Aeroacústica computacional através de simulação
numérica direta de escoamentos livres cisalhantes
compressíveis

Jônatas Ferreira Lacerda

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jônatas Ferreira Lacerda

Aeroacústica computacional através de simulação numérica direta de escoamentos livres cisalhantes compressíveis

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e
Matemática Computacional. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Julho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/ USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L634a   Lacerda, Jônatas Ferreira
Aeroacústica computacional através de simulação
numérica direta de escoamentos livres cisalhantes
compressíveis / Jônatas Ferreira Lacerda; orientador
Leandro Franco de Souza. - São Carlos - SP, 2016.
138 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional)
- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. escoamento compressível. 2. aeroacústica
computacional. 3. verificação de código. 4. método
das soluções manufaturadas. 5. teoria de estabilidade
linear. I. Souza, Leandro Franco de, orient. II.
Título.

Jônatas Ferreira Lacerda

Computational aeroacoustics through direct numerical simulation of free shear compressible flows

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the degree
of the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. FINAL VERSION

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
July 2016

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Diversas pessoas foram muito importantes durante essa etapa e sem a contribuição de cada uma eu não teria chegado até aqui.

À Tecumseh do Brasil Ltda. através de Enio Freitas e Luis Miguel por me proporcionarem essa oportunidade com total suporte.

Ao Prof. Leandro Franco de Souza, principalmente pela amizade e pelo trato fácil. Também, por aceitar um aluno de doutorado que não tinha dedicação exclusiva, mas sempre me recebendo com muita atenção, paciência e compreensão.

Aos colegas do LMAC, principalmente aos do Grupo de Estudos do Prof. Leandro por me receberem como um dos seus, e por não pouparem esforços em me auxiliar quando precisei.

Ao PhD. Andreas Babucke (IAG-Stuttgart) por fornecer os dados necessários para iniciarmos as simulações e responder prontamente todas as nossas questões.

Aos professores William Wolf (UNICAMP) e Márcio Mendonça (CTA) por todo suporte técnico e disponibilidade em nos atender.

Aos meus pais Élcio e Lúcia, minha irmã Raquel e seu esposo Luis, e avós por serem exemplos e porto seguro. Também aos familiares adquiridos durante essa jornada dna. Lucimar, seu Edinalvo e Gabriel por todo carinho.

À minha companheira de caminhada, parceira de todas as horas (principalmente nas de ausência), minha linda esposa em todos os sentidos Naira. Se eu conquistei algo, não foi sozinho e não teria conseguido nada sem você. Te amo!

A Deus, princípio e fim de tudo. A Ele toda honra, glória e louvor!

“ Se dois homens vêm andando por uma estrada, cada um com um pão, e, ao se encontrarem,
trocarem os pães, cada um vai embora com um.
Se dois homens vêm andando por uma estrada, cada um com uma idéia, e, ao se encontrarem,
trocarem as idéias, cada um vai embora com duas.”
(Provérbio Chinês)

RESUM O

LACERDA, J. F.. Aeroacústica computacional através de simulação numérica direta de escoamentos livres cisalhantes compressíveis. 2016. 138 f. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

O som gerado por escoamentos, também conhecido como aeroacústica, tem se tornado cada vez mais importante em áreas industriais diversas desde aviação comercial até aparelhos eletrodomésticos, afetando diretamente os requisitos necessários para o desenvolvimento de novos produtos. Um caso particular é o ruído gerado por válvulas de compressores herméticos de refrigeração, sendo o compressor a principal fonte de ruído em refrigeradores domésticos. O presente trabalho tem por objetivo iniciar o desenvolvimento de uma ferramenta confiável de simulação capaz de auxiliar engenheiros na predição de problemas de aeroacústica, especialmente um que possa no futuro ser utilizado para estudar o ruído gerado pelo escoamento em válvulas de compressores herméticos. Para isso, foi desenvolvido um código para simulação numérica direta de aeroacústica. Utilizou-se processamento paralelo com decomposição de domínio para usar Simulação Numérica Direta em um tempo factível; esquemas de discretização espaciais e temporais de alta ordem para minimizar ao máximo os fenômenos de dissipação e dispersão do escoamento e das ondas acústicas e uma série de tratamentos no domínio como filtragem e estiramento da malha como também condições de contorno características com o intuito de obter uma solução adequada para estudo de aeroacústica. Assim, são apresentadas todas as etapas desenvolvidas no equacionamento, implementação e verificação. A verificação foi realizada segundo um processo matemático formal (Método das Soluções Manufaturadas) com o qual obteve-se que a ordem de precisão dos cálculos era a mesma da ordem formal dos esquemas de discretização utilizados para todas as variáveis. Também obteve-se a mesma concordância para análise do divergente da velocidade, verificando o código para simulação numérica direta de aeroacústica. Posteriormente, foram realizadas simulações de escoamentos compressíveis cisalhantes e seus resultados comparados com dados apresentados em literatura. Também foram calculadas as taxas de amplificação de perturbações e comparadas com a Teoria de Estabilidade Linear. Novamente, foram obtidos resultados satisfatórios nessas etapas, mostrando que a implementação do código DNS está verificada.

Palavras-chave: escoamento compressível, aeroacústica computacional, verificação de código, método das soluções manufaturadas, teoria de estabilidade linear.

ABSTRACT

LACERDA, J. F.. Aeroacústica computacional através de simulação numérica direta de escoamentos livres cisalhantes compressíveis. 2016. 138 f. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Sound generated by flow, known as aeroacoustics, is becoming more important in several industrial areas from commercial aircraft to household appliances, affecting directly the requirements to the development of new products. A particular case is the noise generated by valves of refrigeration hermetic compressors, being the compressor the main noise source in household refrigerators. This work has the goal of initiate the development of a reliable tool able to help engineers to predict aeroacoustics problems, specially one that can be used in the future to study the noise generated by the flow in valves of hermetic compressors. To do so, it was developed a numerical code to perform direct numerical simulation of aeroacoustics. It was used parallel processing with domain decomposition to use Direct Numerical Simulation in a feasible time; high order temporal and spatial discretization schemes to minimize the most the dispersion and dissipation phenomena of the flow field and of the acoustics waves and a series of treatments in the domain as filtering and mesh stretching as well as characteristics boundary conditions aiming a proper solution to study aeroacoustics. Thus, here all the steps developed in the formulation, implementation and verification are presented. The verification was done according to a formal mathematical procedure (Method of Manufactured Solutions) with which was found that the precision order of the calculations was the same of the formal order of the used discretization schemes for all variables. The same agreement was also obtained to the analysis of the divergence of the velocity, verifying the code to direct numerical simulation of aeroacoustics. Posteriorly, it were simulated shear compressible flows and the results were compared to literature data. Also, it were calculated the amplification rates of the disturbances and compared to Linear Stability Theory. Once more, it was obtained satisfactory results in these steps, showing that the implementation of the DNS code is verified.

Key-words: compressible flow, computational aeroacoustics, code verification, method of manufactured solutions, linear stability theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Compressor hermético alternativo (Cortesia da Tecumseh do Brasil Ltda).	28
Figura 2 – Placa válvula contendo as lâminas de sucção e descarga (Cortesia da Tecumseh do Brasil Ltda).	29
Figura 3 – Caminhos de transmissão de ruído e vibração	29
Figura 4 – Esquema de um jato turbulento	32
Figura 5 – Difusor Radial	33
Figura 6 – Dissipação e dispersão de uma onda	36
Figura 7 – Esquema do domínio computacional tridimensional cartesiano para uma camada de mistura, destacando-se a região de interesse e a zona de amortecimento.	40
Figura 8 – Esquema do processo de simulação de um problema com o código numérico DNS.	50
Figura 9 – Esquema do funcionamento do código numérico DNS.	51
Figura 10 – Malha computacional com estiramento e divisão de domínios em cores preto e cinza.	52
Figura 11 – Número de onda real por número de onda modificado para a 1ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem; (c) DRP 4ª ordem; (d) valor exato;	60
Figura 12 – Número de pontos por comprimento de onda por erro para a 1ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem e (c) DRP 4ª ordem.	61
Figura 13 – (esquerda) Número de onda real por número de onda modificado para a 2ª derivada, e (direita) número de pontos por comprimento de onda por erro para a 2ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem e (c) exato;	62
Figura 14 – Número de onda modificado para o cálculo direto da segunda derivada versus aplicando a primeira derivada duas vezes.	63
Figura 15 – Sobreposição do entre domínios adjacentes e processo de comunicação usando MPI.	64
Figura 16 – Execução do algoritmo TDMA de forma sequencial e paralelizada.	64
Figura 17 – Esquema de distribuição dos elementos de processamento e os índices utilizados. myrankx, myranky são apresentados em eixos coordenado e myrank é definido no centro de cada elemento de processamento.	65
Figura 18 – Esquema do funcionamento do código numérico LST.	66
Figura 19 – Funções com transição suave.	69

Figura 20 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_2 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 2D.	79
Figura 21 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_1 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 2D.	80
Figura 22 – Representação dos termos fontes para as malhas 1 e 2.	81
Figura 23 – Representação das variáveis para malhas 1 e 5.	82
Figura 24 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_2 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 3D.	84
Figura 25 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_1 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 3D.	85
Figura 26 – Esquema de uma camada de mistura bidimensional.	86
Figura 27 – Esquema de uma solução similar para camada de mistura e condições de contorno.	87
Figura 28 – Perfis de velocidade u , densidade e temperatura na entrada para o caso da camada de mistura bidimensional.	88
Figura 29 – Taxas de amplificação espaciais para camada de mistura bidimensional com máximo valor em $w = 0;6293$	89
Figura 30 – (a) amplitude e (b) fase de perturbação para camada de mistura bidimensional.	89
Figura 31 – Esquema da malha computacional utilizada, divisão de domínios em cores preto e cinza e condições de contorno.	90
Figura 32 – Vorticidade transversal ao final da simulação. Níveis de contorno de 0,26 até 0,02, com incremento de 0,04. (a) Colonius, Lele e Moin (1997); (b) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (c) presente código.	91
Figura 33 – Velocidade longitudinal média. Níveis de contorno de 0,50 até 1,00. (a) Colonius, Lele e Moin (1997); (b) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (c) presente código.	92
Figura 34 – Comparação entre os resultados de Babucke, Kloker e Rist (2008) e do presente código da amplitude máxima da velocidade normal v	93
Figura 35 – Taxa de amplificação de v baseados na máxima amplitude ao longo da direção normal y . (a) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (b) presente código.	94
Figura 36 – Transformada de Fourier do campo de dilatação para a frequência (1/4). Níveis de contorno de -10^{-5} a 10^{-5} . (a) Colonius, Lele e Moin (1997) e (b) presente código.	95
Figura 37 – Esquema de um jato planar bidimensional.	96
Figura 38 – Perfis de (a) velocidade u , (b) temperatura e (c) densidade para o caso Weder2D.	97
Figura 39 – Taxas de amplificação espaciais para os casos (a) sinuoso e (b) varicoso.	98
Figura 40 – Amplitude e distribuição de fase da perturbação para os casos (a) sinuoso e (b) varicoso.	99

Figura 41 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo sinuoso. Níveis de contorno de -2,4 até 2,4 com incremento de 0,2. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.	100
Figura 42 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo varicoso. Níveis de contorno de -2,4 até 2,4 com incremento de 0,2. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.	100
Figura 43 – Perfil de velocidade u para o caso ReichertBiringen2D.	101
Figura 44 – Taxas de amplificação espaciais para os casos ReichertBiringen2D, modo sinuoso.	103
Figura 45 – Taxas de amplificação espaciais para os casos ReichertBiringen2D, modo varicoso.	103
Figura 46 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo sinuoso. Níveis de contorno de -0,5 até 0,5. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.	105
Figura 47 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo varicoso. Níveis de contorno de -0,5 até 0,5. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.	105
Figura 48 – Amplitude máxima da velocidade normal v ao longo de y para o modo sinuoso.	107
Figura 49 – Amplitude máxima da velocidade normal v ao longo de y para o modo varicoso.	107
Figura 50 – Máxima amplitude da velocidade normal v ao longo da direção y para cada posição x , para o modo sinuoso. Linhas sólidas: resultados com o presente código e linhas tracejadas: resultados obtidos com o código L ST.	108
Figura 51 – Máxima amplitude da velocidade normal v ao longo da direção y para cada posição x , para o modo varicoso. Linhas sólidas: resultados com o presente código e linhas tracejadas: resultados obtidos com o código L ST.	109
Figura 52 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 0; 25$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	111
Figura 53 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 1; 05$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	112
Figura 54 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 1; 50$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	113
Figura 55 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 2; 00$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	114
Figura 56 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 2; 50$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	115
Figura 57 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 3; 00$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$	116
Figura 58 – Termo fonte para a variável r - MMS 2D.	131
Figura 59 – Termo fonte para a variável r_u - MMS 2D.	131

Figura 60 – Termo fonte para a variável r_v - MMS 2D.	132
Figura 61 – Termo fonte para a variável E - MMS 2D.	132
Figura 62 – Termo fonte para a variável r - MMS 3D.	132
Figura 63 – Termo fonte para a variável r_u - MMS 3D.	132
Figura 64 – Termo fonte para a variável r_v - MMS 3D.	133
Figura 65 – Termo fonte para a variável r_w - MMS 3D.	133
Figura 66 – Termo fonte para a variável E - MMS 3D.	134
Figura 67 – Speedup para os casos bidimensionais.	136
Figura 68 – Eficiência para os casos bidimensionais.	137
Figura 69 – Tempo adicional para os casos bidimensionais.	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Tipos de fontes aeroacústicas e características de radiação.	32
Tabela 2	– Malhas utilizadas para o teste de condições de contorno prescritas.	77
Tabela 3	– Malhas utilizadas para o teste de condições de contorno prescritas.	83
Tabela 4	– Valores máximos de taxa de amplificação espacial para os casos sinuoso e varicoso.	97
Tabela 5	– Números de Mach e valores máximos de taxa de amplificação espacial para os casos ReichertBiringen2D, modo sinuoso.	102
Tabela 6	– Números de Mach e valores máximos de taxa de amplificação espacial para os casos ReichertBiringen2D, modo varicoso.	102
Tabela 7	– Parâmetros das simulações bidimensionais.	137

LISTA DE SÍMBOLOS

— Letras Latinas

a — velocidade do som no meio

$(a; b; c)$ — coeficientes dos esquemas de diferenças finitas

c — variável característica correspondente a onda acústica

$(c_p; c_v)$ — calor específico à pressão constante e calor específico à volume constante

d — diâmetro do orifício de passagem do difusor radial

D — diâmetro do disco frontal do difusor radial

E — energia total

$E_{2h}; E_h$ — erros globais para a malha mais grosseira e para a mais refinada

E_f — eficiência

f — função genérica

$\hat{f}_k$ — variável no espaço de Fourier

$(F; G; H)$ — vetores de fluxo nas direções x , y e z

g — função tangente hiperbólica para camada de mistura bidimensional

h — espaçamento entre pontos em uma malha uniforme

i — unidade imaginária $\sqrt{-1}$

J — determinante do Jacobiano da transformação de coordenadas

K — número de modos no espaço de Fourier

l — comprimento do assento do difusor radial

L — comprimento de referência e comprimento do domínio

l_2 — norma l_2

$l_\cdot$ — norma $l_\cdot$

Ma — número de Mach

N — número de pontos da malha na respectiva direção

N_l — número de pontos por comprimento de onda

α — ordem de precisão

p — pressão

Pr — número de Prandtl

$(q_x; q_y; q_z)$ — fluxo de calor nas direções x , y e z

Q — vetor solução com variáveis conservativas

r — razão de refino entre 2 malhas consecutivas

R — metade do comprimento do jato planar

Re — número de Reynolds

s — altura de afastamento do disco frontal do difusor radial e coordenada normalizada

S — termo fonte das soluções manufaturadas

Sp — Speedup

t — tempo

Δt — incremento de tempo

T — temperatura

T_1 — tempo computacional com um elemento de processamento

T_N — tempo computacional com N elementos de processamento

$(u; v; w)$ — componentes da velocidade nas direções x , y e z

U — velocidade da corrente livre

$(x; y; z)$ — coordenadas na direção longitudinal, normal e transversal

$(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$ — incremento da malha regular nas direções x , y e z

— Letras Gregas

$a; b$ — coeficientes das derivadas para os esquemas de diferenças finitas

b — número de onda

d — constante do esquema de diferenças finitas DRP

g — número de onda da frequência fundamental na direção z

$e_1; e_2$ — erro pela análise de Fourier para a 1ª e 2ª derivadas

J — condutividade térmica

k — razão de calores específicos

μ — viscosidade dinâmica

l_z — comprimento do domínio na direção z

$x; h$ — malha regular correspondente ao plano $(x; y)$

$D_x; D_h$ — incremento da malha regular no plano $(x; h)$

r — densidade

F — estiramento da malha

s — função rampa suave

c — variável auxiliar para a função rampa

$(t_{xx}; t_{yy}; t_{zz})$ — tensões normais

$(t_{xy}; t_{xz}; t_{yz})$ — tensões cisalhantes

q — defasagem de fase das autofunções e espessura da região de mistura do jato

Q — distribuição de fase das autofunções

w_0 — frequência fundamental da perturbação

— Símbolos

$\sim$ — variáveis dimensionais

b — variáveis filtradas

$\hat{}$ — variáveis no espaço de Fourier

$'$ — primeira derivada e flutuações de propriedade dos escoamento

$''$ — segunda derivada

— Subíndices

a_n — solução analítica

u_{num} — solução numérica

D_1 — termos relacionados à primeira derivada

D_2 — termos relacionados à segunda derivada

i — ponto da malha

j — propriedades da corrente do jato para o caso de jato planar

k — variável no espaço de Fourier

$_0$ — propriedades do escoamento base

$_1$ — propriedades da corrente livre mais rápida para o caso da camada de mistura

$_2$ — propriedades da corrente livre mais lenta para o caso da camada de mistura

$\bullet$ — propriedades da corrente livre de referência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Ruído em Compressores Herméticos Alternativos	28
1.2	Ruído Gerado por Escoamento - Aeroacústica	30
1.3	Aeroacústica Computacional	33
1.4	Objetivo Principal e Escopo do Trabalho	37
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	39
2.1	Notação	39
2.2	Equações Governantes	41
2.3	Teoria de Estabilidade Linear	43
3	MÉTODO NUMÉRICO	49
3.1	Código DNS	50
3.2	Decomposição do Domínio e Transformação de Coordenadas	51
3.3	Discretização Numérica	54
3.3.1	Esquema de Discretização Espacial	54
3.3.2	Esquema de Discretização Temporal	58
3.4	Análise de Fourier das Derivadas Espaciais	58
3.5	TDMA Paralelizado	63
3.6	Código LST	66
3.7	Condições de Contorno	67
3.8	Condições de Iniciais	70
4	RESULTADOS	73
4.1	Verificação e Validação de Códigos Numéricos	74
4.1.1	Método das Soluções Manufaturadas	75
4.2	Verificação Dinâmica - MMS 2D	77
4.3	Verificação Dinâmica - MMS 3D	81
4.4	Camada de Mistura Bidimensional	86
4.5	Jatos Planares Bidimensionais	95
4.5.1	Jatos Planares Bidimensionais - caso apresentado por Weder (2012)	96
4.5.2	Jatos Planares Bidimensionais - caso apresentado por Reichert e Biringen (2007)	101

5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .	117
	REFERÊNCIAS	119
APÊNDICE A	TERMOS ADICIONAIS NAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	125
APÊNDICE B	TERMOS FONTES DO MMS	131
B.1	Termos Fontes - MMS 2D	131
B.2	Termos Fontes - MMS 3D	131
APÊNDICE C	SPEEDUP E EFICIÊNCIA	135

INTRODUÇÃO

Faz parte da vida do ser humano ouvir o que ocorre no mundo a sua volta e interagir com esse estímulo. O som pode ser agradável ou até imperceptível em muitas ocasiões, porém também pode ser incômodo em outras, ao que se dá o nome de ruído. O ruído nada mais é do que um som excessivo ou desconfortável e sua redução tem se tornado um importante aspecto para o aumento do conforto e bem-estar do ser humano.

Tal preocupação tem provocado, por exemplo, um aumento no nível de exigência de regulamentações quanto a níveis de ruídos em regiões próximas a aeroportos (BABUCKE, 2009). Também se observa um aumento da pressão de consumidores e órgãos governamentais por diminuição de ruído de bens de consumo domiciliares, motivando fabricantes a oferecer produtos menos ruidosos que atendam exigências legislativas ou padrões de aceitação melhores estabelecidos pela concorrência (NUNES, 2005). Segundo a norma NBR10152 (1987), os níveis de ruído recomendados para conforto acústico em dormitórios e salas de estar devem estar entre 35 - 45 dB(A)¹ e 40 - 50 dB(A), respectivamente, que se equivalem a níveis de ruídos observados em bibliotecas. Daí surge o termo “controle de ruído” e a ideia de que para projetar equipamentos menos ruidosos é necessário entender os mecanismos básicos de geração e propagação de ruído.

Dentre esses produtos, podem-se destacar os refrigeradores e freezers domésticos, onde a principal fonte de ruído são os compressores instalados para comprimir o fluido de trabalho responsável por promover a retirada de calor do ambiente refrigerado. Geralmente, um compressor do tipo hermético alternativo é utilizado nessas aplicações. A redução do ruído gerado por escoamento dentro de um compressor hermético é a principal motivação do presente trabalho

---

¹ dB(A): nível de pressão sonora em escala decibel e ponderada por uma curva de correção A que representa melhor a resposta da audição humana a certas frequências

1.1 Ruído em Compressores Herméticos Alternativos

Um compressor hermético alternativo utilizado em refrigeradores é apresentado em mais detalhes na [Figura 1](#). O processo de compressão do gás refrigerante é realizado pelo deslocamento linear e alternado de um pistão no interior de um cilindro de compressão. Válvulas de sucção e de descarga são responsáveis pela retenção e passagem do fluido de trabalho de uma câmara de sucção para o cilindro e do cilindro para uma câmara de descarga, respectivamente. As diferenças de pressão entre o cilindro e a câmara de sucção e a câmara de descarga comandam inicialmente a abertura e o fechamento das válvulas. Uma vez abertas, o movimento das válvulas é controlado pela força resultante da ação conjunta do campo de pressão do próprio escoamento e da força de reação devido às características dinâmicas das válvulas. Como as válvulas não possuem um mecanismo auxiliar de acionamento, são denominadas automáticas ([LACERDA, 2009](#)), e podem ser vistas com mais detalhes na [Figura 2](#). Além dos componentes destacados anteriormente, também pode se observar na [Figura 1](#) que o cilindro de compressão é uma região destacada em um corpo fundido apoiado sobre molas fixas na base da carcaça. Também é possível notar um motor elétrico que, através do movimento rotativo, é responsável pelo acionamento do mecanismo que impõe o movimento linear ao pistão.

