Solução numérica do modelo Giesekus para escoamentos com superfícies livres

Matheus Tozo de Araujo

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Matheus Tozo de Araujo

Solução numérica do modelo Giesekus para escoamentos com superfícies livres

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Murilo Francisco Tomé

USP – São Carlos
Novembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A634s Araujo, Matheus Tozo de
 Solução numérica do modelo Giesekus para
 escoamentos com superfícies livres / Matheus Tozo
 de Araujo; orientador Murilo Francisco Tomé. - São
 Carlos - SP, 2015.
 79 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Ciências de Computação e Matemática Computacional)
 - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2015.

 1. Modelo Giesekus. 2. Diferenças finitas.
 3. Escoamentos viscoelásticos. 4. Superfície livre.
 5. Marker-and-Cell. I. Tomé, Murilo Francisco,
 orient. II. Título.

Matheus Tozo de Araujo

Numerical solution of the Giesekus model for free surface flows

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Murilo Francisco Tomé

USP – São Carlos
November 2015

*À minha família, em especial aos meus pais,
Wilton e Salete e meu irmão Marcelo,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por essa conquista.

Ao meu orientador, Prof. Murilo Francisco Tomé, pela dedicação, amizade, conhecimentos transmitidos e pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

A todos os professores do LMACC/ICMC-USP.

Aos meus professores de graduação da UNESP de São José do Rio Preto, em especial aos professores Adalberto Spezamiglio, Maria Gorete C. Andrade, Claudio A. Buzzi, Maurílio Boaventura e Heloisa H. M. Silva, pela amizade e conhecimentos transmitidos.

Aos meus pais Wilton e Salete, meu irmão Marcelo e minha avó Zulmira por todo apoio e incentivo.

A minha noiva Amanda, por todo carinho, apoio, paciência e compreensão, que fizeram que meus dias se tornassem melhores durante essa jornada.

Aos amigos de graduação e do grupo PET-Matemática, pelos anos em que estivemos compartilhando momentos inesquecíveis.

A todos os meus amigos, que me acompanharam ao longo desse projeto, em especial aos amigos do LMACC/ICMC-USP.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

A todas as pessoas que contribuíram direta e indiretamente no desenvolvimento desse trabalho.

*“O rio atinge seus objetivos,
porque aprendeu a contornar obstáculos.”
(Lao Tsé)*

RESUMO

ARAÚJO, M. T.. **Solução numérica do modelo Giesekus para escoamentos com superfícies livres**. 2015. 79 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho apresenta um método numérico para simular escoamentos viscoelásticos bidimensionais governados pela equação constitutiva Giesekus [Schleiniger e Weinacht 1991]. As equações governantes são resolvidas pelo método de diferenças finitas numa malha deslocada. A superfície livre do fluido é modelada por partículas marcadoras possibilitando assim a sua visualização e localização. O cálculo da velocidade é efetuado por um método implícito enquanto a pressão é calculada por um método explícito. A equação constitutiva de Giesekus é resolvida pelo método de Euler modificado explícito.

O método numérico desenvolvido nesse trabalho é verificado comparando-se a solução numérica com a solução analítica para o escoamento de um fluido Giesekus em um canal. Resultados de convergência são obtidos pelo uso de refinamento de malha. Os resultados alcançados incluem um estudo da aplicação do modelo Giesekus para simular o escoamento numa contração planar 4:1 e o problema de um jato incidindo sobre uma placa rígida, em que o fenômeno ‘jet buckling’ é simulado.

Palavras-chave: Modelo Giesekus, Diferenças finitas, Escoamentos viscoelásticos, Superfície livre, Marker-and-Cell.

ABSTRACT

ARAÚJO, M. T.. **Solução numérica do modelo Giesekus para escoamentos com superfícies livres**. 2015. 79 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This work presents a numerical method to simulate two-dimensional viscoelastic flows governed by the Giesekus constitutive equation [Schleiniger e Weinacht 1991]. The governing equations are solved by the finite difference method on a staggered grid. The free surface of the fluid is modeled by tracer particles thus enabling its visualization and location. The calculation of the velocity is performed by an implicit method while pressure is calculated by an explicit method. The Giesekus constitutive equation is resolved by the explicit modified Euler method.

The numerical method developed in this work is verified by comparing the numerical solution with the analytical solution for the flow of a Giesekus fluid in a channel. Convergence results are obtained by the use of mesh refinement. Results obtained include a study of the application of the Giesekus model to simulate the flow through a 4:1 contraction and the problem of a jet flowing onto a rigid plate where the phenomenon of jet buckling is simulated.

Key-words: Giesekus model, Finite Difference, Viscoelastic flows, Free surface, Marker-and-Cell.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tipos de contornos utilizados.	24
Figura 2 – a) Célula utilizada; b) Tipos de células na malha.	27
Figura 3 – Representação do fluido.	28
Figura 4 – Aproximações para a superfície livre.	32
Figura 5 – Velocidades utilizadas para o cálculo de u_P e v_P	34
Figura 6 – Domínio computacional de um canal bidimensional.	40
Figura 7 – Linhas de nível obtidas na simulação do escoamento completamente desenvolvido em um canal, utilizando a malha M5	41
Figura 8 – Convergência dos valores numéricos de $\partial p / \partial x$ para o valor obtido no cálculo da solução analítica.	42
Figura 9 – Comparação das soluções numéricas obtidas nas malhas M1 , M2 , M3 , M4 e M5 . a) Tensão τ^{xx} , b) tensão τ^{xy} , c) tensão τ^{yy} e d) variação de velocidade $\partial u / \partial y$	42
Figura 10 – Comparação das velocidades analítica e Newtoniana com a velocidade numérica obtida nas malhas M1 , M2 , M3 , M4 e M5	43
Figura 11 – Decrescimento dos erros relativos obtidos nas malhas M1 , M2 , M3 , M4 e M5	44
Figura 12 – Domínio computacional para a simulação do escoamento em uma contração planar 4:1.	45
Figura 13 – Linhas de nível obtidas na simulação do escoamento em uma contração planar 4:1 na malha M3	46
Figura 14 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar obtida nas malhas M1 , M2 e M3 ao longo do eixo de simetria. a) Pressão e b) gradiente de pressão.	47
Figura 15 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar obtida nas malhas M1 , M2 e M3 ao longo do eixo de simetria. a) Velocidade $u(x)$ e b) velocidade $v(x)$	47
Figura 16 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar nas malhas M1 , M2 e M3 . Resultados obtidos no eixo de simetria para a) τ^{xx} , b) τ^{xy} e c) τ^{yy} e, próximo a parede superior do canal de largura h para d) $N_1 = \tau^{xx} - \tau^{yy}$	48
Figura 17 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 0.1$ e $\alpha = 0.1$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$	50

Figura 18 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0.1$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$	52
Figura 19 – Variação do comprimento do vórtice em função do número de Weissenberg para $Re = 0.1$ e $Re = 1$, com $\alpha = 0.1$	52
Figura 20 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0.3$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$	55
Figura 21 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0$. a) $Wi = 0$ (Newtoniano), b) $Wi = 0.25$, c) $Wi = 0.5$, d) $Wi = 1$, e) $Wi = 1.5$, f) $Wi = 2$, g) $Wi = 2.5$, h) $Wi = 3$, i) $Wi = 4$ e j) $Wi = 5$	56
Figura 22 – Variação do comprimento do vórtice em função do número de Wi , para $\alpha = 0$, 0.1 e 0.3, com $Re = 1$	57
Figura 23 – Domínio computacional para a simulação do ‘jet buckling’.	58
Figura 24 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos. Na primeira coluna são apresentados os resultados com escoamento newtoniano com $Re = 0.8$ e, nas demais colunas, tem-se simulações utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 0.1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente. . .	62
Figura 25 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos. Na primeira coluna são apresentados os resultados obtidos com o escoamento newtoniano com $Re = 0.4$ e, nas demais colunas, tem-se simulações utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.4$, $Wi = 0.1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente. . .	64
Figura 26 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 0.5$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente. . .	65
Figura 27 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente. . .	67
Figura 28 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 2$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente. . .	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	21
2.1	Adimensionalização das Equações Governantes	22
2.2	Sistema de Equações em Coordenadas Cartesianas	22
2.3	Condições Iniciais e de Contorno	24
3	MÉTODO NUMÉRICO	27
3.1	Método da Projeção	28
3.2	Cálculo de $u(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e $p(\mathbf{x}, t_{n+1})$	30
3.3	Cálculo do Tensor $\tau(\mathbf{x}, t_{n+1})$	33
3.4	Movimentação da Superfície Livre	34
3.5	Aproximação por Diferenças Finitas	34
3.5.1	<i>Aproximação da Equação da Transformação EVSS</i>	35
3.5.2	<i>Aproximação da Equação de Quantidade de Movimento</i>	35
3.5.3	<i>Aproximação da Equação de Poisson para ψ</i>	36
3.5.4	<i>Aproximação da Equação da Velocidade Final</i>	36
3.5.5	<i>Aproximação da Equação da Pressão</i>	36
3.5.6	<i>Aproximação da Equação Constitutiva</i>	37
3.6	Cálculo do Passo Temporal	38
4	RESULTADOS	39
4.1	Resultados de Verificação	39
4.2	Contração Planar 4:1	44
4.3	Jet Buckling	58
5	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA	77
A.1	Cálculo de $\partial p / \partial x$	78

INTRODUÇÃO

A simulação numérica de escoamentos de fluidos viscosos tem sido motivo de constantes pesquisas em vários centros no mundo. No Brasil esta área vem crescendo ao longo dos anos e hoje possui vários grupos de pesquisa em Mecânica dos Fluidos Computacional em diversos centros de pesquisa. Nos últimos anos, o grupo de pesquisa em Matemática Computacional do ICMC - USP de São Carlos, tem desenvolvido pesquisas na área de escoamentos com superfícies livres de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. As pesquisas têm se concentrado na área de reologia computacional e desenvolvido metodologias numéricas para simular escoamentos de fluidos Oldroyd-B [Tomé *et al.* 2008], PTT (Phan-Thien-Tanner) [Tomé *et al.* 2010] e Upper-Convected Maxwell [Tomé *et al.* 2012], entre outros. Entretanto, no âmbito da simulação numérica de escoamentos viscoelásticos, vários investigadores têm pesquisado a equação constitutiva Giesekus. O interesse nesse modelo concentra-se no fato de que essa equação pode prever primeira e segunda diferença de tensões normais em escoamentos de interesse industrial. Os métodos numéricos empregados para simular escoamentos governados pelo modelo Giesekus têm utilizado o método de elementos finitos [Oztekin, Brown e McKinley 1994, Joie e Graebbling 2013] e muito poucos resultados provenientes da aplicação desse modelo a escoamentos com superfícies livres podem ser encontrados na literatura (ver por ex. [Delvaux e Crochet 1990, Mu *et al.* 2013]).

Neste trabalho, pretendemos investigar métodos numéricos para resolver as equações governantes para escoamentos bidimensionais governados pela equação constitutiva Giesekus [Schleiniger e Weinacht 1991]. Esse trabalho propõe resolver essa equação empregando diferenças finitas pelo método de Euler modificado explícito. Pretende-se investigar a aplicação do modelo Giesekus ao problema da contração planar 4:1 e a escoamentos com superfícies livres em movimento tais como ‘jet buckling’.

