d\mathbb{Q} - \int_G Y_S^k d\mathbb{Q} \right| = \left| \int_{G-G^k} Y_T^k d\mathbb{Q} - \int_{G-G^k} Y_S^k d\mathbb{Q} \right| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

o que mostra que $\lim_{k \rightarrow \infty} (Y^k, C) = (Z, C)$ para todo $C \in \Lambda^\infty$ e, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} Y^k = Z$ em $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$. A partir da hipótese (3.30), temos que $\{\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^k|; k \geq 1\}$ é uniformemente integrável, e então, a partir do Lema 3.6, concluímos que $Y^k \rightarrow Z$ fracamente em B^1 .

Passo 3. A partir do Passo 2, temos que $Y^k \rightarrow Z$ em $\sigma(B^2, M^2)$.

De fato, consideramos um funcional linear arbitrário $A = (A^{pr}, A^{pd}) \in M^2$ e seja $\{S_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de \mathbb{F} -tempos de parada com $S_n \rightarrow \infty$ tais que $\int_{t \wedge S_n}^T |dA^{pr}|$ e $\int_{t \wedge S_n}^T |dA^{pd}|$ são limitados para todo $n \geq 1$. Denotaremos por A^n o respectivo funcional linear parado em S_n , isto é, $A^n = A_{t \wedge S_n}$ e destacamos que, desta forma, $A^n \in M^\infty$. Então, temos que

$$\begin{aligned} |(A, Y^k) - (A, Z)| &\leq |(A, Y^k) - (A^n, Y^k)| + |(A^n, Y^k) - (A^n, Z)| + |(A^n, Z) - (A, Z)| \\ &\leq |(A^n, Y^k) - (A^n, Z)| + \|A^n - A\|_{M^2(\mathbb{F})} \left(\|Z\|_{B^2(\mathbb{F})} + [Y^k, Y^k]^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

já que $|(A^n, Y^k) - (A^n, Z)| \rightarrow 0$ pois $Y^k \rightarrow Z$ em $\sigma(B^1, M^\infty)$ e $\|A^n - A\|_{M^2(\mathbb{F})} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} Y^k = Z$ fracamente em B^2 . Ou seja, $\{Y^k; k \geq 1\}$ é um conjunto B^2 -fracamente relativamente compacto tal que seu limite $Z \in H^2(\mathbb{F})$.

Passo 4. Conclusão da demonstração.

Do Passo 3, existe uma subsequência $\{k_i\}_{i \geq 1}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} Y^{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p Y^{k_i, j} = Z$ fracamente em $B^2(\mathbb{F})$ e $Z \in H^2(\mathbb{F})$. Então, a partir do Lema 3.5 de Leão e Ohashi (2013) [73], concluímos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [Y^{k_i}, A^{k_i, j}]_t = [Z, W^{(j)}]_t \text{ fracamente em } L^1(\mathbb{Q}); 0 \leq t \leq T,$$

e, de forma análoga a Proposição 3.2 de Leão e Ohashi, concluímos que $Z = \lim_{k \rightarrow \infty} Y^k$ existe fracamente em B^2 com $Y \in H^2$ se, e somente se, $\{Y^k; k \geq 1\}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k, j}$. \square

O Lemma 3.8 nos diz que, mostrar que Y^k converge fracamente em $B^2(\mathbb{F})$ é equivalente a mostrar que $\{Y^k; k \geq 1\}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k, j}$ ou, mais precisamente, que $\lim_{k \rightarrow \infty} [Y^k, A^{k, j}]_t$ existe fracamente em $L^1(\mathbb{Q})$. Além disso, demonstrar que $Y^k \rightarrow Y$ em $\sigma(B^2, M^2)$ a partir da convergência $(A, Y^k) \rightarrow (A, Y)$ com $A \in M^2$ pode ser substituído pela

demonstração de que $(A, Y^k) \rightarrow (A, Y)$ com $A = g\mathbf{1}_{\{S \leq \cdot\}} \in L^\infty(\mathcal{F}_S)$ com S um \mathbb{F} -tempo de parada.

Para os próximos resultados, utilizamos a noção de derivada funcional fraca, introduzida em Leão e Ohashi (2013) [73] e Leão, Ohashi e Simas [72], dada na definição a seguir.

Definição 3.4. *Seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável e tome $X_t = \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t]$ para $0 \leq t \leq T$. Dizemos que X é fracamente diferenciável se*

$$\mathcal{D}^j X := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{k,j} X \text{ existe fracamente em } L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$$

para cada $j = 1, \dots, p$. Neste caso, consideramos o processo p -dimensional $\mathcal{D}X$ dado por $\mathcal{D}X := (\mathcal{D}^1 X, \dots, \mathcal{D}^p X)$.

Observação 3.3. *É importante observar que as ideias do cálculo diferencial utilizado aqui foram introduzidas por Leão e Ohashi (2013) [73] e Leão, Ohashi e Simas [72] e podem ser consideradas como uma versão fraca do cálculo funcional de Itô introduzido por Dupire (2009) [31] e, posteriormente, estudado por Cont e Fournie (2013) [21]. O Teorema 3.1 a seguir, pode ser considerado um corolário da Proposição 3.1 em Leão, Ohashi e Simas [72] que é uma consequência do Teorema 4.1 mostrado em Leão e Ohashi (2013) [73] para o caso unidimensional.*

Teorema 3.1. *Seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável. Então o \mathbb{F} -martingale $X_t = \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t]$ com $0 \leq t \leq T$ é fracamente diferenciável se*

$$\mathcal{D}X = (\phi^{H,1}, \dots, \phi^{H,p}).$$

Em particular

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^{H,j} dW_s^{(j)} = \int_0^t \theta_u^H dS_u \text{ fracamente em } B^2(\mathbb{F}). \quad (3.32)$$

e

$$L_t^H = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \phi_s^{H,j} dW_s^{(j)} \text{ fracamente em } B^2(\mathbb{F}). \quad (3.33)$$

Para a demonstração deste resultado, utilizaremos os Lemas 3.9 e 3.10 dados abaixo.

Lema 3.9. *Seja $g \in L^\infty(\mathbb{Q})$ e \mathcal{F}_T -mensurável. Então, para todo $1 < p < \infty$, temos que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| \mathbb{E} \left[g | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[g | \mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}^k \right] \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right] \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Demonstração. De fato, seja $g \in L^\infty(\mathbb{Q})$ e \mathcal{F}_T -mensurável e considere o processo $U_t = \mathbb{E}[g | \mathcal{F}_t]$ para $0 \leq t \leq T$. Além disso, considere $\delta^k U_t := \mathbb{E}[U_T | \mathcal{F}_t^k]$ para todo $0 \leq t \leq T$. Desta forma, que $\mathbb{E}[g | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k] = \mathbb{E}[U_T | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k] = \delta^k U_{T_\ell^{k,j}}$ no conjunto $\{T_\ell^{k,j} \leq T; k, \ell \geq 1\}$. Como U é um \mathbb{F} -martingale limitado com trajetórias contínuas e $\delta^k U \rightarrow U$ fortemente em $B^p(\mathbb{F})$ quando $k \rightarrow \infty$ para $p > 1$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| \mathbb{E} \left[g | \mathcal{F}_{T_\ell^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[g | \mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}^k \right] \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| \delta^k U_{T_\ell^{k,j}} - U_{T_\ell^{k,j}} \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| U_{T_\ell^{k,j}} - U_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| \delta^k U_{T_{\ell-1}^{k,j}} - U_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que o primeiro e o terceiro fatores no lado direito de (3.34) convergem para zero já que $\delta^k U \rightarrow U$ em $B^p(\mathbb{F})$. Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} \left| U_{T_\ell^{k,j}} - U_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^p \mathbf{1}_{\{T_\ell^{k,j} \leq T\}} \right]^{\frac{1}{p}} = 0$$

a partir da continuidade da trajetória de U juntamente do fato de que $\sup_{\ell \geq 1} |T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}| \rightarrow 0$ q.c quando $k \rightarrow \infty$. \square

Lema 3.10. *A derivada estocástica $\{\mathbb{D}^{k,j} X; k \geq 1\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$.*

Demonstração. De fato, a partir da definição, para todo $k \geq 1$, temos que

$$\int_0^T |\mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |\mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 (T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}) \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}}. \quad (3.35)$$

A partir do Lema (3.1), utilizando a independência entre $\Delta T_\ell^{k,j}$ e $\mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}}$ e a desigualdade (3.35), obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} |\mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 (T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}) \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} |\mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \frac{\Delta \delta^k X_{T_{\ell-1}^{k,j}}}{\Delta A_{T_{\ell-1}^{k,j}}^{k,j}} \right|^2 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\
&\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} |\Delta \delta^k X_{T_{\ell-1}^{k,j}}|^2 \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[[\delta^k X, \delta^k X]_T \right]
\end{aligned}$$

para qualquer $k \geq 1$. Do lema 3.7, segue que X tem energia finita e, portanto

$$\sup_k \mathbb{E} \left[\int_0^T |\mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] \leq \sup_k \mathbb{E} \left([\delta^k X, \delta^k X]_T \right) < \infty. \quad (3.36)$$

demonstrando o teorema. □

Desta forma, estamos em condição de demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(\mathbb{Q})$ e \mathcal{F}_T -mensurável. Para todo $k \geq 1$ e $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
g \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X ds &= g \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} (T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}) \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \\
&\quad - g \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} (T_\ell^{k,j} - t) \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} < t \leq T_\ell^{k,j}\}}
\end{aligned} \quad (3.37)$$

A fim de facilitar a notação, escreveremos $\xi_\ell^{k,j} := T_\ell^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}$ para $k, \ell \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$ e seja C uma constante que pode ser diferente em cada linha. Desta forma, utilizando a desigualdade de Hölder e o Lema 3.10, podemos mostrar que o segundo termo da equação (3.37) converge

pra zero. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| g \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}}(T_{\ell}^{k,j} - t) \right| \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} < t \leq T_{\ell}^{k,j}\}} \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right| \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} < t \leq T_{\ell}^{k,j}\}} \right] \\
&\leq C \left(\mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} |\xi_{\ell}^{k,j}| \mathbf{1}_{\{T_{\ell}^{k,j} \leq T\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^2 \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} < t \leq T_{\ell}^{k,j}\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sup_{k \geq 1} \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mathbb{D}_s^{k,j} X|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} |\xi_{\ell}^{k,j}| \mathbf{1}_{\{T_{\ell}^{k,j} \leq T\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} |\xi_{\ell}^{k,j}| \mathbf{1}_{\{T_{\ell}^{k,j} \leq T\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

que converge para zero quando $k \rightarrow \infty$. Para o primeiro termo do lado direito da equação (3.37) e, novamente utilizando o fato de que $T_{\ell}^{k,j} - T_{\ell-1}^{k,j}$ é independente de $\mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}^k$ escrevemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[g \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell}^{k,j} \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[g \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta \delta^k X_{T_{\ell-1}^{k,j}} \Delta A_{T_{\ell-1}^{k,j}}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] \tag{3.38}
\end{aligned}$$

em que $g_{\ell}^{k,j} := \mathbb{E}[g | \mathcal{F}_{T_{\ell}^{k,j}}^k] - \mathbb{E}[g | \mathcal{F}_{T_{\ell-1}^{k,j}}^k]$ para $k, \ell \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$. A partir de (3.38), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| g_{\ell}^{k,j} \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \xi_{\ell}^{k,j} \right| \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} |g_{\ell}^{k,j}|^2 \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \mathcal{D}^j(\delta^k X)_{T_{\ell-1}^{k,j}} \right|^2 \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\sup_k \mathbb{E} \left([\delta^k X, \delta^k X]_T \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E} \left[\sup_{\ell \geq 1} |g_{\ell}^{k,j}|^2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \xi_{\ell}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

que converge para zero quando $k \rightarrow \infty$ pelos Lemas 3.9 e 3.10. Então, segue dos passos acima que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s ds \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta \delta^k X_{T_{\ell-1}^{k,j}} \Delta A_{\ell-1}^{k,j} \mathbb{1}_{\{T_{\ell-1}^{k,j} \leq t\}} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [g[\delta^k X, A^{k,j}]_t], \end{aligned} \quad (3.39)$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s ds \right] \text{ existe se, e somente se, } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g[\delta^k X, A^{k,j}]_t) \text{ existe.}$$

Mas $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} (g[\delta^k X, A^{k,j}])$ existe se, e somente se, $\lim_{k \rightarrow \infty} [\delta^k X, A^{k,j}]_t$ existe fracamente em $L^1(\mathbb{Q})$, isto é, se, e somente se, $\{\delta^k X; k \geq 1\}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$. Então, utilizando o Lema 3.8, temos que $\{\delta^k X; k \geq 1\}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$ se, e somente se, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta^k X$ existe fracamente em $B^2(\mathbb{F})$. Mas, como $\delta^k X \rightarrow X$ em $B^2(\mathbb{F})$, segue que, de fato, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} (g[\delta^k X, A^{k,j}]_t)$ existe. Desta forma, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s ds \right]$ existe e, como $\mathbb{D}^{k,j} X$ é limitado em $L^2(\mathbb{Q} \times Leb)$ pelo Lema 3.10, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{k,j} X \text{ existe fracamente em } L^2(\mathbb{Q} \times Leb).$$

Portanto, X é fracamente diferenciável. Além disso, do discutido acima e do Lema 3.8, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X ds \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} (g[\delta^k X, A^{k,j}]_t) \\ &\stackrel{\text{L3.8}}{=} \mathbb{E} (g[X, W^{(j)}]_t) \\ &= \mathbb{E} \left(g \left[X_0 + \int_0^t \phi_s^{H,\mathbb{Q}} dW_s, W^{(j)} \right]_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left[g \int_0^t \phi_s^{H,j} ds \right], \quad g \in L^\infty(\mathbb{Q}) \text{ e } j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Desta forma, a identidade (3.40) nos mostra que $\mathbb{D}^{k,j}X \rightarrow \phi^{H,j}$ fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$ quando $k \rightarrow \infty$ e, portanto, $\mathcal{D}X = (\phi^{H,1}, \dots, \phi^{H,p})$. Em particular, temos que

$$\sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^p \int_0^t \mathcal{D}^j(\delta^k X)_s dA_s^{k,j} = \delta^k X_t - X_0$$

e, portanto $\sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$. Portanto, do Lema 3.8 e de (3.40), segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_u^{H,j} dW_u^{(j)} = \int_0^t \theta_u^H dS_u \text{ fracamente em } B^2(\mathbb{F})$$

e

$$L_t^H = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \phi_u^{H,j} dW_u^{(j)} \text{ fracamente em } B^2(\mathbb{F})$$

completando a demonstração. \square

É importante ressaltar das equações (3.15) e (3.16) que, somente o Teorema 3.1 não é suficiente para a implementação de estratégias de *hedging* dinâmicas baseadas em $\mathbb{D}^{k,j}X$. De fato, uma vez que estamos interessados em estratégias de *hedging* que sejam não-antecipativas, é necessário verificar o comportamento assintótico de $\mathbf{D}^{k,j}X$. O resultado principal desta seção nos garante que o comportamento assintótico de $\mathbf{D}^{k,j}X$ é idêntico ao de $\mathbb{D}^{k,j}X$.

Observação 3.4. Para verificar que $\mathbf{D}^{k,j}X$ converge para $\phi^{H,j}$ fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$, vamos decompor o processo $\mathbf{D}^{k,j}X$ da forma

$$\mathbf{D}^{k,j}X = \mathbb{D}^{k,j}X + (\mathbf{D}^{k,j}X - \mathbb{D}^{k,j}X)$$

e mostraremos que $\mathbf{D}^{k,j}X - \mathbb{D}^{k,j}X$ converge fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$ para zero. Como, do Teorema 3.1 temos que $\mathbb{D}^{k,j}X$ converge para $\phi^{H,j}$ fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$, concluímos que $\mathbf{D}^{k,j}X$ converge para $\phi^{H,j}$ fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$.

Teorema 3.2. *Seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável. Então, temos que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{k,j} X = \phi^{H,j} \quad (3.41)$$

fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times \text{Leb})$ para $j = 1, \dots, p$. Em particular,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_u^{H,j} dW_u^{(j)} = \int_0^t \theta_u^H dS_u \quad (3.42)$$

e

$$L_t^H = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} \quad (3.43)$$

fracamente em $B^2(\mathbb{F})$.

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois passos.

Passo 1. Inicialmente, denotamos por ${}^{o,k}(Y)$ e ${}^{p,k}(Y)$ as projeções opcional e previsível de um processo Y limitado e mensurável com respeito a \mathbb{F}^k , respectivamente. Para mais detalhes acerca destas projeções veja, por exemplo, He, Wang e Yan (1992) [48], Dellacherie e Meyer (1982) [27] e Protter (2004) [81]. Sejam M_t^k os \mathbb{F}^k -martingales dados por

$$M_t^k := \sum_{j=1}^p M_t^{k,j}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que

$$M_t^{k,j} := \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = 1, \dots, p.$$

A partir da definição do processo M^k , temos que $\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}([M^k, M^k]_T) < \infty$. De fato,

$$\{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega; \Delta [A^{k,j}, A^{k,j}]_t(\omega) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [[T_n^{k,j}, T_n^{k,j}]]. \quad (3.44)$$

uma vez que os processos $A^{k,j}$ são constantes por partes e apresentam saltos apenas no conjunto $\mathcal{T}^{k,j} = \{T_n^{k,j}; n \geq 1\}$. Utilizando a desigualdade de Jensen aplicada ao processo de variação

quadrática $[M^k, M^k]$ e a definição do processo $\mathbf{D}^{k,j}X$ dada em (3.15), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([M^k, M^k]_T) &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \int_0^T |\mathbf{D}^{k,j}X_s|^2 d[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{D}^{k,j}X_{T_n^{k,j}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,j}}^k \right] 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_n^{k,j} \leq T\}} \right] := J^k \end{aligned} \quad (3.45)$$

já que a variação do processo $[A^{k,j}, A^{k,j}]_t$ é sempre igual a 2^{-2k} por (3.44). A seguir, para cada $t \in (0, T]$, consideramos $\tau_{t-}^{k,j} := \max \{T_n^{k,j}; T_n^{k,j} \leq t\}$ e $\tau_{t+}^{k,j} := \min \{T_n^{k,j}; T_n^{k,j} > t\}$ e reescrevemos J^k da seguinte forma

$$\begin{aligned} J^k &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{D}^{k,j}X_{T_n^{k,j}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,j}}^k \right] 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^{k,j} \leq T\}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{D}^{k,j}X_{\tau_{T+}^{k,j}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_{T-}^{k,j}}^k \right] 2^{-2k} \mathbb{1}_{\{\tau_{T-}^{k,j} \leq T < \tau_{T+}^{k,j}\}} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta \delta^k X_{T_n^{k,j}} \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_{n-1}^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\Delta \delta^k X_{\tau_{T+}^{k,j}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_{T-}^{k,j}}^k \right] \mathbb{1}_{\{\tau_{T-}^{k,j} \leq T < \tau_{T+}^{k,j}\}} \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A partir da identidade (3.46), juntamente com o Lema 3.7 e a Observação 3.1, já que $\delta^k X \rightarrow X$ em $B^2(\mathbb{F})$ e X tem trajetórias contínuas, temos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}([M^k, M^k]_T) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} J^k < \infty \quad (3.47)$$

Passo 2. Neste passo, a ideia é mostrar que, se $g \in L^\infty(\mathbb{Q})$, $t \in [0, T]$ e $j = 1, \dots, p$, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g[M^k - \delta^k X, A^{k,j}]_t) = 0. \quad (3.48)$$

A partir das representações (3.14) do processo \mathbb{F}^k -opcional $\mathbb{D}^{k,j}X$ e (3.15) do processo \mathbb{F}^k -previsível $\mathbf{D}^{k,j}X$, podemos escrever que

$$\mathbb{E}(g[M^k - \delta^k X, A^{k,j}]_t) = \mathbb{E} \left[\int_0^t {}^{o,k}(g)_s (\mathbf{D}^{k,j}X_s - \mathbb{D}^{k,j}X_s) d[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \right]$$

e, desta forma, mostrar a igualdade (3.48) é equivalente a demonstrar as igualdades (3.49) e (3.50) dadas, respectivamente, por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^t p^{,k}(g)_s (\mathbf{D}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) d[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \right] = 0 \quad (3.49)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^t ({}^{o,k}(g)_s - p^{,k}(g)_s) (\mathbf{D}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) d[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \right] = 0. \quad (3.50)$$

A partir do conjunto definido em (3.44) para o qual $\Delta[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \neq 0$ com $0 \leq s \leq t$ e utilizando argumento análogo ao da equação (3.46) obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t p^{,k}(g)_s (\mathbf{D}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) d[A^{k,j}, A^{k,j}]_s \right] &= \mathbb{E} \left[p^{,k}(g)_{\tau_{t+}^{k,j}} \mathbb{D}^{k,j} X_{\tau_{t+}^{k,j}} \right] 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{\tau_{t-}^{k,j} \leq t < \tau_{t+}^{k,j}\}} \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[p^{,k}(g)_{\tau_{t+}^{k,j}} \mathbb{D}^{k,j} X_{\tau_{t+}^{k,j}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{t-}^{k,j}}^k \right] \right] 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{\tau_{t-}^{k,j} \leq t < \tau_{t+}^{k,j}\}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

quando $k \rightarrow \infty$, pois X tem trajetórias contínuas (veja a Observação 3.1), o que demonstra a equação (3.49). Resta agora, demonstrar a equação (3.50), que será denotada por $I^{k,j}$ para facilitar. Como, $T_{n+1}^{k,j} - T_n^{k,j}$ é independente de $\mathcal{F}_{T_n^{k,j}}^{k,j}$ e, além disso, $\mathbb{E} [T_{n+1}^{k,j} - T_n^{k,j}] = 2^{-2k}$, temos que

$$\begin{aligned} I^{k,j} &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left({}^{o,k}(g)_{T_n^{k,j}} - p^{,k}(g)_{T_n^{k,j}} \right) \left(\mathbf{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} - \mathbb{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} \right) \left(T_{n+1}^{k,j} - T_n^{k,j} \right) \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq t\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t ({}^{o,k,j}(g)_s - p^{,k,j}(g)_s) (\bar{\mathbf{D}}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_t^{T_{\ell+1}^{k,j}} ({}^{o,k,j}(g)_s - p^{,k,j}(g)_s) (\bar{\mathbf{D}}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) ds \mathbf{1}_{\{T_{\ell}^{k,j} < t \leq T_{\ell+1}^{k,j}\}} \right] \\ &= I_1^{k,j} + I_2^{k,j}, \end{aligned}$$

em que tomamos $\bar{\mathbf{D}}^{k,j} X_s := \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{D}^{k,j} X_{T_{\ell}^{k,j}} \mathbf{1}_{\{T_{\ell}^{k,j} \leq s < T_{\ell+1}^{k,j}\}}$ e

$${}^{o,k,j}(g)_s := {}^{o,k}(g)_{T_n^{k,j}} \text{ em } \left\{ T_n^{k,j} \leq s < T_{n+1}^{k,j} \right\}$$

$$p,k,j(g)_s := p,k(g)_{T_n^{k,j}} \text{ em } \left\{ T_n^{k,j} \leq s < T_{n+1}^{k,j} \right\}; n \geq 1.$$

Novamente, como $T_{n+1}^{k,j} - T_n^{k,j}$ é independente de $\mathcal{F}_{T_n^{k,j}}^{k,j}$ e $\mathbb{E} \left[T_{n+1}^{k,j} - T_n^{k,j} \right] = 2^{-2k}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\bar{\mathbb{D}}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] &\leq 2 \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T |\bar{\mathbb{D}}^{k,j} X_s|^2 ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T |\mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] \right) \\ &= 2\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,j}}^k \right] 2^{-2k} \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq T\}} \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] \end{aligned}$$

e, de forma análoga a mostrada no Passo 1 em (3.46) e (3.47), juntamente com o Lema 3.10, concluímos que

$$\sup_{k \geq 1} \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T |\bar{\mathbb{D}}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (3.52)$$

Utilizando o Lema 3.9, da desigualdade de Cauchy-Schwartz e (3.52), segue que

$$\begin{aligned} |I_1^{k,j}| &\leq \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T |o,k,j(g)_s - p,k,j(g)_s|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T |\bar{\mathbb{D}}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |o,k,j(g)_s - p,k,j(g)_s|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $|I_2^{k,j}| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e concluímos que (3.50) ocorre e, desta forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} (g[M^k - \delta^k X, A^{k,j}]_t) = 0 \text{ para todo } g \in L^\infty(\mathbb{Q}). \quad (3.53)$$

Do Lema 3.7 e de (3.47), temos que $\sup_k \mathbb{E} ([M^k - \delta^k X, M^k - \delta^k X]_T) < \infty$ e de (3.53), temos que $M^k - \delta^k X$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$. Portanto, utilizando o Lema 3.8, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k - \delta^k X = 0$ fracamente em $B^2(\mathbb{F})$. De (3.52), temos que $\mathbf{D}^{k,j} X - \mathbb{D}^{k,j} X$ é limitado em $L^2(\mathbb{Q} \times Leb)$ e, então, de forma análoga a apresentada no Teorema 3.1, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{k,j} X - \mathbb{D}^{k,j} X = 0$ fracamente em $L^2(\mathbb{Q} \times Leb)$. De onde segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{k,j} X = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{D}^{k,j} X - \mathbb{D}^{k,j} X) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{k,j} X = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{k,j} X = \phi^{H,j} \text{ fracamente em } L^2(\mathbb{Q} \times Leb)$$

para $j = 1, \dots, p$. Além disso, temos que

$$\sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} - \sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = M^k - \delta^k X - X_0$$

e, de (3.53), segue que $\sum_{j=1}^p \int_0^t (\mathbf{D}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) dA_s^{k,j}$ admite uma δ -covariação com respeito a $A^{k,j}$ e, portanto converge fracamente em $B^2(\mathbb{F})$ para zero. Como

$$\sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^p \int_0^t (\mathbf{D}^{k,j} X_s - \mathbb{D}^{k,j} X_s) dA_s^{k,j} + \sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j}$$

e, utilizando o fato de que $\sum_{j=1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j}$ converge fracamente para $\sum_{j=1}^p \int_0^t \phi_s^{H,j} dW_s^{(j)}$ em $B^2(\mathbb{F})$ obtido no Teorema 3.1, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_u^{H,j} dW_u^{(j)} = \int_0^t \theta_u^H dS_u$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \mathbf{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \mathbb{D}^{k,j} X_s dA_s^{k,j} = \sum_{j=d+1}^p \int_0^t \phi_u^{H,j} dW_u^{(j)} = L_t^H$$

concluindo o teorema. \square

A seguir apresentamos alguns resultados de convergência mais fortes quando consideramos hipóteses de suavidades das trajetórias e integrabilidade para as representações $(\phi^{H,S}, \phi^{H,I})$ dadas em (3.24). Apresentamos algumas aproximações pontuais fracas e fortes do tipo uniforme para θ^H e elas validam os experimentos numéricos fornecidos nas Tabelas 5.1 e 5.4 da Seção 5.2 do Capítulo 5.

