UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Métodos de resolução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis

Raíne Florisbelo Gonçalves

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ráinne Florisbelo Gonçalves

Métodos de resolução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e
Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Marina Andretta

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G634m	<p>Gonçalves, Raíne Florisbelo</p> <p>Métodos de resolução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis / Raíne Florisbelo Gonçalves; orientadora Marina Andretta. - São Carlos - SP, 2018. 140 p.</p> <p>Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.</p> <p>1. Problemas de empacotamento. 2. Empacotamento de cilindros. 3. Empacotamento em níveis. 4. Modelagem matemática. 5. Métodos heurísticos. I. Andretta, Marina, orient. II. Título.</p>
-------	---

Raíne Florisbelo Gonçalves

Solution methods for the cylinder packing problem in levels

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Marina Andretta

USP – São Carlos

April 2018

*À minha família, Daniel, Selma, Gilleady e Daisy,
que sempre me incentivou e apoiou.*

Vocês são minha fonte de inspiração para continuar batalhando pelos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Os anos de 2016 e 2017 foram os mais desafiadores até aqui. Me inseri em um universo completamente diferente do que estava acostumada e tive que aprender a me reerguer depois de cada objetivo não alcançado ou ideia frustrada. Hoje, eu percebo que as conquistas vêm com paciência e esforço, e é preciso muita dedicação para que os resultados positivos sejam alcançados. Afinal, “o sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia” (Robert Collier). Sem dúvida, pude amadurecer e crescer muito com tudo isso.

No decorrer desses anos, algumas pessoas estiveram ao meu lado percorrendo esse caminho comigo, e eu não poderia deixar de mencioná-las.

Em primeiro lugar, agradeço à Deus, o centro e fundamento de tudo, por me capacitar, renovar as minhas forças e me permitir chegar até aqui.

Quero expressar minha imensa gratidão à minha família. Aos meus pais, Daniel e Selma, agradeço por serem minha base, por me ensinarem a batalhar e não desistir mesmo que pareça muito difícil. Agradeço por todo apoio, compreensão e amor. Ao meu irmão e cunhada, Gilleadly e Daisy, agradeço por toda ajuda, incentivo e carinho. Sou muito grata, também, pela vida do pequeno Benício, meu sobrinho, que veio ao mundo alegrar ainda mais nossas vidas.

À cada uma das meninas da Rep. Funilaria & Pintura, meu muito obrigada por me acolher e ajudar nessa fase. Obrigada por todos os papos, conversas, consolo e cada ombro amigo nos momentos de desespero. Vocês foram essenciais e sempre farão parte da minha vida.

Também gostaria de agradecer ao Eduardo por toda a ajuda na fase final da minha pesquisa. Em especial, agradeço ao Yago por viver tudo isso comigo intensamente. Obrigada pelo seu carinho, por se importar comigo, me incentivar e apoiar.

Quero agradecer aos meus colegas de disciplinas, em especial ao Daniel, Lucas e Victor, pelo companheirismo. Agradeço, principalmente, por todas as noites/madrugadas estudando e pela paciência em me explicar quantas vezes fossem necessárias quando eu não sabia ou não entendia algo. Quero, ainda, agradecer a todos do Laboratório de Otimização pela ajuda, sugestões e ideias. Em especial, meu muito obrigada ao Cherri, por todo suporte. Você foi fundamental para que eu conseguisse desenvolver essa pesquisa.

Agradeço à minha orientadora Marina Andretta, pelo apoio, ideias, incentivos e por sempre estar disponível para responder um email rapidamente ou fazer uma reunião de emergência. A qualidade deste trabalho é fruto, também, de sua dedicação. Obrigada por todos os ensinamentos.

Meus respeitosos agradecimentos à banca do exame de qualificação pelas contribuições e aos membros da banca examinadora pela participação.

Por fim, agradeço à todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho, em especial à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro para realização desta pesquisa (processo n° 2016/02469-4)¹.

¹ As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do autor e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

*“Você ganha força, coragem e confiança
através de cada experiência em que você
realmente para e encara o medo de frente.”
(Eleanor Roosevelt)*

RESUMO

GONÇALVES, R. F. **Métodos de resolução para o problema de empacotamento de cilindros em níveis**. 2018. 140 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

O problema de empacotamento de cilindros em níveis é comumente encontrado nas indústrias de cerâmica. Solucionar este problema significa encontrar o posicionamento ideal dos itens cerâmicos cilíndricos dentro do forno de modo que o menor número de fornos seja utilizado e os itens não se sobreponham e obedeçam aos limites do recipiente. Também é considerado o uso de prateleiras para que haja uma melhor ocupação do espaço do forno. Propomos uma formulação matemática não-linear inteira mista e métodos de resolução heurísticos e exato para o problema. Os métodos heurísticos consistem em escolher uma estratégia de ordenação, posicionar os itens em cada nível por meio da heurística *Bottom-Left* e posicionar os níveis no recipiente utilizando as estratégias *Best-Fit*, *First-Fit* ou *Worst-Fit*. Ao total, propomos seis variações heurísticas para resolução do problema. O método exato consiste em estimar o número de níveis e recipientes necessários e resolver o problema por meio de um *solver* de otimização global. Os experimentos computacionais foram realizados para um conjunto de instâncias que criamos. Os resultados mostraram que o método exato é capaz de encontrar a solução ótima em um curto período de tempo para instâncias de pequeno porte e que as heurísticas são capazes de resolver o problema em um tempo computacional baixo, para instâncias de pequeno, médio e grande porte, sendo que algumas heurísticas apresentam melhor desempenho que outras.

Palavras-chave: Problemas de empacotamento, Empacotamento de cilindros, Empacotamento em níveis, Modelagem matemática, Métodos heurísticos.

ABSTRACT

GONÇALVES, R. F. **Solution methods for the cylinder packing problem in levels**. 2018. 140 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

The cylinder packing problem in levels is commonly found in ceramic industries. Solving this problem consists in finding the ideal position of items inside furnaces so that the minimum number of furnaces is used and the items do not overlap and obeying furnace's size. In this case, it is possible to add levels to the furnace. We proposed a non-linear integer mixed mathematical model for the problem and heuristic and exact resolution methods. Heuristic methods consist of choosing a sorting strategy, packing the items at each level by a Bottom-Left heuristic, and positioning the levels in the furnace using Best-Fit, First-Fit or Worst-Fit strategy. In total, it is proposed six heuristic variations to solve the problem. The exact method consists in solving the problem by a global optimization solver. The computational experiments were run over a set of new proposed instances. The results have shown that the exact method is able to find an optimal solution in a short period of time for small instances and that the proposed heuristics are capable of solving the problem in a low computational time for small, medium and large instances. Furthermore, some of them have performed better than others.

Keywords: Packing problems, Cylinder packing problem, Level packing, Mathematical modeling, Heuristic methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos de produtos fabricados em uma indústria de cerâmica.	25
Figura 2 – Ilustração de um forno de uma indústria de cerâmica.	26
Figura 3 – Representação do problema de empacotamento de cilindros em níveis. . . .	27
Figura 4 – Ilustração do empacotamento de círculos.	27
Figura 5 – Ilustração do empacotamento unidimensional de retângulos em níveis. . . .	28
Figura 6 – Representação de itens através de malha.	29
Figura 7 – Representação de itens em malhas de unidades diferentes.	29
Figura 8 – Representação de um item por polígono.	30
Figura 9 – Representação de um círculo pelo seu centro e raio.	30
Figura 10 – Sobreposição segundo o método de <i>raster</i> binário.	31
Figura 11 – Posicionamento de um retângulo dentro do recipiente, na posição (p, q) , com destaque para os pontos que não podem ser usados para empacotar outro item, marcados com $\times$	32
Figura 12 – Verificação da sobreposição entre dois círculos baseada em Litvinchev e Espinosa (2014)	32
Figura 13 – Distância euclidiana entre os raios de dois círculos.	33
Figura 14 – Região de sobreposição entre dois círculos.	34
Figura 15 – Região de contenção de um círculo em um retângulo.	35
Figura 16 – Representação do item cilíndrico e do recipiente paralelepípedo.	35
Figura 17 – Função ϕ	38
Figura 18 – Esferocone.	39
Figura 19 – Tipos de empacotamento.	41
Figura 20 – Possíveis posições para o círculo c_3 de acordo com a estratégia de Huang <i>et al.</i> (2005).	42
Figura 21 – Exemplo de empacotamento de retângulos em níveis.	46
Figura 22 – Exemplo de normalização do empacotamento de retângulos em níveis. . . .	46
Figura 23 – Ilustração da heurística NFDH.	48
Figura 24 – Ilustração da heurística FFDH.	48
Figura 25 – Ilustração da heurística BFDH.	49
Figura 26 – Ilustração da heurística HFF.	49
Figura 27 – Ilustração da heurística Floor Ceiling.	50
Figura 28 – Ilustração do algoritmo de Ortmann, Ntene e Vuuren (2010).	51
Figura 29 – Exemplo de <i>corner points</i> em um empacotamento tridimensional.	52

Figura 30 – Ilustração do problema de empacotamento de cilindros em níveis.	56
Figura 31 – Ilustração da verificação de contenção do círculo dentro do nível.	57
Figura 32 – Ilustração do posicionamento dos níveis no recipiente.	59
Figura 33 – Possíveis pontos para o posicionamento de um item.	63
Figura 34 – Ilustração da Fase 1 da heurística básica considerando os dois diferentes tipos de ordenação dos itens.	64
Figura 35 – Ilustração da Fase 2 da heurística básica considerando as três estratégias de alocação dos níveis.	70
Figura 36 – Ilustração do resultado obtido pela heurística BL_hBF para a instância $APGR_M3$	77
Figura 37 – Ilustração do resultado obtido pela heurística BL_hBF para a instância AVR_M5	78
Figura 38 – Ilustração dos resultados obtidos pelas heurísticas BL_hBF e BL_rBF para a instância AMR_M2	79
Figura 39 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_M1	127
Figura 40 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_M2	128
Figura 41 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_PG1	129
Figura 42 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_PG2	130
Figura 43 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_V1	131
Figura 44 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AMR_V2	132
Figura 45 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $APGR_M1$	133
Figura 46 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $APGR_PG1$	133
Figura 47 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $APGR_PG2$	134
Figura 48 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $APGR_V1$	135
Figura 49 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $APGR_V2$	136
Figura 50 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AVR_M1	137
Figura 51 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AVR_PG1	137
Figura 52 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AVR_PG2	138
Figura 53 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AVR_V1	139
Figura 54 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância AVR_V2	140

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Fase 1	65
Algoritmo 2 – Fase 2 – <i>Best-Fit</i>	67
Algoritmo 3 – Fase 2 – <i>First-Fit</i>	68
Algoritmo 4 – Fase 2 – <i>Worst-Fit</i>	69
Algoritmo 5 – Quantidade de níveis (p) e recipientes (m)	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplificação da proporção entre os raios dos itens.	75
Tabela 2 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio médio.	80
Tabela 3 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio pequeno e grande.	81
Tabela 4 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio variável.	82
Tabela 5 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio médio.	83
Tabela 6 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio pequeno e grande.	84
Tabela 7 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio variável.	85
Tabela 8 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio médio.	86
Tabela 9 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio pequeno e grande.	87
Tabela 10 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio variável.	88
Tabela 11 – Comparação entre as heurísticas propostas.	89
Tabela 12 – Resultados numéricos obtidos pelo método exato.	91
Tabela 13 – Resultados numéricos obtidos pelo método exato e pela heurística BL_hBF . . .	93
Tabela 14 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura média.	104
Tabela 15 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura pequena e grande.	105
Tabela 16 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura variável e raios médio e pequeno e grande.	106
Tabela 17 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura variável e raio variável.	107
Tabela 18 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura média.	108

Tabela 19 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura pequena e grande.	109
Tabela 20 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura variável e raios médio e pequeno e grande.	110
Tabela 21 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura variável e raio variável.	111
Tabela 22 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura média.	112
Tabela 23 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura pequena e grande.	113
Tabela 24 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio médio.	114
Tabela 25 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio pequeno e grande.	115
Tabela 26 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio variável.	116
Tabela 27 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rBF para os itens de altura média.	117
Tabela 28 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rBF para os itens de altura pequena e grande.	118
Tabela 29 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rBF para os itens de altura variável.	119
Tabela 30 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura média.	120
Tabela 31 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura pequena e grande.	121
Tabela 32 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura variável.	122
Tabela 33 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rWF para os itens de altura média.	123
Tabela 34 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rWF para os itens de altura pequena e grande.	124
Tabela 35 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rWF para os itens de altura variável.	125

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	25
2.1	Representação dos itens e do recipiente	28
2.2	Sobreposição dos itens e ocupação do recipiente	30
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	37
3.1	Empacotamento de cilindros	37
3.2	Empacotamento de círculos	40
3.3	Empacotamento de retângulos em níveis	45
4	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	55
4.1	Parâmetros	56
4.2	Variáveis	56
4.3	Função objetivo e restrições	57
5	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PROPOSTOS	61
5.1	Método heurístico	61
5.1.1	<i>Fase 1 da heurística</i>	62
5.1.2	<i>Fase 2 da heurística</i>	66
5.2	Método Exato	69
5.2.1	<i>Estimativa do número de níveis e recipientes</i>	69
6	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	73
6.1	Instâncias	73
6.2	Comparação entre as heurísticas propostas	76
6.3	Resultados obtidos pelo método exato	89
6.4	Comparação entre os resultados obtidos pelo método exato e pela heurística BL_hBF	91
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
	REFERÊNCIAS	97

**APÊNDICE A QUANTIDADE DE NÍVEIS POR RECIPIENTE NAS
SOLUÇÕES OBTIDAS PELAS HEURÍSTICAS 103**

A.1	<i>BL_hBF</i>	104
A.2	<i>BL_hFF</i>	108
A.3	<i>BL_hWF</i>	112
A.4	<i>BL_rBF</i>	117
A.5	<i>BL_rFF</i>	120
A.6	<i>BL_rWF</i>	123

**APÊNDICE B SOLUÇÕES ÓTIMAS OBTIDAS PELO MÉTODO EXATO
. 127**

B.1	<i>A_MR_M1</i>	127
B.2	<i>A_MR_M2</i>	128
B.3	<i>A_MR_{PG}1</i>	129
B.4	<i>A_MR_{PG}2</i>	130
B.5	<i>A_MR_V1</i>	131
B.6	<i>A_MR_V2</i>	132
B.7	<i>A_{PG}R_M1</i>	133
B.8	<i>A_{PG}R_{PG}1</i>	133
B.9	<i>A_{PG}R_{PG}2</i>	134
B.10	<i>A_{PG}R_V1</i>	135
B.11	<i>A_{PG}R_V2</i>	136
B.12	<i>A_VR_M1</i>	137
B.13	<i>A_VR_{PG}1</i>	137
B.14	<i>A_VR_{PG}2</i>	138
B.15	<i>A_VR_V1</i>	139
B.16	<i>A_VR_V2</i>	140

INTRODUÇÃO

Problemas de corte e empacotamento buscam determinar um arranjo ótimo de objetos menores (chamados de itens) dentro de objetos maiores (chamados de recipientes). Isso implica em obedecer a certas restrições, e sempre com o objetivo de minimizar custos, seja através da maximização do espaço ocupado ou da minimização dos desperdícios ([Martinez \(2014\)](#)).

O problema de corte consiste em cortar objetos em unidades menores, levando em consideração pré-requisitos como quantidade, forma e medida. O problema de empacotamento visa alocar itens dentro de recipientes, obedecendo a algumas restrições. Teoricamente, esses problemas podem ser tratados sem distinção, visto que cortar ou empacotar, nesse caso, refere-se à repartição de um espaço em porções menores, seja para o corte ou empacotamento. São considerados problemas difíceis, que têm em comum a existência de um subproblema geométrico, motivado pelas restrições de não sobreposição entre os itens ([Martinez \(2014\)](#)).

A importância de se estudar esses problemas dá-se pela necessidade em otimizar os processos industriais ([Queiroz et al. \(2010\)](#)). Entre as empresas beneficiadas nestes estudos encontram-se as indústrias de transporte e armazenamento, madeira, papel, vidro, metal, cerâmica, etc.

O objeto de estudo deste trabalho é um caso particular dos problemas de empacotamento, comumente encontrado em indústrias de cerâmica, que diz respeito à disposição de itens cerâmicos dentro do forno para que seja feita a “queima”. Neste problema, considera-se o uso de prateleiras (níveis) dentro do forno para que os produtos possam ser dispostos em diversos andares, melhorando a ocupação do forno.

Como ainda não foram encontrados na literatura trabalhos envolvendo esse tipo de problema, os objetivos deste trabalho são propor um modelo matemático e métodos de resolução para o problema em questão. Para isso, é feita uma revisão da literatura de trabalhos relevantes para esta pesquisa, com foco nas formulações matemáticas usadas e os métodos de solução. Resolver o problema utilizando métodos exatos pode ser difícil e gastar um elevado tempo

computacional mesmo para instâncias de pequeno porte. Dessa forma, o uso de heurísticas passa a ser mais apropriado. Pretende-se, portanto, resolver o problema por meio de um *solver* de otimização global, além de propor e implementar heurísticas.

As justificativas para o desenvolvimento deste trabalho estão nas vantagens proporcionadas à indústria, tais como: diminuição do tempo de preparo do forno, melhor ocupação do forno e diminuição da quantidade de fornadas necessárias. Além disso, existem poucas contribuições na literatura envolvendo o problema de empacotamento em níveis, como mencionado em Zhao *et al.* (2014).

O trabalho está estruturado em 7 capítulos. No Capítulo 2 é feita a contextualização do problema. Primeiramente, explica-se o problema encontrado na indústria de cerâmica, e faz-se uma definição formal do mesmo. Em seguida, é apresentada uma breve discussão sobre como pode ser feita a representação geométrica dos itens e do recipiente e, ainda, como verificar a sobreposição entre os itens. No Capítulo 3 é apresentada uma revisão dos modelos matemáticos que podem ser utilizados como base para a formulação do problema desta pesquisa. Além disso, é apresentada a revisão de alguns métodos de solução disponíveis na literatura para resolver os problemas de empacotamento de cilindros, círculos e retângulos em níveis, todos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 4 é apresentada a formulação matemática para o problema estudado. O Capítulo 5 descreve os métodos de resolução propostos e no Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais sobre este trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A produção de objetos cerâmicos é uma das atividades mais antigas da humanidade (Pinto *et al.* (2014)). Segundo Bellingieri (2005), produtos como vasos, potes, telhas e tijolos já eram fabricados no Brasil desde o período colonial e imperial. Basicamente, as indústrias de cerâmica são divididas em três grupos: cerâmica vermelha, cerâmica branca e revestimentos. De acordo com Motta, Zanardo e Júnior (2001), as indústrias de cerâmica vermelha fabricam produtos como tijolos, telhas e vasos ornamentais, produzindo cerca de 50000 peças por mês. No caso do setor de cerâmica branca, são produzidas louças e porcelanas, podendo fabricar até 19,5 milhões de peças por ano no Brasil dependendo do segmento (a Figura 1 ilustra alguns desses produtos). Já os revestimentos são produtos como azulejos e ladrilhos, e são produzidos globalmente mais de 3,2 bilhões metros quadrados.

Figura 1 – Exemplos de produtos fabricados em uma indústria de cerâmica.

Fonte – Extraída do site: panopoly.org. Último acesso: 05/01/2017.

Um dos processos de fabricação na indústria de cerâmica é a queima do produto em fornos para que ele possa adquirir suas propriedades finais. Esses fornos são constituídos de

câmaras circulares ou retangulares, com paredes e tetos em forma de abóboda (veja Figura 2). [Messias \(1996\)](#) explica que os produtos a serem queimados são posicionados manualmente no interior das câmaras até que todo o espaço disponível seja preenchido, o que permanece nos dias atuais. A quantidade de peças por fornada pode chegar a até 20000, dependendo das suas dimensões e da maneira como os objetos estão sendo empilhados. A queima dos produtos pode variar de 6 a 30 horas, devido às fases do processo de queima, matéria-prima, geometria e natureza do produto.

Figura 2 – Ilustração de um forno de uma indústria de cerâmica.

Fonte – Adaptada de ([MESSIAS, 1996](#)).

Com o intuito de otimizar o processo de queima e, assim, aumentar a produtividade e diminuir o custo de produção, dispor os itens dentro do forno é considerado, então, um desafio, dada a grande quantidade de produtos e o tempo de queima. Assim, diminuir a quantidade de fornadas é de suma importância. Por simplicidade, o interior do forno será considerado como um paralelepípedo nesta pesquisa.

Como mencionado, a distribuição dos itens cerâmicos dentro do forno é feita manualmente pelo operador de forno de acordo com o que ele considera a melhor opção de aproveitamento ([Messias \(1996\)](#)). Esses itens devem ser posicionados sem que haja sobreposição entre eles e devem estar inteiramente contidos dentro do forno. Este processo é muito lento e, de fato, os funcionários não têm uma medida clara para saber se a disposição adotada é realmente satisfatória. Com isso, fornecer uma solução possível para a indústria já seria de grande importância. Por simplificação, serão considerados apenas itens cilíndricos neste trabalho. Vale ressaltar, também, que as indústrias, geralmente, posicionam itens menores dentro de itens maiores ou dispõem os itens espaçados entre si, porém estes casos não serão avaliados nesta pesquisa devido ao seu grau de dificuldade.

Um dos recursos utilizados para a disposição dos itens dentro do forno é o uso de prateleiras de modo que os itens possam ser dispostos em diversos andares, aprimorando a ocupação.

Ao ser considerada a possibilidade do uso de prateleiras dentro dos fornos, cada prateleira adicionada representa uma divisão no forno. Deve-se, portanto, decidir quantas prateleiras serão inseridas e como será a disposição dos itens em cada prateleira. Nesta pesquisa, por simplificação, considera-se que a espessura da prateleira é desprezível, não interferindo significativamente na estabilidade ou ocupação do forno.

Figura 3 – Representação do problema de empacotamento de cilindros em níveis.

Fonte – Elaborada pela autora.

O problema de empacotamento de produtos cerâmicos em fornos é um problema tridimensional que diz respeito ao posicionamento de itens em um recipiente com formato de um paralelepípedo, podendo ser definido da seguinte maneira: dado um conjunto de itens de diversos tamanhos e uma quantidade infinita de recipientes, deseja-se determinar como empacotar um subconjunto de itens dentro de cada recipiente, de modo que todos os itens sejam empacotados utilizando a menor quantidade de recipientes. É necessário que os itens não se sobreponham e a disposição final respeite as dimensões do recipiente. Neste caso, os itens são empacotados em níveis, de modo que o primeiro nível corresponde à base do recipiente e os níveis subsequentes são determinados de acordo com os critérios de resolução do problema. Este problema é representado pela Figura 3.

Figura 4 – Ilustração do empacotamento de círculos.

Fonte – Elaborada pela autora.

Uma maneira de se abordar este problema é a seguinte: define-se o posicionamento dos cilindros no nível do recipiente por meio da resolução do problema bidimensional de empacotamento de círculos. Essa consideração pode ser feita, pois a disposição dos cilindros

dentro do recipiente é feita através de suas bases inferiores; assim, em um primeiro instante, suas alturas podem ser desconsideradas. Feito isso, a altura de cada nível é determinada com base na altura do maior item empacotado no nível anterior. O cálculo dessa altura é realizado inspirado no problema unidimensional de empacotamento de retângulos em níveis.

O problema de empacotamento de círculos é tal que: dados n itens circulares de raio r_i e um recipiente retangular de dimensões L e W , objetiva-se empacotar os itens dentro do recipiente, sem que haja sobreposição, maximizando a quantidade total de itens empacotados (Huang *et al.* (2005)). Este problema está representado na Figura 4.

Figura 5 – Ilustração do empacotamento unidimensional de retângulos em níveis.

Fonte – Elaborada pela autora.

Já no problema unidimensional de empacotamento de retângulos em níveis tem-se um conjunto de blocos retangulares com largura $l_i = L$ e comprimento w_i e um recipiente de largura L e comprimento W e deseja-se alocar esses blocos (e consequentemente os itens posicionados dentro deles) no recipiente, sem sobreposição. Além disso, os itens devem ser empacotados formando níveis (Chung, Garey e Johnson (1982)). O empacotamento de retângulos em níveis é ilustrado na Figura 5.

Definido o problema, na Seção 2.1 discute-se como é feita a representação dos itens e, na Seção 2.2, discorre-se sobre como pode ser verificada a sobreposição entre eles e como garantir que eles estejam posicionados obedecendo às dimensões do recipiente.

2.1 Representação dos itens e do recipiente

Vimos anteriormente que o problema de empacotamento de cilindros pode ser dividido em dois subproblemas para a sua resolução: o problema de empacotamento de círculos e o problema de empacotamento de retângulos. Dessa forma, as abordagens inicialmente apresentadas nesta seção e na Seção 2.2 são baseadas nestes dois problemas. De acordo com essas abordagens é que define-se a representação dos itens e verificação de sobreposição entre os itens para o problema tridimensional estudado nesta pesquisa.