Este trabalho está organizado como segue: no Capítulo 2 as equações governantes para simular escoamentos viscoelásticos governados pelo modelo constitutivo Giesekus são

desenvolvidas. No Capítulo 3, é apresentado um método numérico para resolver as equações governantes e no Capítulo 4, são apresentadas as aproximações por diferenças finitas das equações governantes. O Capítulo 5 contém resultados de verificação do método numérico implementado utilizando o escoamento totalmente desenvolvido em um canal e apresenta os resultados numéricos obtidos na simulação do escoamento em uma contração planar 4:1 e a simulação do escoamento com superfície livre de um jato incidindo em uma placa rígida. Por fim, é apresentado a conclusão, a bibliografia utilizada e um apêndice descrevendo a obtenção da solução analítica do modelo Giesekus, que foi desenvolvida durante este projeto.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações que governam escoamentos incompressíveis e isotérmicos, são descritas pela equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

e pela equação de conservação de quantidade de movimento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

em que ρ é a massa específica, $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade, p é a pressão, $\mathbf{g}$ é o campo gravitacional e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor extra-tensão que deve obedecer a uma equação constitutiva apropriada. Neste trabalho vamos considerar escoamentos de fluidos definidos pela equação constitutiva Giesekus [Schleiniger e Weinacht 1991]

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \alpha \frac{\lambda}{\eta_P} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 2\eta_P \mathbf{D}, \quad (2.3)$$

onde η_P é o coeficiente de viscosidade do polímero e λ é o tempo de relaxação do fluido. A constante α representa o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento “shear shinning” do fluido ($0 \leq \alpha \leq 1$) e $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}$ denota o produto tensorial. A derivada contravariante $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ e o tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$ são definidos, respectivamente, por

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}) - (\nabla \mathbf{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u})^T \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (2.4)$$

Observamos que fazendo $\alpha = 0$ na equação (2.3), obtém-se o modelo UCM (*Upper Convected Maxwell*).

Para resolver as equações (2.1) e (2.2), vamos empregar a transformação EVSS (*Elastic-Viscous Split Stress*) [Rajagopalan, Armstrong e Brown 1990]

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_P \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.5)$$

em que $\eta_0 = \eta_S + \eta_P$ representa a viscosidade total da solução polimérica e η_S é o coeficiente de viscosidade do solvente e $\mathbf{T}$ é um tensor não-Newtoniano responsável por efeitos de elasticidade no escoamento.

Introduzindo (2.5) na equação de conservação de quantidade de movimento (2.2), obtemos a equação de conservação de quantidade de movimento transformada:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \left(\frac{\eta_P}{\rho}\right) \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

onde p denota a pressão por unidade de massa específica.

2.1 Adimensionalização das Equações Governantes

As equações (2.1)-(2.6) modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos e viscoelásticos e estão escritas na forma dimensional. Entretanto, é usual resolver as equações na forma adimensional, introduzindo as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{U}{L}t, \quad \mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}}{g}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho U^2}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}, \end{aligned}$$

em que L é uma escala de comprimento, U uma escala de velocidade e g é a constante gravitacional. Introduzindo essas variáveis adimensionais nas equações (2.1), (2.6), (2.5) e (2.3), obtém-se as seguintes equações adimensionais (para facilitar a notação, o sinal “*” foi omitido):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{T} = \tau - \frac{2}{Re} \mathbf{D}, \quad (2.9)$$

$$Wi \nabla \tau = -\tau - \alpha Re Wi (\tau \cdot \tau) + \frac{2}{Re} \mathbf{D}. \quad (2.10)$$

Nessas equações, $Re = \frac{\rho UL}{\eta_P} = \frac{UL}{\nu}$, $Wi = \frac{\lambda U}{L} = \frac{\lambda}{\left(\frac{L}{U}\right)}$ e $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$, denotam, respectivamente, o número de Reynolds, o número de Weissenberg e o número de Froude. A constante

$\nu = \eta_P/\rho$ presente no número de Reynolds representa o coeficiente de viscosidade cinemática.

2.2 Sistema de Equações em Coordenadas Cartesianas

Vamos considerar escoamentos cartesianos bidimensionais não-estacionários em que

$$\mathbf{x} = (x, y)^T, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v)^T, \quad \mathbf{g} = (g_x, g_y)^T \quad \text{e} \quad \tau(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Assim, as equações de continuidade (2.7) e conservação de quantidade de movimento (2.8) podem ser escritas, respectivamente, na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} g_x, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} g_y. \quad (2.14)$$

A transformação EVSS e a equação constitutiva Giesekus (2.10) fornecem as equações

$$T^{xx} = \tau^{xx} - \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (2.15)$$

$$T^{xy} = \tau^{xy} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (2.16)$$

$$T^{yy} = \tau^{yy} - \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial t} = \mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}), \\ \mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau^{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau^{xy} \right) - \left(\frac{\partial(u\tau^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{xx})}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xx} + \alpha Re Wi [(\tau^{xx})^2 + (\tau^{xy})^2] \right\} + \frac{2}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial t} = \mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}), \\ \mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial u}{\partial x} \tau^{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau^{yy} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau^{xx} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau^{xy} - \left(\frac{\partial(u\tau^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{xy})}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xy} + \alpha Re Wi [\tau^{xx} \tau^{xy} + \tau^{xy} \tau^{yy}] \right\} + \frac{1}{Re Wi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial t} = \mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}), \\ \mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \tau^{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau^{yy} \right) - \left(\frac{\partial(u\tau^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{yy})}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{yy} + \alpha Re Wi [(\tau^{xy})^2 + (\tau^{yy})^2] \right\} + \frac{2}{Re Wi} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Logo, precisamos resolver as equações (2.12)-(2.20) sujeitas a condições iniciais e de contorno que são especificadas na próxima seção.

2.3 Condições Iniciais e de Contorno

Para se obter a solução das equações (2.12)-(2.20), precisamos impor condições para as componentes u e v do vetor velocidade. Em contornos *entrada de fluidos* (ver contorno $\partial\Omega_2$ na Fig. 1) uma velocidade $\mathbf{U}_{inf}$ é prescrita enquanto que em contornos *saída de fluidos* (ver contorno $\partial\Omega_3$ na Fig. 1) assume-se escoamento totalmente desenvolvido de modo que impõem-se condições homogêneas de Neumann, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{0}$, onde n denota a direção normal ao contorno. Em contornos rígidos (estacionários) (ver contorno $\partial\Omega_1$ na Fig. 1) adota-se a condição de não-eskorregamento $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Nesse trabalho, pretende-se tratar escoamentos com superfícies livres (ver contorno $\partial\Omega_4$ na Fig. 1) em que o fluido escoa numa atmosfera passiva. Supondo que a tensão superficial possa ser desprezada, na interface (superfície livre) entre os fluidos (fluido viscoso e ar) as componentes do tensor das tensões devem ser contínuas de modo que a condição apropriada é descrita pela equação ([Batchelor 1967, p. -157])

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal à superfície livre. Tomando $\mathbf{m}$ como sendo um vetor unitário tangente à superfície livre (perpendicular ao vetor $\mathbf{n}$), a condição (2.21) pode ser expressa como

$$\mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{m}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.23)$$

em que o tensor das tensões é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{2}{Re}\mathbf{D} + \mathbf{T}. \quad (2.24)$$

Figura 1 – Tipos de contornos utilizados.

Para superfícies bidimensionais, podemos adotar $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ e $\mathbf{m} = (n_y, -n_x)^T$ e substituindo $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ nas equações (2.22), (2.23), obtém-se, respectivamente, as seguintes equações:

$$p = n_x^2 T^{xx} + n_y^2 T^{yy} + 2n_x n_y T^{xy} + \frac{2}{Re} \left[n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left[2n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (n_y^2 - n_x^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \\ - [n_x n_y (T^{xx} - T^{yy}) + (n_y^2 - n_x^2) T^{xy}]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

MÉTODO NUMÉRICO

As equações apresentadas no capítulo 2 são resolvidas por uma variante do método das partículas marcadoras introduzido por [Amsden e Harlow 1970](#) (ver também [Harlow e Welch 1965](#)) que utiliza o método de diferenças finitas em uma malha deslocada. As componentes do vetor velocidade são posicionadas nas faces laterais da célula enquanto que as outras variáveis denotadas por Ψ são localizadas no centro da célula (ver Fig. 2a.). Os problemas tratados neste trabalho envolvem escoamentos com superfícies livres em movimento de modo que uma estratégia para definir a região do fluido é empregada. É utilizada a técnica apresentada por [Tomé *et al.* 2000](#), [Tomé *et al.* 2002](#), na qual a superfície do fluido é constituída por um conjunto de partículas marcadoras que se movem com a velocidade local do fluido. A visualização da superfície do fluido (e também da superfície livre) é efetuada conectando essas partículas por retas (ver Fig. 3a). O corpo do fluido é representado pela área definida pela curva fechada definida pelas partículas (ver Fig. 3b).

Figura 2 – a) Célula utilizada; b) Tipos de células na malha.

A Fig. 3b ilustra um exemplo de representação do fluido utilizando essa técnica. No entanto, para implementar essa técnica, é necessário definir as células da malha em vários tipos

de grupos de células como segue:

- Células de fronteira (**B**) – células que definem a posição de contornos rígidos.
- Células de injetores (**I**) – células que definem *entradas de fluido* ('inflow').
- Células de ejetores (**O**) – células que representam *saídas de fluido* ('outflow').
- Células vazias (**E**) – células que não contém fluido.
- Células de superfície (**S**) – células que contém fluido e apresentam pelo menos uma face em contato com face de células **E**.
- Células cheias (**F**) – células que contém fluido e não apresentam nenhuma face em contato com faces de células **E**.

A Fig. 2b ilustra os tipos de células na malha em um certo instante de tempo.

Figura 3 – Representação do fluido.

O método descrito a seguir será utilizado para calcular a velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ conforme apresentado na seção 3.2.

3.1 Método da Projeção

Devido a restrição de incompressibilidade, a solução numérica do sistema de equações (2.7)-(2.8) acopla os campos de velocidade e pressão. Isso ocorre porque nesses tipos de escoamentos, a pressão tem como objetivo garantir que a equação da continuidade seja satisfeita em cada passo de tempo. Alguns métodos na literatura resolvem esse sistema de equações de forma acoplada, chamados métodos acoplados. Porém, devido ao tamanho e à não-linearidade do sistema de equações obtido, esses métodos apresentam algumas dificuldades computacionais. Para

evitar os problemas causados pelos métodos acoplados, utiliza-se a estratégia do desacoplamento dos campos de velocidade e pressão. Essa estratégia, conhecida como método da projeção, é um eficiente método para resolver as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e foi proposta por [Chorin 1967](#), [Chorin 1968](#).

O método da projeção é baseado no Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge (TDHH) [[Weil 1940](#), [Hodge 1952](#)], também conhecido como Teorema de Ladyzhenskaya [[Ladyzhenskaya 1963](#)], o qual será apresentado a seguir.

Teorema 1. (Decomposição de Helmholtz-Hodge) Seja Ω uma região com fronteira suave $\partial\Omega$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ um campo vetorial definido em Ω . Então, $\tilde{\mathbf{u}}$ pode ser decomposto na forma

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\psi \quad (3.1)$$

de forma única, sendo ψ um campo escalar também definido em Ω . O campo vetorial $\mathbf{u}$ é solenoidal e paralelo a $\partial\Omega$, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

e, ao longo de $\partial\Omega$,

$$\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (3.3)$$

sendo que $\vec{n}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Mais detalhes sobre o TDHH podem ser encontrados em [Chorin e Marsden 2000](#).

A idéia principal do método da projeção para resolver escoamentos incompressíveis consiste em, dada uma aproximação para a pressão, utilizar a equação de conservação de quantidade de movimento (2.8) para definir um campo de velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$, que em muitos casos não é solenoidal. Essa estratégia desacopla os campos de velocidade e pressão.