Lema 3.11. *Suponha que $\phi^H = (\phi^{H,1}, \dots, \phi^{H,p})$ é um processo \mathbb{F} -progressivo de dimensão p tal que $\mathbb{E} [\sup_{0 \leq t \leq T} \|\phi_t^H\|_{\mathbb{R}^p}^2] < \infty$. Então, temos a seguinte igualdade*

$$\Delta \delta^k X_{T_1^{k,j}} = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} \phi_s^{H,j} dW_s^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] \quad q.c.; \quad j = 1, \dots, p; \quad k \geq 1. \quad (3.54)$$

Demonstração. É suficiente mostrar o resultado para $p = 2$ já que, para $p > 2$, o resultado é análogo. Seja \mathcal{H} o espaço linear construído pelos processos \mathbb{F} -progressivos limitados com valores em \mathbb{R}^2 dados por $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ tais que, se

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s^1 dW_s^{(1)} + \int_0^t \phi_s^2 dW_s^{(2)}$$

com $X_0 \in \mathcal{F}_0$, então a equação (3.54) é satisfeita. Seja \mathcal{U} a classe dos intervalos estocásticos da forma $[[S, +\infty[[$ em que S é um \mathbb{F} -tempo de parada. Afirmamos que $\phi = (\mathbb{1}_{[[S, +\infty[[}, \mathbb{1}_{[[J, +\infty[[}) \in \mathcal{H}$ para todos os \mathbb{F} -tempos de parada S e J . Para demonstrar (3.54) para tal ϕ , simplesmente temos que verificar para $j = 1$, já que o argumento é análogo para $j = 2$. Com um abuso de notação, qualquer sub- σ -álgebra de \mathcal{F}_T da forma $\Omega_1^* \otimes \mathcal{G}$ sera denotada por \mathcal{G} em que Ω_1^* é a σ -álgebra trivial da primeira cópia Ω_1 .

Inicialmente, dividimos $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n^k = T_1^{k,1}\}$ e verificamos a afirmação sobre os conjuntos $\{T_n^k = T_1^{k,1}\}; n \geq 1$. Neste caso, sabemos que $\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k = \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^{k,1} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2}$ q.c e

$$\Delta\delta^k X_{T_1^{k,1}} = \Delta\delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \right) \mathbb{1}_{\{S < T_1^{k,1}\}} + \Delta\delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} \right) \mathbb{1}_{\{J < T_1^{k,1}\}}.$$

Da independência entre $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ e da independência dos incrementos do movimento Browniano, segue que

$$\begin{aligned} \Delta\delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} \right) &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k \right] \\ &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^{k,1} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2} \right] = \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \sigma\{T_1^{k,1}\} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2} \right] = 0 \text{ q.c} \end{aligned}$$

no conjunto $\{T_{n-1}^k \leq J < T_n^k = T_1^{k,1}\}$. Também temos que

$$\begin{aligned} \Delta\delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} \right) &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k \right] \\ &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^{k,1} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2} \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(2)} - W_J^{(2)} | \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(2)} - W_J^{(2)} \mid \sigma\{T_1^{k,1}\} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,2}}^{k,2} \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(2)} - W_J^{(2)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(2)} - W_J^{(2)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(2)} - W_J^{(2)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] = 0 \text{ q.c}
\end{aligned}$$

no conjunto $\{J < T_{n-1}^k\}$. Por construção, temos que $\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k = \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^{k,1} \otimes \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2}$ q.c e, novamente, da independência entre $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta \delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \right) &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right]
\end{aligned}$$

em $\{T_{n-1}^k \leq S < T_n^k = T_1^{k,1}\}$. Similarmente,

$$\begin{aligned}
\Delta \delta^k \left(W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \right) &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] - \mathbb{E} \left[W_{T_{n-1}^k}^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] + \mathbb{E} \left[W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] + \mathbb{E} \left[W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right]
\end{aligned}$$

em $\{S < T_{n-1}^k\}$. Como, por hipótese, S é um \mathbb{F} -tempo de parada em que \mathbb{F} é uma filtração produto, temos que $\mathbb{E} \left[W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^k}^{k,2} \right] = 0$ q.c em $\{S < T_{n-1}^k\}$. Juntando as identidades apresentadas acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta \delta^k X_{T_1^{k,1}} &= \mathbb{E} \left[W_{T_1^{k,1}}^{(1)} - W_S^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] \text{ q.c} \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,1}} \mathbb{1}_{[[S, \infty[[[dW_s^{(j)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k]} \right] \text{ q.c} \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} \phi_s^1 dW_s^{(1)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k \right] \text{ q.c}
\end{aligned}$$

e, portanto, $(\mathbb{1}_{[[S, +\infty[[[}, \mathbb{1}_{[[J, +\infty[[[}) \in \mathcal{H}$. Em particular, o processo constante $(1, 1) \in \mathcal{H}$ e, se ϕ^n é uma sequência em \mathcal{H} tal que $\phi^n \rightarrow \phi$ q.c ($\mathbb{Q} \times Leb$) com ϕ limitado, então uma aplicação da

desigualdade de Burkholder nos garante que $\phi \in \mathcal{H}$. Como \mathcal{U} gera a σ -álgebra opcional, então aplicando o teorema da classe monótona, concluímos a demonstração. \square

A seguir, apresentamos um resultado de convergência pontual forte para as projeções de Galtchouk-Kunita-Watanabe sob condições de regularidade das trajetórias ainda mais fracas. Para isto, consideramos os seguintes tempos de parada

$$\tau^j := \inf\{t > 0; |W_t^{(j)}| = 1\}; \quad j = 1, \dots, p,$$

e tomamos

$$\psi_u^{H,j} := \mathbb{E} \left[\left| \phi_{\tau^j u}^{H,j} - \phi_0^{H,j} \right|^2 \right], \quad \text{para } u \geq 0 \text{ e } j = 1, \dots, p.$$

Aqui, se u satisfaz $\tau^j u \geq T$, tomamos $\phi_{\tau^j u}^{H,j} := \phi_T^{H,j}$ e, por simplicidade, assumimos que $\psi_0^{H,j} = 0$.

Teorema 3.3. *Seja H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável e considere o processo \mathbb{F} -progressivo $\phi^H = (\phi^{H,1}, \dots, \phi^{H,p})$ tal que $\phi^{H,j} \in B^2(\mathbb{F})$ para $j \in \{1, \dots, p\}$ e suponha que o instante inicial $t = 0$ é um ponto de Lebesgue da aplicação $u \mapsto \psi_u^{H,j}$. Então*

$$\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} \rightarrow \phi_0^{H,j} \quad \text{quando } k \rightarrow \infty \quad (3.55)$$

Demonstração. Na demonstração, C será uma constante que pode ser diferente de linha a linha.

Para $k \geq 1$ e $j \in \{1, \dots, p\}$ fixo, segue do Lema 3.11 que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} &= \frac{\Delta \delta^k X_{T_1^{k,j}}}{\Delta A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} \phi_s^{H,j} dW_s^{(j)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right]}{\Delta A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} \left(\phi_s^{H,j} - \phi_0^{H,j} + \phi_0^{H,j} \right) dW_s^{(j)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right]}{\Delta A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} \left(\phi_s^{H,j} - \phi_0^{H,j} \right) dW_s^{(j)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right]}{\Delta A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} + \mathbb{E} \left[\phi_0^{H,j} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

É importante ressaltar que $\mathbb{E} [T_1^{k,j}] = 2^{-2k} \mathbb{E} [\tau^j]$ de forma que podemos aplicar as desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy e Cauchy-Schwartz juntamente com um simples argumento

de mudança de instante do movimento Browniano, além do Lema 3.1, para obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left| \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{T_1^{k,j}} (\phi_s^{H,j} - \phi_0^{H,j}) dW_s^{(j)} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right]}{\Delta A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} \right| \right] &\leq 2^k \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{T_1^{k,j}} (\phi_s^{H,j} - \phi_0^{H,j}) dW_s^{(j)} \right| \right] \\
&= 2^k \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{2^{-2k}} (\phi_{\tau^j s}^{H,j} - \phi_0^{H,j}) dW_{\tau^j s}^{(j)} \right| \right] \\
&\leq C 2^k \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{2^{-2k}} (\phi_{\tau^j s}^{H,j} - \phi_0^{H,j})^2 \tau^j ds \right|^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq C (\mathbb{E} [\tau^j])^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\frac{1}{2^{-2k}} \int_0^{2^{-2k}} (\phi_{\tau^j u}^{H,j} - \phi_0^{H,j})^2 du \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\mathbb{E} \left[\frac{1}{2^{-2k}} \int_0^{2^{-2k}} (\phi_{\tau^j u}^{H,j} - \phi_0^{H,j})^2 du \right] \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Como $t = 0$ é, por hipótese um ponto de Lebesgue de $u \mapsto \psi_u^{H,j}$, temos que

$$\frac{1}{2^{-2k}} \int_0^{2^{-2k}} \mathbb{E} \left[\left| \phi_{\tau^j u}^{H,j} - \phi_0^{H,j} \right|^2 du \right] \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \tag{3.58}$$

Portanto, a partir da estimativa (3.57), o limite (3.58) e a convergência fraca de $\mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k$ para a σ -álgebra inicial \mathcal{F}_0 , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\phi_0^{H,j} \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] = \phi_0^{H,j},$$

fortemente em L^1 . Como $\mathbf{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} = \mathbb{E} \left[\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} \right]$, para todo $k \geq 1$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} \right] = \phi_0^{H,j}$$

concluindo a demonstração. \square

A primeira vista, o limite (3.55) pode parecer fraco, já que não está definido em termos da convergência do processo. Entretanto, do ponto de vista computacional, construiremos um

método de simulação Monte Carlo pontual das projeções de Galtchouk-Kunita-Watanabe em termos da derivada $\mathbf{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}}$ dada por (3.16). Para cada $j = 1, \dots, p$, definimos

$$\psi_{t_0,u}^{H,j} := \mathbb{E} \left[\left| \phi_{t_0+\tau^j u}^{H,j} - \phi_{t_0}^{H,j} \right|^2 \right], \text{ para } t_0 \in [0, T], u \geq 0.$$

Podemos mostrar por um argumento de translação baseado na propriedade forte de Markov do movimento Browniano que, se existe uma representação ϕ^H tal que $u \mapsto \psi_{t_0,u}^{H,j}$ é *càdlàg* para um dado t_0 , então podemos recuperar, pontualmente, no sentido L^1 -forte a j -ésima projeção de Galtchouk-Kunita-Watanabe em t_0 . Também ressaltamos que, se $\phi^{H,j}$ pertence a $B^2(\mathbb{F})$ e possui trajetórias *càdlàg*, então $u \mapsto \psi_{t_0,u}^{H,j}$ é *càdlàg* para cada t_0 , porém a recíproca não é verdadeira. Então, a hipótese do Teorema 3.3 é mais fraca no sentido de que ela não implica a existência de uma versão *càdlàg* de $\phi^{H,j}$.

3.4 Hedging dinâmico

O principal objetivo nesta seção é obter uma aproximação para a integral

$$\int_0^T \theta_t^H dS_t$$

por somas de Riemann do tipo

$$\sum_{j=1}^d \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{T_{n-1}^{k,j}}^{k,H,j} \left(S_{T_n}^j - S_{T_{n-1}}^j \right) \mathbf{1}_{\{T_n^{k,j} \leq T\}} \quad (3.59)$$

em que $\theta^{k,H,j}$ é calculado a partir dos processos \mathbb{F}^k -previsíveis $\mathbf{D}^{k,j} X$ obtidos no Teorema 3.2.

A estratégia $\theta^{k,H,j}$ é dada por

$$\theta_t^{k,H,j} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} \left[\sigma_{T_{n-1}^{k,j}} S_{T_{n-1}^{k,j}} \right]^{-1} \mathbf{1}_{[[T_{n-1}^{k,j}, T_n^{k,j}[[} \quad (3.60)$$

e $\mathbf{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} = \mathbb{E} \left[\mathbb{D}^{k,j} X_{T_n^{k,j}} \left| \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,j}}^k \right. \right]$, para $k, n \geq 1$. Desta forma, obtemos uma estratégia de *hedging* dinâmico para uma opção do tipo europeia \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável H com $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ baseada na decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [H] + \int_0^T \theta_t^H dS_t + L_T^H. \quad (3.61)$$

É importante ressaltar que os exemplos típicos que temos em mente são as estratégias de *hedging* quadráticas de minimização do risco local e variância média descritas no Capítulo 2. Em particular, o interesse recai sobre opções cuja função *payoff* depende de toda a trajetória do preço do ativo e, não somente, do tempo de maturidade T . Quando \mathbb{Q} é a medida martingale minimal, a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe (3.61) é equivalente à decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada e, considerando algumas condições de integrabilidade para os componentes de (3.61), θ^H é a estratégia de *hedging* de minimização do risco local (veja, por exemplo, Heath *et al.* (2001) [49] e Schweizer (1995) [87]). Quando o objetivo é obter uma

estratégia de *hedging* de variância média, não basta obter somente a decomposição (3.61), já que temos um componente adicional que depende de equações de representação fundamentais. Porém, quando consideramos o modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) [50], estas componentes podem ser encontradas no trabalho de Hobson (2004) [53].

Como nossos resultados numéricos foram obtidos para o modelo de volatilidade estocástica de Heston, por simplicidade de notação, consideramos um mercado financeiro $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ governado por um movimento Browniano bidimensional $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ e um ativo com risco tal que o seu processo de preço descontado é denotado por S , como no Capítulo 2. Observamos que os resultados obtidos aqui continuam verdadeiros quando consideramos uma abordagem multidimensional.

Neste sentido, só precisamos encontrar o processo $\theta^{k,H,1}$ que será denotado, simplesmente, por

$$\theta^{k,H} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}}}{\sigma_{T_{n-1}^{k,1}} S_{T_{n-1}^{k,1}}} \mathbf{1}_{[[T_{n-1}^{k,1}, T_n^{k,1}[[\quad (3.62)$$

em que $\mathbf{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}}$ é dado por $\mathbf{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}} = \mathbb{E} \left[\mathbb{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}} \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,1}}^k \right]$ para $k, n \geq 1$.

Corolário 3.1. *Seja $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ e H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável e considere a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe correspondente sob \mathbb{Q} dada por (3.61).*

Se $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in L^1(\mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \theta_u^H dS_u \right| \right] < \infty \quad (3.63)$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{T_{n-1}^{k,1}}^{k,H} \left(S_{T_n^{k,1}} - S_{T_{n-1}^{k,1}} \right) \mathbf{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}} \rightarrow \int_0^t \theta_t^H dS_t \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

na topologia $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$ sob \mathbb{P} .

Demonstração. Temos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left| \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right|^2 \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right|^2 \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right] < \infty$$

e, então, $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in L^2(\mathbb{Q})$. Para facilitar a notação, consideramos $Y_t^k := \int_0^t \mathbf{D}^{k,1} X_s dA_s^{k,1}$ e $Y_t := \int_0^t \theta_u^H dS_u$ para $0 \leq t \leq T$. Do Teorema 3.2, temos que $Y^k \rightarrow Y$ em $\sigma(B^2, M^2)$ sob \mathbb{Q} . Seja

G um \mathbb{F} -tempo de parada arbitrário limitado por T e seja $g \in L^\infty(\mathbb{P})$ uma variável aleatória \mathbb{P} -essencialmente limitada e \mathcal{F}_G -mensurável. Seja $A \in M^2(\mathbb{F})$ um funcional linear contínuo dado pelo processo de variação limitada \mathbb{F} -opcional descontínuo

$$A_t := g \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_G \right] \mathbb{1}_{\{G \leq t\}}; \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que $(A, N) = \mathbb{E} \left[\int_0^T N_s dA_s \right]$, $N \in B^2(\mathbb{F})$. Para maiores detalhes, veja a Seção 3.2. Como, pelo Teorema 3.2 temos que $(A, Y^k) \rightarrow (A, Y)$ e do fato de que $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in L^2(\mathbb{Q})$, segue que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [gY_G^k] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[Y_G^k g \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right] = (A, Y^k) \rightarrow (A, Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[Y_G g \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [gY_G] \quad (3.64)$$

quando $k \rightarrow \infty$. Por definição, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{D}^{k,1} X_s dA_s^{k,1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\mathbf{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}} \middle| \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,1}}^k \right] \Delta A_{T_n^{k,1}}^{k,1} \mathbb{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} \left[\mathbf{D}^{k,1} X_{T_n^{k,1}} \middle| \mathcal{F}_{T_{n-1}^{k,1}}^k \right]}{\sigma_{T_{n-1}^{k,1}} S_{T_{n-1}^{k,1}}} \left(\sigma_{T_{n-1}^{k,1}} S_{T_{n-1}^{k,1}} \right) \left(W_{T_n^{k,1}}^{(1)} - W_{T_{n-1}^{k,1}}^{(1)} \right) \mathbb{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{T_{n-1}^{k,1}}^{k,H} \sigma_{T_{n-1}^{k,1}} S_{T_{n-1}^{k,1}} \left(W_{T_n^{k,1}}^{(1)} - W_{T_{n-1}^{k,1}}^{(1)} \right) \mathbb{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{T_{n-1}^{k,1}}^{k,H} \left(S_{T_n^{k,1}} - S_{T_{n-1}^{k,1}} \right) \mathbb{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}}; \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Então, a partir do Teorema 3.2, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{T_{n-1}^{k,1}}^{k,H} \left(S_{T_n^{k,1}} - S_{T_{n-1}^{k,1}} \right) \mathbb{1}_{\{T_n^{k,1} \leq t\}} \rightarrow \int_0^t \theta_t^H dS_t$$

fracamente em $B^2(\mathbb{F})$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, de (3.64), concluímos que a convergência ocorre em $\sigma(B^1, \Lambda^\infty)$, baseada na medida física \mathbb{P} . \square

Desta forma, generalizando o Corolário 3.1 para o caso multidimensional, temos que o processo $\int_0^T \theta_t^H dS_t$ pode ser aproximado fracamente por somas de Riemann da forma (3.59) em uma filtragem multidimensional. Ressaltamos que este tipo de convergência é suficiente para a

implementação de métodos de Monte Carlo para o cálculo de estratégias de *hedging* quadráticas de minimização do risco local e variância média. Obtemos alguns resultados que comprovam a eficiência do método na Subseção 5.2.2 para os modelos de Heston e o modelo de elasticidade constante da variância (CEV).

Observação 3.5. *É importante observar que, quando estamos interessados em obter a convergência no tempo de maturidade T , a hipótese (3.63) pode ser substituída por uma versão mais fraca da forma $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_0^T \theta_t^H dS_t \right| \right] < \infty$. Observamos que a hipótese $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right] < \infty$ é fundamental para que possamos concluir que $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in L^2(\mathbb{Q})$ e, desta forma, obter a convergência na medida física \mathbb{P} a partir da convergência fraca na medida \mathbb{Q} . Entretanto, a densidade associada não é um \mathbb{P} -martingale local e a hipótese de integrabilidade deve ser verificada. Porém, a hipótese permanece verdadeira localmente quando consideramos o processo de preço descontado S .*

Na prática, os valores $S_{T_n^k}$ e os instantes de negócios não são observáveis nos tempos de parada T_n^k , de forma que as estratégias de *hedging* obtidas no resultado acima, precisam ser ajustadas para um conjunto de instantes determinísticos. As estratégias de *hedging* dinâmicas apresentadas aqui são fundamentais para o desenvolvimento do algoritmo na Seção 5.2.2, responsável pelo cálculo dos erros de *hedging* médios apresentados na Seção 5.2 para os modelos de CEV e de Heston.

Para obter estratégias de *hedging* dinâmicas baseadas em instantes determinísticos, seja $q \in \mathbb{N}$ fixo e considere o conjunto $\Pi := 0 = s_0 < \dots < s_{q-1} < s_q = T$. Para cada $j = 1, \dots, p$ e para $s_i \in \Pi$, tomamos o processo $W_{s_i, t}^{(j)} := W_{s_i+t}^{(j)} - W_{s_i}^{(j)}$, com $0 \leq t \leq T - s_i$ a partir do \mathbb{F} -movimento Browniano $W^{(j)}$. É importante observar que, a partir da definição de $W_{s_i, t}^{(j)}$, temos que $W_{s_i, 0}^{(j)} = 0$ q.c e, da propriedade forte de Markov do movimento Browniano $W^{(j)}$, segue que $W_{s_i, t}^{(j)}$ é um $(\mathcal{F}_{s_i, t}^j)_{0 \leq t \leq T - s_i}$ -movimento Browniano independente de $\mathcal{F}_{s_i}^j$ em que $\mathcal{F}_{s_i, t}^j := \mathcal{F}_{s_i+t}^j$. Basicamente, $W_{s_i, \cdot}^{(j)}$ e $\mathcal{F}_{s_i, \cdot}^j$ são, respectivamente, translações do movimento Browniano $W^{(j)}$ e da filtragem \mathcal{F}^j . A partir de agora, precisamos definir os processos obtidos na Seção 3.1 considerando a translação em relação ao instante s_i . Fixando um $k \geq 1$, definimos o conjunto

dos tempos de parada $\{T_{s_i,n}^{k,j}\}$ como sendo $T_{s_i,0}^{k,j} := 0$ e

$$T_{s_i,n}^{k,j} := \inf \left\{ t > T_{s_i,n-1}^{k,j} ; \left| W_{s_i,t}^{(j)} - W_{s_i,T_{s_i,n-1}^{k,j}}^{(j)} \right| = 2^{-k} \right\}; \quad n \geq 1 \text{ e } j = 1, \dots, p. \quad (3.66)$$

de forma que a família $\{T_{s_i,n}^{k,j}; n \geq 0\}$ é uma seqüência de \mathbb{F} -tempos de parada com incrementos $\Delta T_{s_i,n}^{k,j}$ independentes e igualmente distribuídos. Analogamente a (3.4) e (3.5) definimos os processos

$$A_{s_i,t}^{k,j} := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_{s_i,n}^{k,j} \mathbf{1}_{\{T_{s_i,n}^{k,j} \leq t\}}; \quad 0 \leq t \leq T - s_i \text{ e } k \geq 1 \quad (3.67)$$

em que

$$\eta_{s_i,n}^{k,j} := \begin{cases} 1; & \text{se } W_{s_i,T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{s_i,T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} = 2^{-k} \text{ e } T_{s_i,n}^{k,j} < \infty \\ -1; & \text{se } W_{T_{s_i,n}^{k,j}}^{(j)} - W_{s_i,T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} = -2^{-k} \text{ e } T_{s_i,n}^{k,j} < \infty \\ 0; & \text{se } T_{s_i,n}^{k,j} = \infty \end{cases} \quad (3.68)$$

para $n \geq 1$ e $j = 1, \dots, p$. Definimos a filtragem discreta $\mathcal{F}_{s_i,t}^{k,j}$ dada por

$$\mathcal{F}_{s_i,t}^{k,j} := \mathcal{H}_{s_i,n}^{k,j} \text{ q.c em } \{T_{s_i,n}^{k,j} \leq t < T_{s_i,n+1}^{k,j}\}$$

em que $\mathcal{H}_{s_i,n}^{k,j}$ é a σ -álgebra gerada por $\{T_{s_i,\ell}^{k,j}; 1 \leq \ell \leq n\}$ e $\{\eta_{s_i,\ell}^{k,j}; 1 \leq \ell \leq n\}$ e também, definimos a filtragem aumentada

$$\mathcal{G}_{s_i,t}^{k,j} := \mathcal{F}_{s_i}^j \vee \mathcal{F}_{s_i,t}^{k,j}; \quad 0 \leq t \leq T - s_i$$

para $j = 1, \dots, p$. A filtragem multidimensional é, então, definida por $\mathcal{G}_{s_i,t}^k := \mathcal{G}_{s_i,t}^{k,1} \otimes \dots \otimes \mathcal{G}_{s_i,t}^{k,p}$ para $0 \leq t \leq T - s_i$ em que $\mathcal{F}_{s_i,t} = \mathcal{F}_{s_i,t}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{s_i,t}^p$. Seja $\mathbb{G}_{s_i}^k := \{\mathcal{G}_{s_i,t}^k; 0 \leq t \leq T - s_i\}$ onde, assumimos que as condições usuais são satisfeitas. De forma análoga a definição de \mathcal{T}^k , consideramos a partição mais fina gerada pelos tempos de parada $\mathcal{T}_{s_i}^k := \{T_{s_i,n}^{k,j}; n \geq 0 \text{ } j = 1, \dots, p\}$.