Nos problemas de empacotamento de retângulos e empacotamento de círculos, os itens são dados por retângulos ou círculos e o recipiente por um retângulo. Assim, uma das maneiras

de representá-los é pelo uso de malhas. Essa abordagem diz respeito à discretização das áreas do recipiente e dos itens, de modo que a complexidade geométrica reduz-se a uma matriz.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0

Figura 6 – Representação de itens através de malha.

Fonte – Elaborada pela autora.

A codificação das malhas é encontrada de diferentes formas na literatura, como visto em [Segenreich e Braga \(1986\)](#), [Oliveira e Ferreira \(1993\)](#) e [Babu e Babu \(2001\)](#). [Oliveira e Ferreira \(1993\)](#) apresentam uma codificação mais simples que utiliza uma matriz binária para representar o empacotamento de um item, atribuindo valor 1 para indicar que o espaço está ocupado ou 0 para espaços vazios (veja Figura 6).

(a) Malha com unidade 3.

(b) Malha com unidade 1.

Figura 7 – Representação de itens em malhas de unidades diferentes.

Fonte – Elaborada pela autora.

[Cunha e Queiroz \(2016\)](#) destacam a importância da discretização da malha para obter um melhor resultado. Segundo os autores, a quantidade de pontos na malha é proporcional à dimensão do recipiente e ao conjunto de diferentes objetos para empacotamento. Quanto mais pontos na malha, mais bem representado está o item; entretanto, gasta-se mais tempo

computacional para resolução. A diferença na quantidade de pontos de uma malha pode ser observada na Figura 7 que considera unidades distintas para a discretização da malha.

Outra forma de representação dos itens e do recipiente é por polígonos. Segundo Gomes (2013), essa representação acaba sendo mais econômica em termos de memória computacional, visto que cada polígono é dado por uma lista de vértices. É possível, então, representar um retângulo pelos seus vértices, ou por um ponto de referência (no caso, o canto inferior esquerdo) e pelas suas dimensões – largura (L) e comprimento (W) (veja Figura 8).

Figura 8 – Representação de um item por polígono.

Fonte – Elaborada pela autora.

No caso de um círculo, a representação é dada pelo seu centro (c^x, c^y) e raio r (veja Figura 9).

Figura 9 – Representação de um círculo pelo seu centro e raio.

Fonte – Elaborada pela autora.

Geralmente a representação dos itens e do recipiente é a mesma. Por exemplo, quando se utiliza a malha para representar os itens, o recipiente também será representado pela malha, o que funciona de forma análoga para qualquer outra representação.

2.2 Sobreposição dos itens e ocupação do recipiente

Entendido como os itens e o recipiente são representados, precisa-se definir como é feita a verificação da sobreposição entre os itens. Nesta seção são apresentadas algumas ferramentas utilizadas na literatura para analisar se existe a sobreposição entre círculos e entre retângulos. Ressaltamos que em alguns casos as variáveis apresentadas possuem nomenclatura diferente do trabalho original pesquisado. Isso acontece para que haja uma padronização das notações e seus significados neste trabalho, o que também ocorre nos capítulos seguintes.

O método de *raster* utiliza as ideias propostas por [Oliveira e Ferreira \(1993\)](#), vistas na Seção 2.1. Considerando o caso binário, a matriz de recipientes é inicializada com zeros e o empacotamento é dado pela soma da matriz do item com a matriz do recipiente nas posições correspondentes; assim, o item deve ser posicionado de modo que todo o conjunto de posições de sua malha cubra um conjunto de posições da malha do recipiente. Caso alguma célula da matriz apresente valor superior a 1, significa que mais de um item está nesta posição e, portanto, os itens estão sobrepostos. Esta situação é ilustrada na Figura 10.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	2	1	1	0	1	2	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	2	1	0

Figura 10 – Sobreposição segundo o método de *raster* binário.

Fonte – Elaborada pela autora.

A trigonometria direta verifica a sobreposição entre dois polígonos baseada em testes envolvendo seus vértices e arestas. Essa abordagem é mais utilizada para itens irregulares, visto que o método de *raster* não consegue representar com precisão tais itens. Embora seja uma verificação mais complexa, quando comparada ao método de *raster*, o tempo de execução desses dois métodos não pode ser diretamente comparado ([Bennell e Oliveira \(2008\)](#)). Esta técnica pode ser encontrada nos trabalhos de [Hifi e M'Hallah \(2003\)](#), [Burke et al. \(2006\)](#) e [Shalaby e Kashkoush \(2013\)](#).

Para verificar se dois retângulos estão sobrepostos, encostados ou distantes um do outro, também é possível utilizar a modelos de otimização linear inteira juntamente com uma malha de pontos.

[Beasley \(1985\)](#) apresenta uma formulação que usa uma função binária a_{ipqrs} e uma variável binária x_{ipq} . Para cada retângulo i a ser empacotado, a variável x_{ipq} é igual a 1, se o retângulo i foi empacotado com o seu canto inferior esquerdo na posição (p, q) ou 0, caso contrário. Empacotado nessa posição, a função a_{ipqrs} impede que qualquer outro retângulo j seja empacotado em uma posição (r, s) que cause sobreposição com o retângulo i . Dessa forma, a função garante que cada ponto (s, t) do recipiente é coberto por apenas um item empacotado na posição (p, q) . O autor considera, ainda, que o recipiente está posicionado na origem do plano cartesiano xy . A Figura 11 ilustra o posicionamento de um item dentro do recipiente e os pontos onde outro item não pode ser empacotado são destacados com $\times$. Vale ressaltar que a posição escolhida para o empacotamento deve ser tal que o objeto fique inteiramente contido no recipiente. Ideias semelhantes podem ser encontradas em [Junqueira \(2009\)](#) e [Gonçalves e](#)

Queiroz (2014).

Figura 11 – Posicionamento de um retângulo dentro do recipiente, na posição (p, q) , com destaque para os pontos que não podem ser usados para empacotar outro item, marcados com $\times$.

Fonte – Elaborada pela autora.

Litvinchev e Espinosa (2014) propõem uma formulação usando programação linear inteira. De acordo com os autores, a ideia de utilizar variáveis inteiras surge como alternativa para explorar melhor o espaço de busca. Eles utilizam uma malha de pontos para representar as possíveis posições onde os centros dos círculos podem ser empacotados e uma variável binária x_i^k que apresenta valor 1 caso o círculo i esteja empacotado no ponto k da malha; ou 0, caso contrário. A partir disso, basta criar uma restrição garantindo que dois círculos i e j não podem ocupar o mesmo ponto na malha, dada por $x_i^k + x_j^l \leq 1, i \neq j$, em que k e l representam, respectivamente, os pontos onde os círculos i e j estão empacotados. Note que é necessário que a distância euclidiana (representada na modelagem pela variável d_{ij}) entre os pontos k e l da malha seja maior que a soma dos raios dos círculos analisados (i e j). Para que o item seja empacotado dentro dos limites do recipiente, adiciona-se a restrição $r_i x_i^k \leq \min_{j \in F} d_{ij}$. Sendo F o conjunto de pontos da malha que estão na borda do recipiente, o ponto k não pode ser o centro do círculo i

Figura 12 – Verificação da sobreposição entre dois círculos baseada em Litvinchev e Espinosa (2014) .

Fonte – Elaborada pela autora.

se a distância de k até a borda do recipiente for menor que r_i .

As ideias de Litvinchev e Espinosa (2014) estão ilustradas na Figura 12. Os pontos onde o centro do círculo pode ser posicionado estão marcados pelas bolas pretas e os pontos pertencentes à borda do recipiente, por bolas brancas. As setas representam a distância entre o ponto da borda e o ponto onde o centro do item está empacotado. Lembrando que essa distância deve ser maior ou igual ao raio do círculo para que este ponto represente uma posição viável.

Figura 13 – Distância euclidiana entre os raios de dois círculos.

Fonte – Elaborada pela autora.

Comumente, verificar a sobreposição entre círculos, é analisar a distância euclidiana entre os centros de cada par de círculo empacotado. A ideia é que a distância entre os centros dos círculos seja maior ou igual à soma dos raios desses dois círculos. Ou seja, dados os círculos i e j empacotados com os centros nas posições (c_i^x, c_i^y) e (c_j^x, c_j^y) e seus respectivos raios r_i e r_j , deseja-se que $\sqrt{(c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2} \geq r_i + r_j$ (veja Figura 13). Para este caso, é considerada a representação dos itens dada pelos seus centros e raios, e do recipiente, pela sua largura L e comprimento W . Entende-se que se a distância for menor, os círculos estão sobrepostos; se for maior, eles não estão sobrepostos, mas estão distantes um do outro; e se for igual, eles não estão sobrepostos e estão encostados um no outro. Em alguns casos, busca-se pela igualdade, pois pode garantir uma melhor ocupação do recipiente.

Flores, Martínez e Calderón (2016) propuseram um mecanismo para converter soluções infactíveis em factíveis. Eles consideram cada círculo como um anel elástico e a sobreposição cria uma força de repulsão que leva os círculos às posições onde a sobreposição é resolvida. Dados dois círculos i e j , se $(c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2 < (r_i + r_j)^2$, então os círculos estão sobrepostos e o grau de sobreposição é dado por: $d_{ij} = r_i + r_j - \sqrt{(c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2}$. Portanto, se o valor de d_{ij} for negativo, os itens estão distantes. Se $d_{ij} = 0$, os itens estão encostados; e se d_{ij} for positivo, os círculos estão sobrepostos.

Quando os círculos i e j se sobrepõem, o círculo j se move pela reação das forças elásticas. Ele se move uma distância d_{ij} do círculo i até que eles não mais se sobreponham. Isso

é feito modificando as coordenadas do círculo j , como apresentado a seguir:

$$d_{c_j^x} = \frac{c_j^x - c_i^x}{D_{ij}} d_{ij}, \quad d_{c_j^y} = \frac{c_j^y - c_i^y}{D_{ij}} d_{ij},$$

em que D_{ij} é a distância entre os centros dos círculos i e j e $d_{c_j^x}$ e $d_{c_j^y}$ são as projeções de d_{ij} nos eixos x e y , respectivamente.

Assim, a nova posição do círculo j passa a ser:

$$c_j^{x'} = c_j^x + d_{c_j^x}, \quad c_j^{y'} = c_j^y + d_{c_j^y}.$$

Caso existam mais de dois círculos, é necessário definir a ordem em que as posições serão corrigidas para garantir que, ao final, não haja sobreposições e que os círculos que tiveram suas posições alteradas não sofreram subseqüentes correções, pois isso pode fazer com que o algoritmo tenha uma ciclo infinito de correções.

Com base nas ideias apresentadas em [Bennell e Oliveira \(2009\)](#), é possível definir a região de sobreposição entre dois círculos e a região de contenção de um círculo em um retângulo. Essas regiões, respectivamente, indicam as possíveis posições em que um círculo pode ser empacotado sem que se sobreponha a outro já posicionado e garante que o círculo esteja inteiramente contido no recipiente.

Figura 14 – Região de sobreposição entre dois círculos.

Fonte – Elaborada pela autora.

Dados dois círculos i e j , com ponto de referência dado pelos seus centros, a região de sobreposição é determinada pelo deslizamento do item j ao longo do item i de modo que eles se interceptem, mas não se sobreponham. Podemos observar pela Figura 14 que, nesse caso, a região de sobreposição é um círculo (representado pelo círculo tracejado) em que o raio é dado pela soma dos raios de i e j . Já a região de contenção é definida conforme o círculo desliza ao longo do recipiente de modo que o círculo sempre toque o recipiente, mas não o ultrapasse. Ao fazer o deslizamento do círculo, como demonstrado na Figura 15, a região de contenção resultante é um retângulo (representado pelo retângulo hachurado). Visto que o recipiente é um retângulo, de maneira mais simples, para que o item não viole as dimensões do recipiente, basta que o centro do círculo j esteja posicionado de forma que seu centro obedeça às seguintes restrições: $r_j \leq c_j^x \leq L - r_j$ e $r_j \leq c_j^y \leq W - r_j$. Abordagens com essas restrições podem ser

encontradas nos trabalhos de George, George e Lamar (1995), Correia, Oliveira e Ferreira (2001), Mladenovic, Plastria e Urosevic (2005), Birgin e Gentil (2010) e He *et al.* (2018).

Figura 15 – Região de contenção de um círculo em um retângulo.

Fonte – Elaborada pela autora.

Determinar como representar os itens e o recipiente e como será verificada a sobreposição entre os itens é de suma importância para o desempenho do método de resolução. A partir das informações já apresentadas acima, é possível estabelecer essas definições para o problema estudado. Assim, estamos considerando neste trabalho que o item cilíndrico é representado por seu centro c_i , raio r_i e altura h_i ; enquanto o recipiente paralelepípedo é dado por seu canto inferior esquerdo da face frontal e suas dimensões, largura L , comprimento W e altura H (veja Figura 16). Como o posicionamento dos itens é feito considerando suas bases, a sobreposição é verificada pela distância euclidiana entre os centros dos itens.

Figura 16 – Representação do item cilíndrico e do recipiente paralelepípedo.

Fonte – Elaborada pela autora.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No capítulo anterior foi apresentado o problema de estudo desta pesquisa e discutida uma abordagem do problema. Também foram apresentadas algumas maneiras de representação dos itens e recipientes e alguns métodos de verificação de sobreposição dos itens. Neste capítulo, são discutidos os modelos e métodos de resolução de problemas relevantes para este trabalho – empacotamento de cilindros, empacotamento de círculos e empacotamento de retângulos em níveis – encontrados na literatura.

A formulação matemática, também conhecida como modelagem matemática, é utilizada para representar matematicamente uma aproximação da situação real. É considerada uma importante componente para a resolução do problema. A modelagem é composta por uma função objetivo, representando o que se deseja obter, e por restrições, que são as condições que devem ser obedecidas/respeitadas para a resolução do problema.

Os problemas de empacotamento estudados nesta pesquisa são NP-difíceis (Fowler, Paterson e Tanimoto (1981)), visto que são uma generalização do problema da mochila. Portanto, é pouco provável que exista um algoritmo de tempo polinomial capaz de resolvê-los de maneira ótima (Correia, Oliveira e Ferreira (2000)). Assim, devido às suas complexidades, suas resoluções são basicamente por heurísticas (Correia, Oliveira e Ferreira (2001)). A seguir, mostramos como alguns autores modelaram e resolveram esses problemas.

3.1 Empacotamento de cilindros

O problema de empacotamento de cilindros (tridimensional) é tratado na literatura, de modo geral, reduzindo-o à sua versão bidimensional. Isso ocorre quando os cilindros apresentam mesma altura podendo, então, desconsiderá-la e trabalhar apenas com a base circular do item, como ocorre em George, George e Lamar (1995), Dowsland (1991) Correia, Oliveira e Ferreira (2000), por exemplo. Dessa forma, tem-se um problema de empacotamento de itens circulares em

recipientes de bases retangulares, como paletes e contêineres. Assim, sua formulação e métodos de resolução são basicamente os mesmos de problemas de empacotamento de círculos, que serão abordados em detalhes na Seção 3.2.

Considerando problemas de empacotamento tridimensionais (3D), [Stoyan, Semkin e Chugay \(2016\)](#) mostraram que as funções ϕ e quasi- ϕ são importantes ferramentas para modelar esses tipos de problema. A função ϕ foi apresentada por [Stoyan, Novozhilova e Kartashov \(1996\)](#) e [Stoyan et al. \(2001\)](#). Este método consiste em utilizar expressões matemáticas para representar a posição relativa entre dois itens. Caso os itens estejam separados, a função ϕ apresenta valor maior que zero; caso os itens estejam se tocando, o valor é igual a zero; e, caso eles estejam sobrepostos, o valor é menor que zero. Quando a função ϕ é normalizada, seu valor é a distância euclidiana entre os dois itens; se não, é uma estimativa dessa distância. A obtenção da função ϕ para dois círculos (veja Figura 17a) e dois retângulos (veja Figura 17b) é ilustrada na Figura 17. Como pode ser observado, nos dois casos, os itens u_1 e u_2 estão encostados um no outro. Dessa forma, γ_{12} representa a região onde a função ϕ vale zero.

A função quasi- ϕ , introduzida por [Stoyan, Pankratov e Romanova \(2015\)](#), é utilizada com o mesmo objetivo da função- ϕ . A vantagem de sua aplicação está na utilização de fórmulas mais simples que as usadas pela função- ϕ , podendo ser construída por diferentes fórmulas, abrangendo mais itens. Entretanto, é um método que requer variáveis extras.

Figura 17 – Função ϕ .

Fonte – Extraída de [Stoyan et al. \(2001\)](#).

Segundo [Stoyan, Semkin e Chugay \(2016\)](#), itens geométricos 3D podem ser obtidos a partir de um objeto “universal” chamado *esferocone*. Como representado na Figura 18, este item é dado por um cone truncado unido a duas tampas esféricas, uma superior e outra inferior. Podemos, então, definir um vetor com as características métricas desse objeto: $\mu = (r_1, r_2, w_1, w_2, h)$, sendo que r_1 e r_2 são os raios superior e inferior do cone truncado, respectivamente. w_1 é a distância da tampa esférica superior até a base superior do cone truncado, w_2 é a distância da tampa esférica inferior até a base inferior do cone truncado e h é a altura do cone truncado (veja Figura 18). Dessa forma, um cilindro é dado por $\mu = (r_1, r_2, 0, 0, h)$, com $r_1 = r_2$. Vale destacar que os autores trabalharam com vários tipos de itens tridimensionais, não apenas cilindros.

Figura 18 – Esferocone.

Fonte – Elaborada pela autora.

Dado um conjunto de esferocones $O_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, e um recipiente $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : l_1 \leq x \leq l_2, w_1 \leq y \leq w_2, h_1 \leq z \leq h_2\}$, cujas dimensões são determinadas pelo vetor $u_\Omega = (l_1, l_2, w_1, w_2, h_1, h_2)$, o problema pode ser representado matematicamente da seguinte maneira:

$$\text{minimizar } (l_2 - l_1)(w_2 - w_1)(h_2 - h_1) \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a } \phi'_{ij} \geq 0, \quad i < j \in I, \quad (3.2)$$

$$\phi_i \geq 0, \quad i \in I, \quad (3.3)$$

em que ϕ'_{ij} é a função quasi- ϕ dos itens O_i e O_j e ϕ_i é a função ϕ dos itens O_i em relação ao recipiente. A função objetivo (3.1) visa minimizar o volume ocupado no recipiente. A restrição (3.2) garante que os itens não se sobreponham e a restrição (3.3) impede que os itens empacotados excedam os limites do recipiente.

Stoyan, Semkin e Chugay (2016) afirmam que, como a função objetivo e as restrições são não-lineares, métodos de otimização não-linear podem ser modificados para encontrar a solução. Entretanto, para usar métodos numéricos de otimização não-linear, foi necessário construir uma solução factível inicial. Os autores, então, desenvolveram um método para gerar um ponto inicial, fazer a otimização local, reduzir o número de restrições e encontrar um ponto estacionário melhor. Para encontrar pontos estacionários, os autores utilizaram o *Ipopt Library*¹ (Interior Point Optimizer) e conseguiram empacotar até 300 itens.

¹ <https://projects.coin-or.org/Ipopt> - Último acesso: 05/01/2018.

3.2 Empacotamento de círculos

Como já foi visto anteriormente, o problema de empacotamento de círculos envolve posicionar objetos circulares dentro de um recipiente retangular, evitando a sobreposição destes itens e garantindo que eles estejam totalmente acomodados no recipiente. Uma revisão dos modelos e métodos mais relevantes da literatura pode ser encontrado no trabalho de Hifi e M'hallah (2009).

Este problema pode ser dividido em duas categorias que dizem respeito aos raios dos círculos: círculos de raios de tamanhos diferentes e círculos idênticos.

O problema de empacotamento de círculos de diferentes tamanhos foi abordado por George, George e Lamar (1995), Stoyan e Yas'kov (1998), Hifi e M'Hallah (2003), Stoyan *et al.* (2004), Huang *et al.* (2005) e Litvinchev e Espinosa (2014).

George, George e Lamar (1995) criaram uma formulação matemática não-linear e discreta que consiste em maximizar o valor dos itens empacotados (função objetivo (3.4)) de modo a garantir que nenhuma parte do círculo fique fora do recipiente (restrições (3.5) e (3.6)) e que os itens não se sobreponham (restrição (3.7)).

A formulação é dada por:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i \in I} V_i \delta_i \quad (3.4)$$

$$\text{sujeito a} \quad \delta_i r_i \leq c_i^x \leq \delta_i (L - r_i), \quad \forall i \in I, \quad (3.5)$$

$$\delta_i r_i \leq c_i^y \leq \delta_i (W - r_i), \quad \forall i \in I, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{(c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2} \geq \delta_i \delta_j (r_i + r_j), \quad \forall (i, j) \in D, \quad (3.7)$$

$$c_i^x \geq 0, c_i^y \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad (3.8)$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I. \quad (3.9)$$

em que V_i representa o ganho ao empacotar o círculo i no recipiente; δ_i é uma variável binária igual a 1, se o círculo i foi empacotado no retângulo, ou 0, caso contrário; r_i é o raio do círculo i ; I é o conjunto de círculos candidatos ao empacotamento; D é o conjunto de todos os possíveis pares de empacotamento de círculos i e j , com $i < j$; L e W representam as dimensões horizontais e verticais do retângulo, respectivamente.

Os autores consideraram sua formulação intratável quando analisados problemas de larga escala e difícil de resolver mesmo para casos com poucos itens, por isso heurísticas foram avaliadas como método de solução mais adequado. Ao todo, eles desenvolveram seis métodos baseados em regras intuitivas de empacotamento, produzindo empacotamentos estáveis, em que o item está apoiado na base inferior do recipiente ou suportado por um ou mais círculos (veja Figura 19a), e instáveis (veja Figura 19b). A diferença entre os métodos está nas regras de empacotamento utilizadas e no tipo de solução produzida. A *Samepack heuristic* ordena os círculos em ordem decrescente de diâmetro e empacota os de mesmo diâmetro juntos.

Depois os círculos são movidos o mais próximo possível das laterais do retângulo e para baixo, possibilitando o empacotamento de itens extras. A *Wallpack heuristic* empacota primeiramente os círculos maiores nas bordas do retângulo e, em seguida, os outros círculos. Esse método utiliza a mesma ideia da heurística anterior para mover os círculos ao longo do retângulo. A *Stable1 heuristic* ordena os círculos em ordem decrescente e os empacota nas laterais do retângulo começando pelo lado esquerdo. A *Stable2 heuristic* utiliza os mesmos parâmetros da *Stable1*, porém os itens são empacotados primeiramente nas bordas inferior esquerda e direita e, depois, nos lados esquerdo e direito. Lembrando que nessas duas heurísticas, nenhum círculo é empacotado em cima de outro menor que ele. *Random heuristic* também ordena os círculos em ordem decrescente e o lado em que eles serão empacotados é escolhido aleatoriamente. *Genetic* utiliza técnicas de algoritmos genéticos que combina círculos localizados no inferior e no topo do retângulo produzindo uma nova configuração de empacotamento.

(a) Exemplo de solução estável.

(b) Exemplo de solução instável.

Figura 19 – Tipos de empacotamento.

Fonte – Extraída de [George, George e Lamar \(1995\)](#).

Cada algoritmo foi testado para 66 problemas testes criados para representar problemas práticos, contendo círculos pequenos, médios e grandes. [George, George e Lamar \(1995\)](#) compararam os resultados entre as heurísticas testadas e observaram que, apesar de *Random* e *Genetic* apresentarem um tempo de execução maior, a qualidade de suas soluções é superior aos outros métodos. Além disso, os autores observaram que um algoritmo simples de randomização pode ser superior ao algoritmo genético, chegando a uma solução satisfatória mais rapidamente.

Com o objetivo de posicionar círculos dentro de um recipiente retangular minimizando a distância entre os itens empacotados, [Stoyan e Yas'kov \(1998\)](#) desenvolveram um método para buscar um ponto estacionário. Como o problema apresenta função objetivo linear e restrições não-lineares, para resolvê-lo eles utilizaram um método de solução baseado na combinação entre uma modificação do algoritmo *Branch-and-Bound*, para achar os pontos estacionários, e o Método do Gradiente Reduzido. O processo de otimização utilizado pelos autores permite mover os itens ao longo da região factível com o intuito de diminuir o valor da função objetivo.

Stoyan e Yas'kov (1998) destacam que o ponto estacionário encontrado pela árvore de busca nem sempre corresponde a um mínimo local, então, utilizando esse ponto como ponto inicial para o Método do Gradiente Reduzido, um mínimo local é obtido.

Para resolver o problema de *layout* bidimensional, que consiste em posicionar os itens dentro do recipiente de modo que a largura do recipiente seja a menor possível, Hifi e M'Hallah (2003) utilizaram uma heurística de aproximação construtiva. Essa heurística consiste em posicionar sequencialmente os itens ordenados mais à esquerda e abaixo possível, desde que não se sobreponham a um item já empacotado e não violem o tamanho do recipiente. Este método utiliza simples ferramentas geométricas, explorando melhor o espaço para empacotamento e apresentando boas soluções rapidamente.

