TESTES DE SOBREVIVÊNCIA ACELERADOS
BIVARIADOS

Luz Amanda Melgar Santander 1635077

Orientador: Dr. Jorge Alberto Achcar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Ciências Computação e Matemática Computacional.

São Carlos
1993

cad
229 2520

Aos meus pais
Augurio e Marina

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar que com muita paciência e segurança soube orientar-me neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Josemar Rodrigues pelo apoio no início do curso de Pós-graduação.

Aos colegas e funcionários do ICMSC-USP.

À Ciro, Eugenia, Nilda e Rubén pela amizade e pelo incentivo valioso nos momentos mais difíceis.

À Simone por sua valiosa ajuda na correção dos erros de português.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O uso de distribuições bivariadas tem um papel importante no estudo da confiabilidade de sistemas pois é comum a existência de duas variáveis geralmente correlacionadas associadas ao funcionamento de um sistema.

Neste trabalho apresenta-se inicialmente uma breve síntese das distribuições exponenciais bivariadas mais conhecidas na literatura. A seguir desenvolve-se uma análise estatística do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) sob o enfoque clássico e sob o enfoque Bayesiano. Sob o enfoque clássico a análise é baseada na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança e sob o enfoque Bayesiano são utilizadas duas densidades a priori: a densidade a priori não informativa de Jeffreys e uma densidade a priori informativa. Também é feita uma análise estatística do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) sob o enfoque clássico e sob o enfoque Bayesiano, considerando testes de sobrevivência acelerados. Finalmente apresenta-se três exemplos para ilustrar a metodologia desenvolvida.

Na análise estatística sob o enfoque Bayesiano são utilizados os métodos de aproximação de integrais de Laplace para a determinação das densidades a posteriori marginais e os momentos a posteriori de interesse.

ABSTRACT

The use of bivariate distributions has been very important in the study of system reliability since it is common the existence of two life times related to the systems.

In this work, we present a review of some different bivariate exponential models given in the literature. In special, we present a statistical analysis of the bivariate exponential distribution ACBVE of Block & Basu (1974) under the classycal and Bayesian approaches. Under the classycal approach, the analysis is based on the asymptotical normality of the maximun likelihood estimators and under the Bayesian approach, it is considered two prior densities : a Jeffreys prior density and an informative prior density. We also present a statistical analysis of the Block & Basu (1974) ACBVE model considering accelerated life test under the classycal and Bayesian approaches, and three examples to illustrate the proposed methodology.

Under the Bayesian approach it is used Laplace's method for approximation of integrals to get marginal posterior densities or posterior moments of interest.

CONTEÚDO

	Pág.
1.- INTRODUÇÃO	1
1.1.- Distribuições exponenciais bivariadas propostas por Gumbel.	2
1.1.1.- Primeira distribuição exponencial bivariada de Gumbel.	2
1.1.2.- Segunda distribuição exponencial bivariada de Gumbel.	3
1.1.3.- Terceira distribuição exponencial bivariada de Gumbel.	4
1.2.- Distribuição exponencial bivariada proposta por Freund.	5
1.3.- Distribuição exponencial bivariada de Marshall & Olkin (EBV).	7
1.3.1.- Modelo de choque fatal.	8
1.3.2.- Modelo de choques não fatais.	8
1.4.- Distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua (EBVAC) de Block & Basu.	10
1.4.1.- Primeira dedução da distribuição EBVAC.	11
1.4.2.- Segunda dedução da distribuição EBVAC.	12
1.4.3.- Aplicações das distribuições EBV e EBVAC.	13
1.5.- Outras distribuições.	14
1.6.- Objetivos.	14

2.- ANÁLISE CLÁSSICA DO MODELO DE BLOCK & BASU (EBVAC)	16
2.1.- Formulação do modelo.	16
2.2.- Estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .	18
2.3.- Inferências sobre os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .	19
2.3.1.- Intervalos de confiança para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 da distribuição EBVAC.	24
2.3.2.- Teste de hipótese para $H_0: \lambda_3=0$ contra $H_1: \lambda_3>0$.	25
3.- ANÁLISE CLÁSSICA DO MODELO DE BLOCK & BASU APLICADO EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE POTÊNCIA.	26
3.1.- Algumas considerações.	27
3.2.- Formulação do modelo.	29
3.3.- Estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P .	31
3.4.- Inferências sobre os parâmetros.	32
3.4.1.- Intervalos de confiança para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P .	38
3.4.2.- Teste de hipótese para a independência das variáveis X e Y .	39
3.5.- Algumas reparametrizações.	40
3.5.1.- Reparametrização logaritmica nos parâmetros c_1 , c_2 e c_3 .	40
3.5.2.- Reparametrização logaritmica nos parâmetros c_1 e c_2 .	43
4.- ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO EBVAC DE BLOCK & BASU.	47
4.1.- Análise Bayesiana considerando uma densidade a priori não informativa.	48

4.1.1.- Análise Bayesiana assumindo λ_1 , λ_2 e λ_3 desconhecidos.	48
4.1.1.1.- Densidade a priori não informativa de Jeffreys.	48
4.1.1.2.- Densidade a posteriori conjunta para λ_1 , λ_2 e λ_3 .	49
4.1.1.3.- Densidade a posteriori marginal para λ_3 .	49
4.1.1.4.- Densidade a posteriori marginal para λ_1 .	52
4.1.1.5.- Densidade a posteriori marginal para λ_2 .	54
4.1.2.- Análise Bayesiana assumindo λ_3 conhecido.	56
4.1.2.1.- Densidade a posteriori marginal para λ_1 .	57
4.1.2.2.- Densidade a posteriori marginal para λ_2 .	58
4.1.3.- Análise Bayesiana quando $\lambda_3=0$.	60
4.2.- Análise Bayesiana considerando uma densidade a priori informativa.	61
4.2.1.- Densidade a priori informativa.	61
4.2.2.- Densidade a posteriori conjunta para λ_1 , λ_2 e λ_3 .	62
4.2.3.- Densidade a posteriori marginal para λ_3 .	63
4.2.4.- Densidade a posteriori marginal para λ_1 .	64
4.2.5.- Densidade a posteriori marginal para λ_2 .	65
4.3.- Estimadores de Bayes para os tempos médios de vida.	66
4.4.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes.	69

4.4.1.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes em série.	69
4.4.2.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes em paralelo.	70
5.- ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO EBVAC DE BLOCK & BASU APLICADO EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE POTÊNCIA	72
5.1.- Análise Bayesiana considerando uma densidade a priori não informativa.	72
5.1.1.- Densidade a priori para c_1 , c_2 , c_3 e P.	73
5.1.2.- Densidade a posteriori conjunta para c_1 , c_2 , c_3 e P.	74
5.1.3.- Densidade a posteriori marginal para P.	74
5.2.- Análise Bayesiana assumindo P conhecido.	77
5.2.1.- Densidade a posteriori conjunta para c_1 , c_2 e c_3 .	78
5.2.2.- Densidade a posteriori marginal para c_3 .	78
5.2.3.- Densidade a posteriori marginal para c_1 .	79
5.2.4.- Densidade a posteriori marginal para c_2 .	80
5.3.- Análise Bayesiana assumindo P conhecido e uma densidade a priori informativa para c_1 , c_2 e c_3 .	81
5.3.1.- Densidade a posteriori conjunta para c_1 , c_2 e c_3 .	82
5.3.2.- Densidade a posteriori marginal para c_3 .	82
5.3.3.- Densidade a posteriori marginal para c_1 .	83
5.3.4.- Densidade a posteriori marginal para c_2 .	85
5.4.- Estimadores de Bayes para os tempos médios de vida.	86

5.5.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes.	87
5.5.1.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes em série.	87
5.5.2.- Estimador de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes em paralelo.	88
6.- EXEMPLOS.	90
6.1.- Exemplo 1.	90
6.2.- Exemplo 2.	101
6.3.- Exemplo 3.	110
7.- CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.	120
BIBLIOGRAFIA.	122
APÊNDICE 1.	127
APÊNDICE 2.	130
APÊNDICE 3.	133
APÊNDICE 4.	141
APÊNDICE 5.	147
APÊNDICE 6.	149

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A distribuição exponencial têm um papel muito importante no estudo da confiabilidade de componentes, sistemas e produtos em geral, pois em muitas situações este modelo é adequado para representar os tempos de vida desses produtos.

Na prática, o tempo de vida de um sistema depende do funcionamento de seus componentes. Isto leva os engenheiros a observarem os tempos de vida dos componentes do sistema que geralmente são correlacionados, e não somente o tempo de vida do sistema.

Em aplicações onde se considera a suposição de independência entre os tempos de vida dos componentes de um sistema, é possível a formulação de modelos mais simples que possam descrever o comportamento do tempo de vida do sistema, ainda que, essa suposição seja questionável ou muitas vezes falsa.

Os fatos mencionados acima motivaram os pesquisadores a tentarem formular modelos que possam descrever adequadamente os tempos de vida de sistemas com vários componentes. Um caso especial ocorre quando existem dois tempos de vida X e Y associados com cada sistema. Esses tempos de vida X e Y são em geral correlacionados e existe a necessidade de formular modelos bivariados para descrever esses dados. Um modelo muito utilizado neste caso é dado pela distribuição exponencial bivariada.

Nos últimos 30 anos, têm sido formuladas várias versões

da distribuição exponencial bivariada. Entre essas versões pode-se mencionar as distribuições exponenciais bivariadas de Gumbel (1960), Freund (1961), Marshall & Olkin (1967), Downton (1970), Hawkes (1972), Block & Basu (1974) e Sarkar (1987).

A seguir serão apresentadas algumas das distribuições exponenciais bivariadas existentes na literatura, contudo o enfoque deste trabalho é a análise estatística do modelo de Block & Basu (1974), muito importante nas aplicações industriais.

1.1.- DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS BIVARIADAS PROPOSTAS POR GUMBEL

1.1.1.- PRIMEIRA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL

Uma primeira distribuição exponencial bivariada proposta por Gumbel (1960) tem função de distribuição dada por:

$$F_{x,y}(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\delta xy)}, \quad x, y \geq 0$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad (1.1)$$

com funções distribuições marginais exponenciais $F_1(x)$ e $F_2(y)$ dadas por:

$$F_1(x) = 1 - e^{-x}, \quad F_2(y) = 1 - e^{-y}. \quad (1.2)$$

A função densidade conjunta para X e Y é dada por:

$$f_{x,y}(x,y) = e^{-x-y-\delta xy} [(1+\delta x)(1+\delta y)-\delta], \quad x, y \geq 0$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad (1.3)$$

Observa-se que, se $\delta = 0$, tem-se independência entre X e Y.

O valor esperado do produto cruzado XY é dado por:

$$E(XY) = \delta^{-1} \exp(1/\delta) K \quad (1.4)$$

onde

$$K = \int_{\delta^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz .$$

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y, é dado por:

$$\rho = \delta^{-1} \exp(-1/\delta) K - 1 . \quad (1.5)$$

1.1.2.- SEGUNDA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL.

A segunda distribuição introduzida por Gumbel (1960) foi motivada por uma aplicação de um resultado de Morgenstern (1956): dadas duas funções de distribuição $F_1(x)$ e $F_2(y)$, uma função de distribuição conjunta bivariada $F(x,y)$ pode ser construída como sendo:

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y) [1 + \alpha [1-F_1(x)][1-F_2(y)]] , \quad (1.6)$$

onde $x, y \geq 0$, $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Portanto, considerando $F_1(x)$ e $F_2(y)$ funções de distribuição exponenciais padronizadas, a distribuição exponencial bivariada proposta por Gumbel é dada por:

$$F(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y})(1+\alpha e^{-x-y}) , \quad (1.7)$$

onde $x, y \geq 0$ e $-1 \leq \alpha \leq 1$.

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x,y) = e^{-x-y} [1 + \alpha (2e^{-x}-1)(2e^{-y}-1)] . \quad (1.8)$$

Observa-se que existe independência quando $\alpha=0$.

O valor esperado do produto cruzado XY é dado por:

$$E(XY) = 1 + \frac{\alpha}{4} . \quad (1.9)$$

Então, o coeficiente de correlação linear entre X e Y , é dado por:

$$\rho(X,Y) = \frac{\alpha}{4} . \quad (1.10)$$

Observa-se que, o coeficiente de correlação linear $\rho(X,Y)$ toma valores no intervalo $[-1/4, 1/4]$, pois o parâmetro α pertence ao intervalo $[-1, 1]$.

1.1.3.- TERCEIRA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL.

A terceira distribuição exponencial bivariada com marginais exponenciais proposta por Gumbel (1960) tem função distribuição conjunta dada por:

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + P(x,y) , \quad x, y \geq 0 \quad (1.11)$$

onde $P(x,y) = \exp[-(x^m + y^m)^{1/m}] , \quad m \geq 1$

Quando $m = 1$, tem-se independência entre X e Y .

A função densidade de probabilidade conjunta para X e Y é dada por:

$$f(x,y) = P(x,y) (x^m + y^m)^{(1/m-2)} x^{m-1} y^{m-1} [(x^m + y^m)^{1/m} + m - 1] . \quad (1.12)$$

1.2.- DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA PROPOSTA POR FREUND.

John Freund (1961) apresenta uma distribuição exponencial bivariada que é indicada, em particular, para teste de vida de sistemas de dois componentes, onde os sistemas podem continuar funcionando mesmo depois que um dos seus componentes tenha falhado. Assim, o modelo poderia ser aplicado ao estudo de falhas de motores de um avião bimotor, ao funcionamento dos ouvidos, rins ou qualquer sistema com dois órgãos no ser humano, etc.

Basicamente, Freund supõe um sistema de dois componentes A e B com tempos de vida X e Y respectivamente. As funções densidades das variáveis aleatórias X e Y são dadas por:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad \text{e} \quad f(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad (1.13)$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e $x, y > 0$.

A dependência entre X e Y é dada de tal forma que a falha do componente B muda o parâmetro da distribuição de vida exponencial do componente A de α para α' . Da mesma forma, se ocorrer falha no componente A, o parâmetro da distribuição de vida exponencial do componente B muda de β para β' .

Com as considerações mencionadas acima, Freund propôs a seguinte função de densidade conjunta para X e Y:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta'y - (\alpha+\beta-\beta')x}, & 0 < x < y \\ \beta\alpha' e^{-\alpha'x - (\alpha+\beta-\alpha')y}, & 0 < y < x \end{cases} \quad (1.14)$$

onde $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$.

A diferença entre este modelo e os modelos propostos por Gumbel (1960) é dada pelas suas densidades marginais que, em geral, não são exponenciais:

$$f_x(x) = \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)x}}{\alpha + \beta - \alpha'} + \frac{\alpha' \beta e^{-\alpha'x}}{\alpha + \beta - \alpha'}, \quad \text{com } \alpha + \beta \neq \alpha' \quad (1.15)$$

$$f_y(y) = \frac{(\beta - \beta')(\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)y}}{\alpha + \beta - \beta'} + \frac{\alpha \beta' e^{-\beta'y}}{\alpha + \beta - \beta'}, \quad \text{com } \alpha + \beta \neq \beta' \quad (1.16)$$

Nos casos especiais onde $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$, X e Y são variáveis aleatórias independentes com densidades,

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad \text{e} \quad f(y) = \beta e^{-\beta y}. \quad (1.17)$$

A função geradora de momentos da distribuição exponencial bivariada (eq. 1.14) é dada por :

$$m(s, t) = \frac{1}{\alpha + \beta - s - t} \left[\frac{\beta}{1 - s/\alpha'} + \frac{\alpha}{1 - t/\beta'} \right], \quad (1.18)$$

de onde são obtidas

$$E(X) = \frac{\alpha' + \beta}{\alpha'(\alpha + \beta)}, \quad (1.19)$$

$$E(Y) = \frac{\beta' + \alpha}{\beta'(\alpha + \beta)}, \quad (1.20)$$

$$V(X) = \frac{\alpha'^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha'^2(\alpha + \beta)^2}, \quad (1.21)$$

$$V(Y) = \frac{\beta'^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}{\beta'^2(\alpha + \beta)^2}, \quad (1.22)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\alpha' \beta' - \alpha \beta}{\alpha' \beta' (\alpha + \beta)^2}, \quad (1.23)$$

e o coeficiente de correlação linear entre X e Y,

$$\rho(X, Y) = \frac{\alpha' \beta' - \alpha \beta}{[(\alpha'^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\beta'^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2)]^{1/2}}. \quad (1.24)$$

Os seguintes casos são de especial interesse:

- a) Em muitas aplicações $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, isto é, o tempo de vida tende a ser pequeno quando o outro componente não está funcionando.
- b) Quando $\alpha' \rightarrow \infty$ e $\beta' \rightarrow \infty$ tem-se $\rho \rightarrow 1$; isto significa que um sistema de dois componentes não pode funcionar se qualquer um dos dois componentes falhar.
- c) O coeficiente de correlação tende a $-1/3$ quando $\alpha = \beta$, $\alpha' \rightarrow 0$ e $\beta' \rightarrow 0$; isto significa que qualquer componente torna-se "quase infalível" quando o outro componente falhar. Esta não seria uma situação realista.

1.3. - DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE MARSHALL & OLKIN.

Marshall & Olkin (1967) introduziram uma importante versão da distribuição exponencial bivariada dada por:

$$P[X > s, Y > t] = e^{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 \max(s, t)}, \quad s, t > 0 \quad (1.25)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$

Denota-se a distribuição com função de sobrevivência (eq. 1.25), como $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

O modelo de Marshall & Olkin (1967) foi motivado por dois resultados em confiabilidade que estão baseados em modelos nos quais um sistema de dois componentes sobrevive ou falha de acordo com a ocorrência de choques para cada um ou para os dois componentes. Esses resultados são apresentados a seguir.

1.3.1.- MODELO DE CHOQUE FATAL.

Suponha que os componentes de um sistema de dois componentes falhem depois de receber um choque que é sempre fatal, e que processos de Poisson independentes $Z_1(t, \lambda_1)$, $Z_2(t, \lambda_2)$ e $Z_3(t, \lambda_3)$ governam a ocorrência de choques. Eventos no processo $Z_1(t, \lambda_1)$ são choques para o componente 1, eventos no processo $Z_2(t, \lambda_2)$ são choques para o componente 2 e eventos no processo $Z_3(t, \lambda_3)$ são choques para os dois componentes simultaneamente. Daí, se X e Y denotam a vida do primeiro e do segundo componente, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{F}(s, t) &= P[X > s, Y > t] \\ &= P[Z_1(s, \lambda_1) = 0, Z_2(t, \lambda_2) = 0, Z_3(\max(s, t), \lambda_3) = 0] \\ &= e^{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 \max(s, t)}.\end{aligned}\quad (1.26)$$

1.3.2.- MODELO DE CHOQUES NÃO FATAIS.

Suponha um sistema de dois componentes e três processos de Poisson independentes $Z_1(t, \delta_1)$, $Z_2(t, \delta_2)$ e $Z_3(t, \delta_3)$ governando a ocorrência de choques que não precisam ser fatais.

Descreve-se o estado do sistema pelos pares ordenados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, onde "1" indica que um componente está funcionando e "0" indica que não está funcionando.

Suponha que eventos no processo $Z_1(t, \delta_1)$ são choques no primeiro componente que causam uma transição de $(1, 1)$ até $(0, 1)$ com probabilidade p_1 e de $(1, 1)$ até $(1, 1)$ com probabilidade $(1 - p_1)$. Similarmente, eventos no processo $Z_2(t, \delta_2)$ são transições de $(1, 1)$ até $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ com probabilidade p_2 e $(1 - p_2)$ respectivamente. Eventos no processo $Z_3(t, \delta_3)$ são choques nos dois componentes que causam uma transição do estado $(1, 1)$ até os estados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ com probabilidades p_{00} , p_{01} , p_{10} , p_{11} respectivamente. Além disso, assuma que cada choque em um componente representa uma

chance independente de falha.

Se X e Y são os tempos de vida do primeiro e do segundo componente respectivamente, e como $Z_1(t, \delta_1)$, $Z_2(t, \delta_2)$, $Z_3(t, \delta_3)$ são independentes e têm incrementos independentes, tem-se para $t \geq s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 P[X > s, Y > t] &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_1 s} \frac{(\delta_1 s)^k}{k!} (1-p_1)^k \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_2 t} \frac{(\delta_2 t)^k}{k!} (1-p_2)^k \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-\delta_3 s} \frac{(\delta_3 s)^m}{m!} p_{11}^m \right] \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left[e^{-\delta_3 (t-s)} \frac{[\delta_3 (t-s)]^n}{n!} (p_{11} + p_{01})^n \right] \right\} \cdot \\
 P[X > s, Y > t] &= e^{-(\delta_1 p_1 + \delta_3 p_{01})s - [\delta_2 p_2 + \delta_3 (1-p_{11} - p_{01})]t} .
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Por simetria, para $s \geq t \geq 0$ tem-se:

$$P[X > s, Y > t] = e^{-(\delta_1 p_1 + \delta_3 (1-p_{11} - p_{10}))s - (\delta_2 p_2 + \delta_3 p_{10})t} . \tag{1.28}$$

Conseqüentemente, combinando (eq. 1.27) e (eq. 1.28) obtém-se:

$$P[X > s, Y > t] = e^{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 \max(s, t)} , \tag{1.29}$$

onde $\lambda_1 = \delta_1 p_1 + \delta_3 p_{01}$, $\lambda_2 = \delta_2 p_2 + \delta_3 p_{10}$, $\lambda_3 = \delta_3 p_{00}$.

As propriedades da distribuição $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são apresentadas no APÊNDICE 1.

1.4.- DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA (EBVAC) DE BLOCK & BASU.

Block & Basu (1974), motivados pelas boas propriedades e pelas aplicações da distribuição EBV de Marshall & Olkin (1967) desenvolveram uma versão absolutamente contínua dessa distribuição que foi chamada de EBVAC. Esta distribuição é a parte absolutamente contínua da EBV de Marshall & Olkin (1967), e é uma variante da distribuição exponencial bivariada de Freund (1961).

Antes de apresentar as deduções da EBVAC, segue uma definição e alguns resultados usados por Block & Basu (1967) na dedução da EBVAC.

DEFINIÇÃO.- Uma variável aleatória bivariada (X,Y) tem a propriedade da perda de memória (PPM) se:

$$\bar{F}(s_1+t, s_2+t) = \bar{F}(s_1, s_2)\bar{F}(t, t), \quad \text{para } s_1, s_2, t \geq 0$$

onde $\bar{F}(s, t) = P[X > s, Y > t]$. □

Uma condição equivalente à PPM é a seguinte:

$$\bar{F}(x, y) = \begin{cases} e^{-\theta y} \bar{F}_1(x-y) & 0 \leq y \leq x \\ e^{-\theta x} \bar{F}_2(y-x) & 0 \leq x \leq y \end{cases}, \quad (1.30)$$

onde $\theta > 0$, $\bar{F}_1(x) = \bar{F}(x, 0)$, $\bar{F}_2(y) = \bar{F}(0, y)$, $\bar{F}(0, 0) = 1$.

A seguir são apresentados dois resultados introduzidos por Marshall & Olkin (1967).

COROLÁRIO 1.- Se $F_1(x)$ e $F_2(y)$ têm densidades absolutamente contínuas, então $F(x, y)$ dado por (eq. 1.30) é uma distribuição bivariada absolutamente contínua se e sómente se:

$$i) \theta = f_1(0) + f_2(0)$$

$$ii) \frac{\partial \log f_j(z)}{\partial z} \geq -\theta \text{ para todo } z \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad \square$$

COROLÁRIO 2.- Seja (X, Y) uma variável aleatória bivariada positiva (isto é, $P(X>0, Y>0)=1$), absolutamente contínua e que possui a PPM. Se as densidades marginais são exponenciais então X e Y são independentes. $\square$

Desse corolário pode-se observar que, para obter uma distribuição bivariada absolutamente contínua com a propriedade da perda da memória (PPM), não devem ser assumidas distribuições marginais exponenciais.

1.4.1.- PRIMEIRA DEDUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EBVAC

O objetivo desta seção é obter uma distribuição absolutamente contínua possuindo a propriedade de perda de memória.

Pelo corolário 2, observa-se que não devem ser assumidas distribuições marginais exponenciais. Uma alternativa razoável é supor densidades marginais que sejam misturas ou médias ponderadas de exponenciais, isto é:

$$\begin{cases} P[X>x] = p_1 e^{-a_1 x} + q_1 e^{-b_1 x}, & x>0 \\ P[Y>y] = p_2 e^{-a_2 y} + q_2 e^{-b_2 y}, & y>0 \end{cases} \quad (1.31)$$

onde $p_i + q_i = 1$; $p_i, a_i, b_i > 0$; $q_i = 0$, para $i = 1, 2$, e se $q_i < 0$ então $a_i < b_i$.

Pode-se verificar que X e Y individualmente têm taxa de falha decrescente (TFD) se e somente se $q_i > 0$, e taxa de falha crescente (TFC) se e somente se $q_i < 0$, para $i = 1, 2$. Por considerações de sobrevivência, Block & Basu (1974) consideraram

$q_1 < 0$, e por considerações da PPM as marginais dadas em (eq. 1.31) tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \bar{F}_1(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)x} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ \bar{F}_2(y) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)y} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda y}, & y > 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ e $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

A forma de (eq 1.32) de fato é um caso particular da distribuição EBV de Marshall & Olkin (1967) quando o componente singular é eliminado.

Pelo corolário 1 e a suposição de perda de memória, segue que (X, Y) têm distribuição dada por:

$$\bar{F}(x, y) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda \max(x, y)} \quad (1.33)$$

para $x > 0$ e $y > 0$.

Block & Basu (1974) denotaram esta distribuição por $EBVAC(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Uma outra dedução da distribuição EBVAC pode ser feita usando o modelo sugerido por Freund (1961).

1.4.2.- SEGUNDA DEDUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EBVAC.

Suponha que (X, Y) denote o tempo de vida de um sistema de dois componentes. Suponha também que X e Y tenham distribuições exponenciais com médias α^{-1} e β^{-1} ($\alpha, \beta > 0$), respectivamente quando estão livres de forças externas. Se o componente 1 falhar antes do componente 2, uma força adicional é localizada sobre o componente 2 produzindo uma mudança no seu parâmetro de β para β'

quando $\beta' > \beta$. Da mesma forma, se o componente 2 falhar antes do componente 1, uma força adicional é localizada sobre o componente 1 produzindo também uma mudança no seu parâmetro de α para α' , quando $\alpha' > \alpha$. Então usando a dedução de Freund (1961) para $\alpha = \lambda_1 + \lambda_3 [\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)]$, $\beta = \lambda_2 + \lambda_3 [\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)]$, $\alpha' = \lambda_1 + \lambda_3$, $\beta' = \lambda_2 + \lambda_3$; onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$; tem-se que, $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ e (X, Y) tem densidade:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x - (\lambda_2 + \lambda_3) y}, & x < y \\ \frac{\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_3) x - \lambda_2 y}, & x > y \end{cases} \quad (1.34)$$

Isto produz a distribuição EBVAC($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) dada anteriormente.

As propriedades da distribuição EBVAC são apresentadas no APÊNDICE 2.

1.4.3.- APLICAÇÕES DAS DISTRIBUIÇÕES EBV E EBVAC.

As formulações das distribuições EBV e EBVAC são tais que essas distribuições são aplicáveis para descrever uma variedade de situações como: a falha dos motores de um avião bimotor, a falha de órgãos pares como rins, pulmões, olhos etc. Qualquer uma dessas duas distribuições poderia descrever satisfatoriamente cada uma das situações mencionadas acima, se um choque fatal ocorrer numa situação especificada. Por exemplo, em certos tipos de doenças é possível que a falha simultânea de dois órgãos seja tão rara que a ocorrência de um choque fatal possa ser descartado. Em outras situações é possível que um par de órgãos falhe simultaneamente (por exemplo: perda dos olhos devido a uma explosão). No primeiro caso a distribuição EBVAC seria mais apropriada enquanto que no segundo caso a distribuição EBV seria melhor.