Desta forma, se $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ e H é uma opção \mathcal{F}_T -mensurável tal que $H \in L^2(\mathbb{Q})$ e, recordando da definição do processo X dado por $X_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H | \mathcal{F}_t]$ para $0 \leq t \leq T$, definimos

$$\delta_{s_i}^k X_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H | \mathcal{G}_{s_i,t}^k]; \quad 0 \leq t \leq T - s_i,$$

de forma que o operador derivada $\mathbb{G}_{s_i}^k$ -opcional $\mathbb{D}_{s_i}^{k,j} X$ é dado por

$$\mathbb{D}_{s_i}^{k,j} X := \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{D}^j \delta_{s_i}^k X)_{T_{s_i,n}^{k,j}} \mathbf{1}_{[[T_{s_i,n}^{k,j}, T_{s_i,n+1}^{k,j}[[,$$

em que

$$(\mathcal{D}^j \delta_{s_i}^k X)_t := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta \delta_{s_i}^k X_{T_{s_i,n}^{k,j}}}{\Delta A_{s_i, T_{s_i,n}^{k,j}}^{k,j}} \mathbf{1}_{[[T_{s_i,n}^{k,j}, T_{s_i,n}^{k,j}]]}; \quad j = 1, \dots, p \text{ e } k \geq 1.$$

Com isso, definimos o processo $\mathbb{G}_{s_i}^k$ -previsível $\mathbf{D}_{s_i}^{k,j} X$ análogo a (3.15) por

$$\mathbf{D}_{s_i}^{k,j} X := 0 \mathbf{1}_{[[0]]} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{D}_{s_i}^{k,j} X_{T_{s_i,n}^{k,j}} \mid \mathcal{G}_{s_i, T_{s_i,n-1}^{k,j}}^k \right] \mathbf{1}_{[[T_{s_i,n-1}^{k,j}, T_{s_i,n}^{k,j}]]}; \quad j = 1, \dots, p.$$

e a estratégia multidimensional $\theta_{s_i}^{k,H} = (\theta_{s_i}^{k,H,1}, \dots, \theta_{s_i}^{k,H,d})$ é dada, componente a componente, por

$$\theta_{s_i}^{k,H,j} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}_{s_i}^{k,j} X_{T_{s_i,n}^{k,j}} \left[\sigma_{s_i, T_{s_i,n-1}^{k,j}} S_{s_i, T_{s_i,n-1}^{k,j}} \right]^{-1} \mathbf{1}_{[[T_{s_i,n-1}^{k,j}, T_{s_i,n}^{k,j}]]}; \quad s_i \in \Pi$$

em que $\sigma_{s_i, \cdot}$ é a matriz de volatilidade governada pela filtragem transladada $\{\mathcal{F}_{s_i, t}; 0 \leq t \leq T - s_i\}$ e $S_{s_i, \cdot}$ é o processo de preço descontado governado pelo movimento Browniano multidimensional transladado $W_{s_i} := (W_{s_i}^{(1)}, \dots, W_{s_i}^{(d)})$.

O Corolário 3.2 a seguir, é análogo ao Corolário 3.1 para a aproximação da estratégia de *hedging* dinâmica nos instantes determinísticos definidos em Π . Novamente, para a demonstração do corolário e de forma a facilitar a exposição, consideramos um mercado financeiro governado por um movimento Browniano bidimensional $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ e um único ativo subjacente com processo de preço descontado S . O resultado permanece verdadeiro para o caso multidimensional.

Corolário 3.2. *Seja $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ uma medida fixa e H uma opção \mathbb{Q} -quadrado integrável e \mathcal{F}_T -mensurável e considere a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe correspondente sob \mathbb{Q} dada por (3.61). Se $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in L^1(\mathbb{P})$ e*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_0^T \theta_u^H dS_u \right| \right] < \infty$$

então, para qualquer conjunto de instantes determinísticos de negócios $\Pi = \{s_i\}_{i=0}^q$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s_i \in \Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{s_i, T_{s_i, n-1}^{k,1}}^{k,H} \left(S_{s_i, T_{s_i, n}^{k,1}} - S_{s_i, T_{s_i, n-1}^{k,1}} \right) \mathbb{1}_{\{T_{s_i, n}^{k,1} \leq s_{i+1} - s_i\}} = \int_0^T \theta_t^H dS_t \quad (3.69)$$

fracamente em L^1 sob \mathbb{P} .

Demonstração. De fato, seja $\Pi = \{s_i\}_{i=0}^q$ qualquer conjunto de instantes de negócio em que q é um número inteiro positivo fixo. Para facilitar a notação, definiremos

$$R(\theta^{k,H}, \Pi, k) := \sum_{s_i \in \Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{s_i, T_{s_i, n-1}^{k,1}}^{k,H} \left(S_{s_i, T_{s_i, n}^{k,1}} - S_{s_i, T_{s_i, n-1}^{k,1}} \right) \mathbb{1}_{\{T_{s_i, n}^{k,1} \leq s_{i+1} - s_i\}} \quad (3.70)$$

para $k \geq 1$ e Π . Observamos que $\{T_{s_i, n}^{k,1} - T_{s_i, n-1}^{k,1}; n \geq 1, s_i \in \Pi\}$ é uma sequência independente e igualmente distribuída com distribuição absolutamente contínua. Como estamos avaliando o caso unidimensional, a probabilidade do conjunto $\{T_{s_i, n}^{k,1} \leq s_{i+1} - s_i\}$ é sempre estritamente positiva para qualquer Π e $k, n \geq 1$. Então, $R(\theta^{k,H}, \Pi, k)$ é um subconjunto não degenerado de variáveis aleatórias. A partir de uma mudança de variáveis na integral de Itô, podemos escrever

$$\int_0^T \theta_t^H dS_t = \int_0^T \phi_t^{H,1} dW_t^{(1)} = \sum_{s_i \in \Pi} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \phi_t^{H,1} dW_t^{(1)} = \sum_{s_i \in \Pi} \int_0^{s_{i+1} - s_i} \phi_{s_i+t}^{H,1} dW_{s_i, t}^{(1)} \quad (3.71)$$

Pela definição de $R(\theta^{k,H}, \Pi, k)$, temos que

$$R(\theta^{k,H}, \Pi, k) = \sum_{s_i \in \Pi} \int_0^{s_{i+1} - s_i} \mathbf{D}_{s_i}^{k,1} X_\ell dA_{s_i, \ell}^{k,1} \text{ sob } \mathbb{Q}.$$

Observamos que o Teorema 3.2 permanece válido para o movimento Browniano bidimensional $(W_{s_i}^{(1)}, W_{s_i}^{(2)})$ para cada $s_i \in \Pi$ com a discretização aleatória do movimento Browniano definida por $A_{s_i}^{k,1}$, como em (3.67). Além disso, usando o fato de que $\mathbb{E} \left[\left| \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right|^2 \right] < \infty$ e repetindo o argumento dado pela equação (3.65) restrita ao intervalo $[s_i, s_{i+1})$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} R(\theta^{k,H}, \Pi, k) &= \sum_{s_i \in \Pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{s_{i+1} - s_i} \mathbf{D}_{s_i}^{k,1} X_\ell dA_{s_i, \ell}^{k,1} \\ &= \int_0^T \theta_t^H dS_t, \end{aligned}$$

fracamente em $L^1(\mathbb{P})$ para cada Π , completando a demonstração. \square

Observação 3.6. *No caso bidimensional, para k suficientemente grande e considerando o conjunto de instantes determinísticos Π de forma que a norma $|\Pi|$ seja pequena, aproximamos o processo $\int_0^T \theta_u dS_t$ a partir de rebalanceamentos entre os instantes $[s_i, s_{i+1})$, resultando na soma de Riemann da forma*

$$\sum_{s_i \in \Pi} \theta_{s_i,0}^{k,H} (S_{s_i, s_{i+1}-s_i} - S_{s_i,0}) \text{ em que } \theta_{s_i,0}^{k,H} = \frac{\mathbb{E} \left[\mathbb{D}_{s_i}^{k,1} X_{T_{s_i,1}^{k,1}} | \mathcal{F}_{s_i} \right]}{\sigma_{s_i,0} S_{s_i,0}}; \quad s_i \in \Pi. \quad (3.72)$$

A partir da convergência (3.69), a aproximação (3.72) gera alguns erros de hedging devido a discretização das estratégias de hedging dinâmicas nos instantes $s_i \in \Pi$. Porém, esperamos que este erro seja pequeno. De fato, considerando instantes determinísticos igualmente espaçados, motivados da prática de realização de um número fixo de rebalanceamentos em períodos de tempos, os resultados obtidos nas estratégias de hedging quadráticas de minimização do risco local e de variância média apresentados na Seção 5.2 sugerem que a aproximação é eficiente para modelos em que consideramos ou não volatilidade estocástica. Ressaltamos que um tópico bastante interessante para novos trabalhos é o estudo de relações mais precisas entre os instantes determinísticos em Π e os tempos de parada.

A seguir, explicaremos brevemente como os resultados desta seção podem ser aplicados para metodologias quadráticas de *hedging*.

1. **Decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada:** Se consideramos a medida martingale minimal $\hat{\mathbb{P}}$, então L^H em (3.61) é um \mathbb{P} -martingale local e ortogonal ao componente martingale de S . Devido a esta ortogonalidade e o comportamento do processo de custo L^H possuir valor esperado zero, é razoável trabalhar com decomposições de Föllmer-Schweizer generalizadas sob \mathbb{P} sem conhecimento a priori da existência de estratégias de *hedging* de minimização do risco local.
2. **Minimização do risco local:** Devemos notar que se $\int \theta^H dS \in B^2(\mathbb{F})$, $L^H \in B^2(\mathbb{F})$ sob \mathbb{P} e $\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\mathbb{P})$, então θ^H é a estratégia de minimização de risco local e (3.61) é a decomposição de Föllmer-Schweizer sob \mathbb{P} .

3. **Hedging de variância média:** Se tomamos $\tilde{\mathbb{P}}$, então a estratégia de *hedging* de variância média não é completamente determinada pela decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe sob $\tilde{\mathbb{P}}$. Entretanto, o Corolário 3.2 ainda pode ser aplicado para aproximar a estratégia de *hedging* ótima calculando o processo densidade \tilde{Z} baseado nas chamadas equações fundamentais, como mostrado em Hobson (2004) [53]. Veja (2.18) e (2.19) para mais detalhes. Por exemplo, no clássico modelo de Heston, Hobson [53] fornece fórmulas analíticas para $\tilde{\zeta}$. Veja a Subseção 5.2.4 para mais detalhes do modelo de Heston e alguns resultados obtidos neste sentido.

Exemplo 3.1. *A aplicação mais interessante do nosso método de aproximação é o cálculo de estratégias de hedging para opções que dependem de toda a trajetória do processo de preço em modelos de volatilidade estocástica. Por exemplo, se $H = \Phi(\{S_t; 0 \leq t \leq T\})$, então o Corolário 3.2 e a Observação 3.6 junto com as metodologias acima descritas, nos permitem calcular as estratégias de hedging dinamicamente para a opção H a partir de (3.72). De fato, condicionar o valor esperado à informação $\{\mathcal{F}_{s_i}; s_i \in \Pi\}$ para o cálculo da estratégia de hedging $\theta_{hedg}^{k,H} := \{\theta_{s_i,0}^{k,H}; s_i \in \Pi\}$ garante o monitoramento contínuo de uma opção que depende de toda a trajetória do processo. Para cada instante de hedging s_i , devemos incorporar a história completa do preço e volatilidade até tal instante de forma a obter uma descrição precisa do hedging. Se H não é uma opção que depende de toda a trajetória, então a informação fornecida por $\{\mathcal{F}_{s_i}; s_i \in \Pi\}$, em $\theta_{hedg}^{k,H}$, só é importante no instante s_i .*

No capítulo a seguir, apresentamos o método numérico de Euler-Maruyama que é fundamental para a aproximação do processo de preço do ativo descontado S , além de alguns resultados de convergência específicos para o modelo de Heston. Na sequência, fornecemos os detalhes do algoritmo de Monte Carlo para a aproximação da estratégia de *hedging* $\theta_{hedg}^{k,H} = \{\theta_{s_i,0}^{k,H}; s_i \in \Pi\}$ e os resultados numéricos obtidos.

Método Numérico de Euler-Maruyama

Consideramos a equação diferencial estocástica que modela o preço do ativo descontado S . Neste capítulo, nosso objetivo é determinar uma aproximação numérica S^k para S de forma que, para k suficientemente grande, S^k e S estejam arbitrariamente próximos em algum sentido. Recomendamos os trabalhos de Kloeden e Platen (1992) [64], Higham (2001) [51], Jäckel e Buble (2002) [55], Glasserman (2003) [40] e Sauer (2012) [83] acerca de métodos numéricos para simulação de equações diferenciais estocásticas. O método numérico apresentado e utilizado ao longo deste capítulo, será do tipo Euler-Maruyama definido sobre a partição fina \mathcal{T}^k , construída a partir dos tempos de parada definidos em (3.1). É importante deixar claro que esta aproximação é fundamental no desenvolvimento do algoritmo apresentado na Seção 5.1 do Capítulo 5, uma vez que utilizamos esta abordagem para precificar e calcular as estratégias de *hedging* de opções que dependam ou não da trajetória do preço do ativo nos critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média apresentados na Seção 5.2 do Capítulo 5.

Inicialmente, apresentamos a ideia básica do método de Euler-Maruyama para, em seguida, desenvolver alguns resultados relacionados à convergência deste método. De fato, apresentaremos dois casos. O primeiro, mais simples, em que utilizamos a hipótese de que os coeficientes de *drift* e difusão da equação do preço do ativo satisfazem a condição global de Lipschitz será apresentado na Seção 4.2. Porém, na prática, é bastante fácil encontrar modelos em que os coeficientes não satisfazem esta condição. Em particular, podemos citar o modelo de elasticidade constante da variância (CEV), o modelo de volatilidade estocástica de Heston e o modelo $\frac{3}{2}$, de forma que os resultados apresentados na Seção 4.2 não são suficientes para que o método de Euler-Maruyama garanta uma boa aproximação quando trabalhamos com estes modelos.

Na Seção 4.3, desenvolvemos um estudo da convergência do método de Euler-Maruyama para o modelo de volatilidade estocástica de Heston, já que este é o principal modelo de volatilidade para o qual testamos o nosso método e obtivemos resultados numéricos expressivos para os cálculos das estratégias de *hedging* utilizando os critérios quadráticos de minimização do risco local e variância média.

4.1 O método

O método de Euler-Maruyama, apresentado por Maruyama (1955) [74] é o método computacional efetivo mais simples para aproximação de equações diferenciais estocásticas. Este método baseia-se nas mesmas ideias do método de Euler clássico utilizado para soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias. Considere a equação diferencial estocástica que modela o preço descontado do ativo

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0 \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

em que $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d) \in \mathbb{R}^d$, W é um movimento Browniano d -dimensional e $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ são funções suaves. Assumimos que a condição inicial $s_0 \in \mathbb{R}^d$ desta equação é constante.

O método de Euler-Maruyama clássico leva em consideração uma partição \mathcal{P} do intervalo $[0, T]$ dada por

$$\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \quad (4.2)$$

de modo que a aproximação de Euler-Maruyama S^* para a equação S definida em (4.1) é calculada por

$$S_{t_m}^* := S_{t_{m-1}}^* + \mu(S_{t_{m-1}}^*)(t_m - t_{m-1}) + \sigma(S_{t_{m-1}}^*)(W_{t_m} - W_{t_{m-1}}); \quad S_{t_0}^* = s_0. \quad (4.3)$$

A literatura acerca da utilização do método de Euler-Maruyama é extensa. Muitos autores têm estudado sua eficiência em aplicações diversas e, neste contexto, sua convergência. Gyöngy (1998) [46] mostrou que o método de Euler converge quase certamente se o *drift* satisfaz uma condição de monotonicidade e se o coeficiente de difusão satisfaz a condição de Lipschitz e é contínuo. Kloeden e Neuenkirch (2012) [63] apresentaram alguns resultados relacionados à taxa de convergência do método de Euler-Maruyama baseados em modelos em que os coeficientes não são globalmente Lipschitz e fornecem um resumo dos critérios para obtenção de resultados para convergências fracas e fortes. Küchler e Platen (2000) [70] demonstraram a convergência forte do método para equações diferenciais estocástica com tempo de atraso.

Como queremos trabalhar com os tempos de parada definidos em (3.1), o método de Euler-Maruyama que utilizaremos será baseado na partição aleatória \mathcal{T}^k gerada por todos os $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada. Desta forma, fixado um nível $k \in \mathbb{N}$ para o movimento Browniano, o método de Euler-Maruyama aplicado a (4.1) calcula as aproximações $S^k := (S^{k,1}, \dots, S^{k,d})$ para $S = (S^1, \dots, S^d)$, utilizando como condição inicial $S_0^k = s_0$, a partir da equação

$$\begin{aligned} S_{T_m^k}^{k,j} &:= S_{T_{m-1}^k}^{k,j} + \mu_j(S_{T_{m-1}^k}^k) \Delta T_m^k + \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell}(S_{T_{m-1}^k}^k) \Delta A_{T_m^k}^{k,\ell} \\ &= s_0^j + \sum_{i=1}^m \mu_j(S_{T_{i-1}^k}^k) \Delta T_i^k + \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell}(S_{T_{i-1}^k}^k) \Delta A_{T_i^k}^{k,\ell} \end{aligned} \quad (4.4)$$

para todo $T_m^k \in \mathcal{T}^k$. De maneira simples, estendemos a aproximação de Euler-Maruyama para todo $t \in [0, T]$ da forma

$$S_t^{k,j} := \sum_{m=1}^{\infty} S_{T_{m-1}^k}^{k,j} \mathbb{1}_{\{[T_{m-1}^k, T_m^k[\}}, \quad 0 \leq t \leq T \text{ e } j = 1, \dots, d. \quad (4.5)$$

Antes de iniciarmos a nossa análise de convergência, precisamos de algumas notações e propriedades acerca dos \mathbb{F}^k -tempos de parada T_n^k . Para qualquer $\omega \in \Omega$, seja $T_n^k \in \mathcal{T}^k$. Considere o par $(p_n, q_n) \in \{1, \dots, p\} \times \mathbb{N}$ tal que

$$T_{q_n}^{k,p_n} := \inf_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ \ell \geq 1}} \left\{ T_\ell^{k,j}; T_n^k = T_\ell^{k,j} \right\} \quad (4.6)$$

ou seja, com esta notação, dado $T_n^k \in \mathcal{T}^k$, p_n representa a partição original $j \in \{1, \dots, p\}$ que contém o tempo de parada T_n^k e q_n representa a posição deste tempo na j -ésima partição correspondente. Além disso, recordamos a definição de $\tau_n^{k,j} := \inf_{\ell \geq 1} \{T_\ell^k; T_\ell^k < T_n^{k,j}\}$, isto é, $\tau_n^{k,j}$ é o maior \mathbb{F}^k -tempo de parada menor do que $T_n^{k,j}$. De forma análoga, consideramos a sequência de incrementos $\Delta T_n^k := T_n^k - T_{n-1}^k$ e $\Delta A_{T_n^k}^{k,j} := A_{T_n^k}^{k,j} - A_{T_{n-1}^k}^{k,j}$ enquanto $\Delta A_{T_n^k}^{k,j} := A_{T_n^k}^{k,j} - A_{T_{n-1}^k}^{k,j}$. O Lema a seguir nos fornece alguns resultados acerca dos momentos dos incrementos ΔT_n^k e $\Delta A_{T_n^k}^{k,j}$.

Lema 4.1. *Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, p$ e $n \geq 1$ temos, para todo $T_n^k \in \mathcal{T}^k$ que*

$$(i) \quad \mathbb{E}(\Delta T_n^k) \leq 2^{-2k}.$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}[(\Delta T_n^k)^2] \leq \frac{5}{3} 2^{-4k}.$$

$$(iii) \quad \mathbb{E}\left(\Delta A_{T_n^k}^{k,j}\right) = 0.$$

Demonstração. (i) De fato, para todo $n \geq 1$, temos que

$$\Delta T_n^k = T_n^k - T_{n-1}^k = T_{q_n}^{k,p_n} - \tau_{q_n}^{k,p_n} \leq T_{q_n}^{k,p_n} - T_{q_n-1}^{k,p_n} = \Delta T_{q_n}^{k,p_n}.$$

Mas, do Lema (3.1), concluímos que

$$\mathbb{E}(\Delta T_n^k) \leq \mathbb{E}(\Delta T_{q_n}^{k,p_n}) = 2^{-2k}.$$

(ii) Este item é análogo ao anterior e será omitido.

(iii) Da definição dos processo $A_t^{k,j}$ com $j = 1, \dots, p$, temos que, para todo $T_n^{k,j} \in \mathcal{T}^{k,j}$, $A_{T_n^{k,j}}^{k,j} = W_{T_n^{k,j}}^{(j)}$. Portanto, $\Delta A_{T_n^{k,j}}^{k,j} = A_{T_n^{k,j}}^{k,j} - A_{T_{n-1}^{k,j}}^{k,j} = W_{T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)}$. Então

$$\mathbb{E} \left(\Delta A_{T_n^{k,j}}^{k,j} \right) = \mathbb{E} \left(W_{T_n^{k,j}}^{(j)} - W_{T_{n-1}^{k,j}}^{(j)} \right) = 0.$$

Seja agora, $j \in \{1, \dots, p\}$ fixo. Por (4.6),

$$\Delta A_{T_n^k}^{k,j} = A_{T_n^k}^{k,j} - A_{T_{n-1}^k}^{k,j} = A_{T_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j} - A_{\tau_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j}.$$

Se $p_n = j$, temos que $\tau_{q_n}^{k,p_n} \geq T_{q_n-1}^{k,p_n}$ e, é claro que

$$\Delta A_{T_n^k}^{k,j} = A_{T_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j} - A_{\tau_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j} = A_{T_{q_n}^{k,j}}^{k,j} - A_{T_{q_n-1}^{k,j}}^{k,j} = \Delta A_{T_{q_n}^{k,j}}^{k,j}. \quad (4.7)$$

Caso, contrário, se $p_n \neq j$, como $A_t^{k,j}$ somente apresenta saltos nos $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada, temos que $A_{T_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j} = A_{\tau_{q_n}^{k,p_n}}^{k,j}$ e

$$\Delta A_{T_n^k}^{k,j} = 0. \quad (4.8)$$

De (4.7) e (4.8) concluímos que

$$\mathbb{E} \left(\Delta A_{T_n^k}^{k,j} \right) = 0.$$

□

Outro importante resultado, que será utilizado ao longo das convergências estudadas abaixo, está relacionado com a obtenção de um limitante superior para o valor esperado do produto entre ΔT_{m+1}^k e S_m^k , com $m \geq 1$.

Lema 4.2. *Considere a partição \mathcal{T}^k e a aproximação de Euler-Maruyama dada pelas equações (4.4) e (4.5). Temos então, que*

$$\mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \Delta T_{m+1}^k \right) \leq 2^{-2k} \mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \right) \text{ para todo } T_m^k \in \mathcal{T}^k.$$

Em particular, no caso unidimensional, a igualdade se verifica.

Demonstração. Inicialmente, observamos que, no caso unidimensional, temos que $\mathcal{T}^k = \mathcal{T}^{k,1}$ e então $\Delta T_{m+1}^k = \Delta T_{m+1}^{k,1} = T_{m+1}^{k,1} - T_m^{k,1}$. Neste caso, como o incremento $\Delta T_{m+1}^{k,1}$ é independente de $S_{T_m^k}^k = S_{T_m^{k,1}}^{k,1}$, temos que

$$\mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \Delta T_{m+1}^k \right) = \mathbb{E} \left(S_{T_m^{k,1}}^{k,1} \Delta T_{m+1}^{k,1} \right) = \mathbb{E} \left(S_{T_m^{k,1}}^{k,1} \right) \mathbb{E} \left(\Delta T_{m+1}^{k,1} \right) \stackrel{(3.1)}{=} 2^{-2k} \mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \right).$$

Considere agora o caso multidimensional geral. Utilizando a notação introduzida em (4.6), temos que

$$\Delta T_{m+1}^k = T_{m+1}^k - T_m^k \leq T_{q_{m+1}}^{k,p_m} - T_{q_m}^{k,p_m} = \Delta T_{q_{m+1}}^{k,p_m}$$

com $p_m \in \{1, \dots, p\}$ e $q_n \in \mathbb{N}$. Da independência entre $\Delta T_{q_{m+1}}^{k,p_m}$ e $S_{T_{q_m}^{k,p_m}}^k = S_{T_m^k}^k$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \Delta T_{m+1}^k \right) &\leq \mathbb{E} \left(S_{T_{q_m}^{k,p_m}}^k \Delta T_{q_{m+1}}^{k,p_m} \right) = \mathbb{E} \left(S_{T_{q_m}^{k,p_m}}^k \right) \mathbb{E} \left(\Delta T_{q_{m+1}}^{k,p_m} \right) \\ &= 2^{-2k} \mathbb{E} \left(S_{T_{q_m}^{k,p_m}}^k \right) = 2^{-2k} \mathbb{E} \left(S_{T_m^k}^k \right) \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

O Lema 4.2 é fundamental já que, com frequência, precisaremos calcular o valor esperado do produto entre ΔT_{m+1}^k e $S_{T_m^k}^k$. Porém, como não temos garantias de que estas variáveis aleatórias são independentes, não podemos, simplesmente, substituir o valor esperado do produto pelo produto dos valores esperados. É interessante observar que o limitante superior é encontrado a partir do fato das variáveis $\Delta T_{q_{m+1}}^{k,p_m}$ e $S_{T_m^k}^k$ serem independentes. O resultado pode ser estendido quando consideramos funções contínuas de ΔT_{m+1}^k e $S_{T_m^k}^k$. Ressaltamos que, na Seção 4.3, onde estaremos interessados em obter resultados de convergências do método de Euler-Maruyama

para o modelo de Heston, utilizaremos um resultado análogo para o produto entre ΔT_{m+1}^k e $V_{T_m}^k$, em que $V_{T_m}^k$ será a aproximação para a equação da volatilidade V_t no modelo de Heston.

A seguir, apresentamos alguns resultados relacionados à convergência da aproximação numérica S^k para S conforme k torna-se suficientemente grande. Na Seção 4.2 consideramos modelos simples em que a condição de Lipschitz é satisfeita para as funções μ e σ e na Seção 4.3 apresentamos a convergência do método de Euler-Maruyama para o modelo de Heston.

4.2 Convergência no caso Lipschitz

Considere o método numérico de Euler-Maruyama descrito acima nas equações (4.4) e (4.5). Inicialmente, consideraremos o caso simples em que as funções μ e σ satisfazem a condição de Lipschitz. Desta forma, considere as hipóteses 4.1 e 4.2 dadas a seguir.

Hipótese 4.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\mu_j(x) - \mu_j(y)\|^2 \vee \|\sigma_{j\ell}(x) - \sigma_{j\ell}(y)\|^2 \leq C\|x - y\|^2 \quad (4.9)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, d$ e $\ell = 1, \dots, n$. Como consequência desta hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \|\mu_j(x)\|^2 &= \|\mu_j(x) - \mu_j(0) + \mu_j(0)\|^2 \leq 2(\|\mu_j(x) - \mu_j(0)\|^2 + \|\mu_j(0)\|^2) \\ &\leq 2(C\|x\|^2 + \|\mu_j(0)\|^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

e, de forma análoga,

$$\|\sigma_{j\ell}(x)\|^2 \leq 2(C\|x\|^2 + \|\sigma_{j\ell}(0)\|^2). \quad (4.11)$$

Hipótese 4.2. *Existe um $p \geq 2$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^k\|^p \right] < \infty \text{ e } \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t\|^p \right] < \infty$$

para todo $k \geq 1$.