Figura 1 – Compressor hermético alternativo (Cortesia da Tecumseh do Brasil Ltda).

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das fontes sonoras no interior do compressor, o ruído percorre caminhos de transmissão até chegar a carcaça e ser irradiado para o ambiente, ou pode ainda excitar a tubulação do refrigerador através da vibração do compressor. Os principais caminhos de transmissão são a vibração estrutural das partes sólidas transmitidas pelas molas ou serpentina à carcaça ou através da excitação do gás presente na cavidade acústica interna, que, por sua vez, também excita

Figura 2 – Placa válvula contendo as lâminas de sucção e descarga (Cortesia da Tecumseh do Brasil Ltda).

Fonte: Elaborada pelo autor.

a carcaça e irradia pela carcaça, conforme [Figura 3 \(NUNES, 2005\)](#). Efeitos de ressonância (momento em que há acoplamento entre frequências de excitação com as frequências naturais de componentes mecânicos ou cavidades acústicas) tendem a aumentar a intensidade sonora irradiada pelo compressor.

Figura 3 – Caminhos de transmissão de ruído e vibração

Fonte: Elaborada pelo autor.

O compressor possui dois tipos principais de fontes de ruído: mecânicas e não mecânicas. [Soedel \(2006\)](#) apresenta diversas fontes de ruído em compressores de deslocamento positivo, que é o caso dos compressores herméticos alternativos. De forma sucinta, destacam-se entre as fontes do tipo mecânicas as forças vibratórias decorrentes do movimento dos componentes móveis e transmitidas através das molas ou tubulações internas. As fontes do tipo não mecânicas são causadas principalmente pelas pulsações do fluido de trabalho nas linhas de sucção e descarga,

podendo excitar cavidades acústicas presentes no interior do compressor. Santos (2003) também destaca a associação entre as grandes variações de pressão e a inércia das partes móveis que causam vibrações geradas pelos impactos nas folgas existentes.

Os mecanismos de geração e propagação de ruído descritos até então já foram bastante investigados. Alguns exemplos são os trabalhos de Silveira (2004) que investigou as fontes e caminhos de transmissão de ruído e vibração em compressores utilizados em aplicações comerciais destacando quais componentes contribuíam mais em determinadas faixas de frequência e propondo modificações que reduziram os níveis sonoros de um modelo antigo; e também Silva, Lenzi e Baars (2004) que utilizaram algoritmos genéticos para avaliar diversas formas de serpentina buscando minimizar a energia vibratória transmitida à carcaça.

Diversas soluções construtivas são utilizadas para reduzir o ruído irradiado de compressores destacando-se, principalmente, a instalação de filtros acústicos (mufflers) nos sistemas de sucção e descarga para atenuar o ruído gerado pelas pulsações do gás; minimização da energia transmitida pelos caminhos de transmissão como projetos otimizados de molas e serpentina por meio do controle de forma e propriedades dos materiais utilizados; e, por final, o desacoplamento entre frequências de excitação e as frequências naturais de componentes sólidos e de cavidades acústicas, principalmente da carcaça do compressor.

Outro mecanismo de geração de ruído em válvulas de compressores herméticos de refrigeração é aquele produzido pelo próprio escoamento através do desprendimento de vórtices. Se o regime de geração de vórtices é periódico, um ruído tonal sobreposto com a frequência próxima da frequência de vibração da válvula é observado, entretanto, se o regime de geração de vórtices é turbulento, uma ampla faixa de modos é excitada, gerando um ruído de banda larga (FAHY, 2003). Tal fenômeno é ainda pouco investigado e é a principal motivação para realização do presente trabalho.

O objetivo principal do presente trabalho é realizar um estudo numérico da geração e propagação de ruído gerado por um jato planar, semelhante ao escoamento obtido em válvulas de compressores herméticos.

1.2 Ruído Gerado por Escoamento - Aeroacústica

O som pode ser descrito como flutuações de pressão, geralmente em torno da pressão atmosférica, que se propagam por um meio a uma determinada velocidade, chamada de velocidade do som no meio. O som gerado por escoamentos transientes e pela interação de escoamentos de gases com superfícies sólidas é chamado de “som aerodinâmico” e Aeroacústica é a disciplina responsável por estudar esses fenômenos. O nível de pressão sonora (Sound Pressure Level - SPL)

é uma medida em decibéis (dB) da pressão sonora em relação a um valor de referência:

$$\text{SPL} = 20 \log_{10} \frac{p}{p_{\text{ref}}} ; \quad (1.1)$$

onde p é a pressão sonora e o valor geralmente usado para ar é $p_{\text{ref}} = 20 \text{ mPa}$.

O som aerodinâmico pode ser atribuído a três tipos básicos de fontes: monopolo, dipolo e quadrupolo. Fontes do tipo monopolo são geradas pelo deslocamento de fluido de maneira transiente, como o provocado por autofalantes ou sirenes, pela injeção intermitente de massa como a saída de escapamentos, ou pela variação brusca de temperatura também de forma intermitente, como por exemplo um laser pulsando (FAHY, 2003). A radiação de um monopolo aerodinâmico em um meio parado ocorre de forma igual em todas as direções, assumindo um padrão esférico simétrico, conforme Tabela 1.

Já fontes do tipo dipolo aerodinâmicos ocorrem quando escoamentos transientes interagem com superfícies gerando forças transientes onde parte da energia é convertida em som. Alguns exemplos desse tipo de som são os assobios do ar passando por cabos de energia ou aerofólios de carros. A radiação de um dipolo aerodinâmico é equivalente a um par de monopolos defasados em 180° , criando uma interferência destrutiva de radiação. Assim surge uma direção preferencial de radiação, conforme Tabela 1.

Por fim as fontes do tipo quadrupolos aerodinâmicos são produzidos pelos tensores de Reynolds em escoamentos turbulentos na ausência de obstáculos, como a partir da geração de vórtices turbulentos em escoamentos cisalhantes (jatos ou camadas de misturas). A radiação de um quadrupolo é equivalente a um par de dipolos, defasados em 180° tendo assim duas direções preferenciais (Tabela 1).

De acordo com Beranek e Vér (1992), existe uma relação entre a potência sonora radiada por cada tipo de fonte com a velocidade e o número de Mach do escoamento em questão. Segundo o autor, esses valores são os apresentados na Tabela 1. Para escoamentos subsônicos ($Ma < 1; 0$), as fontes com maior potência sonora são as do tipo monopolos, seguidas das do tipo dipolo e então das do tipo quadrupolo. Entretanto, para escoamentos supersônicos ($Ma > 1; 0$) há uma inversão desse comportamento, sendo que fontes do tipo quadrupolo passam a ter uma maior potência sonora. No presente trabalho tem-se o objetivo de estudar a geração de ruído em escoamentos turbulentos cisalhantes, portanto principalmente fontes do tipo quadrupolo.

Um caso bastante estudado em aeroacústica é o ruído gerado por jatos turbulentos, devido a grande aplicação em ruído de aeronaves: Freund (2001), Boersma (2004), Bailly e Bogey (2004), Bogey e Bailly (2006), Babucke (2009). A Figura 4 apresenta um esquema desse caso onde são mostrados: o núcleo potencial, uma região de transição e uma região desenvolvida. A fonte de energia do ruído do jato é a turbulência provocada pela mistura do núcleo potencial com escoamento ao seu redor (TAM, 1998). Como pode ser observado, o perfil de velocidade se torna inflexional na região limítrofe entre o núcleo potencial e o ambiente ao seu redor, o

Tabela 1 – Tipos de fontes aeroacústicas e características de radiação.

Tipo	Característica de Radiação	Caso	Potência de Radiação
Monopolo		· injeção de fluido · fontes térmicas	$\mu r L^2 U^3 Ma$
Dipolo		· forças decorrentes da interação com superfícies sólidas	$\mu r L^2 U^3 Ma^3$
Quadrupolo		· devido a fontes não-lineares produzidas em regiões com flutuações de tensões de Reynolds (turbulência)	$\mu r L^2 U^3 Ma^5$

qual apresenta condições de escoamento próximas das estacionárias se comparadas com as magnitudes de velocidade do núcleo potencial. Nesse caso, instabilidades hidrodinâmicas são originadas fazendo com que o escoamento transicione para um regime de emissão de vórtices (SOUZA; SOUZA, 2006).

Figura 4 – Esquema de um jato turbulento

Fonte: Elaborada pelo autor.

O escoamento em jatos, apresentado anteriormente, tem grandes semelhanças com o

escoamento observado na saída de difusores radiais (Figura 5). Esse tipo de geometria tem sido vastamente utilizada para representar o escoamento através de válvulas de compressores, principalmente com relação ao cálculo de coeficientes a serem utilizados para representar válvulas em simuladores de compressores: [Rovaris e Deschamps \(2006\)](#), [Lacerda \(2009\)](#) e [Mariani, Prata e Deschamps \(2010\)](#). O fluido entra através do orifício de passagem de diâmetro d , sendo defletido pelo disco frontal de diâmetro D , escoando posteriormente entre as superfícies dos dois discos (difusor). Para maiores valores de relação de diâmetros $D=d$ e baixos valores de afastamento s , ocorre a relaminarização do escoamento na região do difusor, e o perfil de velocidades na saída do difusor apresenta-se como um jato planar circunferencial.

Figura 5 – Difusor Radial

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma pesquisa bibliográfica revela que o ruído aeroacústico do escoamento através das válvulas de compressores herméticos ainda é um tema pouco investigado e os poucos trabalhos encontrados ainda são baseados em um processo de tentativa e erro para melhoria do ruído gerado pelo sistema de válvulas, como os trabalhos apresentados por [Trella e Soedel \(1972\)](#) e [Erol e Gurdogan \(2000\)](#). No presente trabalho o tema aeroacústica de jatos planares em válvulas de compressores herméticos é utilizado como motivador, entretanto tal tema ainda não foi abordado no presente trabalho, sendo uma sugestão para trabalhos futuros.

1.3 Aeroacústica Computacional

Os primeiros estudos no campo da aeroacústica foram desenvolvidos por Sir James Lighthill: [Lighthill \(1952\)](#) e [Lighthill \(1954\)](#). O objetivo era realizar o estudo do som gerado pelo escoamento turbulento em jatos. O autor propôs uma analogia acústica onde é feita a distinção entre o campo do escoamento, onde o som é gerado, e o campo acústico onde as ondas acústicas se propagam. A ideia básica foi expressar as equações governantes para o escoamento de fluidos compressíveis na forma de uma equação de onda para o cálculo de flutuações acústicas da

densidade do fluido sujeitas a certas fontes acústicas. As fontes acústicas descritas pelo tensor de Lighthill são compostas pelos tensores de Reynolds e por efeitos de entropia. Assim, uma vez calculadas as fontes sonoras, é possível calcular a propagação de ruído através da solução da equação de onda não-homogênea proposta. Entretanto, a analogia acústica de Lighthill não considera o efeito da presença de superfícies sólidas no escoamento, o que foi incluído posteriormente em outras analogias por [Curle \(1955\)](#) e [FfowcsWilliams e Hawkings \(1969\)](#). De forma resumida a equação de onda não-homogênea é dada por ([KINSLER et al., 2000](#)):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial M}{\partial t} - f - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{\rho u_i u_j}; \quad (1.2)$$

onde o termo $-\frac{\partial M}{\partial t}$ representa injeção de massa no domínio, correspondendo a fontes do tipo monopolo. O termo $-f$ representa forças decorrentes da interação com superfícies sólida e corresponde a fontes do tipo dipolo. O termo $-\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{\rho u_i u_j}$ representa variações espaciais do fluxo de quantidade de movimento dentro do fluido que são geradas em regiões onde há presença de turbulência. Elas são calculadas a partir de flutuações das tensões de Reynolds e correspondem a fontes do tipo quadrupolo.

A simulação numérica dos fenômenos de geração e propagação do ruído aeroacústico pode ser dividida basicamente em duas categorias: através do cálculo direto ou usando metodologias híbridas. Na abordagem direta o som é calculado em conjunto com o campo do escoamento através da solução das equações governantes compressíveis. Nesse caso pode ser usada tanto a Simulação Numérica Direta (Direct Numerical Simulation - DNS), que resolve todas as escalas do escoamento, como também a Simulação de Grande Escalas (Large Eddy Simulation - LES) que resolve as principais escalas e modela o efeito dissipativo das menores escalas. A principal vantagem de DNS é a ausência de modelagens no cálculo da geração do ruído, fornecendo uma ferramenta capaz de calcular os mecanismos de geração de som e, também, avaliar outras metodologias. Por outro lado, como o domínio deve incluir a região da fonte sonora e parte do campo acústico próximo, esta metodologia apresenta elevado custo computacional, limitando seu uso a casos mais simples com moderados números de Reynolds ([WANG; FREUND; LELE, 2006](#)).

As metodologias híbridas são baseadas nas analogias acústicas descritas anteriormente onde o cálculo do escoamento é desacoplado do cálculo da propagação do som. Uma solução temporal do escoamento pode ser obtida usando DNS, LES ou U-RANS (Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes - Navier-Stokes por média de Reynolds transiente) de onde as fontes acústicas são extraídas. O som no campo distante é obtido através de soluções numéricas ou integrais das equações de onda não-homogêneas semelhantes à [Equação 1.2](#), como um procedimento de pós-processamento da solução do escoamento ([WANG; FREUND; LELE, 2006](#)).

Ambas abordagens apresentadas para o cálculo numérico de aeroacústica fazem parte

de uma área denominada Aeroacústica Computacional (Computational Aeroacoustics - CAA). CAA é uma área recente comparada com o estágio atual da dinâmica dos fluidos computacional (Computational Fluid Dynamics - CFD). Segundo [Tam \(2004\)](#), CAA vem se constituindo uma área distinta de CFD porque problemas de aeroacústica são diferentes dos problemas comuns de escoamento de fluidos, principalmente pela natureza transiente dos fenômenos aeroacústicos e que não são de grande importância em alguns casos tradicionais de escoamento de fluidos. Tais diferenças impõem maiores desafios ao método numérico, os quais o autor destaca como sendo:

- Vasta faixa de frequências espaciais e temporais envolvidas, exigindo resolução numérica das altas frequências que possuem pequenos comprimentos de onda;
- Multiplicidade de escalas, pois ondas acústicas geralmente tem baixas amplitudes comparadas com as grandezas aerodinâmicas. Isso exige que o método numérico possua uma dissipação numérica extremamente baixa. Também há diferença de escalas entre as regiões próximas à fonte e regiões distantes;
- Em muitos casos é de interesse conhecer a intensidade sonora a uma grande distância da fonte sonora;
- O domínio computacional é finito e, devido ao baixo decaimento das grandezas acústicas, ondas acústicas atingem os contornos. Para evitar a reflexão dessas ondas de volta ao domínio, contaminando a solução, um tratamento especial deve ser dado aos contornos para permitir que tais ondas deixem o domínio de forma suave.

Portanto, via de regra, métodos numéricos desenvolvidos para CAA devem possuir características que os diferem de metodologias tradicionais usadas em CFD. Tais características são ([TAM, 2004](#)):

- um esquema numérico de avanço temporal com alta ordem de precisão e baixa dissipação e dispersão numéricas;
- uma malha computacional adequada;
- um procedimento de amortecimento seletivo ou filtragem para eliminar ondas numéricas espúrias que podem contaminar a solução numérica. Tal procedimento também pode ajudar a estabilizar a solução numérica em contornos ou descontinuidades como paredes ou mudanças nos espaçamentos da malha computacional;
- um conjunto de tratamentos numéricos nos contornos do domínio computacional para evitar que reflexão de ondas acústicas contamine a solução do domínio, ou permitir a entrada de ondas acústicas ou de vorticidade que estejam chegando ao domínio.

Dois efeitos importantes são a dissipação e a dispersão numéricas. Conforme pode ser observado na [Figura 6](#), o fenômeno de dissipação numérica tende a diminuir a amplitude das ondas transportadas, enquanto que a dispersão numérica tende a mudar a fase em que uma onda é transportada. Ambos os efeitos estão relacionados aos métodos de discretização espacial e temporal. O grande desafio está em desenvolver métodos apropriados para resolver problemas de aeroacústica que, após longos períodos de tempo e a longas distâncias, não degradem as características físicas da onda acústica através da dissipação e da dispersão ([WELLS; RENAUT, 1997](#)).

Um aprofundamento maior sobre o estágio atual das várias vertentes da aeroacústica computacional, os desafios encontrados e os esforços envolvidos para superá-los, bem como algumas aplicações da metodologia a problemas de engenharia podem ser encontrados em [Wells e Renaut \(1997\)](#), [Tam \(2004\)](#), [Colonius e Lele \(2004\)](#) e [Wang, Freund e Lele \(2006\)](#).

Figura 6 – Dissipação e dispersão de uma onda

Fonte: Elaborada pelo autor.

1.4 Objetivo Principal e Escopo do Trabalho

Objetivo Principal

O motivador principal do presente trabalho é iniciar o desenvolvimento de uma ferramenta confiável de simulação capaz de auxiliar engenheiros na predição de problemas de aeroacústica, especialmente um que possa no futuro ser utilizado para estudar o ruído gerado pelo escoamento em válvulas de compressores de refrigeração. Para isso foi desenvolvido um código com uma versão bidimensional e outra tridimensional para simulação numérica direta de aeroacústica. Utilizou-se processamento paralelo com decomposição de domínio para poder simular usando DNS em um tempo factível; esquemas de discretização espaciais e temporais de alta ordem para minimizar ao máximo os fenômenos de dissipação e dispersão das ondas acústicas; e uma série de tratamentos no domínio como filtragem e estiramento da malha como também condições de contorno não-reflexivas como intuito de obter uma solução adequada para estudo de aeroacústica.

Assim, o objetivo principal do presente trabalho é apresentar todas as etapas desenvolvidas no equacionamento, implementação e verificação, tanto segundo um processo matemático formal quanto por comparação com resultados obtidos de literatura, de um código numérico para simulação numérica direta de aeroacústica.

Escopo do Trabalho

A divisão do trabalho se dá da seguinte forma: no [Capítulo 2](#) são apresentadas as equações que regem os problemas a serem estudados e as equações da Teoria de Estabilidade Linear utilizados para obter as autofunções necessárias para perturbar o escoamento. Em seguida, são apresentados no [Capítulo 3](#) detalhes do presente código, o processo de decomposição de domínio para a paralelização do código, os métodos de discretização numérica com análises discutindo sobre a acurácia esperada, detalhes do código para geração das perturbações, condições de contorno e condições iniciais. Posteriormente, no [Capítulo 4](#) é apresentado o Método das Soluções Manufaturadas utilizado para verificação do presente código e os resultados dessas análises. Ainda nesse capítulo também são apresentadas comparações de soluções de escoamentos cisalhantes (camada de mistura bidimensional e jatos planares bidimensionais) com resultados obtidos por outros autores e com a Teoria de Estabilidade Linear. Por fim, são descritas no [Capítulo 5](#) as conclusões finais e propostas de trabalhos futuros.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Como destacado anteriormente no fim da seção 1.3, no presente trabalho, simulações aeroacústicas baseadas nas equações de Navier-Stokes compressíveis em regime transiente foram realizadas para investigar o ruído gerado pelo escoamento de camadas de misturas e jatos planares. A seguir são apresentadas as equações governantes que foram implementadas no código computacional DNS. Também são apresentadas as bases teóricas para as análises de Teoria de Estabilidade Linear utilizadas para obter as perturbações para o escoamento base.

2.1 Notação

O sistema cartesiano $(x; y; z)$ de referência é apresentado na Figura 7. Tomando como exemplo o caso de uma camada de mistura, tem-se que a camada superior tem velocidade U_1 e a corrente inferior tem velocidade U_2 .

O eixo x se encontra alinhado com a direção longitudinal do escoamento, o eixo y com a direção normal e o eixo z com a direção transversal. As respectivas componentes da velocidade são u, v e w . Todos os cálculos serão realizados na forma adimensional, sendo que as velocidades são normalizadas por $\tilde{U}_\infty$, a temperatura por $\tilde{T}_\infty$ e a densidade por $\tilde{\rho}_\infty$. O subscrito ∞ indica condições de corrente livre e o símbolo $\sim$ grandezas na forma dimensional. As escalas de grandeza são adimensionalizadas por um comprimento de referência $\tilde{L}_\infty$ e as de tempo $\tilde{t}$ por $\tilde{L}_\infty / \tilde{U}_\infty$:

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_\infty}; \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}_\infty}; \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_\infty}; \quad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_\infty}; \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_\infty}; \quad w = \frac{\tilde{w}}{\tilde{U}_\infty}; \quad T = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_\infty}; \quad t = \frac{\tilde{t} \cdot \tilde{U}_\infty}{\tilde{L}_\infty}; \quad (2.1)$$

Com as quantidades descritas acima, obtemos a pressão e os calores específicos normali-

Figura 7 – Esquema do domínio computacional tridimensional cartesiano para uma camada de mistura, destacando-se a região de interesse e a zona de amortecimento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

zados:

$$p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{r} \cdot \tilde{U}^2}; \quad c_p = \tilde{c}_p \cdot \frac{\tilde{T}}{\tilde{U}^2}; \quad c_v = \tilde{c}_v \cdot \frac{\tilde{T}}{\tilde{U}^2}; \quad (2.2)$$

Também é possível definirmos o número de Reynolds, o número de Mach e o número de Prandtl como:

$$Re = \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{U} \cdot \tilde{L}}{\tilde{m}}; \quad (2.3)$$

$$Ma = \frac{\tilde{U}}{\tilde{a}}; \quad (2.4)$$

$$Pr = \frac{\tilde{c}_p \tilde{m}}{\tilde{J}}; \quad (2.5)$$

onde $\tilde{a}$ corresponde à velocidade do som no meio na região de corrente livre.