Porém, é preciso corrigir o valor da pressão. Para isso, aplica-se o TDHH, em seguida o divergente na equação (3.1) e, por fim, impõe-se a equação da continuidade (2.8). Assim, obtém-se a seguinte equação de Poisson

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.4)$$

sendo que sua solução determina a correção da pressão ψ . Como $\tilde{\mathbf{u}}$ e ψ são conhecidos, $\mathbf{u}$ pode ser obtido facilmente da equação (3.1).

As soluções $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$, $p(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e $\tau(\mathbf{x}, t_{n+1})$ no tempo $t_{n+1} = t_n + \delta t$ são obtidas em duas partes: primeiro, usando os valores de $\tau(\mathbf{x}, t_n)$, a velocidade e pressão são calculados no tempo t_{n+1} . Na segunda parte, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ é utilizada para calcular $\tau(\mathbf{x}, t_{n+1})$ por um método de diferenças finitas proposto nesse trabalho o qual está descrito em detalhes na seção 3.3.

3.2 Cálculo de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e $p(\mathbf{x}, t_{n+1})$

O método numérico para resolver a equação de conservação de massa (2.12) e as equações de conservação de quantidade de movimento (2.13) e (2.14) é baseado na técnica implícita proposta por Oishi *et al.* 2011 que simula escoamentos viscoelásticos com superfícies livres modelados pela equação constitutiva XPP ('eXtended Pom-Pom'). Assume-se que no tempo t_n os valores das variáveis $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{u}^{(n)}$, $p(\mathbf{x}, t_n) = p^{(n)}$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t_n) = \boldsymbol{\tau}^{(n)}$ e as posições das partículas marcadoras $\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}^{(n)}$, são conhecidos. Então, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e $p(\mathbf{x}, t_{n+1})$ são obtidos resolvendo os seguintes passos:

1. Calcular $T(\mathbf{x}, t_n)$.

Calcula-se inicialmente $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_n) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(n)} + (\nabla \mathbf{u}^{(n)})^T]$ e, utilizando as equações (2.15)-(2.17), obtém-se $T^{xx}(\mathbf{x}, t_n)$, $T^{xy}(\mathbf{x}, t_n)$ e $T^{yy}(\mathbf{x}, t_n)$.

2. Calcular a velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$.

Utilizando o método da projeção (ver Oishi *et al.* 2011) para desacoplar a equação de conservação de massa e a equação de conservação de quantidade de movimento, um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ é calculado utilizando as equações (2.13) e (2.14). Nesse trabalho, $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ é obtido pelo método de Euler implícito, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial y^2} \right] &= \frac{u^{(n)}}{\delta t} - \frac{\partial(u^2)^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial(uv)^{(n)}}{\partial y} - \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial T^{xx}(\mathbf{x}, t_n)}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}(\mathbf{x}, t_n)}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} g_x, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial y^2} \right] &= \frac{v^{(n)}}{\delta t} - \frac{\partial(uv)^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)^{(n)}}{\partial y} - \frac{\partial p^{(n)}}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial T^{xy}(\mathbf{x}, t_n)}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}(\mathbf{x}, t_n)}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} g_y, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que as condições de contorno para $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ são as mesmas impostas para $\mathbf{u}^{(n+1)}$ (ver seção 2.3). Pode ser mostrado que, em geral, $\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ não satisfaz a conservação de massa. Portanto, existe uma função potencial de modo que

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \nabla \psi(\mathbf{x}, t_{n+1}), \quad (3.7)$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})$ é calculada pela equação de Poisson (3.8). As velocidades intermediárias $\tilde{u}^{(n+1)}$ e $\tilde{v}^{(n+1)}$ são calculadas para cada célula $\mathbf{F}$ e para cada célula $\mathbf{S}$ no domínio, o que resulta em dois sistemas lineares esparsos simétricos que são resolvidos pelo método dos gradientes conjugados.

3. Resolver a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi^{(n+1)} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}. \quad (3.8)$$

As condições de contorno para essa equação são $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ em contornos rígidos e ‘inflows’ (n denota direção normal) e $\psi = 0$ em ‘outflows’. Essa equação é resolvida para cada célula $\mathbf{F}$ no domínio.

No entanto, para manter a estabilidade do método numérico, quando tratar-se de escoamentos com números de Reynolds baixos, a formulação implícita proposta por [Oishi et al. 2011](#) é empregada. Nessa formulação, [Oishi et al. 2011](#) utilizaram a condição para a pressão na superfície livre dada pela equação (2.22) que pode ser escrita como:

$$p = \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 \right] + T^{xx}(\mathbf{x}, t_n) n_x^2 + 2T^{xy}(\mathbf{x}, t_n) n_x n_y + T^{yy}(\mathbf{x}, t_n) n_y^2, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ e $\mathbf{m} = (n_y, -n_x)$ são vetores unitários normal e tangencial, respectivamente, à superfície livre. [Oishi et al. 2011](#) utilizaram essa equação, juntamente com a equação de conservação de massa nas células $\mathbf{S}$, e derivaram equações adicionais para a função potencial ψ , que podem ser representadas pela equação

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{2}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} \right) n_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) n_y^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x \partial y} \right) n_x n_y \right] = \frac{2}{Re} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial x} \right) n_x^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial y} \right) n_y^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial x} \right) n_x n_y \right] + T^{xx}(\mathbf{x}, t_n) n_x^2 + 2T^{xy}(\mathbf{x}, t_n) n_x n_y + T^{yy}(\mathbf{x}, t_n) n_y^2 - p^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Essa equação é aplicada em cada célula $\mathbf{S}$ de acordo com orientações locais da superfície livre, que podem ser obtidas analisando as vizinhanças com células $\mathbf{E}$. Basicamente, duas orientações podem ser atribuídas:

- **Superfície planar** : Se uma célula $\mathbf{S}$ tiver somente uma aresta em contato com uma aresta de uma célula $\mathbf{E}$ então assume-se que, localmente, a superfície livre é uma reta vertical ou horizontal. Nesse caso, o vetor normal toma a forma $\mathbf{n} = (\pm 1, 0)$ ou $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$. Por exemplo, a célula $\mathbf{S}$ na Fig. 4a tem somente a aresta superior em contato com uma aresta da célula $\mathbf{E}$. Para essa célula assume-se que a superfície é horizontal e toma-se $\mathbf{n} = (0, 1)$ e assim, para essa célula $\mathbf{S}$, a equação (3.10) reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) = \frac{2}{Re} \frac{\partial \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial y} + T^{yy}(\mathbf{x}, t_n) - p^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para outras configurações de células **S** com somente uma aresta em contato com célula **E**, o tratamento é análogo.

- **Superfície inclinada 45°**: Essas superfícies são identificadas em células **S** que possuem duas arestas adjacentes em contato com arestas de células **E**. Nessas células, o vetor normal toma a forma $\mathbf{n} = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$. Por exemplo, a célula **S** na Fig. 4b tem as arestas superior e direita em contato com arestas de células **E**. Para essa célula, o vetor normal é definido como $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e a equação (3.10) simplifica-se na seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x \partial y} \right] = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}^{(n+1)}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^{(n+1)}}{\partial x} \right] \quad (3.12) \\ + \frac{1}{2} \left(T^{xx}(\mathbf{x}, t_n) + T^{yy}(\mathbf{x}, t_n) \right) + T^{yx}(\mathbf{x}, t_n) - p^{(n)}. \end{aligned}$$

Para células **S** possuindo outras combinações de arestas adjacentes em contato com arestas de células **E**, o tratamento para a obtenção da equação para $\psi^{(n+1)}$ nessas células é semelhante ao que foi utilizado para a célula **S** da Fig. 4b.

Figura 4 – Aproximações para a superfície livre.

4. Calcular a velocidade final $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$.

Tendo obtido $\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})$, as velocidades $u(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e $v(\mathbf{x}, t_{n+1})$ nas células **F** e **S** são calculadas por

$$u(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial x}, \quad (3.13)$$

$$v(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{v}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial y}. \quad (3.14)$$

5. Calcular a pressão $p(\mathbf{x}, t_{n+1})$.

A pressão nas células **F** e **S** são obtidas pela equação (ver [Oishi et al. 2011](#))

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} + \frac{\psi^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(n+1)}}{\partial y^2} \right]. \quad (3.15)$$

As equações constantes nos passos **1.** a **5.** são resolvidas por um método de diferenças finitas de segunda ordem.

3.3 Cálculo do Tensor $\tau(\mathbf{x}, t_{n+1})$

O tensor $\tau(\mathbf{x}, t_{n+1})$ será obtido pelo método de diferenças finitas resolvendo as equações (2.18) - (2.20) utilizando o método de Euler melhorado explícito, que é um método de segunda ordem no tempo. Pretendemos com esse método obter resultados para escoamentos com superfícies livres. Esse método é descrito em detalhes a seguir

- Método de Euler modificado

- Calcular $\overline{\tau^{xx}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$, $\overline{\tau^{yy}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$, $\overline{\tau^{xy}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ pelas equações

$$\overline{\tau^{xx}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{xx}(\mathbf{x}, t_n) + \delta t \mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)), \quad (3.16)$$

$$\overline{\tau^{yy}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{yy}(\mathbf{x}, t_n) + \delta t \mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)), \quad (3.17)$$

$$\overline{\tau^{xy}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{xy}(\mathbf{x}, t_n) + \delta t \mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)), \quad (3.18)$$

- Calcular $\tau^{xx}(\mathbf{x}, t_{n+1})$, $\tau^{yy}(\mathbf{x}, t_{n+1})$, $\tau^{xy}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ pelas equações

$$\begin{aligned} \tau^{xx}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{xx}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\delta t}{2} \left[\mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)) \right. \\ \left. + \mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \overline{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1})) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \tau^{yy}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{yy}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\delta t}{2} \left[\mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)) \right. \\ \left. + \mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \overline{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1})) \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \tau^{xy}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau^{xy}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\delta t}{2} \left[\mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)) \right. \\ \left. + \mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \overline{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1})) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

As funções $\mathcal{G}^{xx}(\mathbf{u}, \tau)$, $\mathcal{G}^{yy}(\mathbf{u}, \tau)$, $\mathcal{G}^{xy}(\mathbf{u}, \tau)$ são obtidas por meio das equações (2.18) - (2.20).

3.4 Movimentação da Superfície Livre

O último passo no algoritmo é utilizar as velocidades atualizadas $u^{(n+1)}$ e $v^{(n+1)}$ e mover as partículas marcadoras $\mathbf{x}_P = (x_P, y_P)$ para novas posições resolvendo as equações

$$\frac{d x_P}{d t} = u_P^{(n+1)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{d y_P}{d t} = v_P^{(n+1)}, \quad (3.23)$$

para cada partícula $\mathbf{x}_P$. Essa equação é resolvida pelo método de Euler modificado como segue

$$x_P^{(n+1)} = x_P^{(n)} + \frac{\delta t}{2} \left[u_P(\mathbf{x}_P, t_{n+1}) + \overline{u}_P(\overline{\mathbf{x}}_P, t_{n+1}) \right], \quad (3.24)$$

$$y_P^{(n+1)} = y_P^{(n)} + \frac{\delta t}{2} \left[v_P(\mathbf{x}_P, t_{n+1}) + \overline{v}_P(\overline{\mathbf{x}}_P, t_{n+1}) \right], \quad (3.25)$$

em que

$$\overline{x}_P = x_P + \delta t u_P^{(n+1)}, \quad \overline{y}_P = y_P + \delta t v_P^{(n+1)}, \quad (3.26)$$

e $\overline{u}_P(\overline{\mathbf{x}}_P, t_{n+1})$ e $\overline{v}_P(\overline{\mathbf{x}}_P, t_{n+1})$ são as velocidades nas posições $(\overline{x}_P, \overline{y}_P)$. As velocidades $u_P^{(n+1)}$ e $v_P^{(n+1)}$ são calculadas utilizando interpolação bilinear envolvendo as velocidades mais próximas da partícula $\mathbf{x}_P$. A Fig. 5 mostra as velocidades utilizadas na interpolação bilinear que calcula $u_P^{(n+1)}$ e $v_P^{(n+1)}$.