Em nossa análise de convergência, é conveniente definir a seguinte aproximação contínua no tempo da forma

$$\bar{S}_t^{k,j} := s_0^j + \int_0^t \mu_j(S_s^k) ds + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{j\ell}(S_s^k) dW_s^{(\ell)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

para $j = 1, \dots, d$. O Teorema a seguir garante que, sob as hipóteses 4.1 e 4.2, conforme k torna-se suficientemente grande, $S^{k,j}$ converge fortemente para S^j , para $j = 1, \dots, d$.

Teorema 4.1. *Sob as hipóteses 4.1 e 4.2 a equação (4.5) satisfaz*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^{k,j} - S_t^j\|^2 \right] = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Demonstração. De fato, aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^{k,j} - S_t^j\|^2 \leq 2 \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^{k,j} - \bar{S}_t^{k,j}\|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \|\bar{S}_t^{k,j} - S_t^j\|^2 \right], \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

Seja $\omega \in \Omega$ qualquer e $t \in [0, T]$ fixo. Então existe uma variável aleatória $m : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $T_m^k(\omega) \leq t < T_{m+1}^k(\omega)$. Então

$$\begin{aligned} S_t^{k,j}(\omega) - \bar{S}_t^{k,j}(\omega) &= - \int_{T_m^k}^t \mu_j(S_u^k) du - \sum_{\ell=1}^d \int_{T_m^k}^t \sigma_{j\ell}(S_u^k) dW_u^{(\ell)} \\ &= -\mu_j(S_{T_m^k}^k)(t - T_m^k) - \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell}(S_{T_m^k}^k)(W_t^{(\ell)} - W_{T_m^k}^{(\ell)}). \end{aligned}$$

Como consequência da hipótese 4.1 e das equações (4.10) e (4.11), temos que

$$\begin{aligned} \|S_t^{k,j} - \bar{S}_t^{k,j}\|^2 &\leq 2 \left[\left\| \mu_j(S_{T_m^k}^k)(t - T_m^k) \right\|^2 + \left\| \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell}(S_{T_m^k}^k) (W_t^{(\ell)} - W_{T_m^k}^{(\ell)}) \right\|^2 \right] \\ &\leq 2 \left[\left\| \mu_j(S_{T_m^k}^k) \right\|^2 (t - T_m^k)^2 + d \sum_{\ell=1}^d \left\| \sigma_{j\ell}(S_{T_m^k}^k) \right\|^2 (W_t^{(\ell)} - W_{T_m^k}^{(\ell)})^2 \right] \\ &\leq 2 \left[\left\| \mu_j(S_{T_m^k}^k) \right\|^2 (\Delta T_{m+1}^k)^2 + d 2^{-2k} \sum_{\ell=1}^d \left\| \sigma_{j\ell}(S_{T_m^k}^k) \right\|^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \left[\left(C \|S_{T_m^k}^k\|^2 + \|\mu_j(0)\|^2 \right) (\Delta T_{m+1}^k)^2 + d 2^{-2k} \sum_{\ell=1}^d \left(C \|S_{T_m^k}^k\|^2 + \|\sigma_{j\ell}(0)\|^2 \right) \right] \\
&\leq 4 \left[\left(C \|S_{T_m^k}^k\|^2 + \|\mu_j(0)\|^2 \right) (\Delta T_{m+1}^k)^2 \right. \\
&\quad \left. + d^2 2^{-2k} \left(C \sup_{T_m^k \in \mathcal{T}^k} \|S_{T_m^k}^k\|^2 + \max_{1 \leq \ell \leq n} \|\sigma_{j\ell}(0)\|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

e então, utilizando a hipótese 4.2, o Lema (3.1) e o Lema 4.2, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^{k,j} - \bar{S}_t^{k,j}\|^2 \right] &\leq 4 \left[C \mathbb{E} \left(\sup_{T_m^k \in \mathcal{T}^k} \|S_{T_m^k}^k\|^2 \right) \mathbb{E} \left[(\Delta T_{m+1}^k)^2 \right] + \|\mu_j(0)\|^2 \mathbb{E} \left[(\Delta T_{m+1}^k)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + d^2 2^{-2k} \left(C \mathbb{E} \left[\sup_{T_m^k \in \mathcal{T}^k} \|S_{T_m^k}^k\|^2 \right] + \max_{1 \leq \ell \leq n} \|\sigma_{j\ell}(0)\|^2 \right) \right] \\
&\leq 4 \left[C \frac{5}{3} 2^{-4k} \mathbb{E} \left[\sup_{T_m^k \in \mathcal{T}^k} \|S_{T_m^k}^k\|^2 \right] + \frac{5}{3} 2^{-4k} \|\mu_j(0)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + d^2 2^{-2k} \left(C \mathbb{E} \left[\sup_{T_m^k \in \mathcal{T}^k} \|S_{T_m^k}^k\|^2 \right] + \max_{1 \leq \ell \leq n} \|\sigma_{j\ell}(0)\|^2 \right) \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

que converge para zero quando $k \rightarrow \infty$. A partir da convergência acima também temos que

$$\mathcal{C}^k = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|S_t^k - \bar{S}_t^k\|^2 dt \right] \leq T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|S_t^k - \bar{S}_t^k\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Considere agora o segundo fator da desigualdade (4.12). A partir da desigualdade de Young e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que

$$\begin{aligned}
\|\bar{S}_t^{k,j} - S_t^j\|^2 &\leq 2 \left[\left\| \int_0^t \mu_j(S_u^k) du - \int_0^t \mu_j(S_u) du \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{j\ell}(S_u^k) dW_u^{(\ell)} - \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{j\ell}(S_u) dW_u^{(\ell)} \right\|^2 \right] \\
&\leq 2 \left[\left\| \int_0^t (\mu_j(S_u^k) - \mu_j(S_u)) du \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \sum_{\ell=1}^d \int_0^t (\sigma_{j\ell}(S_u^k) - \sigma_{j\ell}(S_u)) dW_u^{(\ell)} \right\|^2 \right] \\
&\leq 2 \left[T \left(\int_0^t \|\mu_j(S_u^k) - \mu_j(S_u)\|^2 du \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ d \sum_{\ell=1}^d \left\| \int_0^t (\sigma_{j\ell}(S_u^k) - \sigma_{j\ell}(S_u)) dW_u^{(\ell)} \right\|^2 \Bigg]$$

e então, utilizando a Hipótese 4.1 e a desigualdade martingale de Doob, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \bar{S}_t^{k,j} - S_t^j \right\|^2 \right] &\leq 2 \left[T \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \mu_j(S_u^k) - \mu_j(S_u) \right\|^2 du \right] \right. \\ &\quad \left. + d \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^T (\sigma_{j\ell}(S_u^k) - \sigma_{j\ell}(S_u)) dW_u^{(\ell)} \right\|^2 \right] \right] \\ &\leq 2 \left[T \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \mu_j(S_u^k) - \mu_j(S_u) \right\|^2 du \right] \right. \\ &\quad \left. + 4d \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \sigma_{j\ell}(S_u^k) - \sigma_{j\ell}(S_u) \right\|^2 du \right] \right] \\ &\leq 2C(4d^2 + T) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| S_u^k - S_u \right\|^2 du \right] \\ &= 2C(4d^2 + T) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| S_u^k - \bar{S}_u^k + \bar{S}_u^k - S_u \right\|^2 du \right] \\ &\leq 4C(4d^2 + T) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| S_u^k - \bar{S}_u^k \right\|^2 du \right] \\ &\quad + 4C(4d^2 + T) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \bar{S}_u^k - S_u \right\|^2 du \right] \\ &\leq 4CC^k(4d^2 + T) + 4C(4n^2 + T) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \bar{S}_u^k - S_u \right\|^2 ds \right] \\ &\leq LC^k + \int_0^T L \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq u} \left\| \bar{S}_t^k - S_t \right\|^2 du \right] \end{aligned}$$

em que $L = 4C(4d^2 + T)$. Então, utilizando a desigualdade de Gronwall, temos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \bar{S}_t^{k,j} - S_t^j \right\|^2 \right] \leq LC^k e^{LT} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Juntando os resultados obtidos nas desigualdades (4.13) e (4.15) e utilizando (4.12), obtemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| S_t^{k,j} - S_t^j \right\|^2 \right] = 0,$$

demonstrando o teorema. □

Portanto, quando as funções μ e σ satisfazem a condição global de Lipschitz juntamente com a condição 4.2 temos garantias da convergência do método numérico baseado na aproximação de Euler-Maruyama definida nas equações (4.4) e (4.5). É claro que, se estamos trabalhando com o modelo de Black e Scholes, em que as funções μ e σ são constantes, podemos aplicar o método, porém neste caso, podemos utilizar o método exato, obtido pelo Lema de Itô, dado por

$$S_{T_m^k}^{k,j} = s_0 \exp \left[\mu T_m^k - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell}^2 T_m^k + \sum_{\ell=1}^d \sigma_{j\ell} A_{T_m^k}^{k,j} \right] \quad (4.16)$$

para $j = 1, \dots, d$ e todo $T_m^k \in \mathcal{T}^k$.

4.3 Convergência para o modelo de Heston

Nesta seção, avaliaremos a convergência numérica do método de aproximação de Euler-Maruyama para o clássico modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) [50]. Utilizaremos a parametrização fornecida em Hobson (2004) [53], dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas.

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu V_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}); & S_0 = s_0 \\ dV_t = 2\lambda(\theta - V_t)dt + 2\sigma\sqrt{V_t}dZ_t; & V_0 = v_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

em que μ é a taxa média de retorno e V_t é o processo relacionado a volatilidade. Além disso, λ é a taxa de reversão a média, θ é a variância do preço médio de longo prazo, isto é, conforme t tende ao infinito, o valor esperado de V_t tende a θ e σ é a volatilidade da volatilidade, que determina a variabilidade de V_t . Também destacamos que o processo Z_t é dado por

$$Z_t = \rho W_t^{(1)} + \bar{\rho} W_t^{(2)}$$

com $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$ em que $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ são dois \mathbb{P} -movimentos Brownianos independentes. Neste caso, ρ é a correlação entre os movimentos Brownianos $W^{(1)}$ e Z . No caso geral, é necessário

considerar a condição de Feller

$$\lambda\theta > \sigma^2 \quad (4.18)$$

para que o processo V_t seja estritamente positivo e, desta forma, tenhamos um processo de Markov bem definido. A equação que modela a volatilidade V_t é conhecida como modelo de Cox-Ingersoll-Ross e foi proposta por Cox *et. al.* (1985) [22]. Também assumimos que s_0 e v_0 , as condições iniciais de S e V , respectivamente, são constantes positivas.

A volatilidade V_t apresenta primeiro e segundo momento dados, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(V_t) = \theta + e^{-2\lambda t}(v_0 - \theta) \quad (4.19)$$

e

$$\mathbb{E}(V_t^2) = \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{\lambda} + \left(2\theta + \frac{2\sigma^2}{\lambda}\right)(v_0 - \theta)e^{-2\lambda t} + \left[v_0^2 + \left(\theta + \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)(\theta - 2v_0)\right]2^{-4\lambda t}. \quad (4.20)$$

No final desta seção, utilizaremos estes momentos para a realização de um estudo de simulação de forma a verificar a eficiência do método numérico.

Inicialmente, consideramos a aproximação de Euler-Maruyama para o processo V_t em (4.17) dada por

$$V_{T_m^k}^k := V_{T_{m-1}^k}^k + 2\lambda(\theta - V_{T_{m-1}^k}^k)\Delta T_m^k + 2\sigma\sqrt{|V_{T_{m-1}^k}^k|}\left(\rho\Delta A_{T_m^k}^{k,1} + \bar{\rho}\Delta A_{T_m^k}^{k,2}\right) \quad (4.21)$$

para todo $T_m^k \in \mathcal{T}^k$, em que \mathcal{T}^k é a partição mais fina do intervalo $[0, T]$ gerada a partir dos tempos de parada definidos em (3.1) para $j = 1, 2$, já que agora, o sistema de equações é governado por somente dois movimentos Brownianos. Observamos também, que substituímos a equação da volatilidade V_t dada em (4.17) por

$$dV_t = 2\lambda(\theta - V_t)dt + 2\sigma\sqrt{|V_t|}(\rho dW_t^{(1)} + \bar{\rho}dW_t^{(2)}) \quad (4.22)$$

já que a equação (4.21) poderia tornar-se inconsistente caso $V_{T_m}^k$ assumisse valores negativos já que em cada etapa precisamos calcular sua raiz quadrada.

Ressaltamos que a discretização através de um método do tipo Euler-Maruyama para o processo de Cox-Ingersoll-Ross governado pela volatilidade V tem sido extensamente estudada na literatura. Entretanto, a maioria dos trabalhos se baseia em uma partição determinística. Entre estes trabalhos, citamos Andersen *et al.* (2002) [3], Andersen e Lund (1997) [4], Bacinello (2000) [5], Barone-Adesi e Sorwar (2002) [6], Broadie e Kaya (2006) [14] e Gkamas (2001) [39]. O estudo de convergência deste tipo de equação diferencial estocástica, obtendo ou não alguma ordem de convergência, tem sido estabelecido em diversos artigos, como por exemplo, em Alfonsi (2005) [2], Bossy e Diop (2007) [12], Deelstra e Delbaen (1998) [24] e Higham e Mao (2005) [52]. em particular, Higham e Mao (2005) [52] apresentam um estudo onde mostram que a utilização do método de Euler-Maruyama baseado em uma partição determinística fornece aproximações para o primeiro e o segundo momentos do processo resultante da equação que define o modelo de Cox-Ingersoll-Ross e ainda mostram a convergência forte de tal aproximação. Além disso, utilizam dos resultados deste modelo para obter uma aproximação para o processo de preços descontados S . Em Alfonsi (2005) [2] podemos encontrar um ambiente de trabalho para analisar aproximações do processo de Cox-Ingersoll-Ross juntamente com um extenso estudo de simulação. No entanto, somente em Bossy e Diop (2007) [12], podemos encontrar uma ordem de convergência não logarítmica.

Uma vez calculada as aproximações $V_{T_m}^k$ podemos aproximar a equação do preço do ativo descontado, que é dada por

$$S_{T_m}^k := S_{T_{m-1}}^k + \mu V_{T_{m-1}}^k S_{T_{m-1}}^k \Delta T_m^k + S_{T_{m-1}}^k \sqrt{|V_{T_{m-1}}^k|} \Delta A_{T_m}^{k,1} \quad (4.23)$$

em que consideramos o mesmo tipo de correção utilizada em (4.22). Desta forma, a partir das equações (4.21) e (4.23), temos definidas as aproximações de Euler-Maruyama para todo T_m^k . Estendemos as aproximações para qualquer valor $t \in [0, T]$ de forma análoga à definida em

(4.5), isto é,

$$S_t^k = \sum_{m=1}^{\infty} S_{T_{m-1}^k}^k \mathbb{1}_{\{[T_n^k, T_{n+1}^k]\}} \quad (4.24)$$

$$V_t^k = \sum_{m=1}^{\infty} V_{T_{m-1}^k}^k \mathbb{1}_{\{[T_n^k, T_{n+1}^k]\}} \quad (4.25)$$

e as aproximações contínuas

$$\bar{S}_t^k := s_0 + \mu \int_0^t V_u^k S_u^k du + \int_0^t S_u^k \sqrt{|V_u^k|} dW_u^{(1)} \quad (4.26)$$

$$\bar{V}_t^k := v_0 + 2\lambda \int_0^t (\theta - V_u^k) du + 2\sigma \int_0^t \sqrt{|V_u^k|} dZ_u \quad (4.27)$$

e, desta forma, é fácil verificar que \bar{S}_t^k e S_t^k coincidem, assim como \bar{V}_t^k e V_t^k , nos tempos $T_m^k \in \mathcal{T}^k$.

Observação 4.1. *Observamos que a condição de Feller é importante do ponto de vista físico, já que V_t modela a volatilidade de um ativo e, neste caso, seria inconsistente considerar uma volatilidade negativa. Também é importante perceber que a condição de Feller garante que o processo V_t é estritamente positivo, porém não podemos garantir esta propriedade para o processo V_t^k .*

Para o estudo de convergência, consideramos, de forma análoga à Seção 4.2, a seguinte hipótese acerca da aproximação de Euler-Maruyama V_t^k do processo de volatilidade V_t .

Hipótese 4.3. *Considere V_t^k dado por (4.25). Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um $E \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t^k|^2 \right] \leq E$$

A partir da Hipótese 4.3, podemos mostrar o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Seja $0 \leq t \leq T$ e considere V_t^k e \bar{V}_t^k dadas pelas equações (4.25) e (4.27), respectivamente. Então,*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{V}_t^k - V_t^k|^2 \right] \leq 8\lambda^2 \theta^2 \frac{5}{3} 2^{-4k} + 16\lambda^2 \theta \frac{5}{3} \sqrt{E} 2^{-4k} + 8\lambda^2 \frac{5}{3} E 2^{-4k} + 8\sigma^2 \sqrt{E} 2^{-2k} = D_k \quad (4.28)$$

Demonstração. De fato, para qualquer $\omega \in \Omega$ e um $0 \leq t \leq T$ fixo, existe uma variável aleatória $m : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $T_m^k(\omega) \leq t < T_{m+1}^k(\omega)$. Das equações (4.25) e (4.27) temos que

$$\bar{V}_t^k(\omega) - V_t^k(\omega) = 2\lambda(\theta - V_{T_m^k}^k)(t - T_m^k) + 2\sigma\sqrt{|V_{T_m^k}^k|}(Z_t - Z_{T_m^k}).$$

Então, elevando ao quadrado ambos os lados da equação e utilizando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} |\bar{V}_t^k - V_t^k|^2 &\leq 8\lambda^2\theta^2(t - T_m^k)^2 + 16\lambda^2\theta|V_{T_m^k}^k|(t - T_m^k)^2 \\ &\quad + 8\lambda^2|V_{T_m^k}^k|^2(t - T_m^k)^2 + 8\sigma^2|V_{T_m^k}^k|(Z_t - Z_{T_m^k})^2. \end{aligned}$$

Agora, tomando o valor esperado, utilizando a Hipótese 4.3, o Lema 4.1, resultados análogos aos apresentados no Lema 4.2 e o fato de que

$$\mathbb{E} \left[|V_{T_m^k}^k| \right] \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[|V_{T_m^k}^k|^2 \right]} \leq \sqrt{E}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{V}_t^k - V_t^k|^2 \right] &\leq 8\lambda^2\theta^2 \frac{5}{3} 2^{-4k} + 16\lambda^2\theta \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_{T_m^k}^k| \right] \frac{5}{3} 2^{-4k} \\ &\quad + 8\lambda^2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_{T_m^k}^k|^2 \right] \frac{5}{3} 2^{-4k} + 8\sigma^2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_{T_m^k}^k| \right] 2^{-2k} \\ &\leq 8\lambda^2\theta^2 \frac{5}{3} 2^{-4k} + 16\lambda^2\theta \frac{5}{3} \sqrt{E} 2^{-4k} + 8\lambda^2 E \frac{5}{3} 2^{-4k} + 8\sigma^2 \sqrt{E} 2^{-2k} \end{aligned}$$

completando a demonstração. □

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Lema 4.3.

Corolário 4.1. *Considere V_t^k e \bar{V}_t^k as aproximações dadas pelas equações (4.25) e (4.27), respectivamente. Então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{V}_t^k - V_t^k|^2 \right] = 0$$

Com isto, temos que a aproximação contínua converge para o método numérico de Euler-Maruyama V_t^k . A seguir, temos o seguinte resultado.

Lema 4.4. *Para qualquer $j \geq 1$, temos que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} (|V_t - \bar{V}_t^k|) \leq e^{2\lambda T} \left[e^{-j(j+1)/2} + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2}{je^{-j(j+1)/2}} \sqrt{D_k} + 2\lambda T \sqrt{D_k} \right]$$

em que D_k é dado no Lema 4.3.

Demonstração. A demonstração segue as ideias apresentadas em Higham e Mao (2005) [52]. É possível construir uma sequência de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ funções suaves $\psi_j(x)$ com primeira derivada uniformemente limitada para aproximar a função $|x|$. Seja $a_0 = 1$ e $a_j = e^{-j(j+1)/2}$ para $j \geq 1$, de forma que $\int_{a_j}^{a_{j-1}} \frac{du}{u} = j$. Para cada $j \geq 1$, existe uma função contínua $\psi_j(u)$ com suporte em (a_j, a_{j-1}) tal que

$$0 \leq \psi_j(u) \leq \frac{2}{ju} \text{ para } a_j < u < a_{j-1}$$

e

$$\int_{a_j}^{a_{j-1}} \psi_j(u) du = 1.$$

Definimos agora ϕ_j dada por

$$\phi_j(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_j(u) du.$$

Assim,

$$\phi_j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \phi_j(0) = 0 \text{ e } |\phi_j'(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad (4.29)$$

$$|\phi_j''(x)| \begin{cases} \leq \frac{2}{j|x|}, & \text{para } a_j < |x| < a_{j-1} \\ = 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.30)$$

e, além disso,

$$|x| - a_{j-1} \leq \phi_j(x) \leq |x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

Observe que

$$V_t - \bar{V}_t^k = -2\lambda \int_0^t (V_u - V_u^k) du + 2\sigma \int_0^t \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right) dZ_u.$$

Da fórmula de Itô, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi_j (V_t - \bar{V}_t^k)] &= -2\lambda \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j'(V_u - \bar{V}_u^k) (V_u - V_u^k) du \right] \\ &\quad + 2\sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j''(V_u - \bar{V}_u^k) \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right)^2 du \right] \\ &\leq 2\lambda \int_0^t \mathbb{E}(|V_u - V_u^k|) du + 2\sigma^2 I(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que, utilizando (4.29) e (4.30), $I(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j''(V_u - \bar{V}_u^k) \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right)^2 du \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j''(V_u - \bar{V}_u^k) |V_u - V_u^k| du \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j''(V_u - \bar{V}_u^k) |V_u - \bar{V}_u^k| du \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_j''(V_u - \bar{V}_u^k) |\bar{V}_u^k - V_u^k| du \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{2}{j} \mathbb{1}_{\{a_j < |V_u - \bar{V}_u^k| < a_{j-1}\}}(u) du \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{2}{ja_j} |\bar{V}_u^k - V_u^k| du \right] \\ &\leq \frac{2T}{j} + \int_0^T \frac{2}{ja_j} \mathbb{E}(|\bar{V}_u^k - V_u^k|) du \leq \frac{2T}{j} + \frac{2T}{ja_j} \sqrt{D_k}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando a desigualdade (4.33) em (4.32), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi_j(V_t - \bar{V}_t^k)) &\leq 2\lambda \int_0^t \mathbb{E}(|V_u - V_u^k|) du + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2}{ja_j} \sqrt{D_k} \\ &\leq 2\lambda \left[\int_0^t \mathbb{E}(|V_u - \bar{V}_u^k|) du + \int_0^t \mathbb{E}(|\bar{V}_u^k - V_u^k|) du \right] + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2 \sqrt{D_k}}{ja_j} \\ &\leq 2\lambda \int_0^t \mathbb{E}(|V_u - \bar{V}_u^k|) du + 2\lambda T \sqrt{D_k} + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2 \sqrt{D_k}}{ja_j}. \end{aligned}$$

Mas, de (4.31),

$$\mathbb{E}(\phi_j(V_t - \bar{V}_t^k)) \geq \mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) - a_{j-1}$$

o que implica que

$$\mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) \leq a_{j-1} + 2\lambda \int_0^t \mathbb{E}(|V_u - \bar{V}_u^k|) du + 2\lambda T \sqrt{D_k} + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2}{ja_j} \sqrt{D_k}.$$

e então, por uma simples aplicação da desigualdade de Gronwall,

$$\mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) \leq e^{2\lambda T} \left[e^{-j(j+1)/2} + \frac{4T\sigma^2}{j} + \frac{4T\sigma^2}{je^{-j(j+1)/2}} \sqrt{D_k} + 2\lambda T \sqrt{D_k} \right]$$

concluindo a demonstração. \square

É importante notar que o Lema 4.4 fornece, além de um limitante superior, a convergência em L^1 quando $k \rightarrow \infty$. De fato, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2. *Temos que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) = 0.$$

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, podemos sempre escolher um $j \geq 1$ tal que

$$e^{2\lambda T} \left[e^{-j(j+1)/2} + \frac{4T\sigma^2}{j} \right] < \varepsilon$$

e, como $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 0$, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) = 0.$$

\square

A partir dos resultados obtidos nos Lemas 4.3 e 4.4 e Corolários 4.1 e 4.2, podemos mostrar que a aproximação contínua \bar{V}_t^k definida em (4.27) converge fortemente para V_t . Isto é o que apresentamos no Teorema abaixo.

Teorema 4.2. *Considere a equação da volatilidade V_t do modelo de Heston dado em (4.17) e a aproximação de Euler-Maruyama V_t^k definida em (4.25) com aproximação contínua como em*

(4.27). Então, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 \right] = 0$$

Demonstração. Para todo $0 \leq t \leq T$, temos que

$$V_t - \bar{V}_t^k = -2\lambda \int_0^t (V_u - V_u^k) du + 2\sigma \int_0^t \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right) dZ_u.$$

A partir da desigualdade de Cauchy-Schwartz, é fácil ver que

$$|V_t - \bar{V}_t^k|^2 \leq 8\lambda^2 T \left(\int_0^t |V_u - V_u^k|^2 du \right) + 8\sigma^2 \left(\int_0^t \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right) dZ_u \right)^2$$

e, da desigualdade martingale de Doob e da isometria de Itô, para qualquer $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 \right] &\leq 8\lambda^2 T \mathbb{E} \left(\int_0^T |V_u - V_u^k|^2 du \right) + 32\sigma^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \left(\sqrt{|V_u|} - \sqrt{|V_u^k|} \right)^2 du \right) \\ &\leq 8\lambda^2 T \mathbb{E} \left(\int_0^T |V_u - V_u^k|^2 du \right) + 32\sigma^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T |V_u - V_u^k| du \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Portanto, pelo Lema 4.3, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T |V_u - V_u^k|^2 du \right) &\leq 2 \int_0^T \left(\mathbb{E} [|V_u - \bar{V}_u^k|^2] + \mathbb{E} [|\bar{V}_u^k - V_u^k|^2] \right) du \\ &\leq 2 \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq u} |V_u - \bar{V}_u^k|^2 \right] du + 2 \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\bar{V}_u^k - V_u^k|^2 \right] du \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\leq 2 \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq u} |V_u - \bar{V}_u^k|^2 \right] du + 2D_k T \quad (4.36)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T |V_u - V_u^k| du \right) &\leq \int_0^T \mathbb{E}(|V_u - \bar{V}_u^k|) du + \int_0^T \mathbb{E}(|\bar{V}_u^k - V_u^k|) du \\ &\leq T \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) + T \sqrt{D_k}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Então, utilizando as desigualdades (4.35) e (4.37) em (4.34), segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 \right] &\leq 16\lambda^2 T \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq u} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 \right] du + 16\lambda^2 D_k T^2 \\ &\quad + 32\sigma^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|V_t - \bar{V}_t^k|) + 32\sigma^2 T \sqrt{D_k} \end{aligned}$$

e, da desigualdade de Gronwall,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 \right] \leq C_k e^{16\lambda^2 T^2}$$

em que $C_k := 16\lambda^2 D_k T^2 + 32\sigma^2 T \sqrt{D_k} + 32\sigma^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|V_t - V_t^k|)$ converge para zero pelos Corolários 4.1 e 4.2. \square

Então, podemos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - V_t^k|^2 \right] = 0. \quad (4.38)$$

De fato, basta observar que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - V_t^k|^2 \leq 2 \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - \bar{V}_t^k|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{V}_t^k - V_t^k|^2 \right]$$

e aplicar os resultados obtidos no Corolário 4.1 e no Teorema 4.2.