1.5.- OUTRAS DISTRIBUIÇÕES

Downton (1970) e Hawkes (1972), deduziram outras distribuições bivariadas. Eles assumiram uma generalização de um modelo de choque acumulativo de uma situação univariada em lugar da propriedade da perda de memória usada por Marshall & Olkin (1967). Esta generalização depende da escolha de uma distribuição geométrica bivariada. Cada um deles escolheu uma distribuição geométrica bivariada diferente e obteve uma distribuição exponencial bivariada diferente.

Sarkar (1987) deduziu uma distribuição bivariada absolutamente contínua com marginais exponenciais. Ele baseia sua dedução na seguinte propriedade de caracterização da EBV demonstrada por Block (1977):

Se (X,Y) tem distribuição EBV então,

- (i) X e Y são marginalmente exponenciais
- (ii) $\min(X,Y)$ é exponencial
- (iii) $\min(X,Y)$ é independente de $X-Y$

Sarkar (1987) modificou somente a condição (iii) na forma: $\min(X,Y)$ é independente de $g(X,Y)$ para algum $g \in \mathcal{E}$; onde $\mathcal{E} = \{g(X,Y): g(X,X)=0, g(X,Y) \text{ é estritamente crescente (decrecente) em } X(Y) \text{ para } Y(X) \text{ fixo}\}$.

1.6.- OBJETIVOS.

Os objetivos deste trabalho são os seguintes:

- a.- Desenvolver uma análise estatística do modelo exponencial bivariado EBVAC de Blok & Basu (1974) sob o enfoque clássico e sob o enfoque Bayesiano.

Sob o enfoque clássico a análise estará baseada na aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

Sob o enfoque Bayesiano serão consideradas duas densidades a priori para os parâmetros do modelo e serão utilizados os métodos de aproximação de integrais de Laplace (ver por exemplo, Tierney & Kadane (1986) e Kass et alii (1990)) para determinar as densidades a posteriori de interesse.

- b.- Desenvolver uma análise estatística do modelo exponencial bivariado EBVAC de Block & Basu (1974) considerando testes acelerados e o modelo de potência inversa para relacionar o parâmetro de interesse com a variável "stress" (ver por exemplo Basu & Ebrahimi (1987)).

Sob o enfoque clássico a análise estará baseada na aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança e serão consideradas duas reparametrizações na procura de melhorar a aproximação assintótica desses estimadores.

Sob o enfoque Bayesiano serão utilizadas também duas densidades a priori para os parâmetros deste modelo e serão utilizados os métodos de aproximação de integrais de Laplace para determinar as densidades a posteriori de interesse.

- c.- Ilustrar os métodos propostos através de exemplos considerando dados simulados.

CAPÍTULO II

ANÁLISE CLÁSSICA DO MODELO DE BLOCK & BASU (EBVAC)

Como foi visto no capítulo anterior, Block & Basu (1974) introduziram uma versão absolutamente contínua da distribuição EBV de Marshall & Olkin (1967): a distribuição EBVAC. Na literatura, esta distribuição é considerada muito importante em aplicações industriais, especialmente em situações onde a probabilidade dos dois componentes falharem simultaneamente é desprezível.

Neste capítulo, serão encontrados os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros envolvidos no modelo de Block & Basu (1974) e, considerando a normalidade assintótica desses estimadores, os intervalos de confiança para os parâmetros. Também será apresentado um teste de hipóteses introduzido por Hanagal & Kale (1991) para testar a independência das variáveis (X,Y).

2.1.- FORMULAÇÃO DO MODELO.

Suponha que (X,Y) é um vetor aleatório não negativo que denota os tempos de sobrevivência de dois componentes de um sistema, com função de densidade de probabilidade (EBVAC) dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x - (\lambda_1 + \lambda_2) y} & \text{se } x < y \\ \frac{\lambda_2 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x - \lambda_2 y} & \text{se } x > y \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são parâmetros desconhecidos e $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Defina-se a variável indicadora δ_1 por:

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 < y_1 \\ 0 & \text{se } x_1 > y_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Considerando uma amostra aleatória de tamanho n , obtém-se a função de verossimilhança na forma:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x_i - (\lambda_2 + \lambda_3) y_i} \right]^{\delta_i} \cdot \left[\frac{\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_3) x_i - \lambda_2 y_i} \right]^{1-\delta_i}.$$

Isto é,

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda^n (\lambda_2 + \lambda_3)^{n_1} (\lambda_1 + \lambda_3)^{n_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \cdot e^{-[\lambda_1 n \bar{x} + \lambda_2 n \bar{y} + \lambda_3 R]} \quad (2.3)$$

onde

$$n_1 = \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad n_2 = \sum_{i=1}^n (1-\delta_i), \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n,$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n \quad \text{e} \quad R = \sum_{i=1}^n [y_i \delta_i + x_i (1-\delta_i)].$$

A partir da (eq. 2.3) pode-se estimar os parâmetros do modelo (λ_1, λ_2 e λ_3) pelo método de máxima verossimilhança.

2.2.- ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA (EMV) PARA OS PARÂMETROS λ_1 , λ_2 , e λ_3 .

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$ dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

A função log-verossimilhança definida por:

$$l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

e a função de verossimilhança (eq. 2.3), possuem seus máximos nos mesmos valores de λ_1 , λ_2 e λ_3 . Portanto, para simplificar cálculos, encontra-se o máximo da função log-verossimilhança.

A função log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log \lambda_2 + n \log \lambda + n_1 \log(\lambda_2 + \lambda_3) + \\ & + n_2 \log(\lambda_1 + \lambda_3) - n \log(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 n \bar{x} - \lambda_2 n \bar{y} - \lambda_3 R. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As primeiras derivadas de $l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ em relação a λ_1 , λ_2 e λ_3 são dadas por:

$$\frac{\partial l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} - \frac{n}{\lambda_1 + \lambda_2} - n \bar{x}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_2} = \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{n}{\lambda_1 + \lambda_2} - n \bar{y}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} = \frac{n}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} - R. \quad (2.7)$$

Igualando a zero as primeiras derivadas da função log-verossimilhança encontra-se as equações de verossimilhança para λ_1 , λ_2 e λ_3 . Resolvendo o sistema para λ_1 , λ_2 e λ_3 encontra-se os

estimadores de máxima verossimilhança. Como não é possível expressar λ_1 , λ_2 e λ_3 em forma explícita, os estimadores devem ser obtidos usando métodos iterativos, por exemplo o método de Newton Raphson ou o algoritmo Score (ver por exemplo, Lawless (1982, págs. 528-529)).

2.3.- INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS λ_1 , λ_2 E λ_3 .

Para fazer inferências sobre os parâmetros, utiliza-se a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver por exemplo, Mood et alii (1974, pág.359)), dada por:

$$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \approx N_3[(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); I^{-1}], \quad (2.8)$$

onde I é a matriz de informação de Fisher, isto é, a matriz dos valores esperados das segundas derivadas parciais da função log-verossimilhança $l(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ em relação a λ_1 , λ_2 e λ_3 , a menos do sinal. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1^2} = - \frac{n_1}{\lambda_1^2} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} + \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} = - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2^2} = - \frac{n_2}{\lambda_2^2} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} = - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_3^2} = - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}. \quad (2.14)$$

Dado que:

$$n_1 = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad \text{e} \quad n_2 = \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i),$$

tem-se que:

$$E(n_1) = \sum_{i=1}^n E(\delta_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.15)$$

e

$$E(n_2) = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.16)$$

Portanto, trocando o sinal e tomando esperanças das expressões (eq. 2.9), (eq. 2.10), (eq. 2.11), (eq. 2.12), (eq. 2.13) e (eq. 2.14) obtém-se.

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1^2} \right] = n \left[\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)^2} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right] = i_{11}, \quad (2.17)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right] = n \left[\frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right] = i_{12}, \quad (2.18)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} \right] = n \left[\frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)^2} \right]$$

$$= i_{13} , \quad (2.19)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2^2} \right] = n \left[\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right] = i_{22} , \quad (2.20)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} \right] = n \left[\frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)^2} \right]$$

$$= i_{23} , \quad (2.21)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_3^2} \right] = n \left[\frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)^2} \right] = i_{33} . \quad (2.22)$$

Dai, a matriz de informação de Fisher é dada por,

$$I = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{bmatrix} . \quad (2.23)$$

Observa-se que os elementos da Matriz I não são constantes (ver por exemplo Sprott (1973) e Sprott (1980)), isto é, são

funções dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 . Isto implica que antes de usar a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança para fazer inferências, é recomendável um estudo sobre a precisão destes estimadores, especialmente para problemas de amostras com tamanho pequeno ou moderado. Por exemplo, pode-se explorar os resultados apresentados por Anscombe (1964), isto é, avaliar se as terceiras derivadas da função log-verossimilhança localmente nos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$ são próximas de zero. Se a aproximação normal não é razoável pode-se tentar alguma reparametrização tal que as terceiras derivadas da função log-verossimilhança, localmente nos estimadores de máxima verossimilhança sejam próximas de zero, melhorando assim a "normalidade" da função de verossimilhança.

As terceiras derivadas da função log-verossimilhança são dadas por:

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_1^3} = 2 \left[\frac{n_1}{\lambda_1^3} + \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^3} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} \right], \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_2} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} \right], \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_3} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^3} \right], \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \partial \lambda_3} = 2 \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_2^3} = 2 \left[\frac{n_2}{\lambda_2^3} + \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^3} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} \right], \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_2^2 \partial \lambda_1} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} - \frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} \right], \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_2^2 \partial \lambda_3} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^3} \right], \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_3^3} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^3} \right], \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_3^2 \partial \lambda_1} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^3} \right], \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_3^2 \partial \lambda_2} = 2 \left[\frac{n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3} + \frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^3} \right]. \quad (2.33)$$

Kass & Slate (1992) num estudo de reparametrizações que levam à normalidade de funções de verossimilhança e densidades a posteriori apresentam uma medida que pode servir como um diagnóstico de não normalidade, dada por:

$$m^2 \bar{B}^2 = \sum_{i,j,k,l,m,n} \left| \frac{d_{ijk} d_{lmn}}{b_{ij} b_{ln} b_{km}} \right|, \quad (2.34)$$

onde

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \quad \text{e} \quad d_{ijk} = \frac{\partial^3 l}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j \partial \lambda_k}.$$

Esta medida usada para avaliar a normalidade conjunta da função de verossimilhança para os λ_1 , λ_2 e λ_3 , pode ser utilizada considerando diferentes reparametrizações ou transformações dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

2.3.1.- INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS λ_1 , λ_2 e λ_3 DA DISTRIBUIÇÃO EBVAC.

Considerando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$, pode-se calcular os intervalos de confiança para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Representando a inversa da matriz de informação de Fisher por:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e considerando um nível de confiança $100(1-\alpha)\%$, os intervalos de confiança para λ_1 , λ_2 e λ_3 são dados por:

$$IC(\lambda_1) = \left[\hat{\lambda}_1 - z_{\alpha/2} (\hat{a}_{11})^{1/2} ; \hat{\lambda}_1 + z_{\alpha/2} (\hat{a}_{11})^{1/2} \right], \quad (2.36)$$

$$IC(\lambda_2) = \left[\hat{\lambda}_2 - z_{\alpha/2} (\hat{a}_{22})^{1/2} ; \hat{\lambda}_2 + z_{\alpha/2} (\hat{a}_{22})^{1/2} \right], \quad (2.37)$$

$$IC(\lambda_3) = \left[\hat{\lambda}_3 - z_{\alpha/2} (\hat{a}_{33})^{1/2} ; \hat{\lambda}_3 + z_{\alpha/2} (\hat{a}_{33})^{1/2} \right], \quad (2.38)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil correspondente da distribuição Normal padronizada, e $\hat{a}_{ij}$ o elemento correspondente da inversa da matriz de informação de Fisher I^{-1} avaliado nos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$.

2.3.2.- TESTE DE HIPÓTESE PARA $H_0: \lambda_3=0$ CONTRA $H_1: \lambda_3>0$.

A propriedade da distribuição EBV de Marshall & Olkin (1967), que $\lambda_3=0$ se e somente se (X,Y) são independentes, é preservada na distribuição EBVAC de Block & Basu (1974). Portanto testar a hipótese $\lambda_3=0$ é equivalente a testar a independência de (X,Y) . Nesta seção apresenta-se um teste de hipótese introduzido por Hanagal & Kale (1991) para $H_0: \lambda_3=0$ contra $H_1: \lambda_3>0$, baseado no estimador de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_3$ do parâmetro λ_3 .

Como a distribuição exata de $\hat{\lambda}_3$ é muito difícil de se obter, usando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver Seção 2.3) é possível determinar que a distribuição assintótica de $\hat{\lambda}_3$ é Normal $N[\lambda_3, a_{33}]$. Dado que a_{33} depende de parâmetros desconhecidos, usando $\hat{a}_{33}$ em lugar de a_{33} , Hanagal & Kale (1991) introduziram a estatística de teste:

$$\frac{\hat{\lambda}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} \quad (2.39)$$

que é Normal $N[0,1]$, e para $H_1: \lambda_3>0$, rejeitam $H_0: \lambda_3=0$, quando:

$$\frac{\hat{\lambda}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} > z_{1-\alpha} \quad (2.40).$$

onde $z_{1-\alpha}$ é o correspondente quantil da distribuição Normal padronizada.

NOTA.- Gupta et alii (1984), introduziram um teste para a independência das variáveis (X,Y) da distribuição EBVAC. O teste é baseado na estatística da razão de verossimilhança e na suposição que X e Y são homogêneas (isto é, $\lambda_1=\lambda_2$). Eles sugerem o uso do teste numa etapa preliminar da análise de dados depois de ter testado a restrição de homogeneidade das distribuições marginais.

CAPÍTULO III

ANÁLISE CLÁSSICA DO MODELO DE BLOCK & BASU APLICADO EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE POTÊNCIA

Um dos grandes interesses da indústria é medir a confiabilidade dos seus produtos. Isso em geral é uma tarefa difícil pois o custo de observar o tempo de vida de um produto, por exemplo um componente, um sistema, etc., em condições de funcionamento normais é muito alto. Além disso, como o avanço tecnológico é muito grande, corre-se o risco do produto se tornar obsoleto no término do teste sob condições normais. Também na prática, muitos produtos estão sujeitos a condições do meio ambiente difíceis de serem simuladas em laboratórios.

Uma alternativa para resolver o problema acima mencionado é usar testes de vida acelerados do produto, ou seja, reduzir o tempo de vida de cada unidade submetendo-a a provas em condições de funcionamento mais severas do que as normais (condições de "stress"). Depois extrapolar os resultados a condições normais e obter estimativas dos parâmetros da distribuição de vida utilizada. Esta é uma prática muito usada, como é observado na literatura sobre confiabilidade nas últimas décadas.

Quando existem tempos de vida bivariados associados a um produto e o interesse é fazer uma análise conjunta dos dados com os dois tempos de vida, o problema acima mencionado é ainda mais complicado. Neste capítulo é apresentada uma análise clássica para dados obtidos de uma população com tempos de vida bivariados (X, Y) que seguem a distribuição EBVAC de Block & Basu (1974) e submetidos

a J níveis de "stress", $V_1, V_2, \dots, V_J$, com o objetivo de fazer inferências sobre os seus tempos de vida em condições normais.

3.1. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.

Suponha que os tempos de vida (X,Y) de um sistema de dois componentes em um nível de "stress" normal V_0 sigam uma distribuição EBVAC de Block & Basu (1974) com parâmetros $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}$. Além disso, suponha que sob níveis de "stress" $V_1, V_2, \dots, V_J$, (X,Y) tenha a distribuição EBVAC com parâmetros $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}$ e λ_{3j} , para $j = 1, 2, \dots, J$. A função de densidade conjunta de (X,Y) , no nível de "stress" V_j , é dada por :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\lambda_{1j} \lambda_j (\lambda_{2j} + \lambda_{3j})}{\lambda_{1j} + \lambda_{2j}} e^{-\lambda_{1j}x - (\lambda_{2j} + \lambda_{3j})y} & \text{se } x < y \\ \frac{\lambda_{2j} \lambda_j (\lambda_{1j} + \lambda_{3j})}{\lambda_{1j} + \lambda_{2j}} e^{-(\lambda_{1j} + \lambda_{3j})x - \lambda_{2j}y} & \text{se } x > y \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\lambda_j = \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{3j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$.

O coeficiente de correlação linear entre X e Y no nível de "stress" V_j é dado por:

$$\rho_{x,y} = \frac{\lambda_{3j} [(\lambda_{1j}^2 + \lambda_{2j}^2) \lambda_j + \lambda_{1j} \lambda_{2j} \lambda_{3j}]}{[(\lambda_{1j} + \lambda_{2j})^2 \lambda_j^2 + \lambda_{2j} \lambda_{3j} (2\lambda_{1j} \lambda_j + \lambda_{3j} \lambda_{2j})]^{1/2}} \cdot \frac{1}{[(\lambda_{1j} + \lambda_{2j})^2 \lambda_j^2 + \lambda_{1j} \lambda_{3j} (2\lambda_{2j} \lambda_j + \lambda_{3j} \lambda_{1j})]^{1/2}}. \quad (3.2)$$

Em muitos problemas práticos, diferentes níveis de "stress" não têm efeito na estrutura dependente dos componentes

(ver por exemplo, Basu & Ebrahimi (1987)). Daí, como $\rho_{X,Y}$ é uma medida da correlação entre X e Y, ela continua constante de "stress" a "stress", isto é, independente de j, $j = 1, 2, \dots, J$. Esta condição pode ser verificada considerando o modelo de potência,

$$\lambda_{1j} = c_1 V_j^P \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 0, 1, 2, \dots, J \end{matrix} \quad (3.3)$$

onde c_1, c_2, c_3 e P são constantes a serem determinadas e V_j é a variável "stress" (o modelo de potência (3.3) foi considerado por Basu & Ebrahimi (1987)).

Considerando o modelo de potência (eq. 3.3), a função densidade de probabilidade (eq. 3.1) pode ser reescrita como segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c_1 c_{123} c_{23}}{c_{12}} V_j^{2P} e^{-[c_1 x + c_{23} y] V_j^P} & \text{se } x < y \\ \frac{c_2 c_{123} c_{13}}{c_{12}} V_j^{2P} e^{-[c_{13} x + c_2 y] V_j^P} & \text{se } x > y \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde $c_{12} = c_1 + c_2$, $c_{13} = c_1 + c_3$, $c_{23} = c_2 + c_3$, $c_{123} = c_1 + c_2 + c_3$.

Sob o nível de "stress" V_j pode-se verificar que os tempos médios de falha dos componentes dados por :

$$E(X) = \frac{(c_1 + c_2 + c_3)(c_1 + c_2) + c_2 c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)(c_1 + c_2)(c_1 + c_3)} V_j^{-P} \quad (3.5)$$

e

$$E(Y) = \frac{(c_1 + c_2 + c_3)(c_1 + c_2) + c_1 c_3}{(c_1 + c_2 + c_3)(c_1 + c_2)(c_2 + c_3)} V_j^{-P} \quad (3.6)$$

satisfazem o modelo de potência inversa com a distribuição exponencial (ver Mann et alii (1974)).

3.2.- FORMULAÇÃO DO MODELO

Considere um sistema de dois componentes com tempos de vida (X,Y) , e suponha que (X,Y) tenha distribuição EBVAC com parâmetros λ_{10} , λ_{20} , e λ_{30} quando o sistema está em condições normais de funcionamento (isto é, sob "stress" V_0).

Se testes de vida acelerados são conduzidos considerando n'_j sistemas submetidos a um "stress" V_j ($j = 1, \dots, J$), a função de verossimilhança para c_1 , c_2 , c_3 e P , no nível de "stress" V_j , é dada por:

$$L_j(c_1, c_2, c_3, P) = \prod_{i=1}^{n'_j} \left[\frac{c_1 c_{23} c_{123}}{c_{12}} V_j^{2P} e^{-(c_1 x_{1j} + c_{23} y_{1j}) V_j^P} \right]^{\delta_{1j}} \cdot \left[\frac{c_2 c_{13} c_{123}}{c_{12}} V_j^{2P} e^{-(c_{13} x_{1j} + c_2 y_{1j}) V_j^P} \right]^{1-\delta_{1j}},$$

onde (x_{1j}, y_{1j}) são os tempos de vida do i -ésimo componente no j -ésimo nível de "stress", e

$$\delta_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{1j} < y_{1j} \\ 0 & \text{se } x_{1j} \geq y_{1j} \end{cases} \quad (3.7)$$

Então,

$$L_j(c_1, c_2, c_3, P) = \frac{c_1^{n_{1j}} c_{23}^{n_{1j}} c_2^{n_{2j}} c_{13}^{n_{2j}} c_{123}^{n'_j}}{c_{12}^{n'_j}} \left[V_j^{2P} \right]^{n'_j} \cdot e^{-\left[c_1 n'_j \bar{x}_j + c_2 n'_j \bar{y}_j + c_3 \sum_{i=1}^{n'_j} (y_{1j} \delta_{1j} + (1-\delta_{1j}) x_{1j}) \right] V_j^P}.$$

onde

$$n_{1j} = \sum_{i=1}^{n'_j} \delta_{ij} ,$$

$$n_{2j} = \sum_{i=1}^{n'_j} (1-\delta_{ij}) ,$$

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n'_j} x_{ij}}{n'_j} ,$$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n'_j} y_{ij}}{n'_j} .$$

$$\text{Com } R_j = \sum_{i=1}^{n'_j} \left[y_{ij} \delta_{ij} + (1-\delta_{ij}) x_{ij} \right] , \text{ tem-se:}$$

$$L_j(c_1, c_2, c_3, P) = \frac{c_1^{n_{1j}} c_{23}^{n_{1j}} c_2^{n_{2j}} c_{13}^{n_{2j}} c_{123}^{n'_j}}{c_{12}^{n'_j}} \left[V_j^{2P} \right]^{n'_j} .$$

$$e^{-[c_1 n'_j \bar{x}_j + c_2 n'_j \bar{y}_j + c_3 R_j] V_j^P} . \quad (3.8)$$

Considerando os J níveis de "stress" $V_1, V_2, \dots, V_J$, como independentes, a função de verossimilhança para c_1, c_2, c_3 e P é dada por :

$$L(c_1, c_2, c_3, P) = \prod_{j=1}^J L_j(c_1, c_2, c_3, P)$$

$$= \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \left[\prod_{j=1}^J \left[V_j^{2P} \right]^{n'_j} \right] .$$

$$e^{-\sum_{j=1}^J [c_1 n'_j \bar{x}_j + c_2 n'_j \bar{y}_j + c_3 R_j] V_j^P} ,$$

assim,

$$L(c_1, c_2, c_3, P) = \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \left[\prod_{j=1}^J \left[V_j^{2P} \right]^{n'_j} \right] .$$

$$e^{-c_1 S_x(P) - c_2 S_y(P) - c_3 T(P)} , \quad (3.9)$$

onde

$$S_x(P) = \sum_{j=1}^J n'_{j\bar{x}} V_j^P, \quad S_y(P) = \sum_{j=1}^J n'_{j\bar{y}} V_j^P, \quad T(P) = \sum_{j=1}^J R_j V_j^P,$$

$$n_1 = \sum_{j=1}^J n_{1j}, \quad n_2 = \sum_{j=1}^J n_{2j}.$$

A função de verossimilhança (eq.3.9) resume toda a informação dos parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P contida na amostra. Da (eq.3.9) pode-se estimar os parâmetros do modelo.

3.3.- ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA (EMV) PARA OS PARÂMETROS c_1 , c_2 , c_3 e P .

Como visto no capítulo anterior, os estimadores de máxima verossimilhança são aqueles valores $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$ e $\hat{P}$ dos parâmetros, que maximizam a função de verossimilhança (eq.3.9).

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por :

$$\begin{aligned} l(c_1, c_2, c_3, P) &= \log L(c_1, c_2, c_3, P) \\ &= n_1 \log c_1 + n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_2 + n_2 \log c_{13} + \\ &\quad + n \log c_{123} - n \log c_{12} + 2P \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j - \\ &\quad - c_1 S_x(P) - c_2 S_y(P) - c_3 T(P) \end{aligned} \quad (3.10)$$

As primeiras derivadas da função log-verossimilhança (eq. 3.10) são dadas por :

$$\frac{\partial l(c_1, c_2, c_3, P)}{\partial c_1} = \frac{n_1}{c_1} + \frac{n_2}{c_{13}} + \frac{n}{c_{123}} - \frac{n}{c_{12}} - S_x(P), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial l(c_1, c_2, c_3, P)}{\partial c_2} = \frac{n_1}{c_{23}} + \frac{n_2}{c_2} + \frac{n}{c_{123}} - \frac{n}{c_{12}} - S_Y(P), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial l(c_1, c_2, c_3, P)}{\partial c_3} = \frac{n_1}{c_{23}} + \frac{n_2}{c_{13}} + \frac{n}{c_{123}} - T(P), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(c_1, c_2, c_3, P)}{\partial P} = & 2 \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j - c_1 \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \log V_j - \\ & c_2 \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \log V_j - c_3 \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \log V_j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Igualando a zero as equações (3.11), (3.12), (3.13), e (3.14), e resolvendo o sistema para c_1 , c_2 , c_3 e P , obtém-se os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros.

O sistema pode ser resolvido usando métodos iterativos, como por exemplo o método de Newton-Raphson ou o algoritmo Score.