Figura 5 – Velocidades utilizadas para o cálculo de u_P e v_P .

3.5 Aproximação por Diferenças Finitas

Nesta seção serão apresentadas as discretizações necessárias para a resolução das equações do método numérico apresentado no capítulo 3. As equações serão resolvidas pelo método de diferenças finitas em uma malha deslocada (Fig. 2a), com espaçamento δx e δy nas direções x e y , respectivamente.

3.5.1 Aproximação da Equação da Transformação EVSS

As equações (2.15)-(2.17) da transformação EVSS utilizadas para calcular $T^{xx}(\mathbf{x}, t_n)$, $T^{xy}(\mathbf{x}, t_n)$ e $T^{yy}(\mathbf{x}, t_n)$, são discretizadas como

$$\begin{aligned} T_{ij}^{xx} &= \tau_{ij}^{xx} - \frac{2}{Re} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right), \\ T_{ij}^{xy} &= \tau_{ij}^{xy} - \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right), \\ T_{ij}^{yy} &= \tau_{ij}^{yy} - \frac{2}{Re} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right). \end{aligned}$$

3.5.2 Aproximação da Equação de Quantidade de Movimento

Para definir a discretização das equações (3.5) e (3.6), é necessário saber como serão feitas as aproximações utilizadas em cada derivada. Os termos lineares serão aproximados por diferenças centrais e a derivada temporal, pelo método de Euler Implícito, enquanto que os termos convectivos serão aproximados pelo método ‘upwind’ de alta ordem VONOS (Variable-Order-Non-Oscillatory-Scheme) [Varonos e Bergeles 1998]. Assim, podemos reescrever (3.5) e (3.6), respectivamente, como

$$\tilde{u}^{(n+1)} = u + \delta t F(u, v),$$

$$\tilde{v}^{(n+1)} = v + \delta t G(u, v),$$

onde F e G são descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= -\mathbf{conv}(u^2) - \mathbf{conv}(uv) - \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x} \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left(\frac{\tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - 2\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + \tilde{u}_{i+\frac{3}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(n+1)} - 2\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(n+1)}}{\delta y^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{T_{i+1,j}^{xx} - T_{i,j}^{xx}}{\delta x} + \frac{T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} - T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}}{\delta y} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x, \\ G(u, v) &= -\mathbf{conv}(uv) - \mathbf{conv}(v^2) - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y} \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left(\frac{\tilde{v}_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - 2\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} + \tilde{v}_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{3}{2}}^{(n+1)} - 2\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} + \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} - T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}}{\delta x} + \frac{T_{i,j+1}^{yy} - T_{i,j}^{yy}}{\delta y} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} &= \frac{T_{i,j}^{xy} + T_{i+1,j}^{xy} + T_{i,j+1}^{xy} + T_{i+1,j+1}^{xy}}{4}, \\ T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} &= \frac{T_{i,j}^{xy} + T_{i+1,j}^{xy} + T_{i,j-1}^{xy} + T_{i+1,j-1}^{xy}}{4}, \end{aligned}$$

$$T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{T_{i,j}^{xy} + T_{i,j+1}^{xy} + T_{i-1,j+1}^{xy} + T_{i-1,j}^{xy}}{4}.$$

Os termos que não possuem índices temporais são avaliados no tempo t_n .

3.5.3 Aproximação da Equação de Poisson para ψ

A equação de Poisson dada por (3.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \quad (3.27)$$

e aproximando as derivadas por diferenças finitas de 2º ordem, tem-se

$$\frac{\psi_{i+1,j}^{(n+1)} - 2\psi_{i,j}^{(n+1)} + \psi_{i-1,j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{(n+1)} - 2\psi_{i,j}^{(n+1)} + \psi_{i,j-1}^{(n+1)}}{\delta y^2} = \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y}. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) quando aplicada em todos os pontos do domínio gera um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, de ordem n , onde n é o número de células (F) da malha, $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, esparsa e definida positiva e $\mathbf{b}$ é o vetor divergente definido por $\tilde{u}_{i,j}$ e $\tilde{v}_{i,j}$.

Para resolver este sistema, aplicamos o método dos gradientes conjugados.

3.5.4 Aproximação da Equação da Velocidade Final

A equação da velocidade final (3.7), em coordenadas bidimensionais, pode ser escrita como

$$u(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial x},$$

$$v(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{v}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial y}.$$

Aplicando no ponto $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$, obtém-se

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - \frac{\psi_{i+1,j}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n+1)}}{\delta x},$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - \frac{\psi_{i,j+1}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n+1)}}{\delta y},$$

respectivamente.

3.5.5 Aproximação da Equação da Pressão

A equação (3.15) aplicada no ponto (i, j) é dada por

$$p_{i,j}^{(n+1)} = p_{i,j} + \frac{\psi_{i,j}^{(n+1)}}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{(n+1)} - 2\psi_{i,j}^{(n+1)} + \psi_{i-1,j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{(n+1)} - 2\psi_{i,j}^{(n+1)} + \psi_{i,j-1}^{(n+1)}}{\delta y^2} \right).$$

3.5.6 Aproximação da Equação Constitutiva

Nas equações (2.18)-(2.20), os termos lineares serão aproximados por diferenças centrais e a derivada temporal, pelo método de Euler melhorado explícito, enquanto que os termos convectivos serão aproximados pelo método ‘upwind’ de alta ordem VONOS [Varonos e Bergeles 1998].

Assim, podemos reescrever (3.16)-(3.18), correspondentes ao primeiro passo da resolução pelo método de Euler modificado, como segue:

$$\bar{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau(\mathbf{x}, t_n) + \delta t \mathcal{G}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)), \quad (3.29)$$

onde $\mathcal{G} := (\mathcal{G}^{xx}, \mathcal{G}^{xy}, \mathcal{G}^{yy})^T$, tem como componentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{xx} = & -\mathbf{conv}(u^{(n+1)} \tau^{xx})_{i,j} - \mathbf{conv}(v^{(n+1)} \tau^{xx})_{i,j} + 2 \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} \tau_{i,j}^{xx} \right) \\ & + 2 \left(\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} \tau_{i,j}^{xy} \right) - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau_{i,j}^{xx} + \alpha Re Wi [(\tau_{i,j}^{xx})^2 + (\tau_{i,j}^{xy})^2] \right\} \\ & + 2 \frac{1}{Re Wi} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{xy} = & -\mathbf{conv}(u^{(n+1)} \tau^{xy})_{i,j} - \mathbf{conv}(v^{(n+1)} \tau^{xy})_{i,j} + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} \right) \tau_{i,j}^{xy} \\ & + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} \tau_{i,j}^{yy} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - v_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} \tau_{i,j}^{xx} - \frac{1}{Wi} \left[\tau_{i,j}^{xy} + \alpha Re Wi \tau_{i,j}^{xy} (\tau_{i,j}^{xx} + \tau_{i,j}^{yy}) \right] \\ & + \frac{1}{Re Wi} \left(\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{yy} = & -\mathbf{conv}(u^{(n+1)} \tau^{yy})_{i,j} - \mathbf{conv}(v^{(n+1)} \tau^{yy})_{i,j} + 2 \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - v_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)}}{\delta x} \tau_{i,j}^{xy} \right) \\ & + 2 \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} \tau_{i,j}^{yy} \right) - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau_{i,j}^{yy} + \alpha Re Wi [(\tau_{i,j}^{xy})^2 + (\tau_{i,j}^{yy})^2] \right\} \\ & + 2 \frac{1}{Re Wi} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\delta y} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned}
 u_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} &= \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}^{(n+1)} + u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(n+1)}}{4}, \\
 u_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} &= \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}^{(n+1)} + u_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(n+1)}}{4}, \\
 v_{i+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} &= \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{4}, \\
 v_{i-\frac{1}{2},j}^{(n+1)} &= \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{4}.
 \end{aligned}$$

Para o segundo passo do método de Euler modificado, podemos escrever as equações (3.19)-(3.21) como segue:

$$\tau(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tau(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\delta t}{2} [\mathcal{G}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n)) + \mathcal{G}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \bar{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1}))], \quad (3.33)$$

onde as componentes de $\mathcal{G}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \tau(\mathbf{x}, t_n))$ são calculadas a partir das equações (3.30)-(3.32) e, as componentes de $\mathcal{G}(\mathbf{u}^{(n+1)}, \bar{\tau}(\mathbf{x}, t_{n+1}))$ são calculadas de modo análogo, substituindo τ^{xx} , τ^{xy} e τ^{yy} por $\bar{\tau}^{xx}$, $\bar{\tau}^{xy}$ e $\bar{\tau}^{yy}$, respectivamente, obtidos por (3.29).

3.6 Cálculo do Passo Temporal

O passo de tempo é calculado levando-se em consideração o fato de que uma partícula não pode percorrer uma distância maior do que o comprimento de uma célula. Para que isso aconteça, em cada ciclo devem ser verificadas as seguintes condições

$$\delta t_u \leq \frac{\delta x}{u_{max}}, \quad (3.34)$$

$$\delta t_v \leq \frac{\delta x}{v_{max}}, \quad (3.35)$$

onde u_{max} e v_{max} são os módulos máximos das velocidades nas direções x e y , respectivamente. Assim, o passo de tempo usado na simulação será dado por

$$\delta t = FACT \min(\delta t_u, \delta t_v), \quad 0 \leq FACT \leq 1. \quad (3.36)$$

Detalhes da implementação dessas condições podem ser vistas em [Tomé e McKee 1994](#).

RESULTADOS

As equações de diferenças finitas apresentadas no capítulo 3.5 foram implementadas em um código computacional com o objetivo de simular escoamentos governados pela equação constitutiva Giesekus. O código resultante foi aplicado para simular vários problemas de interesse industrial. Inicialmente, são exibidos os resultados obtidos na simulação do escoamento totalmente desenvolvido em um canal bidimensional. Para verificar a implementação do código computacional, esses resultados são comparados com uma solução analítica para escoamento totalmente desenvolvido. Utilizando refinamento de malha, realizou-se um estudo de convergência do método numérico desenvolvido nesse trabalho. Para demonstrar a aplicabilidade do método numérico em escoamentos viscoelásticos complexos, os resultados obtidos na simulação do escoamento em uma contração 4:1 e a simulação de “jet buckling” (problema do jato oscilante) são apresentados.

4.1 Resultados de Verificação

Com o objetivo de verificar a técnica numérica apresentada no capítulo anterior, simulou-se o escoamento em um canal bidimensional de largura L e comprimento $10L$, conforme a Figura 6, e os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica para escoamentos totalmente desenvolvidos em um canal.

O método de obtenção da solução analítica foi desenvolvido durante este projeto e é descrito em detalhes no Apêndice A.

A simulação foi iniciada com o canal completamente cheio de fluido, adotando uma velocidade inicial $\mathbf{u} = (1, 0)$. Na entrada do canal, foi imposta a velocidade dada por

$$u(y) = -4 \frac{U}{L^2} \left(y - \frac{L}{2} \right)^2 + U \quad \text{e} \quad v(y) = 0, \quad (4.1)$$

onde U e L representam a velocidade e o comprimento de escalas adotados, respectivamente.

Figura 6 – Domínio computacional de um canal bidimensional.