Resta agora mostrar a convergência da aproximação numérica S_t^k para S_t . Para isto, apresentamos o teorema abaixo.

Teorema 4.3. *Para quaisquer números positivos L , M e N , definimos τ como sendo o seguinte tempo de parada*

$$\tau := \inf \{ t \geq 0 : \sup_{k \geq 1} |S_t^k| > L \text{ ou } |S_t| > M \text{ ou } \sup_{k \geq 1} |V_t^k| > N \}.$$

Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_{t \wedge \tau} - S_{t \wedge \tau}^k|^2 \right] = 0$$

Demonstração. De forma análoga a realizada para o processo V_t^k , temos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t - S_t^k|^2 \leq 2 \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t - \bar{S}_t^k|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{S}_t^k - S_t^k|^2 \right]. \quad (4.39)$$

Inicialmente, observamos que, para qualquer $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} S_t - \bar{S}_t^k &= \mu \int_0^t (S_u V_u - S_u^k V_u^k) du + \int_0^t (S_u \sqrt{V_u} - S_u^k \sqrt{|V_u^k|}) dW_u^{(1)} \\ &= \mu \int_0^t S_u (V_u - V_u^k) du + \mu \int_0^t V_u^k (S_u - S_u^k) du \\ &\quad + \int_0^t S_u (\sqrt{V_u} - \sqrt{|V_u^k|}) dW_u^{(1)} + \int_0^t \sqrt{|V_u^k|} (S_u - S_u^k) dW_u^{(1)}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que

$$\begin{aligned} |S_t - \bar{S}_t^k|^2 &\leq 4 \left[\mu^2 \left| \int_0^t S_u (V_u - V_u^k) du \right|^2 + \mu^2 \left| \int_0^t V_u^k (S_u - S_u^k) du \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t S_u (\sqrt{V_u} - \sqrt{|V_u^k|}) dW_u^{(1)} \right|^2 + \left| \int_0^t \sqrt{|V_u^k|} (S_u - S_u^k) dW_u^{(1)} \right|^2 \right] \\ &\leq 4\mu^2 T \left(\int_0^t |S_u|^2 |V_u - V_u^k|^2 du \right) + 4\mu^2 T \left(\int_0^t |V_u^k|^2 |S_u - S_u^k|^2 du \right) \\ &\quad + 4 \left| \int_0^t S_u (\sqrt{V_u} - \sqrt{|V_u^k|}) dW_u^{(1)} \right|^2 + 4 \left| \int_0^t \sqrt{|V_u^k|} (S_u - S_u^k) dW_u^{(1)} \right|^2. \end{aligned}$$

Portanto, da desigualdade de Doob e da isometria de Itô, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t - \bar{S}_t^k|^2 \right] &\leq 4\mu^2 T \mathbb{E} \left[\int_0^T |S_u|^2 |V_u - V_u^k|^2 du \right] + 4\mu^2 T \mathbb{E} \left[\int_0^T |V_u^k|^2 |S_u - S_u^k|^2 du \right] \\ &\quad + 16 \mathbb{E} \left[\int_0^T |S_u|^2 |\sqrt{V_u} - \sqrt{|V_u^k|}|^2 du \right] + 16 \mathbb{E} \left[\int_0^T |V_u^k| |S_u - S_u^k|^2 du \right] \end{aligned}$$

e então, utilizando as hipóteses do teorema, para qualquer $0 \leq t \leq T$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq t} |S_{t_1 \wedge \tau} - \bar{S}_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] &\leq 4\mu^2 T M^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |V_t - V_t^k|^2 dt \right] + 4\mu^2 T N^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |S_t - S_t^k|^2 dt \right] \\ &\quad + 16M^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |\sqrt{V_t} - \sqrt{|V_t^k|}|^2 dt \right] + 16N \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |S_t - S_t^k|^2 dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |S_t - S_t^k|^2 dt \right] + C_2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - V_t^k|^2 dt \right] \\
&\quad + C_3 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|V_t - V_t^k|] \tag{4.40}
\end{aligned}$$

em que $C_1 := 4\mu^2 TN^2 + 16N$, $C_2 := 4\mu^2 TM^2$ e $C_3 := 16M^2 T$. Pelo Teorema 4.2 que $C_2 \mathbb{E} [\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - V_t^k|^2]$ converge para zero. Também observamos que

$$\mathbb{E} [|\bar{V}_t^k - V_t^k|] \leq 2\lambda\theta 2^{-2k} + 2\lambda 2^{-2k} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t^k| \right] + 2\sigma J 2^{-k} \mathbb{E} \left[\sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t^k|} \right] \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

em que J uma constante igual a ρ ou $\bar{\rho}$. Utilizando este resultado e o Lema 4.4, segue que $C_3 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|V_t - V_t^k|]$ converge para zero quando $k \rightarrow \infty$.

Também, para qualquer $0 \leq t \leq T$, seja $m : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ a variável aleatória tal que $T_m^k \leq t < T_{m+1}^k$. Portanto, temos que

$$|\bar{S}_t^k - S_t^k| = \left| \mu S_{T_m^k}^k V_{T_m^k}^k (t - T_m^k) + S_{T_m^k}^k \sqrt{|V_{T_m^k}^k m|} \left(W^{(1)} - W_{T_m^k}^{(1)} \right) \right|$$

de forma que, para qualquer $0 \leq t_1 \leq T$,

$$\begin{aligned}
|\bar{S}_{t_1 \wedge \tau}^k - S_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 &\leq 2 \left[\mu^2 (S_{T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k}^k)^2 (V_{T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k}^k)^2 (t_1 \wedge \tau - T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k)^2 \right. \\
&\quad \left. + (S_{T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k}^k)^2 |V_{T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k}^k| \left(W_{t_1 \wedge \tau}^{(1)} - W_{T_{m_{t_1 \wedge \tau}}^k}^{(1)} \right)^2 \right] \\
&\leq 2 \left[\mu^2 L^2 N^2 \left(\sup_m \Delta T_m^k \right)^2 + 2^{-2k} L^2 N \right]
\end{aligned}$$

e então, para $0 \leq t \leq T$, concluímos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq t} |\bar{S}_{t_1 \wedge \tau}^k - S_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] \leq 2 \left[\mu^2 L^2 N^2 \mathbb{E} \left[\left(\sup_{m \geq 1} \Delta T_m^k \right)^2 \right] + 2^{-2k} L^2 N \right] := C_4 \tag{4.41}$$

converge para zero quando $k \rightarrow \infty$. Tomando C como

$$C := 2 \left[C_2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - V_t^k|^2 \right] + C_3 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|V_t - V_t^k|] + C_4 \right]$$

e substituindo as equações (4.40) e (4.41) em (4.39), segue que, para qualquer $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq t} |S_{t_1 \wedge \tau} - S_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] &\leq 2 \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq t} |S_{t_1 \wedge \tau} - \bar{S}_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq t} |\bar{S}_{t_1 \wedge \tau}^k - S_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] \right) \\ &\leq 2C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |S_u - S_u^k|^2 du \right] + C \\ &\leq C + 2C_1 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t_1 \leq u} |S_{t_1 \wedge \tau} - S_{t_1 \wedge \tau}^k|^2 \right] du. \end{aligned}$$

E então, a partir de desigualdade de Gronwall, temos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_{t \wedge \tau} - S_{t \wedge \tau}^k|^2 \right] \leq C e^{2C_1 T}$$

que converge para zero quando $k \rightarrow \infty$, demonstrando o teorema. \square

Desta forma, se tomarmos L, M e N suficientemente grandes, de forma que

$$\sup_{k \geq 1} |S_t^k| \leq L, \quad |S_t| \leq M \quad \text{e} \quad \sup_{k \geq 1} |V_t^k| \leq N \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T$$

temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t - S_t^k|^2 \right] = 0.$$

4.3.1 Estudo de simulação

Nesta subseção, apresentamos alguns resultados de simulação obtidos na aproximação do modelo de Heston segundo o método numérico de Euler-Maruyama proposto anteriormente. Para o processo de volatilidade V_t , utilizamos os resultados teóricos fornecidos pelas equações (4.19) e (4.20). Também realizamos um estudo de simulação a fim de comparar a aproximação do método de Euler-Maruyama utilizando a discretização aleatória e utilizando uma partição determinística do intervalo $[0, T]$. Para que a comparação seja adequada, relembramos do Lema (3.1) que, dado um $k \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\mathbb{E}(\Delta T_n^{k,j}) = 2^{-2k}, \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ e } j = 1, 2$$

de modo que, o valor esperado do número de tempos de parada gerados pela partição \mathcal{T}^j no intervalo $[0, T]$ é dado por $\mathcal{N}^j := 2^{2k}T$. Portanto, o método de Euler-Maruyama utilizando a discretização aleatória com nível de discretização k será comparado com o método com discretização determinística com $2^{2k}T$ instantes igualmente espaçados.

Para o estudo de simulação, consideramos o modelo de Heston com os parâmetros $\lambda = 3,63$, $\theta = 0,04$, $\sigma = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\rho = -0,53$ com valores iniciais para o preço descontado e volatilidade dados, respectivamente, por $s_0 = 100$ e $v_0 = 0,09$. Realizamos 20.000 simulações utilizando os níveis de discretização $k = 3, 4, 5$ e 6 no intervalo $[0, 1]$, ou seja, o tempo de maturidade é $T = 1$.

Na Tabela 4.1, apresentamos os resultados associados ao método do tipo Euler-Maruyama para a aproximação da volatilidade, considerando a discretização aleatória. Para cada nível de discretização k , fixamos os tempos $t = 0, 2j$ com $j = 1, \dots, 5$ a partir dos quais calculamos o valor esperado da volatilidade $\mathbb{E}(V_t)$ utilizando a equação (4.19) e comparamos com o resultado obtido com a média das simulações da volatilidade V_t^k , que denotaremos por $\hat{\mathbb{E}}(V_t^k)$. Apresentamos também, o erro cometido na aproximação $|\mathbb{E}(V_t) - \hat{\mathbb{E}}(V_t^k)|$, o erro padrão e os limites inferior (LI) e superior (LS) do intervalo de confiança de nível 95% para $\mathbb{E}(V_t)$.

k	Instantes	$\mathbb{E}(V_t)$	$\hat{\mathbb{E}}(V_t^k)$	$ \mathbb{E}(V_t) - \hat{\mathbb{E}}(V_t^k) $	Erro Padrão	LI	LS
3	0,2	0,051705	0,051474	$2,3 \times 10^{-4}$	$6,2 \times 10^{-4}$	0,050257	0,052692
3	0,4	0,042740	0,042370	$3,7 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-4}$	0,041291	0,043449
3	0,6	0,040641	0,040293	$3,4 \times 10^{-4}$	$5,4 \times 10^{-4}$	0,039239	0,041349
3	0,8	0,040150	0,040658	$5,1 \times 10^{-4}$	$5,4 \times 10^{-4}$	0,039608	0,041708
3	1	0,040035	0,040050	$1,4 \times 10^{-5}$	$5,3 \times 10^{-4}$	0,039018	0,041081
4	0,2	0,051705	0,051795	$9,0 \times 10^{-5}$	$9,9 \times 10^{-5}$	0,051602	0,051988
4	0,4	0,042740	0,042666	$7,4 \times 10^{-5}$	$9,6 \times 10^{-5}$	0,042478	0,042854
4	0,6	0,040641	0,040720	$7,9 \times 10^{-5}$	$9,5 \times 10^{-5}$	0,040533	0,040908
4	0,8	0,040150	0,040068	$8,2 \times 10^{-5}$	$9,4 \times 10^{-5}$	0,039883	0,040253
4	1	0,040035	0,040121	$8,6 \times 10^{-5}$	$9,4 \times 10^{-5}$	0,039937	0,040306
5	0,2	0,051705	0,051776	$7,1 \times 10^{-5}$	$6,9 \times 10^{-5}$	0,061540	0,051912
5	0,4	0,042740	0,042658	$8,3 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-5}$	0,042524	0,042791
5	0,6	0,040641	0,040682	$4,1 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-5}$	0,040549	0,040815
5	0,8	0,040150	0,040126	$2,4 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-5}$	0,039993	0,040259
5	1	0,040035	0,040054	$1,9 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-5}$	0,039921	0,040188
6	0,2	0,051705	0,051714	$9,4 \times 10^{-6}$	$3,9 \times 10^{-5}$	0,051637	0,051792
6	0,4	0,042740	0,042731	$9,5 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-5}$	0,042661	0,042800
6	0,6	0,040641	0,040636	$5,9 \times 10^{-6}$	$3,5 \times 10^{-5}$	0,040568	0,040704
6	0,8	0,040150	0,040159	$8,8 \times 10^{-6}$	$3,5 \times 10^{-5}$	0,040091	0,040227
6	1	0,040035	0,040030	$4,9 \times 10^{-6}$	$3,4 \times 10^{-5}$	0,039963	0,040098

Tabela 4.1: Aproximação da volatilidade V_t pelo método de Euler-Maruyama (discretização aleatória)

A partir dos resultados fornecidos na Tabela 4.1, notamos que a diferença $|\mathbb{E}(V_t) - \hat{\mathbb{E}}(V_t^k)|$, para todos os casos avaliados, foi menor do que 10^{-3} e, além disso, para os níveis de discretização utilizados, conforme k cresce, a diferença diminui, corroborando o resultado apresentado em 4.38. Além disso, o intervalo de confiança de nível 95% sempre contém o verdadeiro valor $\mathbb{E}(V_t)$, o que nos mostra, empiricamente, que o método de Euler-Maruyama, considerando a discretização aleatória, é eficiente.

Na Tabela 4.2 comparamos a volatilidade teórica $\mathbb{E}(V_t)$ com o método numérico de Euler-Maruyama para a aproximação da volatilidade V_t utilizando uma discretização determinística com instantes igualmente espaçados. Novamente, avaliaremos a aproximação V_t^k nos instantes $t = 0, 2j$ com $j = 1, \dots, 5$. Como a discretização é determinística, n denotará o número de instantes da partição. A média das aproximações simuladas será denotada por $\bar{\mathbb{E}}(V_t^k)$ e o erro cometido na aproximação por $|\mathbb{E}(V_t) - \bar{\mathbb{E}}(V_t^k)|$. Também apresentamos o erro padrão das aproximações e os limites inferior e superior de nível 95% para $\mathbb{E}(V_t)$.

n	Instantes	$\mathbb{E}(V_t)$	$\bar{\mathbb{E}}(V_t^k)$	$ \mathbb{E}(V_t) - \bar{\mathbb{E}}(V_t^k) $	Erro Padrão	LI	LS
64	0,2	0,051705	0,051769	$6,3 \times 10^{-5}$	$4,8 \times 10^{-5}$	0,051674	0,051863
64	0,4	0,042740	0,042551	$1,9 \times 10^{-4}$	$4,3 \times 10^{-5}$	0,042466	0,042635*
64	0,6	0,040641	0,040542	$6,9 \times 10^{-5}$	$4,1 \times 10^{-5}$	0,040462	0,040622*
64	0,8	0,040150	0,040145	$4,8 \times 10^{-6}$	$4,1 \times 10^{-5}$	0,040066	0,040225
64	1	0,040035	0,040110	$7,5 \times 10^{-5}$	$4,1 \times 10^{-5}$	0,040030	0,040191
256	0,2	0,051705	0,051512	$1,9 \times 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{-5}$	0,051466	0,051559*
256	0,4	0,042740	0,042644	$9,7 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-5}$	0,042602	0,042685*
256	0,6	0,040641	0,040613	$2,8 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-5}$	0,040574	0,040653
256	0,8	0,040150	0,040165	$1,5 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-5}$	0,040126	0,040204
256	1	0,040035	0,040025	$1,1 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-5}$	0,039986	0,040063
1024	0,2	0,051705	0,051708	$2,5 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-5}$	0,051684	0,051731
1024	0,4	0,042740	0,042721	$1,9 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-5}$	0,042700	0,042742
1024	0,6	0,040641	0,040626	$1,5 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-5}$	0,040606	0,040646
1024	0,8	0,040150	0,040142	$8,3 \times 10^{-6}$	$9,9 \times 10^{-6}$	0,040122	0,040161
1024	1	0,040035	0,040030	$5,4 \times 10^{-6}$	$1,0 \times 10^{-5}$	0,040010	0,040050
4096	0,2	0,051705	0,051698	$7,3 \times 10^{-6}$	$5,8 \times 10^{-6}$	0,051686	0,051709
4096	0,4	0,042740	0,042739	$1,2 \times 10^{-6}$	$5,3 \times 10^{-6}$	0,042729	0,042749
4096	0,6	0,040641	0,040645	$3,4 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-6}$	0,040635	0,040655
4096	0,8	0,040150	0,040153	$3,0 \times 10^{-6}$	$4,9 \times 10^{-6}$	0,040144	0,040163
4096	1	0,040035	0,040039	$3,7 \times 10^{-6}$	$4,9 \times 10^{-6}$	0,040029	0,040049

Tabela 4.2: Aproximação da volatilidade V_t pelo método de Euler-Maruyama (discretização determinística)

Neste caso, também temos uma boa aproximação. Observamos que, conforme o número de pontos n da partição determinística aumenta, a diferença entre o verdadeiro valor $\mathbb{E}(V_t)$ e a média dos valores simulados $\bar{\mathbb{E}}(V_t^k)$ diminui. Quando $n = 4096$, esta diferença é da ordem de

10^{-6} . É importante observar que, como o erro padrão é sempre inferior neste caso, em relação ao caso da discretização aleatória, para alguns valores (nos casos $n = 64$ e $n = 256$) o intervalo de confiança não contém o verdadeiro valor (observe os casos marcados com *).

Algoritmo e Resultados Numéricos

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo geral para calcular as estratégias de *hedging* para o modelo de mercado de Itô desenvolvido no Capítulo 2 com respeito a qualquer opção do tipo europeia $H \in L^2(\mathbb{Q})$ e \mathcal{F}_T -mensurável para uma medida de probabilidade fixa $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$ com tempo de maturidade $0 < T < \infty$ sob os critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média, além do preço justo da opção ao aproximar a projeção de Galtchouk-Kunita-Watanabe $\phi^{H,\mathbb{Q}} = (\phi^{H,\mathbb{Q},S}, \phi^{H,\mathbb{Q},I})$ no instante $t = 0$, a partir da simulação da derivada estocástica $\mathbf{D}^{k,j}X$ dada por

$$\mathbf{D}^{k,j}X_{T_1^{k,j}} = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] - \mathbb{E} \left[H \mid \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k \right]}{A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} \right], \quad j = 1, \dots, p. \quad (5.1)$$

Ressaltamos que, para o cálculo do *hedging* nos demais instantes de tempo, basta aplicar as ideias de *hedging* dinâmico apresentadas na Seção 3.4 do Capítulo 3 baseadas nos argumentos de translação do movimento Browniano. Além disso, apresentamos alguns resultados numéricos

obtidos para opções *vanillas* e exóticas utilizando desde o modelo clássico de Black e Scholes até modelos de volatilidade não constante, como o modelo de elasticidade constante da variância (CEV) e o modelo de volatilidade estocástica de Heston.

5.1 Algoritmo

A estrutura completa do algoritmo está baseada na filtragem discreta gerada a partir dos incrementos $\{\Delta T_n^{k,j}; n \geq 1, 1 \leq j \leq p\}$ e pelas famílias independentes e igualmente distribuídas de variáveis aleatórias de Bernoulli dadas por $\{\eta_n^{k,j}; n \geq 1, 1 \leq j \leq p\}$. Baseado na densidade da variável aleatória $T_1^{k,j}$, Burq e Jones (2008) [15] propuseram um algoritmo bastante simples e eficiente para um método de simulação dos incrementos $\Delta T_n^{k,j}$. Considerando H um funcional de $A^{k,1}, \dots, A^{k,p}$, realizamos um método de simulação Monte Carlo concreto e eficiente para obter as estratégias θ^H .

A seguir, fixando um nível de discretização $k \geq 1$, dividimos o algoritmo nos seguintes passos listados abaixo.

Passo 1. Simulação dos tempos de parada $\{T_\ell^{k,j}; j = 1, \dots, p; \ell \geq 1\}$ e do processo $\{A^{k,j}; j = 1, \dots, p\}$.

1. Geramos os incrementos $\{\Delta T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ de acordo com o algoritmo descrito por Burq e Jones [15] e, conseqüentemente, os $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada $\{T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ para todo $j = 1, \dots, p$ tal que todos os $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada $T_\ell^{k,j}$ sejam menores do que T .
2. Simulamos a família independente e igualmente distribuída $\eta^{k,j} := \{\eta_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$, de acordo com a variável aleatória de Bernoulli $\eta_1^{k,j}$ com parâmetro $\frac{1}{2}$ para $i = -1, 1$. Desta forma, simulamos o processo $A^{k,j}$ para $j = 1, \dots, p$.

Algorithm 1: Pseudocódigo dos tempos de parada $T^{k,j}$ e dos processos $A^{k,j}$.

Data: Tempo de maturidade T , Nível de discretização k

Result: Vetor de tempos de parada $\{\mathcal{T}_n^{k,j}; n \geq 1, j = 1, \dots, p\}$, família

$\{\eta_n^{k,j}; n \geq 1, j = 1, \dots, p\}$, Processo $A^{k,j}$

```

1  $\mathcal{T}^{k,j} \leftarrow$  Burq e Jones( $k, T$ )  Vetor de  $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada gerado pelo
   algoritmo descrito por Burq e Jones [15]
2  $n \leftarrow$  Comprimento( $\mathcal{T}^{k,j}$ )   $n$  é o comprimento do vetor  $\mathcal{T}^{k,j}$ 
3  $\eta_0^{k,j} \leftarrow 0$ 
4  $A_0^{k,j} \leftarrow 0$ 
5 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
6    $\eta_i^{k,j} \leftarrow$  Amostrar um elemento de uma distribuição Bernoulli(0.5)
7    $A_i^{k,j} \leftarrow A_{i-1}^{k,j} + 2^{-k} \eta_i^{k,j}$ 

```

Na próxima etapa, simulamos H baseado em aproximações dos processos de preços descontados $\{S_t^i; 0 \leq t \leq T; i = 1, \dots, d\}$ utilizando o método de Euler-Maruyama descrito no Capítulo 4.

Passo 2. Simulação do processo de preço descontado $\{S^i; i = 1, \dots, d\}$ e do *payoff* H .

Suponha que, utilizando o Passo 1 acima, tenhamos as partições $\mathcal{T}^{k,j}$, a família $\eta^{k,j}$ e os processos $A^{k,j}$ para $j = 1, \dots, d, d+1, \dots, p$. Os seguintes passos abaixo mostram como calcular aproximações para os processos de preços descontados S^i , $i = 1, \dots, d$ e a função *payoff* H .

1. Consideramos a partição \mathcal{T}^k gerada por todos os tempos de parada definidos por (3.8). Esta é a partição mais fina gerada por todas as partições $\mathcal{T}^{k,j}$, $j = 1, \dots, p$. A Figura 5.1 nos dá uma ideia de como construir a partição fina \mathcal{T}^k a partir de 3 partições distintas $\mathcal{T}^{k,1}$, $\mathcal{T}^{k,2}$ e $\mathcal{T}^{k,3}$.
2. Aplicamos o método numérico de Euler-Maruyama para calcular uma aproximação $S^{k,i}$ do preço descontado S^i para $i = 1, \dots, d$, em que $S^{k,i}$ é um funcional de $A^k = (A^{k,1}, \dots, A^{k,p})$.

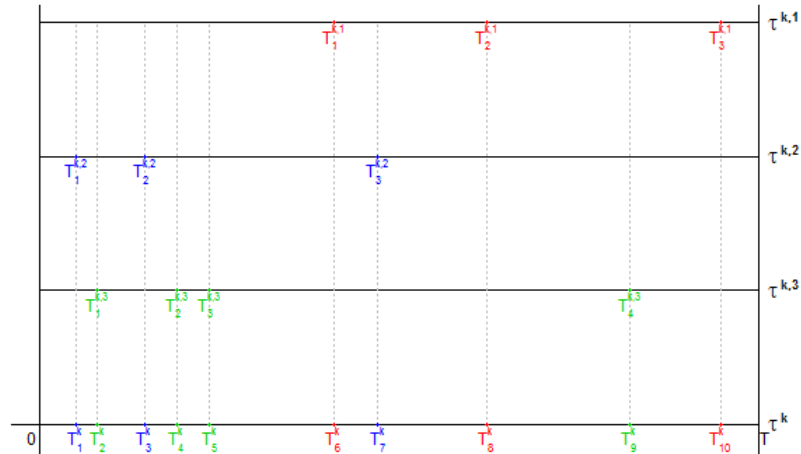


Figura 5.1: Partição fina \mathcal{T}^k gerada a partir de 3 partições distintas $\mathcal{T}^{k,1}$, $\mathcal{T}^{k,2}$ e $\mathcal{T}^{k,3}$.

3. Baseado na aproximação para S^k , calculamos a aproximação \hat{H}^k para o *payoff* H da forma $\hat{H}^k = \Phi(S^{k,j}; j = 1, \dots, d)$.

Algorithm 2: Pseudocódigo para os processos de preços descontados S^i , $i = 1, \dots, d$.