3.4. INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS.

Utilizando a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver por exemplo, Mood et alii (1974, p.359)) pode-se fazer inferências sobre os parâmetros. Assim,

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{P}) \approx N_4[(c_1, c_2, c_3, P); I^{-1}] \quad (3.15)$$

onde I é a matriz de informação de Fisher, isto é, a matriz dos valores esperados das segundas derivadas parciais da função log-verossimilhança $l(c_1, c_2, c_3, P)$ em relação a c_1 , c_2 , c_3 e P , a menos do sinal. Assim, tem-se :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_1^2} = - \frac{n_1}{c_1^2} - \frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial c_2} = - \frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial c_3} = - \frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial P} = - \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \log V_j, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_2^2} = - \frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n_2}{c_2^2} - \frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_2 \partial c_3} = - \frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n}{c_{123}^2}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_2 \partial P} = - \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \log V_j, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_3^2} = - \frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial c_3 \partial P} = - \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \log V_j, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial P^2} = & - c_1 \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2 - c_2 \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2 - \\ & - c_3 \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por outro lado tem-se que :

$$\begin{aligned}
 E(n_1) &= E \left[\sum_{j=1}^J n'_{1j} \right] = E \left[\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n'_j} \delta_{1j} \right] = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n'_j} E(\delta_{1j}) \\
 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n'_j} \frac{c_1}{c_{12}} = \frac{nc_1}{c_{12}} ,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$E(n_2) = \frac{nc_2}{c_{12}} . \tag{3.27}$$

Portanto,

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_1^2} \right] = n \left[\frac{1}{c_1 c_{12}} + \frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right] = i_{11} , \tag{3.28}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial c_2} \right] = n \left[\frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right] = i_{12} , \tag{3.29}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial c_3} \right] = n \left[\frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right] = i_{13} , \tag{3.30}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_1 \partial P} \right] = \frac{c_{123} c_{12} + c_2 c_3}{c_{123} c_{12} c_{13}} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j = i_{14} , \tag{3.31}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_2^2} \right] = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right] = i_{22} , \tag{3.32}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_2 \partial c_3} \right] = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right] = i_{23} , \tag{3.33}$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_2 \partial P} \right] = \frac{c_{123} c_{12} + c_1 c_3}{c_{123} c_{12} c_{23}} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j = i_{24} , \quad (3.34)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_3^2} \right] = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right] = i_{33} , \quad (3.35)$$

$$E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial c_3 \partial P} \right] = \left[\frac{1}{c_{123}} + \frac{c_1}{c_{12} c_{23}} + \frac{c_2}{c_{12} c_{13}} \right] \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j = i_{34} , \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} E \left[- \frac{\partial^2 l}{\partial P^2} \right] &= c_1 \frac{c_{123} c_{12} + c_2 c_3}{c_{123} c_{12} c_{13}} \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log V_j \right)^2 + \\ &+ c_2 \frac{c_{123} c_{12} + c_1 c_3}{c_{123} c_{12} c_{23}} \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log V_j \right)^2 + \\ &+ c_3 \left[\frac{1}{c_{123}} + \frac{c_1}{c_{12} c_{23}} + \frac{c_2}{c_{12} c_{13}} \right] \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log V_j \right)^2 \\ &= i_{44} . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dai obtém-se a matriz de informação de Fisher,

$$I = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} \end{bmatrix} . \quad (3.38)$$

Pode-se observar que todos os termos da matriz de informação de Fisher I são funções dos parâmetros desconhecidos c_1 , c_2 , c_3 . Este fato chama a atenção, porque para amostras pequenas ou mesmo para amostras de tamanho moderado a aproximação normal em geral pode não ser boa, conduzindo assim a resultados pouco precisos. É recomendável então o estudo da precisão dessa

aproximação. Como visto no capítulo anterior, uma alternativa pode ser observar se as terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos EMV dos parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P são valores próximos de zero (ver por exemplo, Anscombe (1964)). Se isto for verdade, pode-se considerar que a aproximação é boa mesmo para amostras não muito grandes. Se não for, uma alternativa seria explorar algumas reparametrizações tal que as terceiras derivadas da função de log-verossimilhança avaliada nos estimadores de máxima verossimilhança estejam próximas de zero. Essa "normalidade" da verossimilhança poderia ser avaliada usando a medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ (ver Seção 2.3) introduzida por Kass & Slate (1992), na parametrização original e nas possíveis reparametrizações.

As terceiras derivadas da função log-verossimilhança são dadas por :

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1^3} = 2 \left\{ \frac{n_1}{c_1^3} + \frac{n_2}{c_{13}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} - \frac{n}{c_{12}^3} \right\}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1^2 \partial c_2} = 2n \left\{ \frac{1}{c_{123}^3} - \frac{1}{c_{12}^3} \right\}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1^2 \partial c_3} = 2 \left\{ \frac{n_2}{c_{13}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} \right\}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1^2 \partial P} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial c_2^2} = 2n \left\{ \frac{1}{c_{123}^3} - \frac{1}{c_{12}^3} \right\}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial c_2 \partial c_3} = 2 \frac{n}{c_{123}^3}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial c_2 \partial P} = 0 , \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial c_3^2} = 2 \left\{ \frac{n_2}{c_{13}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} \right\} , \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial c_3 \partial P} = 0 , \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_1 \partial P^2} = - \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2 , \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2^3} = 2 \left\{ \frac{n_1}{c_{23}^3} + \frac{n_2}{c_2^3} + \frac{n}{c_{123}^3} - \frac{n}{c_{12}^3} \right\} , \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2^2 \partial c_3} = 2 \left\{ \frac{n_1}{c_{23}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} \right\} , \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2^2 \partial P} = 0 , \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2 \partial c_3^2} = 2 \left\{ \frac{n_1}{c_{23}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} \right\} , \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2 \partial c_3 \partial P} = 0 , \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_2 \partial P^2} = - \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2 , \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^3} = 2 \left\{ \frac{n_1}{c_{23}^3} + \frac{n_2}{c_{13}^3} + \frac{n}{c_{123}^3} \right\}, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial P} = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3 \partial P^2} = - \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial P^3} = & - c_1 \sum_{j=1}^J n_j' \bar{x}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3 - c_2 \sum_{j=1}^J n_j' \bar{y}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3 - \\ & - c_3 \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3, \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.4.1.- INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS c_1 , c_2 , c_3 e P .

Assumindo que os estimadores de máxima verossimilhança tenham distribuição normal assintótica $N_4[(c_1, c_2, c_3, P); I^{-1}]$, onde

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

os intervalos de confiança $100(1-\alpha)\%$ para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P são dados por :

$$IC(c_1) = \left[\hat{c}_1 - z_{\alpha/2} (\hat{a}_{11})^{1/2}; \hat{c}_1 + z_{\alpha/2} (\hat{a}_{11})^{1/2} \right], \quad (3.59)$$

$$IC(c_2) = \left[\hat{c}_2 - z_{\alpha/2} (\hat{a}_{22})^{1/2}; \hat{c}_2 + z_{\alpha/2} (\hat{a}_{22})^{1/2} \right], \quad (3.60)$$

$$IC(c_3) = [\hat{c}_3 - z_{\alpha/2}(\hat{a}_{33})^{1/2} ; \hat{c}_3 + z_{\alpha/2}(\hat{a}_{33})^{1/2}] , \quad (3.61)$$

$$IC(P) = [\hat{P} - z_{\alpha/2}(\hat{a}_{44})^{1/2} ; \hat{P} + z_{\alpha/2}(\hat{a}_{44})^{1/2}] , \quad (3.62)$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o quantil correspondente da distribuição normal padronizada e $\hat{a}_{ij}$ o correspondente elemento a_{ij} da matriz I^{-1} avaliado nos estimadores de máxima verossimilhança.

3.4.2.- TESTE DE HIPÓTESE PARA A INDEPENDÊNCIA DAS VARIÁVEIS X, Y

No capítulo anterior apresentou-se um teste de hipótese para a independência das variáveis (X,Y) introduzido por Hanagal & Kale (1991). Fazendo uma extensão desse procedimento para testes acelerados, pode-se dizer que testar a independência das variáveis (X,Y) é equivalente a testar a hipótese $H_0: c_3=0$. Portanto, baseados na aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver Seção 3.4), verifica-se que o estimador $\hat{c}_3$ é distribuído assintoticamente segundo uma distribuição normal $N(c_3, a_{33})$. Considerando $\hat{a}_{33}$ em lugar de a_{33} , pois a_{33} envolve parâmetros desconhecidos, e sob a hipótese $H_0: c_3=0$, seria considerada a seguinte regra de decisão: para $H_1: c_3>0$, rejeitar $H_0: c_3=0$ quando:

$$\frac{\hat{c}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} > z_{1-\alpha} .$$

OBSERVAÇÃO : A estatística de teste $\hat{c}_3/(\hat{a}_{33})^{1/2}$ é normal $N(0,1)$, e $z_{1-\alpha}$ é o correspondente quantil da distribuição $N(0,1)$.

3.5.- ALGUMAS REPARAMETRIZAÇÕES

Como mencionado na seção anterior, o uso da aproximação normal assintótica para amostras pequenas e mesmo para as de tamanho moderado, às vezes é muito pobre. Na tentativa de melhorar essas aproximações foram consideradas duas reparametrizações: a primeira envolve a reparametrização logarítmica para os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , e a segunda envolve a reparametrização logarítmica para os parâmetros c_1 e c_2 somente.

3.5.1.- REPARAMETRIZAÇÃO LOGARÍTMICA NOS PARÂMETROS c_1 , c_2 E c_3 .

Considerando a reparametrização logarítmica dos parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , isto é, $\theta_1 = \log c_1$, $\theta_2 = \log c_2$ e $\theta_3 = \log c_3$, observa-se que a função log-verossimilhança (eq. 3.10) na parametrização θ_1 , θ_2 , θ_3 e P é dada por:

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \theta_2, \theta_3, P) = & n_1 \theta_1 + n_1 \log (e^{\theta_2} + e^{\theta_3}) + n_2 \theta_2 + \\ & + n_2 \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_3}) + n \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}) - \\ & - n \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) + 2P \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j - \\ & - e^{\theta_1} S_x(P) - e^{\theta_2} S_y(P) - e^{\theta_3} T(P) . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$\hat{\theta}_1 = \log \hat{c}_1, \quad \hat{\theta}_2 = \log \hat{c}_2, \quad \hat{\theta}_3 = \log \hat{c}_3 \quad \text{e} \quad \hat{P}.$$

Os termos da matriz de informação de Fisher nesta parametrização são dados por :

$$i_{11} = ne^{\theta_1} \left\{ \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right]^2} - \frac{e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] + e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \right\}, \quad (3.64)$$

$$i_{12} = ne^{\theta_1 + \theta_2} \left\{ - \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} \right\}, \quad (3.65)$$

$$i_{13} = ne^{\theta_1 + \theta_3} \left\{ \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} \right\}, \quad (3.66)$$

$$i_{14} = e^{\theta_1} \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] + e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j, \quad (3.67)$$

$$i_{22} = ne^{\theta_2} \left\{ \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right]^2} - \frac{e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] + e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \right\}, \quad (3.68)$$

$$i_{23} = ne^{\theta_2 + \theta_3} \left\{ \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} \right\}, \quad (3.69)$$

$$i_{24} = e^{\theta_2} \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] + e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j, \quad (3.70)$$

$$i_{33} = ne^{\theta_3} \left\{ - \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} - \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]^2} + \left[\frac{1}{e^{\theta_1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3}} + \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} + \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \right] \right\}, \quad (3.71)$$

$$i_{34} = e^{\theta_3} \left\{ \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} + \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} + \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \right\} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j, \quad (3.72)$$

$$i_{44} = e^{\theta_1} \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] + e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right]} \sum_{j=1}^J n'_j \left[\log V_j \right]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + e^{\theta_2} \frac{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2} \end{bmatrix} + e^{\theta_1+\theta_3}}{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ e^{\theta_2+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix}} \sum_{j=1}^J n'_j \left[\log V_j \right]^2 + \\
& + e^{\theta_3} \left[\frac{1}{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix}} + \frac{e^{\theta_1}}{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ e^{\theta_2+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix}} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{\theta_2}}{\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ e^{\theta_1+e} & e^{\theta_3} \end{bmatrix}} \right] \sum_{j=1}^J n'_j \left[\log V_j \right]^2 . \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Portanto, pela aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{P}) \approx N_4[(\theta_1, \theta_2, \theta_3, P); I^{-1}]$$

onde I^{-1} é a inversa da matriz de informação de Fisher.

3.5.2. - REPARAMETRIZAÇÃO LOGARÍTMICA NOS PARÂMETROS c_1 E c_2 .

Na reparametrização logarítmica dos parâmetros c_1 e c_2 , isto é, $\xi_1 = \log c_1$ e $\xi_2 = \log c_2$, observa-se que a função log-verossimilhança (eq. 3.10) na parametrização ξ_1, ξ_2, c_3 e P é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\xi_1, \xi_2, c_3, P) = & n_1 \xi_1 + n_1 \log(e^{\xi_2+c_3}) + n_2 \xi_2 + \\
& + n_2 \log(e^{\xi_1+c_3}) + n \log(e^{\xi_1+e} e^{\xi_2+c_3}) - \\
& - n \log(e^{\xi_1+e} e^{\xi_2}) + 2P \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j - \\
& - e^{\xi_1} S_X(P) - e^{\xi_2} S_Y(P) - c_3 T(P) . \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Usando novamente a propriedade da invariância dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$\hat{\xi}_1 = \log \hat{c}_1, \quad \hat{\xi}_2 = \log \hat{c}_2, \quad \hat{c}_3 \quad \text{e} \quad \hat{p}.$$

Os termos da matriz de informação de Fisher são dados por:

$$i_{11} = ne^{\xi_1} \left\{ \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right]^2} - \frac{c_3 e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]^2} - \frac{e^{\xi_2} + c_3}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right]^2} + \frac{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] + e^{\xi_2} c_3}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]} \right\}, \quad (3.75)$$

$$i_{12} = ne^{\xi_1+\xi_2} \left\{ - \frac{1}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right]^2} \right\}, \quad (3.76)$$

$$i_{13} = ne^{\xi_1} \left\{ \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right]^2} \right\} \quad (3.77)$$

$$i_{14} = e^{\xi_1} \frac{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] + e^{\xi_2} c_3}{\left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1 \xi_2}{e^{\xi_1+e}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]} \sum_{j=1}^J n'_j \log v_j, \quad (3.78)$$

$$i_{22} = ne^{\xi_2} \left\{ \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right]^2} - \frac{c_3 e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\xi_1+c_3}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} + \frac{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] + e^{\xi_1} c_3}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]} \right\}, \quad (3.79)$$

$$i_{23} = ne^{\xi_2} \left\{ \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} \right\} \quad (3.80)$$

$$i_{24} = e^{\xi_2} \frac{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] + e^{\xi_1} c_3}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]} \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j, \quad (3.81)$$

$$i_{33} = n \left\{ \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} + \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]^2} \right\}, \quad (3.82)$$

$$i_{34} = \left[\frac{1}{\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}}} + \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right]} + \right. \\ \left. + \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{e^{\xi_2}} \right] \left[\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right]} \right] \sum_{j=1}^J n'_j \log V_j, \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
i_{44} = & e^{\xi_1} \frac{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2+c_3} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) + e^{\xi_2 c_3}}{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2+c_3} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right)} \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log v_j \right)^2 + \\
& + e^{\xi_2} \frac{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2+c_3} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) + e^{\xi_1 c_3}}{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2+c_3} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right)} \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log v_j \right)^2 + \\
& + c_3 \left[\frac{1}{\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2+c_3}} + \frac{e^{\xi_1}}{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\xi_2}{e^{\xi_2+c_3}} \right)} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{\xi_2}}{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+e}} \frac{\xi_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1+c_3}} \right)} \right] \sum_{j=1}^J n'_j \left(\log v_j \right)^2. \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Pela aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{c}_3, \hat{P}) \approx N_4[(\xi_1, \xi_2, c_3, P); I^{-1}]$$

onde I^{-1} é a inversa da matriz de informação de Fisher.

Tanto na primeira quanto na segunda reparametrização observa-se que os elementos da matriz de informação de Fisher não são constantes, pois todos eles dependem dos parâmetros que são desconhecidos. Portanto, seria importante analisar a precisão da aproximação assintótica nas aplicações para cada conjunto de dados considerado.

As expressões das terceiras derivadas da função log-verossimilhança para as duas reparametrizações acima mencionadas são apresentadas no APÊNDICE 4.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO EBVAC DE BLOCK & BASU

Como foi mencionado nos capítulos II e III, no desenvolvimento de uma análise clássica do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) são usados resultados assintóticos, que são válidos para amostras de tamanho grande. Quando não existe muita precisão na aplicação desses resultados assintóticos podem ser consideradas reparametrizações para melhorar as aproximações assintóticas. No modelo considerado neste trabalho, observa-se também que os estimadores de máxima verossimilhança só são encontrados através de métodos iterativos. Um procedimento alternativo que pode simplificar grandemente esses problemas é considerar métodos Bayesianos para análise de dados com o modelo EBVAC (ver por exemplo, Box & Tiao (1973) e Press (1989)). Os métodos Bayesianos, além de ser uma alternativa de solução dos problemas acima mencionados, permitem a incorporação de conhecimento a priori na análise de dados através de uma densidade a priori informativa. No caso de não existir conhecimento a priori é considerada uma densidade a priori não informativa.

Neste capítulo apresenta-se uma análise Bayesiana do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) considerando inicialmente a densidade a priori não informativa de Jeffreys (ver por exemplo, Box & Tiao (1973)) e depois uma densidade a priori informativa. Nos dois casos são usados os métodos de aproximação de integrais de Laplace (ver por exemplo, Kass et alii (1990) e Tierney & Kadane (1986)) para encontrar as densidades a posteriori

marginais de interesse, os estimadores Bayesianos dos tempos médios de vida e os estimadores Bayesianos da função de confiabilidade para sistemas com dois componentes.

4.1.- ANÁLISE BAYESIANA CONSIDERANDO UMA DENSIDADE A PRIORI NÃO INFORMATIVA.

Uma vantagem do uso de métodos Bayesianos em análise de dados é que pode-se introduzir na análise informação a priori sobre os parâmetros. No caso em que não se tem opiniões formadas sobre os parâmetros, o grau de conhecimento deles é representado através de uma densidade a priori não informativa. Neste trabalho é usada a densidade a priori não informativa de Jeffreys (ver por exemplo, Box & Tiao (1973)).

4.1.1.- ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO λ_1 , λ_2 e λ_3 DESCONHECIDOS

4.1.1.1.- Densidade a priori não informativa de Jeffreys.

A densidade a priori não informativa de Jeffreys para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 é dada por:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2}, \quad (4.1)$$

onde $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a matriz de informação de Fisher para λ_1 , λ_2 e λ_3 (ver eq. 2.23). Daí,

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto [i_{11}i_{22}i_{33} - i_{11}^2i_{23}^2 - i_{12}^2i_{33} + 2i_{12}i_{13}i_{23} - i_{22}i_{13}^2]^{1/2}, \quad (4.2)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

4.1.1.2.- Densidade a posteriori conjunta para λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Tendo sido especificada a densidade a priori não informativa (4.2) para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 , encontra-se pelo teorema de Bayes, a densidade a posteriori conjunta para λ_1 , λ_2 e λ_3 (ver por exemplo, Box & Tiao (1973)) dada por :

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 / \text{dados}) = \frac{\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}, \quad (4.3)$$

onde $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a função de verossimilhança (eq. 2.3).

Substituindo as equações (2.3) e (4.1) na equação (4.3) tem-se que:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 / \text{dados}) \propto [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda_{123}^n \lambda_{23}^{n_1} \lambda_{13}^{n_2}}{\lambda_{12}^n} \cdot e^{-[\lambda_1 n\bar{x} + \lambda_2 n\bar{y} + \lambda_3 R]}, \quad (4.4)$$

onde

$$\lambda_{12} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_{13} = \lambda_1 + \lambda_3, \quad \lambda_{23} = \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_{123} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \quad e \quad n\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i.$$

4.1.1.3.- Densidade a posteriori marginal para λ_3

Em inferência Bayesiana, as inferências sobre os parâmetros são feitas baseadas nas densidades a posteriori dos parâmetros.

A densidade a posteriori marginal para λ_3 considerando a densidade a priori (4.2), obtém-se integrando a densidade a posteriori conjunta (4.4) em relação aos parâmetros λ_1 e λ_2 , isto é:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_3/\text{dados}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3/\text{dados}) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda_{123}^{n_{123}} \lambda_{23}^{n_{23}} \lambda_{13}^{n_{13}}}{\lambda_{12}^{n_{12}}} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-[\lambda_1 n\bar{x} + \lambda_2 n\bar{y} + \lambda_3 R]} d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $[\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2}$ é dado em (4.2)

Como a integral (4.5) não tem solução analítica explícita, utiliza-se o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ (ver APÊNDICE 5) para obter uma solução aproximada. Assim reescrevendo (4.5) tem-se :

$$\pi(\lambda_3/\text{dados}) \propto e^{-\lambda_3 R} \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2) e^{-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2) &= [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} e^{-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)} \\ &= n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log \lambda_2 + n \log \lambda_{123} + n_1 \log \lambda_{23} + \\ &\quad + n_2 \log \lambda_{13} - n \log \lambda_{12} - \lambda_1 n\bar{x} - \lambda_2 n\bar{y}. \end{aligned}$$

Pelo método de Laplace⁽²⁾ tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2) e^{-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 \propto \\
& \propto 2\pi \left\{ \text{Det} \left[nD^2 h_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) \right] \right\}^{-1/2} f_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) e^{-nh_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde

$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ são os valores de λ_1 e λ_2 que maximizam a função $-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)$ para cada λ_3 , ou seja, são a solução do sistema,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)) &= \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_{123}} + \frac{n_2}{\lambda_{13}} - \frac{n}{\lambda_{12}} - n\bar{x} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \lambda_2} (-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)) &= \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_{123}} + \frac{n_1}{\lambda_{23}} - \frac{n}{\lambda_{12}} - n\bar{y} = 0
\end{aligned}$$

e

$nD^2 h_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$ é a matriz Hessiana de $nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)$ avaliada em $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, ou seja, a matriz com elementos dados por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} [nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)] \big|_{(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)} &= \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_1^2} + \frac{n}{\tilde{\lambda}_{123}^2} + \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_{13}^2} - \frac{n}{\tilde{\lambda}_{12}^2} = d_{11}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} [nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)] \big|_{(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)} &= \frac{n}{\tilde{\lambda}_{123}^2} - \frac{n}{\tilde{\lambda}_{12}^2} = d_{12} = d_{21}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} [nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)] \big|_{(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)} &= \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_2^2} + \frac{n}{\tilde{\lambda}_{123}^2} + \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_{23}^2} - \frac{n}{\tilde{\lambda}_{12}^2} = d_{22}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$nD^2 h_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\text{Det}[nD^2 h_{\lambda_3}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)] = d_{11}d_{22} - d_{12}^2.$$

Substituindo as correspondentes expressões em (4.6) tem-se que, a densidade a posteriori marginal aproximada para λ_3 é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_3/\text{dados}) &\propto \frac{\left[\det I(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \lambda_3) \right]^{1/2}}{(d_{11}d_{22} - d_{12}^2)^{1/2}} \cdot \\ &\cdot \frac{\tilde{\lambda}_1^{n_1} \tilde{\lambda}_2^{n_2} (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \lambda_3)^n (\tilde{\lambda}_2 + \lambda_3)^{n_1} (\tilde{\lambda}_1 + \lambda_3)^{n_2}}{(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)^n} \cdot \\ &\cdot e^{-[\tilde{\lambda}_1 n\bar{x} + \tilde{\lambda}_2 n\bar{y} + \lambda_3 R]} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\lambda_3 > 0$.

A partir de (4.8) são feitas inferências sobre o parâmetro λ_3 .

4.1.1.4.- Densidade a posteriori marginal para λ_1 .

A densidade a posteriori marginal para o parâmetro λ_1 obtém-se integrando a densidade a posteriori conjunta (4.4) em relação aos parâmetros λ_2 e λ_3 , isto é:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1/\text{dados}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3/\text{dados}) d\lambda_2 d\lambda_3 \\ &\propto \lambda_1^{n_1} e^{-\lambda_1 n\bar{x}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} \cdot \\ &\cdot \frac{\lambda_2^{n_2} \lambda_{123}^n \lambda_{23}^{n_1} \lambda_{13}^{n_2}}{\lambda_{12}^n} e^{-[\lambda_2 n\bar{y} + \lambda_3 R]} d\lambda_2 d\lambda_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $[\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2}$ é dado em (4.2).

Reescrevendo convenientemente (4.9) tem-se,

$$\pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto \lambda_1 e^{-\lambda_1 n\bar{x}} \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3) e^{-nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)} d\lambda_2 d\lambda_3$$

onde

$$f_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3) = [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} e$$

$$\begin{aligned} -nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3) = & n_2 \log \lambda_2 + n \log \lambda_{123} + n_1 \log \lambda_{23} + n_2 \log \lambda_{13} - \\ & - n \log \lambda_{12} - \lambda_2 n\bar{y} - \lambda_3 R. \end{aligned}$$

Utilizando novamente o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ obtém-se a densidade a posteriori marginal aproximada para λ_1 que é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto & \frac{[\text{Det } I(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)]^{1/2}}{(d_{11} d_{22} - d_{12}^2)^{1/2}} \cdot \\ & \cdot \frac{\lambda_1^{n_1} \tilde{\lambda}_2^{n_2} (\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)^n (\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)^{n_1} (\lambda_1 + \tilde{\lambda}_3)^{n_2}}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)^n} \cdot \\ & \cdot e^{-[\lambda_1 n\bar{x} + \tilde{\lambda}_2 n\bar{y} + \tilde{\lambda}_3 R]}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

- a) $\lambda_1 > 0$,
- b) $\tilde{\lambda}_2$ e $\tilde{\lambda}_3$ são os valores dos parâmetros λ_2 e λ_3 que maximizam a função $-nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)$ e
- c) d_{11} , d_{12} e d_{22} são os elementos correspondentes da matriz Hessiana da função $nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)$, avaliada em $\tilde{\lambda}_2$ e $\tilde{\lambda}_3$.

A partir de (4.11) são feitas inferências sobre o parâmetro λ_1 .

4.1.1.5.- Densidade a posteriori marginal para λ_2 .

A densidade a posteriori marginal para o parâmetro λ_2 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (4.4) em relação aos parâmetros λ_1 e λ_3 , isto é:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_2/\text{dados}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3/\text{dados}) d\lambda_1 d\lambda_3 \\ &\propto \lambda_2^{n_2} e^{-\lambda_2 n \bar{y}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_{123}^{n_1} \lambda_{23}^{n_1} \lambda_{13}^{n_2}}{\lambda_{12}^n} e^{-[\lambda_1 n \bar{x} + \lambda_3 R]} d\lambda_1 d\lambda_3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $[\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2}$ é dado em (4.2).

Reescrevendo convenientemente a equação (4.12) tem-se,

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \lambda_2^{n_2} e^{-\lambda_2 n \bar{y}} \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3) e^{-nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)} d\lambda_1 d\lambda_3,$$

onde

$$f_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3) = [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^{1/2} e$$

$$\begin{aligned} -nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3) &= n_1 \log \lambda_1 + n \log \lambda_{123} + n_1 \log \lambda_{23} + n_2 \log \lambda_{13} - \\ &\quad - n \log \lambda_{12} - \lambda_1 n \bar{x} - \lambda_3 R. \end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ tem-se a densidade a posteriori marginal aproximada para λ_2 dada por:

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \frac{\left[\text{Det } I(\tilde{\lambda}_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_3) \right]^{1/2}}{(d_{11}d_{22} - d_{12}^2)^{1/2}} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} (\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2 + \tilde{\lambda}_3)^n (\lambda_2 + \tilde{\lambda}_3)^{n_1} (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)^{n_2}}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2)^n} \cdot e^{-[\tilde{\lambda}_1 n\bar{x} + \lambda_2 n\bar{y} + \tilde{\lambda}_3 R]} \quad (4.13)$$

onde

- a) $\lambda_2 > 0$,
- b) $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_3$ são os valores dos parâmetros λ_1 e λ_3 que maximizam a função $-nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)$ e
- c) d_{11} , d_{12} e d_{22} são os elementos correspondentes da matriz Hessiana da função $nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)$ avaliada em $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_3$.

A partir de (4.13) são feitas inferências sobre o parâmetro λ_2 .

É importante observar que a aproximação de Laplace aqui utilizada seria válida usando outras densidades a priori para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 . Na prática, usualmente os pesquisadores têm opiniões formadas sobre os parâmetros do modelo, e em geral são consideradas outras densidades a priori diferentes da densidade a priori de Jeffreys dada em (4.2).