2.2 Equações Governantes

A solução é obtida através da solução da equação da continuidade, das equações de Navier-Stokes e da energia. Considerando um escoamento tridimensional em coordenadas cartesianas, compressível, não isotérmico e em regime transiente, o vetor solução na formulação conservativa é dado por:

$$Q = (r; r u; r v; r w; E)^T; \quad (2.6)$$

contendo a densidade, os fluxos de massa nas direções x, y e z, respectivamente e a energia total por unidade de volume E, o qual é definida como:

$$E = r \int_{-\infty}^{\infty} c_v dT + \frac{r}{2} (u^2 + v^2 + w^2); \quad (2.7)$$

As equações de Navier-Stokes compressíveis podem ser escritas em notação vetorial como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0; \quad (2.8)$$

onde os vetores de fluxo são:

$$F = \begin{pmatrix} r u \\ r u^2 + p - t_{xx} \\ r uv - t_{xy} \\ r uw - t_{xz} \end{pmatrix}; \quad (2.9)$$

$$G = \begin{pmatrix} u(E + p) + q_x - ut_{xx} - vt_{xy} - wt_{xz} \\ r v \\ r uv - t_{xy} \\ r v^2 + p - t_{yy} \\ r vw - t_{yz} \end{pmatrix}; \quad (2.10)$$

$$H = \begin{pmatrix} v(E + p) + q_y - ut_{xy} - vt_{yy} - wt_{yz} \\ r w \\ r uw - t_{xz} \\ r vw - t_{yz} \\ r w^2 + p - t_{zz} \end{pmatrix}; \quad (2.11)$$

contendo as tensões normais

$$t_{xx} = \frac{m}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (2.12)$$

$$t_{yy} = \frac{m}{Re} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right]; \quad (2.13)$$

$$t_{yy} = \frac{m}{Re} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right]; \quad (2.14)$$

as tensões cisalhantes

$$t_{xy} = \frac{m}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \quad (2.15)$$

$$t_{xz} = \frac{m}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]; \quad (2.16)$$

$$t_{yz} = \frac{m}{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]; \quad (2.17)$$

e os fluxos de calor

$$q_x = - \frac{J}{(k-1) Re Pr Ma_\infty^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (2.18)$$

$$q_y = - \frac{J}{(k-1) Re Pr Ma_\infty^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (2.19)$$

$$q_z = - \frac{J}{(k-1) Re Pr Ma_\infty^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (2.20)$$

Propriedades do Fluido

Para o fechamento do sistema de equações governantes é necessária uma equação de estado para a pressão que, considerando um gás ideal perfeito, é dada por:

$$p = \frac{r T}{k Ma_\infty^2}; \quad (2.21)$$

A velocidade do som adimensional é dada por:

$$a = \frac{\sqrt{T}}{Ma_\infty}; \quad (2.22)$$

Os calores específicos para pressão constante e volume constante são considerados constantes dados por:

$$c_p = \frac{1}{(k-1) Ma_\infty^2}; \quad c_v = \frac{1}{k(k-1) Ma_\infty^2} \quad (2.23)$$

onde o produto adiabático $k = c_p/c_v$ é fixo fazendo com que a integral $\int^R c_v dT$ da Equação 2.7 possa ser simplificada pelo produto $c_v T$. No presente trabalho, o fluido utilizado valores típicos para o ar com uma razão de calores específicos $k = 1,4$ e o número de Prandtl igual a $Pr = 0,71$.

Para avaliação da viscosidade, esta é modelada como sendo dependente da temperatura de acordo com a lei de Sutherland (WHITE, 2005) para temperaturas acima da temperatura de Sutherland $\tilde{T}_s = 110,4K$:

$$\tilde{m}(T) = \tilde{m}_0(T_0) T^{3/2} \frac{1 + T_s}{T + T_s}; \quad (2.24)$$

onde $T_s = \tilde{T}_s$ é a temperatura de Sutherland adimensional. Novamente, foram tomados valores típicos do ar com a viscosidade dinâmica $\tilde{m}_0 T_0 = 280K = 1,735 \cdot 10^{-5} kg/(m \cdot s)$ e a condutividade térmica $\tilde{J} = 0,03 W/(m \cdot K)$, valores que foram utilizados nas adimensionalizações.

2.3 Teoria de Estabilidade Linear

O conceito de instabilidade de um escoamento em regime permanente está associado a como ele se comporta quando submetido a pequenas e moderadas perturbações, que podem ser introduzidas na forma de uma onda (ROGENSKI, 2015). Se há um decaimento espacial dessas ondas e o escoamento retorna ao seu estado inicial diz-se que o escoamento é estável. Porém, se há um crescimento dessas perturbações fazendo com que o escoamento transicione para um regime diferente do seu estado inicial, diz-se que o escoamento é instável (QUIRINO, 2006).

Geralmente, esse é o comportamento de um escoamento que transiciona para os mais diversos regimes turbulentos presentes em casos reais. Segundo teorema de Rayleigh um perfil de velocidade que possui um ponto de inflexão é instável a perturbações (KUNDU; COHEN, 2002). Perturbações recebidas pelo escoamento (rugosidades de parede, injeção ou sucção de fluido, ruído, turbulência de escoamentos próximos) se amplificam linearmente segundo uma taxa de amplificação até surgirem estruturas não lineares e a transição para regime turbulento de escoamento.

A Teoria de Estabilidade Linear (Linear Stability Theory - LST) é um método para se obter informações sobre perturbações e suas taxas de amplificações. Assim, esta se torna uma importante ferramenta para fornecer os dados de perturbação para o presente código e para avaliar os resultados obtidos de acordo com essa metodologia formal. Para essa análise, divide-se o escoamento em um escoamento base em regime permanente ($_0$) e uma flutuação ($'$):

$$f = f_0 + f'; \quad (2.25)$$

onde f representa tanto as variáveis primitivas ($u; v; w; r; T; p$) quanto a viscosidade m e a

condutividade térmica J . Considera-se também que a perturbação f' se propaga como uma onda:

$$f' = \hat{f}(y) \cdot e^{i \cdot (a x + g z - w t)}; \quad (2.26)$$

onde a e g são os números de onda nas direções longitudinal e transversal, respectivamente, e w é a frequência temporal da onda. A variável complexa $\hat{f} = \hat{f}_r + i \cdot \hat{f}_i$ é a autofunção da onda. A amplitude a distribuição de fase da flutuação são dadas por [Equação 2.27](#) e [Equação 2.28](#), respectivamente.

$$Q_f = \frac{\hat{f}_i}{\hat{f}_r}; \quad (2.27)$$

$$Q_f = \tan^{-1} \frac{\hat{f}_i}{\hat{f}_r}; \quad (2.28)$$

Assumindo periodicidade na direção z , o número de onda g é real, não permitindo que perturbações cresçam na direção transversal. Sendo w e a números complexos, estes dão origem a um problema temporal ou espacial. No problema temporal acompanha-se a perturbação, enquanto que no problema espacial permite-se que a perturbação seja advectada pelo escoamento, e que representa os casos simulados no presente trabalho. Nesse caso, impõe-se $w_i = 0$. Assim, a [Equação 2.26](#) pode ser reescrita como:

$$f' = \hat{f}(y) \cdot e^{i \cdot (a_r x + g z - w_r t)} \cdot e^{(-a_i x)}; \quad (2.29)$$

O termo a_i é a taxa de amplificação espacial e indica o quão rápido uma perturbação se amplifica ou a onda se transforma em vórtice ou se estingue no domínio. Este é calculado para um referencial fixo no domínio e a onda move-se com relação a este referencial. Este tipo de análise é conhecida como análise espacial da instabilidade e valores negativos da taxa de amplificação a_i correspondem a amplificação das perturbações enquanto que valores positivos denotam amortecimento.

Para obtenção das autofunções pode-se recorrer às equações da estabilidade. O desenvolvimento dessas equações pode ser encontrado com mais detalhes em [Salemi \(2006\)](#) e não é escopo do presente trabalho. Porém algumas considerações dessa análise são apresentadas para auxiliar o entendimento teórico. A primeira já apresentada pela [Equação 2.25](#) é a de que o escoamento pode ser separado em um escoamento base e uma perturbação e substitui-se as variáveis nas equações governantes do escoamento ([Equação 2.8](#)). Outra hipótese da LST é a de que o escoamento base é uma solução em regime permanente das equações de Navier-Stokes, fazendo com que todos os termos contendo somente quantidades do escoamento base sejam desprezados. Outras hipóteses são as de que considera-se o escoamento base como paralelo

e de que a análise se dá localmente, desprezando-se assim o espalhamento do escoamento e o produto de perturbações, por assumi-las pequenas. Assim a análise se torna linear de um conjunto de perturbações. Por fim, também assume-se uma solução por modos normais conforme [Equação 2.26](#).

Assumindo o conjunto dessas hipóteses com alguma álgebra apresentada por [Salemi \(2006\)](#), temos que as equações das perturbações se reduzem a:

$$(aU - w) \frac{d\hat{v}}{dy} - a\hat{v} \frac{dU}{dy} = \frac{ia^2 g \hat{p}}{kMa^2}; \quad (2.30)$$

$$r i (aU - w) = - \frac{1}{kMa^2} \frac{d\hat{p}}{dy}; \quad (2.31)$$

onde g é a equação de Gropengiesser, dada por:

$$g = \frac{a^2 + g^2}{r a^2} - Ma^2 \frac{(aU - w)^2}{a^2}; \quad (2.32)$$

Definindo uma transformação de coordenadas proposta por Gropengiesser ([GROPENGI-ESSER, 1970](#)):

$$c = \frac{ia \hat{p}}{kMa^2 \hat{v}}; \quad (2.33)$$

temos que,

$$\frac{-ia}{kMa^2} \frac{d\hat{p}}{dy} = \frac{c}{dy} \hat{v} + c \frac{d\hat{v}}{dy}; \quad (2.34)$$

Combinando a [Equação 2.30](#) e a [Equação 2.31](#) com a [Equação 2.34](#), dividindo por $\hat{v}$ e usando a definição de c ([Equação 2.33](#)) temos que,

$$\frac{dc}{dy} = r a (aU - w) - \frac{a c}{aU - w} \overset{\boxed{\text{Eq. 2.32}}}{gc} - \overset{\boxed{\text{Eq. 2.34}}}{\frac{dU}{dy}}; \quad (2.35)$$

Como descrito por [Salemi \(2006\)](#), as condições de contorno para a equação [Equação 2.35](#) são derivadas do fato de que para $y \rightarrow \pm \infty$ temos que c é uma constante e $dc/dy = 0$. Assim, para $y \rightarrow \pm \infty$:

$$c = \pm \frac{r}{a} \frac{1}{aU - w}; \quad (2.36)$$

Ao resolver a [Equação 2.35](#), a função c e a função g são calculadas juntamente com os autovalores a e w do problema. Alguma manipulação pode ser realizada na [Equação 2.30](#) e na [Equação 2.31](#), fornecendo:

$$\frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{ia g \hat{p}}{k Ma^2 (aU - w)} + \frac{a \hat{v}}{(aU - w)} \frac{dU}{dy}; \quad (2.37)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dy} = -k Ma^2 r i (aU - w) \hat{v}; \quad (2.38)$$

As autofunções para a velocidade normal $\hat{v}$ e para a pressão $\hat{p}$ são dadas pela integração da [Equação 2.37](#) e [Equação 2.38](#) (SALEMI, 2006). As condições de contorno para integração são:

$$\hat{v}(0) = 1 + i0; \quad (2.39)$$

$$\hat{p}(0) = \frac{c(0) k Ma^2}{ia}; \quad (2.40)$$

A partir do cálculo de $\hat{v}$ e $\hat{p}$, calcula-se as autofunções para a densidade $\hat{r}$, velocidade longitudinal $\hat{u}$, velocidade transversal $\hat{w}$ e temperatura $\hat{T}$ respectivamente pela [Equação 2.41](#), [Equação 2.42](#), [Equação 2.43](#) e [Equação 2.44](#):

$$\hat{r} = -\frac{\hat{v}}{i(aU - w)} \frac{dr}{dy} - \frac{ra\hat{u}}{(aU - w)} - \frac{rg\hat{w}}{(aU - w)} - \frac{r}{i(aU - w)} \frac{d\hat{v}}{dy}; \quad (2.41)$$

$$\hat{u} = \frac{-a\hat{p}}{k Ma^2 r (aU - w)} - \frac{\hat{v}}{i(aU - w)} \frac{dU}{dy}; \quad (2.42)$$

$$\hat{w} = \frac{-g\hat{p}}{k Ma^2 r (aU - w)}; \quad (2.43)$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{p} - \hat{r}T}{r}; \quad (2.44)$$

O estudo de instabilidade de jatos revela a presença de dois modos instáveis: um modo sinuoso e um modo varicoso. O modo varicoso é tal que a perturbação $\hat{v}$ e sua derivada $d\hat{v}=dy$ vão para zero no centro do jato. A definição original da transformação de Gropengieser ([Equação 2.33](#)) vai para infinito no centro do jato. Para se capturar o modo varicoso utiliza-se o inverso da transformação de Gropengieser para evitar singularidade, originando uma nova equação para transformação de Gropengieser:

$$c = \frac{k Ma^2 \hat{v}}{ia \hat{p}}; \quad (2.45)$$

tal que,

$$\frac{kMa^2}{ia} \frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{dc}{dy} \hat{p} + c \frac{d\hat{p}}{dy} \quad (2.46)$$

Substituindo [Equação 2.30](#) e [Equação 2.31](#) na [Equação 2.46](#), dividindo por $\hat{p}$ e usando a nova definição de c ([Equação 2.45](#)) temos que,

$$\frac{dc}{dy} = \frac{\boxed{\text{Eq. 2.30}}}{a} g + a \frac{\boxed{\text{Eq. 2.31}}}{dy} c \frac{1}{aU - w} - r a (aU - w) c^2 \quad (2.47)$$

Da mesma maneira que para a versão original da equação de Gropengiesser, as condições de contorno para a integração são dadas pela [Equação 2.36](#). As autofunções também podem ser calculadas da mesma maneira que anteriormente resolvendo-se da [Equação 2.37](#) à [Equação 2.44](#).

MÉTODO NUMÉRICO

O presente trabalho envolve o desenvolvimento de um programa de computador que permita resolver as equações que governam escoamentos compressíveis, apresentadas no capítulo anterior, usando DNS. Neste capítulo é apresentado inicialmente um breve delineamento do funcionamento do código e, posteriormente, maiores detalhes sobre os esquemas de discretização espacial e temporal são apresentados. Em seguida, análises de Fourier dos esquemas de discretização espacial são realizadas, ressaltando os cuidados tomados para se obter esquemas numéricos de baixas dissipação e dispersão numéricos. Os processos de geração de malha e de transformação de coordenadas utilizados são apresentados posteriormente, e também foi realizada a paralelização do código com decomposição do domínio nas direções longitudinal e normal para o cálculo das derivadas espaciais. Dando prosseguimento, é brevemente apresentado o esquema do funcionamento do código gentilmente fornecido pelo Prof. Márcio T. de Mendonça ([MENDONÇA, 2015](#)) para cálculo das auto-funções segundo a Teoria de Estabilidade Linear apresentada na [seção 2.3](#) e que foram utilizadas para gerar as perturbações que são introduzidas na entrada do domínio do escoamento. Por fim, são apresentados o processo de obtenção das condições de contorno e das condições iniciais utilizadas para a solução dos problemas propostos.

Todas as simulações foram realizados no recém adquirido cluster Euler e instalado nas dependências do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da USP de São Carlos. O cluster Euler possui 104 lâminas computacionais IP113, cada uma com 2 Processadores Intel Xeon E5-2680v2 de 2.8 GHz com dez núcleos cada, totalizando 2080 núcleos de processamento e 13TB de memória disponíveis. Os trabalhos são submetidos através de jobs que são gerenciados de forma a se ter o melhor desempenho possível ([CEMEAI-ICMC-USP, 2016](#)).

3.1 Código DNS

Um código numérico foi desenvolvido para a realização do presente trabalho. Para esse desenvolvimento, Fortran Free Format foi usada como linguagem de programação. A estratégia de paralelização de decomposição do domínio foi utilizada através da linguagem independente de protocolo de comunicações Message-Passing Interface - MPI (LUSK; DOSS; SKJELLUM, 1996), permitindo que os cálculos sejam feitos de forma simultânea em diversos elementos de processamento de uma mesma máquina ou cluster.

Figura 8 – Esquema do processo de simulação de um problema com o código numérico DNS.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 apresenta em linhas gerais a sequência de etapas para a simulação de um problema usando o presente código DNS. Usou-se como referência o procedimento adotado por Babucke (2009). Maiores detalhes de cada etapa serão apresentados posteriormente nesse capítulo, mas sucintamente segue-se as seguintes etapas: definido o problema em questão, constrói-se uma malha computacional adequada para simulação do problema e obtém-se as condições iniciais para o escoamento base, as quais podem ser obtidas a partir de soluções analíticas para problemas mais simples, como no caso das soluções de similaridade das equações de camada limite (SCHLICHTING, 1979). Posteriormente, realiza-se uma análise usando a Teoria de Estabilidade Linear (Linear Stability Theory - LST) onde são obtidas as taxas de amplificações e

autofunções, que são utilizadas para gerar perturbações na simulação DNS em regime transiente. Assim, definidas a malha, as condições iniciais e as perturbações (além de parâmetros numéricos necessários) o presente código é executado. Durante sua execução há a impressão de resultados para realizar as análises de pós-processamento e obter informações relevantes do problema como, no presente caso, o som gerado pelo escoamento e sua propagação pelo domínio através do cálculo do divergente do campo de velocidades, que corresponde a dilatação do fluido. Um fluxograma do funcionamento do presente código é apresentado na [Figura 9](#).

Figura 9 – Esquema do funcionamento do código numérico DNS.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Decomposição do Domínio e Transformação de Coordenadas

Em todas as simulações de escoamento definiu-se uma região de interesse na direção longitudinal x e uma região de amortecimento, conforme destacado na [Figura 7](#). A região de amortecimento na direção longitudinal é obtida com a combinação de estiramento de malha com uso de um filtro espacial na direção x , como utilizado por [Colonius, Lele e Moin \(1997\)](#) e [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#) para que as flutuações sejam altamente atenuadas antes de

atingirem o contorno. Na direção normal y também definiu-se uma região de interesse e outra de amortecimento com estiramento da malha computacional e filtro espacial, conforme o utilizado para a direção x . Mais detalhes são apresentados na [seção 3.7](#)

Para se resolver grandes simulações em super-computadores usando DNS, é essencial utilizar uma estratégia de paralelização que aumente a eficiência do processo de cálculo. No presente código desenvolvido, como estratégia de paralelização dos cálculos, optou-se pela decomposição do domínio de cálculo. Nesse procedimento um único código é executado por cada elemento de processamento sobre um conjunto separado de dados (Single Program Multiple Data - SPMD), havendo a necessidade de se comunicar informações e sincronizar atividades entre os elementos de processamento durante a solução. Para isso foram utilizadas diretivas do protocolo de comunicação MPI. Assim, tem-se a vantagem de ocorrerem cálculos simultaneamente, reduzindo-se o tempo de cálculo. A [Figura 10](#) ilustra um exemplo de malha com estiramento nas direções x e y e também as partições de domínio.

Figura 10 – Malha computacional com estiramento e divisão de domínios em cores preto e cinza.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os esquemas de discretização espacial apresentados na [subseção 3.3.1](#) são definidos para malhas regulares enquanto que a malha proposta possui regiões com estiramento, tornando

os espaçamentos não-uniformes. Portanto, transformações de coordenadas são implementadas através do mapeamento de uma malha não-uniforme $x - y$ para uma malha uniforme $x - h$, com espaçamentos uniformes Dx e Dh . De acordo com [Anderson \(1995\)](#), as primeiras derivadas espaciais no espaço físico são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial x} \right); \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial x}{\partial x} \right); \quad (3.2)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial h} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h}; \quad (3.3)$$

onde J é o determinante Jacobiano e os coeficientes $\frac{\partial x}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial h}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial y}{\partial h}$ são as métricas da transformação. Ao invés de se aplicar derivação analítica para se obter as métricas, os próprios métodos de discretização espacial são utilizados para obtê-los. Segundo [Babucke \(2009\)](#), o cálculo numérico das métricas é mais preciso se a mesma discretização é usada tanto para as métricas como para as quantidades do escoamento. Dessa forma, temos que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial x}}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial h}}; \quad (3.6)$$

e as derivadas primeiras podem ser calculadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial h}} \frac{\partial}{\partial h}; \quad (3.8)$$

As derivadas segundas e cruzadas são obtidas aplicando-se as equações [Equação 3.1](#) e [Equação 3.2](#) duas vezes. Dessa forma as derivadas segundas de uma função são dadas por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial x}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{\frac{\partial x}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial h}} \frac{\partial^2}{\partial h^2} - \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial h^2}}{\frac{\partial y}{\partial h}} \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial^2}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}; \quad (3.10)$$

sendo que as métricas são dadas por:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 y}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial y}; \quad (3.12)$$

3.3 Discretização Numérica

A seguir são apresentados os esquemas de discretização espacial e temporal implementados no código numérico, e posteriormente na [seção 3.4](#), uma discussão sobre problemas de dissipação e dispersão numéricas e suas implicações para simulações numéricas de aeroacústica.

3.3.1 Esquema de Discretização Espacial

Como destacado na [seção 1.3](#), o método numérico utilizado para resolver problemas de aeroacústica deve possuir baixo ruído numérico para não contaminar a solução do escoamento, como também deve permitir que as ondas acústicas sejam propagadas a grandes distâncias e longos intervalos de tempo sem sofrer com efeitos de dissipação e dispersão numéricas. Com base nessas restrições, tem crescido o desenvolvimento de métodos numéricos de alta-ordem buscando minimizar tais efeitos. Para esquemas de diferenças finitas, os principais exemplos são as classes de esquemas baseados nos:

- esquemas de diferenças finitas explícitos construídos por [Tam e Webb \(1993\)](#) para preservar a relação de dispersão: esquemas de diferenças finitas DRP (Dispersion-Relation-Preserving);
- esquemas de diferenças finitas implícitos compactos apresentados por [Lele \(1992\)](#), onde é necessário resolver um sistema de equações algébricas para obtenção das derivadas espaciais.

No presente trabalho, os cálculos das derivadas foram realizados através do esquema de diferenças finitas compactas, o qual já foi estudado e otimizado por vários autores que mostram as vantagens em utilizá-lo (Adam (1977), Hirsh (1975), Lele (1992), Mahesh (1998), Souza, Mendonça e Medeiros (2005)). No código numérico foram adotados esquemas de 5ª e 6ª ordens de precisão. Aproximações de 6ª ordem são usadas para o ponto próximo ao contorno e no centro do domínio, e aproximações de 5ª ordem para o ponto no contorno, desenvolvidas por (SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005), e será daqui em diante descrito como esquema de diferenças finitas compactas.

Como mencionado anteriormente, esquemas de diferenças finitas compactas geram um sistema de equações algébricas a ser resolvido. Neste trabalho, sistemas tridiagonais são obtidos e resolvidos através do algoritmo de Thomas TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm) (PRESS et al., 1992) e o auxílio de computação paralela com decomposição do domínio. Detalhes desse procedimento são apresentados na seção 3.5.