Data: Partições $\{\mathcal{T}^{k,j}; j = 1, \dots, p\}$, Famílias $\{\eta^{k,j}; j = 1, \dots, p\}$, Processos

$\{A^{k,j}; j = 1, \dots, p\}$, Nível de discretização k , Número de ativos d

Result: Preços dos ativos descontados $S^{k,i}$, $i = 1, \dots, d$

- 1 $\mathcal{T}^k \leftarrow \text{Mesclar}(\mathcal{T}^{k,j})$ Criar a partição mais fina \mathcal{T}^k a partir das partições $\mathcal{T}^{k,j}$
 - 2 $n \leftarrow \text{Comprimento}(\mathcal{T}^k)$ n é o comprimento da partição \mathcal{T}^k
 - 3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** d **do**
 - 4 **for** $\ell \leftarrow 1$ **to** n **do**
 - 5 $S_\ell^{k,i} \leftarrow \text{Euler-Maruyama}(\mathcal{T}^k, \eta^{k,j}, A^{k,j}; j = 1, \dots, p)$ Simulação de S^i na partição mais fina \mathcal{T}^k utilizando o método de Euler-Maruyama
 - 6 $\hat{H}^k = \Phi(S^{k,j}; 1 \leq j \leq p)$ Aproximação de H como uma função dos preços dos ativos descontados $S^{k,j}$
-

Um passo crucial na simulação da derivada estocástica $\mathbf{D}^{k,j}X$ dada pela equação (5.1) é a aproximação das esperanças condicionais já que, para cada $j = 1, \dots, p$, precisamos calcular uma aproximação numérica para $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k]$ que é a esperança condicional de H dada a informação até o primeiro tempo de parada $T_1^{k,j}$ da partição j e uma aproximação numérica para

$\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k]$ que é a esperança condicional de H dada a informação disponível até o tempo de parada anterior a $T_1^{k,j}$ na partição mais fina \mathcal{T}^k .

Caso unidimensional

É importante observar que, no caso unidimensional ($p = d = 1$), \mathcal{T}^k é igual a $\mathcal{T}^{k,1}$ e, então $\tau_1^{k,1} = T_0^{k,1} := 0$. Deste modo, precisamos calcular aproximações para $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k]$ e $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_0^{k,1}}^k]$.

A fim de calcular a aproximação para $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k]$, aplicamos o Passo 1 descrito acima usando o tempo de maturidade $T - T_1^{k,1}$. Desta forma, obtemos a partição $\mathcal{T}_{T_1^{k,1}}^{k,1} := \{T_{T_1^{k,1},\ell}^{k,1}; \ell \geq 1\}$ como descrito na Seção 3.4 em que $T_{T_1^{k,1},\ell}^{k,1} \leq T - T_1^{k,1}$ para todo $\ell \geq 1$. O Passo 1 também fornece a família de variáveis aleatórias de Bernoulli associada a $\mathcal{T}_{T_1^{k,1}}^{k,1}$, denotada aqui por $\eta_{T_1^{k,1},\ell}^{k,1} := \{\eta_{T_1^{k,1},\ell}^{k,1}; \ell \geq 1\}$. Considerando a partição gerada por $T^{k,1} \cup \mathcal{T}_{T_1^{k,1}}^{k,1}$ juntamente com a família $\eta_{T_1^{k,1}}^{k,1} \cup \eta_{T_1^{k,1},\ell}^{k,1}$, e, aplicando o Passo 2, encontramos a aproximação \hat{H}^k de H . Repetimos estes passos diversas vezes e conseguimos a aproximação $\hat{\mathbb{E}}[H|\mathcal{F}_{T_1^{k,1}}^k]$ como sendo a média de todos os \hat{H}^k 's.

O cálculo da aproximação para $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_0^{k,1}}^k]$ é ainda mais simples. Como $T_0^{k,1} = 0$, simplesmente precisamos aplicar o Passo 1 utilizando o tempo de maturidade T . Em seguida, a partir do Passo 2, calculamos a aproximação \hat{H} e, repetindo estes passos diversas vezes, conseguimos a aproximação $\hat{\mathbb{E}}[H|\mathcal{F}_{T_0^{k,1}}^k]$ como sendo a média de todos os \hat{H} 's.

Caso multidimensional

No caso multidimensional, é um pouco mais complicado calcular as aproximações para as esperanças condicionais nos primeiros tempos de parada de cada partição $\mathcal{T}^{k,j}$. Neste caso, precisamos da notação adicional introduzida abaixo. Ressaltamos que este é o caso geral, de forma que a esperança condicional no caso unidimensional pode ser calculada utilizando os passos descritos aqui.

A seguir, $t_\ell^{k,j}$ denota a realização da variável aleatória $T_\ell^{k,j}$ por meio do Passo 1 e t_ℓ^k denota a realização da variável aleatória T_ℓ^k baseada na partição aleatória mais fina \mathcal{T}^k . Além disso, qualquer sequência $(t_1^k < t_2^k < \dots < t_1^{k,j})$ possui a informação gerada pela realização de \mathcal{T}^k até o primeiro tempo de parada de j -ésima partição. Adicionalmente, seja $t_{1-}^{k,j}$ a realização do último tempo de parada da partição mais fina \mathcal{T}^k anterior a realização de $t_1^{k,j}$. Relembramos aqui, o

par $(p_\ell, q_\ell) \in \{1, \dots, p\} \times \mathbb{N}$ definido em (4.6) em que, dada a realização t_ℓ^k de T_ℓ^k , p_ℓ representa a partição original que contém t_ℓ^k e q_ℓ representa a posição de t_ℓ^k na p_ℓ -ésima partição. De forma análoga, definimos $\bar{\eta}_{q_\ell}^{k,p_\ell}$ e $\bar{\eta}_\ell^{k,j}$ como as realizações de $\eta_{q_\ell}^{k,p_\ell}$ e $\eta_\ell^{k,j}$, respectivamente.

Como ressaltado anteriormente, dada qualquer realização do tempo de parada T_ℓ^k na partição mais fina \mathcal{T}^k , observamos que a notação acima é importante, já que podemos recuperar a informação deste tempo de parada específico em relação à sua partição original. Por exemplo, suponha que estamos na situação da Figura 5.1 e considere a realização t_5^k da variável aleatória T_5^k . Neste caso, $p_5 = 3$ e $q_5 = 3$, ou seja, a realização t_5^k do tempo de parada T_5^k da partição fina \mathcal{T}^k é a realização $t_3^{k,3}$ do $\mathbb{F}^{k,1}$ -tempo de parada $T_3^{k,3}$ da partição $\mathcal{T}^{k,3}$.

Agora estamos em condições de explicar a simulação da esperança condicional. Ressaltamos que na simulação da derivada estocástica, estamos interessados no cálculo da esperança de H condicionada à informação disponível até o primeiro tempo de parada de cada partição j com $j = 1, \dots, p$. Apesar disso, apresentamos a simulação da esperança de H condicionada à informação disponível até qualquer tempo de parada T_m^k na partição final. Durante os passos da simulação, utilizamos alguns exemplos para facilitar o entendimento de cada etapa.

Passo 3. Simulação da esperança condicional $\mathbb{E}[H | \mathcal{F}_{T_m^k}^k]$.

1. Para cada $j = 1, \dots, p$, simulamos os $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada $\{T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ e a família $\{\eta_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ independentemente dos incrementos $\{\Delta T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ segundo o Passo 1. Seja $\{t_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ a realização da j -ésima partição $\mathcal{T}^{k,j} = \{T_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ e $\{t_\ell^k; \ell \geq 1\}$ a realização da partição fina $\mathcal{T}^k = \{T_\ell^k; \ell \geq 1\}$ gerada por todos os $\mathbb{F}^{k,j}$ -tempos de parada. Além disso, seja $\{\bar{\eta}_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ a realização de $\{\eta_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$. A Figura 5.2 mostra um exemplo da realização destas partições com $p = 3$.
2. Consideramos, para cada $j = 1, \dots, p$, os conjuntos $U^{k,j} = \{t_\ell^{k,j}; t_\ell^{k,j} \leq t_m^k\}$ de todas as realizações $t_\ell^{k,j}$ de $\mathcal{T}^{k,j}$ que são menores ou iguais a uma realização t_m^k de T_m^k e o conjunto $\bar{\eta}^{k,j} = \{\bar{\eta}_\ell^{k,j}; t_\ell^{k,j} \in U^{k,j}\}$ das realizações das variáveis aleatórias de Bernoulli $\eta_\ell^{k,j}$ associadas às realizações $t_\ell^{k,j} \in U^{k,j}$. As figuras 5.3 e 5.4 mostram como selecionar os conjuntos $U^{k,j}$ baseados nas partições da Figura 3 com $m = 1, 3$, respectivamente. Na verdade,

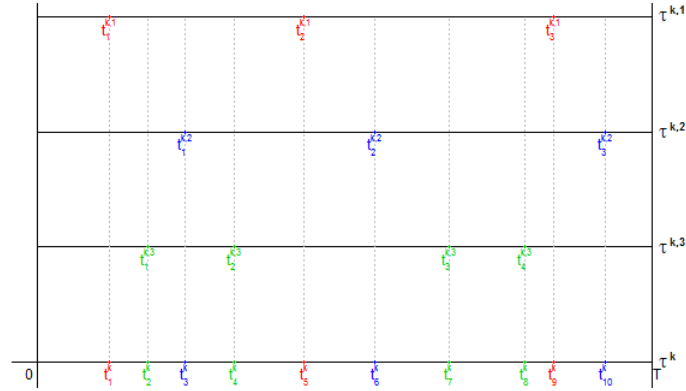


Figura 5.2: Realização de 3 partições.

neste exemplo, estamos interessados no cálculo das esperanças condicionais dos primeiros tempos de parada das partições $\mathcal{T}^{k,1}$ e $\mathcal{T}^{k,2}$ respectivamente.

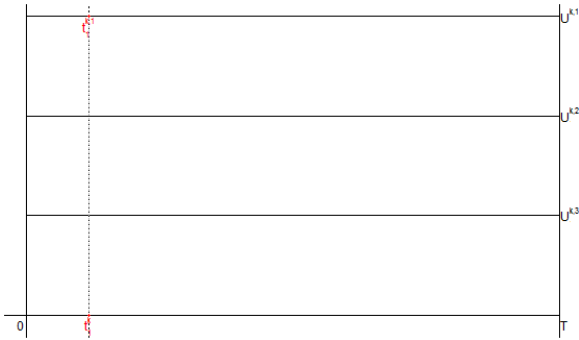


Figura 5.3: Conjuntos $U^{k,j}$ para o cálculo do valor esperado de H condicionado à filtragem $\mathcal{F}_{T_1^k}^{k,1}$.

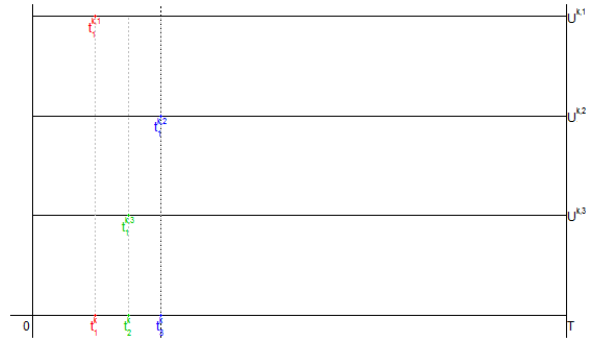


Figura 5.4: Conjuntos $U^{k,j}$ para o cálculo do valor esperado de H condicionado à filtragem $\mathcal{F}_{T_1^k}^{k,2}$.

3. Fixamos o novo tempo de maturidade $R = T - t_m^k$ e simulamos, para cada $j = 1, \dots, p$, os $\mathcal{G}_{t_m^k}^{k,j}$ -tempos de parada, que serão dados por $\mathcal{T}_{t_m^k}^{k,j} := \{T_{t_m^k, \ell}^{k,j}; \ell \geq 1\}$ tal que $T_{t_m^k, \ell}^{k,j} \leq R$ para todo $\ell \geq 1$ e as famílias e variáveis aleatórias de Bernoulli independentes $\eta_{t_m^k, \cdot}^{k,j} := \{\eta_{t_m^k, \ell}^{k,j}; \ell \geq 1\}$. Seja $\mathcal{R}^{k,j} := \{r_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ a realização da j -ésima partição $\mathcal{T}_{t_m^k}^{k,j}$, ou seja $r_\ell^{k,j}$ é a realização de $T_{t_m^k, \ell}^{k,j}$ e $\mathcal{R}^k := \{r_\ell^k; \ell \geq 1\}$ a realização da partição fina $\mathcal{T}_{t_m^k}^k = \{T_{t_m^k, \ell}^{k,j}; \ell \geq 1\}$, ou seja, r_ℓ^k é a realização de $T_{t_m^k, \ell}^k$. Além disso, seja $\bar{\eta}_{t_m^k, \cdot}^{k,j} = \{\bar{\eta}_{t_m^k, \ell}^{k,j}; \ell \geq 1\}$ a realização das variáveis aleatórias $\{\eta_{t_m^k, \ell}^{k,j}\}$. As Figuras 5.5 e 5.6 mostram as simulações de duas partições $\mathcal{T}_{t_m^k}^k$ para calcular a esperança condicional de H dado T_1^k e T_3^k .
4. Construimos para cada $j = 1, \dots, p$, os conjuntos $V_\ell^{k,j} := \{v_\ell^{k,j}; \ell \geq 1\}$ tais que $v_\ell^{k,j} := r_\ell^{k,j} + t_m^k = t_{t_m^k, \ell}^{k,j} + t_m^k$. Observamos que $v_\ell^{k,j} \geq t_m^k$ e $v_\ell^{k,j} \leq T$ para todo $\ell \geq 1$. As figuras

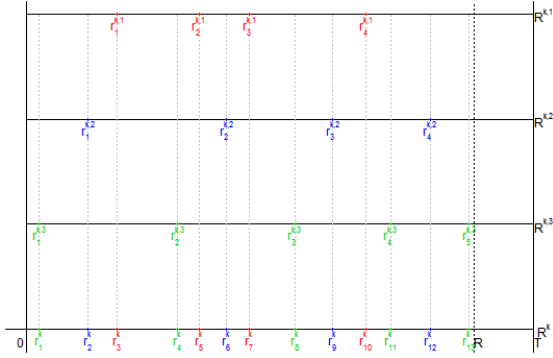


Figura 5.5: Partição \mathcal{R}^k para o cálculo da esperança condicional para o primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$. Neste caso, $R = T - T_1^{k,1}$.

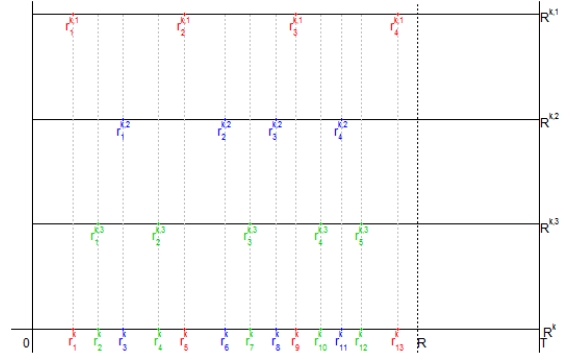


Figura 5.6: Partição \mathcal{R}^k para o cálculo da esperança condicional para o primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$. Neste caso, $R = T - T_1^{k,2}$.

5.7 e 5.8 mostram como construir os conjuntos $V^{k,j}$ baseados nas realizações das partições $\mathcal{R}^{k,j}$ definidas na etapa anterior e representadas nas Figuras 5.5 e 5.6 definidas acima para $m = 1$ e $m = 3$, respectivamente.

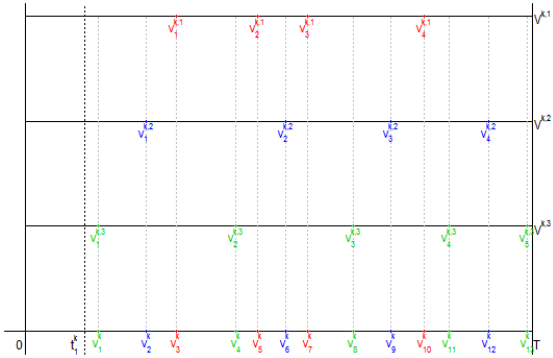


Figura 5.7: Conjuntos $V^{k,j}$ para o cálculo da esperança condicional no primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$.

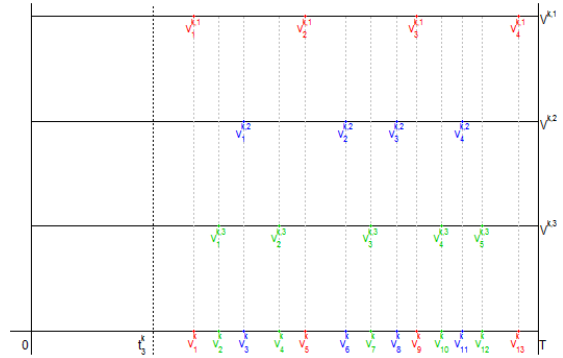


Figura 5.8: Conjuntos $V^{k,j}$ para o cálculo da esperança condicional no primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$.

5. Construímos, para todo $j = 1, \dots, p$ a j -ésima partição $\mathcal{T}^{k,j,*} := U^{k,j} \cup V^{k,j}$ e o conjunto $\eta^{k,j,*} := \bar{\eta}^{k,j} \cup \bar{\eta}_{t_m^{k,j}}^{k,j}$, em que $\bar{\eta}^{k,j}$ são as realizações das variáveis aleatórias de Bernoulli associadas aos tempos de parada $t^{k,j} \in U^{k,j}$ e $\bar{\eta}_{t_m^{k,j}}^{k,j}$ são as realizações das variáveis aleatórias de Bernoulli associadas aos tempos de parada $v^{k,j} \in V^{k,j}$. As Figuras 5.9 e 5.10 a seguir, representam as partições $\mathcal{T}^{k,j,*}$ e a partição fina $\mathcal{T}^{k,*}$ baseadas nos conjuntos $U^{k,j}$ e $V^{k,j}$ definidos anteriormente para $m = 1$ e $m = 3$, isto é, para o cálculo da esperança condicional dado os primeiros tempos de parada das partições $\mathcal{T}^{k,1}$ e $\mathcal{T}^{k,2}$ respectivamente.

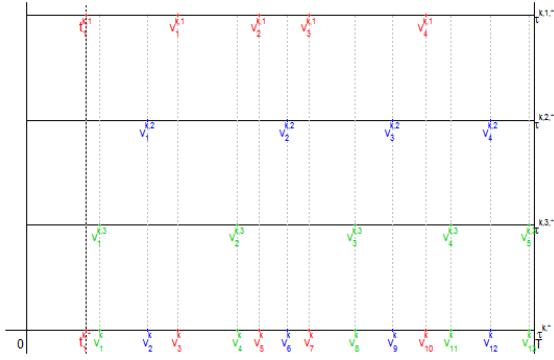


Figura 5.9: Partição $\mathcal{T}^{k,j,*}$ para o cálculo da esperança condicional do primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,1}$.

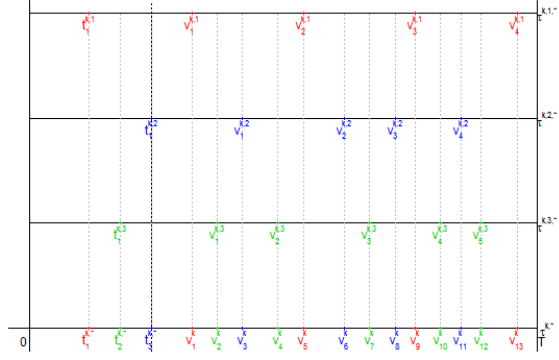


Figura 5.10: Partição $\mathcal{T}^{k,j,*}$ para o cálculo da esperança condicional do primeiro tempo de parada de $\mathcal{T}^{k,2}$.

6. Agora, aplicamos o Passo 2 para a partição $\mathcal{T}^{k,*}$, calculamos uma aproximação $S^{k,i}$ para os processos de preços descontados S^i e calculamos a aproximação \hat{H}^k para H .
7. Repetimos os passos (2)-(6) muitas vezes e a aproximação de $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_m^k}^k]$ será dada por

$$\hat{\mathbb{E}} \left[H \mid \mathcal{F}_{T_m^k}^k \right] = \hat{\mathbb{E}} \left[H \left((t_1^k, \bar{\eta}_{t_1^k}), \dots, (t_m^k, \bar{\eta}_{t_m^k}) \right) \right] := \text{m\u00e9dia dos } \hat{H}^k\text{'s.} \quad (5.2)$$

Desta forma, temos que (5.2) \u00e9 uma estimativa de Monte Carlo para $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{T_m^k}^k]$. Na Figura 5.11, simulamos uma trajet\u00f3ria (a trajet\u00f3ria preta no gr\u00e1fico) de um \u00fanico ativo descontado S^k com n\u00edvel de discretiza\u00e7\u00e3o $k = 6$ e condi\u00e7\u00e3o inicial $S_0 = 100$. Por exemplo, se estamos interessados no c\u00e1lculo da esperan\u00e7a condicional de H considerando toda a informa\u00e7\u00e3o dispon\u00edvel at\u00e9 o instante $t = 0,5$, precisamos simular diversas outras trajet\u00f3rias (na Figura 5.11, simulamos 4 outras trajet\u00f3rias) com toda a informa\u00e7\u00e3o at\u00e9 $t = 0,5$ igual a da trajet\u00f3ria preta. Para cada uma destas trajet\u00f3rias, calculamos a aproxima\u00e7\u00e3o \hat{H} de H . Tomando a m\u00e9dia de todos os \hat{H} 's obtemos uma aproxima\u00e7\u00e3o de $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{0,5}^k]$.

A seguir, descrevemos o passo crucial do algoritmo: a simula\u00e7\u00e3o da derivada estoc\u00e1stica descrita por (3.16).

Passo 4. Simula\u00e7\u00e3o da derivada estoc\u00e1stica $D^{k,j} X_{T_1^{k,j}}$ e da estrat\u00e9gia de *hedging* θ_0^H .

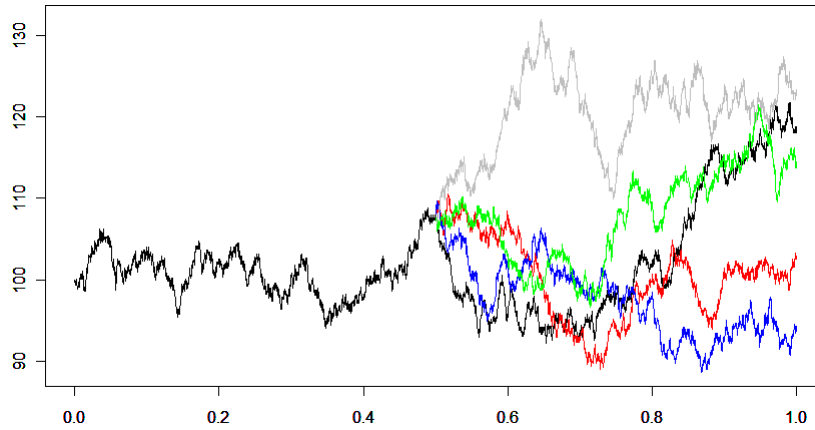


Figura 5.11: Simulações de 5 trajetórias de preços descontados para o cálculo da esperança condicional $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_{0,5}^k]$.

Como a derivada estocástica $\mathbf{D}^{k,j}X_{T_1^{k,j}}$ é dada por

$$\mathbf{D}^{k,j}X_{T_1^{k,j}} = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E} [H | \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k] - \mathbb{E} [H | \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k]}{A_{T_1^{k,j}}^{k,j}} \right] = \mathbb{E} [\mathbb{D}^{k,j}X_{T_1^{k,j}}],$$

sua aproximação pode ser obtida considerando as etapas abaixo

1. Para todo $j = 1, \dots, d$ calculamos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{D}}^{k,j}X_{T_1^{k,j}} &:= \frac{1}{2^{-k}\bar{\eta}_1^{k,j}} \left\{ \hat{\mathbb{E}} [H | \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k] - \hat{\mathbb{E}} [H | \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k] \right\} \\ &= \frac{1}{2^{-k}\bar{\eta}_1^{k,j}} \left\{ \hat{\mathbb{E}} [H | (t_1^k, \bar{\eta}_{t_1^k}^k), \dots, (t_1^{k,j}, \bar{\eta}_{t_1^{k,j}}^k)] - \hat{\mathbb{E}} [H | (t_1^k, \bar{\eta}_{t_1^k}^k), \dots, (t_{1-}^{k,j}, \bar{\eta}_{t_{1-}^{k,j}}^k)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

utilizando o Passo 3 definido para os cálculos das aproximações das esperanças condicionais.

2. Definimos a derivada estocástica $\hat{\phi}_0^{H,S} := (\hat{\mathbb{D}}^{k,1}X_{T_1^{k,1}}, \dots, \hat{\mathbb{D}}^{k,d}X_{T_1^{k,d}})$.
3. Calculamos $\bar{\theta}_0^H$ como

$$\bar{\theta}_0^H := \left(\hat{\phi}_0^{H,S} \right)^\top [\text{diag}(S_0)\sigma_0]^{-1}. \quad (5.4)$$

4. Repetimos estes passos diversas vezes e aproximamos a estratégia de *hedging* puro como a média de todos os $\bar{\theta}_0^H$, ou seja,

$$\hat{\theta}_0^H := \text{m\u00e9dia dos } \bar{\theta}_0^H \text{'s.} \quad (5.5)$$

Desta forma, a quantidade (5.5) \u00e9 a estimativa de Monte Carlo de θ_0^H .