Para o tensor extra-tensão, as suas componentes são calculadas analiticamente resolvendo o seguinte sistema de equações (para detalhes, ver apêndice A)

$$\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$\tau^{yy} + \alpha Re Wi [(\tau^{yy})^2 + (\tau^{xy})^2] = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \tau^{yy} - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xy} + \alpha Re Wi [\tau^{xy} (\tau^{xx} + \tau^{yy})] \right\} + \frac{1}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.4)$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau^{xy} - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xx} + \alpha Re Wi [(\tau^{xy})^2 + (\tau^{xx})^2] \right\} = 0. \quad (4.5)$$

O escoamento no canal bidimensional foi simulado com os seguintes dados:

- Velocidade de injeção: $U = 0.1 ms^{-1}$
- Escala de comprimento: $L = 0.01m$
- Definição do fluido:
 - Viscosidade cinemática: $\nu = 0.001 m^2 s^{-1}$
 - Modelo Giesekus: $\alpha = 0.1$ e $\lambda = 0.04s$

Assim, de acordo com esses parâmetros, temos $Re = UL/\nu = 1$ e $Wi = \lambda U/L = 0.4$. A solução analítica encontrada para o gradiente de pressão resultou no valor $\partial p/\partial x = -6.116$.

Para analisar a convergência do método numérico, o escoamento foi simulado em cinco malhas distintas: Malha **M1** com 100×10 células ($\delta_x = \delta_y = 0.001m$), Malha **M2** com 200×20 células ($\delta_x = \delta_y = 0.0005m$), Malha **M3** com 300×30 células ($\delta_x = \delta_y = 0.00033m$), Malha **M4** com 400×40 células ($\delta_x = \delta_y = 0.00025m$) e Malha **M5** com 500×50 células ($\delta_x = \delta_y = 0.0002m$), até o tempo $t = 100s$, onde o estado estacionário já tinha sido alcançado.

Para demonstrar que as soluções estacionárias foram alcançadas, a Figura 7 mostra as linhas de nível das velocidades u e v e da pressão p no tempo mencionado. Pode-se observar na Figura 7 que as linhas de nível da velocidade u estão paralelas e variam somente com y e que a velocidade v é nula em todo domínio, enquanto que o gradiente de pressão varia com x .

A Figura 8 mostra que os valores numéricos para o gradiente de pressão $\partial p/\partial x$ obtidos nas malhas **M1**, **M2**, **M3**, **M4** e **M5** aproximam-se do valor exato quando a malha é refinada. Os

Figura 7 – Linhas de nível obtidas na simulação do escoamento completamente desenvolvido em um canal, utilizando a malha **M5**.

valores numéricos são calculados pela fórmula $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i_{out}-\frac{1}{2}} = \frac{p_{i_{out},j} - p_{i_{out}-1,j}}{\delta x}$ e o valor utilizado para $\partial p / \partial x$ representa a média dos valores calculados nos pontos $(i_{out} - \frac{1}{2}, j)$, onde i_{out} denota o índice da célula imediatamente anterior a saída do canal (outflow). É possível ver que com o refinamento da malha, os valores aproximados convergem para a solução analítica de $\partial p / \partial x$.

Os demais resultados obtidos nas simulações numéricas são comparados com as respectivas soluções analíticas e mostrados nas [Figura 9](#) - [Figura 11](#).

As [Figura 9](#) e [Figura 10](#) mostram a comparação da solução numérica obtida nas malhas **M1**, **M2**, **M3**, **M4** e **M5** com a solução analítica, na seção transversal $i = i_{out}$. Podemos observar que existe uma excelente concordância entre as soluções numéricas e as soluções analíticas. Esses resultados verificam o método numérico proposto para simular escoamentos com o modelo Giesekus.

Figura 8 – Convergência dos valores numéricos de $\partial p/\partial x$ para o valor obtido no cálculo da solução analítica.

Figura 9 – Comparação das soluções numéricas obtidas nas malhas M1, M2, M3, M4 e M5. a) Tensão τ^{xx} , b) tensão τ^{xy} , c) tensão τ^{yy} e d) variação de velocidade $du/\partial y$.

Figura 10 – Comparação das velocidades analítica e Newtoniana com a velocidade numérica obtida nas malhas **M1**, **M2**, **M3**, **M4** e **M5**.

Para demonstrar quantitativamente a convergência do método numérico, o erro relativo obtido nas cinco malhas foi calculado pela fórmula

$$E_{M_j} = \sqrt{\frac{\sum (sol_{exata} - sol_{M_j})^2}{\sum (sol_{exata})^2}}, \quad (4.6)$$

onde sol_{M_j} denota a solução numérica obtida utilizando a malha M_j .

A [Tabela 1](#) mostra os erros obtidos nas cinco malhas enquanto a [Figura 11](#) mostra o decrescimento do erro em função do espaçamento δx .

<i>Erro Relativo</i>	<i>Malhas</i>					$O(\delta x)$
	M1	M2	M3	M45	M5	
$E(\tau^{xx})$	3.690×10^{-2}	1.188×10^{-2}	5.408×10^{-3}	2.982×10^{-3}	1.850×10^{-3}	2
$E(\tau^{xy})$	1.516×10^{-2}	4.131×10^{-3}	1.825×10^{-3}	1.012×10^{-3}	6.400×10^{-4}	2
$E(\tau^{yy})$	3.265×10^{-2}	1.009×10^{-2}	4.533×10^{-3}	2.488×10^{-3}	1.543×10^{-3}	2
$E(du/dy)$	2.585×10^{-2}	8.354×10^{-3}	3.827×10^{-3}	2.120×10^{-3}	1.320×10^{-3}	2

Tabela 1 – Erros relativos obtidos nas malhas **M1**, **M2**, **M3**, **M4** e **M5**, para os tensores τ^{xx} , τ^{xy} , τ^{yy} e a variação de velocidade du/dy .

Figura 11 – Decréscimo dos erros relativos obtidos nas malhas M1, M2, M3, M4 e M5.

Podemos ver na [Tabela 1](#) e na sua respectiva representação na [Figura 11](#) que os erros diminuem com o refinamento da malha, e são menores que 1% nas malhas M3, M4 e M5. Estes resultados confirmam a convergência do método numérico empregado.

4.2 Contração Planar 4:1

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos na simulação do escoamento de um fluido Giesekus através de uma contração planar 4:1, em que o canal de entrada do fluido tem largura H , e que ao sofrer um estrangulamento, passa para outro canal de largura $h = H/4$. A geometria do escoamento é mostrada na [Figura 12](#).

Esse problema é muito utilizado no desenvolvimento de métodos numéricos para a simulação de escoamentos de fluidos não-newtonianos [[Araújo 2006](#), [Oliveira e Pinho 1999](#), [Tomé et al. 2008](#)]. O principal interesse na simulação deste tipo de escoamento vem do fato de fluidos viscoelásticos apresentarem comportamento variado quando sujeitos à geometrias complexas, como a contração planar por exemplo. Um efeito bastante estudado é o aparecimento e o tamanho dos vórtices nos cantos e dos chamados *lip vortices*, que são caracterizados pelo aparecimento de vórtices nas quinas da entrada da contração. O tamanho desses vórtices pode ser afetado por diversos fatores, como os números de Reynolds e Weissenberg, a geometria da contração e propriedades reológicas do material como viscosidade e constantes elásticas. Existem vários trabalhos que estudaram numericamente o comportamento de escoamentos de fluidos viscoelásticos em uma contração 4:1 [[Walters e Webster 2003](#), [White, Gotsis e Baird 1987](#)], bem como diversos trabalhos experimentais mostrando que o efeito da viscoelasticidade

produz padrões de vorticidade diferentes, quando sujeitos a esse tipo de geometria (ver por exemplo, [Boger, Hur e Binnington 1986](#)).

Com relação a [Figura 12](#), podemos observar a existência de um eixo de simetria e por isso, os resultados das simulações serão visualizados apenas na metade superior do domínio.

Figura 12 – Domínio computacional para a simulação do escoamento em uma contração planar 4:1.

As simulações do escoamento na contração foram realizadas com os seguintes dados: comprimento das cavidades $L_1 = L_2 = 0.16m$; larguras dos canais, $H = 0.08m$ (canal a montante) e $h = 0.02m$ (ver [Figura 12](#)) e velocidade média na entrada do canal a montante $U_E = 0.025ms^{-1}$.

Os tamanho dos vórtices nos cantos inferior e superior na parede de estrangulamento são medidos pela razão $L_{vortex} = \frac{X}{h/2}$, onde X e h correspondem as medidas mostradas na [Figura 12](#).

Para verificar a convergência do método numérico para este tipo de problema, simulamos esse escoamento em três malhas distintas: Malha **M1** com 160×40 células ($\delta_x = \delta_y = 0.002m$), Malha **M2** com 320×80 células ($\delta_x = \delta_y = 0.001m$) e Malha **M3** com 640×160 células ($\delta_x = \delta_y = 0.0005m$), até que o estado estacionário fosse alcançado.

Os dados utilizados nas simulações para teste de convergência foram os seguintes:

- Velocidade de escala (adimensionalização): $U = 0.1ms^{-1}$
- Escala de comprimento (adimensionalização): $L = 0.01m$
- Aceleração gravitacional: $g = 0$
- Definição do fluido:
 - Viscosidade cinemática: $\nu = 0.001m^2s^{-1}$
 - Modelo Giesekus: $\alpha = 0.1$ e $\lambda = 0.1s$

Com esses dados de entrada, obtivemos $Re = UL/\nu = 1$ e $Wi = \lambda U/L = 1$.

Para mostrar que o estado estacionário foi alcançado, as linhas de nível das velocidades u e v e da pressão p , obtidas utilizando a malha **M3**, são apresentadas na [Figura 13](#). Pode-se

observar na [Figura 13](#) que a componente u da velocidade apresenta perfil parabólico no canal de saída, a componente v da velocidade é nula em quase todo domínio e que a pressão p , varia apenas em função de x .

Figura 13 – Linhas de nível obtidas na simulação do escoamento em uma contração planar 4:1 na malha M3.

As [Figura 14](#) e [Figura 15](#) mostram os resultados obtidos ao longo do eixo de simetria (ver [Figura 12](#)) nas malhas M1, M2 e M3. A [Figura 14](#) mostra os resultados da pressão e da variação de pressão, enquanto que a [Figura 15](#) mostra os resultados obtidos para as componentes de velocidade u e v .

Figura 14 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar obtida nas malhas **M1**, **M2** e **M3** ao longo do eixo de simetria. a) Pressão e b) gradiente de pressão.

Figura 15 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar obtida nas malhas **M1**, **M2** e **M3** ao longo do eixo de simetria. a) Velocidade $u(x)$ e b) velocidade $v(x)$.

Os resultados obtidos nos cálculos dos tensores τ^{xx} , τ^{xy} , τ^{yy} , e a diferença de tensão normal $N_1 = \tau^{xx} - \tau^{yy}$, são mostrados na [Figura 16](#).

Os gráficos presentes nas [Figura 15](#) e [Figura 16](#), mostram um comportamento semelhante ao apresentado por [Azaiez, Guénette e Aït-Kadi 1996](#), mostrando a coerência dos resultados.

Com o objetivo de estudar o aparecimento e o comportamento dos vórtices nas paredes da contração, foram realizadas várias simulações com números de Reynolds $Re = 0.1$ e $Re = 1$, utilizando vários valores do número de Weissenberg.

Os dados utilizados nessas simulações foram:

- Velocidade de escala (adimensionalização): $U = 0.1 m s^{-1}$
- Escala de comprimento (adimensionalização): $L = 0.01 m$
- Malha: $\delta_x = \delta_y = 0.001 m$ (320×80 células)
- Aceleração gravitacional: $g = 0$

- Definição do fluido:

- Viscosidade cinemática: $\nu = 0.001 m^2 s^{-1}$
- Modelo Giesekus: $\alpha = 0.1$ e λ dependendo do número de Weissenberg.