A seguir, são apresentados os sistemas de equações algébricas adotados para os cálculos da primeira e segunda derivadas para uma malha uniforme de espaçamento entre pontos h .

Cálculo da Primeira Derivada

No cálculo da primeira derivada para o ponto no contorno inferior ou de entrada, $i = 1$, adotou-se a aproximação descentrada de 5ª ordem

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24h}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + O(h^5): \quad (3.13)$$

Para o ponto próximo a parede, $i = 2$, adotou-se a aproximação descentrada de 6ª ordem

$$f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = \frac{1}{120h}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) + O(h^6): \quad (3.14)$$

Para os pontos centrais adotou-se a seguinte aproximação

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12h}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + O(h^6): \quad (3.15)$$

Já, para os pontos $i = N$ e $i = N - 1$ as aproximações são análogas às utilizadas para os pontos $i = 1$ e $i = 2$, com inversão do sinal. O sistema de equações algébricas a ser resolvido segundo o algoritmo de Thomas é dado por:

Cálculo da Segunda Derivada

$$13f_1'' + 137f_2'' = \frac{1}{120h^2}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) + O(h^5): \quad (3.17)$$
$$f_1'' + 12f_2'' + 3f_3'' = \frac{1}{360h^2}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) + O(h^6): \quad (3.18)$$
$$2f_{i-1}'' + 11f_i'' + 2f_{i+1}'' = \frac{1}{4h^2}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) + O(h^6): \quad (3.19)$$

Para os pontos $i = N$ e $i = N - 1$ as aproximações são análogas às obtidas para os pontos $i = 1$ e $i = 2$. Dessa forma, o sistema de equações algébricas tridiagonais a ser resolvido é dado por

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{ccc} 13 & 137 & \\ 1 & 12 & 3 \\ & \cdot & \cdot \\ & & 2 \quad 11 \quad 2 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 3 & 12 & 1 \\ & & & 137 & 13 & \end{array}
 \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \vdots \\ 5 \quad 4 \end{array}
 \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_i'' \\ \vdots \\ f_{N-1}'' \\ f_N'' \end{array}
 \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ 5 \end{array}
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} \frac{1}{120}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) \\ \frac{1}{360}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{360}(4834f_N - 8424f_{N-1} + 1890f_{N-2} + 2320f_{N-3} - 810f_{N-4} + 216f_{N-5} - 26f_{N-6}) \\ \frac{1}{120}(9775f_N - 20285f_{N-1} + 11170f_{N-2} - 550f_{N-3} - 145f_{N-4} + 36f_{N-5}) \end{array}
 \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ 5 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.20)$$

Discretização Espectral na direção z

Nos casos das simulações tridimensionais é utilizada uma discretização espectral na direção z devido à condição de periodicidade na direção transversal, onde cálculos são feitos no espaço de Fourier. A transformação de uma variável no espaço físico para sua correspondente no espaço de Fourier é dada por:

$$f(x; y; z; t) = \sum_{k=0}^K \hat{f}_k(x; y; t) \cdot e^{i(kgz)}; \quad (3.21)$$

com f sendo qualquer variável no espaço físico e $\hat{f}$ a variável complexa no espaço de Fourier. O número de onda fundamental na direção transversal g é dado pelo comprimento transversal do domínio de integração l_z :

$$g = \frac{2\pi}{l_z}; \quad (3.22)$$

Com o intuito de se evitar transformações desnecessárias, todos os cálculos das variáveis do escoamento são realizados no espaço físico, enquanto que somente as derivadas primeira e segundas na direção z são calculadas no espaço de Fourier. Para isso, a variável que se deseja calcular-se a derivada na direção z é transformada para o espaço de Fourier (PRESS et al., 1992). Uma vez no espaço de Fourier as derivadas são calculadas, tendo a vantagem de serem exatas e

não possuírem erros de truncamento. Por fim, os valores das derivadas é que são transformadas de volta para o espaço físico onde os demais cálculos são realizados.

$$\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial z} = \hat{A}_{k=1}^{2K=3} - ikg\hat{f}_k; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_k}{\partial z^2} = \hat{A}_{k=1}^{2K=3} - k^2g\hat{f}_k; \quad (3.24)$$

Para se evitar problemas de “alias”, que são oscilações não físicas de alta frequência que aparecem devido a produtos não lineares dos modos, somente os primeiros 2=3 do número máximo de modos permitidos são utilizados (DAINEZI, 2012).

3.3.2 Esquema de Discretização Temporal

Souza (2005) realizou diversos testes para avaliar diferentes esquemas de discretização temporal. O resultado destes testes mostrou que, apesar de alguns métodos obterem vantagens, como baixo armazenamento (WILLIAMSON, 1980), o tempo total de simulação para o método Runge-Kutta de 4ª ordem é melhor, pois pode-se trabalhar com passos de tempo maiores. Desta forma, no código numérico foi implementado um método explícito do tipo Runge-Kutta de quatro estágios, com 4ª ordem de precisão. A partir da solução do escoamento em um tempo n , a solução no tempo $n+1$ após um avanço de tempo Dt é obtido a partir dos seguintes passos:

$$Q_0 = Q^n; \quad (3.25)$$

$$Q_1 = Q^n + \frac{1}{2}Dt \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.26)$$

$$Q_2 = Q^n + \frac{1}{2}Dt \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.27)$$

$$Q_3 = Q^n + Dt \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.28)$$

$$Q_4 = Q^{n+1} = Q^n + \frac{Dt}{6} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_3; \quad (3.29)$$

Inicialmente armazena-se a solução do tempo n em Q_0 . Posteriormente, a cada passo intermediário no tempo (dado pelos subíndices 1, 2, 3 e 4), a derivada no tempo $\partial Q/\partial t$ e, portanto, as derivadas espaciais devem ser recalculadas.

3.4 Análise de Fourier das Derivadas Espaciais

Esquemas de discretização como os apresentados nas seções anteriores são aproximações para a solução das equações diferenciais parciais (EDP's) que governam o problema a ser

estudado. Uma análise de Fourier do método numérico é um modo efetivo de avaliar e quantificar os erros de discretização envolvidos nessas aproximações (LELE, 1992). Tam (2004) realizou análises de Fourier de esquemas de diferenças finitas explícitas DRP, enquanto que Lele (1992) realizou tais análises para esquemas de diferenças finitas compactas. Nesta seção, é apresentada a análise de Fourier para os esquemas de discretização de diferenças finitas compactas para o cálculo das derivadas primeira e segunda a serem utilizados nas direções x e y no presente trabalho.

Para a realização da análise de Fourier, assume-se que as variáveis são constantes e periódicas em um domínio $[0; L]$ e que o número de modos de Fourier N utilizados para representar uma função no espaço físico $f(x)$ é igual a $N = L/h$, sendo h espaçamentos no espaço físico. Assim, uma variável $f(x)$ pode ser descrita no espaço de Fourier $\hat{f}_k$ por:

$$f(x) = \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \hat{f}_k e^{i \frac{2\pi k x}{L}}; \quad (3.30)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Introduzindo o número de onda normalizado $b = 2\pi k h / L = 2\pi k / N$ e a coordenada normalizada $s = x/h$, a Equação 3.30 pode ser reescrita como:

$$f(s) = \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \hat{f}_k e^{i b s}. \quad (3.31)$$

Assim, o domínio do número de onda normalizado é $[0; p]$ e a primeira derivada da Equação 3.31 gera uma função com coeficientes de Fourier $\hat{f}'_k = i b \hat{f}_k$, logo:

$$f'(s) = \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} i b \hat{f}_k e^{i b s}. \quad (3.32)$$

A análise de Fourier da primeira derivada consiste em comparar os coeficientes de Fourier obtidos a partir do esquema de discretização com os coeficientes exatos (Equação 3.32). Aplicando-se a transformação para o espaço de Fourier (Equação 3.31) a um esquema de discretização, é possível então descrever uma relação da seguinte forma:

$$i \bar{b}' \hat{f}_k \cong i b \hat{f}_k; \quad (3.33)$$

onde $\bar{b}'$ é o número de onda modificado referente ao esquema de discretização utilizado.

Cada esquema de diferenças finitas possui uma função particular $\bar{b}'(b)$, sendo que diferenciações exatas fornecem $\bar{b}' = b$ e métodos espectrais também, exceto para $b \neq p$. Lele

(1992) fornece essa relação para diferentes esquemas de diferenças finitas compactas:

$$\bar{b}'(b) = \frac{a \sin(b) + (b=2) \sin(2b) + (c=3) \sin(3b)}{1 + 2a \cos(b) + 2b \cos(2b)}; \quad (3.34)$$

onde, para o esquema de diferenças finitas compactas do presente trabalho, $a = 1=3$; $b = c = 0$; $a = 14=9$ e $b = 1=9$. Colonius e Lele (2004) apresentam também os coeficientes para diversos esquemas, entre eles o esquema explícito de 2ª ordem ($a = b = b = c = 0$; $a = 1$), e o esquema DRP de Tam e Webb (1993) ($a = b = 0$; $a = (992 - 30p) = 42d$, $b = (6900p - 22528) = 84d$ e $c = (1632 - 510p) = 14d$, sendo $d = 45p - 128$).

A Figura 11 apresenta um gráfico do número de onda real por número de onda modificado onde são plotados os esquemas citados. Os valores de número de onda para os quais a curva do esquema de discretização mais se aproxima da curva exata correspondem àquelas ondas que são bem resolvidas pelo método aplicado. A medida que há um distanciamento entre elas, o método numérico começa a inserir efeitos de dispersão à metodologia. Pode se observar também que o esquema de diferenças finitas compactas de 6ª ordem fornece melhor resolução que o método explícito DRP, que é de 4ª ordem (COLONIUS; LELE, 2004).

Figura 11 – Número de onda real por número de onda modificado para a 1ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem; (c) DRP 4ª ordem; (d) valor exato; .

Fonte: Elaborada pelo autor.

O número de pontos por comprimento de onda é igual a $N_l = 2p=b$ e o erro da discretização pode ser avaliado conforme:

$$e_1 = \frac{\bar{b}(b) - b}{b}; \quad (3.35)$$

Dessa forma, é possível verificar através da [Figura 12](#) que o esquema compacto apresenta menor erro e necessita de menos pontos por comprimento de onda do que os demais, tornando-o mais atrativo. Por exemplo, para se ter um nível de erro de discretização da ordem de 10^{-3} , o esquema compacto necessita de aproximadamente 6 pontos por comprimento de onda enquanto que os esquemas DRP e explícito centrado de 2ª ordem necessitam de aproximadamente 12 e 80 pontos, respectivamente. A desvantagem é a necessidade de se resolver sistemas de equações algébricas tridiagonais para o cálculo das derivadas.

Figura 12 – Número de pontos por comprimento de onda por erro para a 1ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem e (c) DRP 4ª ordem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise semelhante pode ser realizada para o cálculo da segunda derivada. A segunda derivada exata da [Equação 3.31](#) é dada por:

$$f''(s) = \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \hat{A} - b^2 \hat{f}(k) e^{jbs}. \quad (3.36)$$

[Lele \(1992\)](#) também fornece uma relação entre o número de onda modificado para segunda derivada e o número de onda real:

$$\bar{b}(b) = \frac{2a[1 - \cos(b)] + (b=2)[1 - \cos(2b)] + (2c=9)[1 - \cos(3b)]}{1 + 2a \cos(b) + 2b \cos(b)}. \quad (3.37)$$

Para o esquema de diferenças finitas centradas de 2ª ordem $a = 1$ e $b = c = a = b = 0$, e para o esquema de diferenças finitas compactas de 6ª ordem utilizada no presente trabalho $a = 3=11$, $b = 48=11$, $a = 2=11$ e $c = b = 0$. A [Figura 13](#) apresenta um gráfico de número

de onda real por número de onda modificado comparando os dois métodos, e também uma comparação do erro, dado pela [Equação 3.38](#), em relação ao valor exato em função do número de pontos por onda, onde é evidenciado a vantagem do método compacto.

$$e_2 = \frac{\frac{E_0}{E_1} (b) - b^2 \frac{E_0}{E_1}}{b^2} : \quad (3.38)$$

Efeitos de dispersão numérica estão relacionados ao esquema utilizado e tendem a alterar a fase com que as ondas estão sendo transportadas, quando os comprimentos dessas ondas não são bem resolvidas pelo esquema numérico. Tal verificação foi apresentada anteriormente e consiste em comparar a parte real da relação dada pela [Equação 3.33](#). Por outro lado, os efeitos de dissipação numérica, que tendem a diminuir as amplitudes das ondas sendo transportadas, são avaliados comparando-se a parte imaginária da relação dada pela [Equação 3.33](#). Tal diferença de fase ocorre quando esquemas de discretização espaciais utilizados não são centrados. Neste trabalho, o uso de um esquema de diferenças finitas compactas centrado garante que os efeitos de dissipação devido à discretização espacial são nulos ([LELE, 1992](#)).

Figura 13 – (esquerda) Número de onda real por número de onda modificado para a 2ª derivada, e (direita) número de pontos por comprimento de onda por erro para a 2ª derivada: (a) explícita centrada de 2ª ordem; (b) compactas 6ª ordem e (c) exato; .

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com [Babucke \(2009\)](#) o cálculo da 2ª derivada de uma variável realizando dois cálculos consecutivos de 1ª derivada causa uma perda de resolução para maiores valores de números de onda ([Figura 14](#)). Sendo assim, termos dos vetores de fluxo da [Equação 2.8](#) foram separados entre 2ª derivadas diretas em uma direção específica e termos que geraram derivadas cruzadas. A 2ª derivada das variáveis foram realizadas conforme procedimento descrito anteriormente, enquanto que as derivadas cruzadas foram calculadas com dois cálculos consecutivos de 1ª derivada. Tal procedimento de separação faz com que surjam termos adicionais às equações e é apresentado no [Apêndice A](#).

3.5 TDMA Paralelizado

Os sistemas algébricos tridiagonais obtidos são resolvidos através do algoritmo de Thomas TDMA ([PRESS et al., 1992](#)). Para os cálculos da primeira e segunda derivadas através do esquema de diferenças finitas compactas de 5ª e 6ª ordem define-se uma molécula de cálculo com o número de pontos necessários para a realização das operações. Para os pontos intermediários (a partir do terceiro ponto até o ponto $N - 3$) a molécula de cálculo é de 5 pontos.

Entretanto, quando o domínio é particionado conforme ilustrado anteriormente ([Figura 10](#)), em cada elemento de processamento o domínio não possui os pontos necessários para se calcular as derivadas de forma correta nas interfaces entre domínios adjacentes. Dessa forma, para se garantir que o cálculo seja feito de forma correta, é necessário haver uma sobreposição entre domínios adjacentes. A [Figura 15](#) mostra um exemplo de dois domínios, indicando em cada um, quais os pontos em que é possível calcular as derivadas usando somente pontos do seu próprio domínio, e quais pontos em que isso não é possível. Logo, os valores das derivadas para os pontos em que não se pode calcular são obtidos através da comunicação do valor correto obtido do domínio adjacente. Computacionalmente isso é feito usando diretivas de paralelização MPI, como já discutido anteriormente e indicado na [Figura 15](#).

Além do procedimento de comunicação do valor da derivada, também é necessária a comunicação entre elementos de processamento adjacentes durante a execução do algoritmo TDMA. Este algoritmo se divide em dois processos de varredura no domínio para obtenção da solução: um de ida onde coeficientes são calculados, e outro de volta onde o valor da solução é obtido. Quando o domínio é decomposto, informações durante as duas varreduras devem ser comunicados entre domínios adjacentes. A [Figura 16](#) mostra o procedimento de ida e volta para o TDMA quando realizado de forma sequencial e de forma paralelizada.

Figura 14 – Número de onda modificado para o cálculo direto da segunda derivada versus aplicando a primeira derivada duas vezes.

Fonte: [Babucke \(2009\)](#).

Figura 15 – Sobreposição do entre domínios adjacentes e processo de comunicação usando MPI.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Execução do algoritmo TDMA de forma sequencial e paralelizada.

Para evitar uma “serialização” dessa parte do código utiliza-se um procedimento chamado pipeline. Por exemplo, para o cálculo na direção x o processo segue as seguintes etapas: o elemento de processamento do primeiro domínio inicia os cálculos da ida para a primeira linha da direção y . Chegando ao fim do primeiro elemento de processamento, informação é comunicada para o próximo elemento de processamento. Enquanto o próximo elemento inicia os cálculos da primeira linha da direção y , o anterior já pode iniciar os cálculos da segunda linha na direção y . O segundo elemento continua até o terceiro e assim consequentemente. Esse processo se repete até que todos os elementos de processamento tenham feito o processo de ida para todas as linhas em y de seus respectivos domínio. Uma vez que o elemento de processamento do último domínio termina o processo de ida para a primeira linha em y , ele já pode iniciar o processo de volta que funciona de forma reversa. Os cálculos são feitos de trás pra frente até chegar à interface com o

domínio anterior. Informação é passada para o cálculo da volta no domínio anterior e o último elemento já pode iniciar os cálculos para a segunda linha na direção y. Esse processo se repete até que todos os elementos de processamento tenham feito o processo de volta de todas as linhas em y de seus respectivos domínio.

Para auxiliar a identificação dos elementos de processamento durante a execução do código, definiu-se 3 variáveis: *myrankx*, *myranky* e *myrank*:

- *myrankx*: índice de posição do elemento de processamento na direção x;
- *myranky*: índice de posição do elemento de processamento na direção y;
- *myrank*: índice do elemento de processamento no domínio.

A Figura 17 apresenta um esquema dos índices dos elementos de processamento. Em todas as simulações utilizou-se dois elementos de processamento na direção y e número variado de elementos de processamento na direção x.

Figura 17 – Esquema de distribuição dos elementos de processamento e os índices utilizados. *myrankx*, *myranky* são apresentados em eixos coordenado e *myrank* é definido no centro de cada elemento de processamento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.6 Código LST

Um código numérico foi gentilmente fornecido pelo Prof. Márcio T. de Mendonça (MENDONÇA, 2015) para resolver o conjunto de equações descritas na seção 2.3 e obter-se as taxa de amplificação espacial e as autofunções utilizadas para introduzir as perturbações no contorno de entrada do escoamento. O procedimento de solução dessas equações é apresentada por Salemi (2006).

Integra-se numericamente a Equação 2.35 (ou Equação 2.47 para o caso de jato varicoso) das bordas para o meio utilizando as condições de contorno apresentadas. No centro a solução para c obtida pela integração da parte superior ao centro, $c(0^+)$, e obtida pela integração da parte inferior, $c(0^-)$, tem de ser iguais. Caso não sejam, varia-se a até que isso ocorra. Encontrado o valor de a que satisfaz a condição descrita acima, pode-se calcular as autofunções das variáveis. A Figura 18 apresenta em linhas gerais a sequência de etapas para a simulação.

Figura 18 – Esquema do funcionamento do código numérico LST.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7 Condições de Contorno

As condições de contorno para os problemas estudados são apresentadas na [Figura 7](#): entrada, saída, corrente livre e periodicidade.

Entrada

Na região da entrada são utilizadas as variáveis definidas como condição inicial conforme descrita na [seção 3.8](#). Entretanto, além desses valores prescritos, duas informações nas condições de entrada: flutuações a partir das características e perturbações com autofunções obtidas pelo LST.

A introdução da flutuações a partir das características ocorre porque um tratamento diferenciado deve ser feito na entrada para permitir que ondas acústicas, originadas no interior do domínio computacional e que viajam na direção contrária a do escoamento quando este é subsônico, deixem o domínio através da entrada sem que haja reflexões que contaminem a solução em seu interior.

Para se introduzir o efeito de tais ondas acústicas na condição de contorno de entrada, é possível escrever as perturbações do escoamento base em função de variáveis características que correspondem às perturbações de entropia, flutuações de vorticidade do escoamento e às ondas acústicas que viajam contra e a favor do escoamento. A variável característica c que corresponde a onda acústica que viaja na direção contrária a do escoamento pode ser obtida a partir das flutuações do escoamento como:

$$c = -u' r_0 a_0 + p'; \quad (3.39)$$

onde o subscrito $_0$ indica valores do escoamento base e o superescrito $'$ flutuações em torno do escoamento base. Calculados os valores de c próximo à entrada, é possível extrapolar para o contorno, por exemplo com uma aproximação de 2ª ordem:

$$c_{(j=1)} = 3 \cdot c_{(j=2)} - 3 \cdot c_{(j=3)} + c_{(j=4)}; \quad (3.40)$$

Uma vez calculados o valor da característica no contorno, é possível obter o valor das flutuações através de:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{c}{2a_0^2} \\ u' &= \frac{c}{2r_0 a_0^2} \\ v' &= 0 \\ p' &= \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

O processo de cálculo das perturbações com autofunções obtidas pelo LST é apresentado na [seção 2.3](#). Concluindo, a condição de contorno de entrada se constitui de um valor prescrito

obtido da condição inicial somada a perturbações com autofunções do LST e somada a flutuações obtidas das características para evitar reflexões de ondas acústicas geradas no interior do escoamento em escoamentos subsônicos.

Saída

No contorno de saída é utilizada uma condição de contorno não-reflexiva na direção x da seguinte maneira:

$$Q_{i=N} = Q_{i=N-1}; \quad (3.42)$$

Entretanto, em simulações de aeroacústica, principalmente no caso de escoamento subsônico, as perturbações são pouco dissipadas ao longo domínio. Dessa forma, elas chegam ao contorno de saída mas não podem ser refletidas. De acordo com [Colonius, Lele e Moin \(1992\)](#), condições de contorno não-reflexivas não são suficientes para evitar reflexões em condições de contorno de saída pois vórtices produzem grandes reflexões devido a efeitos não lineares.

O procedimento utilizado para tratar dessa situação apresentada consiste em eliminar o máximo possível as flutuações antes que elas atinjam a saída domínio. [Colonius, Lele e Moin \(1992\)](#) propuseram o uso de estiramento da malha e um processo de filtragem do domínio para que as flutuações sejam altamente atenuadas, o qual é utilizado no presente trabalho. O estiramento da malha faz com que as flutuações se tornem mal resolvidas e sofram um processo de dissipação numérica. O uso do filtro continua o processo de dissipação sobre as flutuações antes que elas cheguem ao contorno de saída. No presente trabalho, um filtro compacto de 6ª ordem é utilizado ([LELE, 1992](#)):

$$\theta \theta_{i-1} + \theta_i + \theta \theta_{i+1} = c f_{i-2} + b f_{i-1} + a f_i + b f_{i+1} + c f_{i+2}; \quad (3.43)$$

onde o superescritor θ representa o valor da variável filtrada. Os coeficientes são dados por:

$$a = \frac{1}{16} \left(\frac{60}{06} + 11 + 10\theta \right); b = \frac{1}{32} \left(\frac{60}{06} + 15 + 34\theta \right); c = \frac{1}{16} \left(\frac{60}{06} - 3 + 6\theta \right); \quad (3.44)$$

com $\theta = 0; 48$.