Algorithm 3: Pseudoc\u00f3digo da derivada estoc\u00e1stica $\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}}$ e da estrat\u00e9gia de *hedging*

θ_0^H

Data: Parti\u00e7\u00f5es $\mathcal{T}^{k,j}$, Fam\u00edlias $\eta^{k,j}$, Processos $A^{k,j}$, Tempo de maturidade T , N\u00edvel de discretiza\u00e7\u00e3o k , N\u00famero de dimens\u00f5es p , N\u00famero de ativos d , N\u00famero de simula\u00e7\u00f5es da esperan\u00e7a condicional L , N\u00famero de simula\u00e7\u00f5es da derivada estoc\u00e1stica M

Result: Derivada estoc\u00e1stica $\mathbb{D}_{T_1^{k,j}}^{k,j} X$, $j = 1, \dots, d$, Estrat\u00e9gia de *hedging* θ_0^H

```

1  $\mathcal{T} \leftarrow \text{Mesclar}(\mathcal{T}^{k,j})$  Criar a parti\u00e7\u00e3o fina  $\mathcal{T}^k$  a partir das parti\u00e7\u00f5es  $\mathcal{T}^{k,j}$ 
2 for  $j \leftarrow 1$  to  $p$  do
3    $m_j^k \leftarrow \text{quais}(\mathcal{T}^k == T_1^{k,j})$   $m_j^k$  \u00e9 a posi\u00e7\u00e3o de  $T_1^{k,j}$  na parti\u00e7\u00e3o fina  $\mathcal{T}^k$ 
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $M$  do
5     for  $j \leftarrow 1$  to  $p$  do
6        $\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}} \leftarrow \frac{1}{2^{-k} \eta_1^{k,j}} \left( \hat{\mathbb{E}} \left[ H | \mathcal{F}_{T_1^{k,j}}^k \right] - \hat{\mathbb{E}} \left[ H | \mathcal{F}_{\tau_1^{k,j}}^k \right] \right)$  C\u00e1lculos de  $\mathbb{D}^{k,j} X_{T_1^{k,j}}$ 
7      $\phi_0^{H,S} \leftarrow \text{concatenar}(\mathbb{D}^{k,1} X_{T_1^{k,1}}, \dots, \mathbb{D}^{k,d} X_{T_1^{k,d}})$  Vetor de derivadas
       estoc\u00e1sticas
8      $(\bar{\theta}_0^H)_i \leftarrow (\phi_0^{H,S})^\top [\text{diag}(S_0) \sigma_0]^{-1}$  Cria o vetor das estrat\u00e9gias de hedging
        $\bar{\theta}_0^H$ 
9    $\theta_0^H \leftarrow \text{m\u00e9dia}(\bar{\theta})$  Estrat\u00e9gia de hedging  $\theta_0^H$ 

```

A simula\u00e7\u00e3o Monte Carlo de (5.3) \u00e9 realizada considerando o *payoff* $H = \Phi(S^j; 1 \leq j \leq p)$ como sendo um funcional $\Phi(S^{k,j}; 1 \leq j \leq p)$ do processo de saltos $A^k = (A^{k,1}, \dots, A^{k,p})$ baseado no esquema de aproxima\u00e7\u00e3o de Euler-Maruyama definido na Se\u00e7\u00e3o 4.1. Tamb\u00e9m, a fim de calcular a estrat\u00e9gia de *hedging* θ^H sobre um per\u00edodo de neg\u00f3cios $\{s_i; i = 0, \dots, q\}$, reali-

zamos o algoritmo descrito acima, porém, baseado na filtragem transladada dos movimentos Brownianos $W_{s_i}^{(j)}$ para $j = 1, \dots, p$ como descrito na Seção 3.4.

Observação 5.1. *Na prática, calibramos os parâmetros do modelo utilizado a partir de instrumentos líquidos como, por exemplo, as opções vanilla mais negociadas e superfícies de volatilidade. A partir destes parâmetros, seguimos os passos (5.3) e (5.5). A estratégia de hedging é então obtida a partir da calibração do modelo e do cálculo da quantidade (5.5) baseado em um período de negócios $\{s_i; i = 0, \dots, q\}$.*

5.2 Resultados

Nesta seção, fornecemos alguns resultados de simulação obtidos a partir do esquema numérico proposto na Seção 5.1, baseado nos resultados teóricos obtidos no Capítulo 3 deste trabalho.

5.2.1 Modelo de Black-Scholes multidimensional

Inicialmente, consideramos o clássico modelo de Black-Scholes multidimensional tal que o número de ativos é igual ao número de movimentos Brownianos, $d = p$. Neste caso, existe uma única medida martingale equivalente e a estratégia de *hedging* θ^H é dada por $\theta_t^H = \phi_t^{H,S} [\text{diag}(S_t)\sigma_t]^{-1}$ como ressaltamos na equação (3.24), $L_t^H = 0$ e o preço da opção é dado por $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$. Para ilustrar a aplicação do nosso método, estudamos um tipo bastante especial de opção exótica em que o *payoff* H depende de toda a trajetória do ativo: uma opção com barreiras *down and out* denominada BLAC (*Basket Lock Active Coupon*). Esta opção possui função *payoff* dada por

$$H = \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{\min_{t \in [0, T]} S_t^i \vee \min_{t \in [0, T]} S_t^j > L\}}$$

o que significa que, considerando $d \geq 2$ ativos, se 2 ou mais ativos tiverem valor mínimo ao longo do intervalo $[0, T]$ menores do que uma barreira inferior pré-estabelecida L , então a opção torna-se nula. Caso contrário, a opção retorna uma unidade monetária no tempo de maturidade T . Ressaltamos que, para este tipo de opção, existe uma fórmula fechada para a estratégia de *hedging* de modo que podemos comparar os resultados obtidos a partir da utilização do algoritmo apresentado na Seção 5.1 com resultados reais. A fim de avaliarmos a eficiência do nosso método, comparamos os resultados obtidos com aqueles apresentados no trabalho de Bernis *et al.* [9] que utilizaram esta mesma opção exótica em seu trabalho.

Neste sentido, consideramos $d = 5$ ativos, $r = 0\%$ para a taxa de juros e $T = 1$ para o tempo de maturidade. Para cada ativo, consideramos os valores iniciais $S_0^i = 100$, $1 \leq i \leq 5$ e calculamos a estratégia de *hedging* com respeito ao primeiro ativo S^1 com níveis de discretização $k = 3, 4, 5, 6$ e 20.000 simulações.

As volatilidades dos ativos são dadas por $\|\sigma^1\| = 35\%$, $\|\sigma^2\| = 35\%$, $\|\sigma^3\| = 38\%$, $\|\sigma^4\| = 35\%$ e $\|\sigma^5\| = 40\%$, a matriz de correlação definida por $\rho_{ij} = 0,4$ para $i \neq j$, em que $\sigma^i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i5})^\top$. Desta forma, a matriz de volatilidades é dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0,3288 & 0,0577 & 0,061 & 0,0577 & 0,0631 \\ 0,0577 & 0,3288 & 0,061 & 0,0577 & 0,0631 \\ 0,061 & 0,061 & 0,3588 & 0,061 & 0,0668 \\ 0,0577 & 0,0577 & 0,061 & 0,3288 & 0,0631 \\ 0,0631 & 0,0631 & 0,0668 & 0,0631 & 0,379 \end{pmatrix}.$$

A barreira utilizada foi $L = 76$. Na Tabela 5.1, apresentamos os resultados numéricos baseados no algoritmo descrito na Seção 5.1 para a estratégia de *hedging* θ^H no tempo $t = 0$.

A Tabela 5.1 fornece os resultados obtidos para a estratégia de *hedging*, o erro de aproximação, isto é, a diferença entre o valor aproximado e o verdadeiro valor, o erro padrão dos valores obtidos para θ_0^H , a porcentagem de erro cometida que foi calculada como sendo a razão entre o erro de aproximação e o verdadeiro valor e os limites inferior (LI) e superior (LS) do intervalo de confiança com nível de 95% para a média das estratégias de *hedging* no instante $t = 0$. O esperado é que, conforme o nível de discretização k aumente, $\theta_0^{k,H}$ se aproxime do verdadeiro valor do *hedging* e, conseqüentemente, o erro de aproximação, diminua. Podemos constatar, baseados nos resultados obtidos e apresentados na Tabela 5.1 que, quando o nível de discretização é $k = 6$, o intervalo de confiança para a média contém o verdadeiro valor de *hedging* de 0,00338, de modo que podemos assumir, de fato, a convergência do algoritmo.

k	Hedging	Erro Padrão	LI	LS	Valor Real	Diferença	Erro %
3	0,00376	$2,37 \times 10^{-5}$	0,00371	0,00380	0,00338	0,00038	11,15%
4	0,00365	$4,80 \times 10^{-5}$	0,00356	0,00374	0,00338	0,00027	8,03%
5	0,00366	$9,31 \times 10^{-5}$	0,00348	0,00384	0,00338	0,00028	8,35%
6	0,00342	$1,82 \times 10^{-4}$	0,00306	0,00378	0,00338	0,00004	1,29%

Tabela 5.1: Estratégia de *hedging* via simulação Monte Carlo para uma opção BLAC *down and out* em um modelo de Black-Scholes de dimensão 5.

Na Figura 5.12, estão representadas as estimativas médias de *hedging* com respeito ao número de simulações. Devemos notar que, quando k cresce, o erro padrão também cresce, o que sugere que, apesar de valores médios mais próximos do verdadeiro valor, a dispersão dos valores médios torna-se um pouco maior. Como o erro padrão depende inversamente do número de simulações, o ideal seria realizar um número maior de simulações, conforme o crescimento do nível de discretização k para termos uma maior acurácia dos valores obtidos.

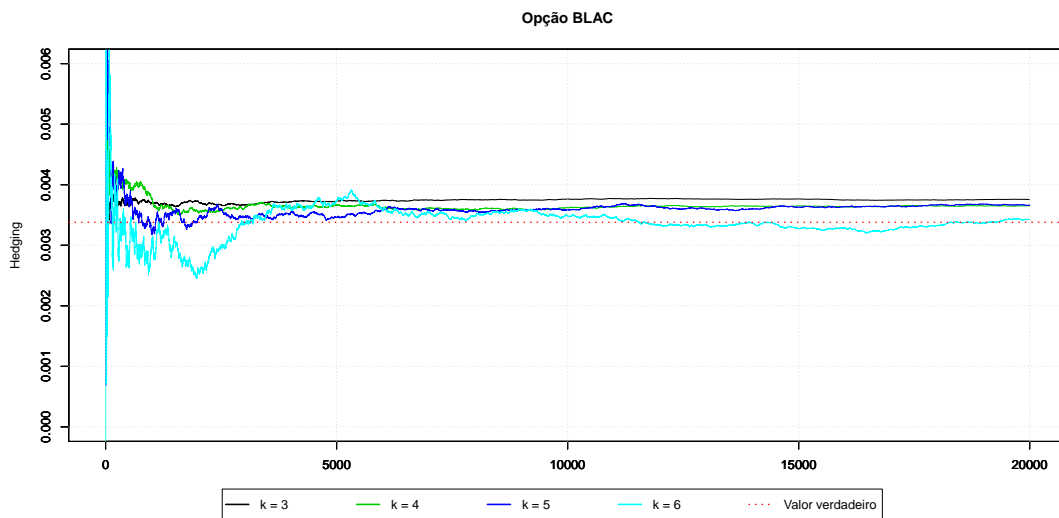


Figura 5.12: Estratégia de *hedging* via simulação Monte Carlo para uma opção BLAC *down and out* em um modelo de Black-Scholes de dimensão 5.

5.2.2 Erros de hedging médios

Agora, queremos apresentar resultados da simulação das estratégias de *hedging* ao longo do intervalo de tempo $[0, T]$. Para isto, utilizaremos dois modelos de volatilidade não constante: o modelo de elasticidade constante da variância (CEV) e o modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) [50]. Além disso, as estratégias de *hedging* serão calculadas baseadas na decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada e nas abordagens quadráticas de minimização do risco local e de variância média descritas no Capítulo 2. Observamos que, para a decomposição de Föllmer-Schweizer e a abordagem de minimização do risco local utilizamos a medida martingale minimal e para o critério de variância média utilizamos a medida martingale de variância ótima (VOMM), respectivamente. Como o interesse é trabalhar com opções do tipo

européia cuja função *payoff* H depende de toda a trajetória do preço do ativo ao longo do tempo, consideramos uma opção européia do tipo *one-touch*, cuja função *payoff* é dada por

$$H = \mathbb{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t > L\}}. \quad (5.6)$$

Esta opção, pode ser interpretada da seguinte forma: se o ativo ultrapassa uma barreira superior de valor L , então a função *payoff* retorna uma unidade monetária. Caso contrário, o *payoff* é nulo.

Baseado no resultado apresentado no Corolário 3.2, utilizamos o algoritmo descrito na Seção 5.1 para calcular o erro cometido ao aproximar o *payoff* H por

$$\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}}[H] + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{\theta}_{t_i, 0}^{k, H} (S_{t_i, t_{i+1}-t_i} - S_{t_i, 0}).$$

Neste caso, a estratégia de *hedging* será calculada nos instantes determinísticos igualmente espaçados $0 = t_0 < t_1 < \dots, t_n = T$. O erro de aproximação será denominado erro de *hedging* e podemos resumir o algoritmo necessário para seu cálculo nos seguintes passos:

Algoritmo para cálculo do erro de *hedging* médio

1. Inicialmente, simulamos M trajetórias sob a medida física \mathbb{P} e calculamos o *payoff* H .
2. Então, consideramos uma partição determinística do intervalo $[0, T]$ em n (número de estratégias de *hedging* no período) instantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}$ tal que $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$, para $i = 0, \dots, n - 1$.

Na Figura 5.13 exemplificamos a situação em que uma trajetória é gerada a partir da medida física \mathbb{P} e a partição determinística composta pelos pontos nos quais será calculada a estratégia de *hedging* dinâmico é representada pelas linhas verticais azuis.

3. Simulamos no instante $t_0 = 0$, o preço da opção $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}}[H]$ e a estratégia de *hedging* inicial $\hat{\theta}_{0,0}^{k, H}$ através das equações (5.4) e (5.5) sob a medida equivalente $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_2^e$. Para isto, seguimos o algoritmo descrito na Seção 5.1.

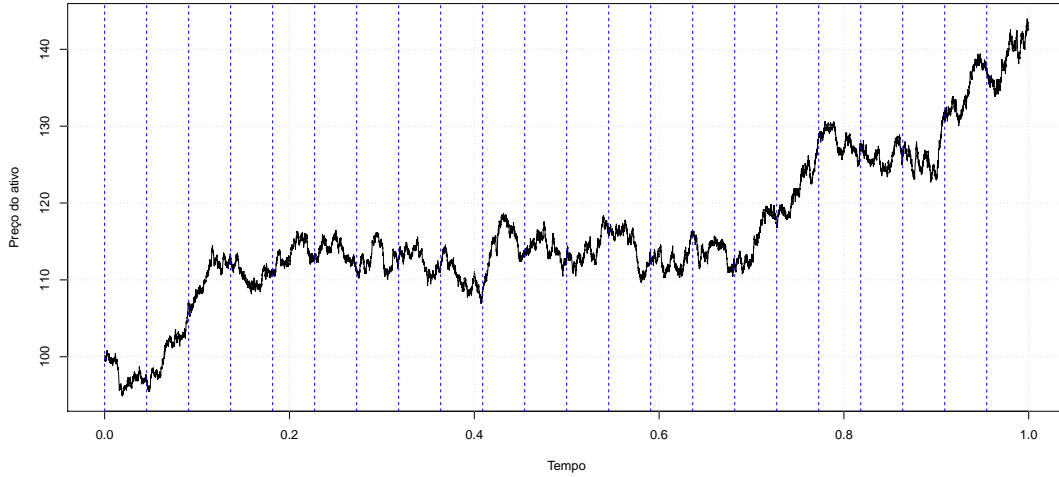


Figura 5.13: Partição determinística para cálculo do erro de *hedging* no intervalo $[0, 1]$.

4. Simulamos $\hat{\theta}_{t_i,0}^{k,H}$ através do argumento de translação baseado na propriedade forte de Markov do movimento Browniano como descrito na Seção 3.4.
5. Calculamos \hat{H} por

$$\hat{H} := \hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}}[H] + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{\theta}_{t_i,0}^{k,H} (S_{t_i,t_{i+1}-t_i} - S_{t_i,0}). \quad (5.7)$$

6. Calculamos as estimativas do erro de *hedging* $\hat{\gamma}$ dadas por $\hat{\gamma} := |H - \hat{H}|$, para cada um dos cenários.
7. Calculamos o erro de *hedging* médio dado por $AV_{\hat{\gamma}} := \frac{1}{M} \sum_{\ell=1}^M \hat{\gamma}_{\ell}$ em que $\hat{\gamma}_{\ell}$ é o erro de *hedging* calculado no ℓ -ésimo cenário e M é o número total de cenários utilizados no experimento.
8. Calculamos

$$E(AV_{\hat{\gamma}}) := 100 \times \frac{AV_{\hat{\gamma}}}{\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}}[H]}$$

como sendo o erro percentual do erro de *hedging* em relação ao preço da opção.

Observação 5.2. *Ressaltamos que, quando a estratégia de minimização de risco local não está disponível, também esperamos obter erros de hedging médios pequenos quando trabalhamos com*

decomposições de Föllmer-Schweizer generalizadas devido à decomposição martingale ortogonal. No critério quadrático de variância média, dois termos aparecem na estratégia de hedging ótima: o componente de hedging puro $\theta^{H, \tilde{\mathbb{P}}}$ da decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe sob a medida martingale de variância ótima $\tilde{\mathbb{P}}$ e $\tilde{\zeta}$ como descrito nas equações (2.18) e (2.19). Para o modelo de Heston, $\tilde{\zeta}$ foi explicitamente calculado por Hobson (2004) [53]. Utilizamos sua fórmula em nossas simulações numéricas juntamente com $\hat{\theta}^{k,H}$ sob $\tilde{\mathbb{P}}$ no cálculo dos erros de hedging sob o critério de variância média. Veja a expressão (5.15) abaixo para mais detalhes.

5.2.3 Modelo de elasticidade constante da variância (CEV)

O modelo de elasticidade constante da variância (CEV) desenvolvido por Cox (1975) [22] tenta capturar a volatilidade estocástica e o efeito *leverage*. Neste modelo unidimensional ($d = p = 1$), o preço do ativo descontado S é descrito, sob a medida física \mathbb{P} , pela seguinte equação diferencial estocástica

$$dS_t = S_t \left[(b - r) dt + \sigma S_t^{(\beta-2)/2} dB_t \right], \quad S_0 = s, \quad (5.8)$$

em que B é um \mathbb{P} -movimento Browniano, e a constante $\varrho = \frac{\beta-2}{2}$ está relacionada a constante de elasticidade $\beta - 2$. Neste caso, se $\varrho < 1$ temos o efeito *leverage*, em que a volatilidade do ativo cresce quando o preço do ativo decresce e se $\varrho > 1$ temos o efeito *leverage* inverso, em que a volatilidade do ativo cresce quando o preço do ativo também cresce. Então, temos que o *market price at risk* é dado por

$$\psi_t = \frac{b - r}{\sigma S_t^{(\beta-2)/2}}, \quad (5.9)$$

de forma que o modelo pode ser reescrito, na medida martingale equivalente $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$ como

$$dS_t = \sigma S_t^{\beta/2} dW_t \quad (5.10)$$

em que W é um \mathbb{Q} -movimento Browniano. Para o cálculo do erro de *hedging* utilizando a simulação Monte Carlo descrita na Subseção 5.2.2, realizamos um total de $M = 1000$ cenários

com os seguintes parâmetros: a barreira para a opção *one-touch* descrita em (5.6) é $L = 105$, a taxa de juros é $r = 0$, a taxa média de retorno é $b = 0,01$, o tempo de maturidade é $T = 1$ mês, $\sigma = 0,2$, o valor inicial do ativo é $S_0 = 100$ e $\beta = 1,6$ de forma que a constante de elasticidade é $-0,4$. Simulamos os erros de *hedging* médios considerando os níveis de discretização $k = 3, 4$ e 5 . Realizamos 11, 16, 22 e 44 estratégias de *hedging* ao longo do intervalo $[0, T]$. Observamos que, supondo 22 dias de negócios por mês, podemos assumir que 11, 22 e 44 estratégias de *hedging* no intervalo $[0, 1]$ correspondem, respectivamente, a uma estratégia a cada dois dias, uma estratégia por dia e duas estratégias por dia. A partir do Corolário 3.2, sabemos que este procedimento é consistente.

A Tabela 5.2 fornece os resultados obtidos para os erros de *hedging*. Nesta tabela, também fornecemos o erro padrão relacionado as estimativas do erro de *hedging*, a porcentagem de erro dada por $E(AV_{\hat{\gamma}})$, os limites inferior (LI) e superior (LS) do intervalo de confiança de nível 95% e o preço da opção $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$. É importante ressaltar que, conforme k aumenta, a porcentagem de erro $E(AV_{\hat{\gamma}})$ diminui, o que é esperado devido aos resultados de convergência obtidos no Capítulo 3 e na Seção 3.4. Os valores da porcentagem de erro $E(AV_{\hat{\gamma}})$, juntamente com as estimativas de erro de *hedging* nos fornecem evidências da convergência do método. Também é importante observar que, para $k = 5$, todos os intervalos de confiança contém o valor zero. Além disso, conforme o número de estratégias de *hedging* aumentam, o erro padrão diminui.

k	Estratégias de <i>hedging</i>	$AV_{\hat{\gamma}}$	Erro padrão	LI	LS	Preço	$E(AV_{\hat{\gamma}})$
3	11	0,0449	0,0073	0,0305	0,0592	0,4803	9,34%
3	16	0,0446	0,0063	0,0323	0,0569	0,4804	9,28%
3	22	0,0441	0,0056	0,0332	0,0550	0,4804	9,18%
3	44	0,0431	0,0044	0,0345	0,0516	0,4803	8,96%
4	11	0,0213	0,0071	0,0017	0,0295	0,5062	4,22%
4	16	0,0203	0,0064	0,0078	0,0327	0,5060	4,00%
4	22	0,0167	0,0053	0,0062	0,0271	0,5061	3,29%
4	44	0,0158	0,0038	0,0084	0,0232	0,5057	3,12%
5	11	0,0067	0,0072	-0,0074	0,0209	0,5205	1,30%
5	16	0,0056	0,0065	-0,0186	0,0073	0,5196	1,08%
5	22	0,0050	0,0055	-0,0057	0,0157	0,5187	0,97%
5	44	0,0044	0,0040	-0,0034	0,0122	0,5204	0,85%

Tabela 5.2: Erro de *hedging* médio de uma opção *one-touch* escrita no modelo CEV

5.2.4 Modelo de volatilidade estocástica de Heston

Nesta subseção consideramos o modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) [50]. Como foi apresentado na Subseção 4.3, este modelo leva em consideração uma distribuição não lognormal para os retornos dos ativos, o efeito *leverage* e a propriedade de reversão a média da volatilidade. A parametrização utilizada aqui será a descrita em Hobson (2004) [53] e as estratégias de *hedging* serão calculadas considerando três tipos de metodologias diferentes: o critério quadrático de minimização do risco local, a decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada e o critério quadrático de variância média como descrito no Capítulo 2 e na Observação 5.2. A dinâmica do preço descontado sob a medida física \mathbb{P} é dada por

$$\begin{cases} dS_t = S_t (b_t - r_t) V_t dt + S_t \sqrt{V_t} dB_t^{(1)} \\ dV_t = 2\lambda (\theta - V_t) dt + 2\sigma \sqrt{V_t} dZ_t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.11)$$

em que $Z_t = \rho B_t^{(1)} + \bar{\rho} B_t^{(2)}$, $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$ e $(B^{(1)}, B^{(2)})$ é um \mathbb{P} -movimentos Brownianos bidimensional com $B^{(1)}$ independente de $B^{(2)}$ como apresentado em 4.3. Além disso, assumimos que λ , θ e σ satisfazem a condição de Feller (4.18) de forma que o modelo está bem definido.

Seguindo as ideias apresentadas em Hobson (2004) [53], consideramos a mudança de variável $Y = \sqrt{V_t}$, de forma que podemos reescrever (5.11) na forma

$$\begin{cases} dS_t = S_t Y_t^2 (b_t - r_t) dt + S_t Y_t dB_t^{(1)} \\ dY_t = \lambda \left(\frac{m}{Y_t} - Y_t \right) dt + \sigma dZ_t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.12)$$

em que $m = \theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}$. Neste caso, temos que o *market price at risk* é dado por

$$\psi_t = \frac{Y_t^2 (b_t - r_t)}{Y_t} = Y_t (b_t - r_t) \quad (5.13)$$

e o modelo pode ser reescrito na medida martingale equivalente \mathbb{Q} da forma

$$\begin{cases} dS_t = S_t Y_t dW_t^{(1)} \\ dY_t = \left[\lambda \left(\frac{m}{Y_t} - Y_t \right) - \sigma \rho Y_t (b_t - r_t) - \sigma \bar{\rho} \nu_t \right] dt + \sigma \left(\rho dW_t^{(1)} + \bar{\rho} dW_t^{(2)} \right) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.14)$$

em que $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ é um \mathbb{Q} -movimento Browniano bidimensional. A seguir, consideramos os resultados obtidos para as estratégias de *hedging* nos critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média e com a decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada. Para o critério de minimização do risco local, calculamos apenas a estratégia de *hedging* e o preço da opção no instante inicial $t = 0$ para uma opção de venda europeia simples de modo que podemos comparar o resultado obtido com resultados reais obtidos no trabalho de Heath *et al.* (2001) [49]. Na sequência, apresentamos os resultados obtidos acerca do cálculo do erro de *hedging* utilizando o algoritmo descrito na Subseção 5.2.2 considerando o critério quadrático de variância média e a decomposição generalizada de Föllmer-Schweizer para a opção *one-touch* com função *payoff* definida em (5.6).