4.1.2.- ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO λ_3 CONHECIDO

Assumindo o parâmetro λ_3 conhecido, isto é $\lambda_3 = k$, pode-se observar que a função de verossimilhança para λ_1 e λ_2 é dada por:

$$L(\lambda_1, \lambda_2) \propto \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} (\lambda_{12} + k)^n (\lambda_2 + k)^{n_1} (\lambda_1 + k)^{n_2}}{\lambda_{12}^n} e^{-[\lambda_1 n\bar{x} + \lambda_2 n\bar{y}]} \quad (4.14)$$

Considerando a priori não informativa de Jeffreys,

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2) \propto [\det I(\lambda_1, \lambda_2)]^{1/2},$$

onde $I(\lambda_1, \lambda_2)$ é a matriz de informação de Fisher com elementos :

$$i_{11} = n \left[\frac{1}{\lambda_1 \lambda_{12}} + \frac{1}{(\lambda_{12} + k)^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_{12} (\lambda_1 + k)^2} - \frac{1}{\lambda_{12}^2} \right], \quad (4.15)$$

$$i_{12} = i_{21} = n \left[\frac{1}{(\lambda_{12} + k)^2} + \frac{1}{\lambda_{12}^2} \right], \quad (4.16)$$

$$i_{22} = n \left[\frac{1}{\lambda_2 \lambda_{12}} + \frac{1}{(\lambda_{12} + k)^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_{12} (\lambda_2 + k)^2} - \frac{1}{\lambda_{12}^2} \right] \quad (4.17)$$

e pelo teorema de Bayes tem-se a distribuição a posteriori conjunta para λ_1 e λ_2 dada por :

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1, \lambda_2 / \text{dados}) &\propto [i_{11} i_{22} - i_{12}^2]^{1/2} \cdot \\ &\cdot \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} (\lambda_{12} + k)^n (\lambda_2 + k)^{n_1} (\lambda_1 + k)^{n_2}}{\lambda_{12}^n} \cdot \\ &\cdot e^{-[\lambda_1 n\bar{x} + \lambda_2 n\bar{y}]} \quad (4.18) \end{aligned}$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$.

4.1.2.1.- Densidade a posteriori marginal para λ_1

A densidade a posteriori marginal para λ_1 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (4.18) em relação ao parâmetro λ_2 , isto é,

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1/\text{dados}) &\propto \int_0^\infty \left[i_{11} i_{22} - i_{12}^2 \right]^{1/2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} (\lambda_{12} + k)^n (\lambda_2 + k)^{n_1} (\lambda_1 + k)^{n_2}}{\lambda_{12}^n} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-[\lambda_1 n \bar{x} + \lambda_2 n \bar{y}]} d\lambda_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} &\propto \lambda_1^{n_1} (\lambda_1 + k)^{n_2} e^{-\lambda_1 n \bar{x}} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\infty f_{\lambda_1}(\lambda_2) e^{-n h_{\lambda_1}(\lambda_2)} d\lambda_2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1}(\lambda_2) &= \left[i_{11} i_{22} - i_{12}^2 \right]^{1/2} e^{-n h_{\lambda_1}(\lambda_2)} \\ -n h_{\lambda_1}(\lambda_2) &= n_2 \log \lambda_2 + n \log (\lambda_{12} + k) + n_1 \log (\lambda_2 + k) - \\ &\quad - n \log \lambda_{12} - \lambda_2 n \bar{y}. \end{aligned}$$

Usando novamente o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral da equação (4.20) obtém-se a densidade a posteriori marginal aproximada para λ_1 , dada por:

$$\pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto \frac{\lambda_1^{n_1} (\lambda_1 + k)^{n_2} [\tilde{i}_{11} \tilde{i}_{22} - \tilde{i}_{12}^2]^{1/2}}{\left\{ \frac{n_2}{\tilde{\lambda}_2^2} + \frac{n}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 + k)^2} + \frac{n_1}{(\tilde{\lambda}_2 + k)^2} - \frac{n}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)^2} \right\}^{1/2}} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_2^{n_2} (\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 + k)^n (\tilde{\lambda}_2 + k)^{n_1}}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)^n} e^{-\lambda_1 n \bar{x} - \tilde{\lambda}_2 n \bar{y}}, \quad (4.21)$$

onde

- a) $\lambda_1 > 0$,
- b) $\tilde{\lambda}_2$ é o valor do parâmetro λ_2 que maximiza a função $-nh_{\lambda_1}(\lambda_2)$ e
- c) $\left[\frac{n_2}{\tilde{\lambda}_2^2} + \frac{n}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2 + k)^2} + \frac{n_1}{(\tilde{\lambda}_2 + k)^2} - \frac{n}{(\lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)^2} \right]$ é a segunda derivada da função $nh_{\lambda_1}(\lambda_2)$ calculada em $\tilde{\lambda}_2$.

Assim, a partir da distribuição a posteriori marginal para λ_1 (4.21) são feitas inferências sobre o parâmetro λ_1 .

4.1.2.2.- Densidade a posteriori marginal para λ_2

Da mesma forma que para o parâmetro λ_1 , a densidade a posteriori marginal para λ_2 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (4.18) em relação ao parâmetro λ_1 , isto é,

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \lambda_2^{n_2} (\lambda_1 + k)^{n_2} e^{-\lambda_2 n \bar{y}} \cdot \int_0^\infty f_{\lambda_2}(\lambda_1) e^{-nh_{\lambda_2}(\lambda_1)} d\lambda_1, \quad (4.22)$$

onde

$$f_{\lambda_2}(\lambda_1) = [\tilde{i}_{11} \tilde{i}_{22} - \tilde{i}_{12}^2]^{1/2} e$$

$$-nh_{\lambda_2}(\lambda_1) = n_1 \log \lambda_1 + n \log (\lambda_{12} + k) + n_2 \log (\lambda_1 + k) - \\ - n \log \lambda_{12} - \lambda_1 n \bar{x}$$

A densidade a posteriori marginal aproximada pelo método de Laplace⁽²⁾ para λ_1 é dada por:

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \frac{\lambda_2^{n_2} (\lambda_2 + k)^{n_1} [\tilde{I}_{11} \tilde{I}_{22} - \tilde{I}_{12}^2]^{1/2}}{\left\{ \frac{n_1}{\tilde{\lambda}_1^2} + \frac{n}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2 + k)^2} + \frac{n_2}{(\tilde{\lambda}_1 + k)^2} - \frac{n}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2)^2} \right\}^{1/2}} \\ \cdot \frac{\tilde{\lambda}_1^{n_2} (\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2 + k)^n (\tilde{\lambda}_1 + k)^{n_2} e^{-\tilde{\lambda}_1 n \bar{x} - \lambda_2 n \bar{y}}}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2)^n}, \quad (4.23)$$

onde

- a) $\lambda_2 > 0$,
- b) $\tilde{\lambda}_1$ é o valor do parâmetro λ_1 que maximiza a função $-nh_{\lambda_2}(\lambda_1)$ e
- c) $\left[\frac{n_1}{\tilde{\lambda}_1^2} + \frac{n}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2 + k)^2} + \frac{n_2}{(\tilde{\lambda}_1 + k)^2} - \frac{n}{(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2)^2} \right]$ é segunda derivada da função $nh_{\lambda_2}(\lambda_1)$ avaliada em $\tilde{\lambda}_1$.

Inferências sobre o parâmetro λ_2 são feitas então a partir de sua densidade a posteriori marginal (4.23).

4.1.3.- ANÁLISE BAYESIANA QUANDO $\lambda_3=0$.

Um caso especial na análise de dados de uma população com distribuição EBVAC($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) de Block e Basu (1974), ocorre quando o parâmetro $\lambda_3 = 0$, isto é, quando as variáveis X e Y são independentes.

Sob a suposição de que o parâmetro $\lambda_3 = 0$, observa-se que a função de verossimilhança para λ_1 e λ_2 é dada por:

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^n \lambda_2^n e^{-\lambda_1 n\bar{x} - \lambda_2 n\bar{y}} \quad (4.24)$$

A função log-verossimilhança é dada por:

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = n \log \lambda_1 + n \log \lambda_2 - \lambda_1 n\bar{x} - \lambda_2 n\bar{y} \quad (4.25)$$

e a matriz de informação de Fisher é dada por:

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} n/\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & n/\lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Daí, considerando uma priori não informativa de Jeffreys para representar o grau de conhecimento dos parâmetros tem-se que:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1, \lambda_2) &\propto [\text{Det } I(\lambda_1, \lambda_2)]^{1/2} \\ &\propto \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

A distribuição a posteriori conjunta para λ_1 e λ_2 (pelo teorema de Bayes) é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1, \lambda_2 / \text{dados}) &= \pi(\lambda_1, \lambda_2) L(\lambda_1, \lambda_2) \\ &\propto \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{n-1} e^{-\lambda_1 n\bar{x} - \lambda_2 n\bar{y}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Daí, integrando (eq. 4.28) em relação a λ_2 é obtida a

densidade a posteriori marginal para λ_1 dada por:

$$\pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto \lambda_1^{n-1} e^{-\lambda_1 n\bar{x}}, \quad \lambda_1 > 0. \quad (4.29)$$

Similarmente é obtida a densidade a posteriori marginal para λ_2 dada por:

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \lambda_2^{n-1} e^{-\lambda_2 n\bar{y}}, \quad \lambda_2 > 0. \quad (4.30)$$

Observa-se que para este caso ($\lambda_3=0$), os cálculos tornam-se simples e as expressões para as densidades a posteriori são exatas.

4.2.- ANÁLISE BAYESIANA CONSIDERANDO UMA DENSIDADE A PRIORI INFORMATIVA.

Geralmente na indústria os engenheiros têm alguma opinião sobre os parâmetros do modelo. Essa opinião pode ser introduzida na análise de dados através de uma densidade a priori informativa.

4.2.1.- DENSIDADE A PRIORI INFORMATIVA.

Peña & Gupta (1992), sob certas considerações físicas e assumindo independência a priori, introduziram a seguinte densidade a priori informativa para uma análise Bayesiana da distribuição EBV de Marshall & Olkin (1967):

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto \prod_{i=1}^3 \lambda_i^{a_i-1} e^{-\beta \lambda_i}, \quad (4.31)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, $a_i > 0$ e $\beta > 0$.

De forma análoga, assumindo independência a priori, pode-se considerar uma densidade Gamma para cada parâmetro λ_i , $i = 1, 2, 3$ do modelo EBVAC de Block & Basu (1974), isto é, a densidade a priori informativa conjunta para λ_1 , λ_2 e λ_3 dada por:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto \prod_{i=1}^3 \lambda_i^{a_i-1} e^{-b_i \lambda_i}, \quad (4.32)$$

onde λ_i , a_i , $b_i > 0$; $i = 1, 2, 3$ (ver também Shamseldin & Press, (1984)).

4.2.2.- DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA λ_1 , λ_2 E λ_3 .

Considerando a densidade a priori informativa (4.32) para os parâmetros λ_1 , λ_2 , λ_3 e pelo teorema de Bayes tem-se que, a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 (ver por exemplo, Box & Tiao (1973)) é dada por:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 / \text{dados}) \propto \frac{\lambda_1^{(n_1+a_1-1)} \lambda_2^{(n_2+a_2-1)} \lambda_3^{(n_3+a_3-1)} e^{-(b_1+n\bar{x})\lambda_1 - (b_2+n\bar{y})\lambda_2 - (b_3+R)\lambda_3}}{\lambda_{12}^n} \quad (4.33)$$

onde λ_i , a_i , $b_i > 0$; $i = 1, 2, 3$.

Como foi mencionado anteriormente, em análise Bayesiana as inferências sobre os parâmetros do modelo são baseadas nas suas densidades a posteriori marginais. Portanto, calcula-se em seguida as densidades a posteriori marginais de interesse a partir do método de aproximação de integrais de Laplace⁽¹⁾ (ver APÊNDICE 5).

4.2.3.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA λ_3 .

Integrando a densidade a posteriori conjunta (4.33) em relação aos parâmetros λ_1 e λ_2 obtém-se a densidade a posteriori marginal para λ_3 , isto é,

$$\pi(\lambda_3/\text{dados}) \propto \lambda_3^{(a_3-1)} e^{-(b_3+R)\lambda_3} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (4.34)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2) = & (n_1+a_1-1)\log \lambda_1 + (n_2+a_2-1)\log \lambda_2 + n\log \lambda_{123} + \\ & + n_1\log \lambda_{23} + n_2\log \lambda_{13} - n\log \lambda_{12} - \lambda_1(b_1+n\bar{x}) - \\ & - \lambda_2(b_2+n\bar{y}). \end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽¹⁾ obtém-se a densidade a posteriori marginal aproximada para λ_3 dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_3/\text{dados}) \propto & \frac{\tilde{\lambda}_1^{(n_1+a_1-1)} \tilde{\lambda}_2^{(n_2+a_2-1)} (\tilde{\lambda}_{12}+\lambda_3)^n (\tilde{\lambda}_2+\lambda_3)^{n_1}}{\left[d_{11}d_{22}-d_{12}^2 \right]^{1/2}} \cdot \\ & \cdot \frac{(\tilde{\lambda}_1+\lambda_3)^{n_2} \lambda_3^{(a_3-1)}}{\tilde{\lambda}_{12}^n} \cdot \\ & \cdot e^{-\left[(b_1+n\bar{x})\tilde{\lambda}_1 + (b_2+n\bar{y})\tilde{\lambda}_2 + (b_3+R)\lambda_3 \right]}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

onde

- a) $\lambda_3 > 0$,
- b) $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2$ são os valores de λ_1 e λ_2 que maximizam a função $-nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2)$ e
- c) d_{11} , d_{12} e d_{22} são os elementos da matriz Hessiana

associada à função $nh_{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_3)$ e avaliada em $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$.

4.2.4.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA λ_1 .

A densidade a posteriori marginal para λ_1 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (4.33) com respeito aos parâmetros λ_2 e λ_3 , isto é,

$$\pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto \lambda_1^{(n_1+a_1-1)} e^{-(b_1+n\bar{x})\lambda_1} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)} d\lambda_2 d\lambda_3, \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3) = & (n_2+a_2-1)\log \lambda_2 + n\log \lambda_{123} + n_1\log \lambda_{23} + \\ & + n_2\log \lambda_{13} + (a_3-1)\log \lambda_3 - n\log \lambda_{12} - \\ & - (b_2+n\bar{y})\lambda_2 - (b_3+R)\lambda_3. \end{aligned}$$

Utilizando novamente o método de aproximação de integrais de Laplace⁽¹⁾ tem-se que, a densidade a posteriori marginal para λ_1 é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1/\text{dados}) \propto & \frac{\lambda_1^{(n_1+a_1-1)} \tilde{\lambda}_2^{(n_2+a_2-1)} (\lambda_1+\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_3)^n (\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_3)^{n_1}}{\left[d_{11}d_{22}-d_{12}^2 \right]^{1/2}} \cdot \\ & \cdot \frac{(\lambda_1+\tilde{\lambda}_3)^{n_2} \tilde{\lambda}_3^{(a_3-1)}}{(\lambda_1+\tilde{\lambda}_2)^n} \cdot \\ & \cdot e^{-(b_1+n\bar{x})\lambda_1 - (b_2+n\bar{y})\tilde{\lambda}_2 - (b_3+R)\tilde{\lambda}_3}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

onde $\lambda_1 > 0$, $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ são os valores de λ_2 e λ_3 que maximizam a

função $-nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)$ e d_{11}, d_{12}, d_{22} os elementos da matriz Hessiana associada à função $nh_{\lambda_1}(\lambda_2, \lambda_3)$ avaliados em $(\tilde{\lambda}_2$ e $\tilde{\lambda}_3)$.

4.2.5.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA λ_2 .

A densidade a posteriori marginal para λ_2 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (4.33) em relação aos parâmetros λ_1 e λ_3 , isto é,

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \lambda_2^{(n_2+a_2-1)} e^{-(b_2+n\bar{y})\lambda_2} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)} d\lambda_1 d\lambda_3, \quad (4.38)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3) = & (n_1+a_1-1)\log \lambda_1 + n\log \lambda_{123} + n_1\log \lambda_{23} + \\ & + n_2\log \lambda_{13} + (a_3-1)\log \lambda_3 - n\log \lambda_{12} - \\ & - (b_1+n\bar{x})\lambda_1 - (b_3+R)\lambda_3. \end{aligned}$$

A densidade a posteriori marginal aproximada pelo método de Laplace⁽¹⁾ para λ_2 é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto & \frac{\tilde{\lambda}_1^{(n_1+a_1-1)} \lambda_2^{(n_2+a_2-1)} (\tilde{\lambda}_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_3)^n (\lambda_2+\tilde{\lambda}_3)^{n_1}}{\left[d_{11}d_{22}-d_{12}^2 \right]^{1/2}} \cdot \\ & \frac{(\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_3)^{n_2} \tilde{\lambda}_3^{(a_3-1)}}{(\tilde{\lambda}_1+\lambda_2)^n} \cdot \\ & e^{-(b_1+n\bar{x})\tilde{\lambda}_1 - (b_2+n\bar{y})\lambda_2 - (b_3+R)\tilde{\lambda}_3}, \quad (4.39) \end{aligned}$$

onde $\lambda_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_3$ são os valores de λ_1 e λ_3 que maximizam a

função $-nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)$ e d_{11}, d_{12}, d_{22} são os elementos da matriz Hessiana associada à função $nh_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_3)$ avaliados em $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3)$.

4.3. - ESTIMADORES DE BAYES PARA OS TEMPOS MÉDIOS DE VIDA.

Se os tempos de vida de um sistema de dois componentes seguem uma distribuição com densidade (2.1), os tempos médios de vida $\mu_1 = E(X)$ e $\mu_2 = E(Y)$ desses componentes são dados por:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_{123}\lambda_{12} + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_{123}\lambda_{12}\lambda_{13}}, \quad (4.40)$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda_{123}\lambda_{12} + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_{123}\lambda_{12}\lambda_{23}}, \quad (4.41)$$

onde $\lambda_{123} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\lambda_{12} = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_{13} = \lambda_1 + \lambda_3$, $\lambda_{23} = \lambda_2 + \lambda_3$,
(ver Basu & Ebrahimi (1987)).

Os estimadores de Bayes para os tempos médios de vida μ_1 e μ_2 em relação à perda quadrática são dados por:

$$\hat{\mu}_1 = E[\mu_1/\text{dados}] = \frac{\int \mu_1 \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}{\int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3} \quad (4.42)$$

e

$$\hat{\mu}_2 = E[\mu_2/\text{dados}] = \frac{\int \mu_2 \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}{\int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}, \quad (4.43)$$

onde $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a densidade a priori e $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a função de verossimilhança dada em (eq. 2.3).

Para usar o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾, os numeradores das equações (4.42) e (4.43) podem ser expressos na forma:

$$\begin{aligned} \int \mu_1 \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 &= \\ &= \int f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{-nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde

- a) $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu_1$, para $i = 1, 2$ e
- b) $-nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \log \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Pelo método de Laplace⁽²⁾ tem-se que,

$$\begin{aligned} \int \mu_1 \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 &\propto \\ &\propto \frac{\mu_1 \pi(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)}{[\text{Det } nD^2h(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde

- a) $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a moda a posteriori.
- b) $\hat{\mu}_1$ é a expressão do tempo médio de vida do componente i avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$,
- c) $\pi(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a densidade a priori avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$,
- d) $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a função de verossimilhança avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ e
- e) $nD^2h(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 &= \\ &= \int e^{-nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $-nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \log \pi(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) + \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Portanto, pelo método de Laplace⁽¹⁾,

$$\begin{aligned} \int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 &\propto \\ &\propto \frac{\pi(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)}{[\text{Det } nD^2h(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde

- a) $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a moda a posteriori
- b) $\pi(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a densidade a priori avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$,
- c) $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a função de verossimilhança avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ e
- d) $nD^2h(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avaliada em $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$.

Fazendo o quociente entre (4.45) e (4.47) obtém-se o estimador do tempo médio de vida do componente 1, isto é,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\hat{\lambda}_{123} \hat{\lambda}_{12} + \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_{123} \hat{\lambda}_{12} \hat{\lambda}_{13}}, \quad i = 1 \quad (4.48)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\hat{\lambda}_{123} \hat{\lambda}_{12} + \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_{123} \hat{\lambda}_{12} \hat{\lambda}_{23}}, \quad i = 2, \quad (4.49)$$

onde $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para λ_1, λ_2 e λ_3 .

Observe-se que, se para aproximar a integral do numerador da equação (4.42) é usado o método de Laplace⁽²⁾ considerando $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu_1 \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, e para aproximar a integral do denominador é usado também o método de Laplace⁽²⁾ com $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, então os valores de $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$ coincidem com os estimadores de máxima verossimilhança.

4.4.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES.

4.4.1.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES EM SÉRIE.

Assumindo que os dois componentes de um sistema em série têm uma distribuição de vida com função de densidade (eq. 2.1), a função de confiabilidade do sistema no tempo t_0 é dado por:

$$R_S(t_0) = P[\text{Min}(X, Y) > t_0] = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t_0} \quad (4.50)$$

(ver APÊNDICE 2, ítem a)).

O estimador de Bayes para $R_S(t_0)$ em relação à perda quadrática é dado por:

$$\hat{R}_S(t_0) = \frac{\int R_S(t_0) \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}{\int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}, \quad (4.51)$$

onde $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a densidade a priori e $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a função de verossimilhança dada em (eq. 2.3).

Utilizando o método de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral do numerador, e o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a

integral do denominador da equação (4.51), o estimador para a função de confiabilidade do sistema é dado por:

$$\hat{R}_s(t_0) = e^{-(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3)t_0}, \quad (4.52)$$

onde $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para λ_1, λ_2 e λ_3 .

4.4.2.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES EM PARALELO.

Assumindo que os dois componentes de um sistema em paralelo têm uma distribuição de vida com função de densidade (eq. 2.1), a função de confiabilidade do sistema no tempo t_0 é dado por:

$$\begin{aligned} R_p(t_0) &= P[\text{Max}(X, Y) > t_0] \\ &= \frac{\lambda_{123} \left[e^{\lambda_1 t_0} + e^{\lambda_2 t_0} - 1 \right] - \lambda_3}{\lambda_{12} e^{\lambda_{123} t_0}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

O estimador de Bayes para $R_p(t_0)$ em relação à perda quadrática é dado por:

$$\hat{R}_p(t_0) = \frac{\int R_p(t_0) \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}{\int \pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3}, \quad (4.54)$$

onde $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a densidade a priori e $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a função de verossimilhança dada em (eq. 2.3).

Utilizando o método de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral do numerador, e o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a

integral do denominador da equação (4.51), o estimador para a função de confiabilidade do sistema é dado por:

$$\hat{R}_s(t_0) = \frac{\hat{\lambda}_{123} \left[e^{\hat{\lambda}_1 t_0} + e^{\hat{\lambda}_2 t_0} - 1 \right] - \hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_{12} e^{\hat{\lambda}_{123} t_0}}, \quad (4.55)$$

onde $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para λ_1, λ_2 e λ_3 .

CAPÍTULO V

ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO EBVAC DE BLOCK & BASU APLICADO EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE POTÊNCIA

Neste capítulo apresenta-se uma análise Bayesiana do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) no enfoque de testes acelerados com o modelo de potência. Na análise são consideradas duas densidades a priori: uma densidade a priori não informativa e uma densidade a priori informativa.

5.1.- ANÁLISE BAYESIANA CONSIDERANDO UMA DENSIDADE A PRIORI NÃO INFORMATIVA.

Assumindo que os tempos de vida (X,Y) de um sistema de dois componentes sob o nível de "stress" V_j , $j = 1,2,\dots,J$ tem uma distribuição EBVAC com densidade (eq. 3.1) e considerando o modelo de potência (eq. 3.3) para os parâmetros λ_{ij} , $i = 1,2,3$; a função densidade de probabilidade (eq. 3.1) pode ser reescrita na forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c_1 c_{123} c_{23}}{c_{12}} \frac{1}{V_j^{2P}} e^{-[c_1 x + c_{23} y] V_j^P} & \text{se } x < y \\ \frac{c_2 c_{123} c_{13}}{c_{12}} \frac{1}{V_j^{2P}} e^{-[c_{13} x + c_2 y] V_j^P} & \text{se } x > y \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde $c_{12} = c_1 + c_2$, $c_{13} = c_1 + c_3$, $c_{23} = c_2 + c_3$, $c_{123} = c_1 + c_2 + c_3$.

5.1.1.- DENSIDADE A PRIORI PARA c_1, c_2, c_3 E P .

A densidade a priori para os parâmetros c_1, c_2, c_3 e P pode ser expressa na forma

$$\pi(c_1, c_2, c_3, P) = \pi(c_1, c_2, c_3/P) \pi(P). \quad (5.2)$$

Considerando uma densidade a priori localmente uniforme para P e a regra de Jeffreys obtém-se uma densidade a priori não informativa para c_1, c_2, c_3 , e P dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3, P) \propto [\text{Det } I_P(c_1, c_2, c_3)]^{1/2}, \quad (5.3)$$

onde $c_1, c_2, c_3 > 0$, $-\infty < P < \infty$ e $I_P(c_1, c_2, c_3)$ é a matriz de informação de Fisher com elementos dados por:

$$i_{11} = n \left[\frac{1}{c_1 c_{12}} + \frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right],$$

$$i_{12} = n \left[\frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right],$$

$$i_{13} = n \left[\frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right],$$

$$i_{22} = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} - \frac{1}{c_{12}^2} \right],$$

$$i_{23} = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right],$$

$$i_{33} = n \left[\frac{c_1}{c_{23}^2 c_{12}} + \frac{c_2}{c_{13}^2 c_{12}} + \frac{1}{c_{123}^2} \right],$$

(ver Seção 3.4, e Basu & Ebrahimi (1987)).

Portanto,

$$\pi(c_1, c_2, c_3, P) \propto \left[i_{11} i_{22} i_{33} + 2i_{12} i_{13} i_{23} - i_{11} i_{23}^2 - i_{22} i_{13}^2 - i_{33} i_{12}^2 \right]^{1/2}. \quad (5.4)$$

5.1.2.- DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA c_1, c_2, c_3 E P .

Considerando a densidade a priori (5.4) e a função de verossimilhança dada em (eq. 3.9), a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros c_1, c_2, c_3 e P é dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3, P/\text{dados}) \propto \pi(c_1, c_2, c_3, P) \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \cdot \left[\prod_{j=1}^J \left(v_j^{2P} \right)^{n'_j} \right] \cdot e^{-c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P) - c_3 T(P)}, \quad (5.5)$$

onde $c_1, c_2, c_3 > 0$ e $-\infty < P < \infty$.

5.1.3.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA P .

A densidade a posteriori marginal para P é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (5.5) em relação aos parâmetros c_1, c_2 e c_3 , isto é,

$$\begin{aligned}
\pi(P/\text{dados}) &\propto \left[\prod_{j=1}^J \left[v_j^{2p} \right]^{n'_j} \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(c_1, c_2, c_3, P) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \\
&\quad \cdot e^{-c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P) - c_3 T(P)} dc_1 dc_2 dc_3 \\
&\propto \left[\prod_{j=1}^J \left[v_j^{2p} \right]^{n'_j} \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(c_1, c_2, c_3, P) \cdot \\
&\quad \cdot e^{-nh_P(c_1, c_2, c_3)} dc_1 dc_2 dc_3, \quad (5.6)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
-nh(c_1, c_2, c_3) &= n_1 \log c_1 + n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_2 + \\
&\quad + n_2 \log c_{13} + n \log c_{123} - n \log c_{12} - \\
&\quad - c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P) - c_3 T(P).
\end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ (ver APÊNDICE 5), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(c_1, c_2, c_3, P) e^{-nh_P(c_1, c_2, c_3)} dc_1 dc_2 dc_3 &\propto \\
&\propto \left[\text{Det} (nD^2 h_P(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)) \right]^{-1/2} \pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, P) \cdot \\
&\quad e^{-nh_P(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)}, \quad (5.7)
\end{aligned}$$

onde

- a) $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ são os valores de c_1, c_2, c_3 que maximizam a função $-nh_P(c_1, c_2, c_3)$,

- b) $\pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, P)$ é a densidade a priori avaliada em $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ e $\tilde{c}_3$ e
- c) $nD^2h_p(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh_p(c_1, c_2, c_3)$ avaliada em $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ e com elementos dados por:

$$d_{11} = -\frac{n_1}{c_1^2} - \frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2},$$

$$d_{12} = -\frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2},$$

$$d_{13} = -\frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2},$$

$$d_{22} = -\frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n_2}{c_2^2} - \frac{n}{c_{123}^2} + \frac{n}{c_{12}^2},$$

$$d_{23} = -\frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n}{c_{123}^2},$$

$$d_{33} = -\frac{n_1}{c_{23}^2} - \frac{n_2}{c_{13}^2} - \frac{n}{c_{123}^2},$$

$$\begin{aligned} \text{Denotando } d(c_1, c_2, c_3) &= \left[\text{Det } (nD^2h_p(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)) \right]^{1/2} \\ &= \left[d_{11}d_{22}d_{33} + 2d_{12}d_{13}d_{23} - d_{11}d_{23}^2 - \right. \\ &\quad \left. - d_{22}d_{13}^2 - d_{33}d_{12}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

e substituindo as correspondentes expressões em (5.7) tem-se que, a densidade a posteriori marginal para P é dada por:

$$\pi(P/\text{dados}) \propto \frac{\pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, P)}{d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)} \cdot \frac{\tilde{c}_1^{n_1} \tilde{c}_{23}^{n_1} \tilde{c}_2^{n_2} \tilde{c}_{13}^{n_2} \tilde{c}_{123}^n}{\tilde{c}_{12}^n} \cdot \left[\prod_{j=1}^J \left(v_j^{2p} \right)^{n_j'} \right] e^{-\tilde{c}_1 S_X(P) - \tilde{c}_2 S_Y(P) - \tilde{c}_3 T(P)}, \quad (5.9)$$

onde $-\infty < P < \infty$, $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$, $\tilde{c}_{13} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_3$, $\tilde{c}_{23} = \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3$, $\tilde{c}_{123} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3$ e $d(c_1, c_2, c_3)$ é dado em (5.8).