A transição da malha entre região com estiramento ([Figura 10](#)) é dada por:

$$F = (1 - s) F_{ri} + s F_{ra}; \quad (3.45)$$

onde $F_{ri} = 1; 0$ é o estiramento da região de interesse e $F_{ra} = 1; 009$ é o estiramento utilizado na região de amortecimento.

$$s = 1 - 6x^{*5} + 15x^{*4} - 10x^{*3}; \quad (3.46)$$

$$x^* = \frac{x - x_0}{Dx_{\text{rampa}}}. \quad (3.47)$$

A variável s é um polinômio de 5ª ordem que transiciona de forma suave da região não amortecida para a região amortecida e sendo x^* a direção em que o polinômio será aplicado, x_0^* o ponto de início e x_{rampa}^* sua extensão, conforme observa-se na [Figura 19](#).

Figura 19 – Função s com transição suave.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Corrente Livre

Um tratamento semelhante à condição de contorno da saída é utilizada na direção y , com o uso de estiramento da malha em conjunto com filtro espacial para eliminar as flutuações para impedir que estas contaminem o domínio computacional. Nos contornos da direção y são utilizados:

$$Q_{j=1} = Q_{j=2}; \quad (3.48)$$

$$Q_{j=N} = Q_{j=N-1}; \quad (3.49)$$

Periodicidade

Na direção transversal z é utilizada condição de contorno de periodicidade, em que as variáveis do último ponto são tomadas iguais as variáveis do primeiro ponto, e no interior do domínio as derivadas espaciais são calculadas no espaço de Fourier conforme descrito na [seção 3.3](#).

$$Q_{k=N+1} = Q_{k=1}; \quad (3.50)$$

3.8 Condições de Iniciais

Em conjunto com a geração da malha, a imposição das condições iniciais constituem uma parte primordial do processo de configuração do problema a ser simulado. Porém, os casos simulados podem diferenciar consideravelmente entre si (um problema de camada de mistura ou um problema de jato planar, por exemplo). Assim, em cada caso simulado no presente trabalho foi utilizada uma malha computacional específica.

Para o domínio do escoamento, utilizou-se como condição inicial o perfil de velocidades, temperatura e densidade utilizadas como condição de contorno de entrada e simulou-se um período suficiente para que a inacurácia dessa solução inicial fosse transportada e convectada para fora do domínio, sem haver prejuízo da solução final.

O programa também contém uma subrotina que grava arquivos de reserva (backup) com todos os dados do campo de escoamento. Estes arquivos podem ser utilizados para reiniciar uma simulação interrompida, o que é uma boa prática do ponto de vista de continuidade e produtividade.

Resumo

No presente capítulo foram apresentados detalhes do código computacional e as etapas necessárias para realizar as simulações. Foi abordada a necessidade de se ter uma malha não-uniforme para se definir regiões de interesse do escoamento e regiões de amortecimento. Portanto, um processo de geração de malha não-uniforme em conjunto com transformações de coordenadas são necessárias para se realizar o cálculo das derivadas. Além do mais, devido ao grande número de pontos computacionais, foi apresentado o processo de decomposição do domínio para utilização de processamento paralelizado através de diretivas MPI.

Detalhes do esquema de diferenças finitas compactas de 5ª e 6ª ordem de precisão para o cálculo das derivadas espaciais nas direções x e y , respectivamente e a discretização espectral para o cálculo das derivadas na direção z foram apresentados e discutidos. Também foi apresentada o esquema de discretização temporal através do método Runge-Kutta de quatro passos e 4ª ordem de precisão. Uma análise de Fourier mostrou que o esquema compacto oferece um menor erro que o esquema explícito DRP apresentado, diminuindo efeitos de dissipação numérica, além de evitar efeitos de dispersão por se tratar de um esquema centrado. Devido à decomposição de domínio, o algoritmo de Thomas utilizado para a solução dos sistemas de equações algébricas obtidos para os cálculos da primeira e segunda derivadas foi alterado e tal abordagem foi apresentada.

Posteriormente, foi apresentado de forma sucinta o esquema de funcionamento do código computacional gentilmente fornecido pelo Prof. Márcio Mendonça para os cálculos das autofunções para introdução das perturbações.

Por fim, o conjunto de condições iniciais e de contorno foram apresentados com mais detalhes.

RESULTADOS

Neste trabalho um código computacional foi desenvolvido onde foram implementados os métodos apresentados no capítulo anterior. As equações governantes deste problema foram apresentadas no [Capítulo 2](#). As derivadas espaciais são calculadas usando um esquema de diferenças finitas compactas de 5ª e 6ª ordem, e a discretização temporal usando um esquema Runge-Kutta de 4ª ordem e quatro passos, apresentados no [Capítulo 3](#).

Entretanto, há a necessidade de confirmar se o código computacional foi implementado de forma correta, estando livre de erros de programação ou modelagem. Esse procedimento é chamado de verificação e validação de um código numérico, e os resultados de tal procedimento serão apresentados nesse capítulo. Inicialmente, segue-se uma breve discussão sobre conceitos de verificação e validação de códigos numéricos e então é apresentado o método das soluções manufaturadas (Method of Manufactured Solutions - MMS). Os resultados obtidos usando MMS são então apresentados e discutidos ([seção 4.1](#)).

A maneira mais adequada para realização da validação de resultados numéricos é compará-los com resultados experimentais confiáveis. Uma vez que a comparação é satisfatória, diz-se que o modelo matemático representa a física simulada. Porém, a disponibilidade de dados experimentais é escassa em muitos casos, sendo então dados numéricos publicados em literatura vigente uma fonte alternativa confiável de dados para comparação, mas ainda sendo mais um procedimento de verificação. Esse foi o procedimento utilizado nesse trabalho, também tomando um comparativo em relação a resultados obtidos por meio do uso da Teoria de Estabilidade Linear.

Posteriormente, foram então selecionados alguns problemas de escoamentos de fluidos com resultados publicados na literatura para serem simulados com o presente código, e seus resultados comparados. O primeiro caso de escoamento de fluido simulado foi o do escoamento bidimensional de uma camada de mistura, cujos resultados são apresentados por [Colonius, Lele e Moin \(1997\)](#) e [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#). Os resultados das comparações são

apresentados na [seção 4.4](#). Depois foram simulados dois casos de escoamentos de jatos planares bidimensionais: jatos planares com modos varicoso e sinuoso apresentados por [Weder \(2012\)](#) e por fim, jatos planares para diversos números de Mach apresentados por [Reichert e Biringen \(2007\)](#). Os resultados obtidos para os casos de jato são apresentados na [seção 4.5](#).

4.1 Verificação e Validação de Códigos Numéricos

Segundo [Silva e Villar \(2010\)](#), resultados obtidos por simulações numéricas devem ter boa representação do problema em estudo, e para tanto, os códigos computacionais utilizados para obtê-los devem passar por um processo de verificação e validação.

A verificação consiste em analisar se o código está resolvendo corretamente as equações implementadas ([ROACHE, 1998](#)). Nessa etapa, erros de implementação são procurados e o erro numérico envolvido é quantificado. Segundo o autor, um código pode ser considerado verificado se for demonstrado que as equações são resolvidas com a ordem de precisão teórica dos métodos de discretização. Isso se constitui um exercício puramente matemático e que não requer a priori nenhum rigor com a física do problema a ser solucionado.

Por outro lado, o processo de validação é uma etapa posterior e consiste em, uma vez verificado o código, comparar os resultados da simulação numérica com resultados experimentais ([ROACHE, 1998](#)). Nesse caso sim, rigor físico é altamente necessário, e um resultado aceitável indica que o modelo matemático utilizado é adequado para modelar o problema físico em questão.

Um código numérico verificado e validado então produz resultados coerentes com o problema físico a que se propõe simular, com ordem numérica conhecida e de forma segura no que se diz respeito à erros de implementação ([OBERKAMPF; TRUCANO, 2002](#)). Portanto, essa etapa é primordial no desenvolvimento de novos códigos, como é o caso do presente trabalho.

Em engenharia de software, a área que trata procedimentos formais para testes de qualidade e confiabilidade de códigos é chamada garantia de qualidade de software (Software Quality Assurance - SQA). [Salari e Knupp \(2000\)](#) apresentam estes procedimentos, que consistem basicamente de três partes:

- verificação estática: verificar se o programa está livre de erros de compilação, não sendo necessário executar o programa;
- verificação dinâmica: o programa é executado e avaliado se não há problemas com índices, erros de alocação de memória para variáveis e erros de programação, entre outros problemas;
- verificação formal: algum problema restante.

Dentre esses procedimentos, o mais importante é o de verificação dinâmica, pois erros encontrados nessa etapa podem afetar a convergência, a eficiência e a precisão do código. Vários métodos de teste dinâmicos são possíveis, desde os menos rigorosos como uma análise de tendências dos resultados obtidos, como outros mais exigentes em que se destaca o método das soluções manufaturadas. Da mesma forma como se classificam a rigorosidade dos tipos de testes, pode-se classificar os critérios de aceitação, indo de uma análise subjetiva de um especialista até a utilização de métodos formais de avaliação de ordem de precisão. Segundo [Salari e Knupp \(2000\)](#), um método de avaliação mais completo e rigoroso consiste naquele em que o método das soluções manufaturadas é utilizado em conjunto com avaliação da ordem de precisão como critério de aceitação. Tal procedimento será utilizado no presente trabalho.

4.1.1 Método das Soluções Manufaturadas

Uma boa maneira de se avaliar resultados numéricos obtidos com um código é compará-los com resultados exatos. O uso do MMS é uma maneira fácil de se obter soluções exatas para um determinado conjunto de equações diferenciais parciais (EDP's). Para isso, primeiro são construídas soluções para as variáveis a serem resolvidas. Posteriormente, essas soluções são então aplicadas ao conjunto de equações diferenciais que modelam o problema, obtendo-se assim termos fontes. O método de verificação envolve a introdução dos termos fontes nas equações diferenciais, criando um problema sem realismo físico, mas que possui solução analítica que pode ser comparada com os resultados numéricos e um teste de convergência de malha pode fornecer a ordem de precisão da metodologia ([SILVA; VILLAR, 2010](#)). Uma vez verificado o código, basta se retirar os termos fontes adicionados do MMS.

[Salari e Knupp \(2000\)](#) apresentam algumas recomendações para a construção de soluções manufaturadas:

- utilizar funções suaves como polinômios, funções trigonométricas ou exponenciais, de modo que sejam facilmente calculadas;
- deve ser mais generalizada possível, de modo a garantir que a solução seja dependente das variáveis corretas (principalmente do espaço e tempo);
- deve possuir número adequado de derivadas para que não sejam obtidas constantes ou valores nulos quando estas são calculadas;
- as derivadas das soluções manufaturadas devem ser limitadas por constantes pequenas, garantindo que a solução não varie bruscamente com espaço ou tempo (ou seja, solução não deve possuir singularidades);
- não necessita ter rigor físico, mas precisa ter algum cuidado de modo que as equações a serem resolvidas façam sentido e o código funcione de forma robusta.

[Salari e Knupp \(2000\)](#) também apresentam recomendações semelhantes para o cálculo dos coeficientes das equações diferenciais que, de forma generalizada, devem ser constituídos de funções suaves, serem genéricas de modo a não limitar o teste a casos simples, e possuir mínimo significado físico de modo a manter a robustez da solução, pois verificação de robustez não é o objetivo do uso de MMS.

De posse das soluções manufaturadas, essas são aplicadas ao conjunto de EDP's para obtenção dos termos fontes. Entretanto, a manipulação matemática desses termos pode ser trabalhosa. Para contornar esse problema, é possível fazer o uso de códigos de manipulação simbólicas, como o Wolfram Mathematica, que tratam dessas manipulações com grande sucesso. Além do mais, tais códigos conseguem exportar os resultados em formatos prontos para serem implementados como expressões em códigos Fortran, por exemplo. Tal procedimento foi utilizado no presente trabalho para a obtenção dos termos fontes.

O passo seguinte consiste em testar o código. Um processo formal consiste em executar o programa usando diversas malhas com refinamentos progressivos entre elas. Assim, realiza-se um teste de convergência de malha ([SALARI; KNUPP, 2000](#)), onde são avaliados os erros de discretização e a ordem de precisão da solução.

O erro de discretização é a diferença entre a solução numérica e a solução analítica, $(Q_{num} - Q_{an})$ e pode ser obtida ponto a ponto. Por outro lado, uma medida global do erro pode ser obtida a partir da norma l_2 :

$$l_2 = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \hat{A} (Q_{num} - Q_{an})_n^2}{N}}; \quad (4.1)$$

ou através do máximo erro dentro do domínio a partir da norma l_∞ :

$$l_\infty = \max_n |(Q_{num} - Q_{an})_n|; \quad (4.2)$$

onde N é o número total de pontos e os subíndices num e an , correspondem a solução numérica e analítica, respectivamente.

O código é então executado usando uma série de malhas com diferentes tamanhos de malha h , calculando-se o erro global para cada uma através das normas l_2 e l_∞ . A ordem de precisão ρ é obtida comparando-se esses valores para duas malhas com refinamentos consecutivos:

$$\rho = \frac{\log \frac{E_{2h}}{E_h}}{\log(r)}; \quad (4.3)$$

onde E_{2h} e E_h são os erros globais para a malha mais grosseira e para a mais refinada, respectivamente, e r é a razão de refino entre as duas malhas, cujo valor geralmente usado é 2.

4.2 Verificação Dinâmica - MMS 2D

O processo de verificação da implementação das equações governantes ([Capítulo 2](#)) no código computacional é apresentado a seguir. Para se fazer o uso do MMS, a [Equação 2.8](#) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S; \quad (4.4)$$

onde S representa o termo fonte obtido das soluções manufaturadas.

No presente caso, foi utilizado o seguinte conjunto de soluções manufaturadas:

$$r(x; y, t) = r_0 \sin(x^2 + y^2 + wt) + 1; 5; \quad (4.5)$$

$$u(x; y, t) = u_0 \sin(x^2 + y^2 + wt) + 0; 5; \quad (4.6)$$

$$v(x; y, t) = v_0 \cos(x^2 + y^2 + wt) + 0; 5; \quad (4.7)$$

$$E(x; y, t) = E_0 \cos(x^2 + y^2 + wt) + 1; 5; \quad (4.8)$$

onde as constantes foram definidas como: $r_0 = 1; 0$, $u_0 = 0; 1$, $v_0 = 1; 0$ e, $E_0 = 0; 5$ para a realização dos cálculos. Os termos fontes são construídos através da substituição das soluções manufaturadas nas equações governantes ([Equação 4.4](#)). Tal processo foi realizado usando o software de manipulação simbólica Wolfram Mathematica e estes são apresentados no apêndice [Apêndice B](#). Foi utilizado um domínio computacional com $x \in [-p + p=16; p + p=16]$ e $y \in [-p + p=16; p + p=16]$ para se evitar simetria da solução. As condições de contorno prescritas utilizadas são dadas por [Equação 4.5 - Equação 4.8](#) aplicadas a cada subintervalo do Runge-Kutta.

O código foi executado e os resultados numéricos comparados com os resultados analíticos dados por [Equação 4.5 - Equação 4.8](#). Assim, sete malhas diferentes foram utilizadas, conforme [Tabela 2](#) e obtidos o erro e a ordem de precisão considerando as normas l_2 e l_∞ .

Tabela 2 – Malhas utilizadas para o teste de condições de contorno prescritas.

Malha	$N_x = N_y$	$Dx = Dy$	r
1	16	4,19E-01	
2	31	2,09E-01	2,00
3	61	1,05E-01	2,00
4	121	5,25E-02	2,00
5	241	2,62E-02	2,00
6	481	1,31E-02	2,00
7	961	6,54E-03	2,00

Um incremento de tempo $Dt = 1 \cdot 10^{-8}$ foi utilizado e 500 passos de tempo simulados. A escolha de um valor bem baixo para o incremento de tempo foi necessária para minimizar

os efeitos dos erros de discretização temporal sobre os resultados, avaliando assim somente a ordem das derivadas espaciais. Foram utilizados também $Re = 1000; 0$, $Pr = 100; 0$, $Ma = 0; 1$, $c_v = 0; 1$, $J = 1; 0$, $m = 1; 0$ e $k = 1; 0$.

A [Figura 20](#) e [Figura 21](#) apresentam os erros obtidos e a ordem de precisão observados, considerando ambas as normas l_2 e l_∞ , respectivamente.

Como pode se observar, o erro observado para a variável r é menor do que para as demais variáveis, enquanto que as demais variáveis apresentam um nível de erro semelhantes entre si, ocorrendo tanto para a norma l_2 como para a norma l_∞ . A ordem de precisão atingiu um ponto praticamente assintótico entre as malhas 3 e 7, apresentando valores de aproximadamente 5ª e 6ª ordem para as variáveis r , r_u , r_v e E , exceto por um decréscimo da ordem para a variável r na malha 7 onde já pode atribuir-se a erros de arredondamento de máquina. Podemos também destacar o bom comportamento da ordem de precisão para o divergente da velocidade $\nabla \cdot u$, desde as malhas mais grossas.

Observando com cuidado a [Figura 20](#) identifica-se que a ordem de precisão é menor entre as malhas 2/1 e 3/2, indicando de que pode haver algum erro de programação afetando os resultados. Entretanto, isso ocorreu porque as malhas 1, 2 e 3 não possuem resolução de malha suficiente para representar ondas de altas frequências. A [Figura 22](#) mostra uma comparação do termo fonte para cada variável conservativa para as malhas 1 e 5, respectivamente. É possível verificar que nem todos os pontos são capturados com a malha mais grossa, afetando, em um certo grau, a solução numérica, que é apresentada na [Figura 23](#).

Portanto, de acordo com os testes apresentados nesta seção é possível dizer que o código está verificado através de um procedimento dinâmico de verificação e livre de erros de programação que possam afetar sua ordem de precisão numérica para o caso bidimensional. Também é importante destacar o bom comportamento obtido para o divergente da velocidade, isto é, propagações acústicas também estão sendo bem calculados.

Figura 20 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_2 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 2D.

(a)

(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_1 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 2D.

(a)

(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Verificação Dinâmica - MMS 3D

Uma versão do presente código também foi escrito para simular problemas tridimensionais. Nesse caso, as derivadas na direção transversal z são calculadas usando método espectral, que como mencionado anteriormente só apresentam erro de arredondamento. O processo de verificação da implementação das equações governantes no código computacional é semelhante ao apresentado para o código bidimensional na [seção 4.2](#), e é apresentado a seguir. Novamente reescreve-se a [Equação 2.8](#) da seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S; \quad (4.9)$$

onde S representa o termo fonte obtido das soluções manufaturadas.

Para o caso tridimensional, foi utilizado o seguinte conjunto de soluções manufaturadas:

Figura 22 – Representação dos termos fontes para as malhas 1 e 2.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Representação das variáveis para malhas 1 e 5.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$r(x; y, z, t) = r_0 \cos \left(\frac{x^2 + y^2 + z + wt}{10} \right) + 1; 5; \quad (4.10)$$

$$u(x; y, z, t) = u_0 \sin \left(\frac{x^2 + y^2 + z + wt}{10} \right); \quad (4.11)$$

$$v(x; y, z, t) = v_0 \cos \left(\frac{x^2 + y^2 + z + wt}{10} \right); \quad (4.12)$$

$$w(x; y, z, t) = w_0 \cos \left(\frac{x^2 + y^2 + z + wt}{10} \right); \quad (4.13)$$

$$E(x; y, z, t) = E_0 \cos \left(\frac{x^2 + y^2 + z + wt}{10} \right) + 1; 5; \quad (4.14)$$

onde as constantes foram definidas como: $r_0 = 1; 0$, $u_0 = 0; 1$, $v_0 = 1; 0$, $w_0 = 0; 5$ e, $E_0 = 0; 5$ para a realização dos cálculos. Os termos fontes são construídos através da substituição das soluções manufaturadas nas equações governantes (Equação 4.9) e estes são apresentados no Apêndice B. Foi utilizado um domínio computacional com $x \in [-1 + p=16; 3 + p=16]$, $y \in [-1 + p=16; 3 + p=16]$ e $z \in [0; 2p]$ para se evitar simetria da solução. As condições de contorno prescritas utilizadas são dadas por Equação 4.10 - Equação 4.14 aplicadas a cada subintervalo do Runge-Kutta.

O código foi executado e os resultados numéricos comparados com os resultados analíticos dados por [Equação 4.5 - Equação 4.8](#). Assim, sete malhas diferentes foram utilizadas, conforme [Tabela 3](#) e obtidos o erro e a ordem de precisão considerando as normas l_2 e l_∞ .

Tabela 3 – Malhas utilizadas para o teste de condições de contorno prescritas.

Malha	$N_x = N_y$	$Dx = Dy$	r
1	16	2,67E-01	
2	31	1,33E-01	2,00
3	61	6,67E-02	2,00
4	121	3,33E-02	2,00
5	241	1,67E-02	2,00

Na direção z foi utilizado um incremento espacial $Dz = 2\pi/16$ para todos os casos. Um incremento de tempo $\Delta t = 1 \cdot 10^{-10}$ foi utilizado e 150 passos de tempo simulados. A escolha de um valor bem baixo para o incremento de tempo foi necessária para minimizar os efeitos dos erros de discretização temporal sobre os resultados, avaliando assim somente a ordem das derivadas espaciais. Foram utilizados também $Re = 1000; 0$, $Pr = 100; 0$, $Ma = 0; 1$, $c_v = 0; 1$, $J = 1; 0$, $m = 0; 3$ e $k = 1; 4$.

A [Figura 24](#) e [Figura 25](#) apresentam os erros obtidos e a ordem de precisão observados, considerando ambas as normas l_2 e l_∞ , respectivamente. Como pode se observar, o erro observado para a variável r e r_w são menores do que para as demais variáveis. A ordem de precisão atingiu um ponto praticamente assintótico entre as malhas 4 e 5, apresentando valores de aproximadamente 5ª e 6ª ordem para todas as variáveis. Novamente, u apresentou um bom comportamento para a ordem de precisão desde as malhas com maiores espaçamentos de discretização.

Como no caso bidimensional ([seção 4.2](#)), baixa resolução de malha para representar ondas de alta frequência para as malhas 1, 2 e 3 parecem estar afetando os resultados. Assim sendo, e de acordo com os resultados apresentados na presente seção, é possível dizer que o código está verificado através de um procedimento dinâmico de verificação e livre de erros de programação que possam afetar sua ordem de precisão numérica também para a versão tridimensional. Os cálculos acústicos representados pelo divergente da velocidade não foram afetados na implementação tridimensional.