Stoyan e Yas'Kov (2004) trabalharam com o empacotamento de círculos em faixas. Os autores visavam minimizar o comprimento do recipiente dados sua largura e a quantidade de círculos. Dessa forma, a ideia é escolher pares de círculos empacotados de modo que seus raios possam se tornar variáveis e, assim, a variação dos mesmos resultar na diminuição do valor da função objetivo. Como método de resolução deste problema, eles utilizaram o Método do Gradiente Reduzido e a estratégia de escolha de desigualdades válidas. Os testes computacionais mostraram que o método é eficiente para empacotamento de 15 a 35 círculos e a comparação com o método *Branch-and-Bound* evidencia as vantagens dessa abordagem. Os autores ressaltam, ainda, que o resultado final depende do ponto inicial. Assim, é necessário resolver o problema algumas vezes com diferentes pontos iniciais para obter uma boa aproximação do mínimo global.

Figura 20 – Possíveis posições para o círculo c_3 de acordo com a estratégia de Huang *et al.* (2005).

Fonte – Extraída de Huang *et al.* (2005).

Huang *et al.* (2005) propuseram dois algoritmos gulosos, *B1.0* e *B1.5* para posicionar os círculos dentro do recipiente retangular, baseados na ideia de empacotar um item encostando em dois outros já empacotados. Isso é feito por meio de um fator λ que descreve quão próximo um círculo é posicionado em relação aos círculos já empacotados, dado por: $\lambda = \left(1 - \frac{d_{min}}{r_i}\right)$, sendo d_{min} a distância mínima entre o centro do círculo que deseja-se empacotar e os que já estão no

recipiente e r_i o raio do círculo i que será empacotado. Quando um círculo pode ser empacotado encostando em mais de dois círculos, $d_{min} = 0$ e $\lambda = 1$, ou caso contrário, $\lambda < 1$. A Figura 20 ilustra a distância mínima para os posicionamentos $p1$ e $p5$ do círculo $c3$. Note também que o círculo $c4$ está encostado nos lados $s1$ e $s3$ do recipiente e no círculo $c1$. Então, $\lambda = 1$, o que corresponde a $d_{min} = 0$. Dessa forma, $c4$ está totalmente apoiado.

O objetivo é posicionar os círculos o mais próximo possível um do outro, encontrando o valor máximo para λ ($\lambda = 1$). O algoritmo *B1.0* posiciona os círculos de acordo com esta ideia e o algoritmo *B1.5* é um melhoramento do algoritmo *B1.0* usando uma estratégia de busca que, além de avaliar a relação entre os itens já empacotados e o que está sendo empacotado, também examina a relação entre os círculos que estão fora do retângulo. Com isso, avalia-se melhor os possíveis círculos para o empacotamento e onde eles serão posicionados, gerando uma configuração mais vantajosa.

Uma formulação similar à de George, George e Lamar (1995) (3.4) - (3.9) pode ser encontrada no trabalho de Litvinchev e Espinosa (2014), citada brevemente na Seção 2.2. Os autores buscam maximizar a área do recipiente coberta pelos círculos e, além de modelar matematicamente o problema, foram alterando o modelo original com o objetivo de simplificá-lo. Para os experimentos numéricos, eles usaram um número ilimitado de círculos, uma malha de pontos retangular e executaram as instâncias no *solver* CPLEX 12.5². Os autores constataram que uma formulação mais completa, ou seja, o modelo original, apresenta resultados melhores, embora o tempo computacional gasto para encontrar a solução seja maior.

Abordando agora o problema de empacotamento de círculos de raios idênticos, tem-se os trabalhos de Correia, Oliveira e Ferreira (2000), Correia, Oliveira e Ferreira (2001), Birgin, Martínez e Ronconi (2005) e Birgin e Gentil (2010).

Correia, Oliveira e Ferreira (2000) estudaram o problema de empacotamento de itens cilíndricos idênticos em paletes. Foram apresentados dois algoritmos baseados na metaheurística de *Simulated Annealing* para a resolução do problema. O objetivo é encontrar um posicionamento padrão dos objetos, o qual pode ser repetido no empilhamento dos itens. Originalmente, o problema se trata do empacotamento de cilindros, mas como já explicado na Seção 3.1, a padronização da dimensão vertical desses itens permite reduzir a dimensionalidade do problema. Dessa forma, técnicas bidimensionais podem ser aplicadas para encontrar a solução. Os dois algoritmos propostos, *MinOSA* e *MaxNSA* foram também aplicados dentro de algoritmos de empacotamento de cilindros, *CPA-MinOSA* e *CPA-MaxNSA*. *MinOSA* busca minimizar a sobreposição de círculos a partir de um número pré-determinado de círculos idênticos. Já o *MaxNSA* objetiva maximizar a quantidade de círculos empacotados enquanto minimiza a sobreposição entre os itens. Os autores avaliaram o desempenho de *MinOSA* e *MaxNSA* com algoritmos de busca local puros; compararam os algoritmos *CPA-MinOSA* e *CPA-MaxNSA* entre si e com resultados da literatura e, ainda, alteraram o *CPA-MaxNSA* para considerar círculos diferentes. Os resultados obtidos

² <http://www-01.ibm.com/support/docview.wss?uid=swg21647403> - Último acesso: 03/03/2017.

mostraram que a eficácia de ambos os algoritmos é reduzida conforme a área do círculos aumenta; entretanto, o uso de *Simulated Annealing* melhora a eficiência da resolução quando comparada com algoritmos de busca local puros. Além disso, também foi verificado que o *CPA-MinOSA* é mais eficaz e que há necessidade de um processo de pós-otimização quando o *CPA-MaxNSA* é utilizado. A versatilidade dos algoritmos desenvolvidos tornou possível a adaptação para o problemas de empacotamento de círculos diferentes em retângulos. [Correia, Oliveira e Ferreira \(2001\)](#) propuseram um limite superior para o número de círculos a ser empacotado.

Para saber se é possível alocar n círculos idênticos dentro de um recipiente retangular, [Birgin, Martínez e Ronconi \(2005\)](#) desenvolveram uma formulação não-linear com o objetivo de encontrar um minimizador global e, portanto, a solução para o problema. Então, dados n , r , L e W , ou seja, o número de círculos, o raio e as dimensões do recipiente, deseja-se determinar os pontos onde os itens serão empacotados, restringindo-se ao tamanho do recipiente ($[r, L - r]$, $[r, W - r]$). O modelo é dado por:

$$\text{minimizar } \sum_{i \neq j} \max(0, (2r)^2 - \|c_i - c_j\|_2^2)^2 \quad (3.10)$$

$$\text{sujeito a } r \leq c_i^x \leq L - r, \quad (3.11)$$

$$r \leq c_i^y \leq W - r, \quad (3.12)$$

em que $c_i = (c_i^x, c_i^y)$ e $c_j = (c_j^x, c_j^y)$ são os centros dos círculos i e j , respectivamente.

Se o valor da função objetivo for igual a zero, isso significa que os círculos podem ser empacotados. Note que a função objetivo do problema (função objetivo (3.10)) não tem segunda derivada contínua, então, uma adaptação é feita:

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \max[0, g_i(x) + u_i]^2, \quad (3.13)$$

$$\text{sujeito a } x \in \Omega$$

em que m representa a quantidade de pontos em que $g_i(x) < 0$ somado àqueles em que $g_i(x) \geq 0$, $g_i(x) = (2r)^2 - \|c_i - c_j\|_2^2$, u_i são variáveis adicionais utilizadas para garantir que a segunda derivada da função seja contínua e Ω corresponde às restrições (3.11) e (3.12).

Assume-se que g_i tem segunda derivada contínua e o fator $\frac{1}{2}$ é apenas para facilitar o cálculo das derivadas. As variáveis adicionais u_i modificam a hessiana da função para os casos onde $g_i(x) \leq 0$ para que sua segunda derivada também seja contínua. Dessa forma, $u_i^2 = -g_i(x)^2$ quando $g_i(x) \leq 0$ e $u_i^2 = 0$ quando $g_i(x) > 0$. A descontinuidade das segundas derivadas de (3.10) corresponde à singularidade da hessiana da função objetivo de (3.13), pois agora a função objetivo passa a ser singular onde a hessiana não existia.

As restrições (3.11) e (3.12) são chamadas de *restrições de caixa* pois a variável deve estar contida entre um limite inferior e um superior, ou seja, os círculos devem ser empacotados

dentro das dimensões do recipiente. Segundo Birgin, Martínez e Ronconi (2005), encontrar a resolução deste problema depende de encontrar um minimizador global para um problema de otimização não-linear e não-convexo. Então, os autores utilizaram o *solver* GENCAN (Birgin e Martínez (2002)) para encontrar pontos estacionários e utilizaram uma estratégia para aumentar a probabilidade de se encontrar minimizadores globais. O uso da hessiana regularizada torna o *solver* mais eficiente. Os resultados mostraram que é um método promissor, porém, para considerar restrições quanto à distribuição dos círculos dentro do retângulo, é necessário reformular o modelo matemático.

Birgin e Gentil (2010) trabalharam com o problema bidimensional de empacotamento de círculos de raios unitários em recipientes de diferentes formas geométricas, como círculos, quadrados, retângulos, faixas e triângulos. Os autores desenvolveram um método de convergência quadrática que tem como objetivo minimizar a dimensão do recipiente de modo que não haja sobreposição dos itens e estes permaneçam inteiramente contidos no recipiente. A proposta dos autores é, dado um número fixo de círculos, posicioná-los em contato um com o outro ou com o próprio recipiente tornando as restrições de não sobreposição ativas, ou seja, atendidas por igualdade. Para isto, eles utilizaram inicialmente o *solver* ALGENCAN³, implementação de um método dos Lagrangianos Aumentados. Ao final, realiza-se um processo de pós-otimização para verificar a não-sobreposição dos círculos e violação do recipiente recalculando a dimensão do recipiente, caso necessário.

3.3 Empacotamento de retângulos em níveis

O problema de empacotamento de retângulos em níveis é definido da seguinte maneira: dado um conjunto de n retângulos e um número ilimitado de recipientes, com largura e comprimento definidos (caso bidimensional), o objetivo é empacotar todos os itens utilizando a menor quantidade de recipientes possível. Os itens não podem se sobrepor e devem obedecer às dimensões do recipiente. Além disso, eles devem ser empacotados formando níveis (veja Figura 21).

O estudo do problema de empacotamento em níveis iniciou-se com Gilmore e Gomory (1965), com o problema de corte de estoque 2-estágios exato, e também pode ser encontrado em trabalhos como de Coffman Jr *et al.* (1980), Chung, Garey e Johnson (1982), Frenk e Galambos (1987), Lodi, Martello e Vigo (1999), Lodi, Martello e Monaci (2002), Lodi, Martello e Vigo (2002b), e outros.

A primeira proposta de resolução para este problema foi dada por Chung, Garey e Johnson (1982). Eles consideraram o primeiro nível como sendo a parte inferior do recipiente e que um novo nível é criado coincidindo com o topo do item mais alto empacotado no nível anterior. A solução é obtida em duas fases. A primeira consiste em resolver o problema de

³ <https://www.ime.usp.br/egbirgin/tango/> - Último acesso: 03/03/2017

Figura 21 – Exemplo de empacotamento de retângulos em níveis.

Fonte – Elaborada pela autora.

empacotamento bidimensional em faixa. Neste caso, é dado um recipiente com largura definida e altura infinita com o objetivo de empacotar todos os itens de modo a minimizar a altura do recipiente. Na segunda fase tem-se recipientes finitos com altura fixa. Essa etapa consiste em resolver o problema de empacotamento unidimensional em que cada nível é visto como um elemento com valor h_j ($j = 1, \dots, n$) equivalente à altura do item mais alto contido neste nível.

(a) Empacotamento em níveis.

(b) Empacotamento em níveis normalizado.

Figura 22 – Exemplo de normalização do empacotamento de retângulos em níveis.

Fonte – Adaptada de [Lodi, Martello e Monaci \(2002\)](#).

Segundo [Lodi, Martello e Monaci \(2002\)](#) e [Lodi, Martello e Vigo \(2004\)](#), é possível fazer as seguintes suposições sem perda de generalidade:

- Em cada nível, o item empacotado mais à esquerda é o mais alto. Os níveis são enumerados de baixo para cima, de acordo com a ordem em que são criados.
- Em cada recipiente, o primeiro nível é o mais alto.
- Os itens são organizados em ordem decrescente em relação à sua altura, ou seja, $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$. Dessa forma, a altura de cada nível corresponde à altura h_i do primeiro item i a ser inserido.

Assume-se também que o item mais à esquerda de cada nível é aquele que inicializa o nível. Da mesma forma, se um nível é o primeiro em um recipiente, ele inicializa o recipiente. Essas observações feitas pelos autores, são ilustradas na Figura 22.

Assim, a modelagem deste problema é feita em Lodi, Martello e Monaci (2002) e Lodi, Martello e Vigo (2004) supondo ainda que existem n possíveis níveis (o i -ésimo nível está associado ao item i que inicializa essa camada) e n recipientes (o k -ésimo recipiente está associado ao nível k que inicializa este recipiente) para o empacotamento. A formulação é dada a seguir:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{k=1}^n q_k \quad (3.14)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + y_j = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} z_{ki} + q_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$\sum_{j=i+1}^n w_j x_{ij} \leq (L - l_i) y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=k+1}^n h_i z_{ki} \leq (H - h_k) q_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (3.18)$$

$$y_i, x_{ij}, q_k, z_{ki} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j, k, \quad (3.19)$$

em que L e H representam a largura e altura do recipiente, respectivamente; l_i e h_i são a largura e altura do item i , respectivamente; h_k é a altura do nível e as variáveis binárias são: y_i que assume valor 1 se o item i inicializa o nível i , ou 0 caso contrário; q_k que assume valor 1 se o nível k inicializa o recipiente k , ou 0, caso contrário; x_{ij} que é igual a 1 se o item j está alocado no nível i , com $i = 1, \dots, n-1$ e $j > i$, ou 0 caso contrário e z_{ki} que admite valor 1 se o nível i é alocado no recipiente k , ou 0 caso contrário. Note que, para x_{ij} , somente os itens j , em que $j > i$, podem ser alocados no nível i . Assim, se um determinado item j , em que $j = i$, inicializa o nível i , ele não poderá ser atribuído novamente a nenhum outro nível. Isso funciona de forma análoga para z_{ki} .

Nesse modelo, a função objetivo (3.14) visa minimizar a quantidade de recipientes utilizada. As restrições (3.15) e (3.16) impõem, respectivamente, que cada item é empacotado uma única vez no recipiente (inicializando um nível ou em um nível inicializado por um item mais alto) e que cada nível usado é alocado a exatamente um recipiente (inicializando um recipiente ou em um recipiente inicializado por um nível precedente). Dessas restrições, temos que o item i deve inicializar o nível i e k deve inicializar o recipiente k . Por exemplo, $y_1 = q_1 = 1$, ou seja, o item 1 inicializa o nível 1 e o nível 1 inicializa o primeiro recipiente. As restrições (3.17) e (3.18) garantem que os itens empacotados obedecem às dimensões do recipiente. Segundo Lodi, Martello e Vigo (2002b), o modelo proposto apresenta bons resultados para instâncias de tamanho realístico em um curto tempo de execução.

Uma formulação matemática similar pode ser encontrada em [Puchinger e Raidl \(2007\)](#). Os autores também propuseram uma formulação utilizando geração de colunas, baseada na decomposição de Dantzig-Wolfe.

A resolução por métodos heurísticos é dada por meio de três estratégias clássicas encontradas na literatura para o empacotamento em níveis, as quais são derivadas de algoritmos para o caso em uma dimensão. Considerando que os itens são agrupados por suas alturas, sendo empacotados nessa sequência, e que o item i é o item atual e s é o último nível criado, essas são as estratégias heurísticas:

- *Next-Fit Decreasing Height* (NFDH): o item j é empacotado alinhado à esquerda no nível s , se couber. Caso contrário, um novo nível é criado e o item j é empacotado nele. Neste caso, os níveis anteriores não são revisitados (veja Figura 23).

Figura 23 – Ilustração da heurística NFDH.

Fonte – Elaborada pela autora.

- *First-Fit Decreasing Height* (FFDH): o item j é empacotado alinhado à esquerda no primeiro nível, onde couber. Se o nível não acomodar o item j , um novo nível é inicializado como um NFDH (veja Figura 24).

Figura 24 – Ilustração da heurística FFDH.

Fonte – Elaborada pela autora.

- *Best-Fit Decreasing Height* (BFDH): o item j é empacotado alinhado à esquerda no nível, entre aqueles que cabem, com o mínimo espaço horizontal inutilizado. Se o nível não acomodar o item j , um novo nível é inicializado como um NFDH (veja Figura 25).

Figura 25 – Ilustração da heurística BFDH.

Fonte – Elaborada pela autora.

Essas estratégias foram utilizadas por alguns autores, como [Chung, Garey e Johnson \(1982\)](#), [Berkey e Wang \(1987\)](#), [Lodi, Martello e Vigo \(1999\)](#), [Kang e Park \(2003\)](#), [Ortmann, Ntene e Vuuren \(2010\)](#) e [Epstein e Levy \(2010\)](#).

[Chung, Garey e Johnson \(1982\)](#) criaram um algoritmo de duas fases para resolver o problema de empacotamento de retângulos em um número finito de recipientes, chamado *Hybrid First-Fit* (HFF), que utiliza na primeira fase o FFDH para obter o empacotamento em faixa e, na segunda fase, o NFDH e BFDH, respectivamente. Como pode ser observado na Figura 26, primeiro, os retângulos são dispostos na faixa formando blocos. Posteriormente, esses blocos são posicionados em recipientes de modo a minimizar a quantidade de recipientes utilizados. Esse algoritmo se mostrou aplicável quando não é necessária a rotação dos itens para o empacotamento.

Figura 26 – Ilustração da heurística HFF.

Fonte – Elaborada pela autora.

[Berkey e Wang \(1987\)](#) criaram o algoritmo *Finite Best-Strip*, que é uma variação do HFF. Na primeira fase, é utilizado o BFDH e na segunda fase, o problema de empacotamento unidimensional é resolvido através do BFDH. O algoritmo se torna lento conforme a quantidade de recipientes aumenta. [Lodi, Martello e Vigo \(1999\)](#) propuseram o algoritmo *Floor Ceiling*, que além de empacotar os itens da esquerda para a direita, com o canto inferior esquerdo no chão do nível, os itens também podem ser empacotados da direita para a esquerda, com o canto

superior encostado no “teto” (veja Figura 27). *Floor Ceiling* apresenta resultados satisfatórios e é considerado um limitante superior para algoritmos como NFDH e FFDH.

Figura 27 – Ilustração da heurística Floor Ceiling.

Fonte – Extraída de [Lodi, Martello e Vigo \(2002b\)](#).

Assumindo que os itens e os recipientes são ordenados em ordem decrescente em relação ao tamanho, [Kang e Park \(2003\)](#) introduziram os algoritmos *Iterative First-Fit Decreasing* (IFFD) e *Iterative Best-Fit Decreasing* (IBFD), que são modificações dos algoritmos FFDH e BFDH, respectivamente, com o objetivo de diminuir o custo do uso do recipiente. O algoritmo IFFD aloca todos os itens no recipiente maior usando o FFDH, obtendo uma solução factível. Então é obtida uma nova solução empacotando novamente os itens no próximo maior recipiente usando FFDH. Esse processo continua até que o re-empacotamento dos itens seja impossível. Isso funciona de forma análoga para o IBFD, que utiliza o BFDH. Terminado o processo, tem-se um conjunto de soluções factíveis e, então, é possível obter uma solução factível para cada tipo de recipiente. Dessa forma, a melhor solução é selecionada como solução final, com algumas modificações, se necessário. Quando o tamanho dos itens e do recipiente são divisíveis, o IFFD e o IBFD encontram a solução ótima; caso contrário, a performance dos algoritmos diminui conforme o tamanho do maior item a ser empacotado diminui. Os itens e recipientes são considerados divisíveis quando, dadas uma lista de itens $a_1, a_2, \dots, a_n$ e uma lista de recipiente $b_1, b_2, \dots, b_m$, o item a_{j-1} é divisível pelo item a_j , o que funciona de forma análoga para os recipientes.

Segundo [Ortmann, Ntene e Vuuren \(2010\)](#), algoritmos de empacotamento em níveis podem ser combinados a algoritmos de empacotamento de retângulos 1D para a criação de algoritmos híbridos que resolvam o problema bidimensional de empacotamento de retângulos. Dessa forma, os autores propuseram uma versão bidimensional do IFFD, de [Kang e Park \(2003\)](#), em dois estágios, com o objetivo de minimizar a área total dos itens contidos no recipiente considerando o caso em que os recipientes têm tamanhos diferentes. O primeiro estágio consiste em ordenar os itens em ordem decrescente de altura e largura, e os recipientes em ordem decrescente de área. Então, o empacotamento em faixa é executado com a largura da faixa igual à largura do primeiro recipiente da lista. Se o próximo recipiente tiver a mesma largura do atual, os itens remanescentes são empacotados neste recipiente. Se ainda existem itens a serem posicionados e o próximo recipiente apresenta largura diferente, um outro problema de empacotamento em faixa é executado considerando como largura da faixa a largura do novo

recipiente. Esse processo é feito até que todos os itens sejam empacotados. No segundo estágio, o recipiente no qual a área total dos itens empacotados seja a menor é selecionado para o re-empacotamento. Depois, procura-se o menor recipiente vazio cuja área seja maior ou igual que a área dos itens empacotados. O empacotamento em faixa é executado para esses itens levando em consideração que a largura da faixa é igual à largura do recipiente vazio. Se a altura da faixa não for maior que a altura do recipiente, os itens podem ser empacotados nele e o recipiente anterior fica vazio. O processo é repetido para o recipiente com a próxima maior área de itens empacotados e continua até que todos os recipientes sejam investigados para o re-empacotamento. Quando comparado ao IFFD, o algoritmo de [Ortmann, Ntene e Vuuren \(2010\)](#) apresentou característica similar em termos de qualidade de solução, porém em um menor tempo.

(a) Posicionamento dos itens no primeiro estágio.

(b) Posicionamento dos itens no segundo estágio.

Figura 28 – Ilustração do algoritmo de [Ortmann, Ntene e Vuuren \(2010\)](#).

Fonte – Extraída de [Ortmann \(2010\)](#).

Uma versão modificada do NFDH para problemas bidimensionais dinâmicos, em que os itens podem chegar e sair em diferentes momentos, foi criada por [Epstein e Levy \(2010\)](#) para minimizar a quantidade de recipientes utilizados. Quando o item i chega, o algoritmo empacota este item no recipiente de menor índice, se possível. Os itens são, então, reposicionados dentro do recipiente. Para saber se um novo item cabe dentro de um determinado recipiente, ele é mesclado àquela lista de itens e os itens são empacotados novamente usando a sub-rotina do NFDH para duas dimensões no mesmo recipiente. Se o item não couber em nenhum dos recipientes já utilizados, é aberto um novo recipiente. Não foram realizados testes computacionais.

Um revisão dos problemas de empacotamento em níveis pode ser encontrada em [Zhao et al. \(2014\)](#). Os autores afirmam que a versão tridimensional do problema de empacotamento em níveis, embora pouco adotada, também foi objeto de estudo de alguns autores.

[Lodi, Martello e Vigo \(2002a\)](#) propuseram um algoritmo (heurística) de duas fases para a versão tridimensional do problema de empacotamento em níveis. A base do recipiente corresponde ao primeiro nível em que os itens serão empacotados e o chão dos níveis subsequentes é dado pela altura do maior item empacotado no nível anterior. Os autores explicam que, para um empacotamento eficiente, é preciso considerar duas possibilidades: (i) obter um bom preenchimento vertical, empacotando itens de alturas semelhantes no mesmo nível; (ii) obter um bom preenchimento horizontal, resolvendo o problema de empacotamento bidimensional para os itens da base. As duas fases são definidas da seguinte maneira: primeiro é feito um agrupamento dos itens com base na ordem decrescente de suas alturas e determina-se uma solução pelo problema de empacotamento em faixas. O empacotamento é dado, então, combinando os níveis obtidos nos recipientes através da resolução do problema de empacotamento unidimensional. Feito isso, os itens são reorganizados de acordo com a área de suas bases e realocados em seus níveis, possibilitando modificar a altura dessas camadas. Os testes computacionais mostraram a eficiência da heurística, quando comparada a outros algoritmos exatos e heurísticos da literatura.

[Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#) definiram os *corner points*, que são os locais mais apropriados onde os itens podem ser posicionados dentro do recipiente. Esse conceito é ilustrado na Figura 29 pelos círculos pretos; os círculos brancos representam falsos *corner points*. Com essa estratégia, a maioria das instâncias foram resolvidas na otimalidade em um tempo computacional razoável.

Figura 29 – Exemplo de *corner points* em um empacotamento tridimensional.

Fonte – Extraída de [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#).