Figura 16 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar nas malhas **M1**, **M2** e **M3**. Resultados obtidos no eixo de simetria para a) τ^{xx} , b) τ^{xy} e c) τ^{yy} e, próximo a parede superior do canal de largura h para d) $N_I = \tau^{xx} - \tau^{yy}$.

Nessas simulações, os valores do parâmetro λ e os respectivos números de Weissenberg são apresentados na [Tabela 2](#).

λ	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
Wi	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5

Tabela 2 – Valores do tempo de relaxação λ e respectivos números de Weissenberg.

Utilizando os dados da [Tabela 2](#), foram realizadas um total de 18 simulações correspondentes aos números de Reynolds $Re = 0.1, 1$, até que o estado estacionário de cada simulação fosse alcançado. Para cada valor de Wi , o tamanho do vórtice de canto foi obtido. As linhas de corrente obtidas são mostradas na [Figura 17](#) para $Re = 0.1$ e a [Figura 18](#) mostra as linhas de corrente obtidas para $Re = 1$.

Com referência as [Figura 17h](#) e [Figura 17i](#), é possível constatar a presença de um ‘lip vortice’, e o mesmo efeito se verifica na [Figura 18i](#). O aparecimento de ‘lip vortices’ tem sido constatado por muitos investigadores que estudaram o escoamento em uma contração 4:1. Por exemplo, esse fenômeno foi reportado por [Aboubacar e Webster 2001](#), que simularam o problema da contração planar utilizando o modelo Oldroyd-B com um método numérico híbrido baseado em volumes/elementos finitos e provaram a existência do ‘lip vortice’ para $Wi > 1$, com $Re = 0$. Outro trabalho que também obteve um ‘lip vortice’ utilizando o modelo Oldroyd-B foi realizado por [Alves, Oliveira e Pinho 2003](#), que mostraram o aparecimento de pequenos ‘lip vortices’ para $Wi = 0.5, 1$ e 1.5 , também com $Re = 0$, e, recentemente, [Ferrás et al. 2014](#) utilizaram o modelo sPTT para simular o problema da contração 4:1, utilizando $Re = 0.04$ e $0 \leq Wi \leq 5$. Com $Wi = 5$, [Ferrás et al. 2014](#) mostraram que o aumento da viscosidade no escoamento produz um aumento no tamanho do ‘lip vortice’, de modo que este se unia ao vórtice de canto, criando um único vórtice que continuava crescendo com o aumento de Wi .

Os resultados com $Re = 1$ também mostram o aparecimento de um ‘lip vortice’ a medida que o número de Weissenberg é aumentado (ver [Figura 18i](#)).

Para confirmar o aparecimento dos ‘lip vortices’, os problemas foram simulados novamente utilizando uma malha mais fina, com 640×160 células, e o resultado obtido foi semelhante àquele obtido na malha com 320×80 células.

Figura 17 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 0.1$ e $\alpha = 0.1$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)

Figura 18 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0.1$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$.

A Tabela 3 mostra o tamanho dos vórtices obtidos para cada valor de Wi e a Figura 19 mostra a variação do tamanho do vórtice com o crescimento do número de Weissenberg.

Wi	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$Re = 0.1$	1.422	1.387	1.339	1.325	1.321	1.333	1.354	1.429	1.535
$Re = 1$	1.230	1.186	1.120	1.076	1.043	1.026	1.018	1.028	1.070

Tabela 3 – Variação do comprimento dos vórtices com o número de Weissenberg para $Re = 0.1$ e $Re = 1$, com $\alpha = 0.1$.

Figura 19 – Variação do comprimento do vórtice em função do número de Weissenberg para $Re = 0.1$ e $Re = 1$, com $\alpha = 0.1$.

De acordo com a [Tabela 3](#) e a [Figura 19](#), pode-se observar que à medida que o número de Weissenberg aumenta, o tamanho do vórtice de canto diminui. Porém esse efeito não se estende a todos os valores de Wi . A partir de um determinado valor de Wi , os vórtices de canto começam a aumentar novamente. Esses resultados não concordam com alguns encontrados na literatura, obtidos com os modelos Oldroyd-B e Maxwell, por exemplo, onde o tamanho dos vórtices de canto diminuem com o aumento do número de Weissenberg (aumento da viscoelasticidade). Entretanto, utilizando 'creeping flows' (escoamentos lentos onde $Re \ll 1$), o crescimento do tamanho do vórtice tem sido presenciado por alguns autores, por exemplo, PTT [[Alves, Oliveira e Pinho 2003](#)], sPTT [[Ferrás et al. 2014](#)] e UCM [[Oliveira e Pinho 1999](#)]. Todavia, os resultados obtidos nesse trabalho concordam com os resultados apresentados por [Choi, Song e Yoo 1988](#) que simularam o escoamento em uma contração 4:1 utilizando o modelo Giesekus com $\alpha = 0.5$ e presenciaram diminuição do tamanho do vórtice de canto (a baixos valores de Wi) seguido de um aumento no tamanho do vórtice de canto a partir de um certo valor de Wi .

Além de verificar o comportamento do escoamento com a variação de Re e Wi , o problema da contração planar foi simulado variando-se o parâmetro α do modelo Giesekus. Para isso, fixou-se o valor de Re e variou-se os valores do número de Weissenberg, juntamente com o parâmetro α . Os resultados apresentados a seguir foram obtidos fixando-se o valor de $Re = 1$ e, para cada valor de Wi descrito na [Tabela 2](#), foram realizadas duas simulações com valores de α igual a 0 e 0.3.

A [Figura 20](#) a seguir mostra as linhas de corrente obtidas para cada Wi descrito na [Tabela 2](#), com $Re = 1$ e $\alpha = 0.3$.

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)

Figura 20 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0.3$. a) $Wi = 0.25$, b) $Wi = 0.5$, c) $Wi = 1$, d) $Wi = 1.5$, e) $Wi = 2$, f) $Wi = 2.5$, g) $Wi = 3$, h) $Wi = 4$ e i) $Wi = 5$.

A Figura 21 mostra as linhas de corrente obtidas para cada Wi descrito na Tabela 2, juntamente com uma simulação para o caso Newtoniano, com $Re = 1$ e $\alpha = 0$.

a)

b)

c)

d)

Figura 21 – Simulação numérica do escoamento em uma contração planar 4:1. Resultados obtidos com $Re = 1$ e $\alpha = 0$. a) $Wi = 0$ (Newtoniano), b) $Wi = 0.25$, c) $Wi = 0.5$, d) $Wi = 1$, e) $Wi = 1.5$, f) $Wi = 2$, g) $Wi = 2.5$, h) $Wi = 3$, i) $Wi = 4$ e j) $Wi = 5$.

Nestas simulações, apenas o escoamento com $\alpha = 0$ apresentou o fenômeno do ‘lip vortice’. Pelo que tudo indica, o aparecimento do ‘lip vortice’ está diretamente relacionado a viscosidade no escoamento, uma vez que o efeito surge com o aumento de Wi . Porém, esse efeito

acaba sendo influenciado também de alguma forma pela constante α , visto que com $\alpha = 0.3$ não houve o seu aparecimento.

A Tabela 4 mostra o tamanho dos vórtices obtidos para cada valor de Wi com a variação de α e, a Figura 22, mostra a sua representação.

Wi	$Re = 1$		
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$
0	1.281	—	—
0.25	1.228	1.230	1.233
0.5	1.176	1.186	1.199
1	1.092	1.120	1.150
1.5	1.022	1.076	1.120
2	0.950	1.043	1.101
2.5	0.900	1.026	1.087
3	0.846	1.018	1.079
4	0.721	1.028	1.082
5	0.652	1.070	1.094

Tabela 4 – Variação do comprimento do vórtice em função do número de Wi e do parâmetro α para $Re = 1$.

Figura 22 – Variação do comprimento do vórtice em função do número de Wi , para $\alpha = 0, 0.1$ e 0.3 , com $Re = 1$.

4.3 Jet Buckling

Nesta seção, são apresentados os resultados numéricos obtidos na simulação de escoamentos com superfícies livres produzidos por um jato incidindo sobre uma placa plana, também conhecido como ‘jet buckling’ ou problema do jato oscilante.

Esse problema tem sido estudado por muitos pesquisadores (por exemplo, Cruickshank 1988, Cruickshank e Munson 1981, Tomé e McKee 1999, Tomé *et al.* 1999, Ville, Silva e Coupez 2011, Roberts e Rao 2011, Habibi *et al.* 2014, Xu e Ouyang 2013, Silva 2014, Figueiredo *et al.* 2013, Bhattacharya, Craster e Flynn 2013, para mencionar somente alguns poucos). Em particular, Cruickshank e Munson 1981 e Cruickshank 1988 obtiveram condições que envolvem o número de Reynolds e o domínio do escoamento para a ocorrência do efeito do jato oscilante em geometrias bidimensionais. Os resultados de Cruickshank 1988 mostraram que para ocorrer o efeito do jato oscilante, devem ser satisfeitas as seguintes condições

$$Re < 0.56 \quad \text{e} \quad H/L_{inj} > 3\pi$$

onde H é a altura entre o injetor e a superfície rígida e L_{inj} é a largura do jato (Figura 23).

Figura 23 – Domínio computacional para a simulação do ‘jet buckling’.

Para ilustrar que o modelo de Giesekus pode simular o fenômeno do ‘jet buckling’, apresentamos a seguir algumas simulações que mostram os comportamentos de um jato newtoniano e de um jato governado pelo modelo Giesekus.

Os dados utilizados nas simulações a seguir foram:

- Domínio computacional: $0.1m \times 0.126m$
- Malha: $\delta x = \delta y = 0.001m$ (100 x 126 células)

- Aceleração gravitacional: $g = 9.81ms^{-2}$
- Altura do injetor à superfície rígida: $H = 0.12m$
- Largura do injetor: $L_{inj} = 0.008m$
- Velocidade do jato no injetor: $U = 0.2ms^{-1}$
- Definição do fluido:
 - Viscosidade cinemática: $\nu = 0.0025m^2s^{-1}$
 - Modelo Giesekus: $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 e $\lambda = 0.005s$

As variáveis de escala U , L , ν e λ , fornecem: $Re = UL/\nu = 0.8$ e $Wi = \lambda U/L = 0.1$.

Logo, $Re > 0.56$ e $H/L_{inj} = 15 > 3\pi$, as condições de Cruickshank não são satisfeitas e portanto, a simulação com o jato Newtoniano não deve apresentar o efeito do jato oscilante. No entanto, com relação ao jato modelado pela equação de Giesekus, não podemos concluir que o mesmo não apresentará o efeito do ‘jet buckling’, uma vez que a análise de Cruickshank é aplicada somente a jatos Newtonianos. A [Figura 24](#) mostra os resultados das simulações envolvendo um fluido Newtoniano e o fluido não-newtoniano com os parâmetros descritos acima.

Como podemos observar na [Figura 24](#), o escoamento do fluido newtoniano não apresentou a oscilação, como era esperado devido as condições de Cruickshank não serem totalmente satisfeitas e os jatos com $\alpha = 0.1, 0.3$ apresentaram o efeito ‘jet buckling’. Espera-se que as oscilações presentes nos jatos com $\alpha = 0.1, 0.3$ sejam consequência do fluido ser não-newtoniano, não devendo, assim, obrigatoriamente obedecer as condições de Cruickshank. Acreditamos que o aparecimento das oscilações se dá ao fato do crescimento da viscosidade extensional no momento em que o jato não-newtoniano atinge a superfície plana, conforme mostrado por [Paulo, Tomé e McKee 2007](#). Além disso, acreditamos que a simulação com $\alpha = 0.5$ não apresentou o efeito ‘jet buckling’ devido ao fato de que $Wi = 0.1$ e $Re = 0.8$ e, consequentemente, os efeitos viscoelásticos ainda não serem suficientes para que o jato se torne instável. Mostraremos a seguir que diminuindo o número de Reynolds, as simulações com o fluido Giesekus mostram ‘jet buckling’.