Figura 24 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_2 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 3D.

(a)

(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – (a) Erro e (b) ordem para a norma l_1 para o teste com condições de contorno prescritas para o código 3D.

(a)

(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Camada de Mistura Bidimensional

O escoamento de uma camada de mistura consiste de duas correntes de fluido escoando paralelamente com velocidades diferentes inicialmente separadas por uma barreira física (placa separadora) que se encontram no bordo de fuga dessa barreira, formando uma interface em formato de S nessa região. Essa interface se forma devido aos gradientes das propriedades entre as duas camadas (SALEMI, 2006). Mesmo sendo um tipo de escoamento simples, os principais mecanismos de geração de som por pareamento de vórtices podem ser investigados com essa configuração.

Um exemplo de ruído gerado por camadas de mistura é aquele gerado por motores a jato de aeronaves comerciais. Na parte inicial do jato, a geração de som é causada pela camada de mistura entre o escoamento primário e o escoamento de bypass, e entre o escoamento de bypass e o escoamento livre. Para jatos de grandes diâmetros, a camada de mistura é conhecida por ser a responsável pelos ruídos de alta frequência mais audíveis, com frequência na faixa de 1kHz a 4kHz (BABUCKE, 2009).

A Figura 26 apresenta um esquema de uma camada de mistura com suas principais características. A corrente superior tem velocidade U_1 maior do que a velocidade U_2 da corrente inferior. Pequenas perturbações geradas nessa região se amplificam em uma região de transição, causando o surgimento de vórtices.

Figura 26 – Esquema de uma camada de mistura bi dimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Parâmetros do Escoamento

Com o objetivo de verificar o código, utilizou-se o caso da camada de mistura apresentado por [Colonius, Lele e Moin \(1997\)](#) e posteriormente por [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#). Os números de Mach das correntes superior e inferior são $Ma_1 = 0,50$ e $Ma_2 = 0,25$, respectivamente; as temperaturas adimensionais das duas correntes são $T_1 = T_2 = 1,0$ e a razão de velocidades $U_1 = U_2 = 2,0$. O número de Prandtl $Pr = 0,71$ e o número de Reynolds $Re = 500$ é baseado na espessura de vorticidade da entrada, dada por:

$$d(x_0) = \frac{DU}{|\partial u / \partial y|_{\max}} \bigg|_{x=x_0}; \quad (4.15)$$

onde $DU = U_1 - U_2$.

A condição inicial da camada de mistura é obtida como um caso particular da solução de similaridade para camada limite bidimensional compressível sobre uma placa plana em regime permanente. Essa solução é obtida a partir da simplificação das equações de Navier-Stokes para o escoamento sobre uma placa plana e é conhecida como equação de Blasius ([SALEMI, 2006](#)). Para obtenção desse perfil resolve-se duas soluções similares ligadas entre si onde estaria a placa plana, formando uma “parede virtual” em $y = 0$, e as velocidades das correntes livres são as velocidades acima e abaixo da camada de mistura ([Figura 27](#)).

Figura 27 – Esquema de uma solução similar para camada de mistura e condições de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No presente trabalho utilizou-se perfis de velocidade, densidade e temperatura gentilmente fornecidos por Andreas Babucke e utilizados por ele em sua tese de doutorado ([BABUCKE, 2009](#)). O perfil de velocidade u se assemelha a uma tangente hiperbólica ([Equação 4.16](#)) e uma aproximação para o perfil de temperatura pode ser obtido da relação Crocco-Busemann ([Equa-](#)

ção 4.18) aplicado a uma camada de mistura (Equação 4.18). A densidade é obtida como o inverso da temperatura.

$$u = g + U_2(1 - g); \quad (4.16)$$

onde no presente caso

$$g = 0,5 + 0,5 \cdot \tanh(1,945y); \quad (4.17)$$

$$T(u) = Ma_0^2(k - 1) \frac{1}{2} u^2 + (U_1 + U_2)u - U_1U_2 + \frac{T_1U_2 - T_2U_1 + u(T_2 + T_1)}{U_2 - U_1}; \quad (4.18)$$

A coordenada inicial escolhida foi $x_0 = 30$ de tal forma que a espessura de vorticidade seja 1,0 na entrada. Os perfis da velocidade u , temperatura e densidade obtidos segundo o procedimento descrito anteriormente para esta posição x_0 está apresentada na Figura 28.

Figura 28 – Perfis de velocidade u , densidade e temperatura na entrada para o caso da camada de mistura bidimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para que o escoamento desenvolva um regime de emissão de vórtices foram introduzidas perturbações na entrada utilizando as autofunções obtidos através da LST, conforme descrito na seção 2.3. Para o caso da camada de mistura bidimensional, a taxa de amplificação espacial é apresentada na Figura 29, onde observa-se que a frequência fundamental é $w_0 = 0,6293$. Da mesma forma que Babucke, Kloker e Rist (2008), essa frequência e suas três subharmônicas foram utilizadas para perturbar o escoamento na entrada com uma amplitude máxima de 0,001 para todas as perturbações, conforme a Equação 4.19. Também foi introduzida uma defasagem $Dq = -0,028$ para a primeira subharmônica, $Dq = 0,141$ para a segunda e $Dq = 0,391$ para a terceira. A amplitude e distribuição de fase das autofunções para essa frequência fundamental são apresentadas na Figura 30.

$$f' = \frac{1}{2} \cos Q_f \sin(wt + Dq); \quad (4.19)$$

Figura 29 – Taxas de amplificação espaciais para camada de mistura bidimensional com máximo valor em $w = 0,6293$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – (a) amplitude e (b) fase de perturbação para camada de mistura bidimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Parâmetros da Simulação

Para a simulação da camada de mistura bidimensional foi utilizada uma malha computacional cartesiana semelhante a utilizada por Babucke, Kloker e Rist (2008), com 2500 x 850 pontos nas direções x e y, respectivamente. Na direção longitudinal a malha possui uma

região de espaçamento uniforme com $Dx = 0;157$ até $x = 300$ e depois a malha é estirada com a uma taxa de aproximadamente 1,0%, formando a zona de amortecimento. Na direção normal a malha é estirada do centro até os contornos, com menor espaçamento $Dy = 0;15$ e o maior espaçamento $Dy = 1;06$. Além do mais, utilizou-se de decomposição de domínio para solução através de processamento paralelo. A malha computacional, a decomposição de domínios e as condições de contorno utilizadas são apresentadas na [Figura 31](#). Foram utilizados 7 elementos de processamento na direção x e 2 na direção y, totalizando 14 elementos de processamento de acordo com o estudo de Speed-up apresentado no [Apêndice C](#).

Figura 31 – Esquema da malha computacional utilizada, divisão de domínios em cores preto e cinza e condições de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O passo de tempo escolhido foi $\Delta t = \frac{2\pi}{w \cdot n_{\text{passos}}}$, onde n_{passos} é o número de pontos por onda da frequência fundamental que serão utilizados. Nesse caso utilizou-se $n_{\text{passos}} = 752$, o que corresponde a um passo de tempo $\Delta t = 0;0133$. Foram simulados um total de 76 períodos da frequência fundamental, onde os últimos 8 períodos foram utilizados para análise de dados.

Como condições de contorno, na entrada foram utilizados os perfis de velocidade u , temperatura e densidade apresentados na [Figura 28](#) e introduzidas as perturbações a cada passo do Runge-Kutta, conforme descrito anteriormente. Ainda na entrada utilizou-se de condições de contorno características para evitar reflexões na entrada do domínio. Nos contornos superior e inferior foi utilizado uma região de amortecimento ao longo de 40 pontos próximos às fronteiras com um fator de amortecimento de 0,01, seguindo o procedimento descrito na [seção 3.7](#). No contorno final da direção longitudinal é usada uma combinação de estiramento da malha com

filtro espacial para atenuar as perturbações.

Resultados e Discussões

A vorticidade transversal W_z ao final da simulação é apresentada na Figura 32. Nesse gráfico os resultados são comparados com os apresentados por Colonius, Lele e Moin (1997) e Babucke, Kloker e Rist (2008), apresentando uma boa concordância. Nessa figura é possível ver a formação dos primeiros vórtices de Kelvin-Helmoltz pareando entre si e formando novas estruturas a jusante do escoamento.

Figura 32 – Vorticidade transversal ao final da simulação. Níveis de contorno de 0,26 até 0,02, com incremento de 0,04. (a) Colonius, Lele e Moin (1997); (b) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (c) presente código.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A velocidade longitudinal média é dada por:

$$u = \frac{1}{(j_1 - j_2) \Delta t} \sum_{j=j_1}^{j_2} \bar{u} \Delta t_j ; \quad (4.20)$$

onde $(j_1 - j_2) = 8 \cdot n_{\text{passos}}$, correspondendo aos 8 últimos períodos simulados, usados para fazer a análise. A Figura 33 apresenta a comparação da velocidade longitudinal média com os resultados apresentados por Colonius, Lele e Moin (1997) e Babucke, Kloker e Rist (2008). Novamente há uma boa concordância com os resultados apresentados, e é possível verificar um forte crescimento da espessura da camada de mistura em $x = 130$ e $x = 240$, regiões onde o ocorrem pareamento de vórtices.

Figura 33 – Velocidade longitudinal média. Níveis de contorno de 0,50 até 1,00. (a) Colonius, Lele e Moin (1997); (b) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (c) presente código.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também é possível comparar as taxas de amplificação ao longo da direção longitudinal. Para essa análise, o máximo valor na direção normal y da velocidade v foi tomada a cada ponto ao longo da direção longitudinal x , pois ela está mais associada com a formação e pareamento de vórtices na direção transversal. As taxas de amplificação podem ser dadas por:

$$a_i = - \frac{\partial}{\partial x} [\ln(|v|_{\max})]; \quad (4.21)$$

onde $|v|_{\max}$ corresponde ao máximo valor na direção normal y da velocidade v a cada ponto de x , e que é apresentada na Figura 34. Já na Figura 35 são comparadas as taxas de amplificação para os modos $(1;0)$; $(1=2;0)$ e $(1=4;0)$. Conforme pode se observar, há boa concordância com os resultados apresentados por Babucke, Kloker e Rist (2008) e também com as correspondentes taxas de amplificação da teoria de estabilidade linear. A través da Figura 34 nota-se que os modos $(1;0)$; $(1=2;0)$ e $(1=4;0)$ atingem seus valores máximos em torno das posições $x = 90$, $x = 130$ e

$x = 240$, respectivamente. Do ponto de vista físico, estas posições correspondem a posições onde estruturas vorticiais associadas com cada modo se formam ao longo do escoamento, conforme [Figura 32](#). Vale destacar que para se obter os resultados apresentados na [Figura 35](#), é necessário fazer uma transformada de Fourier dos valores máximos de v . Para essa análise há a necessidade de adquirir dados da simulação a uma taxa específica, como será esclarecido posteriormente.

Figura 34 – Comparação entre os resultados de [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#) e do presente código da amplitude máxima da velocidade normal v .

Uma maneira de observar o campo acústico é através da dilatação do escoamento, sendo o divergente do campo de velocidades — u . Na região de corrente livre a solução em regime permanente corresponderia a um escoamento incompressível, onde — $u = 0$. Porém, flutuações de pressão e densidade geradas pelo escoamento propagam através da corrente livre, alterando o campo de dilatação. Dessa forma, valores diferentes de zero do campo de dilatação na região de corrente livre representam o som emitido.

Para facilitar a visualização, foram selecionadas frequências através da parte real da transformada de Fourier do campo de dilatação. Para isso, é necessário gravar resultados do campo de dilatação a uma taxa que permita realizar a análise Fourier temporal até uma dada frequência. No presente trabalho essa frequência correspondia a terceira subharmônica da perturbação, ou seja $w=8$. Assim, 8 pontos por frequência fundamental foram adquiridos ao longo dos 8 últimos períodos simulados, correspondendo a um total 64 pontos disponíveis para fazer a análise de Fourier. Uma subrotina de transformada rápida de Fourier foi adaptada para realizar essa análise. Tal procedimento também foi utilizado para obter os resultados apresentados

Figura 35 – Taxa de amplificação de v baseados na máxima amplitude ao longo da direção normal y . (a) Babucke, Kloker e Rist (2008) e (b) presente código.

Fonte: Elaborada pelo autor.

na [Figura 35](#) para vários modos.

A [Figura 36](#) mostra o campo de dilatação para $w=4$. Pode-se verificar uma fonte acústica dominante localizada em $x \approx 240$, onde os vórtices se unem e o som emitido se propaga principalmente à jusante. Observa-se uma boa comparação com os resultados apresentados por [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#), assim podendo dizer que o código está também verificado para simulações diretas de acústica.

Figura 36 – Transformada de Fourier do campo de dilatação para a frequência $(1/4)$. Níveis de contorno de -10^{-5} a 10^{-5} . (a) [Colonius, Lele e Moin \(1997\)](#) e (b) presente código.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 Jatos Planares Bidimensionais

Ainda no processo de validação do código bidimensional, foram simulados dois casos de escoamentos de jatos planares bidimensionais: jatos planares com modos varicoso e sinuoso apresentados por [Weder \(2012\)](#) e também jatos planares para diversos números de Mach apresentados por [Reichert e Biringen \(2007\)](#). Tais comparações e considerações são agora apresentados.

Jatos planares são escoamentos cisalhantes típicos em diversas áreas como combustão, propulsão e aplicações ambientais. Também tem crescido o interesse no ruído gerado por esse tipo

de escoamento para aplicações aeronáuticas. Nesse escoamento uma corrente central se mistura com outra corrente escoando paralelamente com uma velocidade menor ou em repouso. Na interface de encontro das duas correntes há elevados gradientes das propriedades do escoamento. Essa é uma condição que torna o escoamento instável a perturbações.

O problema aqui examinado agora envolve um jato planar bidimensional não confinado escoando junto com uma corrente externa paralela. A [Figura 37](#) apresenta um esquema de jato planar bidimensional com suas principais características. A corrente central tem velocidade U_j maior do que a velocidade U_∞ da corrente externa. Pequenas perturbações são excitadas na entrada do domínio e se amplificam espacialmente em uma região de transição, causando o surgimento de vórtices.

Em todos os casos utilizou-se um domínio computacional bidimensional grande o bastante para permitir o desenvolvimento do jato ao longo da direção longitudinal.

Figura 37 – Esquema de um jato planar bidimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5.1 Jatos Planares Bidimensionais - caso apresentado por [Weder \(2012\)](#)

De acordo com [Weder \(2012\)](#), daqui em diante chamado de “Weder2D”, utilizou-se o seguinte perfil de velocidades:

$$u(y) = 1 + \tanh \left[\frac{R}{4q} \left(\frac{R}{|y|} - \frac{|y|}{R} \right) \right]; \quad (4.22)$$

onde R corresponde à metade do comprimento do jato e q à espessura da região de mistura entre o jato e o ambiente externo. Para o perfil de temperatura, baseou-se na relação de Crocco-

Busemann, que pode ser encontrada em [White \(2005\)](#):

$$T(u) = Ma_0^2(k-1) \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 + \frac{\partial u}{\partial y} + U_j + U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - U_j U_\infty + \frac{T_j U_\infty - T_\infty U_j + u \frac{\partial T}{\partial x} + T_j \frac{\partial u}{\partial y}}{U_\infty - U_j}; \quad (4.23)$$

onde u é o perfil de velocidade apresentado na [Equação 4.22](#). Nesse caso $U_j = 1$, $U_\infty = 0$ e $T_j = T_\infty = 1$. A densidade é dada por $r = 1/T$. Os perfis de velocidade e temperatura são apresentados na [Figura 38](#) para $q = 0,1$, $Pr = 0,71$, $Re = 1000$ e $Ma = 0,9$.

Figura 38 – Perfis de (a) velocidade u , (b) temperatura e (c) densidade para o caso Weder2D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma análise LST foi realizada utilizando este perfil de entrada para os casos varicoso e sinuoso, conforme descrito na [seção 2.3](#). A [Figura 39](#) apresenta a taxa de amplificação espacial para ambos os casos com boa concordância com os resultados apresentados por [Weder \(2012\)](#). Os valores de máximas taxas de amplificação e correspondentes valores de frequência são apresentados na [Tabela 4](#).

Tabela 4 – Valor máximos de taxa de amplificação espacial para os casos sinuoso e varicoso.

Modo	w	a_r	a_i
sinuoso	0,9498	18,409	0,7356
varicoso	0,9606	17,602	0,7431

Somente a frequência fundamental foi utilizada para excitar o escoamento em cada caso, com uma amplitude máxima de 0,05. Essa é uma informação não apresentada por [Weder \(2012\)](#) e prejudica a comparação quantitativa entre os dois casos. As amplitudes e distribuições de fase das autofunções para essa frequência fundamental são apresentadas na [Figura 40](#).

Parâmetros da simulação

Nessas simulações foi utilizada uma malha computacional cartesiana com 1400×800 pontos nas direções x e y , respectivamente. Na direção longitudinal a malha possui uma região

Figura 39 – Taxas de amplificação espaciais para os casos (a) sinuoso e (b) varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de espaçamento uniforme com $Dx = 0,025$ até $x \approx 25$ e depois a malha é estirada com a uma taxa de aproximadamente 1,0%, formando a zona de amortecimento. Na direção normal a malha também possui uma região com espaçamento uniforme $Dy = 0,025$ até $y \approx \pm 2,5$ e depois é estirada com a uma taxa de 1,0% até os contornos superiores. Utilizou-se de decomposição de domínio para solução através de processamento paralelo. Foram utilizados 7 elementos de processamento na direção x e 2 na direção y , totalizando 14 elementos de processamento de acordo com o estudo de Speed-up apresentado no [Apêndice C](#).

O passo de tempo escolhido foi $Dt = \frac{2\pi}{W \cdot n_{\text{passos}}}$, onde n_{passos} é o número de pontos por onda da frequência fundamental que serão utilizados. Nesse caso utilizou-se $n_{\text{passos}} = 752$, o que corresponde a um passo de tempo $Dt \approx 0,009$. Foram simulados um total de 10 períodos da frequência fundamental para ambos os casos.

Como condições de contorno, foram utilizados os perfis de velocidade u , temperatura e densidade apresentados na [Figura 38](#) e introduzidas as perturbações da análise LST a cada passo do Runge-Kutta, como no caso apresentado na [seção 4.4](#). Ainda na entrada utilizou-se de condições de contorno características para evitar reflexões na entrada do domínio. Nos contornos superior e inferior da direção normal foi utilizada derivada nula e no contorno final da direção longitudinal é usada uma combinação de estiramento da malha com filtro espacial para atenuar as perturbações.

Figura 40 – Amplitude e distribuição de fase da perturbação para os casos (a) sinusoidal e (b) variável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Resultados e Discussões

A [Figura 41](#) e a [Figura 42](#) mostram a vorticidade transversal para os casos sinuoso e varicoso, respectivamente. É possível ver a transição e crescimento espacial das perturbações, gerando vórtices com uma configuração simétrica para o modo varicoso e anti-simétrica para o modo sinuoso.

Figura 41 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo sinuoso. Níveis de contorno de -2,4 até 2,4 com incremento de 0,2. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo varicoso. Níveis de contorno de -2,4 até 2,4 com incremento de 0,2. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido a uma possível diferença na amplitude das perturbações introduzidas, malha computacional, passo de tempo e outros parâmetros da simulação não informados por [Weder](#)

(2012), não se pode fazer uma comparação quantitativa direta com os resultados apresentados pelo autor. Porém, os modos observados se compararam qualitativamente bem com os apresentados pelo autor, demonstrando que o código está solucionando satisfatoriamente escoamento de jatos planares.

4.5.2 Jatos Planares Bidimensionais - caso apresentado por Reichert e Biringen (2007)

Para realizar uma comparação com os resultados apresentados por Reichert e Biringen (2007), daqui em diante chamados de “ReichertBiringen2D”, utilizou-se o seguinte perfil de velocidades:

$$u(y) = \frac{Ma_j - Ma_\infty}{Ma_j + Ma_\infty} \tanh(2y + q) + 1; \quad (4.24)$$

onde $q = 1,98$ e o perfil é refletido de $y = 0$. A densidade e temperatura são mantidos constantes na entrada como também a pressão de forma que as correntes são isotérmicas e perfeitamente expandidas. O número de Prandtl $Pr = 0,71$. Os autores utilizaram as equações de Euler na formulação e resolução do problema, onde os efeitos de viscosidade são desprezados. Para se obter efeito semelhante, foi utilizado um número de Reynolds elevado $Re = 10000$, de forma que os termos inerciais fossem muito maiores do que os termos viscosos.

Nas simulações foram adotado o número de Mach do jato. O número de Mach convectivo em função do Mach no jato Ma_j e do Mach fora do jato Ma_∞ é dado por:

$$Ma_c = \frac{Ma_j - Ma_\infty}{2}; \quad (4.25)$$

Em todos os casos a razão de velocidades utilizada é $U_j/U_\infty = 1,67$. O perfil de velocidade na entrada é apresentado na Figura 43.

Figura 43 – Perfil de velocidade u para o caso ReichertBiringen2D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma perturbação randômica entre -0,005 e 0,005 foi adicionada às componentes de velocidade u e v em Reichert e Biringen (2007). Entretanto, no presente trabalho uma análise LST foi realizada para cada caso. Para isso, a frequência fundamental foi utilizada para perturbar o escoamento na entrada com uma amplitude máxima de 0,0001 para a componente da velocidade u .

Foram simulados 6 casos, e cada um com perturbações do tipo sinuoso e varicoso. Os números de Mach do jato, da corrente externa e convectivo, bem como os valores máximos de taxa de amplificação para o modo sinuoso são apresentados na Tabela 5. Já para o modo varicoso esses dados estão na Tabela 6.

Tabela 5 – Números de Mach e valores máximos de taxa de amplificação espacial para os casos Reichert-Biringen2D, modo sinuoso.

Caso	Ma_j	Ma_∞	Ma_c	w_r	a_r	a_i
1	0,25	0,15	0,05	0,8859	0,8920	0,0966
2	1,05	0,63	0,21	0,8552	0,8616	0,0908
3	1,50	0,90	0,30	0,8199	0,8266	0,0849
4	2,00	1,20	0,40	0,7628	0,7699	0,0767
5	2,50	1,50	0,50	0,6862	0,6940	0,0674
6	3,00	1,80	0,60	0,5954	0,6038	0,0581

Tabela 6 – Números de Mach e valores máximos de taxa de amplificação espacial para os casos Reichert-Biringen2D, modo varicoso.