Baseado no trabalho de [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#), [Lim et al. \(2012\)](#) apresentaram uma heurística gulosa para o problema de carregamento de contêineres. Sua estratégia é construir os níveis dentro do recipiente que contenham itens do mesmo tipo. Estes níveis são subdivididos para tentar melhorar o empacotamento encontrado. Esse processo continua até que não seja mais

possível inserir níveis no recipiente ou até que todos os itens sejam empacotados. De acordo com os experimentos computacionais realizados, a heurística se mostrou competitiva com outros algoritmos quando aplicadas instâncias da literatura.

[Buchwald e Scheithauer \(2016\)](#) propuseram melhorias na heurística FFDH para solucionar o problema bidimensional de empacotamento em faixa. Além disso, apresentaram uma implementação da heurística FFDH para o caso tridimensional. Nos dois casos, eles conseguiram reduzir o valor dos limitantes superiores.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo é apresentada uma modelagem para o problema de empacotamento de cilindros em recipientes dados por paralelepípedos, considerando o empacotamento em níveis. O modelo proposto está baseado nos trabalhos de [George, George e Lamar \(1995\)](#), [Lodi, Martello e Monaci \(2002\)](#) e [Lodi, Martello e Vigo \(2004\)](#). O modelo matemático aqui apresentado difere dos modelos apresentados pelos autores por considerar a versão tridimensional do problema e por não fazer uso de nenhum tipo de predeterminação do posicionamento dos itens ou níveis. Aqui existe uma dificuldade maior devido à preocupação com a distribuição dos itens nos níveis e o posicionamento dos níveis nos recipientes.

O problema estudado nesta pesquisa diz respeito ao problema de empacotamento de cilindros em níveis. Dados n itens cilíndricos e infinitos recipientes paralelepípedos idênticos, objetiva-se posicionar todos os itens dentro dos recipientes, com a possibilidade de usar níveis, de modo que eles não se sobreponham e obedeçam às dimensões do recipiente, minimizando o número de recipientes necessários para o empacotamento. O problema é ilustrado pela Figura 30.

Desejamos modelar a seguinte situação:

minimizar	quantidade de recipientes utilizados
sujeito a	cada item obedecer às dimensões do recipiente, não sobreposição dos itens, cada item ser empacotado apenas uma vez, cada recipiente conter pelo menos um nível, um nível criado ter altura maior que os itens posicionados abaixo dele, existirem itens empacotados em cada nível criado.

Para isso, é necessária a definição de parâmetros, variáveis, função objetivo e restrições, o que é feito nas seções a seguir.

Figura 30 – Ilustração do problema de empacotamento de cilindros em níveis.

Fonte – Elaborada pela autora.

4.1 Parâmetros

Para este problema, temos uma quantidade fixa de itens (n), e desejamos alocá-los em recipientes com largura (L), comprimento (W) e altura (H) fixos. Esses recipientes são idênticos e, por isso, apresentam as mesmas medidas. Além disso, também é dada a altura (h_i) e raio (r_i) de cada item i .

De acordo com a definição das variáveis (veja Seção 4.2) e com o intuito de diminuí-las, a quantidade de recipientes e a quantidade de níveis necessários não serão considerados como variáveis. Dessa forma, será feita uma estimativa de quantos recipientes (m) e quantos níveis (p) serão necessários, no máximo, para que os itens sejam empacotados e, a partir disso, minimizar a quantidade de recipientes. Essa estimativa é explicada na Seção 5.2.

Portanto, como parâmetros para este problema, temos:

m	quantidade máxima de recipientes,
n	quantidade total de itens,
p	quantidade máxima de níveis para cada recipiente,
$L \times W \times H$	largura $\times$ comprimento $\times$ altura de cada recipiente,
r_i	raio do item i , $i = 1, \dots, n$,
h_i	altura do item i , $i = 1, \dots, n$.

4.2 Variáveis

No modelo, são utilizados três tipos de variáveis binárias:

$$\delta_{iks} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ está empacotado no nível } k \text{ do recipiente } s, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\gamma_s = \begin{cases} 1, & \text{se o recipiente } s \text{ é usado,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\beta_{ks} = \begin{cases} 1, & \text{se o nível } k \text{ é usado no recipiente } s, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$ e $s = 1, \dots, m$.

As demais variáveis são contínuas:

- λ_{ks} determina a altura (em relação ao recipiente) onde o nível k do recipiente s é posicionado;
- (σ_i^x, σ_i^y) centro do item i em relação aos eixos x e y , respectivamente.

Figura 31 – Ilustração da verificação de contenção do círculo dentro do nível.

Fonte – Elaborada pela autora.

4.3 Função objetivo e restrições

Para este caso estamos considerando que o primeiro nível é dado pela base do recipiente e que a verificação de sobreposição é feita pela distância euclidiana dos centros dos itens empacotados, para itens posicionados no mesmo recipiente e em um mesmo nível. Com base nos parâmetros e variáveis apresentados, a formulação matemática pode ser escrita como:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{s=1}^m \gamma_s \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \delta_{iks} r_i \leq \sigma_i^x \leq \delta_{iks} (L - r_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

$$\delta_{iks} r_i \leq \sigma_i^y \leq \delta_{iks} (W - r_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

$$\delta_{iks} h_i \leq H - (\lambda_{ks} \beta_{ks}), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

$$(\sigma_i^x - \sigma_j^x)^2 + (\sigma_i^y - \sigma_j^y)^2 \geq \delta_{iks} \delta_{jks} (r_i + r_j)^2, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i-1 \quad (4.5)$$

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^p \delta_{iks} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{iks} \leq n \beta_{ks}, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$\sum_{k=1}^p \beta_{ks} \leq p \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.8)$$

$$\lambda_{ks} \beta_{ks} \leq H \gamma_s, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.9)$$

$$\lambda_{ks} \beta_{ks} \geq \delta_{ik-1s} h_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.10)$$

$$\lambda_{ks}, \sigma_i^x, \sigma_i^y \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.11)$$

$$\delta_{iks}, \gamma_s, \beta_{ks} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m. \quad (4.12)$$

A função objetivo (4.1) consiste em minimizar a quantidade de recipientes utilizados para empacotar todos os itens. Para posicionar um item dentro do recipiente, é necessário que os limites do recipiente sejam obedecidos. As restrições (4.2), (4.3) e (4.4) garantem que o item empacotado não ultrapasse as dimensões do recipiente em relação à largura, comprimento e altura, respectivamente. As restrições (4.5) impedem que os itens se sobreponham. As restrições (4.6) garantem que cada item é empacotado apenas uma vez. Quando um item é designado para um determinado nível e recipiente, ambos são considerados usados. Isso é garantido pelas restrições (4.7) e (4.8). Quando um nível é usado, é necessário que ele esteja contido no recipiente, obedecendo o limite de altura disponível e que a altura em que ele esteja posicionado seja maior que a altura dos itens empacotados no nível anterior. Essas condições são estabelecidas pelas restrições (4.9) e (4.10), respectivamente. Por fim, as restrições (4.11) e (4.12) definem o domínio das variáveis. As restrições (4.2) e (4.3) são ilustradas pela Figura 31.

Trata-se de uma formulação não-linear com variáveis inteiras e contínuas. Tem-se $(n +$

1) $\times m \times p + m$ variáveis inteiras e $2 \times n + (m \times p)$ variáveis contínuas. Além disso, tem-se $4 \times n \times m \times p$ restrições lineares e $(m \times p) \times \left[\frac{(n-1) \times (n-2)}{2} + 1 \right] + [n \times m \times (p-1)]$ restrições não-lineares. Note que a quantidade de variáveis do modelo depende da estimativa de recipientes (m) e níveis (p) alterando, consequentemente, a quantidade de restrições. Observe que o aumento no número de variáveis e restrições de um problema pode tornar mais trabalhoso o encontro de uma solução ótima.

Após essa abordagem inicial, percebemos que algumas alterações poderiam ser feitas no modelo de modo que o número de restrições fosse reduzido, restrições não-lineares fossem linearizadas e a eventual resolução do modelo pudesse ser mais rápida. Dessa forma, seguem as modificações:

1. Podemos simplificar as restrições (4.2) e (4.3), diminuindo o número de variáveis. Isso é possível porque, ao invés de verificar a condição da variável δ_{iks} , é possível simplesmente garantir que o centro de cada item obedeça aos requisitos dessas restrições, sem perda de generalidade. Elas, então, passam a ser, respectivamente:

$$r_i \leq \sigma_i^x \leq L - r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

$$r_i \leq \sigma_i^y \leq W - r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Figura 32 – Ilustração do posicionamento dos níveis no recipiente.

Fonte – Elaborada pela autora.

2. Sabemos que se $\delta_{iks} = 1$, então β_{ks} também vale 1. Assim, as restrições (4.4), (4.9) e (4.10), juntas, tornam-se redundantes e podem ser modificadas. Quando um nível é usado, é necessário que a altura em que ele esteja posicionado seja maior que a altura dos itens empacotados no nível anterior, o que é estabelecido pelas restrições (4.10). Assim, só é preciso verificar se os itens posicionados no último nível obedecem à altura do recipiente, o que é verificado pelas restrições (4.4). Dessa forma, as restrições (4.9) podem ser retiradas

do modelo, e as restrições (4.4) e (4.10) passam a ser:

$$\delta_{ips}h_i \leq H - \lambda_{ps}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.15)$$

$$\lambda_{ks} \geq \delta_{i,k-1,s}h_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, p, \quad s = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Estas modificações estão ilustradas na Figura 32.

O modelo matemático final é, então:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (4.1) \\ &\text{sujeito a} && (4.13) - (4.15) \\ &&& (4.5) - (4.8) \\ &&& (4.16) \\ &&& (4.11) - (4.12) \end{aligned}$$

Nesse caso, continua-se com $(n+1) \times m \times p + m$ variáveis inteiras e $2 \times n + (m \times p)$ variáveis contínuas e tem-se $5 \times n + 2 \times p \times m + n \times m \times [1 + (p-1)] + m$ restrições lineares e $\frac{(n-1) \times (n-2)}{2 \times p \times m}$ restrições não-lineares. Note que, inicialmente, havia seis conjuntos de restrições lineares e quatro conjuntos de restrições não-lineares. Com as modificações, esses números mudam para oito conjuntos de restrições lineares e apenas um conjunto de restrições não-lineares.

Embora o número de restrições lineares tenha aumentado, a linearização de restrições torna o problema mais fácil de se resolver, podendo diminuir o tempo computacional gasto na busca pela solução. Foram realizados experimentos computacionais preliminares com as duas formulações apresentadas nesta seção e observou-se que as modificações realizadas, de fato, contribuíram para que a solução fosse encontrada em um tempo computacional significativamente menor. Assim, os testes apresentados no Capítulo 6 são referentes a apenas essa segunda formulação

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PROPOSTOS

Para o problema tridimensional de empacotamento de cilindros em níveis (veja Capítulo 2) foram propostos dois métodos de resolução: métodos heurísticos e exato. A heurística básica proposta na Seção 5.1 é dividida em duas fases. Primeiramente os itens cilíndricos são posicionados de maneira construtiva nos níveis, impedindo que os itens se sobreponham e garantindo que eles estejam inteiramente contidos no nível ao qual pertencem. Em seguida, esses níveis são alocados nos recipientes na tentativa de utilizar a menor quantidade de recipientes possível. No total, são propostas seis variações desse algoritmo base. O método exato descrito na Seção 5.2 diz respeito à resolução do modelo proposto (veja Capítulo 4) por meio de um *solver* de otimização global.

5.1 Método heurístico

O uso de heurísticas como método de solução é bastante encontrado na literatura, principalmente quando gasta-se um tempo muito elevado para se encontrar a solução de maneira exata. Nesse caso, não há uma garantia da qualidade da solução. No entanto, essa falta de precisão não é considerada uma deficiência dos métodos heurísticos, mas sim, uma particularidade que permite encontrar e adotar a melhor solução imediata, em detrimento de soluções comprovadamente ótimas, mas que são custosas de encontrar. Para o problema proposto nesta pesquisa, foram utilizadas seis variações de uma heurística, que serão descritas a seguir.

A estratégia utilizada nesta heurística é a divisão do problema em dois: um problema bidimensional e outro unidimensional (veja Capítulo 2). Como já mencionado, a heurística é dividida em duas fases. A Fase 1 corresponde à resolução do problema bidimensional, enquanto a Fase 2 resolve o problema unidimensional. Na Fase 1, o objetivo é dispor as bases dos cilindros em cada um dos níveis, os quais possuem as bases iguais à base do recipiente. Dessa forma, é como se o recipiente estivesse sendo visualizado pela sua face superior (eixo de coordenadas xy). Pode-se afirmar, então, que se trata de um problema bidimensional de empacotamento de círculos

em recipientes retangulares. A Fase 2 tem como finalidade posicionar os níveis no recipiente. Agora, a visualização é da face lateral do recipiente (eixo de coordenadas xz). Como o nível possui a mesma largura do recipiente e diferente alturas, este é um problema de empacotamento unidimensional. As Fases 1 e 2 serão descritas mais detalhadamente nas Seções 5.1.1 e 5.1.2, respectivamente.

5.1.1 Fase 1 da heurística

Conforme explicado anteriormente, a Fase 1 corresponde à resolução do problema bidimensional de empacotamento de círculos em recipientes retangulares. Estamos, em um primeiro momento, desconsiderando a altura dos itens cilíndricos e focando na disposição de suas bases ao longo dos níveis.

A disposição dos itens em cada nível é feita de maneira construtiva. Uma heurística construtiva é aquela que constrói a solução passo a passo. Nesse caso, a cada iteração, um item é selecionado para ser posicionado no nível. Segundo [Bennell e Oliveira \(2009\)](#), a ordem em que os itens são posicionados tem grande influência na qualidade da solução. Essa ordem pode ser definida aleatoriamente ou de acordo com o tamanho dos itens; nesse caso, de acordo com o raio ou altura do item. Outra influência vem das regras de posicionamento dos itens. Uma das regras de posicionamento bastante utilizada em problemas de empacotamento é a heurística *Bottom-Left*, que busca encontrar uma posição factível para alocar o item mais à esquerda e abaixo no recipiente. As heurísticas desenvolvidas nesta pesquisa representam os itens pelos seus centros, raios e alturas; e o recipiente pelas suas dimensões, como explicado na Seção 2.1. O posicionamento dos itens nos níveis é realizado usando uma variação da estratégia *Bottom-Left*.

Os possíveis pontos de empacotamento dos itens são determinados a partir das regiões de sobreposição e das arestas da região de contenção. São calculados os pontos de interseção entre cada par de arestas da região de contenção, os pontos de interseção da região de sobreposição entre a base do cilindro que se deseja posicionar e a base de cada cilindro já posicionado e, ainda, a interseção entre a região de sobreposição de cada base de cilindro já posicionado e cada aresta da região de contenção. Para que esses pontos calculados sejam factíveis, é necessário garantir que, ao posicionar o centro de um novo item em um determinado ponto, ele não se sobreponha com os itens já empacotados e esteja inteiramente contido no nível ao qual foi alocado. Assim, é verificado se os pontos pertencem à região de contenção e calculada a distância euclidiana entre os pontos candidatos ao empacotamento e os centros dos cilindros já posicionados (Seção 2.2).

A Figura 33 ilustra o posicionamento das bases de três cilindros em um nível, sendo o item representado por seu centro. Para cada posicionamento são demonstrados os pontos factíveis e infactíveis para o empacotamento. Os pontos de interseção entre as retas são representados por bolas, os pontos de interseção entre as arestas e os círculos são representados por triângulos e os pontos de interseção entre os círculos por quadrados. A cor preta indica pontos factíveis, enquanto a cor branca, pontos não factíveis. O ponto de empacotamento escolhido é sempre

Figura 33 – Possíveis pontos para o posicionamento de um item.

Fonte – Elaborada pela autora.

aquele mais à esquerda e abaixo possível.

(a) Ordem decrescente de altura.

(a) Ordem decrescente de raio.

Figura 34 – Ilustração da Fase 1 da heurística básica considerando os dois diferentes tipos de ordenação dos itens.

Fonte – Elaborada pela autora.

Definidos os conceitos importantes da heurística, é possível introduzi-la. Na Fase 1, dada uma lista com n itens, devidamente ordenados, tenta-se inserir todos eles, um de cada vez, de modo a encontrar a quantidade de níveis necessários para tal. Por simplicidade, considera-se que cada nível tem a altura do item mais alto nele posicionado. A busca por uma posição factível para

Algoritmo 1: Fase 1**Entrada:** n, r_i, h_i, L, W, O . n : quantidade de itens; r_i : raio do item i ($i = 1, \dots, n$); h_i : altura do item i ($i = 1, \dots, n$); (L, W) : dimensões da base recipiente; O : critério para ordenação dos itens;**Saída:** $k, h_j^{nível}, l_j$ k : quantidade de níveis; $h_j^{nível}$: altura do nível j ($j = 1, \dots, k$); l_j : lista de itens alocados no nível j ($j = 1, \dots, k$) e suas respectivas posições;**1 Início****2** l recebe todos os itens ordenados pelo critério O ; $l_{aux} \leftarrow \emptyset$; $k \leftarrow 0$;**3 enquanto existir itens na lista l faça****4** $k \leftarrow k + 1$; //nível corrente**5** Crie a lista vazia l_k ;**6** $h_k^{nível} \leftarrow 0$;**7 para cada item i na lista l faça****8** Remova o item i da lista l ;**9** $P \leftarrow \emptyset$; // P é o conjunto que guarda os pontos de empacotamento de cada item**10 para cada par de arestas da região de contenção do item i faça****11** | Calcule os pontos de interseção e insira-o no conjunto P ;**12 fim-para****13 para cada aresta a da região de contenção do item i e fronteira f da região de sobreposição dos itens já posicionados no nível faça****14** | Calcule os pontos de interseção entre a e f insira-os no conjunto P ;**15 fim-para****16 para cada par (c_1, c_2) de itens já posicionados faça****17** | Calcule os pontos de interseção das fronteiras das regiões de sobreposição de c_1 e c_2 e insira-os no conjunto P ;**18 fim-para****19 para cada ponto (c^x, c^y) do conjunto P faça****20** | se (c^x, c^y) pertence ao exterior da região de contenção do item i ou à região de sobreposição do item i com algum outro item **então****21** | | Remova (c^x, c^y) do conjunto P ;**22 fim-se****23 fim-para****24 se $P = \emptyset$ então****25** | Insira o item i no fim da lista l_{aux} ;**26 fim-se****27 senão****28** | Seja (c^x, c^y) o ponto de P com menor valor c^x (e menor valor c^y , caso haja empate);**29** | l_k recebe o item i alocado no ponto (c^x, c^y) do nível k ;**30** | se $h_i > h_k^{nível}$ **então****31** | | $h_k^{nível} \leftarrow h_i$;**32 fim-se****33 fim-se****34 fim-para****35** $l \leftarrow l_{aux}$; $l_{aux} \leftarrow \emptyset$;**36 fim-enquanto****37** **Devolva** k ; l_j ($j = 1, \dots, k$); $h_j^{nível}$ ($j = 1, \dots, k$);**38 Fim**

o item começa, em cada nível, no canto inferior esquerdo. De modo geral, o primeiro item da lista é empacotado no canto inferior esquerdo do primeiro nível. Toda a lista de itens é percorrida e, para cada item, tenta-se posicioná-los mais à esquerda e abaixo possível neste nível. Caso existam itens que ainda não foram alocados (não foram encontrados pontos factíveis no nível atual), um novo nível é aberto e o processo é reiniciado. Isso é feito até que todos os itens tenham sido posicionados. A Fase 1 retorna as posições de cada item i (centro do item (c_i^x, c_i^y) e em qual nível ele se encontra), o número de níveis utilizados k e a altura de cada nível $h_j^{nível}$. O Algoritmo 1 descreve o funcionamento da Fase 1.

Foram escolhidas duas estratégias de ordenação para os itens cilíndricos: ordem decrescente de altura e ordem decrescente de raio da base. A primeira estratégia é usada com o intuito de melhorar a ocupação em relação à altura do recipiente de um modo geral, pois essa ordenação permite que os itens de alturas semelhantes sejam posicionados próximos um do outro. Já a segunda estratégia visa otimizar a ocupação de cada nível. Agrupar os itens pelo tamanho de seus raios possibilita que a região à qual pertence o nível seja melhor aproveitada, não deixando muitos espaços vazios.

A Figura 34 ilustra o posicionamento dos itens obtido por meio da Fase 1, considerando as duas estratégias de ordenação. Neste exemplo, tem-se sete itens cilíndricos, com altura e raio identificados na figura. São usados diferentes tons de cinza na ilustração do posicionamento dos itens ao longo dos níveis para indicar que os itens são de alturas diferentes. Dessa forma, quanto mais alto, mais escuro é o item. Como pode ser observado, as diferentes ordenações resultam em diferentes posicionamentos dos itens nos níveis.

5.1.2 Fase 2 da heurística

A Fase 2 recebe os dados de saída da Fase 1 e considera cada nível como um bloco com largura igual à largura do recipiente e altura do nível e, então, é resolvido o problema de empacotamento unidimensional, em que esses blocos são posicionados em recipientes com dimensões já definidas utilizando uma das estratégias de alocação: *Best-Fit* (BF), *First-Fit* (FF) e *Worst-Fit* (WF) (veja Seção 3.3). Neste caso, a *Worst-Fit* posiciona o bloco no recipiente com mais espaço disponível, dentre os recipientes já abertos. Caso não seja possível posicionar o bloco, um novo recipiente é aberto. A Figura 35 ilustra o funcionamento de cada uma dessas estratégias. Como saída, tem-se a posição de cada nível em seus respectivos recipientes e a quantidade de recipientes utilizados. A Fase 2, de acordo com cada estratégia, é descrita nos Algoritmos 2 (BF), 3 (FF) e 4 (WF).

Com a descrição das estratégias usadas, percebe-se que a combinação das duas estratégias de ordenação dos itens com as três estratégias de posicionamento dos níveis nos recipientes, resulta em seis diferentes heurísticas. É possível, então, defini-las da seguinte maneira:

- BL_hBF : ordena os itens em ordem decrescente de altura, utiliza uma variação da estratégia

Algoritmo 2: Fase 2 – *Best-Fit*

Entrada: $k, h_j^{nível}, H$.
 k : quantidade de níveis;
 $h_j^{nível}$: altura de cada nível ($j = 1, \dots, k$);
 H : altura dos recipientes;
Saída: m, l_i^{rec} .
 m : quantidade de recipientes;
 l_i^{rec} : lista de níveis alocados em cada recipiente e suas posições ($i = 1, \dots, m$);

```

1 Início
2    $m \leftarrow 1$ ; //recipiente corrente
3   Crie a lista vazia  $l_m^{rec}$ ;
4    $h_m^{rec} \leftarrow H$ ; //espaço inutilizado no recipiente  $m$  inicialmente
5   para  $j = 1$  até  $k$  faça
6      $i \leftarrow 1$ ;
7      $Aloc \leftarrow \text{Falso}$ ; //diz se o nível  $j$  pode ser alocado em algum recipiente existente
8     enquanto  $i \leq m$  e  $Aloc = \text{Falso}$  faça
9       se  $h_i^{rec} \geq h_j^{nível}$  então
10         $Aloc \leftarrow \text{Verdadeiro}$ ;
11      fim-se
12      senão
13         $i \leftarrow i + 1$ ;
14      fim-se
15    fim-enquanto
16    se  $Aloc = \text{Falso}$  então
17       $m \leftarrow m + 1$ ;
18      Crie a lista vazia  $l_m^{rec}$ ;
19       $h_m^{rec} \leftarrow H$ ;
20    fim-se
21     $h_i^{rec} \leftarrow h_i^{rec} - h_j^{nível}$ ;
22     $l_i^{rec}$  recebe o nível  $j$  posicionado no recipiente  $i$ ;
23    Ordene os recipientes de 1 a  $m$  em ordem crescente de  $h_i^{rec}$ ;
24  fim-para
25  Devolva  $m, l_i^{rec}$  ( $i = 1, \dots, m$ );
26 Fim

```

Bottom-Left para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *Best-Fit* para o posicionamento dos níveis (Algoritmo 2);

- BL_hFF : ordena os itens em ordem decrescente de altura, utiliza uma variação da estratégia *Bottom-Left* para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *First-Fit* para o posicionamento dos níveis (Algoritmo 3);
- BL_hWF : ordena os itens em ordem decrescente de altura, utiliza uma variação da estratégia *Bottom-Left* para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *Worst-Fit* para o posicionamento dos níveis (Algoritmo 4);
- BL_rBF : ordena os itens em ordem decrescente de raio, utiliza uma variação da estratégia *Bottom-Left* para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *Best-Fit* para o

Algoritmo 3: Fase 2 – *First-Fit***Entrada:** $k, h_j^{nível}, H$. k : quantidade de níveis; $h_j^{nível}$: altura de cada nível ($j = 1, \dots, k$); H : altura dos recipientes;**Saída:** m, l_i^{rec} . m : quantidade de recipientes; l_i^{rec} : lista de níveis alocados em cada recipiente e suas posições ($i = 1, \dots, m$);**1 Início**2 $m \leftarrow 1$; //recipiente corrente3 Crie a lista vazia l_m^{rec} ;4 $h_m^{rec} \leftarrow H$; //espaço inutilizado no recipiente m inicialmente5 **para** $j = 1$ até k **faça**6 $i \leftarrow 1$;7 $Aloc \leftarrow \text{Falso}$; //diz se o nível j pode ser alocado em algum recipiente existente8 **enquanto** $i \leq m$ e $Aloc = \text{Falso}$ **faça**9 **se** $h_i^{rec} \geq h_j^{nível}$ **então**10 $Aloc \leftarrow \text{Verdadeiro}$;11 **fim-se**12 **senão**13 $i \leftarrow i + 1$;14 **fim-se**15 **fim-enquanto**16 **se** $Aloc = \text{Falso}$ **então**17 $m \leftarrow m + 1$;18 Crie a lista vazia l_m^{rec} ;19 $h_m^{rec} \leftarrow H$;20 **fim-se**21 $h_i^{rec} \leftarrow h_i^{rec} - h_j^{nível}$;22 l_i^{rec} recebe o nível j posicionado no recipiente i ;23 **fim-para**24 **Devolva** m, l_i^{rec} ($i = 1, \dots, m$);**25 Fim**

posicionamento dos níveis (Algoritmo 2);

- BL_rFF : ordena os itens em ordem decrescente de raio, utiliza uma variação da estratégia *Bottom-Left* para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *First-Fit* para o posicionamento dos níveis (Algoritmo 3);
- BL_rWF : ordena os itens em ordem decrescente de raio, utiliza uma variação da estratégia *Bottom-Left* para o posicionamento dos itens (Algoritmo 1) e a estratégia *Worst-Fit* para o posicionamento dos níveis (Algoritmo 4).