Vamos considerar um escoamento com as seguintes características:

- Domínio computacional: $0.1m \times 0.126m$
- Malha: $\delta x = \delta y = 0.001m$ (100 x 126 células)
- Aceleração gravitacional: $g = 9.81ms^{-2}$
- Altura do injetor à superfície rígida: $H = 0.12m$

- Largura do injetor: $L_{inj} = 0.008m$
- Velocidade do jato no injetor: $U = 0.2ms^{-1}$
- Definição do fluido:
 - Viscosidade cinemática: $\nu = 0.005m^2s^{-1}$
 - Modelo Giesekus: $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 e $\lambda = 0.005s$

Nessas simulações obtivemos: $Re = \frac{UL}{\nu} = 0.4$ e $Wi = \frac{\lambda U}{L} = 0.1$.

Portanto, como $Re < 0.56$ e $H/L_{inj} = 15.0 > 3\pi$, as condições de Cruickshank são satisfeitas e as simulações devem apresentar o efeito do jato oscilante. A [Figura 25](#) mostra os resultados das simulações envolvendo um fluido Newtoniano e o fluido viscoelástico com os parâmetros descritos acima.

Na [Figura 25](#), podemos ver que o escoamento newtoniano passa a apresentar a oscilação a partir do tempo $t = 1s$ e confirma as análises obtidas por [Cruickshank 1988](#). Os jatos com o fluido de Giesekus também apresentaram o efeito jet buckling, acreditamos, devido a diminuição do número de Reynolds, e consequente diminuição da mobilidade do fluido devido aos efeitos viscosos.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos em várias simulações de um jato incidindo sobre uma placa plana onde fixamos o número de Reynolds em $Re = 0.8$ e variamos o número de Weissenberg e o parâmetro α . Nessas simulações utilizamos $Wi = 0.5, 1, 2$ e $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$. A geometria do domínio, o tamanho da malha e a constante gravitacional, permaneceram fixos. Inicialmente, será analisado o efeito do parâmetro α no escoamento para cada simulação realizada e, posteriormente, veremos o comportamento da viscoelasticidade com o aumento do número de Weissenberg.

A [Figura 26](#) mostra a simulação numérica do ‘jet buckling’ com $Re = 0.8$, $Wi = 0.5$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 . Os resultados no tempo $t = 0.48s$ e $t = 0.64s$, sugerem que o jato torna-se mais viscoso a medida que o valor de α aumenta. Porém, no tempo $t = 0.8s$, os resultados obtidos com os três jatos são semelhantes. Por outro lado, os resultados mostrados na [Figura 27](#) com $Wi = 1$ sugerem o contrário, sendo que o jato com $\alpha = 0.1$ aparenta ser mais viscoso que os jatos correspondentes a $\alpha = 0.3, 0.5$. Esse fato é confirmado nos resultados mostrados na [Figura 28](#) com $Wi = 2$ onde podemos observar que o jato com $\alpha = 0.1$ mostra um número maior de oscilações ‘foldings’ que os jatos com $\alpha = 0.3, 0.5$. Assim, podemos observar em todas as simulações, independente dos números de Weissenberg e do parâmetro α , o efeito do jato oscilante, exceto para o escoamento Newtoniano com $Re = 0.8$. Pode-se também concluir que o efeito ‘jet buckling’ obtido nessas simulações é ocasionado pelos efeitos da elasticidade do fluido. Em resumo, sabendo que entre os modelos diferenciais, a equação constitutiva UCM destaca-se por ser um modelo que inclui maior viscoelasticidade, os resultados mostrados nas

Figura 26, Figura 27 e Figura 28 concordam com o fato que o modelo Giesekus aproxima-se do modelo UCM à medida que o valor de α aproxima-se do valor zero.

$t = 0.64s$

$t = 0.80s$

Figura 24 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos. Na primeira coluna são apresentados os resultados com escoamento newtoniano com $Re = 0.8$ e, nas demais colunas, tem-se simulações utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 0.1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente.

$t = 0.16s$

$t = 1.12s$

Figura 25 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos. Na primeira coluna são apresentados os resultados obtidos com o escoamento newtoniano com $Re = 0.4$ e, nas demais colunas, tem-se simulações utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.4$, $Wi = 0.1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente.

Figura 26 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 0.5$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente.

Figura 27 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 1$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente.

$t = 0.28s$ $t = 0.48s$ $t = 0.64s$

Figura 28 – Simulação numérica do ‘jet buckling’ em diferentes tempos, utilizando o modelo Giesekus com $Re = 0.8$, $Wi = 2$ e $\alpha = 0.1, 0.3$ e 0.5 , respectivamente.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi apresentada uma técnica numérica para simular escoamentos de fluidos viscoelásticos, governados pela equação constitutiva Giesekus. O método numérico simula escoamentos incompressíveis confinados e com superfícies livres e utiliza o método de diferenças finitas em uma malha deslocada.

Inicialmente, foram apresentadas as equações governantes e a adimensionalização empregada, bem como as condições iniciais e de contorno. Em seguida, foi discutido um método numérico para obtenção das soluções das equações governantes. Após a apresentação do método numérico, foram apresentadas as discretizações das equações descritas nos capítulos anteriores utilizando o método de diferenças finitas as quais foram implementadas em um código computacional. Os resultados da verificação do método numérico foram apresentados utilizando a solução analítica para escoamentos completamente desenvolvidos em um canal, sendo que a convergência foi demonstrada por meio de refinamento de malha computacional. Esses resultados mostraram uma boa concordância entre as soluções numéricas e analíticas e, o erro relativo entre as soluções, calculado em cinco diferentes malhas, diminuiu à medida que a malha foi refinada o que mostrou a convergência do método numérico.

Após a verificação do código, simulou-se o escoamento em uma contração planar 4:1. Nesse problema, variou-se os parâmetros da equação de Giesekus e realizou-se um estudo do comportamento do escoamento em relação ao aparecimento e tamanho dos vórtices de canto e ‘lip vortice’. Inicialmente, foi mostrado a convergência do método numérico aplicado a esse problema por meio de refinamento de malha e, em seguida, foi estudado o comportamento dos vórtices de canto. Fixou-se $\alpha = 0.1$ e $Re = 0.1, 1$ e efetuou-se várias simulações utilizando diversos valores de Wi . Nestas simulações, o número de Weissenberg assumiu valores entre 0 (Newtoniano) e 5 e os resultados obtidos mostraram que para baixos valores de Wi , houve um decrescimento seguido de um aumento do tamanho do vórtice. Esses resultados não concordam com os resultados encontrados na literatura para outros modelos constitutivos diferenciais como

UCM e Oldroyd-B. Para confirmar esses resultados, foram realizadas simulações adicionais tomando como dados $Re = 1$, $\alpha = 0$ (UCM) e $\alpha = 0.3$ e os valores de Wi utilizados com $\alpha = 0.1$ foram mantidos. Os resultados obtidos com $\alpha = 0.3$ mostraram o mesmo comportamento no tamanho do vórtice obtido com $\alpha = 0.1$, ou seja, obtém-se um decréscimo no tamanho do vórtice de canto que começa a aumentar a medida que o valor de Wi é acrescido. Além disso, os resultados com $\alpha = 0.1$, $Re = 0.1$, $Wi = 4, 5$, com os modelos UCM e Giesekus mostraram o aparecimento de um ‘lip vortice’ e o resultado com $Re = 1$, $Wi = 5$, obtido com o modelo UCM também apresentou um ‘lip vortice’ na entrada da contração. Para confirmar esses resultados, esses escoamentos foram simulados em uma malha mais fina com 640×160 células e, novamente, os resultados mostraram um ‘lip vortice’ semelhante ao obtido com a malha com 320×80 células. O surgimento de ‘lip vortices’ no escoamento da contração tem sido reportado na literatura com os modelos UCM, Oldroyd-B e outros modelos diferenciais considerando escoamentos a baixos número de Reynolds. Ainda com relação aos vórtices de canto, [Choi, Song e Yoo 1988](#) estudaram o escoamento em uma contração planar 4:1 utilizando o modelo Giesekus e obtiveram decréscimo e aumento do vórtice de canto variando o número de Mach viscoelástico.

Em escoamentos com superfícies livres, o problema do ‘jet buckling’ foi simulado utilizando vários valores do número de Weissenberg e α . Foram realizadas diversas simulações e os resultados obtidos mostraram que o número de Weissenberg e o parâmetro α do modelo Giesekus têm influência no comportamento do fenômeno do jato oscilante. Nas simulações com o fluido de Giesekus em que as condições de Cruickshank [[Cruickshank 1988](#)] não foram satisfeitas, obteve-se o efeito ‘jet buckling’ que, acreditamos, foi consequência da viscoelasticidade do fluido.

REFERÊNCIAS

ABOUBACAR, M.; WEBSTER, M. F. A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 98, p. 83–106, 2001. Citado na página 49.

ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 110, p. 45–75, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.

AMSDEN, A. A.; HARLOW, F. H. A simplified mac technique for incompressible fluid flow calculations. **Journal of Computational Physics**, v. 6, p. 322–325, 1970. Citado na página 27.

ARAÚJO, M. S. B. de. **Extensão de GENSMAC para escoamentos de fluidos governados pelos modelos integrais Maxwell e K-BKZ**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP, São Carlos, 2006. Citado na página 44.

AZAIEZ, J.; GUÉNETTE, R.; AÏT-KADI, A. Numerical simulation of viscoelastic flows through a planar contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 62, p. 253–277, 1996. Citado na página 47.

BATCHELOR, G. K. Equations governing the motion of a fluid. In: _____. **An Introduction to Fluid Dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1967. cap. 3, p. 131–173. Citado na página 24.

BHATTACHARYA, S.; CRASTER, R. V.; FLYNN, M. R. Buckling of a thin, viscous film in an axisymmetric geometry. **Physics of Fluids**, v. 25, 2013. Citado na página 58.

BOGER, D. V.; HUR, D.; BINNINGTON, R. Further observations of elastic effects in tubular entry flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 20, p. 31–49, 1986. Citado na página 45.

CHOI, H. C.; SONG, J. H.; YOO, J. Y. Numerical simulation of the planar contraction flow of a giesekus fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 29, p. 347–379, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 72.

CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **Journal of Computational Physics**, v. 2, p. 12–26, 1967. Citado na página 29.

_____. Numerical solution of the navier-stokes equations. **Mathematics of Computation**, v. 22, p. 745–762, 1968. Citado na página 29.

CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. The equations of motion. In: _____. **A mathematical introduction to fluid mechanics**. New York: Springer, 2000. cap. 1, p. 1–46. Citado na página 29.

CRUICKSHANK, J. O. Low-reynolds-number instabilities in stagnating jet flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 193, p. 111–127, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 58, 60 e 72.