Inferências sobre P são feitas através de (5.9).

5.2.- ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO P CONHECIDO.

Assumindo o parâmetro P conhecido tem-se que, a função de verossimilhança para c_1 , c_2 e c_3 é expressa na forma:

$$L(c_1, c_2, c_3) \propto \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \cdot e^{-c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P) - c_3 T(P)}. \quad (5.10)$$

A densidade a priori de Jeffreys para os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 é dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3) \propto [\text{Det } I_P(c_1, c_2, c_3)]^{1/2},$$

isto é,

$$\pi(c_1, c_2, c_3) \propto \left[i_{11} i_{22} i_{33} + 2i_{12} i_{13} i_{23} - i_{11} i_{23}^2 - i_{22} i_{13}^2 - i_{33} i_{12}^2 \right]^{1/2}. \quad (5.11)$$

5.2.1.- DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA c_1 , c_2 E c_3 .

Considerando a densidade a priori (5.11) e a função de verossimilhança (5.10) obtém-se a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3 / \text{dados}) \propto \pi(c_1, c_2, c_3) \frac{c_1^{n_1} c_{23}^{n_1} c_2^{n_2} c_{13}^{n_2} c_{123}^n}{c_{12}^n} \cdot e^{-c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P) - c_3 T(P)}, \quad (5.12)$$

onde $c_1, c_2, c_3 > 0$.

5.2.2.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_3 .

A densidade a posteriori marginal para c_3 é obtida de (5.12), como:

$$\pi(c_3 / \text{dados}) \propto e^{-c_3 T(P)} \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(c_1, c_2, c_3) \cdot e^{-nh_{c_3}(c_1, c_2)} dc_1 dc_2, \quad (5.13)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{c_3}(c_1, c_2) = & n_1 \log c_1 + n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_2 + \\ & + n_2 \log c_{13} + n \log c_{123} - n \log c_{12} - \\ & - c_1 S_X(P) - c_2 S_Y(P). \end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ (ver APÊNDICE 5) tem-se que,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(c_1, c_2, c_3) e^{-nh_{c_3}(c_1, c_2)} dc_1 dc_2 \propto \\
& \propto \left[\text{Det } nD^2 h_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \right]^{-1/2} \pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_3) e^{-nh_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)},
\end{aligned}
\tag{5.14}$$

onde

- a) $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ são os valores de c_1 e c_2 que maximizam a função $-nh_{c_3}(c_1, c_2)$,
- b) $\pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_3)$ é a densidade a priori avaliada em $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$ e
- c) $nD^2 h_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh_{c_3}(c_1, c_2)$ avaliada em $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$.

Portanto, substituindo as expressões correspondentes em (5.13) obtém-se a densidade a posteriori marginal para c_3 dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(c_3/\text{dados}) & \propto \frac{\pi(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_3)}{\left[\text{Det } nD^2 h_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \right]^{1/2}} \cdot \\
& \cdot \frac{\tilde{c}_1^{n_1} (\tilde{c}_2 + c_3)^{n_1} \tilde{c}_2^{n_2} (\tilde{c}_1 + c_3)^{n_2} (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + c_3)^n}{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)^n} \cdot \\
& \cdot e^{-\tilde{c}_1 S_x(P) - \tilde{c}_2 S_y(P) - c_3 T(P)},
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

onde $c_3 > 0$.

5.2.3.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_1 .

A densidade a posteriori marginal para c_1 é obtida integrando a densidade a posteriori conjunta (5.12) em relação aos parâmetros c_2 e c_3 . Usando o método de aproximação de integrais de

Laplace⁽²⁾ para resolver essa integral tem-se que, a densidade a posteriori marginal para c_1 é dada por:

$$\pi(c_1/\text{dados}) \propto \frac{\pi(c_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)}{[\text{Det } nD^2 h_{c_1}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3)]^{1/2}} \cdot \frac{c_1^{n_1} (\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3)^{n_1} \tilde{c}_2^{n_2} (c_1 + \tilde{c}_3)^{n_2} (c_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3)^n}{(c_1 + \tilde{c}_2)^n} \cdot e^{-c_1 S_x(P) - \tilde{c}_2 S_y(P) - \tilde{c}_3 T(P)} \quad (5.16)$$

onde

- a) $c_1 > 0$,
- b) $\tilde{c}_2$ e $\tilde{c}_3$ são os valores de c_2 e c_3 que maximizam a função

$$-nh_{c_1}(c_2, c_3) = n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_2 + n_2 \log c_{13} + n \log c_{123} -$$

$$- n \log c_{12} - c_2 S_y(P) - c_3 T(P),$$
- c) $nD^2 h_{c_1}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função

$$nh_{c_1}(c_2, c_3)$$
 e avaliada em $(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$,
- d) $\pi(c_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ é a densidade a priori avaliada em $\tilde{c}_2$ e $\tilde{c}_3$.

5.2.4.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_2 .

Integrando a densidade a posteriori conjunta (5.12) em relação aos parâmetros c_1 e c_3 obtém-se a densidade a posteriori marginal para c_2 . Usando novamente o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ para resolver essa integral tem-se que, a densidade a posteriori marginal para c_2 é dada por:

$$\pi(c_2/\text{dados}) \propto \frac{\pi(c_1, c_2, c_3)}{[\text{Det } nD^2 h_{c_2}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3)]^{1/2}} \cdot \frac{\tilde{c}_1^{n_1} (c_2 + \tilde{c}_3)^{n_1} c_2^{n_2} (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_3)^{n_2} (\tilde{c}_1 + c_2 + \tilde{c}_3)^n}{(\tilde{c}_1 + c_2)^n} \cdot e^{-\tilde{c}_1 S_x(P) - c_2 S_y(P) - \tilde{c}_3 T(P)}, \quad (5.16)$$

onde

a) $c_2 > 0$,

b) $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_3$ são os valores de c_1 e c_3 que maximizam a função

$$-nh_{c_2}(c_1, c_3) = n_1 \log c_1 + n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_{13} + n \log c_{123} - n \log c_{12} - c_1 S_x(P) - c_3 T(P),$$

c) $nD^2 h_{c_2}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função

$$nh_{c_2}(c_1, c_3) \text{ e avaliada em } (\tilde{c}_1, \tilde{c}_3),$$

d) $\pi(\tilde{c}_1, c_2, \tilde{c}_3)$ é a densidade a priori avaliada em $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_3$.

5.3.- ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO P CONHECIDO E UMA DENSIDADE A PRIORI INFORMATIVA PARA c_1 , c_2 E c_3 .

Assumindo independência a priori e considerando uma densidade Gamma para cada parâmetro c_i , $i = 1, 2, 3$, tem-se que, a densidade a priori informativa para c_1 , c_2 e c_3 é dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3) \propto \prod_{i=1}^3 c_i^{a_i-1} e^{-b_i c_i}, \quad (5.17)$$

onde $c_i, a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

5.3.1.- DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA c_1 , c_2 E c_3 .

Considerando a densidade a priori (5.17) e pelo teorema de Bayes tem-se que, a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 (ver por exemplo, Box & Tiao (1973)) é dada por:

$$\pi(c_1, c_2, c_3 / \text{dados}) \propto \frac{c_1^{(n_1+a_1-1)} c_2^{(n_2+a_2-1)} n_{123} c_1^{n_1} c_2^{n_2} c_3^{(a_3-1)}}{c_{12}^n} e^{-[b_1+S_X(P)]c_1 - [b_2+S_Y(P)]c_2 - [b_3+T(P)]c_3}, \quad (5.17)$$

onde $c_i, a_i, b_i > 0, \quad i = 1, 2, 3$.

Como em inferência Bayesiana, as inferências sobre os parâmetros são feitas através das densidades a posteriori marginais, procede-se em seguida a calcular as densidades a posteriori marginais mencionadas.

5.3.2.- DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_3 .

Integrando a densidade a posteriori conjunta (5.17) em relação aos parâmetros c_1 e c_2 obtém-se a densidade a posteriori marginal para c_3 , isto é,

$$\pi(c_3 / \text{dados}) \propto c_3^{(a_3-1)} e^{-[b_3+T(P)]c_3} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-n h_{c_3}(c_1, c_2)} dc_1 dc_2, \quad (5.18)$$

onde

$$\begin{aligned}
-nh_{c_3}(c_1, c_2) = & (n_1 + a_1 - 1) \log c_1 + (n_2 + a_2 - 1) \log c_2 + \\
& + n \log c_{123} + n_1 \log c_{23} + n_2 \log c_{13} + \\
& - n \log c_{12} - [b_1 + S_X(P)]c_1 - [b_2 + S_Y(P)]c_2.
\end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽¹⁾ (ver APÊNDICE 5) tem-se que,

$$\begin{aligned}
\pi(c_3/\text{dados}) \propto & \frac{\tilde{c}_1^{(n_1+a_1-1)} \tilde{c}_2^{(n_2+a_2-1)} (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + c_3)^n}{\left[\text{Det } nD_{c_3}^2 h_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \right]^{1/2}} \cdot \\
& \cdot \frac{(\tilde{c}_2 + c_3)^{n_1} (\tilde{c}_1 + c_3)^{n_2} c_3^{(a_3-1)}}{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)^n} \cdot \\
& \cdot e^{-[b_1 + S_X(P)]\tilde{c}_1 - [b_2 + S_Y(P)]\tilde{c}_2 - [b_3 + T(P)]c_3},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde

- a) $c_3 > 0$,
- b) $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$ maximizam a função $-nh_{c_3}(c_1, c_2)$,
- c) $nD_{c_3}^2 h_{c_3}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh_{c_3}(c_1, c_2)$ avaliada em $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$.

5.3.3. - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_1 .

Da mesma forma que para o parâmetro c_3 , a densidade a posteriori marginal para c_1 obtém-se integrando a densidade a posteriori conjunta (5.17) em relação aos parâmetros c_2 e c_3 , isto é,

$$\pi(c_1/\text{dados}) \propto c_1^{(n_1+a_1-1)} e^{-[b_1+S_X(P)]c_1}.$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-nh_{c_1}(c_2, c_3)} dc_2 dc_3, \quad (5.20)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{c_1}(c_2, c_3) = & (n_2+a_2-1)\log c_2 + n\log c_{123} + n_1\log c_{23} + \\ & + n_2\log c_{13} + (a_3-1)\log c_3 - n\log c_{12} - \\ & - [b_2+S_Y(P)]c_2 - [b_3+T(P)]c_3. \end{aligned}$$

Usando o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a integral da equação (5.20) obtém-se,

$$\begin{aligned} \pi(c_1/\text{dados}) \propto & \frac{c_1^{(n_1+a_1-1)} \tilde{c}_2^{(n_2+a_2-1)} (c_1+\tilde{c}_2+\tilde{c}_3)^n}{\left[\text{Det } nD^2h_{c_1}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3) \right]^{1/2}} \cdot \\ & \frac{(\tilde{c}_2+\tilde{c}_3)^{n_1} (c_1+\tilde{c}_3)^{n_2} \tilde{c}_3^{(a_3-1)}}{(c_1+\tilde{c}_2)^n} \cdot \\ & e^{-[b_1+S_X(P)]c_1 - [b_2+S_Y(P)]\tilde{c}_2 - [b_3+T(P)]\tilde{c}_3}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde

- a) $c_1 > 0$,
- b) $\tilde{c}_2$ e $\tilde{c}_3$ maximizam a função $-nh_{c_1}(c_2, c_3)$,
- c) $nD^2h_{c_1}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função $-nh_{c_1}(c_2, c_3)$ avaliada em $\tilde{c}_2$ e $\tilde{c}_3$.

5.3.4. - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA c_2 .

A densidade a posteriori marginal para c_2 obtém-se da seguinte forma:

$$\pi(c_2/\text{dados}) \propto c_2^{(n_2+a_2-1)} e^{-[b_2+S_Y(P)]c_2} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-nh_{c_2}(c_1, c_3)} dc_1 dc_3, \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} -nh_{c_2}(c_1, c_3) = & (n_1+a_1-1)\log c_1 + n\log c_{123} + n_1\log c_{23} + \\ & + n_2\log c_{13} + (a_3-1)\log c_3 - n\log c_{12} - \\ & - [b_1+S_X(P)]c_1 - [b_3+T(P)]c_3. \end{aligned}$$

Pelo método de aproximação de integrais de Laplace⁽¹⁾ tem-se que,

$$\begin{aligned} \pi(c_2/\text{dados}) \propto & \frac{\tilde{c}_1^{(n_1+a_1-1)} c_2^{(n_2+a_2-1)} (\tilde{c}_1+c_2+\tilde{c}_3)^n}{\left[\text{Det } nD^2 h_{c_2}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3) \right]^{1/2}} \cdot \\ & \frac{(c_2+\tilde{c}_3)^{n_1} (\tilde{c}_1+\tilde{c}_3)^{n_2} \tilde{c}_3^{(a_3-1)}}{(\tilde{c}_1+c_2)^n} \cdot \\ & e^{-[b_1+S_X(P)]\tilde{c}_1 - [b_2+S_Y(P)]c_2 - [b_3+T(P)]\tilde{c}_3}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

- a) $c_2 > 0$,
- b) $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_3$ maximizam a função $-nh_{c_2}(c_1, c_3)$,

c) $nD^2_{c_2}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3)$ é a matriz Hessiana associada à função $nh_{c_2}(c_1, c_3)$ avaliada em $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_3$.

5.4.- ESTIMADORES DE BAYES PARA OS TEMPOS MÉDIOS DE VIDA.

Se os tempos de vida de um sistema de dois componentes, sob um nível de "stress" V_j , $j = 1, \dots, J$, tem uma distribuição com densidade (5.1), os tempos médios de vida $\mu_1^{(j)} = E(X)$ e $\mu_2^{(j)} = E(Y)$ desses componentes, no nível de "stress" V_j , são dados por:

$$\mu_1^{(j)} = E(X) = \frac{c_{123}c_{12} + c_2c_3}{c_{123}c_{12}c_{13}} V_j^{-P} \quad (5.24)$$

$$\mu_2^{(j)} = E(Y) = \frac{c_{123}c_{12} + c_1c_3}{c_{123}c_{12}c_{23}} V_j^{-P} \quad (5.25)$$

onde $c_{123} = c_1 + c_2 + c_3$, $c_{12} = c_1 + c_2$, $c_{13} = c_1 + c_3$, $c_{23} = c_2 + c_3$ (ver Basu & Ebrahimi (1987)).

O estimador de Bayes para o tempo médio de vida $\mu_1^{(j)}$ em relação à perda quadrática, no nível de "stress" V_j , é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1^{(j)} &= E[\mu_1^{(j)} / \text{dados}] = \\ &= \frac{\int \mu_1^{(j)} \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}{\int \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $\pi(c_1, c_2, c_3)$ é a densidade a priori e $L(c_1, c_2, c_3)$ é a função de verossimilhança dada na equação (3.9).

Usando o método de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral do numerador e o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a integral do

denominador da equação (5.26), um estimador de Bayes do tempo médio de vida $\mu_1^{(j)}$, no nível de "stress" V_j , é dado por:

$$\hat{\mu}_1^{(j)} = \frac{\hat{c}_{123}\hat{c}_{12} + \hat{c}_2\hat{c}_3}{\hat{c}_{123}\hat{c}_{12}\hat{c}_{13}} V_j^{-P}, \quad i = 1 \quad (5.27)$$

$$\hat{\mu}_2^{(j)} = \frac{\hat{c}_{123}\hat{c}_{12} + \hat{c}_1\hat{c}_3}{\hat{c}_{123}\hat{c}_{12}\hat{c}_{23}} V_j^{-P}, \quad i = 2, \quad (5.28)$$

onde $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para c_1, c_2 e c_3 .

Como o interesse na indústria é estimar os tempos de vida médios dos componentes do sistema em condições normais de funcionamento, depois de ter conduzido os testes de vida acelerados e estimado c_1, c_2 e c_3 , basta substituir o valor do nível de "stress" V_j pelo valor do nível de "stress" normal V_0 nas expressões (5.27) e (5.28) para obter as estimativas dos tempos de vida médios dos componentes do sistema em condições normais de funcionamento.

5.5.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES.

5.5.1.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES EM SÉRIE.

Assumindo que os dois componentes de um sistema em série, no nível de "stress" V_j , têm uma distribuição com função de densidade (eq. 5.1), a função de confiabilidade do sistema no tempo t_0 é dado por:

$$R_s^{(j)}(t_0) = P[\text{Min}(X, Y) > t_0] = e^{-(c_1+c_2+c_3)V_j^P t_0}. \quad (5.29)$$

O estimador de Bayes para $R_s^{(j)}(t_0)$ em relação à perda quadrática, é dado por:

$$\hat{R}_s^{(j)}(t_0) = \frac{\int R_s^{(j)}(t_0) \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}{\int \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}, \quad (5.30)$$

onde $\pi(c_1, c_2, c_3)$ é a densidade a priori e $L(c_1, c_2, c_3)$ é a função de verossimilhança dada na equação (3.9).

Usando o método de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral do numerador, e o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a integral do denominador da equação (5.30), um estimador de Bayes para a função de confiabilidade do sistema é dado por:

$$\hat{R}_s^{(j)}(t_0) = e^{-(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3) V_j^P t_0}, \quad (5.31)$$

onde $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para c_1, c_2 e c_3 .

5.5.2.- ESTIMADOR DE BAYES PARA A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE DOIS COMPONENTES EM PARALELO.

Assumindo que os dois componentes de um sistema em paralelo, no nível de "stress" V_j , tem uma distribuição com função de densidade (eq. 5.1), a função de confiabilidade do sistema no tempo t_0 é dado por:

$$\begin{aligned} R_p^{(j)}(t_0) &= P[\text{Max}(X, Y) > t_0] = \\ &= \frac{c_{123} \left[e^{c_1 V_j^P t_0} + e^{c_2 V_j^P t_0} - 1 \right] - c_3}{c_{12} e^{c_{123} V_j^P t_0}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

O estimador de Bayes para $R_P^{(j)}(t_0)$ em relação à perda quadrática, é dado por:

$$\hat{R}_P^{(j)}(t_0) = \frac{\int R_P^{(j)}(t_0) \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}{\int \pi(c_1, c_2, c_3) L(c_1, c_2, c_3) dc_1 dc_2 dc_3}, \quad (5.33)$$

onde $\pi(c_1, c_2, c_3)$ é a densidade a priori e $L(c_1, c_2, c_3)$ é a função de verossimilhança dada na equação (3.9).

Usando o método de Laplace⁽²⁾ para aproximar a integral do numerador, e o método de Laplace⁽¹⁾ para aproximar a integral do denominador da equação (5.33), um estimador de Bayes para a função de confiabilidade do sistema é dado por:

$$\hat{R}_P^{(j)}(t_0) = \frac{\hat{c}_{123} \left[e^{\hat{c}_1 V_J^P t_0} + e^{\hat{c}_2 V_J^P t_0} - 1 \right] - \hat{c}_3}{\hat{c}_{12} e^{\hat{c}_{123} V_J^P t_0}}, \quad (5.34)$$

onde $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$ é a moda da densidade a posteriori conjunta para c_1, c_2 e c_3 .

Na prática, o interesse da indústria é estimar a confiabilidade do sistema em condições normais de funcionamento. Portanto, depois de ter conduzido testes de vida acelerados, pode-se estimar a confiabilidade do sistema em condições normais de funcionamento substituindo apenas o valor do nível de "stress" V_J pelo valor do nível de "stress" normal V_0 na expressão (5.32) se o sistema é em série, ou na expressão (5.34) se o sistema é em paralelo.

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos de aplicação com o objetivo de ilustrar a metodologia desenvolvida nos capítulos II, III, IV e V.

6.1.- EXEMPLO 1.

Neste exemplo desenvolve-se as análises clássica e Bayesiana apresentadas nos capítulos II e IV considerando os dados gerados por Achcar (1992) assumindo o modelo EBVAC de Bock & Basu (1974). Os dados são apresentados na Tabela 6.1.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	7,65	2,18	8	5,00	0,84
2	16,67	9,26	9	5,66	0,42
3	39,30	6,72	10	11,80	0,15
4	1,30	3,22	11	17,08	10,37
5	9,04	2,23	12	17,92	0,76
6	5,15	0,41	13	1,62	2,73
7	5,20	5,91	14	1,42	1,85
			15	3,60	1,50

Tabela 6.1.- Tempos de sobrevivência dos componentes do sistema i , $i = 1, 2, \dots, 15$.

6.1.1.- ANÁLISE CLÁSSICA DOS DADOS.

A análise clássica considerada aqui está baseada na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Considerando os dados da Tabela 6.1, observa-se que:

$$n = 15, \quad n_1 = 4, \quad n_2 = 11, \quad \bar{n}x = 148,41, \quad \bar{n}y = 48,45 \quad \text{e}$$

$$R = \sum_{i=1}^n \text{Max}(x_i, y_i) = 152,58.$$

Substituindo esses valores nas equações de verossimilhança (2.5), (2.6), (2.7), e usando o método de Newton-Raphson para resolver esse sistema de equações não lineares, obtém-se os estimadores de máxima verossimilhança para λ_1 , λ_2 , e λ_3 .

Na Tabela 6.2 apresenta-se os estimadores de máxima verossimilhança com seus respectivos desvios padrão para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 . Nessa Tabela apresenta-se também os intervalos de 95% de confiança para os parâmetros mencionados (calculados a partir das equações (2.36), (2.37) e (2.38)).

λ_i	EMV	D.P ($\hat{\lambda}_i$)	Intervalo de Confiança 95%
λ_1	0,084026	0,058354	(-0,033947 ; 0,194799)
λ_2	0,284535	0,099716	(0,089091 ; 0,479978)
λ_3	0,027853	0,070460	(-0,110250 ; 0,165955)

Tabela 6.2.- EMV com seus Desvios Padrão e Intervalos de Confiança de 95% para λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Para testar a dependência dos tempos de vida dos componentes do sistema, considerou-se o procedimento de teste introduzido por Hanagal & Kale (1990) para testar a hipótese $H_0: \lambda_3=0$ (ver Seção 2.3.2), obtendo,

$$\frac{\hat{\lambda}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} = 0,39529479 < 1,645 = z_{1-\alpha}$$

onde $\alpha = 0,05$. Portanto, a hipótese H_0 não é rejeitada e pode-se considerar que os tempos de vida dos componentes são independentes.

As terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos estimadores de máxima verossimilhança são dadas na Tabela 6.3.

ijk	$\partial^3 l / \partial \lambda_{ijk}$	ijk	$\partial^3 l / \partial \lambda_{ijk}$
111	32585,213	221	-122,187
112	-122,187	223	757,378
113	17824,572	333	18087,000
123	494,950	331	17824,572
222	1095,271	332	757,378

Tabela 6.3.- Terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos EMV.

Pode-se observar que os valores apresentados na Tabela 6.3 não são pequenos, o que significa que a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança não é muito boa. Essa pouca precisão pode-se observar também nos intervalos de confiança para λ_1 e λ_3 pois estes não respeitam a amplitude de validade dos parâmetros ($\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$).

O valor da medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ apresentada por Kass & Slate (1992), para os dados da Tabela 6.1 é dado por,

$$m^2 \bar{B}^2 = 572,26629.$$

Na Tabela 6.4 apresenta-se os estimadores de máxima verossimilhança e seus respectivos desvios padrão considerando duas

reparametrizações, $\theta_i = \log \lambda_i$, $i=1,2,3$; e $\xi_i = \log \lambda_i$, $i=1,2$; λ_3 .

1ª Reparametrização $\theta_i = \log \lambda_i$, $i=1,2,3$			2ª Reparametrização $\xi_i = \log \lambda_i$, $i=1,2$; λ_3		
	EMV	Des. Padrão		EMV	Des. Padrão
θ_1	-2,520412	0,725552	ξ_1	-2,520412	0,725552
θ_2	-1,256900	0,350454	ξ_2	-1,256900	0,350454
θ_3	-3,580827	2,529758	λ_3	0,027853	0,074046

Tabela 6.4.- EMV e Desvios Padrão considerando as reparametrizações $\theta_i = \log \lambda_i$, $i=1,2,3$; e $\xi_i = \log \lambda_i$, $i=1,2$; λ_3 .

Na Tabela 6.5 apresenta-se os intervalos de 95% de confiança para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 obtidos na parametrização original e através das duas reparametrizações mencionadas acima.

	Parametrização Original	Primeira Reparametrização	Segunda Reparametrização
λ_1	(-0,03395 ; 0,19480)	(0,01940 ; 0,33343)	(0,01940 ; 0,33343)
λ_2	(0,08909 ; 0,47998)	(0,14316 ; 0,56552)	(0,14316 ; 0,56552)
λ_3	(-0,11025 ; 0,16596)	(0,00020 ; 3,96497)	(-0,11025 ; 0,16596)

Tabela 6.5.- Intervalos de 95% de confiança para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Da Tabela 6.5 observa-se que, na primeira reparametrização a estimativa por intervalos para o parâmetro λ_1 melhorou, no sentido que nesta reparametrização o intervalo respeita a amplitude de validade do parâmetro. No caso do parâmetro λ_3 observa-se que, embora o intervalo tome só valores positivos o comprimento dele é muito grande.

Na segunda reparametrização pode-se observar que houve uma melhoria no caso do parâmetro λ_1 se comparado com a parametrização original. No caso do parâmetro λ_3 o intervalo de confiança não mudou.

Na Tabela 6.6 apresenta-se os valores das terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos estimadores de máxima verossimilhança na parametrização original e nas duas reparametrizações consideradas acima. Também apresenta-se valores da medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ introduzida por Kass & Slate (1992) na parametrização original e nas duas reparametrizações consideradas acima.