Algoritmo 4: Fase 2 – *Worst-Fit*

Entrada: k, h_j^{nivel}, H .
 k : quantidade de níveis;
 h_j^{nivel} : altura de cada nível ($j = 1, \dots, k$);
 H : altura dos recipientes;
Saída: m, l_i^{rec} .
 m : quantidade de recipientes;
 l_i^{rec} : lista de níveis alocados em cada recipiente e suas posições ($i = 1, \dots, m$);

```

1 Início
2    $m \leftarrow 1$ ; //recipiente corrente
3   Crie a lista vazia  $l_m^{rec}$ ;
4    $h_m^{rec} \leftarrow H$ ; //espaço inutilizado no recipiente  $m$  inicialmente
5   para  $j = 1$  até  $k$  faça
6     Seja  $i$  o recipiente com maior valor  $h_t^{rec}$ , para  $t = 1, \dots, m$ ;
7     se  $h_i^{rec} < h_j^{nivel}$  então
8        $m \leftarrow m + 1$ ;
9       Crie a lista vazia  $l_m^{rec}$ ;
10       $h_m^{rec} \leftarrow H$ ;
11       $i \leftarrow m$ 
12    fim-se
13     $h_i^{rec} \leftarrow h_i^{rec} - h_j^{nivel}$ ;
14     $l_i^{rec}$  recebe o nível  $j$  posicionado no recipiente  $i$ ;
15  fim-para
16  Devolva  $m, l_i^{rec}$  ( $i = 1, \dots, m$ );
17 Fim

```

5.2 Método Exato

Os métodos exatos de resolução são aqueles que encontram uma solução ótima do problema, caso exista. Isso significa que a solução encontrada satisfaz as restrições de maneira ótima. É interessante ressaltar que, mesmo existindo um algoritmo exato de resolução do problema, uma solução ótima pode não ser encontrada em tempo hábil, levando anos ou décadas. Nesse caso, é preciso avaliar a viabilidade do método escolhido. Para os problemas considerados NP-difíceis, como o tratado nesta pesquisa, esse método é aplicado, em sua maioria, para problemas de pequeno e médio porte.

Uma das alternativas de resolução do problema apresentado neste trabalho é através do uso de um *solver* de otimização global para problemas de programação não-linear inteira mista para resolução do modelo proposto (Seção 4.3). A Seção 5.2.1 explica como é feita a estimativa do número de níveis e recipientes do problema.

5.2.1 Estimativa do número de níveis e recipientes

Como explicado na Seção 4.1, a quantidade de níveis e recipientes são considerados parâmetros do modelo. Assim, é necessário fazer uma estimativa dessas quantidades para que esses parâmetros sejam passados para o modelo e o mesmo seja resolvido. Para o cálculo da

Figura 35 – Ilustração da Fase 2 da heurística básica considerando as três estratégias de alocação dos níveis.

Fonte – Elaborada pela autora.

estimativa da quantidade de níveis e recipientes pode ser utilizada qualquer uma das heurísticas propostas na Seção 5.1.2 associada a uma média de ocupação do recipiente com base no item de menor altura.

Algoritmo 5: Quantidade de níveis (p) e recipientes (m)

Entrada: n, H, h, k, p^t, t .

n : quantidade de itens;

h_i : altura do item i ($i = 1, \dots, n$);

k : número total de níveis dado pela heurística;

p^t : número máximo de níveis por recipiente dado pela heurística;

t : número total de recipientes dado pela heurística;

H : altura do recipiente;

Saída: p, m .

p : quantidade total de níveis;

m : quantidade total de recipientes;

```

1 Início
2    $h_{min} \leftarrow \min\{h_i\}$ , para  $i = 1, \dots, n$ ;
3    $n_{max} \leftarrow \frac{H}{h_{min}}$ ;
4    $media \leftarrow \frac{k + n_{max}}{2}$ ;
5   se  $media > p^t + 1$  então
6      $k \leftarrow p^t + 1$ ;
7      $t \leftarrow \left( \frac{media * t}{p^t + 1} \right) + 1$ ;
8   fim-se
9    $p \leftarrow \min\{k, media, n_{max}\}$ ;
10   $m \leftarrow \min\{t, n\}$ ;
11  Devolva  $p, m$ ;
12 Fim
  
```

A partir dos dados recebidos pela heurística (número de níveis e recipientes), a estimativa da quantidade de recipientes e de níveis é, então, feita da seguinte maneira: primeiro calcula-se o número máximo de níveis que podem ser inseridos no recipiente com base no item de menor altura (h_{min}), dado por $n_{max} = \frac{H}{h_{min}}$. Depois disso, para estabelecer a quantidade de níveis é calculada uma média entre a quantidade de níveis fornecida pela heurística (k) e n_{max} , ou seja, $media = \frac{k + n_{max}}{2}$. A quantidade de recipientes é dada pelo mínimo entre a quantidade de recipientes fornecida pela heurística (t) e o número de itens a ser empacotado. Para que o número de níveis em cada recipiente não seja muito grande, limita-se esse número ao número máximo de níveis por recipiente encontrado pelo método heurístico mais um ($p^t + 1$). Dessa forma, caso $media$ seja maior que esse valor, a quantidade de níveis recebe $p^t + 1$ e a quantidade de recipientes é recalculada. Vale destacar que esse número máximo de níveis por recipiente é dado pelo maior número encontrado ao final da resolução de todas as instâncias desejadas e não para cada instância separadamente. Essa estimativa é resumida no Algoritmo 5.

Sabe-se que, dependendo da quantidade de níveis e recipientes do problema, o número de

restrições pode aumentar, demorando mais para encontrar uma solução ótima. Porém, ao utilizar uma quantidade muito pequena, o espaço de busca também se torna pequeno, sendo difícil para o *solver* encontrar a direção de busca que leva ao menor número de recipientes. Dessa forma, fazer uma estimativa que utiliza a média entre o máximo necessário e o mínimo encontrado até o momento, garante que o *solver* terá espaço suficiente para se movimentar e o número de restrições não sofrerá um aumento muito grande.

RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais realizados para os métodos propostos. O modelo proposto no Capítulo 4 foi codificado na linguagem de modelagem Julia 0.5¹ e foi utilizado o pacote JuMP². JuMP é uma linguagem de modelagem para otimização matemática incorporada em Julia que suporta *solvers* comerciais e *open-source* para solucionar uma variedade de problemas, incluindo os de otimização não-linear inteira mista. O pacote otimizador SCIP 4.0.0³ foi utilizado dentro do pacote JuMP com o objetivo de resolver problemas de otimização global. Já as heurísticas propostas na Seção 5.1 foram implementadas em linguagem C. Todos os experimentos computacionais foram realizados em um computador Intel Core i7-4790 de 3.60 GHz, 15.6 GB de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 16.04 LTS. Na Seção 6.1 são apresentadas as instâncias utilizadas, na Seção 6.2 são descritos os resultados obtidos pelas heurísticas, na Seção 6.3 são apresentados os resultados obtidos pelo método exato e na Seção 6.4 é feita a comparação entre os resultados obtidos pelos métodos heurísticos e exato.

6.1 Instâncias

Como já mencionado anteriormente, o problema de empacotamento em níveis tem sido pouco abordado na literatura. Dessa forma, não foram encontradas disponíveis instâncias que pudessem ser utilizadas para a realização dos testes computacionais. Então, criamos nossas próprias instâncias para verificar o funcionamento dos métodos de resolução propostos, bem como compará-los entre si.

Considera-se nesta pesquisa que os recipientes são de mesmo tamanho (veja Seção 4). Para definir suas dimensões, foi aplicada uma escala em relação aos fornos encontrados em

¹ <http://julialang.org/publications/julia-fresh-approach-BEKS.pdf> - Último acesso: 23/01/2018.

² <https://github.com/JuliaOpt/JuMP.jl> - Último acesso: 10/04/2018.

³ <https://github.com/SCIP-Interfaces/SCIP.jl> - Último acesso: 26/01/2018.

indústrias de cerâmica. Assim, os recipientes onde são posicionados os itens possuem 80 de largura, 80 de comprimento e 120 de altura.

As instâncias foram criadas para o caso em que os raios e as alturas dos itens são variáveis. Também existem duas outras possibilidades: raios variáveis e alturas iguais (nesse caso, o problema reduz-se ao problema de empacotamento de círculos) e raios iguais e alturas variáveis. Estes dois últimos casos não serão abordados nesta pesquisa. As propostas de resolução presentes neste trabalho resolvem as três situações problema, mas foram pensadas para o caso em que tanto as alturas quanto os raios dos itens são variáveis.

A definição das instâncias é feita sorteando tanto o raio quanto a altura dos itens. No caso do raio, são estipulados três tamanhos diferentes: raio pequeno, que ocupa entre 1% e 25% da base do recipiente; raio médio, que ocupa entre 26% e 50% da base do recipiente e raio grande, que ocupa entre 51% e 75% da base do recipiente. Para a altura, são estabelecidos os mesmos tamanhos, pequeno, médio e grande, com as mesmas porcentagens de ocupação; porém, nesse caso, a altura do item ocupa uma determinada porcentagem da altura do recipiente. Além desses três possíveis tamanhos, também é utilizado nas instâncias o raio (ou altura) variável, que corresponde ao tamanho pequeno, médio e grande juntos, ou seja, os raios (ou alturas) dos itens podem ocupar entre 1% e 75% da base (ou altura) do recipiente. A ideia de se ocupar até 75% do recipiente, no máximo, vem da possibilidade de se conseguir combinações de empacotamento em que mais de um item é posicionado em um nível e mais de um nível é alocado em um recipiente.

Entendidos esses conceitos, é possível criar as classes de instâncias. As classes foram pensadas de modo a combinar os tamanhos dos raios e das alturas. Os tipos de itens que estão presentes em cada classe são descritos a seguir:

- A_MR_M – itens de alturas e raios médios;
- A_MR_{PG} – itens de alturas médias e raios pequenos e grandes;
- A_MR_V – itens de alturas médias e raios variáveis;
- $A_{PG}R_M$ – itens de alturas pequenas e grandes e raios médios;
- $A_{PG}R_{PG}$ – itens de alturas e raios pequenos e grandes;
- $A_{PG}R_V$ – itens de alturas pequenas e grandes e raios variáveis;
- A_VR_M – itens de alturas variáveis e raios médios;
- A_VR_{PG} – itens de alturas variáveis e raios pequenos e grandes;
- A_VR_V – itens de alturas e raios variáveis.

Foram escolhidas essas classes em particular para analisar como o método exato e as heurísticas se comportam quando os itens são semelhantes (apenas raios - ou alturas - médios),

quando os raios (ou alturas) têm grande variação (pequenos e grandes) e quando os raios (ou alturas) estão bem distribuídos (entre pequenos, médios e grandes).

A nomenclatura das instâncias é dada pelo nome da classe seguida por uma numeração de 1 a 17. O número de itens em cada instância é dado por este número multiplicado por 6. No caso das instâncias que têm itens com raios (ou alturas) pequenos e grandes, metade deles tem raios (ou alturas) pequenos e a outra metade tem raios (ou alturas) grandes. Para o caso de instâncias que têm itens com raio (ou alturas) pequenos, médios e grandes, um terço deles tem raios (ou alturas) pequenos, um terço tem raios (ou alturas) médios e o último terço tem raios (ou alturas) grandes. Tem-se, portanto, um total de 153 instâncias, com o número de itens variando de 6 a 20004. Os dados destas instâncias estão disponíveis em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/goncalves-2018/>.

Tabela 1 – Exemplificação da proporção entre os raios dos itens.

$A_MR_{PG}1$		A_MR_V1	
h_i	r_i	h_i	r_i
60.0	3.2	40.8	2.4
36.0	7.2	33.6	5.6
38.4	9.6	56.4	12.8
44.4	24.8	31.2	13.6
31.2	26.4	49.2	24.0
36.0	28.0	44.4	26.4

A Tabela 1 exemplifica numericamente a maneira como o tamanho dos raios são distribuídos para duas instâncias: $A_MR_{PG}1$ e A_MR_V1 , considerando um recipiente com dimensões fixas (80,80,120). Tem-se então, a altura (h_i) e raio (r_i) de cada item das respectivas instâncias. A instância $A_MR_{PG}1$ é composta por seis itens, todos de altura média e raio variando entre pequeno e grande. Nesse caso, é possível perceber que os três primeiros raios (em vermelho) são de tamanho pequeno e os três últimos (em azul) são grandes. Ou seja, essa instância possui metade de seus itens com raio pequeno e a outra metade com raio grande. No caso da instância A_MR_V1 (também com seis itens), seus itens possuem altura média e raio variável (pequeno, médio e grande). Ao observar a tabela, nota-se que a instância é composta por dois itens com raio pequeno (em vermelho), dois itens com raio médio (em verde) e dois itens com raio grande (em azul), representando um terço de raio pequeno, um terço de raio médio e um terço de raio grande. Desse exemplo constata-se que as instâncias precisam conter um número de itens múltiplo de seis para que a proporção em relação às alturas e/ou raios seja garantida.

6.2 Comparação entre as heurísticas propostas

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos ao resolver as 153 instâncias criadas utilizando os métodos heurísticos propostos nesta pesquisa (veja Seção 5.1).

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para as instâncias da classe A_MR_M , a Tabela 3, para as instâncias de classe A_MR_{PG} , enquanto a Tabela 4 mostra os resultados das instâncias de classe A_MR_V . Os resultados obtidos para os itens da classe $A_{PG}R_M$ são apresentados na Tabela 5; para a classe $A_{PG}R_{PG}$, na Tabela 6 e para a classe $A_{PG}R_V$ na Tabela 7. De maneira análoga, as tabelas de 8 a 10 mostram os resultados obtidos para as classe A_VR_M , A_VR_{PG} e A_VR_V , respectivamente. A quantidade de níveis utilizados em cada recipiente para cada instância é apresentada no Apêndice A. A ilustração de cada solução está disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/goncalves-2018/>.

Em cada tabela tem-se na primeira coluna (Instância) o nome da instância e na segunda coluna a quantidade de itens (Número itens). A quantidade de recipientes utilizados (Recip.) aparece nas colunas 3, 5, 7, 9, 11 e 13, e o tempo computacional gasto em segundos (Tempo) nas colunas 4, 6, 8, 12 e 14. Esses resultados, para cada uma das heurísticas, aparece nas colunas em que seus nomes são apresentados – BL_hBF , BL_hFF , BL_hWF , BL_rBF , BL_rFF e BL_rWF . A menor quantidade de recipientes e menor tempo gasto para resolver cada instância estão destacados em negrito. Caso todos empatem, não há destaque.

De um modo geral, é possível perceber que as heurísticas obtiveram um baixo tempo de execução, menor que 225 segundos no pior caso, mesmo para aquelas instâncias consideradas grandes, acima de 1000 itens. Além disso, em muitos casos, as heurísticas que utilizaram a ordenação em ordem decrescente de raio apresentaram um tempo de execução menor. Isso acontece principalmente com instâncias maiores, a partir de 2004 itens. Essa diferença de tempo já era esperada visto que, ao utilizar esse tipo de ordenação, a sequência de posicionamento dos itens no nível já está pré-definida, de certo modo, e a mudança de nível acontece com menos frequência. Ao ordenar por ordem decrescente de altura, há menos possibilidades de raios de mesmo tamanho ficarem próximos, ou dos raios maiores serem posicionados primeiro. Assim, as chances de não se conseguir empacotar um item e precisar usar outro nível é maior, o que aumenta o tempo gasto para se encontrar a solução.

Em relação à quantidade de recipientes utilizados, as heurísticas que utilizaram a ordenação em ordem decrescente de altura encontraram uma menor quantidade de recipientes, na maioria dos casos, em específico a heurística BL_hBF . As ilustrações de algumas das soluções obtidas pela heurística BL_hBF são apresentadas nas figuras 36 e 37. Para apenas seis instâncias – A_MR_M2 (veja Tabela 2), $A_MR_{PG}11$, $A_MR_{PG}12$, $A_MR_{PG}13$ (veja Tabela 3), $A_{PG}R_{PG}10$ e $A_{PG}R_{PG}17$ (veja Tabela 6) – as heurísticas com ordenação em ordem decrescente de raio encontraram um número menor de recipientes. No caso dessas heurísticas, ao fazer a ordenação pelo raio é possível conseguir uma combinação melhor, preenchendo de maneira mais satisfatória os

espaços do nível, necessitando, ao total, de menos recipientes. Essa diferença entre os resultados, para a instância $AMRM2$, pode ser conferida na Figura 38.

Portanto, pode-se concluir que as heurísticas que utilizam ordem decrescente de altura apresentaram um melhor resultado, com menor número de recipientes, e a que se destaca dentre essas heurísticas é a BL_hBF , que atingiu o menor número de recipientes mais vezes. Mesmo essas heurísticas gastando um tempo de execução maior que o tempo gasto pelas heurísticas que usam ordem decrescente de raio, esse tempo é considerado baixo – poucos segundos.

Figura 36 – Ilustração do resultado obtido pela heurística BL_hBF para a instância $A_{PG}RM3$.

Figura 37 – Ilustração do resultado obtido pela heurística BL_hBF para a instância $A_V R_M 5$.

(a) Resultado obtido pela heurística BL_hBF . (b) Resultado obtido pela heurística BL_rBF .Figura 38 – Ilustração dos resultados obtidos pelas heurísticas BL_hBF e BL_rBF para a instância A_MR_M2 .

Tabela 2 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio médio.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
A_MR_M1	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
A_MR_M2	12	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
A_MR_M3	18	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
A_MR_M4	24	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
A_MR_M5	30	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
A_MR_M6	42	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
A_MR_M7	54	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00
A_MR_M8	102	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	9	<0,00	9	<0,00	9	<0,00
A_MR_M9	204	16	<0,00	16	<0,00	16	<0,00	18	<0,00	18	<0,00	18	<0,00
A_MR_M10	300	24	<0,00	24	<0,00	24	<0,00	27	<0,00	27	<0,00	27	<0,00
A_MR_M11	402	31	<0,00	31	<0,00	31	<0,00	34	<0,00	34	<0,00	34	<0,00
A_MR_M12	504	39	<0,00	39	<0,00	39	<0,00	44	<0,00	44	<0,00	44	<0,00
A_MR_M13	1002	77	<0,00	77	<0,00	77	<0,00	86	<0,00	86	<0,00	86	<0,00
A_MR_M14	2004	150	1,00	150	1,00	150	1,00	168	<0,00	168	1,00	168	<0,00
A_MR_M15	5004	378	8,00	378	8,00	378	8,00	423	4,00	423	4,00	423	4,00
A_MR_M16	10002	760	32,00	760	32,00	760	32,00	840	19,00	840	20,00	840	19,00
A_MR_M17	20004	1513	130,00	1513	135,00	1513	134,00	1690	80,00	1690	85,00	1691	80,00

Tabela 3 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio pequeno e grande.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$A_MR_{PG}1$	6	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
$A_MR_{PG}2$	12	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
$A_MR_{PG}3$	18	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_MR_{PG}4$	24	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_MR_{PG}5$	30	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
$A_MR_{PG}6$	42	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00
$A_MR_{PG}7$	54	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00
$A_MR_{PG}8$	102	17	<0,00	17	<0,00	17	<0,00	17	<0,00	17	<0,00	18	<0,00
$A_MR_{PG}9$	204	34	<0,00	34	<0,00	34	<0,00	34	<0,00	34	<0,00	34	<0,00
$A_MR_{PG}10$	300	48	<0,00	48	<0,00	48	<0,00	48	<0,00	48	<0,00	48	<0,00
$A_MR_{PG}11$	402	65	<0,00	65	<0,00	65	<0,00	64	<0,00	64	<0,00	64	<0,00
$A_MR_{PG}12$	504	80	<0,00	80	<0,00	80	<0,00	80	<0,00	80	<0,00	79	<0,00
$A_MR_{PG}13$	1002	159	<0,00	159	<0,00	159	<0,00	158	<0,00	158	<0,00	158	<0,00
$A_MR_{PG}14$	2004	304	2,00	304	2,00	304	2,00	305	<0,00	305	<0,00	305	<0,00
$A_MR_{PG}15$	5004	755	13,00	755	13,00	755	13,00	755	2,00	755	2,00	755	2,00
$A_MR_{PG}16$	10002	1539	52,00	1539	52,00	1539	52,00	1541	8,00	1541	8,00	1541	8,00
$A_MR_{PG}17$	20004	3060	217,00	3060	217,00	3060	215,00	3060	33,00	3060	32,00	3060	32,00

Tabela 4 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura média e raio variável.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
A_MR_V1	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
A_MR_V2	12	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
A_MR_V3	18	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
A_MR_V4	24	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
A_MR_V5	30	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00
A_MR_V6	42	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
A_MR_V7	54	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00
A_MR_V8	102	12	<0,00	12	<0,00	12	<0,00	13	<0,00	13	<0,00	13	<0,00
A_MR_V9	204	23	<0,00	23	<0,00	23	<0,00	23	<0,00	23	<0,00	23	<0,00
A_MR_V10	300	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00
A_MR_V11	402	45	<0,00	45	<0,00	45	<0,00	46	<0,00	46	<0,00	46	<0,00
A_MR_V12	504	56	<0,00	56	<0,00	56	<0,00	58	<0,00	58	<0,00	59	<0,00
A_MR_V13	1002	106	<0,00	106	<0,00	106	<0,00	107	<0,00	107	<0,00	107	<0,00
A_MR_V14	2004	208	1,00	208	1,00	208	1,00	214	<0,00	214	<0,00	215	<0,00
A_MR_V15	5004	522	8,00	522	8,00	522	8,00	533	1,00	533	1,00	533	1,00
A_MR_V16	10002	1011	33,00	1011	33,00	1011	33,00	1026	5,00	1026	6,00	1027	6,00
A_MR_V17	20004	2027	142,00	2027	143,00	2027	144,00	2078	23,00	2078	23,00	2078	23,00

Tabela 5 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio médio.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$APGR_M1$	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
$APGR_M2$	12	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
$APGR_M3$	18	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$APGR_M4$	24	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$APGR_M5$	30	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
$APGR_M6$	42	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00
$APGR_M7$	54	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00
$APGR_M8$	102	9	<0,00	9	<0,00	9	<0,00	16	<0,00	16	<0,00	16	<0,00
$APGR_M9$	204	20	<0,00	20	<0,00	20	<0,00	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00
$APGR_M10$	300	27	<0,00	27	<0,00	27	<0,00	42	<0,00	42	<0,00	42	<0,00
$APGR_M11$	402	35	<0,00	35	<0,00	35	<0,00	56	<0,00	56	<0,00	56	<0,00
$APGR_M12$	504	46	<0,00	46	<0,00	46	<0,00	72	<0,00	72	<0,00	72	<0,00
$APGR_M13$	1002	95	<0,00	95	<0,00	95	<0,00	152	<0,00	152	<0,00	152	<0,00
$APGR_M14$	2004	180	1,00	180	1,00	180	1,00	275	0,00	275	0,00	275	1,00
$APGR_M15$	5004	446	8,00	446	8,00	446	8,00	720	4,00	720	4,00	720	5,00
$APGR_M16$	10002	886	33,00	886	33,00	886	33,00	1425	19,00	1425	19,00	1425	19,00
$APGR_M17$	20004	1779	131,00	1779	131,00	1779	135,00	2802	78,00	2802	79,00	2802	77,00