- CRUICKSHANK, J. O.; MUNSON, B. R. Viscous-fluid buckling of plane axisymmetric jets. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 113, p. 221–239, 1981. Citado na página 58.
- DELVAUX, V.; CROCHET, M. J. Numerical simulation of delayed die swell. **Rheologica Acta**, v. 29, p. 1–10, 1990. Citado na página 19.
- FERRÁS, L. L.; AFONSO, A. M.; ALVES, M. A.; NóbREGA, J. M.; CARNEIRO, O. S.; PINHO, F. T. Slip flows of newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 214, p. 28–37, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.
- FIGUEIREDO, R. A.; OISHI, C. M.; CUMINATO, J. A.; ALVES, M. A. Three-dimensional transient complex free surface flows: Numerical simulation of xpp fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 195, p. 88–98, 2013. Citado na página 58.
- HABIBI, M.; HOSSEINI, S. H.; KHATAMI, M. H.; RIBE, N. M. Liquid supercoiling. **Physics of Fluids**, v. 26, 2014. Citado na página 58.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. **Physics Fluids**, v. 8, p. 2182–2189, 1965. Citado na página 27.
- HODGE, W. V. D. In: _____. **The theory and applications of harmonic integrals**. New York: Cambridge University Press, 1952. Citado na página 29.
- JOIE, J.; GRAEBLING, D. Numerical simulation of polymer flows using non-conforming finite elements. **Computers and Fluids**, v. 79, p. 178–189, 2013. Citado na página 19.
- LADYZHENSKAYA, O. A. In: _____. **The mathematical theory of viscous incompressible flow**. New York: Gordon and Breach, 1963. Citado na página 29.
- MU, Y.; ZHAO, G.; CHEN, A.; X., W. Modelling and simulation of three-dimensional extrusion swelling of viscoelastic fluids with ptt, giesekus and fene-p constitutive models. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, v. 72, p. 846–863, 2013. Citado na página 19.
- OISHI, C. M.; MARTINS, F. P.; TOMÉ, M. F.; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. Numerical solution of the extended pom-pom model for viscoelastic free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 166, p. 165–179, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 33.
- OLIVEIRA, J.; PINHO, F. T. Plane contraction flows of upper convected maxwell and phan-thien-tanner fluids as predicted by a finite-volume method. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 88, p. 63–88, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 53.
- OZTEKIN, A.; BROWN, R. A.; MCKINLEY, G. H. Quantitative prediction of the viscoelastic instability in cone-and-plate flow of a boger fluid using a multi-mode giesekus model. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 54, p. 351–377, 1994. Citado na página 19.
- PAULO, G. S.; TOMÉ, M. F.; MCKEE, A. A marker-and-cell approach to viscoelastic free surface flows using the ptt model. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 147, p. 149–174, 2007. Citado na página 59.
- RAJAGOPALAN, D.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A. Finite element methods for calculation of steady viscoelastic flow using constitutive equations with a newtonian viscosity. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 36, p. 159–192, 1990. Citado na página 21.

ROBERTS, S. A.; RAO, R. R. Numerical simulations of mounding and submerging flows of shear-thinning jets impinging in a container. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 166, p. 1100–1115, 2011. Citado na página 58.

SCHLEINIGER, G.; WEINACHT, J. Steady poiseuille flows for a giesekus fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 40, p. 79–102, 1991. Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 19, 21 e 78.

SILVA, J. Sph fluids for viscous jet buckling. In: SIBGRAPI 2014, 27. Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 58.

TOMÉ, M. F.; ARAUJO, M. S. B.; ALVES, M. A.; PINHO, F. T. Numerical simulation of viscoelastic flows using integral models: a finite difference approach. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 4207–4243, 2008. Citado na página 44.

TOMÉ, M. F.; CASTELO, A.; AFONSO, A. M.; ALVES, M. A.; PINHO, F. T. Application of the log-conformation tensor to three-dimensional time-dependent free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 175-176, p. 44–54, 2012. Citado na página 19.

TOMÉ, M. F.; CASTELO, A.; CÉSAR, C. N. L.; MCKEE, S.; CUMINATO, J. A. Freeflow: an integrated simulation system for three-dimensional free surface flows. **Computing and Visualization in Science**, v. 2, p. 199–210, 2000. Citado na página 27.

TOMÉ, M. F.; CASTELO, A.; FERREIRA, V. G.; MCKEE, S. A finite difference technique for solving the oldroyd-b model for 3d-unsteady free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 154, p. 159–192, 2008. Citado na página 19.

TOMÉ, M. F.; MANGIAVACCHI, N.; CUMINATO, J. A.; CASTELO, A.; MCKEE, S. A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 106, p. 61–106, 2002. Citado na página 27.

TOMÉ, M. F.; MCKEE, S. Gensmac: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains. **Journal of Computational Physics**, v. 110, p. 171–186, 1994. Citado na página 38.

_____. Numerical simulation of viscous flow: Buckling of planar jets. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 29, p. 705–718, 1999. Citado na página 58.

TOMÉ, M. F.; MCKEE, S.; BARRATT, L.; JARVIS, D.; PATRICK, A. An experimental and numerical investigation of container filling with viscous liquids. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 33, p. 1333–1353, 1999. Citado na página 58.

TOMÉ, M. F.; PAULO, G. S.; ALVES, M. A.; PINHO, F. T. Numerical solution of the ptt constitutive equation for three-dimensional free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 165, p. 247–262, 2010. Citado na página 19.

VARONOS, A.; BERGELES, G. Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 26, p. 1–16, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.

VILLE, L.; SILVA, L.; COUPEZ, T. Convected level set method for the numerical simulation of fluid buckling. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, v. 60, p. 324–344, 2011. Citado na página 58.

WALTERS, K.; WEBSTER, M. F. The distinctive cfd challenges of computational rheology. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 43, p. 577–596, 2003. Citado na página 44.

WEIL, H. The method of orthogonal projection in potential theory. **Duke Mathematical Journal**, v. 7, p. 411–444, 1940. Citado na página 29.

WHITE, S. A.; GOTSIS, A.; BAIRD, D. G. Review of the entry flow problem: Experimental and numerical. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 24, p. 121–160, 1987. Citado na página 44.

XU, X.; OUYANG, J. A sph-based particle method for simulating 3d transient free surface flows of branched polymer melts. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 202, p. 54–71, 2013. Citado na página 58.

OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Esse apêndice tem como objetivo detalhar a obtenção da solução analítica do modelo Giesekus para o caso de um escoamento completamente desenvolvido em um canal, a partir das equações apresentadas no capítulo 2.

Vamos considerar um canal bidimensional de largura unitária e com escoamento completamente desenvolvido, onde $\mathbf{u} = (u(y), 0)$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante}$, $\tau^{xx}(y), \tau^{xy}(y), \tau^{yy}(y)$, $y \in [0, 1]$. Neste caso, as equações de conservação de quantidade de movimento (2.8) reduzem-se a

$$\frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \tau^{yy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\text{A.2})$$

e as equações do modelo Giesekus podem ser escritas como

$$\tau^{yy} + \alpha Re Wi [(\tau^{yy})^2 + (\tau^{xy})^2] = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \tau^{yy} - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xy} + \alpha Re Wi [\tau^{xy} (\tau^{xx} + \tau^{yy})] \right\} + \frac{1}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial y} \tau^{xy} - \frac{1}{Wi} \left\{ \tau^{xx} + \alpha Re Wi [(\tau^{xy})^2 + (\tau^{xx})^2] \right\} = 0. \quad (\text{A.5})$$

As equações (A.1)-(A.5) devem ser resolvidas para as variáveis $\partial u / \partial y$, $\partial p / \partial x$, τ^{xx} , τ^{xy} e τ^{yy} . Estas soluções são encontradas como segue:

Por integração de (A.1) sobre o intervalo $[0, y]$, o tensor τ^{xy} é dado por (aqui foi empregada a condição $\tau^{xy} = 0$ quando $y = 1/2$)

$$\tau^{xy} = \int_0^y \frac{\partial p}{\partial x} ds = \frac{\partial p}{\partial x} (y - \frac{1}{2}), \quad y \in [0, 1]. \quad (\text{A.6})$$

Agora, utilizando (A.3), que é uma equação de segunda ordem em τ^{yy} , podemos obter τ^{yy} de

$$\tau^{yy} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 (\tau^{xy})^2}}{2\alpha Re Wi}, \quad (\text{A.7})$$

onde devemos ter $1 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 (\tau^{xy})^2 \geq 0$ para garantia de soluções reais.

Nestas equações, o sinal positivo da raiz foi escolhido de modo que $\tau^{yy} = 0$ no meio do canal e, ainda, $\tau^{yy} = 0$ se $\alpha = 0$ na equação (A.3), correspondendo assim, ao modelo UCM. Mais sobre a escolha desta solução pode ser visto em [Schleiniger e Weinacht 1991](#).

A solução dada por (A.7) nos permite calcular $\partial u / \partial y$ a partir da equação (A.4) como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Wi} \left(\frac{\tau^{xy}}{\tau^{yy} + \frac{1}{ReWi}} \right) \left[1 + \alpha ReWi (\tau^{xx} + \tau^{yy}) \right], \quad (A.8)$$

que após ser introduzida na equação (A.5), produz

$$\left\{ 2 \left(\frac{(\tau^{xy})^2}{\tau^{yy} + \frac{1}{ReWi}} \right) \left[1 + \alpha ReWi (\tau^{xx} + \tau^{yy}) \right] \right\} - \left\{ \tau^{xx} + \alpha ReWi [(\tau^{xy})^2 + (\tau^{xx})^2] \right\} = 0. \quad (A.9)$$

Esta é uma equação de segunda ordem em τ^{xx} que possui duas soluções. A solução escolhida para τ^{xx} é aquela que faz com que a primeira diferença de tensão normal seja positiva ($N_1 = \tau^{xx} - \tau^{yy} \geq 0$), no eixo de simetria e é dada por

$$\tau^{xx} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (A.10)$$

onde

$$A = -\alpha ReWi, \quad (A.11)$$

$$B = 2(\tau^{xy})^2 \left[\frac{\alpha ReWi}{\tau^{yy} + \frac{1}{ReWi}} \right] - 1, \quad (A.12)$$

$$C = (\tau^{xy})^2 \left[\frac{2}{\tau^{yy} + \frac{1}{ReWi}} (1 + \alpha ReWi \tau^{yy}) - \alpha ReWi \right]. \quad (A.13)$$

Dessa maneira, τ^{xy} e τ^{yy} são calculados de (A.6) e (A.7), enquanto que τ^{xx} é obtido de (A.10) e finalmente, $\partial u / \partial y$ é calculado usando (A.8). Entretanto, essas soluções dependem do valor de $\partial p / \partial x$ que é calculado na seção A.1.

A.1 Cálculo de $\partial p / \partial x$

Para resolver as equações (A.6)-(A.10), é necessário o valor de $\partial p / \partial x$. Esse valor é obtido da seguinte maneira: na entrada do canal, é imposto um perfil parabólico Newtoniano para a velocidade $u_{inf}(y)$, do qual $\int_0^1 u_{inf}(y) dy = 2/3$. Assim, a solução $u(y)$ do modelo Giesekus deve satisfazer $\int_0^1 u(y) dy = 2/3$ que, integrando por partes e impondo a condição de não-eskorregamento para $u(y)$, obtemos a seguinte equação

$$\int_0^1 y \frac{\partial u}{\partial y} dy + 2/3 = 0, \quad \text{onde } \partial u / \partial y \text{ é dado pela equação (A.8)}. \quad (A.14)$$

A equação (A.14) é uma equação não linear na variável $\partial p/\partial x$ e pode ser resolvida por vários métodos iterativos para obtenção de raízes de equações não-lineares. Neste trabalho, escolhemos calcular $\partial p/\partial x$ pelo método da bissecção.

Uma vez calculado $\partial p/\partial x$, a velocidade $u(y)$ é obtida pela integração de $\frac{\partial u}{\partial y}(y)$ sobre o intervalo $[0, 1]$.