Terceiras derivadas da função log-verossimilhança			
ijk	Parametrização Original	Primeira Reparametrização	Segunda Reparametrização
111	32585,21255	-12,95557	-12,95557
112	-122,18703	0,12762	0,12762
113	17824,57237	0,89186	32,02078
123	494,94997	0,31547	11,32649
222	1095,27122	-13,98366	-13,98366
221	-122,18703	-0,44309	-0,44309
223	757,37782	0,61260	21,99427
333	18087,00022	-2,11435	18087,00022
331	17824,57237	-1,20734	1433,56678
332	757,37782	-0,92807	215,50023
$m^2 \bar{B}^2$	572,26629	345,13639	209,26875

Tabela 6.6.- Terceiras derivadas da função log-verossimilhança e a medida $m^2 \bar{B}^2$ na parametrização original e nas duas reparametrizações consideradas na Tabela 6.4.

Na Tabela 6.6 observa-se que os valores das terceiras derivadas nas duas reparametrizações são menores que na parametrização original, o que segundo Anscombe (1964) significa que

nessas reparametrizações a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é melhor. Na tabela 6.6 observa-se também que a medida $m^2 \bar{B}^2$ é menor na segunda reparametrização, o que segundo Kass & Slate (1992) significa que a aproximação normal na segunda reparametrização é melhor que na primeira reparametrização e que na parametrização original.

6.1.2.- ANÁLISE BAYESIANA DOS DADOS

Como foi visto no Capítulo IV, inferências sobre os parâmetros usando métodos Bayesianos são baseadas nas densidades a posteriori. Portanto, considerando os dados da Tabela 6.1 foram construídos os gráficos das densidades a posteriori marginais aproximadas para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 dadas em (4.8), (4.11) e (4.12) considerando a densidade a priori de Jeffreys para λ_1 , λ_2 e λ_3 . Os gráficos são apresentados nas Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 respectivamente.

Figura 6.1.- Densidade a Posteriori Marginal de λ_1

Figura 6.2.- Densidade a Posteriori
Marginal de λ_2

Figura 6.3.- Densidade a Posteriori
Marginal de λ_3

Na Tabela 6.7 apresenta-se as estimativas pontuais (modas a posteriori) e por intervalos para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

	Moda a Posteriori	Intervalos de Credibilidade	%
λ_1	0,053426	(0,018426 ; 0,224926)	94,863
λ_2	0,267346	(0,108340 ; 0,496340)	95,020
λ_3	0,038200	(-0,129728 ; 0,141872)	95,890

Tabela 6.7.- Modas a Posteriori e Intervalos de Credibilidade dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Na Tabela 6.8 apresenta-se os estimadores por intervalos obtidos na análise clássica (considerando a segunda reparametrização, isto é, $\xi_1 = \log \lambda_1$, $\xi_2 = \log \lambda_2$, λ_3) e na análise Bayesiana. Observa-se nessa Tabela que os intervalos de credibilidade são menores que os intervalos de confiança.

	Intervalos de 95% de Confiança	Intervalos de Credibilidade dados na Tabela 6.7
λ_1	(0,01940 ; 0,33343)	(0,01843 ; 0,22493)
λ_2	(0,14316 ; 0,56552)	(0,10834 ; 0,49634)
λ_3	(-0,11589 ; 0,17159)	(-0,12973 ; 0,14187)

Tabela 6.8.- Intervalos de Confiança e Intervalos de Credibilidade para λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Os estimadores de Bayes aproximados em relação ao erro quadrático médio para os tempos médios de vida dos componentes (ver (4.48) e (4.49)) são dados por:

$$\hat{\mu}_1 = 11,874146 \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_2 = 3,330150$$

Os estimadores de Bayes aproximados em relação ao erro quadrático médio para a função de confiabilidade de sistemas

considerando sistemas em série e em paralelo (ver (4.52) e (4.55)) são apresentados na Tabela 6.9.

t_0	Sist. Série $R_s(t_0)$	t_0	Sist. Paralelo $R_p(t_0)$
0,0	1,000000	0	1,000000
1,0	0,672728	2	0,914805
1,5	0,551772	4	0,760046
2,0	0,452567	6	0,608033
2,5	0,371192	8	0,479552
3,0	0,304452	10	0,376820

Tabela 6.9.- Estimadores de Bayes para a função de confiabilidade de sistemas em série e paralelo.

6.1.3.- INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS λ_1 E λ_2 ASSUMINDO $\lambda_3=0$.

Assumindo o parâmetro $\lambda_3=0$, a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros λ_1 e λ_2 (ver eq. (4.28)) considerando a densidade a priori de Jeffreys para λ_1 e λ_2 é dada por:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2 / \text{dados}) \propto \lambda_1^{14} \lambda_2^{14} e^{-148,41\lambda_1 - 48,55\lambda_2}.$$

O gráfico dessa densidade a posteriori é apresentado na Figura 6.4.

As densidades a posterioris marginais para λ_1 e λ_2 são dadas por:

$$\pi(\lambda_1 / \text{dados}) \propto \lambda_1^{14} e^{-148,41\lambda_1}$$

e

$$\pi(\lambda_2 / \text{dados}) \propto \lambda_2^{14} e^{-48,55\lambda_2}.$$

Os gráficos dessas densidades são apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6 respectivamente.

Figura 6.4. - Densidade a Posteriori Conjunta de λ_1 e λ_2 quando $\lambda_3=0$.

Figura 6.5. - Densidade a Posteriori Marginal de λ_1 quando $\lambda_3=0$.

Figura 6.6. - Densidade a Posteriori Marginal
de λ_2 quando $\lambda_3=0$.

Na Tabela 6.10 apresenta-se as estimativas pontuais (moda a posteriori) e por intervalos (intervalos de credibilidade) para os parâmetros λ_1 e λ_2 .

	Moda a Posteriori	Intervalos de Credibilidade (com probabilidade 0,95)
λ_1	0,09433	(0,05658 ; 0,15830)
λ_2	0,28836	(0,17295 ; 0,48400)

Tabela 6.10. - Moda a Posteriori e Intervalos
de Credibilidade para λ_1 e λ_2 .

6.2.- EXEMPLO 2.

Neste exemplo desenvolve-se as análises clássica e Bayesiana apresentadas nos capítulos II e IV considerando os dados gerados por Achcar & M. Santander (1993) assumindo o modelo EBVAC de Block & Basu (1974) com parâmetros $\lambda_1=0,25$, $\lambda_2=0,16$ e $\lambda_3=0$.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	3,73	2,54	16	3,42	1,09
2	5,83	7,74	17	7,71	0,33
3	8,44	9,89	18	6,92	2,59
4	7,95	2,47	19	7,76	3,77
5	7,66	8,77	20	0,16	6,07
6	3,47	1,86	21	7,79	6,98
7	2,75	1,30	22	0,66	0,49
8	0,57	5,04	23	10,83	4,03
9	3,48	1,13	24	4,23	2,71
10	4,12	7,24	25	3,23	18,74
11	2,08	9,40	26	1,00	9,10
12	4,19	1,50	27	3,08	12,43
13	0,82	6,29	28	0,55	13,50
14	1,14	2,61	29	0,37	5,52
15	0,18	8,17	30	0,39	2,37

Tabela 6.11.- Tempos de sobrevivência dos componentes do sistema i, $i = 1, 2, \dots, 30$.

6.2.1.- ANÁLISE CLÁSSICA DOS DADOS.

Considerando os dados da Tabela 6.11 e usando o método de Newton Raphson foram encontrados os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 que são apresentados na Tabela 6.12 juntamente com seus respectivos desvios padrão. Nesta Tabela apresenta-se também os intervalos de 95% de confiança para os parâmetros mencionados.

λ_1	EMV	D.P ($\hat{\lambda}_1$)	Intervalo de Confiança 95%
λ_1	0,248523	0,090587	(0,070972 ; 0,426073)
λ_2	0,169785	0,082036	(0,008994 ; 0,330575)
λ_3	0,016429	0,101717	(-0,182935 ; 0,215794)

Tabela 6.12.- EMV com seus Desvios Padrão e Intervalos de Confiança de 95% para λ_1 , λ_2 e λ_3 .

A estatística de teste introduzida por Hanagal & Kale (1992) para testar a hipótese $H_0: \lambda_3=0$ é:

$$\frac{\hat{\lambda}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} = 0,161517 < 1,645 = z_{1-\alpha} ; \quad \alpha=0,05$$

Portanto, a hipótese $H_0: \lambda_3=0$ não é rejeitada no nível de confiança de 5% e pode-se considerar que os tempos de vida dos componentes do sistema são independentes.

Para tentar melhorar a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança considerou-se as duas reparametrizações analisadas no exemplo anterior, isto é, $\theta_i = \log \lambda_i$, $i = 1,2,3$ e $\xi_i = \log \lambda_i$, $i = 1,2$; λ_3 .

Os intervalos de confiança 95% para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 calculados nas três parametrizações são apresentados na Tabela 6.13. Observa-se na Tabela 6.13, que na primeira reparametrização o comprimento do intervalo de confiança para λ_3 é muito grande.

Na Tabela 6.14 apresenta-se as terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos estimadores de máxima verossimilhança na parametrização original e nas reparametrizações consideradas acima. Apresenta-se também os valores da medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ introduzida por Kass & Slate (1992) na parametrização original e nas duas reparametrizações

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e $(\xi_1, \xi_2, \lambda_3)$.

	Parametrização Original	Primeira Reparametrização	Segunda Reparametrização
λ_1	(0,07097 ; 0,42607)	(0,12165 ; 0,50773)	(0,12165 ; 0,50773)
λ_2	(0,00899 ; 0,33058)	(0,06586 ; 0,43771)	(0,06586 ; 0,43771)
λ_3	(-0,18294 ; 0,21579)	(0,00000 ; 3059,88)	(-0,18294 ; 0,21579)

Tabela 6.13.- Intervalos de 95% de confiança para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

	Terceiras derivadas da função log-verossimilhança		
ijk	Parametrização Original	1ª Reparametrização $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$	2ª Reparametrização $(\xi_1, \xi_2, \lambda_3)$
111	3500,69629	-28,86277	-28,86277
112	-89,46621	-0,40174	-0,40174
113	2235,67428	0,80619	49,07075
123	730,25367	0,50623	30,81327
222	10587,24689	-28,98676	-28,98676
221	-89,46621	-0,10450	-0,10450
223	5686,07471	0,96305	58,81860
333	7191,49532	-0,63177	7191,49532
331	2235,67428	-1,31242	555,61560
332	5686,07471	-1,46929	965,40747
$m^2 \bar{B}^2$	448,43671	906,17712	144,99014

Tabela 6.14.- Terceiras derivadas da função log-verossimilhança e a medida $m^2 \bar{B}^2$, na parametrização original e nas duas reparametrizações $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e $(\xi_1, \xi_2, \lambda_3)$.

Da Tabela 6.14 observa-se que os valores das terceiras derivadas nas duas reparametrizações são menores do que na parametrização original. Observa-se também que a medida de

diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ é menor na segunda reparametrização $(\xi_1, \xi_2, \lambda_3)$, pelo que, pode-se dizer que a aproximação normal conjunta é melhor nessa reparametrização.

6.2.2.- ANÁLISE BAYESIANA DOS DADOS.

Para uma análise Bayesiana dos dados foram consideradas duas densidades a priori: a densidade a priori não informativa de Jeffreys (4.2) e a densidade a priori informativa (4.32) com $a_1=125$, $a_2=64$, $a_3=4$, $b_1=500$, $b_2=400$ e $b_3=200$.

As densidades a posteriori marginais aproximadas para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 (considerando o método de Laplace⁽²⁾ quando é usada a priori não informativa de Jeffreys, e o método de Laplace⁽¹⁾ quando é usada a densidade a priori informativa (4.32)) são apresentadas nas Figuras 6.7, 6.8 e 6.9.

Figura 6.7.- Densidade a Posteriori Marginal de λ_1

Figura 6.8.- Densidade a Posteriori
Marginal de λ_2

Figura 6.9.- Densidade a Posteriori
Marginal de λ_3

Na Tabela 6.15 apresenta-se as estimativas pontuais para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 obtidas na análise clássica e na análise Bayesiana. Observa-se nessa Tabela que os estimadores de máxima verossimilhança e as estimativas pontuais considerando a densidade a priori de Jeffreys (moda a posteriori (J)) são muito próximos. Observa-se também que as estimativas pontuais são mais próximas dos estimadores de máxima verossimilhança quando é usada uma densidade a priori informativa (moda a posteriori (I)).

	Valor Real	EMV	Moda a Posteriori(J)	Moda a Priori	Moda a Posteriori(I)
λ_1	0,25	0,248523	0,2480	0,2480	0,2480
λ_2	0,16	0,169781	0,1460	0,1575	0,1600
λ_3	0,00	0,016429	0,0200	0,0150	0,0150

Tabela 6.15.- Estimativas potuais para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Na Tabela 6.16 apresenta-se as estimativas por intervalos para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 obtidas tanto na análise clássica quanto na análise Bayesiana. Nesta Tabela observa-se intervalos mais fechados quando é usada a priori informativa (4.32).

	Int.de Confiança 95% (2ª Rep.: $(\xi_1, \xi_2, \lambda_3)$)	Intervalos de Credibilidade 95%	
		Priori de Jeffreys	Priori Informativa
λ_1	(0,12165 ; 0,50773)	(0,0700 ; 0,4360)	(0,2120 ; 0,2920)
λ_2	(0,06586 ; 0,43771)	(0,0500 ; 0,3360)	(0,1330 ; 0,1990)
λ_3	(-0,18294 ; 0,21579)	(-0,1820 ; 0,2100)	(0,0060 ; 0,0440)

Tabela 6.16.- Estimativas por intervalos para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Na Tabela 6.17 apresenta-se os estimadores de Bayes aproximados em relação ao erro quadrático médio para os tempos médios de vida dos componentes do sistema considerando a priori de

Jeffreys e a priori informativa (4.32). Observa-se que as estimativas para os tempos médios de vida usando a priori não informativa de Jeffreys são muito próximos dos tempos médios de vida obtidos com os valores reais usados para a geração de dados.

	Valores reais λ_1, λ_2 e λ_3	EMV	Priori de Jeffreys	Priori Informativa
$\hat{\mu}_1$	4,000000	3,832165	3,798139	3,805672
$\hat{\mu}_2$	6,250000	5,490749	6,207276	5,700143

Tabela 6.17.- Estimadores de Bayes para os tempos médios de vida dos componentes

Na Tabela 6.18 apresenta-se os estimadores de Bayes aproximados em relação ao erro quadrático médio para a função de confiabilidade de sistemas de dois componentes considerando sistemas em série e em paralelo. Observa-se que as estimativas usando a densidade a priori não informativa de Jeffreys são muito próximas as funções de confiabilidade obtidas usando os valores de geração para λ_1, λ_2 e λ_3 .

t_0	Com valores gerados		Priori Jeffreys		Priori Informativa	
	$R_s(t_0)$	$R_p(t_0)$	$R_s(t_0)$	$R_p(t_0)$	$R_s(t_0)$	$R_p(t_0)$
1	0,6636	0,9673	0,6610	0,9657	0,6499	0,9624
2	0,4404	0,8922	0,4369	0,8874	0,4226	0,8780
3	0,2923	0,7989	0,2888	0,7907	0,2751	0,7748
4	0,1940	0,7012	0,1909	0,6903	0,1792	0,6694
5	0,1287	0,6071	0,1262	0,5943	0,1168	0,5699
10	0,0166	0,2674	0,0159	0,2543	0,0139	0,2299
15	0,0021	0,1121	0,0020	0,1038	0,0017	0,0884

Tabela 6.18.- Estimadores de Bayes para as funções de confiabilidade de sistemas em série ($R_s(t_0)$) e sistemas em paralelo ($R_p(t_0)$).

6.2.3.- INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS λ_1 E λ_2 ASSUMINDO $\lambda_3 = 0$.

Assumindo o parâmetro $\lambda_3=0$, a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros λ_1 e λ_2 (eq. 4.28) assumindo uma priori de Jeffreys é dada por:

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2 / \text{dados}) \propto \lambda_1^{29} \lambda_2^{29} e^{-114,51\lambda_1 - 165,67\lambda_2} .$$

O gráfico dessa densidade a posteriori é apresentado na Figura 6.10.

Figura 6.10.- Densidade a Posteriori Conjunta de λ_1 e λ_2 quando $\lambda_3=0$.

As densidades a posteriori marginais para λ_1 e λ_2 são dadas por:

$$\pi(\lambda_1 / \text{dados}) \propto \lambda_1^{29} e^{-114,51\lambda_1} .$$

e

$$\pi(\lambda_2/\text{dados}) \propto \lambda_2^{29} e^{-165,67\lambda_2}.$$

Os gráficos dessas densidades são apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12, respectivamente.

Figura 6.11.- Densidade a Posteriori Marginal de λ_1 quando $\lambda_3=0$.

Figura 6.12.- Densidade a Posteriori Marginal de λ_2 quando $\lambda_3=0$.

Na Tabela 6.19 apresenta-se as estimativas pontuais (moda a posteriori) e por intervalos (intervalos de credibilidade) para os parâmetros λ_1 e λ_2 .

	Moda a Posteriori	Intervalos de Credibilidade (com probabilidade 0,95)
λ_1	0,25325	(0,17677 ; 0,36372)
λ_2	0,17505	(0,12218 ; 0,25140)

Tabela 6.19.- Moda a Posteriori e Intervalos de Credibilidade para λ_1 e λ_2 .

6.3.- EXEMPLO 3.

Neste exemplo desenvolve-se as análises clássica e Bayesiana apresentadas nos capítulos III e V considerando os dados gerados por Achcar (1992) para o modelo EBVAC de Block & Basu (1974) no enfoque de testes acelerados considerando o modelo de potência (eq. 3.3) com $P=2$ e três níveis de "stress": $V_1=1$, $V_2=2$ e $V_3=3$. Os dados são apresentados na Tabela 6.20.

i	x_{1i}	y_{1i}	x_{2i}	y_{2i}	x_{3i}	y_{3i}
1	7,65	2,18	2,29	0,02	0,34	0,20
2	16,67	9,26	0,10	0,38	1,50	1,30
3	39,30	6,72	0,88	0,27	0,63	0,69
4	1,30	3,22	0,45	0,04	0,68	0,12
5	9,04	2,23	1,66	1,60	3,22	0,09
6	5,15	0,41	0,74	1,67	1,91	0,91
7	5,20	5,91	2,50	0,37	0,52	0,58
8	5,00	0,84	3,50	0,03	0,30	0,01
9	5,66	0,42	8,45	0,71	1,30	0,02
10	11,80	0,15	4,60	0,83	0,52	0,10
11	17,08	10,37	2,66	1,06	2,08	0,30
12	17,92	0,76	1,46	1,04	0,95	0,91
13	1,62	2,73	1,03	0,41	0,43	0,02
14	1,42	1,85	4,36	1,34	0,25	0,08
15	3,60	1,50	0,76	0,77	1,39	0,08

Tabela 6.20 .- Tempos de sobrevivência dos componentes do sistema i, $i=1,2,\dots,15$, em cada nível de "stress" V_j , $j=1,2,3$.

6.3.1.- ANÁLISE CLÁSSICA DOS DADOS

Na Tabela 6.21 apresenta-se algumas estatísticas que resumem os dados da Tabela 6.20.

J	V _j	n _{1j}	n' _j	n' _j $\bar{x}_j$	n' _j $\bar{y}_j$	R _j
1	1	4	15	148,41	48,55	152,58
2	2	3	15	35,44	10,54	36,66
3	3	2	15	16,02	5,41	16,14

Tabela 6.21.- Resumo dos dados da Tabela 6.20.

Substituindo os valores da Tabela 6.21 nas equações de verossimilhança (ver Seção 3.3) e resolvendo o sistema obtém-se os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros envolvidos. Para simplificar a resolução das equações de verossimilhança considerou-se a função de verossimilhança maximizada para P, isto é, utilizou-se o método de Newton-Raphson para calcular os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{c}_1(P)$, $\hat{c}_2(P)$ e $\hat{c}_3(P)$ para diferentes valores de P como pode-se observar na Tabela 6.22.

Na Tabela 6.23 apresenta-se os estimadores de máxima verossimilhança (ver Tabela 6.22) com seus desvios padrão e os intervalos de 95% de confiança calculados assumindo a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

A estatística de teste introduzida na Seção 3.4.2 para testar a independência dos tempos de vida dos componentes do sistema, isto é, a hipótese $H_0: c_3=0$ é:

$$\frac{\hat{c}_3}{(\hat{a}_{33})^{1/2}} = 0,170135 < 1,705 = z_{1-\alpha}; \quad \alpha=0,0441$$

Portanto, com um nível de significância de 4,41% a hipótese $H_0: c_3=0$ não é rejeitada.

Para estudar a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança considerou-se as reparametrizações mencionadas na Seção 3.5, isto é, $\theta_i = \log c_i$, $i = 1,2,3$; P e $\xi_i = \log c_i$, $i=1,2$; c_3 , P.

P	$\hat{c}_1(P)$	$\hat{c}_2(P)$	$\hat{c}_3(P)$	$l(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3/P)$
1,25	0,086325	0,396335	0,088333	-139,946681
1,35	0,082511	0,379126	0,084641	-138,541448
1,45	0,078687	0,361858	0,080954	-137,327331
1,55	0,074869	0,344603	0,077648	-136,305989
1,65	0,071074	0,327431	0,073637	-135,478395
1,75	0,067317	0,310412	0,070032	-134,844826
1,85	0,063613	0,293615	0,066830	-134,404866
1,90	0,061786	0,285320	0,064722	-134,257171
1,96	0,059618	0,275472	0,062638	-134,143192
1,99	0,058545	0,270595	0,061606	-134,111957
2,01	0,057834	0,267362	0,060921	-134,100633
2,02	0,057480	0,265751	0,060580	-134,097813
2,03	0,057127	0,264144	0,060240	-134,096885
2,04	0,056774	0,262542	0,059900	-134,097846
2,05	0,056423	0,260943	0,059562	-134,100694
2,07	0,055723	0,257757	0,058887	-134,112037
2,10	0,054680	0,253010	0,057880	-134,143133
2,15	0,052962	0,245186	0,056221	-134,232306
2,25	0,049605	0,229884	0,052969	-134,549245
2,35	0,046363	0,215083	0,049815	-135,047959
2,45	0,043244	0,200821	0,046764	-135,724390
2,55	0,040254	0,187129	0,043823	-136,574042
2,65	0,037397	0,174032	0,040995	-137,592034
2,75	0,034679	0,161547	0,038286	-138,773163

Tabela 6.22.- Função log-verossimilhança maximizada para alguns valores de P.

	EMV	Desv. Padrão	Intervalo de Confiança 95%
c_1	0,057127	0,026973	(0,004260 ; 0,109994)
c_2	0,264144	0,067571	(0,131705 ; 0,396584)
c_3	0,060240	0,035607	(-0,009550 ; 0,130030)
P	2,030000	0,232382	(1,574531 ; 2,485469)

Tabela 6.23.- EMV com seus Desvios Padrão e Intervalos de Confiança de 95% para c_1 , c_2 , c_3 e P.

Os intervalos de 95% de confiança para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P calculados nas três parametrizações são apresentados na Tabela 6.24.

	Parametrização Original	1ª Reparametrização ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, P$)	2ª Reparametrização (ξ_1, ξ_2, c_3, P)
c_1	(0,00426 ; 0,10999)	(0,02264 ; 0,14413)	(0,02264 ; 0,14413)
c_2	(0,13171 ; 0,39658)	(0,15999 ; 0,43611)	(0,15999 ; 0,43611)
c_3	(-0,00955 ; 0,13003)	(0,01891 ; 0,19188)	(-0,00955 ; 0,13003)
P	(1,57453 ; 2,48547)	(1,57453 ; 2,48547)	(1,57453 ; 2,48547)

Tabela 6.24.- Intervalos de 95% de confiança para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P.

Na Tabela 6.25 apresenta-se as terceiras derivadas da função log-verossimilhança avaliadas nos estimadores de máxima verossimilhança na parametrização original e nas duas reparametrizações mencionadas acima. Apresenta-se também o valor da medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ para cada parametrização. Observa-se nas duas reparametrizações, valores das terceiras derivadas mais próximos de zero que na parametrização original. Observa-se também que a medida de diagnóstico de não normalidade $m^2 \bar{B}^2$ é menor na segunda reparametrização (ξ_1, ξ_2, c_3, P), onde conclui-se que a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é melhor nessa reparametrização.

Terceiras derivadas da função log-verossimilhança			
i j k	Parametrização Original	Primeira Reparametrização	Segunda Reparametrização
111	139992,59100	-25,24628	-25,24628
112	-1093,33983	-0,97107	-0,97107
113	46155,67478	-0,98388	-16,33279
114	0,00000	-15,08318	-15,08318
123	1620,77042	1,47328	24,45691
124	0,00000	0,00000	0,00000
134	0,00000	0,00000	0,00000
234	0,00000	-0,00000	0,00000
222	3340,68277	-37,79052	-37,79052
221	-1093,33983	-2,44435	-2,44435
223	2148,11310	2,74817	45,62054
224	0,00000	-22,48422	-22,48422
333	46683,01746	-22,54337	46683,01746
331	46155,67478	-0,48940	2636,71774
332	2148,11310	-4,22145	567,41224
334	0,00000	-16,18708	0,00000
444	-50,44767	-50,44767	-50,44767
441	-249,38894	-14,24675	-14,24675
442	-81,41698	-21,50585	-21,50585
443	-253,13000	-15,24851	253,13000
$m^2 \bar{B}^2$	113,98566	98,39832	92,37496

Tabela 6.25. - Terceiras derivadas da função log-verossimilhança e a medida $m^2 \bar{B}^2$ na parametrização original e nas duas reparametrizações $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, P)$ e (ξ_1, ξ_2, c_3, P)

6.3.2. -ANÁLISE BAYESIANA DOS DADOS.

Para uma análise Bayesiana dos dados foi considerada a densidade a priori não informativa de Jeffreys (ver Seção 5.1.1).

Assumindo P conhecido foi considerada também a densidade a priori informativa (5.17) com $a_1 = 5$, $a_2 = 15$, $a_3 = 3$, $b_1 = 72$, $b_2 = 54$ e $b_3 = 41$.

A densidade a posteriori marginal para P considerando a densidade a priori não informativa de Jeffreys e obtida usando o método de aproximação de integrais de Laplace⁽²⁾ é apresentada na Figura 6.13. A estimativa pontual (moda a posteriori) para P é dada por $\tilde{P} = 2,03$ e um intervalo de credibilidade aproximado de 95,0308% é dado por (1,584 ; 2,492).

Figura 6.13. - Densidade a Posteriori Marginal de P .

As densidades a posteriori marginais aproximadas para os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 (considerando o método de Laplace⁽²⁾ quando é usada a priori não informativa de Jeffreys e, o método de Laplace⁽¹⁾ quando é usada a densidade a priori informativa (5.17)) são apresentadas nas Figuras 6.14, 6.15 e 6.16 respectivamente.

Figura 6.14.- Densidade a Posteriori
Marginal de C_1

Figura 6.15.- Densidade a Posteriori
Marginal de C_2

Figura 6.16.- Densidade a Posteriori
Marginal de c_3

Na Tabela 6.26 apresenta-se os estimadores pontuais para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P obtidos na análise clássica e na análise Bayesiana.

	EMV	Moda a Posteriori(J)	Moda a Posteriori(I)
c_1	0,057127	0,0490	0,2670
c_2	0,264144	0,2580	0,2650
c_3	0,060240	0,0620	0,0570
P	2.030000	2,0300	----

Tabela 6.26.- Estimativas pontuais dos parâmetros
 c_1 , c_2 , c_3 e P .

Observa-se na Tabela 6.26 valores muito próximos para os estimadores de máxima verossimilhança e as modas a posteriori calculadas usando a densidade a priori não informativa de Jeffreys.

