**Testes de Sobrevivência Acelerados:
Uma Análise Bayesiana
do Modelo de Eyring**

Francisco Louzada Neto

Orientação:

Prof.^o Dr. Jorge Alberto Achcar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP - São Carlos

1991

À minha esposa,

Claudia

Ao nosso Nenê

Aos meus pais,

Waldemar e M. Helena

Agradecimentos

A conclusão dessa dissertação não seria possível sem o auxílio de algumas pessoas que contribuíram diretamente no estudo de *Testes de Sobrevivência Acelerados*, à quais expresso os mais sinceros agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar por me orientar neste trabalho com sua valiosa dedicação e segurança, participando ativamente do estudo, incentivando-me em todo o decorrer da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Josemar Rodrigues pelo incentivo e apoio dado no início do meu curso de Pós-Graduação e pelas valiosas sugestões e comentários dados a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Emanuel Pimentel Barbosa pelas oportunas discussões e sugestões sobre o tema em questão.

Também agradeço à Profa Dra Maria Creusa S. Galvão Leite pelas sugestões apresentadas quando da realização do meu exame de qualificação; ao Prof. José Albertino R. Rodrigues (*in memoriam*) pelo apoio e incentivo ao meu ingresso na Pós-Graduação; aos Colegas e Funcionários do Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) pela acolhida e camaradagem durante a elaboração deste trabalho; aos Professores, Funcionários e Colegas da Pós-Graduação pelo excelente convívio; ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro parcial; a UFSCar pela concessão do afastamento parcial para a realização dos meus estudos; e finalmente ao Luciano Cesário e Carmen Lúcia Pagadigorria pelo excelente trabalho de digitação dos manuscritos.

Resumo

Nesta dissertação, considerando *Testes de Sobrevivência Acelerados*, desenvolvemos uma análise Bayesiana, do modelo de Eyring com uma variável estresse, e é considerada sua extensão para uma relação estresse-resposta geral, onde os modelos mais utilizados em experimentos acelerados com uma variável estresse são casos particulares. Também, o modelo de Eyring generalizado é analisado sob o enfoque Bayesiano. Consideramos, nestas análises, tanto uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência dos componentes, quanto uma distribuição de Weibull, dados sob um esquema de censura de tipo II e densidades a priori não-informativas de Jeffreys para os parâmetros envolvidos. O método de Laplace é usado para aproximarmos as densidades a posteriori de interesse quando não conseguimos achar suas soluções analíticas explícitas. Além disso, a precisão dos valores aproximados é estudada e relacionada com o uso de uma parametrização adequada. Também, achamos a densidade preditiva para uma observação futura, em um nível especificado de estresse, a qual é usada para desenvolvermos testes de controle de qualidade.

Abstract

Accelerated life tests are considered in this dissertation. A Bayesian analysis of the Eyring model is developed and its extension on to a general stress-response relationship is considered, where the most used models for accelerated experiments, with one stress variable are obtained as particular cases. Also, the generalized Eyring model is analysed under a Bayesian view point. We consider in the analysis an Exponential and Weibull distribution for the units lifetime, a type II censored data and a non-informative Jeffreys priors for the parameters involved. The Laplace's method is used to approximate the posterior densities when we cannot find analytical solutions explicitly. The precision of the approximated values obtained are studied and then related to the use of adequate parametrizations. We also find the predictive density for a future observation in a specified stress level, which is used to develop quality control tests.

Terminologia e Notação

Variáveis aleatórias são representadas por letras maiúsculas e suas realizações por minúsculas.

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória é representada por $f(\cdot)$, as funções de verossimilhança dos parâmetros envolvidos por $L(\cdot)$, as densidades a priori dos parâmetros envolvidos por $\pi(\cdot)$, as densidades a posteriori por $\pi(\cdot/dados)$ e a densidade preditiva de uma observação futura por $f(\cdot/dados)$.

Letras gregas iniciam os parâmetros dos modelos.

Em geral, constantes são representadas por letras minúsculas.

Vetores são representados por letras sublinhadas e matrizes por letras maiúsculas em negrito.