Critério de minimização do risco local

Por motivos de comparação com o trabalho de Heath *et al.* (2001) [49], consideramos o cálculo de uma estratégia *hedging* para uma opção de venda europeia cuja função *payoff* é dada por $H = (K - S_T)^+$ sob um modelo de Heston com parâmetro de correlação $\rho = 0$. Tomamos $S_0 = 100$, o *strike price* $K = 100$, $T = 1$ (mês) para o tempo de maturidade e usamos os níveis de discretização $k = 3, 4$ e 5 . Além disso, consideramos os parâmetros $\lambda = 2, 5$, $\theta = 0,04$, $\sigma = 0,3$, $r = 0$ e $Y_0 = 0,02$. A estratégia de *hedging* $\theta^{H, \hat{\mathbb{P}}}$, baseada na metodologia de minimização do risco local é limitada e possui trajetórias contínuas, de forma que o Teorema 3.3 se aplica para este caso.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados da estratégia de *hedging* $\hat{\theta}_{0,0}^{k,H}$ ao utilizar o algoritmo descrito na Seção 5.1. A Figura 5.14 fornece a simulação de Monte Carlo da estratégia de *hedging*, enquanto a Figura 5.15 fornece a simulação de Monte Carlo do preço da opção, ambos relativos ao número de simulações $M = 10.000$. Notamos que nossos resultados estão de acordo

com os resultados obtidos no trabalho de Heath *et al.* (2001) [49] a partir de métodos de equações diferenciais parciais. O verdadeiro valor da estratégia de *hedging* no instante $t = 0$ é de, aproximadamente, $-0,44$. A Tabela 5.3 fornece os erros padrões relativos às estratégias de *hedging* calculadas e aos preços descritos na Seção 5.1.

k	Hedging	Erro padrão	Preço	Erro padrão
3	-0,4480	$6,57 \times 10^{-4}$	10,417	$5,00 \times 10^{-3}$
4	-0,4506	$1,28 \times 10^{-3}$	10,422	$3,35 \times 10^{-3}$
5	-0,4453	$2,54 \times 10^{-3}$	10,409	$2,75 \times 10^{-3}$

Tabela 5.3: Estratégia de *hedging* de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston

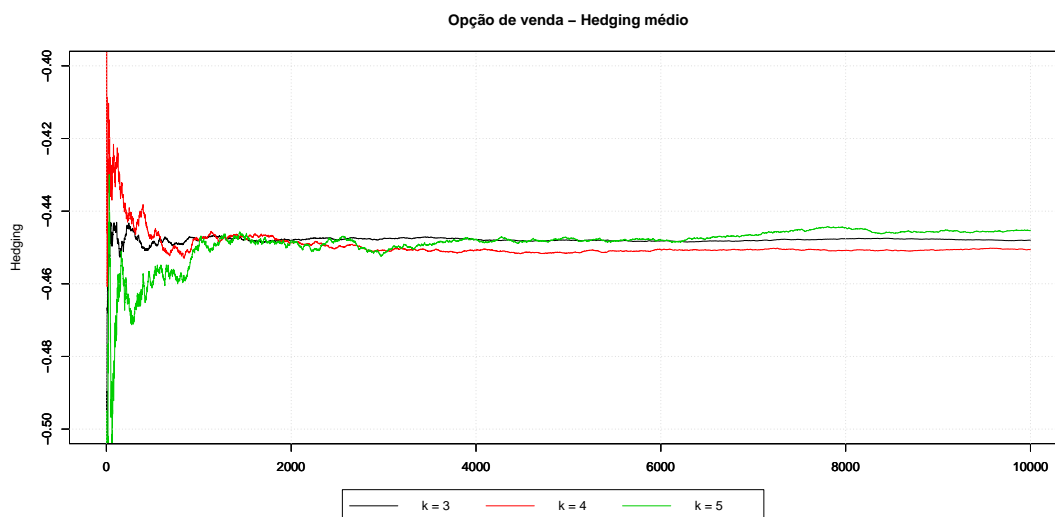


Figura 5.14: Estratégia de *hedging* de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston

Decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada

Baseado no Corolário 3.2, também apresentamos o erro de *hedging* médio associado à opção *one-touch* escrita sobre o modelo de Heston com correlação não-nula. Consideramos o número total de simulações $M = 1000$ e tomamos os parâmetros $\lambda = 3,63$, $\theta = 0,04$, $\rho = -0,53$, $\sigma = 0,3$, $r = 0$, $b = 0,01$, $Y_0 = 0,3$ e $S_0 = 100$ em que a barreira é $L = 105$. Calculamos o erro de *hedging* médio ao longo do intervalo $[0, 1]$ com níveis de discretização $k = 3$ e $k = 4$. Calculamos

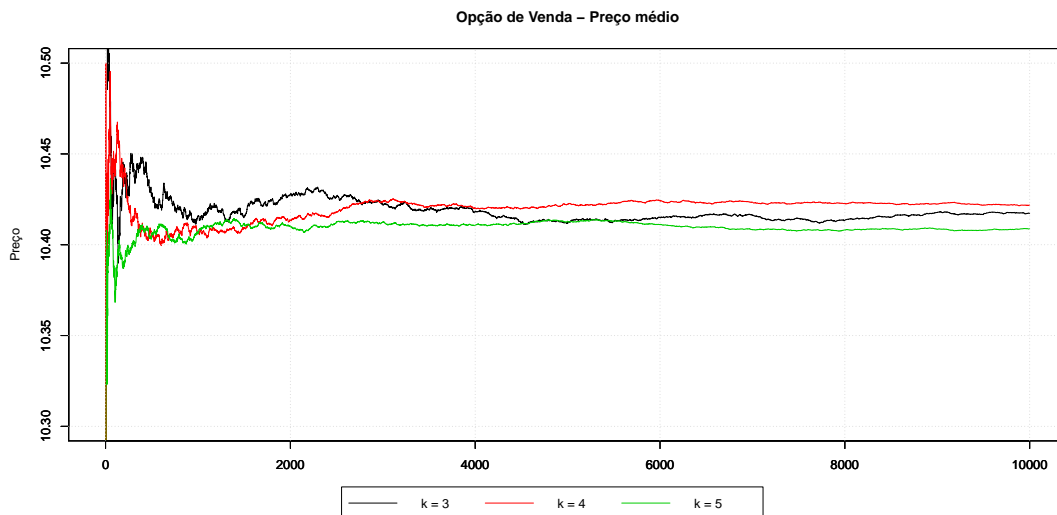


Figura 5.15: Preço de uma opção de venda europeia sob o critério de minimização do risco local para o modelo de Heston

22 e 44 estratégias de *hedging* no período (o que corresponde a uma e duas estratégias de *hedging* por dia, respectivamente). Os resultados estão resumidos na Tabela 5.4. Ela fornece o erro padrão do conjunto $\{\hat{\gamma}_\ell; 1 \leq \ell \leq M\}$, o preço da opção, os limites inferior (LI) e superior (LS) do intervalo de confiança de nível 95% de $AV_{\hat{\gamma}}$ e o erro percentual $E(AV_{\hat{\gamma}})$.

É importante observar que não existe nenhum resultado acerca da existência de estratégias de *hedging* obtidas a partir do critério quadrático de minimização do risco local para opções *one-touch* escritas sob o modelo de Heston com correlação não nula. Entretanto, como ressaltado na Observação 5.2, esperamos que as estratégias de *hedging* puras baseadas na decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada aproximem muito bem o erro de *hedging* médio. Isto é o que obtemos nos resultados de simulação. Na tabela 5.4 vemos que, conforme k aumenta, o erro percentual $E(AV_{\hat{\gamma}})$ diminui. Para $k = 3$, também temos um decréscimo no erro padrão, porém quando $k = 4$, o erro padrão é praticamente o mesmo (com um pequeno crescimento). Possivelmente, para maiores valores de k , sejam necessárias a simulação de mais cenários para que possamos visualizar um decréscimo no erro padrão.

Critério de variância média

Apresentamos aqui os erros de *hedging* médios associados a opção *one-touch* escrita sobre o modelo de Heston com correlação não nula sob o critério quadrático de variância média.

k	Estratégias de <i>hedging</i>	AV $_{\tilde{\gamma}}$	Erro padrão	LI	LS	Preço	E(AV $_{\tilde{\gamma}}$)
3	22	0,0422	0,0084	0,0258	0,0586	0,7399	5,70%
3	44	0,0382	0,0067	0,0250	0,0515	0,7397	5,17%
4	22	0,0210	0,0080	0,0053	0,0366	0,7733	2,71%
4	44	0,0198	0,0082	0,0036	0,0360	0,7737	2,56%

Tabela 5.4: *Hedging error* médio de uma opção *one-touch* com a decomposição de Föllmer-Schweizer generalizada para o modelo de Heston

Novamente, nós simulamos o erro de *hedging* médio ao longo do intervalo $[0, 1]$ utilizando $k = 3$ e $k = 4$ como níveis de discretização do movimento Browniano. Também foram realizadas 22 e 44 estratégias de *hedging* no período (que correspondem, respectivamente, a uma e duas estratégias de *hedging* por dia) com parâmetros $r = 0$, $b = 0,01$, $\lambda = 3,63$, $\theta = 0,04$, $\rho = -0,53$, $\sigma = 0,3$, $Y_0 = 0,3$ e $S_0 = 100$. A barreira da opção *one-touch* é $L = 105$. Existem algumas quantidades que não estão relacionadas com a decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe que devem ser calculadas (Veja Observação 5.2). O processo $\tilde{\zeta}$, por exemplo, não está relacionado com a decomposição, mas pode ser descrito a partir do Teorema 1.1 em Hobson (2004) [53] e é dado por

$$\tilde{\zeta}_t = \tilde{Z}_0 \rho \sigma F(T - t) - \tilde{Z}_0 b; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.15)$$

em que a função F é dada por

$$F(t) = \frac{C}{A} \tanh \left(ACt + \tanh^{-1} \left(\frac{AB}{C} \right) \right) - B; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.16)$$

já que, considerando os parâmetros acima estamos, exatamente, no caso 2 da Proposição 5.1 descrita em Hobson (2004) [53], em que $A = \sqrt{|1 - 2\rho^2|} \sigma^2$, $B = \frac{\lambda + 2\rho\sigma b}{\sigma^2 |1 - 2\rho^2|}$ e $C = \sqrt{D}$ com $D = 2b^2 + \frac{(\lambda + 2\rho\sigma b)^2}{\sigma^2 (1 - 2\rho^2)}$. A condição inicial \tilde{Z}_0 é dada por

$$\tilde{Z}_0 = \frac{Y_0^2}{2} F(T) + \lambda \theta \int_0^T F(s) ds. \quad (5.17)$$

Os resultados acerca dos erros de *hedging* médios estão resumidos na Tabela 5.5. Ela fornece o erro padrão de $\{\hat{\gamma}_\ell; 1 \leq \ell \leq M\}$ em que o número total de simulações é $M = 1000$, o preço da opção, os limites inferior (LI) e superior (LS) do intervalo de confiança de nível 95% de $AV_{\hat{\gamma}}$ e o erro percentual $E(AV_{\hat{\gamma}})$ relativo a AV . Comparado com o critério de minimização do risco local, os resultados mostram um erro percentual menor para $k = 4$. Também, em todos os casos, os resultados mostram menores valores para os erros padrão, o que sugere que o critério de variância média fornece valores mais próximos da estratégia de *hedging*. Novamente, para um valor fixo de k , quando o número de estratégias de *hedging* aumentam, os erros padrões diminuem.

k	Estratégias de <i>hedging</i>	$AV_{\hat{\gamma}}$	Erro padrão	LI	LS	Preço	$E(AV_{\hat{\gamma}})$
3	22	0,0674	0,0052	0,0572	0,0777	0,7339	9,19%
3	44	0,0577	0,0044	0,0490	0,0663	0,7340	7,86%
4	22	0,0143	0,0056	0,0034	0,0252	0,7767	1,84%
4	44	0,0134	0,0038	0,0060	0,0209	0,7765	1,73%

Tabela 5.5: *Hedging error* médio de uma opção *one-touch* sob o critério de variância média para o modelo de Heston

Conclusões Finais

Nesta tese, apresentamos um algoritmo construtivo e eficiente para a precificação e o cálculo de estratégias de *hedging* de opções europeias em mercados incompletos baseados na decomposição de Galtchouk-Kunita-Watanabe para os critérios quadráticos de minimização do risco local e de variância média. O algoritmo é totalmente baseado em aproximações desenvolvidas para mercados Brownianos multidimensionais. A partir de ideias simples de translações, baseadas na propriedade forte de Markov, também utilizamos o método para o cálculo de estratégias de *hedging* dinâmicas no intervalo $[0, T]$. O método numérico é totalmente baseado em uma discretização aleatória do intervalo $[0, T]$ baseada nos instantes em que os movimentos Brownianos atingem níveis pré-especificados de amplitude 2^{-k} .

Os resultados obtidos se mostraram bastante próximos das soluções reais, nos casos em que estas soluções estão disponíveis para comparação. Mesmo quando não existem soluções disponíveis, o estudo do erro de *hedging* comprovou que, conforme o nível de discretização utilizado aumenta, o erro percentual da aproximação converge para zero. Desta forma, podemos

concluir que a metodologia implementada é eficiente para a precificação e cálculo de estratégias de *hedging* para opções europeias que dependam ou não de toda a trajetória do ativo em modelos com volatilidade local ou volatilidade estocástica.

Além do algoritmo, também apresentamos um estudo de convergência para o método numérico de Euler-Maruyama aplicado ao modelo de Heston, utilizando a discretização aleatória. Observamos que este método é essencial para o algoritmo, já que uma etapa fundamental do método é a aproximação do processo de preços descontados S . Ressaltamos que o estudo de convergência, apesar de eficiente, não apresenta uma taxa de convergência explícita e que, apesar de termos utilizado o método de Euler-Maruyama para o modelo CEV, não temos resultados teóricos que garantem a aproximação do preço sob este método. Desta forma, um tópico interessante para estudos futuros, seria a convergência de métodos numéricos para equações diferenciais estocásticas utilizadas para modelos de mercado com volatilidade estocástica mais gerais utilizando a discretização aleatória e que contenham uma taxa de convergência adequada.

Outro tópico interessante para estudos futuros é avaliar o cálculo de estratégias de *hedging* em modelos de mercado compostos por equações que possuam um componente Browniano, juntamente com um componente puro salto a partir da discretização aleatória proposta neste trabalho. Também podemos ressaltar, como tópico de estudos futuros a estratégia do *superhedging* em que o interesse é obter uma estratégia de forma que, no instante final, o valor do *portfolio* seja maior ou igual ao *payoff* H .

Bibliografia

- [1] D.-H. Ahn and B. Gao. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of financial studies*, 12(4):721–762, 1999. [19](#)
- [2] A. Alfonsi. On the discretization schemes for the cir (and bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods and Applications mcma*, 11(4):355–384, 2005. [8](#), [83](#)
- [3] T. G. Andersen, L. Benzoni, and J. Lund. An empirical investigation of continuous-time equity return models. *The Journal of Finance*, 57(3):1239–1284, 2002. [83](#)
- [4] T. G. Andersen and J. Lund. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate. *Journal of econometrics*, 77(2):343–377, 1997. [83](#)
- [5] A. R. Bacinello. Valuation of contingent-claims characterising particular pension schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(2):177–188, 2000. [83](#)
- [6] G. Barone-Adesi and G. Sorwar. Interest rate barrier options. In *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*, pages 313–324. Springer, 2002. [83](#)
- [7] E. Benhamou. Optimal malliavin weighting function for the computation of the greeks. *Mathematical Finance*, 13(1):37–53, 2003. [3](#)

- [8] H.-P. Bermin. A general approach to hedging options: applications to barrier and partial barrier options. *Mathematical Finance*, 12(3):199–218, 2002. 2
- [9] G. Bernis, E. Gobet, and A. Kohatsu-Higa. Monte carlo evaluation of greeks for multi-dimensional barrier and lookback options. *Mathematical Finance*, 13(1):99–113, 2003. 2, 109
- [10] F. Biagini, P. Guasoni, and M. Pratelli. Mean-variance hedging for stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 10(2):109–123, 2000. 5, 7, 11
- [11] D. Bonetti, D. Leão, A. Ohashi, and V. Siqueira. A multidimensional monte carlo approach for dynamic hedging under stochastic volatility. *International Journal of Stochastic Analysis*, 2015:21, 2015. 7
- [12] M Bossy and A Diop. An efficient discretisation scheme for one dimensional sdes with a diffusion coefficient function of the form $|x|^a$, a in $[1/2, 1)$. Technical report, Technical report INRIA RR-5396, 2007. 8, 83
- [13] P. Briand and C Labart. Simulation of bsdes by wiener chaos expansion. *The Annals of Applied Probability*, 24(3):1129–1171, 2014. 6
- [14] M. Broadie and O. Kaya. Exact simulation of option greeks under stochastic volatility and jump diffusion models. In *Simulation Conference, 2004. Proceedings of the 2004 Winter*, volume 2, pages 1607–1615. IEEE, 2004. 83
- [15] Z. A. Burq and O. D. Jones. Simulation of brownian motion at first-passage times. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(1):64–71, 2008. 9, 27, 98, 99
- [16] A. Černý and J. Kallsen. On the structure of general mean-variance hedging strategies. *The Annals of probability*, 35(4):1479–1531, 2007. 5, 6
- [17] A. Černý and J. Kallsen. Mean-variance hedging and optimal investment in heston’s model with correlation. *Mathematical Finance*, 18(3):473–492, 2008. 6

- [18] T. Choulli, N. Vandaele, and M. Vanmaele. The föllmer–schweizer decomposition: comparison and description. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(6):853–872, 2010. 4
- [19] T. Choulli, N. Vandaele, and M. Vanmaele. Föllmer-schweizer or galtchouck-kunita-watanabe decomposition? a comparison and description. In *Workshop on Actuarial and Financial Statistics*, 2011. 4
- [20] David B Colwell, Robert J Elliott, and P Ekkehard Kopp. Martingale representation and hedging policies. *Stochastic processes and their applications*, 38(2):335–345, 1991. 2
- [21] R. Cont and D.-A. Fournié. Functional ito calculus and stochastic integral representation of martingales. *The Annals of Probability*, 41(1):109–133, 2013. 46
- [22] J. C. Cox. Notes on option pricing i: Constant elasticity of variance diffusions. Technical report, working paper, Stanford University, 1975. 82, 114
- [23] J. C. Cox, J. E. Ingersoll Jr, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 385–407, 1985. 8
- [24] G. Deelstra and F. Delbaen. Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Applied stochastic models and data analysis*, 14(1):77–84, 1998. 8, 83
- [25] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische annalen*, 300(1):463–520, 1994. 15
- [26] F. Delbaen and W. Schachermayer. Attainable claims with p'th moments. In *Annales-Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, volume 32, pages 743–764. Gauthier-Villars, 1996. 15, 24
- [27] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and Potential, volume B*. North Holland Publishing Company, 1982. 13, 35, 37, 52

- [28] C. Dellacherie, P.-A. Meyer, and M. Yor. Sur certaines propriétés des espaces de banach h_1 et bmo . In *Séminaire de Probabilités XII*, pages 98–113. Springer, 1978. [35](#), [39](#)
- [29] L. Delong. *Backward stochastic differential equations with jumps and their actuarial and financial applications*. Springer, 2013. [4](#), [6](#)
- [30] G. G. Drimus. Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model. *Quantitative Finance*, 12(11):1679–1694, 2012. [19](#)
- [31] B. Dupire. Functional itô calculus. *Bloomberg Portfolio Research paper*, (2009-04), 2009. [46](#)
- [32] R. Elie, J.-D. Fermanian, N. Touzi, et al. Kernel estimation of greek weights by parameter randomization. *The Annals of Applied Probability*, 17(4):1399–1423, 2007. [3](#)
- [33] R. J. Elliott. *Stochastic calculus and applications*, volume 18. Springer New York, 1982. [16](#)
- [34] R. J. Elliott and M. Kohlmann. A short proof of a martingale representation result. *Statistics & probability letters*, 6(5):327–329, 1988. [2](#)
- [35] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. *Applied Stochastic Analysis, Stochastic Monographs*, 5:389–414, 1991. [3](#), [16](#), [22](#), [23](#)
- [36] H. Föllmer and D. Sondermann. Hedging of non-redundant contingent claims. *Contributions to Mathematical Economics*, pages 205–223, 1986. [3](#), [22](#)
- [37] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.-L. Lions. Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance ii. *Finance and Stochastics*, 5(2):201–236, 2001. [2](#)
- [38] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and N. Touzi. Applications of malliavin calculus to monte carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3(4):391–412, 1999. [2](#)
- [39] D. Gkamas. Stochastic volatility and option pricing. 2001. [83](#)

- [40] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2003. 8, 71
- [41] E. Gobet and C. Labart. Error expansion for the discretization of backward stochastic differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 117:803–829, 2007. 6
- [42] E. Gobet and A Makhlof. L2-time regularity of bsdes with irregular terminal functions. *Stochastic Processes and their Applications*, 120:1105–1132, 2010. 6
- [43] E. Gobet and P. Turkedjiev. Approximation of backward stochastic differential equations using malliavin weights and least-squares regression. *Bernoulli*, available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00855760>, 2013. 6
- [44] E. Gobet and P. Turkedjiev. Linear regression mdp scheme for discrete backward stochastic differential equations under general conditions. Available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00642685>, 2013. 6
- [45] C. Gourieroux, J. P. Laurent, and H. Pham. Mean-variance hedging and numéraire. *Mathematical Finance*, 8(3):179–200, 1998. 5, 24
- [46] I. Gyöngy. A note on euler’s approximations. *Potential Analysis*, 8(3):205–216, 1998. 73
- [47] I. Gyöngy and M. Rásonyi. A note on euler approximations for sdes with hölder continuous diffusion coefficients. *Stochastic processes and their applications*, 121(10):2189–2200, 2011. 8
- [48] S.-W. He, C.-K. Wang, and J.-A. Yan. *Semimartingale theory and stochastic calculus*. Taylor & Francis US, 1992. 52
- [49] D. Heath, E. Platen, and M. Schweizer. A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets. *Mathematical Finance*, 11(4):385–413, 2001. 4, 5, 62, 117, 118

- [50] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2):327–343, 1993. [6](#), [19](#), [63](#), [81](#), [111](#), [116](#)
- [51] D. J. Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, 43(3):525–546, 2001. [71](#)
- [52] D. J. Higham and X. Mao. Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3):35–61, 2005. [8](#), [83](#), [86](#)
- [53] D. Hobson. Stochastic volatility models, correlation, and the q-optimal measure. *Mathematical Finance*, 14(4):537–556, 2004. [5](#), [6](#), [7](#), [11](#), [19](#), [24](#), [63](#), [70](#), [81](#), [114](#), [116](#), [120](#)
- [54] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland/Kodansha, second edition, 1989. [16](#)
- [55] P. Jäckel and R. Bubley. *Monte Carlo methods in finance*. J. Wiley, 2002. [71](#)
- [56] J. Jacod and A. V. Skorohod. Jumping filtrations and martingales with finite variation. In *Séminaire de Probabilités XXVIII*, pages 21–35. Springer, 1994. [30](#)
- [57] M. Jeanblanc, M. Mania, M. Santacrose, M. Schweizer, et al. Mean-variance hedging via stochastic control and bsdes for general semimartingales. *The Annals of Applied Probability*, 22(6):2388–2428, 2012. [6](#)
- [58] J. Kallsen, J. Muhle-Karbe, and R. Vierthauer. Asymptotic power utility-based pricing and hedging. *Mathematics and Financial Economics*, pages 1–28, 2009. [5](#)
- [59] J. Kallsen and R. Vierthauer. Quadratic hedging in affine stochastic volatility models. *Review of Derivatives Research*, 12(1):3–27, 2009. [6](#)
- [60] I. Karatzas, J. P. Lehoczky, S. E. Shreve, and Gan-Lin Xu. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and optimization*, 29(3):702–730, 1991. [15](#)

- [61] I. Karatzas and D. L. Ocone. A generalized clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 34(3-4):187–220, 1991. 2
- [62] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus, vol. 113 of.* 1991. 13
- [63] P. Kloeden and A. Neuenkirch. Convergence of numerical methods for stochastic differential equations in mathematical finance. *arXiv preprint arXiv:1204.6620*, 2012. 8, 73
- [64] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23. Springer Science & Business Media, 1992. 8, 71
- [65] A. Kohatsu-Higa and M. Montero. *Malliavin calculus in finance*. Springer, 2004. 3
- [66] M. Kohlmann and X. Y. Zhou. Relationship between backward stochastic differential equations and stochastic controls: a linear-quadratic approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(5):1392–1407, 2000. 6
- [67] D. Koleva and E. Nicolato. Option pricing under heston and 3/2 stochastic volatility models: an approximation to the fast fourier transform. 2012. 19
- [68] D. Kramkov and M. Sirbu. Sensitivity analysis of utility-based prices and risk-tolerance wealth processes. *The Annals of Applied Probability*, 16(4):2140–2194, 2006. 5
- [69] D. Kramkov and M. Sirbu. Asymptotic analysis of utility-based hedging strategies for small number of contingent claims. *Stochastic Processes and their Applications*, 117(11):1606–1620, 2007. 5
- [70] U. Küchler and E. Platen. Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay. *Mathematics and Computers in Simulation*, 54(1):189–205, 2000. 73
- [71] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006. 20

- [72] D. Leão, A. Ohashi, and A. B. Simas. Weak functional Itô calculus and applications. arxiv:1408.1423. 43, 46
- [73] D. Leão and A. Ohashi. Weak approximations for Wiener functionals. *The Annals of Applied Probability*, 23(4):1660–1691, 2013. 7, 8, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 45, 46
- [74] G. Maruyama. Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1):48–90, 1955. 72
- [75] P-A. Meyer. Convergence faible de processus, d’après Mokobodzki. In *Séminaire de Probabilités XI*, pages 109–119. Springer, 1977. 35, 39
- [76] G. N. Milstein. *Numerical integration of stochastic differential equations*, volume 313. Springer Science & Business Media, 1995. 8
- [77] D. Ocone. Malliavin’s calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 12(3-4):161–185, 1984. 2
- [78] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, sixth edition, 2003. 16, 20
- [79] H. Pham. On quadratic hedging in continuous time. *Mathematical Methods of Operations Research*, 51(2):315–339, 2000. 4, 22
- [80] H. E. Pham and J. P. Laurent. Dynamic programming and mean-variance hedging. *Finance and Stochastics*, 3(1):83–110, 1999. 12
- [81] P. E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, second edition, 2004. 16, 33, 52
- [82] T. Rheinländer and M. Schweizer. On l^2 -projections on a space of stochastic integrals. *The Annals of Probability*, 25(4):1810–1831, 1997. 4, 24
- [83] T. Sauer. Numerical solution of stochastic differential equations in finance. In *Handbook of Computational Finance*, pages 529–550. Springer, 2012. 8, 71

- [84] M. Schweizer. Hedging of options in a general semimartingale model. *Diss. ETHZ*, (8615), 1988. 22
- [85] M. Schweizer. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37:339–363, 1991. 3
- [86] M. Schweizer. Approximating random variables by stochastic integrals. *The Annals of Probability*, pages 1536–1575, 1994. 15
- [87] M. Schweizer. On the minimal martingale measure and the föllmer-schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and Applications*, pages 573–599, 1995. 4, 62
- [88] M. Schweizer. Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. *The Annals of Probability*, 24(1):206–236, 1996. 5
- [89] M. Schweizer. A guided tour through quadratic hedging approaches. *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, In Jouini, E. Cvitanic, J. and Musiela, M. (Eds.)*, pages 538–574, 2001. 5
- [90] M. Schweizer. Local risk-minimization for multidimensional assets and payment streams. *Banach Cent. Publ*, 83:213–229, 2008. 4, 23
- [91] J. Zhang. A numerical scheme for bsdes. *The Annals of Applied Probability*, 14:459–488, 2004. 6