Tabela 6 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio pequeno e grande.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$A_{PGRPG}1$	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
$A_{PGRPG}2$	12	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
$A_{PGRPG}3$	18	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_{PGRPG}4$	24	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
$A_{PGRPG}5$	30	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00
$A_{PGRPG}6$	42	10	<0,00	10	<0,00	10	<0,00	11	<0,00	11	<0,00	11	<0,00
$A_{PGRPG}7$	54	11	<0,00	11	<0,00	11	<0,00	12	<0,00	12	<0,00	12	<0,00
$A_{PGRPG}8$	102	22	<0,00	22	<0,00	22	<0,00	23	<0,00	23	<0,00	23	<0,00
$A_{PGRPG}9$	204	37	<0,00	37	<0,00	37	<0,00	38	<0,00	38	<0,00	38	<0,00
$A_{PGRPG}10$	300	56	<0,00	56	<0,00	56	<0,00	55	<0,00	55	<0,00	55	<0,00
$A_{PGRPG}11$	402	71	<0,00	71	<0,00	71	<0,00	72	<0,00	72	<0,00	72	<0,00
$A_{PGRPG}12$	504	98	<0,00	98	<0,00	98	<0,00	100	<0,00	100	<0,00	100	<0,00
$A_{PGRPG}13$	1002	183	<0,00	183	<0,00	183	<0,00	187	<0,00	187	<0,00	187	<0,00
$A_{PGRPG}14$	2004	346	2,00	346	2,00	346	2,00	363	<0,00	363	<0,00	363	<0,00
$A_{PGRPG}15$	5004	852	14,00	852	14,00	852	14,00	877	2,00	877	2,00	877	2,00
$A_{PGRPG}16$	10002	1815	57,00	1815	57,00	1815	56,00	1823	8,00	1823	8,00	1823	8,00
$A_{PGRPG}17$	20004	3529	218,00	3529	220,00	3529	218,00	3518	32,00	3518	32,00	3518	32,00

Tabela 7 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura pequena e grande e raio variável.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$APGR_V1$	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
$APGR_V2$	12	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
$APGR_V3$	18	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$APGR_V4$	24	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
$APGR_V5$	30	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00
$APGR_V6$	42	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00
$APGR_V7$	54	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	11	<0,00	11	<0,00	11	<0,00
$APGR_V8$	102	14	<0,00	14	<0,00	14	<0,00	20	<0,00	20	<0,00	20	<0,00
$APGR_V9$	204	29	<0,00	29	<0,00	29	<0,00	41	<0,00	41	<0,00	41	<0,00
$APGR_V10$	300	41	<0,00	41	<0,00	41	<0,00	54	<0,00	54	<0,00	54	<0,00
$APGR_V11$	402	51	<0,00	51	<0,00	51	<0,00	66	<0,00	66	<0,00	66	<0,00
$APGR_V12$	504	62	<0,00	62	<0,00	62	<0,00	85	<0,00	85	<0,00	85	<0,00
$APGR_V13$	1002	125	<0,00	125	<0,00	125	<0,00	161	<0,00	161	<0,00	161	<0,00
$APGR_V14$	2004	246	1,00	246	1,00	246	1,00	286	<0,00	286	<0,00	286	<0,00
$APGR_V15$	5004	607	8,00	607	8,00	607	8,00	694	1,00	694	1,00	694	1,00
$APGR_V16$	10002	1187	34,00	1187	34,00	1187	35,00	1407	5,00	1407	5,00	1407	5,00
$APGR_V17$	20004	2327	139,00	2327	141,00	2327	140,00	2641	23,00	2641	23,00	2641	23,00

Tabela 8 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio médio.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$A_V R_M 1$	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
$A_V R_M 2$	12	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
$A_V R_M 3$	18	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00
$A_V R_M 4$	24	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_V R_M 5$	30	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00
$A_V R_M 6$	42	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00
$A_V R_M 7$	54	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	9	<0,00	9	<0,00	9	<0,00
$A_V R_M 8$	102	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	15	<0,00	15	<0,00	16	<0,00
$A_V R_M 9$	204	16	<0,00	16	<0,00	16	<0,00	31	<0,00	31	<0,00	31	<0,00
$A_V R_M 10$	300	21	<0,00	21	<0,00	22	<0,00	38	<0,00	38	<0,00	38	<0,00
$A_V R_M 11$	402	28	<0,00	28	<0,00	28	<0,00	52	<0,00	52	<0,00	55	<0,00
$A_V R_M 12$	504	36	<0,00	36	<0,00	37	<0,00	70	<0,00	70	<0,00	70	<0,00
$A_V R_M 13$	1002	69	<0,00	69	<0,00	70	<0,00	123	<0,00	123	<0,00	124	<0,00
$A_V R_M 14$	2004	141	1,00	141	1,00	142	1,00	271	<0,00	271	<0,00	274	<0,00
$A_V R_M 15$	5004	341	8,00	341	8,00	343	9,00	610	5,00	610	4,00	613	4,00
$A_V R_M 16$	10002	680	33,00	680	33,00	682	33,00	1216	19,00	1216	19,00	1220	20,00
$A_V R_M 17$	20004	1368	131,00	1369	131,00	1372	130,00	2459	78,00	2459	78,00	2466	77,00

Tabela 9 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio pequeno e grande.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$A_V R_{PG}1$	6	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
$A_V R_{PG}2$	12	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_V R_{PG}3$	18	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_V R_{PG}4$	24	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00
$A_V R_{PG}5$	30	5	<0,00	5	<0,00	5	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	7	<0,00
$A_V R_{PG}6$	42	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	8	<0,00	9	<0,00
$A_V R_{PG}7$	54	9	<0,00	9	<0,00	10	<0,00	11	<0,00	11	<0,00	12	<0,00
$A_V R_{PG}8$	102	15	<0,00	15	<0,00	15	<0,00	18	<0,00	18	<0,00	19	<0,00
$A_V R_{PG}9$	204	32	<0,00	32	<0,00	32	<0,00	33	<0,00	33	<0,00	37	<0,00
$A_V R_{PG}10$	300	45	<0,00	45	<0,00	45	<0,00	49	<0,00	49	<0,00	53	<0,00
$A_V R_{PG}11$	402	56	<0,00	56	<0,00	57	<0,00	61	<0,00	61	<0,00	65	<0,00
$A_V R_{PG}12$	504	67	<0,00	67	<0,00	68	<0,00	72	<0,00	72	<0,00	76	<0,00
$A_V R_{PG}13$	1002	146	<0,00	146	<0,00	147	<0,00	147	<0,00	147	<0,00	151	<0,00
$A_V R_{PG}14$	2004	283	2,00	283	2,00	286	2,00	288	<0,00	288	<0,00	296	<0,00
$A_V R_{PG}15$	5004	693	13,00	693	13,00	696	13,00	711	1,00	711	2,00	724	2,00
$A_V R_{PG}16$	10002	1355	56,00	1355	56,00	1359	56,00	1385	8,00	1385	8,00	1405	8,00
$A_V R_{PG}17$	20004	2683	223,00	2683	224,00	2691	223,00	2731	32,00	2732	33,00	2770	32,00

Tabela 10 – Resultados numéricos obtidos pelas heurísticas para os itens de altura variável e raio variável.

Instância	Número itens	BL_hBF		BL_hFF		BL_hWF		BL_rBF		BL_rFF		BL_rWF	
		Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
$A_V R_V 1$	6	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00	1	<0,00
$A_V R_V 2$	12	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00	2	<0,00
$A_V R_V 3$	18	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_V R_V 4$	24	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	4	<0,00
$A_V R_V 5$	30	3	<0,00	3	<0,00	3	<0,00	4	<0,00	4	<0,00	5	<0,00
$A_V R_V 6$	42	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	7	<0,00	7	<0,00	7	<0,00
$A_V R_V 7$	54	6	<0,00	6	<0,00	6	<0,00	9	<0,00	9	<0,00	9	<0,00
$A_V R_V 8$	102	12	<0,00	12	<0,00	12	<0,00	20	<0,00	20	<0,00	21	<0,00
$A_V R_V 9$	204	23	<0,00	23	<0,00	24	<0,00	27	<0,00	27	<0,00	29	<0,00
$A_V R_V 10$	300	31	<0,00	31	<0,00	31	<0,00	35	<0,00	35	<0,00	38	<0,00
$A_V R_V 11$	402	40	<0,00	40	<0,00	41	<0,00	51	<0,00	52	<0,00	54	<0,00
$A_V R_V 12$	504	51	<0,00	51	<0,00	52	<0,00	63	<0,00	63	<0,00	67	<0,00
$A_V R_V 13$	1002	95	<0,00	95	<0,00	95	<0,00	112	<0,00	113	<0,00	122	<0,00
$A_V R_V 14$	2004	186	1,00	186	1,00	188	1,00	213	<0,00	213	<0,00	222	<0,00
$A_V R_V 15$	5004	472	8,00	472	8,00	474	8,00	525	1,00	526	1,00	546	1,00
$A_V R_V 16$	10002	906	35,00	906	36,00	914	37,00	1061	5,00	1061	5,00	1077	6,00
$A_V R_V 17$	20004	1821	141,00	1821	140,00	1825	139,00	2063	23,00	2065	23,00	2123	24,00

Em resumo às tabelas, tem-se a Tabela 11. Nesta tabela é apresentada na primeira coluna a classe de instâncias (Instâncias), o número de vezes que as heurísticas que utilizam ordenação por altura e ordenação por raio encontraram a mesma quantidade de recipientes como solução (Mesma quant. recip.) na segunda coluna, e nas terceira e quarta colunas, respectivamente, o número de vezes que a ordenação por altura (Ord. por altura) e ordenação por raio (Ord. por raio) encontraram sozinhas a menor quantidade de recipientes. Caso a ordenação escolhida não encontre o menor resultado nenhuma vez, isso é destacado na tabela por -. Dentre as soluções obtidas, alguns casos específicos são destacados.

Tabela 11 – Comparação entre as heurísticas propostas.

Instâncias	Mesma quant. de recip.	Menor quant. de recip.	
		Ord. por altura	Ord. por raio
A_MR_M	5	11	1
$A_MR_{PG}^4$	11	3	2
A_MR_V	7	10	-
$A_{PG}R_M$	1	16	-
$A_{PG}R_{PG}$	4	11	2
$A_{PG}R_V$	2	15	-
$A_VR_M^5$	2	8	-
$A_VR_{PG}^6$	2	5	-
$A_VR_V^7$	2	8	-

Observando a Tabela 11 fica mais fácil perceber que o uso da estratégia de ordenação por ordem decrescente de altura permite encontrar um menor número de recipientes para posicionar todos os itens mais vezes que ordenação por ordem decrescente de raio.

6.3 Resultados obtidos pelo método exato

Os resultados obtidos por meio do método exato ao resolver 54 instâncias das 153, aquelas com quantidade de itens variando de 6 a 42 (de todas as classes), são apresentados nesta seção. Como o tempo gasto pelo método exato para resolver as instâncias tende a crescer com o número de variáveis, optamos por resolver as que tem menor quantidade de itens. Como já mencionado anteriormente, foi incorporado à linguagem de modelagem Julia 0.5, um *solver* de otimização global, SCIP 4.0.0, usado para resolver problemas de programação não-linear inteira mista. O tempo limite de execução foi estipulado em 3600 segundos.

⁴ Para uma instância, a heurística BL_rWF encontrou o pior resultado.

⁵ As heurísticas BL_hBF e BL_hFF encontraram o melhor resultado para 6 casos. A heurística BL_hBF encontrou sozinha a menor quantidade de recipientes em um caso.

⁶ As heurísticas BL_rFF e BL_rWF encontraram maior número de recipientes para uma instância, e, para outra instância, apenas a heurística BL_rWF encontrou o pior resultado.

⁷ As heurísticas BL_hBF e BL_hFF encontraram a menor quantidade de recipientes para 7 instâncias.

As estimativas das quantidades de níveis e recipientes foram calculadas baseadas nos resultados obtidos pela heurística BL_hBF , a qual apresentou melhores resultados quando comparada às outras heurísticas propostas. Para as instâncias avaliadas, a heurística encontrou um número máximo de quatro níveis por recipiente. Assim, p^t recebe quatro e, no caso do método exato, a quantidade de níveis por recipiente é limitada a cinco. Vale destacar que testes preliminares com outras estimativas de níveis e recipientes foram realizados; porém, o que apresentou melhor resultado foi com o uso da heurística BL_hBF .

A Tabela 12 apresenta na primeira coluna o nome da instância (Instância) seguido da quantidade de itens (No. itens) de cada uma delas. A terceira e quarta colunas mostram, respectivamente, a estimativa de recipientes (m) e estimativa de níveis (p) usadas inicialmente (veja Seção 5.2.1). As colunas cinco e seis apresentam a qualidade da solução obtida (Solução) – ótima (O) ou factível (F) – e a quantidade de recipientes (Recip.). Nas colunas 7, 8, 9 e 10 são mostradas as quantidades de recipientes com 1, 2, 3 ou 4 níveis, respectivamente (Quantidade de recipientes com 1Niv., 2Niv., 3Niv., 4Niv.). Se não houver nenhum recipiente com uma determinada quantidade de níveis, isso é indicado por -. Por fim, na coluna 11, mostra-se o tempo gasto em segundos (Tempo) pelo *solver*. Quando é atingido o tempo de 3600 segundos, isso é indicado na tabela por TL. Caso nenhuma solução seja encontrada, a representação da solução, quantidade de recipientes e níveis é dada por *. As melhores soluções e tempo de execução estão destacados em negrito. As soluções ótimas encontradas são ilustradas no Apêndice B e as soluções factíveis estão disponíveis em <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/goncalves-2018/>.

Observando a Tabela 12, percebe-se que o método exato encontrou solução ótima para 16 das 54 instâncias analisadas e 20 soluções factíveis. Para os outros casos nem sequer uma solução factível foi encontrada. É possível que isso aconteça porque a estimativa de níveis e recipientes reduz o espaço de busca e o *solver* não consegue se movimentar de modo que ele encontre a direção de busca que leve ao ótimo. Em relação ao tempo de execução, apenas para as instâncias consideradas pequenas a solução foi encontrada em um curto período de tempo. Para a maior parte das instâncias, gastou-se os 3600 segundos estipulados como tempo limite de execução.

Tabela 12 – Resultados numéricos obtidos pelo método exato.

Instância	No. itens			Solução	Recip.	Quantidade de recipientes com				Tempo
		<i>m</i>	<i>p</i>			1 Niv.	2 Niv.	3 Niv.	4 Niv.	
$AMRM1$	6	1	1	O	1	1	-	-	-	6,32
$AMRM2$	12	2	3	O	1	-	1	-	-	107,34
$AMRM3$	18	2	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRM4$	24	2	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRM5$	30	3	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRM6$	42	4	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRPG1$	6	2	3	O	2	-	1	1	-	6,08
$AMRPG2$	12	3	3	O	3	-	2	1	-	481,08
$AMRPG3$	18	5	3	F	5	-	5	-	-	TL
$AMRPG4$	24	4	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRPG5$	30	10	3	F	10	3	7	-	-	TL
$AMRPG6$	42	13	3	F	13	4	9	-	-	TL
$AMRV1$	6	1	2	O	1	-	1	-	-	5,92
$AMRV2$	12	2	3	O	2	-	2	-	-	13,95
$AMRV3$	18	2	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRV4$	24	3	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRV5$	30	5	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AMRV6$	42	10	3	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRM1$	6	1	2	O	1	-	1	-	-	5,98
$APGRM2$	12	2	3	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRM3$	18	2	5	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRM4$	24	3	5	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRM5$	30	16	5	F	15	4	7	4	-	TL
$APGRM6$	42	42	5	F	21	5	11	5	-	TL
$APGRPG1$	6	1	2	O	1	-	2	-	-	6,15
$APGRPG2$	12	3	5	O	3	1	1	1	-	57,59
$APGRPG3$	18	18	5	F	4	1	2	-	1	TL
$APGRPG4$	24	24	5	F	13	13	-	-	-	TL
$APGRPG5$	30	18	5	F	4	-	-	4	-	TL
$APGRPG6$	42	42	5	F	25	25	-	-	-	TL
$APGRV1$	6	1	2	O	1	-	1	-	-	5,97
$APGRV2$	12	3	4	O	3	-	2	1	-	19,51
$APGRV3$	18	5	5	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRV4$	24	23	5	F	4	-	4	-	-	TL
$APGRV5$	30	9	5	*	*	*	*	*	*	TL
$APGRV6$	42	38	5	F	33	32	1	-	-	TL
$AVRM1$	6	1	2	O	1	-	1	-	-	5,94
$AVRM2$	12	2	3	*	*	*	*	*	*	TL
$AVRM3$	18	2	4	*	*	*	*	*	*	TL
$AVRM4$	24	2	5	*	*	*	*	*	*	TL
$AVRM5$	30	30	5	F	15	4	7	3	1	TL
$AVRM6$	42	24	5	F	18	2	10	4	2	TL
$AVRPG1$	6	2	4	O	1	-	-	1	-	6,08
$AVRPG2$	12	6	5	O	3	-	2	1	-	230,49
$AVRPG3$	18	18	5	F	4	-	3	1	-	TL
$AVRPG4$	24	18	5	F	14	-	14	-	-	TL
$AVRPG5$	30	30	5	F	18	-	17	1	-	TL
$AVRPG6$	42	42	5	F	22	-	22	-	-	TL
$AVRV1$	6	2	3	O	1	1	-	-	-	6,03
$AVRV2$	12	2	5	O	2	-	2	-	-	6,98
$AVRV3$	18	3	5	*	*	*	*	*	*	TL
$AVRV4$	24	24	5	F	4	-	4	-	-	TL
$AVRV5$	30	30	5	F	20	19	1	-	-	TL
$AVRV6$	42	39	5	F	32	31	1	-	-	TL

6.4 Comparação entre os resultados obtidos pelo método exato e pela heurística BL_hBF

Ao comparar os resultados obtidos pelo método exato com aqueles obtidos pela heurística BL_hBF , que foi a que encontrou as melhores soluções, é fácil perceber que a heurística consegue

encontrar resultado para uma quantidade maior de itens e em um tempo computacional muito menor. Nesta seção vamos analisar mais detalhadamente os resultados entre os dois métodos considerando apenas as instâncias em que o método exato conseguiu encontrar alguma solução.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos pelo *solver* e a heurística BL_hBF . A primeira coluna (Instância) é composta pelo nome da instância, enquanto a segunda coluna (Número itens) diz a quantidade de itens de cada uma delas. Para os resultados do método exato, presentes nas colunas três, quatro e cinco, mostra-se a qualidade da solução (Sol.), a quantidade de recipientes usados (Recip.) e o tempo computacional gasto em segundos (Tempo). Os resultados obtidos pela BL_hBF – número de recipientes e tempo – são apresentados nas colunas seis (Recip.) e sete (Tempo), respectivamente.

Comparando os resultados apresentados na tabela, em relação ao tempo de execução, é possível perceber que todos os resultados da heurística foram encontrados em um tempo computacional menor que 0,00s. Já o método exato, no exemplo mais rápido, encontrou a solução em 5,92s. Assim, pode-se concluir que a heurística é eficiente na resolução. Analisando, agora, a qualidade das soluções, observa-se que, para a maioria das instâncias para as quais o método exato encontra uma solução ótima, a heurística também encontra (14 de 16 instâncias). Além disso, em todos os casos (para esse conjunto de instâncias) em que o método exato encontrou apenas uma solução factível, a heurística encontrou uma solução igual (4 de 20 instâncias) ou melhor (16 de 20 instâncias).

Tabela 13 – Resultados numéricos obtidos pelo método exato e pela heurística BL_hBF .

Instância	Número itens	Método exato			BL_hBF	
		Sol.	Recip.	Tempo	Recip.	Tempo
A_MR_M1	6	O	1	6,32	1	<0,00
$A_MR_{PG}1$	6	O	2	6,08	2	<0,00
A_MR_V1	6	O	1	5,92	1	<0,00
$A_{PG}R_M1$	6	O	1	5,98	1	<0,00
$A_{PG}R_{PG}1$	6	O	1	6,15	1	<0,00
$A_{PG}R_V1$	6	O	1	5,97	1	<0,00
A_VR_M1	6	O	1	5,94	1	<0,00
$A_VR_{PG}1$	6	O	1	6,08	2	<0,00
A_VR_V1	6	O	1	6,03	1	<0,00
A_MR_M2	12	O	1	107,34	2	<0,00
$A_MR_{PG}2$	12	O	3	481,08	3	<0,00
A_MR_V2	12	O	2	13,95	2	<0,00
$A_{PG}R_{PG}2$	12	O	3	57,59	3	<0,00
$A_{PG}R_V2$	12	O	3	19,51	3	<0,00
$A_VR_{PG}2$	12	O	3	230,49	3	<0,00
A_VR_V2	12	O	2	6,98	2	<0,00
$A_MR_{PG}3$	18	F	5	TL	4	<0,00
$A_{PG}R_{PG}3$	18	F	4	TL	4	<0,00
$A_VR_{PG}3$	18	F	4	TL	4	<0,00
$A_{PG}R_{PG}4$	24	F	13	TL	6	<0,00
$A_{PG}R_V4$	24	F	4	TL	4	<0,00
$A_VR_{PG}4$	24	F	14	TL	5	<0,00
A_VR_V4	24	F	4	TL	3	<0,00
$A_MR_{PG}5$	30	F	10	TL	6	<0,00
$A_{PG}R_M5$	30	F	15	TL	4	<0,00
$A_{PG}R_{PG}5$	30	F	4	TL	4	<0,00
A_VR_M5	30	F	15	TL	3	<0,00
A_VR_V5	30	F	20	TL	3	<0,00
$A_VR_{PG}5$	30	F	18	TL	5	<0,00
$A_MR_{PG}6$	42	F	13	TL	7	<0,00
$A_{PG}R_M6$	42	F	21	TL	4	<0,00
$A_{PG}R_{PG}6$	42	F	25	TL	10	<0,00
$A_{PG}R_V6$	42	F	33	TL	6	<0,00
A_VR_M6	42	F	18	TL	4	<0,00
$A_VR_{PG}6$	42	F	22	TL	8	<0,00
A_VR_V6	42	F	32	TL	6	<0,00

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos o problema tridimensional de empacotamento de cilindros em níveis. O objetivo é posicionar todos os itens cilíndricos em recipientes paralelepípedicos utilizando o menor número de recipientes possível. Neste caso, os itens podem, ainda, ser dispostos em níveis de modo que o espaço do recipiente seja melhor aproveitado. Os itens não podem se sobrepor e devem estar inteiramente contidos no recipiente. Consideramos a presente pesquisa relevante para as indústrias. O estudo do problema de empacotamento de cilindros em níveis tem como objetivo aprimorar o processo produtivo, principalmente das indústrias de cerâmica, com uma melhor ocupação do espaço do forno.

Ao fazer uma extensa revisão da literatura (veja Capítulo 3), percebeu-se que, na maioria dos casos, o problema de empacotamento de cilindros é reduzido ao problema bidimensional de empacotamento de círculos e que o problema de empacotamento em níveis é pouco estudado. Além disso, verificou-se que, para resolvê-lo, o problema poderia ser dividido em dois: problema bidimensional de empacotamento de círculos e problema unidimensional de empacotamento de retângulos em níveis (veja Capítulo 2). Dessa forma, o levantamento bibliográfico constituiu em estudar artigos que apresentam a formulação matemática e métodos de resolução para esses problemas.

Entendidos esses problemas, foi possível definir a representação dos itens e recipientes e como seria tratada a sobreposição entre os itens e contenção dos itens dentro do recipiente. Os itens são representados pelo centro de sua base, raio e altura e os recipientes por suas dimensões. Para garantir que os itens estejam contidos no recipiente, é utilizada a região de contenção e a sobreposição entre eles é verificada pela região de sobreposição e distância euclidiana entre seus centros. Além disso, baseado nos modelos matemáticos presentes na literatura, foi possível formular matematicamente o problema tratado nesta pesquisa (veja Capítulo 4).

Dada a modelagem matemática, duas abordagens de resolução foram propostas: uma usando método exato de Programação Matemática e outra usando métodos heurísticos, com seis

variações (veja Capítulo 5). A abordagem heurística consiste em ordenar os itens considerando a ordem decrescente de altura ou raio e, a partir disso, dispor os itens nos níveis baseado na heurística *Bottom-Left*. Feito isso, os níveis são posicionados no recipiente de acordo com uma das três estratégias: *Best-Fit*, *First-Fit* ou *Worst-Fit*. Desse método base, são propostas seis variações heurísticas. As heurísticas BL_hBF , BL_hFF e BL_hWF utilizam a ordenação por altura e as estratégias *Best-Fit*, *First-Fit* e *Worst-Fit*, respectivamente. Já as heurísticas BL_rBF , BL_rFF e BL_rWF utilizam a ordenação por raio e as estratégias *Best-Fit*, *First-Fit* e *Worst-Fit*, respectivamente. A abordagem exata consiste em fazer a estimativa do número de níveis e recipientes necessários para posicionar todos os itens e resolver o problema por meio de um *solver* de otimização global, usado para resolver problemas de programação não-linear inteira mista.