Caso	Ma_j	Ma_∞	Ma_c	w_r	a_r	a_i
1	0,25	0,15	0,05	0,9036	0,8980	0,0933
2	1,05	0,63	0,21	0,8927	0,8875	0,0855
3	1,50	0,90	0,30	0,8740	0,8690	0,0773
4	2,00	1,20	0,40	0,8350	0,8301	0,0654
5	2,50	1,50	0,50	0,7636	0,7586	0,0507
6	3,00	1,80	0,60	0,6370	0,6311	0,0335

O comportamento da taxa de amplificação espacial variando com o número de Mach do jato é apresentado na Figura 44 para o modo sinuoso e na Figura 45 para o modo varicoso. Observa-se que com o aumento do número de Mach há uma diminuição no valor máximo da taxa de amplificação, o que deixa o escoamento mais estável. Também há uma diminuição da frequência máxima observada para cada valor de Mach.

Parâmetros da simulação

Nessas simulações foi utilizada uma malha computacional cartesiana com 1400 x 800 pontos nas direções x e y , respectivamente. Na direção longitudinal a malha possui uma região de espaçamento uniforme com $\Delta x = 0,25$ até $x \approx 250$ e depois a malha é estirada com uma taxa de aproximadamente 1,0%, formando a zona de amortecimento. Na direção normal a malha

Figura 44 – Taxas de amplificação espaciais para os casos ReichertBiringen2D, modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Taxas de amplificação espaciais para os casos ReichertBiringen2D, modo varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

também possui uma região com espaçamento uniforme $Dy = 0; 106$ até $y \approx \pm 5; 20$ e depois é estirada com uma taxa de 1,0% até os contornos superiores. Utilizou-se de decomposição de domínio para solução através de processamento paralelo. Foram utilizados 7 elementos de processamento na direção x e 2 na direção y, totalizando 14 elementos de processamento de acordo com o estudo de Speed-up apresentado no [Apêndice C](#).

O passo de tempo escolhido foi $Dt = \frac{2p}{W \cdot n_{\text{passos}}}$, onde n_{passos} é o número de pontos por onda da frequência fundamental que serão utilizados. Nesse caso utilizou-se $n_{\text{passos}} = 752$, o que corresponde a um passo de tempo $Dt \approx 0; 009$. Foram simulados um total de 76 períodos da frequência fundamental para ambos os casos, onde os últimos 8 períodos foram utilizados para análise de dados.

Como condições de contorno, foi utilizado o perfil de velocidade u apresentado na [Figura 43](#) e introduzidas as perturbações a cada passo do Runge-Kutta, como no caso apresentado na [seção 4.4](#). Ainda na entrada utilizou-se de condições de contorno características para evitar reflexões na entrada do domínio. Nos contornos superior e inferior da direção normal foi utilizada derivada nula e no contorno final da direção longitudinal é usada uma combinação de estiramento

da malha com filtro espacial para atenuar as perturbações.

Resultados e Discussões

Segundo Tam (1995), o efeito mais conhecido da influência do aumento do número de Mach em escoamentos cisalhantes é a redução da taxa de crescimento e redução da mistura. Esse efeito tem grande importância em escoamentos de jatos que envolvem combustão e pode também ajudar no controle de ruído, já que o desenvolvimento da turbulência está associada com o crescimento de instabilidades. A Figura 46 mostra a vorticidade transversal para os casos do modo sinuoso apresentados na Tabela 5, e a Figura 47 para os casos do modo varicoso apresentados na Tabela 6 para $50 \leq x \leq 215$. Primeiramente, é possível notar em todos os casos características semelhantes entre os escoamentos: A partir da entrada há o crescimento espacial das perturbações introduzidas, que transicionam para gerar estruturas de vórtices a montante. Além do mais, para ambos os modos, é possível verificar que com o aumento do número de Mach há também um aumento da região do núcleo central do jato, “atrasando” a formação dos vórtices e reduzindo seu espalhamento. Valores maiores de Ma_j mostram esteiras de vórtices mais estáveis com menos pareamento, sugerindo menos mistura do escoamento. Comparando os resultados da Figura 46 com os da Figura 47 nota-se também a diferença na formação dos vórtices, sendo gerados com uma configuração simétrica para o modo varicoso e antisimétrica para o modo sinuoso, como é o esperado para cada caso.

Figura 46 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo sinuoso. Níveis de contorno de -0,5 até 0,5. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Vorticidade transversal ao final da simulação para o modo varicoso. Níveis de contorno de -0,5 até 0,5. Linhas sólidas correspondem a valores positivos e tracejadas valores negativos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os valores da amplitude do máximo valor da velocidade transversal tomada ao longo de y ($|v|_{\max}$) para cada ponto x são apresentadas na [Figura 48](#) para o modo sinuoso e na [Figura 49](#) para o modo varicoso, respectivamente. Em ambos os casos é possível verificar uma região inicial de receptividade das perturbações introduzidas na entrada, que crescem aproximadamente linearmente até atingir um patamar máximo. Também observa-se que a posição x em que o valor de $|v|_{\max}$ atinge o patamar superior é postergado ao longo de x com o aumento do número de Mach, mostrando que o escoamento é mais estável com o aumento do número de Mach, conforme demonstrado pela análise de LST apresentada na [Figura 44](#) e [Figura 45](#) para os modos sinuoso e varicoso, respectivamente. Por fim, há uma queda brusca na taxa de amplificação correspondendo a uma região onde as perturbações já estão se propagando de forma não linear.

As comparações das taxas de amplificação espacial obtidas com o presente código com as obtidas com a análise LST também podem ser apresentadas individualmente na [Figura 50](#) e na [Figura 51](#) para os modos sinuoso e varicoso, respectivamente. Mesmo sendo valores muito sensíveis as taxas de amplificação corresponderam bem com os resultados LST para ambos os modos sinuoso e varicoso. Essa boa comparação mostra que o código é capaz de capturar os fenômenos físicos previstos por teoria consolidada na área de mecânica dos fluidos, aumentando o grau de verificação e confiabilidade do código numérico.

Devido à diferença na amplitude das perturbações introduzidas, malha computacional, passo de tempo e outros parâmetros da simulação não informados por [Reichert e Biringen \(2007\)](#), não se pode fazer uma comparação quantitativa direta com os resultados apresentados pelo autores. Porém, o comportamento da taxa de amplificação dos vórtices e dos modos observados são condizentes com o que é reportado na literatura, assim corroborando mais uma vez que o código está solucionando satisfatoriamente esse tipo de escoamento.

Figura 48 – Amplitude máxima da velocidade normal v ao longo de y para o modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Amplitude máxima da velocidade normal v ao longo de y para o modo varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 50 – Máxima amplitude da velocidade normal v ao longo da direção y para cada posição x , para o modo sinuoso. Linhas sólidas: resultados com o presente código e linhas tracejadas: resultados obtidos com o código LST.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, uma forma de se visualizar a geração e propagação de som no escoamento é através do divergente da velocidade. Foi realizada uma análise de Fourier do campo de dilatação. Foram tomados 8 pontos por frequência fundamental ao longo dos 8 últimos períodos simulados, correspondendo a um total 64 pontos disponíveis para fazer a análise de Fourier. Uma subrotina de transformada rápida de Fourier foi adaptada para realizar essa análise.

Da Figura 52 à Figura 57 são apresentados os divergentes de velocidades para os dois

Figura 51 – Máxima amplitude da velocidade normal v ao longo da direção y para cada posição x , para o modo varicoso. Linhas sólidas: resultados com o presente código e linhas tracejadas: resultados obtidos com o código LST.

Fonte: Elaborada pelo autor.

modos (sinuoso e varicoso), para os diferentes casos variando Ma_j e para frequência fundamental w e suas subharmônicas ($w=2$, $w=4$ e $w=8$). É possível destacar alguns pontos:

1. Jatos subsônicos ($Ma_j = 0; 25$)

- Frentes de ondas geradas pela introdução de perturbações na entrada se propagam a jusante, deixando o domínio sem produzir reflexão de ondas espúrias para dentro do

domínio computacional (particularmente percebido para as frequências w e $w=2$:

- Para a mesma frequência, há uma menor variação da amplitude de u para o modo sinuoso do que para o modo varicoso
- Para o modo sinuoso, é observado que o pareamento dos vórtices assimétricos criam uma nova fonte de som no final do jato central, o qual não é evidente para os vórtices simétricos do modo varicoso.

2. Jatos supersônicos ($Ma \geq 1,05$)

- Para a frequência fundamental w , observa-se forte deformação dos frentes de onda originados pela perturbação na do domínio. A deformação ocorre devido à interferência destas ondas com frentes de ondas oblíquas de alta frequência (particularmente visível para $Ma = 1,05$ a $1,50$), com ângulo menor para número de Mach mais elevados.
- Para as frequências subharmônicas $w=2$ e $w=4$, frentes de ondas de alta frequência são originados na região de saída, propagando-se à montante na direção oposta ao escoamento.
- Para a frequência subharmônica $w=8$ e para número de Mach $Ma \geq 1,50$, frentes de ondas oblíquas perfeitamente planas (com ângulo menor para número de Mach mais elevado) propagam-se à montante na direção oposta ao escoamento.

Resumo

Nesse capítulo foram apresentados primeiramente a metodologia de avaliação segundo o Método das Soluções Manufaturadas e os resultados obtidos dessa análise, mostrando que a versão bidimensional e tridimensional estão livres de erros de implementação pois foram obtidas as ordens formais dos métodos de discretização utilizados. É importante destacar também que obteve-se bons resultados no cálculo do divergente do campo de velocidades, que corresponde à propagação de som no escoamento, mostrando que o código é apropriado para aplicação em aeroacústica computacional.

Posteriormente, foram propostos problemas reais de escoamento com resultados publicados em literatura vigente para comparação. O caso da camada de mistura bidimensional apresentou boa concordância com os resultados apresentados por [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#) e com a Teoria de Estabilidade Linear. Já nos casos de jatos planares bidimensionais estendeu-se um pouco mais a avaliação através do estudo de perturbações do modo sinuoso e varicoso, apresentando boas comparações com os resultados apresentados por [Weder \(2012\)](#). Para maiores investigações desse tipo de escoamento também foram analisados diversos casos de jatos planares apresentados por [Reichert e Biringen \(2007\)](#), tanto para o modo sinuoso quanto para o modo

Figura 52 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 0; 25$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

varicoso. Boa concordância foi obtida com a Teoria de Estabilidade Linear. Todas essas etapas indicam que o código está satisfatoriamente verificado e adequado para ser utilizado em análises

Figura 53 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 1,05$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de outros problemas de escoamentos para estudo de aeroacústica.

Figura 54 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 1; 50$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 2,00$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e varicoso com $Ma_j = 2; 50$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 57 – Divergente da velocidade dos casos sinuoso e variado com $Ma_j = 3,00$ para (a) w ; (b) $w=2$; (c) $w=4$ e (d) $w=8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conclusões

A predição do som gerado por escoamento, em particular aquele gerado em válvulas de compressores herméticos de refrigeradores domésticos, foi a principal motivação para realização desse trabalho; e que levou ao objetivo de iniciar o desenvolvimento de um código computacional para simular problemas de aeroacústica. O presente trabalho apresentou todas as etapas envolvidas na implementação e verificação desse código numérico. Optou-se, para isso, pela utilização de simulação numérica direta (DNS) onde há ausência de modelagem de turbulência e de analogias acústicas, sendo a geração do som e sua propagação calculados diretamente no código.

Devido às características de problemas acústicos (por exemplo: multiplicidade de escalas e frequências, propagação a longas distâncias), o código possui processamento paralelo com decomposição de domínio para poder simular usando DNS em um tempo factível; esquemas de discretização espaciais e temporais de alta ordem para minimizar ao máximo os fenômenos de dissipação e dispersão das ondas acústicas; e uma série de tratamentos no domínio como filtragem e estiramento da malha como também condições de contorno não-reflexivas como intuito de obter uma solução adequada para estudo de aeroacústica.

O Método das Soluções Manufaturadas foi utilizado para avaliar a implementação do código. Um processo formal consiste em executar o programa usando diversas malhas com refinamentos progressivos entre elas e avaliar os erros de discretização e a ordem de precisão da solução. Foi obtida boa concordância nessa etapa mostrando que a versão bidimensional e tridimensional estão livres de erros de implementação pois foram obtidas as ordens formais dos métodos de discretização utilizados. É importante destacar também que obteve-se bons

resultados no cálculo do divergente do campo de velocidades, que corresponde à propagação de som no escoamento, mostrando que o código é apropriado para aplicação em aeroacústica computacional.

Por fim, também foram simulados problemas de escoamentos com resultados publicados em literatura vigente para comparação. O caso da camada de mistura bidimensional apresentou boa concordância com os resultados apresentados por [Babucke, Kloker e Rist \(2008\)](#) e com a Teoria de Estabilidade Linear. Já nos casos de jatos planares bidimensionais estendeu-se um pouco mais a avaliação através do estudo de perturbações do modo sinuoso e varicoso, apresentando boas comparações com os resultados apresentados por [Weder \(2012\)](#). Para maiores investigações desse tipo de escoamento também foram analisados diversos casos de jatos planares apresentados por [Reichert e Biringen \(2007\)](#), tanto para o modo sinuoso quanto para o modo varicoso. Boa concordância foi obtida com a Teoria de Estabilidade Linear. Todas essas etapas demonstram que o código está satisfatoriamente verificado e adequado para ser utilizado em análises de outros problemas de escoamentos para estudo de aeroacústica.

Sugestões para Trabalhos Futuros

São sugestões para trabalhos futuros:

- Implementação de solução de problemas tridimensionais de escoamentos cisalhantes;
- Extensão do código computacional para coordenadas curvilíneas tridimensionais para simulação de jatos planares circunferenciais, buscando resolver escoamentos em difusores radiais como uma primeira aproximação aos escoamentos em válvulas de compressores de refrigeração
- Aprimorar as análises acústicas obtidas a partir dos resultados de simulação apresentados no presente trabalho.

REFERÊNCIAS

ADAM, Y. Highly accurate compact implicit methods and boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 24, p. 10–22, 1977. Citado na página 55.

ANDERSON, J. D. *Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1995. Citado na página 53.

BABUCKE, A. Direct Numerical Simulation of Noise-Generation Mechanisms in the Mixing Layer of a Jet. Tese (Doutorado) — University of Stuttgart, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 27, 31, 50, 53, 62, 63, 86 e 87.

BABUCKE, A.; KLOKER, M.; RIST, U. Dns of a plane mixing layer for the investigation of sound generation mechanisms. *Computers and Fluids*, v. 37, n. 4, p. 360 – 368, 2008. Citado 13 vezes nas páginas 16, 51, 73, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 110 e 118.

BAILLY, C.; BOGEY, C. Contributions of computational aeroacoustics to jet noise research and prediction. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, v. 18, n. 6, p. 481–491, 2004. Citado na página 31.

BERANEK, L. L.; VÉR, I. L. *Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1992. Citado na página 31.

BOERSMA, B. J. Numerical simulation of the noise generated by a low mach number, low reynolds number jet. *Fluid Dynamics Research*, v. 35, n. 6, p. 425 – 447, 2004. Citado na página 31.

BOGEY, C.; BAILLY, C. Computation of a high reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. *Computers and Fluids*, v. 35, n. 10, p. 1344 – 1358, 2006. Citado na página 31.

CEMEAI-ICMC-USP. Cluster Euler. 2016. Disponível em: <<http://www.cemeai.icmc.usp.br/Euler/index.html>>. Acesso em: 05/02/2016. Citado na página 49.

COLONIUS, T.; LELE, S. K. Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 40, n. 6, p. 345 – 416, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 60.

COLONIUS, T.; LELE, S. K.; MOIN, P. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. In: 14th DGLR/AIAA Aeroacoustics Conference. [S.l.: s.n.], 1992. p. 438–447. Citado na página 68.

_____. Sound generation in a mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 330, p. 375–409, 1997. Citado 7 vezes nas páginas 16, 51, 73, 87, 91, 92 e 95.

CURLE, N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 231, n. 1187, p. pp. 505–514, 1955. Citado na página 34.

DAINEZI, J. ao H. R. Avaliação de Formação e Remoção de Aliasing em Métodos Espectrais. [S.l.]: FAPESP, ICMC - USP, 2012. Citado na página [58](#).

EROL, H.; GURDOGAN, A. The noise and vibration characteristics of a reciprocating compressor: Effects of size and profile of discharge port. In: Proceedings of the 2000 International Compressor Engineering Conference at Purdue. Purdue - US: [s.n.], 2000. Citado na página [33](#).

FAHY, F. Foundations of Engineering Acoustics. [S.l.]: Academic Press, 2003. Citado 2 vezes nas páginas [30](#) e [31](#).

FFOWCSWILLIAMS, J. E.; HAWKINGS, D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, The Royal Society, v. 264, n. 1151, p. pp. 321–342, 1969. Citado na página [34](#).

FREUND, J. B. Noise sources in a low-reynolds-number turbulent jet at mach 0.9. Journal of Fluid Mechanics, v. 438, p. 277–305, 2001. Eng. Citado na página [31](#).

GROPENGIESSER, H. Study on the Stability of Boundary Layers in Compressible Fluids. [S.l.]: S.I., 1970. Citado na página [45](#).

HIRSH, R. S. Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. Journal of Computational Physics, v. 19, n. 1, p. 90 – 109, 1975. Citado na página [55](#).

KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS, J. V. Fundamentals of acoustics. [S.l.]: Wiley, 2000. ISBN 9780471847892. Citado na página [34](#).

KUNDU, P.; COHEN, I. M. Fluid Mechanics. [S.l.]: Academic Press, 2002. Citado na página [43](#).

LACERDA, J. F. Simulação Numérica do Escoamento em Válvulas de Compressores Herméticos de Refrigeração usando o Método da Fronteira Imersa. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [28](#) e [33](#).

LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics, v. 103, p. 16–42, 1992. Citado 7 vezes nas páginas [54](#), [55](#), [59](#), [60](#), [61](#), [62](#) e [68](#).

LIGHTHILL, M. J. On sound generated aerodynamically. i. general theory. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, v. 211, n. 1107, p. 564–587, 1952. Citado na página [33](#).

_____. On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, The Royal Society, v. 222, n. 1148, p. pp. 1–32, 1954. Citado na página [33](#).

LUSK, E.; DOSS, N.; SKJELLUM, A. A high-performance, portable implementation of the mpi message passing interface standard. Parallel Computing, v. 22, p. 789–828, 1996. Citado na página [50](#).

MAHESH, K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. Journal of Computational Physics, v. 145, p. 332–358, 1998. Citado na página [55](#).

MARIANI, V. C.; PRATA, A. T.; DESCHAMPS, C. J. Numerical analysis of fluid flow through radial diffusers in the presence of a chamfer in the feeding orifice with a mixed eulerian-lagrangian method. *Computers and Fluids*, v. 39, n. 9, p. 1672 – 1684, 2010. Citado na página 33.

MENDONÇA, M. T. Código numérico: Teoria de estabilidade linear. Código numérico gentilmente disponibilizado pelo Prof. Dr. Márcio T. de Mendonça. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 66.

NBR10152. Níveis de Ruído para a Conforto Acústico: Apresentação. Rio de Janeiro: [s.n.], 1987. 4 p. p. Citado na página 27.

NUNES, O. Análise Teórica e Experimental do Campo Sonoro Irradiado por um Compressor Hermético. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G. Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics. [S.l.]: Sandia National Laboratories, 2002. Citado na página 74.

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. Numerical recipes in FORTRAN 77: The art of scientific computing. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 55, 57 e 63.

QUIRINO, S. F. Simulação Numérica Direta de Camada Cisalhante Compressível com Fonte de Calor. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2006. Citado na página 43.

REICHERT, R.; BIRINGEN, S. Numerical simulation of compressible plane jets. *Mechanics Research Communications*, v. 34, n. 3, p. 249 – 259, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 25, 74, 95, 101, 102, 106, 110 e 118.

ROACHE, P. Verification and validation in computational science and engineering. Albuquerque, N.M.: Hermosa Publishers, 1998. Citado na página 74.

ROGENSKI, J. K. Influência do Gradiente de Pressão na Transição em escoamentos sobre Superfícies Côncavas. Tese (Doutorado) — ICMC - USP, 2015. Citado na página 43.

ROVARIS, J. a. B.; DESCHAMPS, C. J. Large eddy simulation applied to reciprocating compressors. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, scielo, v. 28, p. 208 – 215, 06 2006. Citado na página 33.

SALARI, K.; KNUPP, P. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. [S.l.], 2000. Citado 3 vezes nas páginas 74, 75 e 76.

SALEMI, L. Análise de Estabilidade Linear de Camada de Mistura Laminar Compressível Binária. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 44, 45, 46, 66, 86 e 87.

SANTOS, M. Análise de Filtros Acústicos de Sucção de Compressores na Presença de Escoamento. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2003. Citado na página 30.

SCHLICHTING, H. Boundary-layer theory. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 1979. Citado na página 50.

SILVA, A. R. d.; LENZI, A.; BAARS, E. Controlling the noise radiation of hermetic compressors by means of minimization of power flow through discharge pipes using genetic algorithms. In: Proceedings of the 17th International Compressor Engineering Conference at Purdue. Purdue - US: [s.n.], 2004. Citado na página 30.

SILVA, H. G.; VILLAR, M. M. Verificação e validação de códigos computacionais. In: 7a Escola de Primavera de Transição e Turbulência – EPTT 2010. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

SILVEIRA, M. Noise and vibration reduction in compressors for commercial applications. In: Proceedings of the 17th International Compressor Engineering Conference at Purdue. Purdue - US: [s.n.], 2004. Citado na página 30.

SOEDEL, W. Sound and Vibrations of Positive Displacement Compressors. [S.l.]: CRC Press, 2006. Citado na página 29.

SOUZA, L. F. Numerical evaluation of time integration schemes in a disturbed flow simulation. In: Proceedings of 18th International Congress of Mechanical Engineer. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 58.

SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 48, p. 565–582, 2005. Citado na página 55.

SOUZA, M. A.; SOUZA, L. F. Simulação numérica da instabilidade de camada cisalhante livre bidimensional. In: 5a Escola de Primavera de Transição e Turbulência – EPTT 2006. [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 32.

TAM, C. K. W. Supersonic jet noise. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 27, n. 1, p. 17–43, 1995. Citado na página 104.

_____. Jet noise: Since 1952. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Springer Berlin / Heidelberg, v. 10, p. 393–405, 1998. Citado na página 31.

_____. Computational aeroacoustics: An overview of computational challenges and applications. International Journal of Computational Fluid Dynamics, v. 18, n. 6, p. 547–567, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 59.