Quando é usada a densidade a priori informativa observa-se claramente a influência da informação a priori no caso dos parâmetros c_2 e c_3 . No caso do parâmetro c_1 observa-se que essa influência é ainda mais acentuada pois existe uma grande discrepância entre a moda a posteriori e o estimador de máxima verossimilhança. Isto implica que deve-se ter muito cuidado em utilizar a densidade a priori informativa (5.17) pois a escolha dos valores a_i e b_i , $i=1,2,3$, leva a grandes diferenças nas inferências baseadas nas densidades a posteriori marginais, especialmente para o parâmetro c_1 conforme foi verificado com vários valores dos parâmetros a_i e b_i , $i=1,2,3$. Uma possibilidade aqui seria incorporar na densidade a priori para c_1 , c_2 e c_3 , a correlação existente entre os parâmetros o que nem sempre é simples nas aplicações (ver Peña & Gupta (1990)).

Na Tabela 6.27 apresenta-se os intervalos de 95% de confiança obtidos na análise clássica e os intervalos de credibilidade obtidos na análise Bayesiana. Nessa Tabela observa-se que os intervalos de credibilidade são mais fechados que os intervalos de confiança.

	Int. de Confiança 95% (2da. Reparam.)	Intervalos de Credibilidade 95%	
		Priori de Jeffreys	Priori Informativa
c_1	(0,00426 ; 0,10999)	(0,024 ; 0,122)	(0,240 ; 0,300)
c_2	(0,13171 ; 0,39658)	(0,161 ; 0,383)	(0,195 ; 0,357)
c_3	(-0,00955 ; 0,13003)	(-0,017 ; 0,119)	(0,022 ; 0,106)
P	(1,57453 ; 2,48547)	(1,592 ; 2,500)	-----

Tabela 6.27.- Estimativas por Intervalos para os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 e P.

Assumindo o nível de "stress" 1 como sendo o nível de "stress" normal, foram calculados os estimadores de Bayes aproximados (em relação à perda quadrática) dos tempos de vida

médios dos componentes do sistema. Esses estimadores são dados por:

$$\hat{\mu}_1 = 9,626443 \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_2 = 3,169316$$

Assumindo novamente o nível de "stress" 1 como sendo o nível de "stress" normal, foram calculados também os estimadores de Bayes aproximados (em relação à perda quadrática) da função de confiabilidade de sistemas em série e sistemas em paralelo. Esses estimadores são apresentados na Tabela 6.28.

t_0	Sistema em Série $R_s(t_0)$	Sistema em Paralelo $R_p(t_0)$
1	0,682828	0,975636
2	0,466255	0,918647
3	0,318372	0,846046
4	0,217394	0,768102
5	0,148443	0,690799
10	0,022035	0,383244

Tabela 6.28.- Estimadores de Bayes para a função de confiabilidade $R_s(t_0)$ e $R_p(t_0)$.

Os programas computacionais utilizados nos exemplos apresentados neste capítulo foram implementados na linguagem de programação FORTRAN 77 versão 3.3 e executados num micro computador AT-286. No APÊNDICE 6 são apresentados alguns desses programas.

Para o desenho dos gráficos das densidades a posteriori marginais e a posteriori conjuntas foram utilizados os pacotes LOTUS 1-2-3 e DERIVE.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Os resultados assintóticos usados na análise clássica nem sempre são apropriados quando é preciso fazer inferências baseadas em dados de amostras pequenas. Observa-se neste trabalho que o uso de reparametrizações pode melhorar sensivelmente as aproximações assintóticas e conseqüentemente as inferências baseadas nessas aproximações.

Os resultados obtidos usando métodos Bayesianos com densidades a priori não informativas são muito próximos dos resultados obtidos na análise clássica. Portanto pode-se dizer que os métodos Bayesianos são uma alternativa válida na análise de dados quando não existe informação a priori e o modelo de Block & Basu é apropriado. Além disso, os métodos Bayesianos permitem a introdução de informação a priori na análise de dados, o que é comum nas aplicações industriais e na engenharia.

Também concluímos que os métodos de aproximação de integrais de Laplace são de muita utilidade na obtenção dos resultados Bayesianos, o que torna viável a sua utilização em problemas com dados reais.

Num estudo futuro poderia ser considerado o uso de outras densidades a priori não informativas numa análise Bayesiana do modelo ACBVE de Block & Basu (1974). Além disso seria de muito interesse, o uso de outros métodos de aproximação de integrais ou numéricos na resolução de integrais, por exemplo o método de Monte

Carlo, para comparar os resultados com aqueles obtidos usando o método de Laplace.

Outro ponto a considerar para um estudo futuro, é o uso de outras possíveis reparametrizações na procura de melhorar o comportamento das densidades a posteriori e consequentemente as inferências sobre os parâmetros.

BIBLIOGRAFIA

- ACHCAR, J.A.; An useful reparametrization for extreme value distribution. Computational Statistics Quartely, 2, p. 113-125, Physica Verlag, 1991.
- ACHCAR, J.A.; DIAS, T.C.M. Accelerated life tests with an exponential distribution: a Bayesian approach with the power rule model and type II censored data. São Carlos, ICMSC-USP, 1990. (Notas do ICMSC-USP, 67).
- ACHCAR, J.A.; Inference for accelerated life tests considering a bivariate exponential distribution. São Carlos, ICMSC-USP, 1992. (Notas do ICMSC-USP, 106).
- ACHCAR, J.A.; A Bayesian analysis of the bivariate exponential distribution of Block and Basu applied to accelerated life tests. São Carlos, ICMSC-USP, 1992. (Notas do ICMSC-USP, 109).
- ACHCAR, J.A.; SANTANDER L.A.M. Use of approximate Bayesian methods for the Block and Basu bivariate exponential distribution. São Carlos, ICMSC-USP, 1993. (Notas do ICMSC-USP, 134).
- ANSCOMBE, F.J. Normal likelihood functions. Ann. Inst. Statist. Math. V. 16, p. 1-19, 1964
- BANDYOPADHYAY, D.; BASU, A.P.; Bivariate models for the life lengths of components of a system. Columbia, University of Missouri, 1987. (AFOSR-87-0139).

- BARNETT, V. The bivariate exponential distribution: a review and some new results. Statistica Neerlandica, V.39, N.4, p. 343-56, 1985.
- BASU, A.P. Bivariate failure rate. JASA. V. 66, N.333, p. 103-4, 1971.
- BASU, A.P.; EBRAHIMI, N. On a bivariate accelerated life test. Journal of Statistical Planning and Inference, V.16, p. 297-304, 1987.
- BICKEL, P.J.; DOKSUM, K.A. Mathematical Statistics - Basic ideas and selected topics. San Francisco, Holden Day, 1977.
- BLOCK, H.W.; BASU, A.P. A continuous bivariate exponential extension. JASA, V. 69, N. 348, p. 1031-7, 1974.
- BLOCK, H.W. A characterization of a bivariate exponential distribution. The Annals of Statistics, V. 5, N. 4, p. 808-12, 1977.
- BOX, G.E.P.; TIAO, G.C. Bayesian Inference in Statistical Analysis. New York, Addison-Wesley, 1973.
- DOWNTON, F. Bivariate exponential distributions in reliability theory. Journal of the Royal Statistical Society, S.B. V. 34, N. 1, p. 408-17, 1970.
- FREUND, J.E. A bivariate extension of the exponential distribution. JASA, V. 56, p. 971-7, 1961.
- GUMBEL, E.J. Bivariate exponential distributions. JASA, V. 55, p. 698-707, 1960.
- GUPTA, R.C.; MEHROTRA, K.G.; MICHALEK, J.E. A small sample test for an absolutely continuous bivariate exponential model. Commun. Statist.: Theory & Methods, V. 13, N. 14, p. 1735-40, 1984.

- HANAGAL, D.D.; KALE, B.K. Large sample tests of independence for absolutely continuous bivariate exponential distribution. Commun. Statist.: Theory & Methods, V. 20, N. 4 p. 1301-13, 1991.
- HAWKES, A.G. A bivariate exponential distribution with applications to reliability. Journal of the Royal Statistical Society, B. V. 34, p. 129-31, 1972.
- JOHNSON, N.; KOTZ, S. Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. New York, John Wiley & Sons, 1972.
- KALBFLEISCH, J.G. Probability and Statistical Inference. 2. ed. New York, Springer Verlag, 1985. 2v.
- KASS, R.E.; TIERNEY, L.; KADANE, J.B. The validity of posterior expansions based on Laplace's method. In: GEISSER, S.; HODGES, J.S.; PRESS, S.J.; ZELLNER, A., ed. Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics. Amsterdam, Elsevier, 1990. p. 473-88.
- KASS, R.E.; SLATE, E.H. Reparametrization and Diagnostics of Posterior Non Normality. Department of Statistics-Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1992. (PA 15213).
- KLEIN, J.P.; BASU, A.P. Estimating reliability for bivariate exponential distributions. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, S.B. V. 47, pte 3, p. 346-53, 1985.
- LAWLESS, J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New York, John Wiley, 1982.
- LEITE, J.G.; SINGER, J.M. Métodos Assintóticos em Estatística: Fundamentos e Aplicações. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 9, São Paulo, 1990. São Paulo, IME-USP, 1990. 130 p. (Notas do Mini-curso)

- LOUZADA NETO F. Testes de Sobrevivência Acelerados: Uma Análise Bayesiana do Modelo de Eyring. São Carlos, ICMSC-USP, 1990 (Dissertação de Mestrado).
- MARSHALL, A.W.; OLKIN, I. A multivariate exponential distribution. JASA, V. 62, p. 30-44, 1967.
- MANN, N.; SHAFFER, R.E.; SINGPURWALA, N.D. Methods for Statistical Analysis and Life Test Data. New York, John Wiley, 1982.
- MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A.; BOES, D.C. Introduction to the Theory of Statistics. 3. ed. New York, Mc Graw Hill, 1974.
- NELSON, W. Accelerated Testing: Statistical Models, Tests Plans and Data Analysis. New York, John Wiley, 1990.
- MORGENSTERN D. Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen Mitteilungsblatt für mathematische Statistik, 8, p. 234-35, 1956.
- PEÑA, E.A.; GUPTA, A.K. Bayes estimation for the Marshall-Olkin exponential distribution. Journal of the Royal Statistical Society B, V. 52, N. 2, p. 379-89, 1990.
- PRESS, S.J. Bayesian Statistics: Principles, Models and Applications. New York, John Wiley, 1989.
- RIGDON, S.E.; BASU, A.P. The power law process: a model for the reliability of repairable systems. Journal of Quality Technology, V. 21, N. 4, p. 251-60, 1989.
- ROY, D. A characterization of Gumbel's bivariate exponential and Lindley and Singpurwalla's bivariate Lomax distributions. J. Appl. Prob., V. 27, p. 886-91, 1989.

- SARKAR, S.K. A continuous bivariate exponential distribution. JASA, V. 82, p. 667-75, 1987.
- SHAMSELDIN, A.A.; PRESS, S.J. Bayesian parameter and reliability estimation for a bivariate exponencial distribution. Journal of Econometrics, 24, p. 363-78, 1984.
- SPROTT, D.A.; KALBFLEISCH, J.D. Examples of likelihoods and comparison with point estimates and large sample aproximations. JASA, V. 64, N. 326, p. 468-85, 1968.
- SPROTT, D.A. Normal likelihoods and their relations to large sample theory of estimation. Biometrika, V.60, N. 3, p. 457-65, 1973.
- SPROTT, D.A. Maximum likelihood in small samples: estimation in the presence of nuisance parameters. Biometrika, V. 67, N. 3, p. 515-23, 1980.
- TIERNEY, L.; KADANE, J.B.; Accurate approximations for posterior moments and marginal densities, JASA, V. 81, p. 82-86, 1986.

APÊNDICE 1

PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

A distribuição $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de Marshall & Olkin (1967) tem as seguintes propriedades:

- a) A distribuição $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tem uma parte absolutamente contínua e uma parte singular dada por:

$$\bar{F}(x, y) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda} \bar{F}_\alpha(x, y) + \frac{\lambda_3}{\lambda} \bar{F}_s(x, y), \quad (A1.1)$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,

$\bar{F}_s(x, y) = e^{-\lambda \max(x, y)}$ é a parte singular e

$$\bar{F}_\alpha(x, y) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda \max(x, y)}$$

é a parte absolutamente contínua (ver Marshall & Olkin (1967)).

- b) A função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(s, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx - ty} dF(x, y) \\ &= \frac{(\lambda + s + t) (\lambda_1 + \lambda_3) (\lambda_2 + \lambda_3) + st\lambda_3}{(\lambda + s + t) (\lambda_1 + \lambda_3 + s) (\lambda_2 + \lambda_3 + t)}, \end{aligned} \quad (A1.2)$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Daí obtém-se:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}, \quad (A1.3)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad (A1.4)$$

$$V(X) = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}, \quad (A1.5)$$

$$V(Y) = \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2}, \quad (A1.6)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\lambda_3}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \quad (A1.7)$$

e o coeficiente de correlação linear entre (X, Y) ,

$$\rho(X, Y) = \frac{\lambda_3}{\lambda}. \quad (A1.8)$$

c) Se X é uma variável aleatória exponencial, então aX é exponencial para todo $a > 0$. No entanto, se (X, Y) é EBV, então (aX, bY) é EBV se e só se $a = b > 0$.

d) (X, Y) é EBV se e só se existem variáveis aleatórias exponenciais independentes U, V e W tais que: $X = \min(U, W)$ e $Y = \min(V, W)$.

e) Uma propriedade importante das variáveis aleatórias exponenciais independentes X e Y é que $\min(X, Y)$ é exponencial. Se X e Y são dependentes mas (X, Y) é EBV, então:

$$P[\min(X, Y) > x] = P[X > x, Y > y] = e^{-\lambda x}, \quad (A1.9)$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, de modo que o mínimo de X e Y é novamente exponencial.

NOTA.- O mínimo entre variáveis aleatórias exponenciais dependentes não precisa ser exponencial. Um exemplo é dado pelas distribuições exponenciais bivariadas de Gumbel (1960).

f) É comum na prática assumir que os componentes de um sistema têm tempos de vida independentes. O efeito dessa suposição em componentes com distribuição EBV pode ser analisado da seguinte forma:

Seja (X,Y) uma variável aleatória com distribuição EBV e com funções de sobrevivência marginais $\bar{F}_1(x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x}$ e $\bar{F}_2(y)=e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y}$. Com a suposição de independência, deve-se verificar que:

$$\bar{F}(x,y) = \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y), \text{ isto é, } \bar{F}(x,y) - \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y) = 0 \quad (\text{A1.10})$$

mas, dado que (X,Y) é EBV tem-se que:

$$\bar{F}(x,y) - \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y) = e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x,y)} \cdot \left[1 - e^{-\lambda_3 \min(x,y)} \right] \quad (\text{A1.11})$$

é positivo para todo x e y , então a probabilidade que ambos itens sobrevivam é realmente maior do que a suposição de independência levaria a acreditar.

Calculando a maior discrepância tem-se,

$$\max \left[\bar{F}(x,y) - \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y) \right] \leq \left[\frac{\rho^\rho}{(1+\rho)^{(1+\rho)}} \right]^{1/\rho}, \quad (\text{A1.12})$$

onde $\rho = \rho(X,Y)$.

APÊNDICE 2

PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO EBVAC DE BLOCK & BASU

NOTAÇÃO.- $\mathcal{E}(\lambda)$ é equivalente a afirmar que a densidade de X é
 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

As propriedades da EBVAC de Block & Basu (1974) são as seguintes:

a) $\min(X, Y) \approx \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

b) $Z = X - Y$ tem função de distribuição

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)z} & \text{se } z \leq 0 \\ 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)z} & \text{se } z > 0 \end{cases} \quad (A2.1)$$

c) $Z = |X - Y|$ tem função de distribuição

$$F(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)z} \right] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)z} \right] \quad (A2.2)$$

se $z > 0$.

d) $\min(X, Y)$ é independente de $X - Y$ (e também de $|X - Y|$).

e) A propriedade de perda de memória é verificada.

$$f) \quad \bar{F}(x, y) = \begin{cases} e^{-\lambda y} \bar{F}_1(x-y) & \text{se } 0 < y < x \\ e^{-\lambda x} \bar{F}_2(y-x) & \text{se } 0 < x < y \end{cases}, \quad (A2.3)$$

onde $\bar{F}(x, y) = P[X > x, Y > y]$, $\bar{F}_1(x) = \bar{F}(x, 0)$ e $\bar{F}_2(y) = \bar{F}(0, y)$.

g) Se (X_1, Y_1) é $EBV(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, então

$$P[X_1 > x] = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda} \bar{F}_1(x) + \frac{\lambda_3}{\lambda} e^{-\lambda x} \quad \text{se } x > 0 \quad (A2.4)$$

e

$$P[Y_1 > y] = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda} \bar{F}_2(y) + \frac{\lambda_3}{\lambda} e^{-\lambda y} \quad \text{se } y > 0. \quad (A2.5)$$

h) A função geradora de momentos é dada por:

$$m(s, t) = \frac{\lambda}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda - t - s)} \left[\frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_2 + \lambda_3 - t)} + \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_3 - s)} \right], \quad (A2.6)$$

daí obtém-se,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)}, \quad (A2.7)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)}, \quad (A2.8)$$

$$V(X) = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_2 (2\lambda_1 \lambda + \lambda_3 \lambda_2)}{\lambda^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_3)^2}, \quad (A2.9)$$

$$V(Y) = \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{\lambda_3 \lambda_1 (2\lambda_2 \lambda + \lambda_3 \lambda_1)}{\lambda^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_2 + \lambda_3)^2}, \quad (A2.10)$$

$$E(XY) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)} + \frac{\lambda_2}{\lambda(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)}, \quad (A2.11)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2}{\lambda^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)} \quad (A2.12)$$

e o coeficiente de correlação linear entre X e Y dado por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\lambda_3 [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3]}{\phi_1\phi_2}, \quad (A2.13)$$

onde

$$\phi_1 = [(\lambda_1 + \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2 + \lambda_2(\lambda_2 + 2\lambda_1)\lambda^2]^{1/2} \quad e$$

$$\phi_2 = [(\lambda_1 + \lambda_2)^2(\lambda_2 + \lambda_3)^2 + \lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_2)\lambda^2]^{1/2}.$$

De (eq. A2.13) pode-se observar que o coeficiente de correlação linear entre X e Y só toma valores positivos, e $\rho(X, Y) = 0$ só no caso em que $\lambda_3 = 0$.

APÊNDICE 3

DUAS REPARAMETRIZAÇÕES PARA O MODELO EBVAC DE BLOCK & BASU

A3.1.- REPARAMETRIZAÇÃO LOGARÍTMICA PARA OS PARÂMETROS λ_1 , λ_2 E λ_3 .

Considerando a reparametrização logarítmica dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 , isto é, $\theta_1 = \log \lambda_1$, $\theta_2 = \log \lambda_2$ e $\theta_3 = \log \lambda_3$, a função log-verossimilhança (eq. 2.4) é expressa como segue:

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \theta_2, \theta_3, P) = & n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2 + n \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}) + \\ & + n_1 \log (e^{\theta_2} + e^{\theta_3}) + n_2 \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_3}) - \\ & - n \log (e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) - e^{\theta_1} n \bar{x} - e^{\theta_2} n \bar{y} - \\ & - e^{\theta_3} R . \end{aligned} \quad (A3.1)$$

Pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$\hat{\theta}_1 = \log \hat{\lambda}_1, \quad \hat{\theta}_2 = \log \hat{\lambda}_2 \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_3 = \log \hat{\lambda}_3,$$

onde $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$ são os valores dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 que maximizam a função log-verossimilhança (eq. 2.4) (ver Seção 2.2).

Os termos da matriz de informação nesta reparametrização são dados por:

$$i_{11} = ne^{\theta_1} \left\{ \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right]^2} - \frac{e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} + \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] + e^{\theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^3} \right]} \right\}, \quad (A3.2)$$

$$i_{12} = ne^{\theta_1 + \theta_2} \left\{ - \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} \right\}, \quad (A3.3)$$

$$i_{13} = ne^{\theta_1 + \theta_3} \left\{ \frac{e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^3} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} \right\}, \quad (A3.4)$$

$$i_{22} = ne^{\theta_2} \left\{ \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right]^2} - \frac{e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} + \frac{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] + e^{\theta_1 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right] \left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3} \right]} \right\}, \quad (A3.5)$$

$$i_{23} = ne^{\theta_2 + \theta_3} \left\{ \frac{e^{\theta_1}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} \right\}, \quad (A3.6)$$

$$i_{33} = ne^{\theta_3} \left\{ - \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3} \right]^2} - \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^1 + e^3} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_2}}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^2} + \left[\frac{1}{e^1 + e^2 + e^3} + \frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \frac{\theta_2}{e^2 + e^3} + \frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \frac{\theta_2}{e^1 + e^3} \right] \right\}. \quad (A3.7)$$

Portanto, pela aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3) \approx N_3[(\theta_1, \theta_2, \theta_3); I^{-1}]$$

onde I^{-1} é a inversa da matriz de informação de Fisher.

As expressões das terceiras derivadas da função log-verossimilhança nesta reparametrização são dadas por:

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^3} = \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left[\frac{\theta_3}{e^3 - e^1} \right]}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^3} \right]^3} + \frac{n e^{\theta_1} \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3} \right] \left[\frac{\theta_2}{e^2 + e^3 - e^1} \right]}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2 + e^3} \right]^3} - \\ - \frac{n e^{\theta_1 + \theta_2} \left[\frac{\theta_2}{e^2 - e^1} \right]}{\left[\frac{\theta_1}{e^1 + e^2} \right]^3} - e^{\theta_1} n \bar{x}, \quad (A3.8)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} = \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3} - \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right)^3}, \quad (\text{A3.9})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_3} = \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_3}}} \right)^3} + \frac{ne^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3}, \quad (\text{A3.10})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3} = \frac{2ne^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3}, \quad (\text{A3.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^3} &= \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{e^{\theta_3 - e^{\theta_2}}} \right)}{\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{e^{\theta_3 - e^{\theta_2}}} \right)^3} + \frac{ne^{\theta_2} \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_3}}} \right) \left(\frac{\theta_1 - \theta_3 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_3 - \theta_2}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3} - \\ &- \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right)^3} - e^{\theta_2} n_{\bar{y}}, \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial \theta_1} = \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_2 - e^{\theta_1 - \theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3} - \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{e^{\theta_2 - e^{\theta_1}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right)^3}, \quad (\text{A3.13})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial \theta_3} = \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_2 - e^{\theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_2 + e^{\theta_3}}} \right)^3} + \frac{ne^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_2 - e^{\theta_1 - \theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3}, \quad (\text{A3.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^3} &= \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_2 - e^{\theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_2 + e^{\theta_3}}} \right)^3} + \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_1 - e^{\theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_3}}} \right)^3} + \\ &+ \frac{ne^{\theta_3} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2}}} \right) \left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 - \theta_3}}} \right)}{\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}{e^{\theta_1 + e^{\theta_2 + \theta_3}}} \right)^3} - e^{\theta_3} R, \end{aligned} \quad (\text{A3.15})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^2 \partial \theta_1} = \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_2}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e^{\theta_3}} \right)^3}, \quad (A3.16)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^2 \partial \theta_2} = \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} \right)}{\left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} - \frac{\theta_1}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} \right)}{\left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e^{\theta_3}} \right)^3}. \quad (A3.17)$$

A3.2.- REPARAMETRIZAÇÃO LOGARÍTMICA NOS PARÂMETROS λ_1 E λ_2 .

Considerando a reparametrização logarítmica para os parâmetros λ_1 e λ_2 , isto é, $\xi_1 = \log \lambda_1$ e $\xi_2 = \log \lambda_2$, observa-se que a função log-verossimilhança (eq. 2.4) na parametrização ξ_1 , ξ_2 e λ_3 é dada por:

$$\begin{aligned} l(\xi_1, \xi_2, \lambda_3) = & n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n \log (e^{\xi_1} + e^{\xi_2 + \lambda_3}) + \\ & + n_1 \log (e^{\xi_2 + \lambda_3}) + n_2 \log (e^{\xi_1 + \lambda_3}) - \\ & - n \log (e^{\xi_1} + e^{\xi_2}) - e^{\xi_1} n \bar{x} - e^{\xi_2} n \bar{y} - \\ & - \lambda_3 R. \end{aligned} \quad (A3.18)$$

Usando novamente a propriedade da invariância dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se:

$$\hat{\xi}_1 = \log \hat{\lambda}_1, \quad \hat{\xi}_2 = \log \hat{\lambda}_2 \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_3.$$

Os termos da matriz de informação de Fisher nesta reparametrização são dados por:

$$i_{11} = ne^{\xi_1} \left\{ \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right]^2} - \frac{\lambda_3 e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\theta_1}{e} + \lambda_3 \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\xi_2} + \lambda_3}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right]^2} + \frac{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] + e^{\xi_2} \lambda_3}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 \right]} \right\}, \quad (\text{A3.19})$$

$$i_{12} = ne^{\xi_1 + \xi_2} \left\{ - \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right]^2} \right\}, \quad (\text{A3.20})$$

$$i_{13} = ne^{\xi_1} \left\{ \frac{e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right]^2} \right\}, \quad (\text{A3.21})$$

$$i_{22} = ne^{\xi_2} \left\{ \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right]^2} - \frac{\lambda_3 e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{e^{\xi_1} + \lambda_3}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right]^2} + \frac{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] + e^{\xi_1} \lambda_3}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right] \left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]} \right\}, \quad (\text{A3.22})$$

$$i_{23} = ne^{\xi_2} \left\{ \frac{e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} \right] \left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^2} + \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e} + e^{\xi_2} + \lambda_3 \right]^2} \right\}, \quad (\text{A3.23})$$

$$I_{33} = n \left\{ \frac{\xi_1 \xi_2}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right)^2} + \frac{\xi_1 \xi_2}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_1 + \lambda_3} \right)^2} + \frac{1}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right)^2} \right\}. \quad (A3.24)$$

Pela aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança tem-se que:

$$(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda}_3) \approx N_3[(\xi_1, \xi_2, \lambda_3); I^{-1}],$$

onde I^{-1} é a inversa da matriz de informação de Fisher.

As expressões das terceiras derivadas da função log-verossimilhança nesta reparametrização são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^3} = & \frac{n_2 \lambda_3 e^{\xi_1} \left(\lambda_3 - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1 + \lambda_3} \right)^3} + \frac{e^{\xi_1} \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right)^3} - \\ & - \frac{e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_2} - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2} \right)^3} - e^{\xi_1} n \bar{x}, \end{aligned} \quad (A3.25)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} = \frac{e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2 - \lambda_3} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right)^3} - \frac{e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2} \right)^3}, \quad (A3.26)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_3} = \frac{n_2 e^{\xi_1} \left(e^{\xi_1} - \lambda_3 \right)}{\left(e^{\xi_1 + \lambda_3} \right)^3} + \frac{e^{\xi_1} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2 - \lambda_3} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} \right) \left(e^{\xi_2 + \lambda_3} \right)^3}, \quad (A3.27)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2ne} \frac{1}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3}, \quad (\text{A3.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^3} = & \frac{n_1 \lambda_3 e^{\xi_2} \left(\lambda_3 - e^{\xi_2} \right)}{\left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{ne^{\xi_2} \left(\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 \right) \left(\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 - e^{\xi_2} \right)}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} - \\ & - \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(\frac{\xi_1}{e} - e^{\xi_2} \right)}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} \right]^3} - e^{\xi_2} n \bar{y}, \end{aligned} \quad (\text{A3.29})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} = \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(\frac{\xi_2}{e} - e^{\xi_1} - \lambda_3 \right)}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} - \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(\frac{\xi_2}{e} - e^{\xi_1} \right)}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} \right]^3}, \quad (\text{A3.30})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^2 \partial c_3} = \frac{n_1 e^{\xi_2} \left(\frac{\xi_2}{e} - \lambda_3 \right)}{\left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{ne^{\xi_2} \left(\frac{\xi_2}{e} - e^{\xi_1} - \lambda_3 \right)}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3}, \quad (\text{A3.31})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^3} = \frac{2n_1}{\left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{2n_2}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{2n}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3}, \quad (\text{A3.32})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial \xi_1} = \frac{2n_2 e^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{2ne^{\xi_1}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3}, \quad (\text{A3.33})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial \xi_2} = \frac{2n_1 e^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3} + \frac{2ne^{\xi_2}}{\left[\frac{\xi_1}{e} + \frac{\xi_2}{e} + \lambda_3 \right]^3}. \quad (\text{A3.34})$$

APÊNDICE 4

EXPRESSÕES DAS TERCEIRAS DERIVADAS DA FUNÇÃO LOG-VEROSSIMILHANÇA CONSIDERANDO DUAS REPARAMETRIZAÇÕES

Neste apêndice apresenta-se as expressões das terceiras derivadas da função log-verossimilhança do modelo EBVAC de Block & Basu (1974) no enfoque de testes acelerados e nas reparametrizações consideradas na Secção 3.5.