Como não havia instâncias na literatura que pudessem ser usadas para testar os métodos de resolução propostos, as instâncias foram criadas sorteando os raios e alturas dos itens e comparamos os métodos entre si (veja Capítulo 6). Os resultados mostraram que o método exato encontra solução ótima para instâncias de pequeno porte (até 12 itens) e que, na maioria dos casos, as heurísticas também são capazes de encontrar soluções contendo as mesmas quantidades de recipientes em um menor tempo de execução. Das seis heurísticas propostas, a que mais se destacou foi a BL_hBF , que encontrou o menor número de recipientes mais vezes. Pode-se afirmar que essa heurística é capaz de resolver rapidamente o problema quando consideradas instâncias de pequeno, médio e grande porte.

Por fim, sugerimos como trabalhos futuros o estudo do problema de empacotamento de cilindros em níveis considerando mais algumas características do problema, como: posicionar itens menores dentro de itens maiores, delimitar um espaçamento de posicionamento entre os itens, considerar a estabilidade dos itens na prateleira. Além disso, podem ser desenvolvidos modelos matemáticos e métodos de resolução que considerem os casos específicos do problema: quando as alturas são iguais e os raios variáveis ou raios iguais e alturas variáveis. Dado o modelo já desenvolvido neste trabalho, também é possível investir em diferentes estimativas de níveis e recipientes e uso de uma solução factível inicial na tentativa de melhorar os resultados obtidos pelo método exato (encontrar mais soluções ótimas).

REFERÊNCIAS

- BABU, A. R.; BABU, N. R. A generic approach for nesting of 2-d parts in 2-d sheets using genetic and heuristic algorithms. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 33, n. 12, p. 879–891, 2001. Citado na página 29.
- BEASLEY, J. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. **Operations Research**, INFORMS, v. 33, n. 1, p. 49–64, 1985. Citado na página 31.
- BELLINGIERI, J. C. As origens da indústria cerâmica em são paulo. **Revista Cerâmica Industrial, São Paulo**, v. 10, n. 3, 2005. Citado na página 25.
- BENNELL, J. A.; OLIVEIRA, J. F. The geometry of nesting problems: A tutorial. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 184, n. 2, p. 397–415, 2008. Citado na página 31.
- _____. A tutorial in irregular shape packing problems. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 60, n. 1, p. S93–S105, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 62.
- BERKEY, J. O.; WANG, P. Y. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 38, n. 5, p. 423–429, 1987. Citado na página 49.
- BIRGIN, E. G.; GENTIL, J. M. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 37, n. 7, p. 1318–1327, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 35, 43 e 45.
- BIRGIN, E. G.; MARTÍNEZ, J. M. Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients. **Computational Optimization and Applications**, Springer, v. 23, n. 1, p. 101–125, 2002. Citado na página 45.
- BIRGIN, E. G.; MARTÍNEZ, J.; RONCONI, D. P. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: a nonlinear approach. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 19–33, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. Issues in the development of approaches to container loading. **Omega**, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado na página 52.
- BUCHWALD, T.; SCHEITHAUER, G. Upper bounds for heuristic approaches to the strip packing problem. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 23, n. 1-2, p. 93–119, 2016. Citado na página 53.
- BURKE, E.; HELLIER, R.; KENDALL, G.; WHITWELL, G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 54, n. 3, p. 587–601, 2006. Citado na página 31.
- CHUNG, F. R.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. On packing two-dimensional bins. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, SIAM, v. 3, n. 1, p. 66–76, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 28, 45 e 49.

- COFFMAN JR, E. G.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S.; TARJAN, R. E. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 9, n. 4, p. 808–826, 1980. Citado na página 45.
- CORREIA, M. H.; OLIVEIRA, J. F.; FERREIRA, J. S. Cylinder packing by simulated annealing. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 20, n. 2, p. 269–286, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.
- _____. A new upper bound for the cylinder packing problem. **International Transactions in Operational Research**, n. 8, p. 571–583, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 35, 37, 43 e 44.
- CUNHA, J. G. A.; QUEIROZ, T. A. Malha de pontos no problema da mochila bidimensional limitada. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, XLVIII. Vitória - ES, 2016. Citado na página 29.
- DOWSLAND, K. A. Optimising the palletisation of cylinders in cases. **OR Spectrum**, Springer, v. 13, n. 4, p. 204–212, 1991. Citado na página 37.
- EPSTEIN, L.; LEVY, M. Dynamic multi-dimensional bin packing. **Journal of Discrete Algorithms**, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 356–372, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.
- FLORES, J. J.; MARTÍNEZ, J.; CALDERÓN, F. Evolutionary computation solutions to the circle packing problem. **Soft Computing**, Springer, v. 20, n. 4, p. 1521–1535, 2016. Citado na página 33.
- FLOWER, R. J.; PATERSON, M.; TANIMOTO, S. L. Optimal packing and covering in the plane are np-complete. **Information Processing Letters**, v. 12, n. 3, p. 133–137, 1981. Citado na página 37.
- FRENK, J. G.; GALAMBOS, G. Hybrid next-fit algorithm for the two-dimensional rectangle bin-packing problem. **Computing**, Springer, v. 39, n. 3, p. 201–217, 1987. Citado na página 45.
- GEORGE, J. A.; GEORGE, J. M.; LAMAR, B. W. Packing different-sized circles into a rectangular container. **European Journal of Operational Research**, n. 84, p. 693–712, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 35, 37, 40, 41, 43 e 55.
- GILMORE, P.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. **Operations Research**, INFORMS, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado na página 45.
- GOMES, A. M. Irregular packing problems: Industrial applications and new directions using computational geometry. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 46, n. 7, p. 378–383, 2013. Citado na página 30.
- GONÇALVES, R. F.; QUEIROZ, T. A. de. The knapsack problem with three practical constraints. **Procedia Computer Science**, Elsevier, v. 29, p. 2192–2200, 2014. Citado na página 32.
- HE, K.; DOSH, M.; JIN, Y.; ZOU, S. Packing unequal circles into a square container based on the narrow action spaces. **Science China Information Sciences**, Springer, v. 61, n. 4, p. 1–3, 2018. Citado na página 35.
- HIFI, M.; M'HALLAH, R. A hybrid algorithm for the two-dimensional layout problem: the cases of regular and irregular shapes. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 10, n. 3, p. 195–216, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 31, 40 e 42.

_____. A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies. **Advances in Operations Research**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2009, 2009. Citado na página 40.

HUANG, W. Q.; LI, Y.; AKEB, H.; LI, C. M. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container. **Journal of the Operational Research Society**, v. 56, n. 5, p. 539–548, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 13, 28, 40 e 42.

JUNQUEIRA, L. **Modelos de programação matemática para problemas de carregamento de caixas dentro de contêineres**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009. Citado na página 31.

KANG, J.; PARK, S. Algorithms for the variable sized bin packing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 147, n. 2, p. 365–372, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

LIM, A.; MA, H.; XU, J.; ZHANG, X. An iterated construction approach with dynamic prioritization for solving the container loading problems. **Inform Journal on computing**, Elsevier, v. 39, p. 4292–4305, 2012. Citado na página 52.

LITVINCHEV, I.; ESPINOSA, E. L. O. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, p. 1–6, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 13, 32, 33, 40 e 43.

LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: A survey. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 241–252, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 47 e 55.

LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. **INFORMS Journal on Computing**, INFORMS, v. 11, n. 4, p. 345–357, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 49.

_____. Heuristic algorithms for the three-dimensional bin packing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 410–420, 2002. Citado na página 52.

_____. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 123, n. 1, p. 379–396, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 45, 47 e 50.

_____. Models and bounds for two-dimensional level packing problems. **Journal of Combinatorial Optimization**, Springer, v. 8, n. 3, p. 363–379, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 55.

MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado na página 52.

MARTINEZ, D. A. **Estudo dos problemas de corte e empacotamento**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2014. Citado na página 23.

MESSIAS, L. S. Recuperação de gases quentes em fornos intermitentes: aplicação na indústria de cerâmica estrutural. **Cerâmica Industrial**, v. 1, n. 2, p. 31–37, 1996. Citado na página 26.

MLADENOCIC, N.; PLASTRIA, F.; UROSEVIC, D. Reformulation descent applied to circle packing problems. **Computers & Operations Research**, n. 32, p. 2419–2434, 2005. Citado na página 35.

MOTTA, J. F. M.; ZANARDO, A.; JÚNIOR, M. C. As matérias-primas cerâmicas. parte i: o perfil das principais indústrias cerâmicas e seus produtos. **Cerâmica Industrial**, v. 6, n. 2, p. 28–39, 2001. Citado na página 25.

OLIVEIRA, J. F. C.; FERREIRA, J. A. S. Algorithms for nesting problems. In: **Applied simulated annealing**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 255–273. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.

ORTMANN, F. G. **Heuristics for offline rectangular packing problems**. Tese (Doutorado) — Stellenbosch University, 2010. Citado na página 51.

ORTMANN, F. G.; NTENE, N.; VUUREN, J. H. V. New and improved level heuristics for the rectangular strip packing and variable-sized bin packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 203, n. 2, p. 306–315, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 13, 49, 50 e 51.

PINTO, R. S.; JÚNIOR, A. F. S.; JUNIOR, F. R. A.; JUNIOR, R. A. R.; COSTA, R. P. da. Modelagem econômica de uma indústria cerâmica através do sistema de apoio à decisão poc®. **Revista Gestão Industrial**, v. 10, n. 4, 2014. Citado na página 25.

PUCHINGER, J.; RAIDL, G. R. Models and algorithms for three-stage two-dimensional bin packing. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1304–1327, 2007. Citado na página 48.

QUEIROZ, T. A. d. *et al.* **Algoritmos para problemas de corte e empacotamento**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2010. Citado na página 23.

SEGENREICH, S. A.; BRAGA, L. M. P. F. Optimal nesting of general plane figures: A monte carlo heuristical approach. **Computers & Graphics**, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 229–237, 1986. Citado na página 29.

SHALABY, M. A.; KASHKOUSH, M. A particle swarm optimization algorithm for a 2-d irregular strip packing problem. Scientific Research Publishing, 2013. Citado na página 31.

STOYAN, Y.; PANKRATOV, A.; ROMANOVA, T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. **Journal of Global Optimization**, Springer, v. 65, n. 2, p. 283–307, 2015. Citado na página 38.

STOYAN, Y.; SCHEITHAUER, G.; GIL, N.; ROMANOVA, T. ϕ -functions for complex 2d-objects. **Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies**, Springer, v. 2, n. 1, p. 69–84, 2004. Citado na página 40.

STOYAN, Y.; SEMKIN, V.; CHUGAY, A. Modeling close packing of 3d objects. **Cybernetics and Systems Analysis**, Springer, v. 52, n. 2, p. 296–304, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

STOYAN, Y.; TERNO, J.; SCHEITHAUER, G.; GIL, N.; ROMANOVA, T. ϕ -functions for primary 2d-objects. **Studia Informatica Universalis**, v. 2, n. 1, 2001. Citado na página 38.

STOYAN, Y. G.; NOVOZHILOVA, M. V.; KARTASHOV, A. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 92, p. 193–210, 1996. Citado na página 38.

STOYAN, Y. G.; YAS'KOV, G. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 45–57, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 42.

_____. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 156, n. 3, p. 590–600, 2004. Citado na página 42.

ZHAO, X.; BENNELL, J. A.; BEKTAŞ, T.; DOWSLAND, K. A comparative review of 3d container loading algorithms. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 23, n. 1-2, p. 287–320, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 52.

QUANTIDADE DE NÍVEIS POR RECIPIENTE NAS SOLUÇÕES OBTIDAS PELAS HEURÍSTICAS

Além da quantidade de recipientes usados para resolver cada instância, a solução obtida por cada heurística fornece também a quantidade de níveis utilizados em cada recipiente. A seguir, apresentamos a quantidade de níveis por recipiente obtidos por cada uma das heurísticas para cada uma das instâncias resolvidas. Cada tabela apresenta o nome da instância (Instância), a quantidade de recipientes utilizados (No. recip) e a quantidade de recipientes com uma determinada quantidade de níveis (Qtd. recip. c/ 1N, 2N, 3N, por exemplo), o que varia de acordo com os níveis encontrados para as instâncias analisadas. Caso não exista recipientes com o número de níveis indicado, isso é representado na tabela por -.

A.1 BL_hBF

Tabela 14 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	2	1	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	3	-	2	1
A_MR_M6	4	1	2	1
A_MR_M7	5	1	3	1
A_MR_M8	8	-	6	2
A_MR_M9	16	1	10	5
A_MR_M10	24	1	15	8
A_MR_M11	31	-	22	9
A_MR_M12	39	-	27	12
A_MR_M13	77	1	50	26
A_MR_M14	150	-	96	54
A_MR_M15	378	-	244	134
A_MR_M16	760	-	500	260
A_MR_M17	1513	-	988	525
$A_MR_{PG}1$	2	1	1	-
$A_MR_{PG}2$	3	1	2	-
$A_MR_{PG}3$	4	-	3	1
$A_MR_{PG}4$	4	1	2	1
$A_MR_{PG}5$	6	-	5	1
$A_MR_{PG}6$	7	1	3	3
$A_MR_{PG}7$	10	1	6	3
$A_MR_{PG}8$	17	1	11	5
$A_MR_{PG}9$	34	1	22	11
$A_MR_{PG}10$	48	1	32	15
$A_MR_{PG}11$	65	1	43	21
$A_MR_{PG}12$	80	-	57	23
$A_MR_{PG}13$	159	1	103	55
$A_MR_{PG}14$	304	-	198	106
$A_MR_{PG}15$	755	-	505	250
$A_MR_{PG}16$	1539	-	1027	512
$A_MR_{PG}17$	3060	-	2034	1026
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	1	1
A_MR_V4	3	-	2	1
A_MR_V5	4	-	2	2
A_MR_V6	6	1	3	2
A_MR_V7	7	-	5	2
A_MR_V8	12	-	9	3
A_MR_V9	23	-	15	8
A_MR_V10	32	-	24	8
A_MR_V11	45	-	32	13
A_MR_V12	56	1	38	17
A_MR_V13	106	-	68	38
A_MR_V14	208	-	138	70
A_MR_V15	522	-	352	170
A_MR_V16	1011	1	667	343
A_MR_V17	2027	-	1330	697

Tabela 15 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/															
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	12 N	13 N	14 N	16 N	17 N	18 N	19 N
$APGR_M1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M2$	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M3$	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M4$	3	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M5$	4	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M6$	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M7$	6	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M8$	9	4	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M9$	20	12	1	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M10$	27	15	2	6	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M11$	35	19	2	9	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M12$	46	26	2	13	3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M13$	95	54	3	31	4	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M14$	180	101	9	51	12	5	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M15$	446	251	31	121	23	12	2	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-
$APGR_M16$	886	508	58	25	19	29	5	5	1	-	1	1	1	-	-	1	-
$APGR_M17$	1779	993	123	479	110	50	3	15	8	-	-	5	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}3$	4	3	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}4$	6	3	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}5$	4	-	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}6$	10	7	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}7$	11	5	-	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}8$	22	13	3	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}9$	37	16	4	15	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}10$	56	32	2	15	3	5	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}11$	71	35	7	20	5	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}12$	98	63	3	25	2	3	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}13$	183	109	7	45	16	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}14$	346	184	17	105	25	11	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}15$	852	429	56	275	68	12	5	4	1	-	-	-	-	2	-	-	-
$APGR_{PG}16$	1815	1047	60	571	80	31	16	2	-	-	-	5	1	-	-	2	-
$APGR_{PG}17$	3529	1966	195	1018	204	95	15	22	2	-	1	9	1	1	-	-	-
$APGR_V1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V2$	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V3$	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V4$	4	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V5$	4	1	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V6$	6	2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V7$	8	4	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V8$	14	8	1	4	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V9$	29	19	2	4	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V10$	41	26	2	10	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V11$	51	26	5	14	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V12$	62	33	3	20	4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V13$	125	63	9	42	6	1	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V14$	246	140	13	75	10	3	3	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-
$APGR_V15$	607	340	37	167	46	7	5	3	-	1	-	1	-	-	-	-	-
$APGR_V16$	1187	655	63	380	45	24	7	8	-	1	1	3	-	-	-	-	-
$APGR_V17$	2327	1266	136	710	135	47	6N	19	-	1	1	4	-	-	1	-	1

Tabela 16 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura variável e raios médio e pequeno e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																			
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	19 N	20 N
AvR_M1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M3	2		2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M4	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M5	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M6	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M7	5	1	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M8	8	1	5	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M9	16	-	12	3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M10	21	-	14	6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M11	28	-	20	4	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M12	36	-	25	7	1	1	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M13	69	-	50	13	3	-	-	1	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M14	141	-	102	26	2	2	4	3	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M15	341	-	256	51	4	11	6	5	2	1	1	2	-	1	-	-	1	-	-	-	-
AvR_M16	680	-	534	61	24	25	10	7	6	3	3	2	1	1	-	1	-	1	-	1	-
AvR_M17	1368		1078	120	50	48	21	14	12	7	6	3	1	1	1	1	-	2	1	-	2
$AvR_{PG}1$	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}2$	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}3$	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}4$	5	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}5$	5	1	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}6$	8	1	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}7$	9	-	7	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}8$	15	1	7	6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}9$	32	-	20	10	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}10$	45	-	32	10	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}11$	56	-	42	9	1	-	1	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}12$	67	-	41	22		1		1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}13$	146	-	105	29	2	3	3	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}14$	283	-	213	52	1	4	2	3	2	2	1	1	-	-	1	-	-	1	-	-	-
$AvR_{PG}15$	693	-	520	104	11	21	12	9	4	4	2	1	-	1	1	1	-	1	-	1	-
$AvR_{PG}16$	1355	-	1041	164	20	56	21	15	14	5	6	2	1	1	1	3	-	2	-	1	2
$AvR_{PG}17$	2683	-	2069	299	62	108	44	30	20	14	14	6	1	1	1	4	1	5	1	-	3

Tabela 17 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hBF para os itens de altura variável e raio variável.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																				
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	19 N	20 N	21 N
$A_V R_V 1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 2$	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 3$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 4$	3	-	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 5$	3	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 6$	6	-	4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 7$	6	1	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 8$	12	-	9	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 9$	23	-	18	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 10$	31	-	20	7	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 11$	40	-	29	7	1	2	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 12$	51	-	35	13	1	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 13$	95	-	68	16	5	2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 14$	186	-	124	47	-	4	4	3	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-
$A_V R_V 15$	472	-	347	87	6	10	7	5	1	3	1	1	1	-	1	-	1	-	-	-	-	1
$A_V R_V 16$	906	-	670	159	6	20	10	16	7	7	2	2	-	2	2	-	1	1	-	-	1	-
$A_V R_V 17$	1821	-	1425	203	28	68	28	19	16	8	8	5	1	2	1	3	-	3	-	1	2	-

A.2 BL_hFF

Tabela 18 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	2	1	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	3	-	2	1
A_MR_M6	4	1	2	1
A_MR_M7	5	1	3	1
A_MR_M8	8	-	7	1
A_MR_M9	16	1	10	5
A_MR_M10	24	1	15	8
A_MR_M11	31	-	22	9
A_MR_M12	39	-	27	12
A_MR_M13	77	1	50	26
A_MR_M14	150	-	96	54
A_MR_M15	378	-	244	134
A_MR_M16	760	-	500	260
A_MR_M17	1513	-	988	525
$A_MR_{PG}1$	2	1	1	-
$A_MR_{PG}2$	3	1	2	-
$A_MR_{PG}3$	4	-	3	1
$A_MR_{PG}4$	4	1	2	1
$A_MR_{PG}5$	6	-	5	1
$A_MR_{PG}6$	7	1	3	3
$A_MR_{PG}7$	10	1	6	3
$A_MR_{PG}8$	17	1	11	5
$A_MR_{PG}9$	34	1	22	11
$A_MR_{PG}10$	48	1	32	15
$A_MR_{PG}11$	65	1	43	21
$A_MR_{PG}12$	80	-	57	23
$A_MR_{PG}13$	159	1	103	55
$A_MR_{PG}14$	304	-	198	106
$A_MR_{PG}15$	755	-	505	250
$A_MR_{PG}16$	1539	-	1027	512
$A_MR_{PG}17$	3060	-	2034	1026
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	1	1
A_MR_V4	3	-	2	1
A_MR_V5	4	-	2	2
A_MR_V6	6	1	3	2
A_MR_V7	7	-	5	2
A_MR_V8	12	-	9	3
A_MR_V9	23	-	15	8
A_MR_V10	32	-	24	8
A_MR_V11	45	-	32	13
A_MR_V12	56	1	38	17
A_MR_V13	106	-	68	38
A_MR_V14	208	-	138	70
A_MR_V15	522	-	352	170
A_MR_V16	1011	1	667	343
A_MR_V17	2027	-	1330	697

Tabela 19 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	18 N	19 N
$APGR_M1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M2$	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M3$	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M4$	3	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M5$	4	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M6$	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M7$	6	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M8$	9	4	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M9$	20	12	-	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M10$	27	15	1	8	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M11$	35	19	1	11	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M12$	46	26	2	12	5	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M13$	95	54	3	31	4	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M14$	180	101	7	57	7	5	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M15$	446	248	22	138	22	8	2	4	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-
$APGR_M16$	886	492	37	292	38	12	5	5	1	-	-	1	1	1	-	-	1	-
$APGR_M17$	1779	993	72	571	79	40	3	15	1	-	-	-	5	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}3$	4	3	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}4$	6	3	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}5$	4	-	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}6$	10	7	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}7$	11	5	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}8$	22	13	3	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}9$	37	16	4	14	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}10$	56	32	1	16	3	3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}11$	71	35	5	23	6	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}12$	98	63	2	26	3	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}13$	183	109	7	45	16	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}14$	346	184	12	116	20	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}15$	852	429	45	295	59	16	1	4	1	-	-	-	-	-	1	-	-	1
$APGR_{PG}16$	1815	1047	60	572	81	27	17	2	-	-	1	-	5	1	-	-	2	-
$APGR_{PG}17$	3529	1966	143	1117	162	90	15	22	2	-	-	1	9	1	-	1	-	-
$APGR_V1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V2$	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V3$	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V4$	4	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V5$	4	1	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V6$	6	2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V7$	8	4	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V8$	14	8	1	4	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V9$	29	19	1	5	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V10$	41	26	2	10	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V11$	51	26	1	21	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V12$	62	33	3	21	2	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V13$	125	63	8	44	5	1	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V14$	246	140	11	77	10	4	2	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-
$APGR_V15$	607	340	25	190	36	6	5	3	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-
$APGR_V16$	1187	655	44	403	59	6	7	8	-	-	1	-	4	-	-	-	-	-
$APGR_V17$	2327	1266	114	732	153	29	7	18	1	-	-	1	4	-	-	1	1	-

Tabela 20 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura variável e raios médio e pequeno e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																			
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	19 N	20 N
AVR_M1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M3	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M4	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M5	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M6	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M7	5	1	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M8	8	1	5	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M9	16	-	11	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M10	21	-	14	6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M11	28	-	19	6	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M12	36	-	25	7	1	1	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M13	69	-	49	16	-	1	-	1	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M14	141	-	101	26	3	3	3	3	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_M15	341	-	253	53	5	12	7	3	2	1	1	2	-	1	-	1	-	-	-	-	-
AVR_M16	680	-	513	91	15	25	12	8	5	2	2	2	-	2	1	-	2	-	-	-	-
AVR_M17	1369	-	1035	184	30	49	24	14	14	4	3	3	2	1	1	-	3	-	-	1	1
AVR_PG1	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG2	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG3	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG4	5	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG5	5	1	3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG6	8	1	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG7	9	-	6	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG8	15	1	7	6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG9	32	-	21	8	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG10	45	-	32	10	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG11	56	-	41	10	1	-	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG12	67	-	43	18	2	1	-	1	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG13	146	-	105	27	4	4	2	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AVR_PG14	283	-	212	53	1	4	2	4	1	2	1	1	-	-	1	-	-	1	-	-	-
AVR_PG15	693	-	510	115	11	21	12	8	6	2	2	1	-	1	2	-	1	-	1	-	-
AVR_PG16	1355	-	999	217	10	56	26	15	12	5	2	3	1	1	3	-	2	-	1	-	2
AVR_PG17	2683	-	991	401	38	109	56	26	24	9	6	6	2	-	5	6	4	1	1	-	3

Tabela 21 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hFF para os itens de altura variável e raio variável.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																				
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	19 N	20 N	21 N
$A_V R_V 1$	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 2$	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 3$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 4$	3	-	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 5$	3	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 6$	6	-	4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 7$	6	1	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 8$	12	-	9	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 9$	23	-	18	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 10$	31	-	20	7	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 11$	40	-	28	9	-	2	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 12$	51	-	34	14	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 13$	95	-	65	21	3	3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A_V R_V 14$	186	-	124	47	-	4	4	3	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-
$A_V R_V 15$	472	-	348	85	7	9	7	5	2	3	1	1	1	-	1	1	-	-	-	1	-	-
$A_V R_V 16$	906	-	670	164	1	19	16	6	11	7	3	2	-	2	2	-	1	-	1	-	-	1
$A_V R_V 17$	1821	-	1389	237	30	68	37	18	15	5	5	4	2	1	3	2	2	1	-	-	2	-