TAM, C. K. W.; WEBB, J. C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. Journal of Computational Physics, v. 107, n. 2, p. 262 – 281, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 60.

TRELLA, T. J.; SOEDEL, W. On noise generation of air compressor automatic reed valves. In: Proceedings of the 1st International Compressor Engineering Conference at Purdue. Purdue - US: [s.n.], 1972. Citado na página 33.

WANG, M.; FREUND, J. B.; LELE, S. K. Computational prediction of flow-generated sound. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 38, n. 1, p. 483–512, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

WEDER, M. Linear Stability and Acoustics of a Subsonic Plane Jet Flow. Dissertação (Mestrado) — ETH Zurich, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 25, 74, 95, 96, 97, 101, 110 e 118.

WELLS, V. L.; RENAUT, R. A. Computing aerodynamically generated noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 29, n. 1, p. 161–199, 1997. Citado na página 36.

WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 97.

WILLIAMSON, J. H. Low-storage Runge-Kutta schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 35, p. 48–56, 1980. Citado na página 58.

TERMOS ADICIONAIS NAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A seguir são apresentados as divisões no cálculo do vetores de fluxo da [Equação 2.8](#) separando em termos em que as 2ª derivadas são cruzadas e diretas, aproveitando-se das vantagens destacadas na [seção 3.4](#).

Como exemplo mais detalhado, tomamos a [Equação 2.9](#). É possível reescrevê-la da seguinte forma:

$$F = F_{D1} + F_{D2}; \quad (A.1)$$

onde

$$F_{D1} = \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} r u \\ r u^2 + p - t_{xxD1} \\ r uv - t_{xyD1} \\ r uw - t_{xzD1} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{matrix}; \quad (A.2)$$

$$u(E + p) - ut_{xxD1} - vt_{xyD1} - wt_{xzD1}$$

e

$$F_{D2} = \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ -t_{xxD2} \\ -t_{xyD2} \\ -t_{xzD2} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{matrix}; \quad (A.3)$$

$$q_x - ut_{xxD2} - vt_{xyD2} - wt_{xzD2}$$

Os subscritos “D1” e “D2” consistem em termos que terão 1ª derivadas e 2ª derivadas,

respectivamente. Os termos D1 geram derivadas cruzadas quando a [Equação A.1](#) é derivada em relação a x, enquanto que os termos D2 geram 2ª derivadas. A tensão normal t_{xx} e cisalhantes t_{xy} e t_{xz} são também separadas em termos D1 e D2:

$$t_{xx} = \underbrace{-\frac{2m}{3Re} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}}_{t_{xxD1}} + \underbrace{\frac{4m}{3Re} \frac{\partial u}{\partial x}}_{t_{xxD2}}; \quad (A.4)$$

$$t_{xy} = \underbrace{\frac{m}{Re} \frac{\partial u}{\partial y}}_{t_{xyD1}} + \underbrace{\frac{m}{Re} \frac{\partial v}{\partial x}}_{t_{xyD2}}; \quad (A.5)$$

$$t_{xz} = \underbrace{\frac{m}{Re} \frac{\partial u}{\partial z}}_{t_{xzD1}} + \underbrace{\frac{m}{Re} \frac{\partial w}{\partial x}}_{t_{xzD2}}; \quad (A.6)$$

A derivada em relação a x da [Equação A.1](#) é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_{D1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{D2}}{\partial x}; \quad (A.7)$$

Para o cálculo do termo $\frac{\partial F_{D1}}{\partial x}$ primeiro calcula-se cada termo interno e depois aplica-se a derivada ao termo F_{D1} . Assim são obtidos os resultados das derivadas cruzadas. Já o cálculo do termo $\frac{\partial F_{D2}}{\partial x}$ é feito da seguinte forma:

$$\frac{\partial F_{D2}}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{4} \underbrace{\left(\begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{array} \right)}_{0} \underbrace{\left(\begin{array}{c} -\frac{\partial t_{xxD2}}{\partial x} \\ -\frac{\partial t_{xyD2}}{\partial x} \\ -\frac{\partial t_{xzD2}}{\partial x} \end{array} \right)}_{3} \underbrace{\left(\begin{array}{c} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{array} \right)}_{5}; \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (ut_{xxD2} + vt_{xyD2} + wt_{xzD2})$$

onde

$$\frac{\partial t_{xxD2}}{\partial x} = \frac{4m}{3Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial t_{xyD2}}{\partial x} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial t_{xzD2}}{\partial x} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (A.11)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{J}{(k-1)RePrMa^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (A.12)$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} (ut_{xxD2} + vt_{xyD2} + wt_{xzD2}) = \\
& = u \frac{\partial t_{xxD2}}{\partial x} + t_{xxD2} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial t_{xyD2}}{\partial x} + t_{xyD2} \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial t_{xzD2}}{\partial x} + t_{xzD2} \frac{\partial w}{\partial x} = \\
& = u \frac{\partial t_{xxD2}}{\partial x} + \frac{4m}{3Re} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial t_{xyD2}}{\partial x} + \frac{m}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial t_{xzD2}}{\partial x} + \frac{m}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \\
& = u \frac{\partial t_{xxD2}}{\partial x} + v \frac{\partial t_{xyD2}}{\partial x} + w \frac{\partial t_{xzD2}}{\partial x} + \frac{m}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial v}{\partial x}^2 + \frac{\partial w}{\partial x}^2 \right) = \\
& = u \frac{4m}{3Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + w \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{m}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial v}{\partial x}^2 + \frac{\partial w}{\partial x}^2 \right); \quad (A.13)
\end{aligned}$$

Uma vez calculado $\frac{\partial F_{D2}}{\partial x}$, este é somado ao resultado do cálculo do termo $\frac{\partial F_{D1}}{\partial x}$. Procedimento semelhante é realizado para as variáveis G e H.

Para a variável G:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G_{D1}}{\partial y} + \frac{\partial G_{D2}}{\partial y}; \quad (A.14)$$

onde

$$\frac{\partial G_{D1}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\begin{aligned} & r v \\ & r uv - t_{xyD1} \\ & r v^2 + p - t_{yyD1} \\ & r vw - t_{yzD1} \end{aligned} \right); \quad (A.15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_{D2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\begin{aligned} & 0 \\ & - \frac{\partial t_{xyD2}}{\partial y} \\ & - \frac{\partial t_{yyD2}}{\partial y} \\ & - \frac{\partial t_{yzD2}}{\partial y} \end{aligned} \right); \quad (A.16) \\
& \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (ut_{xyD2} + vt_{yyD2} + wt_{yzD2})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial t_{xyD2}}{\partial y} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (A.17)$$

$$\frac{\partial t_{yyD2}}{\partial y} = \frac{4m}{3Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \quad (A.18)$$

$$\frac{\partial t_{yzD2}}{\partial y} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad (A.19)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{J}{(k-1)RePrMa^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (A.20)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (ut_{xyD2} + vt_{yyD2} + wt_{yzD2}) = \\ = u \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{4m}{3Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + w \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{m}{Re} \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} : \end{aligned} \quad (A.21)$$

Para a variável H:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial H_{D1}}{\partial z} + \frac{\partial H_{D2}}{\partial z}; \quad (A.22)$$

onde

$$\frac{\partial H_{D1}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\begin{aligned} & r w \\ & r u w - t_{xzD1} \\ & r v w - t_{yyD1} \\ & r w^2 + p - t_{yzD1} \\ & w(E+p) - ut_{xzD1} - vt_{yzD1} - wt_{zzD1} \end{aligned} \right) \quad (A.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{D2}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\begin{aligned} & 0 \\ & - \frac{\partial t_{xzD2}}{\partial z} \\ & - \frac{\partial t_{yzD2}}{\partial z} \\ & - \frac{\partial t_{zzD2}}{\partial z} \end{aligned} \right); \quad (A.24) \\ \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (ut_{xzD2} + vt_{yzD2} + wt_{zzD2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial t_{xzD2}}{\partial z} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (A.25)$$

$$\frac{\partial t_{yzD2}}{\partial z} = \frac{m}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad (A.26)$$

$$\frac{\partial t_{zzD2}}{\partial z} = \frac{4m}{3Re} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; \quad (A.27)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{J}{(k-1)\text{RePrMa}^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{A.28})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (u t_{xzD2} + v t_{yzD2} + w t_{zzD2}) = \\ = u \frac{m}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v \frac{m}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + w \frac{4}{3} \frac{m}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{m}{\text{Re}} \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} : \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

TERMOS FONTES DO MMS

A seguir são apresentados os termos fontes utilizados para as análises MMS bidimensionais (seção 4.2) e tridimensionais (seção 4.3).

B.1 Termos Fontes - MMS 2D

Figura 58 – Termo fonte para a variável r - MMS 2D.

```
In[18]:= FortranForm[Srho[x, y, t]]
Out[18]:= FortranForm
rho0*(v0*y*(2*Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2)) - 3*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(omg + 3*u0*x + 2*eps*u0*x + 2*eps*v0*y + 4*u0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))
```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Termo fonte para a variável r_u - MMS 2D.

```
In[19]:= FortranForm[Srhru[x, y, t]]
Out[19]:= FortranForm
omg*rho0*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- 2*rho0*u0*v0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- omg*rho0*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- 2*rho0*u0*v0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- 4*rho0*u0**2*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) -
- 2*rho0*u0*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
- 2*rho0*u0**2*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2 -
- (4*mu*(2*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + 2*v0*x*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2) - 4*u0*x**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) -
- (2*mu*(u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2) - 2*v0*x*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2) - 2*u0*y**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2))/Rey +
- (rho0*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*(-2*e0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2) -
- 0.5*(-4*v0**2*x*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(omg*t + x**2 + y**2) + 4*u0**2*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))))))
- (cv*kappa*Ma**2) + (2*rho0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(e0*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*kappa*Ma**2)
```

Fonte: Elaborada pelo autor.

B.2 Termos Fontes - MMS 3D

Figura 60 – Termo fonte para a variável r v - MMS 2D.

```

In[20]:= FortranForm[Shov[x, y, t]]
Out[20]:= FortranForm=
omg*rho0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) + 2*rho0*v0**2*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 -
omg*rho0*v0*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
2*rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) -
2*rho0*v0**2*y*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) -
rho0*u0*v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
(8*mu*(2*v0*y**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + (v0 - u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) +
(2*mu*(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + (v0 + 2*u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/Rey +
(2*rho0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*kappa*Ma**2) +
(0.5*rho0*y*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((-2.*e0t + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2) +
(-1.*u0**2 + 1.*v0**2 - 1.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2)))/(cv*kappa*Ma**2)

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 – Termo fonte para a variável E - MMS 2D.

```

In[21]:= FortranForm[SE[x, y, t]] // Simplify
Out[21]:= FortranForm=
e0t*omg*rho0*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) - e0t*omg*rho0*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2)) -
(4*mu*u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2) - v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/Rey +
(4*mu*v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2) - v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/Rey +
(8*mu*u0*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((u0 + v0*x*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + 2*u0*x**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) -
(8*mu*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(2*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) -
(8*mu*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(2*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + 2*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) +
(2*mu*v0*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((-u0 - 2*v0*x*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + 2*u0*y**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/Rey +
(8*mu*v0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*((2*v0*y**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + (v0 - u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/(3.*Rey) +
(2*mu*v0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2) + (v0 + 2*u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2)))/Rey +
2*rho0*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*
(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) + (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*kappa*Ma**2) -
2*rho0*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*
(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) + (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*kappa*Ma**2) -
(2.*kcond*((-2.*e0t + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2) + (-1.*u0**2 + 1.*v0**2 - 1.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2)))/
(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) - (1.*kcond*x*(0. + (-4.*e0t*x + 4.*eps*v0**2*x)*Cos(omg*t + x**2 + y**2) +
x*Cas(2*(omg*t + x**2 + y**2))*(-4.*u0**2 + 4.*v0**2 - 4.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2)) +
1.*eps*u0**2*x*Cas(omg*t + x**2 + y**2)**3*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) -
(1.*kcond*y*(0. + (-4.*e0t*y + 4.*eps*v0**2*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2) +
y*Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2))*(-4.*u0**2 + 4.*v0**2 - 4.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2)) +
1.*eps*u0**2*y*Cas(omg*t + x**2 + y**2)**3*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2))**2))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) +
rho0*v0*y*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))*((e0t*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(3 + 2*Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
e0t*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
(2*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2)))/(cv*kappa*Ma**2) +
(0.5*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((-2.*e0t + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2) +
(-1.*u0**2 + 1.*v0**2 - 1.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2)))/(cv*kappa*Ma**2)) +
rho0*u0*x*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((e0t*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(3 + 2*Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
e0t*Sin(omg*t + x**2 + y**2)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2)) +
(2*Cos(omg*t + x**2 + y**2)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2))**2)))/(cv*kappa*Ma**2) +
(0.5*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2))*((-2.*e0t + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2) +
(-1.*u0**2 + 1.*v0**2 - 1.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2)))/(cv*kappa*Ma**2))

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Termo fonte para a variável r - MMS 3D.

```

In[22]:= FortranForm[Sho[x, y, z, t]] // Simplify
Out[22]:= FortranForm=
(rho0*((v0 + 2*v0*y)*(2*Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)) - 3*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(omg + eps*u0 + 3*u0*x + 2*eps*u0*x + 2*eps*v0*y + 4*u0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/2.

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Termo fonte para a variável r u - MMS 3D.

```

In[23]:= FortranForm[Shrou[x, y, z, t]] // Simplify
Out[23]:= FortranForm=
omg*rho0*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
rho0*u0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
omg*rho0*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
rho0*u0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
2*rho0*u0*v0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
rho0*u0*v0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
2*rho0*u0**2*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 +
rho0*u0*v0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
2*rho0*u0**2*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
rho0*u0*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
(mu*(2*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + u0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/Rey -
(4*mu*((2*u0 + x*(v0 + 2*v0*y))*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - 4*u0*x**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/(3.*Rey) +
(2*mu*((-u0 - 2*v0*x*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + 2*u0*y**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/Rey +
(2*rho0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2)))/(cv*kappa*Ma**2) +
(cv*kappa*Ma**2) + (0.5*rho0*x*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
(-2.*e0t + 2.*eps*v0**2 + 2.*eps*u0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
(-1.*u0**2 + 1.*v0**2 + 1.*u0**2 - 1.*eps*u0**2*Cas(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*kappa*Ma**2)

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Termo fonte para a variável r_v - MMS 3D.

```

r[27]- FortranForm[Srhov[x, y, z, t]] // Simplify
Out[27]FortranForm=
      (mu*(v0 + 2*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey + omg*rho0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      rho0*v0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 +
      2*rho0*v0**2*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 -
      omg*rho0*v0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      2*rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      rho0*u0*v0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      2*rho0*v0**2*y*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      rho0*u0*v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      (4*mu*(y*(v0 - 4*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - 2*(v0 - u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(3.*Rey) +
      (2*mu*(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 + 2*u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
      (2*rho0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2)))/
      (cv*kappa*Ma**2) + (0.5*rho0*y*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
      ((-2.*e0t + 2.*eps*v0**2 + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
      (-1.*u0**2 + 1.*v0**2 + 1.*v0**2 - 1.*eps*u0**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*kappa*Ma**2)

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Termo fonte para a variável r_w - MMS 3D.

```

r[28]- FortranForm[Srhov[x, y, z, t]] // Simplify
Out[28]FortranForm=
      (2*mu*y*(v0 + 2*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey + omg*rho0*v0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      rho0*v0**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 +
      2*rho0*v0*v0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + (2*mu*v0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
      omg*rho0*v0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      2*rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      rho0*u0*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      rho0*u0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      2*rho0*v0*v0*y*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      rho0*u0*v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
      (4*mu*((v0 - v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - u0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(3.*Rey) +
      (2*mu*(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 + u0*x)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
      (rho0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
      0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))**2)))/
      (cv*kappa*Ma**2) + (0.5*rho0*y*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
      ((-1.*e0t + 1.*eps*v0**2 + 1.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
      (-0.5*u0**2 + 0.5*v0**2 + 0.5*v0**2 - 0.5*eps*u0**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*kappa*Ma**2)

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – Termo fonte para a variável E - MMS 3D.

```

F28- FortranForm[SE[x, y, z, t]] // Simplify
OutputFortranForm=
e0t*omg*rho0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- (mu*u0*(v0 + 2*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (2*mu*u0*y*(v0 + 2*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (2*mu*u0*y**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey - (mu*v0*(v0 + 2*v0*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (2*mu*u0*y*(v0 + 2*v0*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey - e0t*omg*rho0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- (mu*u0*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(2*v0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + u0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (4*mu*u0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(v0 - v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - u0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (4*mu*u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (4*mu*u0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(u0*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (mu*u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(u0*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - 2*v0*x*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (4*mu*u0*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-(2*u0 + x*(v0 + 2*v0*y))*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + 4*u0*x**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (2*mu*u0*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-(u0 - 2*v0*x*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + 2*u0*y**2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (4*mu*u0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(2*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) - (v0 - 4*v0*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (4*mu*u0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 - v0*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey -
- (4*mu*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(4*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 + 2*v0*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (4*mu*u0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(y*(-v0 + 4*v0*y)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + 2*(v0 - u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (2*mu*u0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 + 2*u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- (2*mu*u0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(2*v0*x**2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) + (v0 + 2*u0*x*y)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))/Rey +
- 2*rho0*u0*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
- (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) + (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/
- (cv*kappa*Ma**2)) - rho0*u0*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
- (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) + (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/
- (cv*kappa*Ma**2)) - 2*rho0*v0*y*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
- (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) + (e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/
- (cv*kappa*Ma**2)) - (2.*kcond*(-2.*e0t + 2.*eps*v0**2 + 2.*eps*v0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- (-1.*u0**2 + 1.*v0**2 + 1.*u0**2 - 1.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) -
- (1.*kcond*(0. + (-1.*e0t + 1.*eps*v0**2 + 1.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-1.*u0**2 + 1.*v0**2 + 1.*u0**2 - 1.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- 0.25*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*3*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) -
- (1.*kcond*x*(0. + (-4.*e0t + 4.*eps*v0**2 + 4.*eps*u0**2)*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- x*Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-4.*u0**2 + 4.*v0**2 + 4.*u0**2 - 4.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- 1.*eps*u0**2)*x*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*3*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) -
- (1.*kcond*y*(0. + (-4.*e0t + 4.*eps*v0**2 + 4.*eps*u0**2)*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- y*Cos(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(-4.*u0**2 + 4.*v0**2 + 4.*u0**2 - 4.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- 1.*eps*u0**2)*y*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*3*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/(cv*(-1. + kappa)*Ma**2*Pr*Rey) +
- rho0*v0*y*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(e0t*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- e0t*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(3 + 2*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) +
- (2*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/
- (cv*kappa*Ma**2) + (0.5*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
- (-2.*e0t + 2.*eps*v0**2 + 2.*eps*u0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- (-1.*u0**2 + 1.*v0**2 + 1.*u0**2 - 1.*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*kappa*Ma**2)) +
- rho0*u0*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*(e0t*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- e0t*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(1.5 + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- (Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)*(e0t*(1.5 + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z)) -
- 0.5*(v0**2*(eps + Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2 + u0**2*(eps + Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*2))/
- (cv*kappa*Ma**2) + (0.5*(3. + 2.*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z))*
- (-1.*e0t + 1.*eps*v0**2 + 1.*eps*u0**2)*Sin(omg*t + x**2 + y**2 + z) +
- (-0.5*u0**2 + 0.5*v0**2 + 0.5*u0**2 - 0.5*eps*u0**2)*Cos(omg*t + x**2 + y**2 + z))*Sin(2*(omg*t + x**2 + y**2 + z)))/(cv*kappa*Ma**2))

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

SPEEDUP E EFICIÊNCIA

Algumas métricas conhecidas de desempenho de computadores são o Speedup e a eficiência.

Speedup pode ser definido como a relação entre o tempo gasto para executar o programa com um único elemento de processamento e o tempo gasto para executar o mesmo programa com N elementos de processamento, mostrando o ganho de tempo. Speedup ideal é linear com o aumento do número de elementos de processamento utilizados.

$$Sp = \frac{T_1}{T_N} \quad (C.1)$$

Já a eficiência é a razão entre o Speedup e o número de processadores e indica a proporção do tempo em que os elementos de processamento estão ocupados.

$$Ef = \frac{T_1}{N \cdot T_N} \quad (C.2)$$

No presente trabalho há decomposição de domínio e um único programa agindo sobre conjuntos separados de dados (Single Program Multiple Data - SPMD). No presente caso há a necessidade de se comunicar informações e sincronizar atividades entre os elementos de processamento durante a solução. Assim, o tempo não utilizado realmente nos cálculos estão sendo despendidos em comunicação e sincronização, o que diminuem o Speedup e a eficiência. Na prática, para cada caso, há um certo ponto em que não se torna mais interessante aumentar o número de elementos de processamento para se diminuir o tempo computacional.

Na [Figura 67](#) seguir são apresentados os resultados de Speedup e na [Figura 68](#) a eficiência para os casos bidimensionais camada de mistura ([seção 4.4](#)), jato planar Weder2D ([subseção 4.5.1](#)) e jato planar ReichertBiringen2D ([subseção 4.5.2](#)).

Para realização dos testes apresentados foram simulados 100 passos de tempo para todos

Figura 67 – Speedup para os casos bi dimensionais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

os casos e só foram considerados o tempos computacionais para a realização dos cálculos, desconsiderando durante a execução dos códigos os tempos gastos com impressão de resultados. Na [Figura 69](#) é mostrado o comportamento do tempo adimensional dado pela razão $T_N = T_1$. Em todas as simulações bi dimensionais utilizou-se a combinação com 7 elementos de processamento para direção x e 2 elementos para a direção y, totalizando 14 elementos de processamento. Os tempos de simulações são apresentados na [Tabela 7](#)

Figura 68 – Eficiência para os casos bidimensionais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Parâmetros das simulações bidimensionais.

Caso	Camada de Mistura	Jato Planar Weder2D	Jato Planar RichertBiringen2D
Número pontos em x	2500	1400	1400
Número de pontos em y	850	800	800
Número total de pontos	2125000	1120000	1120000
Nº elementos de processamento em x	7	7	7
Nº elementos de processamento em y	2	2	2
Nº elementos de processamento total	14	14	14
Número períodos da frequência fundamental	76	10	76
Nº de passos de tempo por frequência fundamental	752	752	752
Total de passos de tempo	57152	7520	57152
Tempo total de simulação	20h16m	1h17m	9h57m

Figura 69 – Tempo adimensional para os casos bidimensionais.

Fonte: Elaborada pelo autor.