A4.1.- EXPRESSÕES DAS TERCEIRAS DERIVADAS DA FUNÇÃO LOG-VEROSSIMILHANÇA NA REPARAMETRIZAÇÃO $\theta_i = \text{Log } c_i$, $i = 1, 2, 3$; P.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^3} = & \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(e^{\theta_3 - \theta_1} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_3} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_1} \left(e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \right) \left(e^{\theta_2} + e^{\theta_3 - \theta_1} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \right)^3} - \\ & - \frac{n e^{\theta_1 + \theta_2} \left(e^{\theta_2 - \theta_1} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} \right)^3} - e^{\theta_1} S_x(P) , \end{aligned} \quad (\text{A4.1})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} = \frac{n e^{\theta_1 + \theta_2} \left(e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \right)^3} - \frac{n e^{\theta_1 + \theta_2} \left(e^{\theta_1 - \theta_2} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} \right)^3} , \quad (\text{A4.2})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_3} = \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(e^{\theta_1 - \theta_3} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_3} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_1 + \theta_3} \left(e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \right)^3} , \quad (\text{A4.3})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial P} = - e^{\theta_1} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \log V_j , \quad (\text{A4.4})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3} = \frac{2ne^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} , \quad (\text{A4.5})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial P} = 0 , \quad (\text{A4.6})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_3 \partial P} = 0 , \quad (\text{A4.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^3} = & \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^{\theta_3} - e^{\theta_2}} \right)}{\left[\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} + \frac{ne^{\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right) \left(\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} - e^{\theta_2}} \right)}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} - \\ & - \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \right)}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \right]^3} - e^{\theta_2} S_Y(P) , \end{aligned} \quad (\text{A4.8})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial \theta_1} = \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} - e^{\theta_1} - e^{\theta_3}} \right)}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} - \frac{ne^{\theta_1 + \theta_2} \left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} - e^{\theta_1}} \right)}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \right]^3} , \quad (\text{A4.9})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial \theta_3} = \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} - e^{\theta_3}} \right)}{\left[\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} + \frac{ne^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2}{e^{\theta_2} - e^{\theta_1} - e^{\theta_3}} \right)}{\left[\frac{\theta_1}{e^{\theta_1} + e} \frac{\theta_2}{e^{\theta_2} + e} \frac{\theta_3}{e^{\theta_3} + e} \right]^3} , \quad (\text{A4.10})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial P} = - e^{\theta_2} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \log V_j , \quad (\text{A4.11})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_2^2 \partial \theta_3 \partial P} = 0, \quad (\text{A4.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^3} = & \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)}{\left(\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3} + \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3} + \\ & + \frac{n e^{\theta_3} \left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right) \left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3} - e^{\theta_3} T(P), \end{aligned} \quad (\text{A4.13})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^2 \partial \theta_1} = \frac{n_2 e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^3 - e} \frac{\theta_1}{e^1} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_1 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^3 - e} \frac{\theta_1}{e^1 - e^2} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3}, \quad (\text{A4.14})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^2 \partial \theta_2} = \frac{n_1 e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^3 - e} \frac{\theta_2}{e^2} \right)}{\left(\frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3} + \frac{n e^{\theta_2 + \theta_3} \left(\frac{\theta_3}{e^3 - e} \frac{\theta_1}{e^1 - e^2} \right)}{\left(\frac{\theta_1}{e^1 + e} \frac{\theta_2}{e^2 + e} \frac{\theta_3}{e^3} \right)^3}, \quad (\text{A4.15})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_3^2 \partial P} = - e^{\theta_3} \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \log V_j, \quad (\text{A4.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial P^3} = & - e^{\theta_1} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3 - e^{\theta_2} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3 - \\ & - e^{\theta_3} \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left[\log V_j \right]^3, \end{aligned} \quad (\text{A4.17})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial \theta_1} = - e^{\theta_1} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{x}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2, \quad (\text{A4.18})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial \theta_2} = - e^{\theta_2} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \left[\log V_j \right]^2, \quad (\text{A4.19})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial \theta_3} = - e^{\theta_3} \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left(\log V_j \right)^2. \quad (A4.20)$$

A4.2.- EXPRESSÕES DAS TERCEIRAS DERIVADAS DA FUNÇÃO LOG-VEROSSIMILHANÇA NA REPARAMETRIZAÇÃO $\theta_i = \text{Log } c_i$, $i = 1, 2$; c_3 E P.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^3} = & \frac{n_2 c_3 e^{\xi_1} \left(c_3 - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1} + c_3 \right)^3} + \frac{n e^{\xi_1} \left(e^{\xi_2} + c_3 \right) \left(e^{\xi_2} + c_3 - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_3 \right)^3} - \\ & - \frac{n e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_2} - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} \right)^3} - e^{\xi_1} S_x(P), \end{aligned} \quad (A4.21)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} = \frac{n e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2} - c_3 \right)}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_3 \right)^3} - \frac{n e^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2} \right)}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} \right)^3}, \quad (A4.22)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_3} = \frac{n_2 e^{\xi_1} \left(e^{\xi_1} - c_3 \right)}{\left(e^{\xi_1} + c_3 \right)^3} + \frac{n e^{\xi_1} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2} - c_3 \right)}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_3 \right)^3}, \quad (A4.23)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \theta_1^2 \partial P} = - e^{\xi_1} \sum_{j=1}^J n_j' \bar{x}_j V_j^P \log V_j, \quad (A4.24)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} = \frac{2 n e^{\xi_1 + \xi_2}}{\left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_3 \right)^3}, \quad (A4.25)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial P} = 0, \quad (A4.26)$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_1 \partial c_3 \partial P} = 0 , \quad (\text{A4.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^3} = & \frac{n_1 c_3 e^{\xi_2} \left(c_3 - e^{\xi_2} \right)}{\left(e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} + \frac{ne^{\xi_2} \left(e^{\xi_1 + c_3} \right) \left(e^{\xi_1 + c_3} - e^{\xi_2} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} - \\ & - \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_1} - e^{\xi_2} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2} \right)^3} - e^{\xi_2} S_Y(P) , \end{aligned} \quad (\text{A4.28})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} = \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_2} - e^{\xi_1 - c_3} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} - \frac{ne^{\xi_1 + \xi_2} \left(e^{\xi_2} - e^{\xi_1} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2} \right)^3} , \quad (\text{A4.29})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^2 \partial c_3} = \frac{n_1 e^{\xi_2} \left(e^{\xi_2 - c_3} \right)}{\left(e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} + \frac{ne^{\xi_2} \left(e^{\xi_2 - e} e^{\xi_1 - c_3} \right)}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} , \quad (\text{A4.30})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2^2 \partial P} = - e^{\xi_2} \sum_{j=1}^J n'_j \bar{y}_j V_j^P \log V_j , \quad (\text{A4.31})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial \xi_2 \partial \xi_3 \partial P} = 0 , \quad (\text{A4.32})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^3} = \frac{2n_1}{\left(e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} + \frac{2n_2}{\left(e^{\xi_1 + c_3} \right)^3} + \frac{2n}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} , \quad (\text{A4.33})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial \xi_1} = \frac{2n_2 e^{\xi_1}}{\left(e^{\xi_1 + c_3} \right)^3} + \frac{2ne^{\xi_1}}{\left(e^{\xi_1 + e} e^{\xi_2 + c_3} \right)^3} , \quad (\text{A4.34})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial \xi_2} = \frac{2n_1 e^{\xi_2}}{\left(\frac{\xi_2}{e^{\xi_2} + c_3} \right)^3} + \frac{2ne^{\xi_2}}{\left(\frac{\xi_1}{e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_3} \right)^3}, \quad (\text{A4.35})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial c_3^2 \partial P} = -e^{\xi_3} \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \log V_j, \quad (\text{A4.36})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 l}{\partial P^3} = & -e^{\xi_1} \sum_{j=1}^J n_j' \bar{x}_j V_j^P \left(\log V_j \right)^3 - e^{\xi_2} \sum_{j=1}^J n_j' \bar{y}_j V_j^P \left(\log V_j \right)^3 - \\ & -c_3 \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left(\log V_j \right)^3, \end{aligned} \quad (\text{A4.37})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial \xi_1} = -e^{\xi_1} \sum_{j=1}^J n_j' \bar{x}_j V_j^P \left(\log V_j \right)^2, \quad (\text{A4.38})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial \xi_2} = -e^{\xi_2} \sum_{j=1}^J n_j' \bar{y}_j V_j^P \left(\log V_j \right)^2, \quad (\text{A4.39})$$

$$\frac{\partial^3 l}{\partial P^2 \partial c_3} = -e^{\theta_3} \sum_{j=1}^J R_j V_j^P \left(\log V_j \right)^2. \quad (\text{A4.40})$$

APÊNDICE 5

MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO DE INTEGRAIS DE LAPLACE

A5.1. - MÉTODO DE LAPLACE⁽¹⁾.

Supondo que é de interesse resolver a integral em θ dada por:

$$\int e^{-nh(\theta)} d\theta . \quad (A5.1)$$

Se $-nh(\theta)$ é uma função bem comportada com máximo no ponto $\hat{\theta}$, o método de Laplace⁽¹⁾ aproxima a integral (A5.1) (ver por exemplo Tierney & Kadane (1986)) como segue:

$$\int e^{-nh(\theta)} d\theta \approx \left[\frac{2\pi}{n} \right]^{1/2} \sigma e^{-nh(\hat{\theta})} , \quad (A5.2)$$

onde $\sigma = [h''(\hat{\theta})]^{-1/2}$.

No caso multiparamétrico, com $\theta \in \mathbb{R}^m$, a aproximação de Laplace⁽¹⁾ é dada por:

$$\int e^{-nh(\theta)} d\theta \approx (2\pi)^{m/2} \left\{ \det [nD^2h(\hat{\theta})] \right\}^{-1/2} e^{-nh(\hat{\theta})} , \quad (A5.3)$$

onde $\hat{\theta}$ maximiza a função $-nh(\theta)$ e $D^2h(\theta)$ é a matriz Hessiana associada à função $h(\theta)$ avaliada em $\hat{\theta}$.

A5.2. -MÉTODO DE LAPLACE⁽²⁾.

Supondo que é de interesse resolver a integral em θ dada por:

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta. \quad (\text{A5.4})$$

Se $-nh(\theta)$ é uma função bem comportada com máximo no ponto $\hat{\theta}$ e $f(\theta)$ é uma função monótona positiva, o método de Laplace⁽²⁾ aproxima a integral (A5.4) (ver por exemplo, Kass et alii (1990)) na forma:

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta \approx \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{1/2} \sigma f(\hat{\theta}) e^{-nh(\hat{\theta})}, \quad (\text{A5.5})$$

onde $\sigma = [h''(\hat{\theta})]^{-1/2}$.

No caso multiparamétrico com $\theta \in \mathbb{R}^m$, a aproximação de Laplace⁽²⁾ é dada por:

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta \approx (2\pi)^{m/2} \left\{ \det [nD^2h(\hat{\theta})] \right\}^{-1/2} f(\hat{\theta}) e^{-nh(\hat{\theta})}, \quad (\text{A5.6})$$

onde $\hat{\theta}$ maximiza a função $-nh(\theta)$ e $D^2h(\theta)$ é a matriz Hessiana associada à função $h(\theta)$ avaliada em $\hat{\theta}$.

APÊNDICE 6

ALGUNS PROGRAMAS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS

A6.1. - PROGRAMA 1.

c Programa (BNVSINBS) que calcula os BNV dos parametros h1, h2 e h3
c da distribuicao BBVAC de Block e Basu usando o metodo de Newton
c Raphson.

```
real*8 d1,d2,d3,SxP,SyP,TP,bu  
real*8 a(4,4),b(4,4),c(4),c1(4),gu(4),u(4),dif(4)
```

```
open(unit=10,file='ent-emv.dat',status='old')  
read(10,*)n,nn,n1,n2,niter,d1,d2,d3,SxP,SyP,TP  
close(unit=10)
```

```
100 c(1)=d1  
c(2)=d2  
c(3)=d3
```

c Calculo do vetor de primeiras derivadas.

```
u(1)=n1/d1+n2/(d1+d3)+nn/(d1+d2+d3)-nn/(d1+d2)-SxP  
u(2)=n1/(d2+d3)+n2/d2+nn/(d1+d2+d3)-nn/(d1+d2)-SyP  
u(3)=n1/(d2+d3)+n2/(d1+d3)+nn/(d1+d2+d3)-TP
```

c Calculo da matriz Hessiana.

```
a(1,1)=-1*(n1/d1**2+n2/(d1+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)**2)  
a(1,2)=-1*(nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)**2)  
a(1,3)=-1*(n2/(d1+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2)  
a(2,1)=a(1,2)  
a(2,2)=-1*(n1/(d2+d3)**2+n2/d2**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)**2)  
a(2,3)=-1*(n1/(d2+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2)  
a(3,1)=a(1,3)  
a(3,2)=a(2,3)  
a(3,3)=-1*(n1/(d2+d3)**2+n2/(d1+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2)
```

```
call inv(a,b,n)
```

c Algoritmo de Newton-Raphson.

```
do 18 i=1,n
  bu=0
  do 19 k=1,n
    bu=bu+b(i,k)*u(k)
19  continue
  gu(i)=bu
18  continue

do 20 i=1,n
  c1(i)=c(i)-gu(i)
20  continue

ndif=0
do 21 i=1,n
  dif(i)=c1(i)-c(i)
  if(dabs(dif(i)).gt.1/1B+12) then
    ndif=ndif+1
  endif
21  continue

if(ndif.gt.0) then
  niter = niter+1
  if(niter.lt.60) then
    d1=c1(1)
    d2=c1(2)
    d3=c1(3)
    go to 100
  else
    write(*,85)
85    format(1x,'Numero de iteracoes completas',/)
    endif
  else
    d1=c1(1)
    d2=c1(2)
    d3=c1(3)
    open(unit=4,file='sal-EMV.dat',status='new')
    write(4,81)d1,d2,d3
81    format(1x,'EMV:', 'h1=',f14.10,3x, 'h2=',f14.10,3x, 'h3=',
      f14.10,/)
    close(unit=4)
    endif
end
```


A6.2. - PROGRAMA 2.

c Programa (APOSMA1) que calcula a densidade a Posteriori Marginal
c do parametro h1 da distribuicao BBVAC de Block e Basu considerando
c a densidade a Priori de Jeffreys e usando o metodo de aproximacao
c de integrais de Laplace.

```
subroutine nD2(d1,d2,d3,d,aa)
```

c Esta subrotina (nD2) calcula a raiz quadrada da matriz nD2(h1,h3).

```
real*8 d1,d2,d3,aa  
real*8 d(4,4)
```

```
nn=30  
n1=16  
n2=14
```

```
d(1,1)=n1/(d2+d3)**2+n2/d2**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)**2  
d(1,2)=nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2  
d(2,1)=d(1,2)  
d(2,2)=n2/(d1+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2
```

```
aa=(d(1,1)*d(2,2)-d(1,2)**2)**(0.5)  
return  
end
```

c PROGRAMA PRINCIPAL.

```
real*8 SxP,SyP,TP,d1,d2,d3,bu,Menh23,i1,i2,i12,i13,i23,i123,i112  
real*8 inc,aa,bb,aposh1,apos,vv,Area  
real*8 a(4,4),b(4,4),d(4,4),c(4),c1(4),gu(4),u(4),dif(4)  
real*8 apo(4),h1(4)
```

```
n=2
```

```
nn=30  
n1=16  
n2=14
```

```
d1=1/1B+3  
d2=1747334/1B+9  
d3=285977668/1B+9
```

```
SxP=11451/1B+2  
SyP=16567/1B+2  
TP=20777/1B+2
```

```
inc=1/1B+3
```

```
open(unit=4,file='salapos1.dat',status='new')
```

```

do 10 nm=1,780
  d1=d1+inc

  niter=1
c .....

c   Calculo dos valores de h2 e h3 que maximizam a funcao
c   -nh(h2,h3) usando o algoritmo de Newton Raphson.

100  c(1)=d2
     c(2)=d3

c   Calculo do vetor de primeiras derivadas.

u(1)=n1/(d2+d3)+n2/d2+nn/(d1+d2+d3)-nn/(d1+d2)-SyP
u(2)=nn/(d1+d2+d3)+n1/(d2+d3)+n2/(d1+d3)-TP

c   Calculo da matriz de segundas derivadas.

a(1,1)=-1*(n1/(d2+d3)**2+n2/d2**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)
@      **2)
a(1,2)=-1*(nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2)
a(2,1)=a(1,2)
a(2,2)=-1*(n2/(d1+d3)**2+nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2)

call inv(a,b,n)

c   Algoritmo de Newton-Raphson.

do 14 i=1,n
  bu=0
  do 15 k=1,n
    bu=bu+b(i,k)*u(k)
15    continue
  gu(i)=bu
14    continue

do 19 i=1,n
  c1(i)=c(i)-gu(i)
19    continue

c   ndif=0
do 20 i=1,n
  dif(i)=c1(i)-c(i)
  if(abs(dif(i)).gt.1/1B+10) then
    ndif=ndif+1
  endif
20    continue

if(ndif.gt.0) then
  niter = niter+1
  if(niter.lt.60) then
    d2=c1(1)
    d3=c1(2)
    go to 100

```

```

        else
            write(*,25)
25          format(1x,'Nro. de iteracoes completas',/)
            go to 105
        endif
    else
        d2=c1(1)
        d3=c1(2)

        endif

c.....

c-----

c      Calculo da densidade a Posteriori Marginal de h1 usando o
c      metodo de Laplace.

        call nD2(d1,d2,d3,d,aa)

        i1=d1**2
        i2=d2**2
        i12=(d1+d2)**2
        i13=(d1+d3)**2
        i23=(d2+d3)**2
        i123=(d1+d2+d3)**2
        if12=d1+d2

c      Calculo de la Matriz de Fisher.

        b(1,1)=nn*(1/(d1*if12)+d2/(if12*i13)+1/i123-1/i12)
        b(1,2)=nn*(1/i123-1/i12)
        b(1,3)=nn*(d2/(if12*i13)+1/i123)
        b(2,1)=b(1,2)
        b(2,2)=nn*(d1/(if12*i23)+1/(d2*if12)+1/i123-1/i12)
        b(2,3)=nn*(1/i123+d1/(if12*i23))
        b(3,1)=b(1,3)
        b(3,2)=b(2,3)
        b(3,3)=nn*(1/i123+d1/(if12*i23)+d2/(if12*i13))

c      Calculo da densidade a Priori de Jeffrey, isto e
c      {Det I(h1,h2,h3)}**0.5.

        @      bb=(b(1,1)*b(2,2)*b(3,3)+2*b(1,2)*b(2,3)*b(1,3)-b(1,1)*(b(2,3))
            **2-b(2,2)*(b(1,3))**2-b(3,3)*(b(1,2))**2)**0.5

        aposh1=bb/aa*d1**n1*d2**n2*(if12+d3)**nn*(d2+d3)**n1
        aposh1=aposh1*(d1+d3)**n2/if12**nn
        aposh1=aposh1*dexp(-(d1*Sp+d2*SyP+d3*TP))

        vv=150
        apos=dexp(vv)*aposh1/(56827/1B+5)
        write(4,35)d1,apos
35      format(1x,'h1=',f7.4,3x,'A Posteriori Marginal=',f15.9)

c      -----

```

c Calculo da Constante Normalizadora (Metodo de Simpson)

```
      kk=kk+1
      h1(kk)=d1
      apo(kk)=apos
      if(kk.eq.3) then
        Area =Area+inc*(apo(1)+4*apo(2)+apo(3))/3
        write(4,7)Area
7      format(54x,'Area=',f9.5,/)
        h1(1)=h1(3)
        apo(1)=apo(3)
        kk=1
      endif

10    continue
      close(unit=4)
105 end
```

A6.3. - PROGRAMA 3.

c Programa (GAPONAR1) que calcula a Densidade a Posteriori Marginal
 c do parametro h_1 da distribuicao BBVAC de Blok & Basu considerando
 c uma densidade a priori gamma para cada um dos parametros h_1 , h_2 e
 c h_3 e usando o metodo de Laplace.

```
subroutine nD2(d1,d2,d3,d,aa)
```

c Esta subrotina (nD2) calcula a inversa da matriz nD2(h_2, h_3).

```
real*8 d1,d2,d3,aa,a1,a2,a3,b1,b2,b3
real*8 d(4,4)
```

```
nn=30
n1=16
n2=14
```

```
a1=125/18+1
a2=64/18+1
a3=10/18+1
```

```
d(1,1)=n1/(d2+d3)**2+(n2+a2-1)/d2**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/(d1+d2)
!      **2
d(1,2)=nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2
d(2,1)=d(1,2)
d(2,2)=nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2+n2/(d1+d3)**2+(a3-1)/d3**2
```

```
aa=(d(1,1)*d(2,2)-d(1,2)**2)**(0.5)
return
end
```

c PROGRAMA PRINCIPAL.

```
real*8 Sx,Sy,R,d1,d2,d3,a1,a2,a3,b1,b2,b3,inc,bu,aa,if12,if13,if23
real*8 if123,aposh1,apos,Area,vv
real*8 a(4,4),b(4,4),c(4),c1(4),d(4,4),gu(4),v(4),dif(4)
real*8 apo(4),h1(4)
```

```
n=2
```

```
nn=30
n1=16
n2=14
```

```
a1=125/18+1
a2=64/18+1
a3=10/18+1
```

```
b1=50
b2=40
b3=50
```

```

      Sx=11451/1B+2
      Sy=16567/1B+2
      R=20777/1B+2

      d1=1/1B+3
      d2=1747334/1B+9
      d3=285977668/1B+9
      inc=1/1B+3

      open(unit=4,file='salgapo1.dat',status='new')

      do 10 nm=1,850
        d1=d1+inc

        niter=1
c      .....

c      Calculo dos valores de h2, h3 que maximizam a funcao -nh(h2,h3)
c      utilizando o algoritmo de Newton-Raphson.

100    c(1)=d2
        c(2)=d3

c      Calculo do valor de primeiras derivadas.

        u(1)=n1/(d2+d3)+(n2+a2-1)/d2+nn/(d1+d2+d3)-nn/(d1+d2)-(b2+Sy)
        u(2)=nn/(d1+d2+d3)+n1/(d2+d3)+n2/(d1+d3)+(a3-1)/d3-(b3+R)

c      Calculo da matriz de segundas derivadas.

        a(1,1)=-1*(n1/(d2+d3)**2+(n2+a2-1)/d2**2+nn/(d1+d2+d3)**2-nn/
!          (d1+d2)**2)
        a(1,2)=-1*(nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2)

        a(2,1)=a(1,2)
        a(2,2)=-1*(nn/(d1+d2+d3)**2+n1/(d2+d3)**2+n2/(d1+d3)**2+(a3-1)/
#          d3**2)

        call inv(a,b,n)

c      Algoritmo de Newton-Raphson.

        do 14 i=1,n
          bu=0
          do 15 k=1,n
            bu=bu+b(i,k)*u(k)
15          continue
          gu(i)=bu
14          continue

        do 19 i=1,n
          c1(i)=c(i)-gu(i)
19          continue

```

```

ndif=0
do 20 i=1,n
  dif(i)=c1(i)-c(i)
  if(dabs(dif(i)).gt.1/1E+10) then
    ndif=ndif+1
  endif
20  continue

  if(ndif.gt.0) then
    niter = niter+1
    if(niter.lt.60) then
      d2=c1(1)
      d3=c1(2)
      go to 100
    else
25      write(*,25)
        format(1x,'Nro. de iteracoes completas',/)
        go to 105
      endif
    else
      d2=c1(1)
      d3=c1(2)

    endif

c.....
c-----

c      Calculo da densidade a Posteriori Marginal aproximada de h1
c      usando o metodo de Laplace.

      call nD2(d1,d2,d3,d,aa)

      if12=d1+d2
      if13=d1+d3
      if23=d2+d3
      if123=d1+d2+d3

      aposh1=d1**(n1+a1-1)*d2**(n2+a2-1)*(if123)**nn*(if23)**n1/aa
      aposh1=aposh1*(if13)**n2*d3**(a3-1)/if12**nn
      aposh1=aposh1*dexp(-d1*(b1+Sx)-d2*(b2+Sy)-d3*(b3+R))

      vv=202
      apos=dexp(vv)*aposh1/(112915/1E+5)
      write(4,35)d1,apos
35  format(1x,'h1=',f7.5,3x,'A Posteriori Marginal=',f15.9)

c      -----

```

c Cálculo da Constante Normalizadora (Método de Simpson).

```
kk=kk+1
h1(kk)=d1
apo(kk)=apos
if(kk.eq.3) then
    Area =Area+inc*(apo(1)+4*apo(2)+apo(3))/3
    write(4,7)Area
7    format(54x,'Area=',f10.5,/)
    h1(1)=h1(3)
    apo(1)=apo(3)
    kk=1
endif

10    continue
    close(unit=4)
105 end
```


A6.4. - SUBROUTINA INV.

c Subrotina que calcula a inversa de uma matriz.

```

subroutine inv(a,b,n)

real*8 cc,sz,xp,z,bb
real*8 a(4,4),b(4,4),y(4,4)

do 5 i=1,n
  do 6 j=1,n
    y(i,j)=0
  6 continue
  y(i,i)=1
5 continue
  do 7 j=1,n
    i=j
    cc=a(i,i)
    kd=i
    do 8 k=j+1,n
      if(dabs(a(i,i)).lt.dabs(a(k,j))) then
        if(dabs(cc).lt.dabs(a(k,j))) then
          cc=a(k,j)
          kd=k
        endif
      endif
    8 continue
    if(i.ne.kd) then
      do 9 k=j,n
        bb=a(i,k)
        a(i,k)=a(kd,k)
        a(kd,k)=bb
      9 continue
      do 10 k=1,n
        bb=y(i,k)
        y(i,k)=y(kd,k)
        y(kd,k)=bb
      10 continue
    endif
    do 11 k=j,n-1
      l=k+1
      xp=a(1,j)/a(i,j)
      do 12 m=j,n
        a(l,m)=a(l,m)-xp*a(j,m)
      12 continue
      do 13 m=1,n
        y(l,m)=y(l,m)-xp*y(j,m)
      13 continue
    11 continue
  7 continue

```

```

do 15 j=1,n
  b(n,j)=y(n,j)/a(n,n)
  do 16 i=n-1,1,-1
    z=y(i,j)
    sz=0
    do 17 k=i+1,n
      sz=a(i,k)*b(k,j)+sz
17    continue
    b(i,j)=(z-sz)/a(i,i)
16  continue
15  continue
  return
end

```