A.3 BL_hWF

Tabela 22 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	2	1	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	3	-	2	1
A_MR_M6	4	1	2	1
A_MR_M7	5	-	5	-
A_MR_M8	8	-	6	2
A_MR_M9	16	-	12	4
A_MR_M10	24	1	15	8
A_MR_M11	31	-	22	9
A_MR_M12	39	-	27	12
A_MR_M13	77	1	50	26
A_MR_M14	150	-	96	54
A_MR_M15	378	-	244	134
A_MR_M16	760	1	499	260
A_MR_M17	1513	-	988	525
$A_MR_{PG}1$	2	1	1	-
$A_MR_{PG}2$	3	1	2	-
$A_MR_{PG}3$	4	-	3	1
$A_MR_{PG}4$	4	1	2	1
$A_MR_{PG}5$	6	-	5	1
$A_MR_{PG}6$	7	1	3	3
$A_MR_{PG}7$	10	1	6	3
$A_MR_{PG}8$	17	1	11	5
$A_MR_{PG}9$	34	1	22	11
$A_MR_{PG}10$	48	1	32	15
$A_MR_{PG}11$	65	1	43	21
$A_MR_{PG}12$	80	-	57	23
$A_MR_{PG}13$	159	1	103	55
$A_MR_{PG}14$	304	-	198	106
$A_MR_{PG}15$	755	-	505	250
$A_MR_{PG}16$	1539	-	1027	512
$A_MR_{PG}17$	3060	-	2034	1026
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	1	1
A_MR_V4	3	-	2	1
A_MR_V5	4	-	2	2
A_MR_V6	6	1	3	2
A_MR_V7	7	-	5	2
A_MR_V8	12	-	9	3
A_MR_V9	23	-	15	8
A_MR_V10	32	-	24	8
A_MR_V11	45	-	32	13
A_MR_V12	56	1	38	17
A_MR_V13	106	-	68	38
A_MR_V14	208	-	138	70
A_MR_V15	522	-	352	170
A_MR_V16	1011	1	667	343
A_MR_V17	2027	-	1330	697

Tabela 23 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
$APGR_M1$	1	-	1	-
$APGR_M2$	2	1	1	-
$APGR_M3$	2		1	1
$APGR_M4$	3	2	-	1
$APGR_M5$	4	2	2	-
$APGR_M6$	4	-	3	1
$APGR_M7$	6	2	3	1
$APGR_M8$	9	1	7	1
$APGR_M9$	20	3	17	-
$APGR_M10$	27	1	25	1
$APGR_M11$	35	1	33	1
$APGR_M12$	46	2	42	2
$APGR_M13$	95	6	86	3
$APGR_M14$	180	8	166	6
$APGR_M15$	446	1	441	4
$APGR_M16$	886	1	441	4
$APGR_M17$	1779	5	1765	9
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-
$APGR_{PG}3$	4	2	1	1
$APGR_{PG}4$	6	1	5	-
$APGR_{PG}5$	4	-	1	3
$APGR_{PG}6$	10	6	2	2
$APGR_{PG}7$	11	-	8	3
$APGR_{PG}8$	22	6	16	-
$APGR_{PG}9$	37	-	33	4
$APGR_{PG}10$	56	6	40	10
$APGR_{PG}11$	71	-	63	8
$APGR_{PG}12$	98	16	81	1
$APGR_{PG}13$	183	17	158	8
$APGR_{PG}14$	346	2	321	23
$APGR_{PG}15$	852	-	760	92
$APGR_{PG}16$	1815	78	1705	32
$APGR_{PG}17$	3529	-	3467	62
$APGR_V1$	1	-	1	-
$APGR_V2$	3	2	1	-
$APGR_V3$	3	-	3	-
$APGR_V4$	4	1	3	-
$APGR_V5$	4	-	3	1
$APGR_V6$	6	1	3	2
$APGR_V7$	8	2	5	3
$APGR_V8$	14	1	12	1
$APGR_V9$	29	7	17	5
$APGR_V10$	41	10	27	4
$APGR_V11$	51	-	50	1
$APGR_V12$	62	1	58	3
$APGR_V13$	125	-	113	12
$APGR_V14$	246	15	223	8
$APGR_V15$	607	26	562	19
$APGR_V16$	1187	-	1182	5
$APGR_V17$	2327	-	2260	67

Tabela 24 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio médio.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																											
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	19 N	20 N	21 N	22 N	23 N	26 N	30 N	34 N	38 N		
$A_V R_M 1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 2$	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 3$	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 4$	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 5$	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 6$	4	-	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 7$	5	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 8$	8	-	7	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 9$	16	-	15	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 10$	22	-	20	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 11$	28	-	20	6	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 12$	37	-	31	2	-	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 13$	70	-	63	2	-	-	1	1	1	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 14$	142	-	125	4	1	3	3	2	-	1	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-		
$A_V R_M 15$	343	-	305	6	-	10	8	4	2	1	1	1	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-		
$A_V R_M 16$	682	-	573	45	1	21	15	9	3	4	2	2	-	1	1	1	-	1	1	-	-	-	1	-	-	-	1		
$A_V R_M 17$	1372	-	1123	122	3	41	28	18	8	10	3	3	-	2	3	-	1	2	1	1	-	1	-	1	-	1	-		

Tabela 25 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio pequeno e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																																														
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	19 N	20 N	22 N	23 N	25 N	26 N	28 N	30 N	33 N	36 N	39 N	47 N																	
$AvR_{PG}1$	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}2$	3	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}3$	4	-	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}4$	5	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}5$	5	-	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}6$	8	-	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}7$	10	-	9	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}8$	15	1	12	2	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}9$	32	-	26	4	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}10$	45	-	37	5	-	1	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}11$	57	-	52	-	-	-	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}12$	68	-	48	14	1	1	1	1	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}13$	147	-	130	4	1	4	3	1	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}14$	286	-	231	35	-	4	6	8	2	2	1	1	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-																
$AvR_{PG}15$	696	-	618	7	11	18	14	9	4	4	1	2	1	-	1	1	-	1	-	1	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	1																
$AvR_{PG}16$	1359	-	1123	98	5	46	31	19	9	9	2	4	-	2	3	-	-	2	-	1	2	-	-	1	-	-	1	-	-	1	-	1																
$AvR_{PG}17$	2691	-	2191	223	16	89	64	40	12	21	6	7	1	2	4	-	1	4	1	-	4	-	-	2	1	-	-	1	1	-	1	-																

Tabela 26 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_hWF para os itens de altura variável e raio variável.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																								
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N	20 N	23 N	24 N	25 N	31 N	32 N	44 N
A_VR_V1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V2	2	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V3	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V4	3	-	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V5	3	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V6	6	-	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V7	6	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V8	12	-	11	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V9	24	-	23	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V10	31	-	25	3	-	1	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V11	41	-	34	3	-	2	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V12	52	-	45	4	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V13	95	-	74	13	1	1	3	1	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A_VR_V14	188	-	161	10	-	4	5	3	1	-	1	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	-
A_VR_V15	474	-	376	64	-	9	7	5	2	3	2	1	-	1	1	1	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-
A_VR_V16	914	-	744	91	-	25	17	10	7	6	3	2	1	1	2	-	1	1	-	1	1	-	-	-	1	-
A_VR_V17	1825	-	1509	146	1	54	42	27	8	13	4	5	1	1	4	1	-	3	-	3	-	1	-	-	1	1

A.4 BL_rBF

Tabela 27 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rBF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	1	-	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	4	1	3	-
A_MR_M6	4	1	6	-
A_MR_M7	5	-	5	-
A_MR_M8	9	-	9	-
A_MR_M9	18	1	17	-
A_MR_M10	27	1	24	2
A_MR_M11	34	-	31	3
A_MR_M12	44	-	41	3
A_MR_M13	86	-	87	7
A_MR_M14	168	1	149	18
A_MR_M15	423	-	378	45
A_MR_M16	840	1	737	102
A_MR_M17	1690	-	1516	174
$A_MR_{PG}1$	2	1	1	-
$A_MR_{PG}2$	3	1	2	-
$A_MR_{PG}3$	4	-	3	1
$A_MR_{PG}4$	4	-	4	-
$A_MR_{PG}5$	6	-	6	-
$A_MR_{PG}6$	8	1	6	1
$A_MR_{PG}7$	10	1	6	3
$A_MR_{PG}8$	17	-	13	4
$A_MR_{PG}9$	34	-	24	10
$A_MR_{PG}10$	48	1	34	13
$A_MR_{PG}11$	64	1	42	21
$A_MR_{PG}12$	80	-	58	22
$A_MR_{PG}13$	158	-	104	54
$A_MR_{PG}14$	305	1	200	104
$A_MR_{PG}15$	755	1	506	248
$A_MR_{PG}16$	1541	1	1037	503
$A_MR_{PG}17$	3060	1	2039	1020
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	2	-
A_MR_V4	3	-	3	-
A_MR_V5	5	1	4	-
A_MR_V6	6	-	6	-
A_MR_V7	8	-	8	-
A_MR_V8	13	-	13	-
A_MR_V9	23	-	18	5
A_MR_V10	32	-	27	5
A_MR_V11	46	-	40	6
A_MR_V12	58	-	49	9
A_MR_V13	107	-	83	24
A_MR_V14	214	1	159	54
A_MR_V15	533	-	402	131
A_MR_V16	1026	-	727	299
A_MR_V17	2078	-	1515	563

Tabela 28 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_{rBF} para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/													
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	11 N	12 N	13 N	14 N	16 N
$APGR_M1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M2$	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M3$	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M4$	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M5$	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M6$	7	6	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M7$	10	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M8$	16	14	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M9$	32	28	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M10$	42	31	10	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M11$	56	46	7	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M12$	72	56	12	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M13$	152	128	16	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M14$	275	216	37	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M15$	720	598	70	50	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M16$	1425	1169	155	99	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M17$	2802	2269	314	211	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}3$	4	3	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}4$	6	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}5$	5	2	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}6$	11	9	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}7$	12	7	1	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}8$	23	14	4	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}9$	38	18	6	12	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}10$	55	28	6	10	10	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}11$	72	35	7	22	6	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}12$	100	65	3	23	6	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}13$	187	106	19	45	13	3	-	-	-	1	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}14$	363	203	24	98	30	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}15$	877	457	57	276	64	18	5	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}16$	1823	1024	128	499	109	42	14	2	1	-	3	1	-	-	-
$APGR_{PG}17$	3518	1913	186	1090	216	56	34	10	4	1	2	2	1	2	1
$APGR_V1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V2$	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V3$	4	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V4$	6	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V5$	5	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V6$	7	5	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V7$	11	9	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V8$	20	16	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V9$	41	35	2	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V10$	54	40	9	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V11$	66	44	12	8	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V12$	85	58	16	10	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V13$	161	106	22	29	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V14$	286	172	46	59	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V15$	694	423	56	199	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V16$	1407	900	131	317	46	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V17$	2641	1609	181	734	86	18	9	4	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 29 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rBF para os itens de altura variável.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/																	
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	15 N	16 N	17 N	18 N
AvR_M1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M3	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M4	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M5	5	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M6	7	6	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M7	9	8	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M8	15	12	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M9	31	24	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M10	38	23	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M11	52	32	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M12	70	50	18	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M13	123	70	51	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M14	271	186	79	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M15	610	351	239	19	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M16	1216	705	461	45	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M17	2459	1432	935	90	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}1$	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}2$	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}3$	4	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}4$	6	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}5$	6	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}6$	8	-	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}7$	11	3	7	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}8$	18	4	11	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}9$	33	3	17	9	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}10$	49	4	31	12	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}11$	61	4	39	13	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}12$	72	5	42	16	6	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}13$	147	-	90	47	5	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}14$	288	5	182	76	17	2	1	3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}15$	711	-	-	651	23	9	11	5	4	3	1	2	1	1	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}16$	1385	-	960	315	29	29	18	12	5	4	2	3	5	1	-	1	-	1	-
$AvR_{PG}17$	2731	-	1879	615	87	35	43	27	8	13	5	6	5	2	2	2	1	-	1
AvR_V1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V2	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V3	4	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V4	4	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V5	4	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V6	7	1	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V7	9	6	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V8	20	14	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V9	27	7	17	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V10	35	-	31	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V11	51	10	37	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V12	63	11	43	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V13	112	4	94	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V14	213	-	166	41	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V15	525	-	397	111	11	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V16	1061	63	748	211	32	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V17	2063	-	1587	400	49	18	2	3	1	-	2	1	-	-	-	-	-	-	-

A.5 BL_rFF

Tabela 30 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	1	-	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	4	1	3	-
A_MR_M6	4	1	3	-
A_MR_M7	5	-	5	-
A_MR_M8	9	-	9	-
A_MR_M9	18	1	17	-
A_MR_M10	27	1	24	2
A_MR_M11	34	-	31	3
A_MR_M12	44	-	41	3
A_MR_M13	86	-	79	7
A_MR_M14	168	1	149	18
A_MR_M15	423	-	378	45
A_MR_M16	840	1	737	102
A_MR_M17	1690	-	1516	174
$A_MR_{PG}1$	2	1	1	-
$A_MR_{PG}2$	3	1	2	-
$A_MR_{PG}3$	4	-	3	1
$A_MR_{PG}4$	4	-	4	-
$A_MR_{PG}5$	6	-	6	-
$A_MR_{PG}6$	8	1	6	1
$A_MR_{PG}7$	10	1	6	3
$A_MR_{PG}8$	17	-	13	4
$A_MR_{PG}9$	34	-	24	10
$A_MR_{PG}10$	48	1	34	13
$A_MR_{PG}11$	64	-	42	21
$A_MR_{PG}12$	80	-	58	22
$A_MR_{PG}13$	158	-	104	54
$A_MR_{PG}14$	305	1	200	104
$A_MR_{PG}15$	755	1	506	248
$A_MR_{PG}16$	1541	1	1037	503
$A_MR_{PG}17$	3060	1	2039	1020
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	2	-
A_MR_V4	3	-	3	-
A_MR_V5	5	1	4	-
A_MR_V6	6	-	6	-
A_MR_V7	8	-	8	-
A_MR_V8	13	-	13	-
A_MR_V9	23	-	18	5
A_MR_V10	32	-	27	5
A_MR_V11	46	-	40	6
A_MR_V12	58	-	49	9
A_MR_V13	107	-	83	24
A_MR_V14	214	1	159	54
A_MR_V15	533	-	402	131
A_MR_V16	1026	-	727	299
A_MR_V17	2078	-	1515	563

Tabela 31 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/														
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	17 N
$APGR_M1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M2$	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M3$	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M4$	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M5$	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M6$	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M7$	10	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M8$	16	14	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M9$	32	29	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M10$	42	34	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M11$	56	48	2	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M12$	72	59	6	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M13$	152	136	2	11	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M14$	275	236	3	30	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M15$	720	634	5	73	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M16$	1425	1249	11	148	16	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_M17$	2802	2431	20	316	33	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}3$	4	3	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}4$	6	3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}5$	5	2	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}6$	11	9	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}7$	12	7	-	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}8$	23	17	1	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}9$	38	21	4	7	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}10$	55	34	1	7	8	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}11$	72	40	1	20	8	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}12$	100	67	2	18	10	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}13$	187	120	4	38	15	8	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}14$	363	229	2	83	30	12	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_{PG}15$	877	516	12	232	82	19	9	2	3	-	1	-	-	-	1	-
$APGR_{PG}16$	1823	1168	14	384	158	56	18	13	3	6	1	1	1	-	-	-
$APGR_{PG}17$	3518	2144	33	840	322	80	45	17	13	6	6	2	2	1	1	-
$APGR_V1$	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V2$	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V3$	4	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V4$	6	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V5$	5	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V6$	7	4	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V7$	11	9	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V8$	20	16	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V9$	41	36	1	3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V10$	54	42	5	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V11$	66	47	7	10	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V12$	85	62	9	12	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V13$	161	114	10	29	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V14$	286	192	12	68	13	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V15$	694	464	25	152	43	7	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V16$	1407	990	19	296	266	21	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$APGR_V17$	2641	1768	46	610	158	37	3	6	7	3	-	-	1	-	-	1

Tabela 32 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rFF para os itens de altura variável.

Instância	No. rec.	Qtd. recip. c/															
		1 N	2 N	3 N	4 N	5 N	6 N	7 N	8 N	9 N	10 N	11 N	12 N	13 N	14 N	16 N	17 N
AvR_M1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M3	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M4	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M5	5	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M6	7	6	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M7	9	8	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M8	15	12	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M9	31	24	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M10	38	23	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M11	52	33	18	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M12	70	50	18	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M13	123	71	49	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M14	271	186	79	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M15	610	353	235	21	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M16	1216	713	441	61	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_M17	2459	1455	891	109	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}1$	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}2$	4	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}3$	4	1	2	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}4$	6	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}5$	6	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}6$	8	-	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}7$	11	3	7	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}8$	18	4	10	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}9$	33	2	20	7	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}10$	49	3	34	9	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}11$	61	4	37	17	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}12$	72	4	44	15	6	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}13$	147	-	96	35	12	3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}14$	288	4	181	77	18	4	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
$AvR_{PG}15$	711	-	497	150	29	11	6	6	4	4	1	1	1	1	-	-	-
$AvR_{PG}16$	1385	-	959	298	46	32	20	10	8	1	4	1	3	-	1	2	-
$AvR_{PG}17$	2732	-	1902	591	70	50	46	28	12	8	7	6	2	6	1	2	1
AvR_V1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V2	2	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V3	4	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V4	4	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V5	4	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V6	7	1	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V7	9	6	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V8	20	14	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V9	27	8	15	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V10	35	2	27	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V11	52	15	30	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V12	63	11	43	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V13	113	6	94	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V14	213	-	163	44	4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V15	526	-	399	111	9	5	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V16	1061	65	734	231	28	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AvR_V17	2065	1	1589	393	61	10	4	3	2	1	1	-	-	-	-	-	-

A.6 BL_rWF

Tabela 33 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rWF para os itens de altura média.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/		
		1 N	2 N	3 N
A_MR_M1	1	1	-	-
A_MR_M2	1	-	1	-
A_MR_M3	2	1	1	-
A_MR_M4	3	1	2	-
A_MR_M5	4	1	3	-
A_MR_M6	4	1	3	-
A_MR_M7	5	-	5	-
A_MR_M8	9	-	9	-
A_MR_M9	18	1	17	-
A_MR_M10	27	-	26	1
A_MR_M11	34	-	31	3
A_MR_M12	44	-	41	3
A_MR_M13	86	-	79	7
A_MR_M14	168	-	151	17
A_MR_M15	423	-	378	45
A_MR_M16	840	-	739	101
A_MR_M17	1691	1	1517	173
A_MR_PG1	2	1	1	-
A_MR_PG2	3	1	2	-
A_MR_PG3	4	-	3	1
A_MR_PG4	4	-	4	-
A_MR_PG5	6	-	6	-
A_MR_PG6	8	1	6	1
A_MR_PG7	10	1	6	3
A_MR_PG8	18	-	16	2
A_MR_PG9	34	-	24	10
A_MR_PG10	48	1	34	13
A_MR_PG11	64	1	42	21
A_MR_PG12	79	-	55	24
A_MR_PG13	158	-	104	54
A_MR_PG14	305	1	200	104
A_MR_PG15	755	1	506	248
A_MR_PG16	1541	1	1037	503
A_MR_PG17	3060	1	2039	1020
A_MR_V1	1	-	1	-
A_MR_V2	2	-	2	-
A_MR_V3	2	-	2	-
A_MR_V4	3	-	3	-
A_MR_V5	5	1	4	-
A_MR_V6	6	-	6	-
A_MR_V7	8	-	8	-
A_MR_V8	13	-	13	-
A_MR_V9	23	-	18	5
A_MR_V10	32	-	27	5
A_MR_V11	46	-	40	6
A_MR_V12	59	-	52	4
A_MR_V13	107	-	83	24
A_MR_V14	215	-	215	164
A_MR_V15	533	-	402	131
A_MR_V16	1027	1	728	298
A_MR_V17	2078	-	1515	563

Tabela 34 – Quantidade de níveis por recipiente obtidos pela heurística BL_rWF para os itens de altura pequena e grande.

Instância	No. recip.	Qtd. recip. c/			
		1 N	2 N	3 N	4 N
$APGR_M1$	1	-	1	-	-
$APGR_M2$	3	3	-	-	-
$APGR_M3$	4	4	-	-	-
$APGR_M4$	4	4	-	-	-
$APGR_M5$	6	6	-	-	-
$APGR_M6$	7	6	1	-	-
$APGR_M7$	10	10	-	-	-
$APGR_M8$	16	14	2	-	-
$APGR_M9$	32	28	1	-	-
$APGR_M10$	42	30	12	-	-
$APGR_M11$	56	42	14	-	-
$APGR_M12$	72	52	20	-	-
$APGR_M13$	152	119	33	-	-
$APGR_M14$	275	194	81	-	-
$APGR_M15$	720	544	176	-	-
$APGR_M16$	1425	1069	353	3	-
$APGR_M17$	2802	2042	760	-	-
$APGR_{PG}1$	1	-	1	-	-
$APGR_{PG}2$	3	1	2	-	-
$APGR_{PG}3$	4	3	-	-	1
$APGR_{PG}4$	6	2	3	1	-
$APGR_{PG}5$	5	2	1	1	1
$APGR_{PG}6$	11	7	3	1	-
$APGR_{PG}7$	12	3	7	-	2
$APGR_{PG}8$	23	10	11	2	-
$APGR_{PG}9$	38	10	19	9	-
$APGR_{PG}10$	55	12	29	11	3
$APGR_{PG}11$	72	11	45	16	-
$APGR_{PG}12$	100	25	70	5	-
$APGR_{PG}13$	187	43	122	20	2
$APGR_{PG}14$	363	42	299	22	-
$APGR_{PG}15$	877	46	768	59	4
$APGR_{PG}16$	1823	178	1543	102	-
$APGR_{PG}17$	3518	162	3122	232	2
$APGR_V1$	1	-	1	-	-
$APGR_V2$	3	2	1	-	-
$APGR_V3$	4	3	1	-	-
$APGR_V4$	6	5	1	-	-
$APGR_V5$	5	2	3	-	-
$APGR_V6$	7	2	5	-	-
$APGR_V7$	11	9	1	1	-
$APGR_V8$	20	14	5	1	-
$APGR_V9$	41	31	9	1	-
$APGR_V10$	54	36	17	1	-
$APGR_V11$	66	36	26	4	-
$APGR_V12$	85	47	37	1	-
$APGR_V13$	161	71	88	2	-
$APGR_V14$	286	105	171	10	-
$APGR_V15$	694	198	490	6	-
$APGR_V16$	1407	476	906	25	-
$APGR_V17$	2641	1724	1789	125	3

SOLUÇÕES ÓTIMAS OBTIDAS PELO MÉTODO EXATO

A seguir, apresentamos as ilustrações de todas as soluções ótimas obtidas pelo método exato. Lembrando que primeiro ilustra-se a disposição dos itens nos níveis. Para distinguir os itens com relação às suas alturas, eles foram ilustrados em escala de cinza. Assim, quanto mais escuro for o item, mais alto ele é. Depois, é representada a alocação dos níveis nos respectivos recipientes.

B.1 A_MR_M1

Figura 39 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância A_MR_M1 .

Fonte – Elaborada pela autora.

B.2 A_MR_M2

Figura 40 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância A_MR_M2 .

Fonte – Elaborada pela autora.

B.3 $A_M R_{PG}1$

Figura 41 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_M R_{PG}1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.4 $A_M R_{PG2}$

Figura 42 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_M R_{PG2}$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.5 A_MR_V1

Figura 43 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância A_MR_V1 .

Fonte – Elaborada pela autora.

B.6 A_MR_V2

Figura 44 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância A_MR_V2 .

Fonte – Elaborada pela autora.

B.7 $A_{PG}R_M1$

Figura 45 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_{PG}R_M1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.8 $A_{PG}R_{PG}1$

Figura 46 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_{PG}R_{PG}1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.9 $A_{PG}R_{PG2}$

Figura 47 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_{PG}R_{PG2}$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.10 $A_{PG}R_V1$

Figura 48 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_{PG}R_V1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.11 $A_{PG}R_V2$

Figura 49 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_{PG}R_V2$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.12 $A_V R_M 1$

Figura 50 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_V R_M 1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.13 $A_V R_{PG} 1$

Figura 51 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_V R_{PG} 1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.14 $A_V R_{PG2}$

Figura 52 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_V R_{PG2}$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.15 $A_V R_V 1$

Figura 53 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_V R_V 1$.

Fonte – Elaborada pela autora.

B.16 $A_V R_V 2$

Figura 54 – Ilustração do resultado obtido pelo método exato para a instância $A_V R_V 2$.

Fonte – Elaborada pela autora.