Por simplicidade de notação, algumas das letras, mencionadas acima, voltam a se repetir no Capítulo 8.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Importância das Relações Estresse-Resposta	5
1.2	Algumas das Relações Estresse-Resposta mais Utilizadas em Testes de sobrevivência Acelerados	5
1.2.1	O Modelo Lei de Potência Inversa	6
1.2.2	O Modelo de Taxa de Reação Arrhenius	7
1.2.3	O Modelo de Eyring	7
1.3	Revisão Bibliográfica e Objetivos	9
2	Análise Clássica do Modelo de Eyring com uma Variável Estresse	18
2.1	O Experimento em Testes de Sobrevivência Acelerados com Dados Censurados e uma Variável Estresse	19
2.2	Formulação do Modelo	20
2.3	Estimadores de Máxima Verossimilhança para os Parâmetros α e β .	22
2.4	Inferência Sobre os Parâmetros α e β ou Funções dos Mesmos	23

2.5	O Problema da Inferência sobre θ_1 Usando a Normalidade Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança	27
2.6	O Estudo de Diferentes Parametrizações	30
2.6.1	Reparametrização Ortogonal: Ortogonalização em β	31
2.6.2	Uma Proposta para Obtenção de Estimadores de α e β Assintoticamente Independentes	35
2.6.3	Reparametrização Logarítmica em θ_1	39
2.6.4	Parametrização Assintoticamente Independente	41
2.6.5	Retrospecto das Parametrizações Adotadas	46
3	Uma Análise Bayesiana do Modelo de Eyring com uma Variável Estresse	48
3.1	Densidade a Priori Não-Informativa para α e β	49
3.2	Densidade a Posteriori Conjunta para α e β	49
3.3	Densidades a Posteriori Marginais para α e β	50
3.3.1	Densidade a Posteriori Marginal para β	50
3.3.2	Densidade a Posteriori Marginal para α	51
3.4	Densidade a Posteriori para o Tempo Médio de Sobrevida, θ_1 , sob o nível Usual de Estresse	53
3.5	Reparametrização logarítmica em θ_1	55
3.6	O uso de uma Parametrização Independente	57

4	Controle de Qualidade em testes de Sobrevivência Acelerados	62
4.1	Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de estresse V_j com β conhecido	63
4.2	Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de Estresse V_j assumindo β desconhecido	65
4.3	O Uso da Densidade Preditiva $f^j(t_{(n+1)j}/Dados)$ em Controle de Qualidade	67
5	Análise do Modelo de Eyring Assumindo uma Distribuição de Weibull para os tempos de Sobrevivência	70
5.1	Formulação do Modelo	70
5.2	Análise Bayesiana do Modelo Assumindo α, β e p desconhecidos . . .	72
5.2.1	Densidade a Posteriori Marginal para p	74
5.2.2	Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p	76
6	Testes de Sobrevivência Acelerados com uma Relação Estresse-Resposta Geral	78
6.1	A Relação Estresse-Resposta Geral	79
6.2	Procedimento Bayesiano de Análise com uma Densidade de Weibull .	80
6.2.1	Densidade a Posteriori Marginal para p	81
6.2.2	Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p	82
6.3	Análise Bayesiana assumindo uma Distribuição Exponencial para T^* .	83

6.4	A Função de Confiabilidade em Experimentos Acelerados	85
6.4.1	Densidade a Posteriori Conjunta para a Função de Confiabilidade R_1^* e para o Parâmetro de Forma p da Distribuição de Weibull	86
6.4.2	Densidade a Posteriori para R_1^* Assumindo uma Distribuição Exponencial para T^*	87
7	Experimentos Acelerados com Níveis de Estresse Somente Maiores que os Usuais	89
7.1	Determinação do Modelo Considerando somente níveis de estresse maiores que os usuais	90
7.2	Uma Análise Bayesiana do Modelo	91
7.3	Análise Bayesiana assumindo $p_2 \leq p_3 - 1$	93
8	Análise de Testes de Sobrevivência Acelerados com o Modelo de Eyring Generalizado	97
8.1	Formulação do Experimento Acelerado	98
8.2	Procedimento usual de Análise do Modelo	98
8.3	Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Generalizado assumindo uma Distribuição Exponencial para os tempos de Sobrevivência	101
8.3.1	Uma Análise Bayesiana assumindo α, β, γ e δ desconhecidos	102
8.3.2	Uma Análise Bayesiana assumindo γ e δ conhecidos	104
8.3.3	Uma Análise Bayesiana assumindo β, γ e δ conhecidos	107

8.4	Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Generalizado assumindo uma Distribuição de Sobrevivência de Weibull	109
8.4.1	Procedimento Bayesiano de Análise Assumindo todos os Parâmetros Desconhecidos	109
8.4.2	Procedimento Bayesiano de Análise assumindo γ e δ conhecidos	112
9	Exemplos de Aplicação	114
9.1	Exemplo 1	114
9.1.1	Verificação Gráfica da Adequabilidade do Modelo	116
9.1.2	Análise Clássica do Problema	117
9.1.3	Uma Solução Bayesiana para o Problema	119
9.1.4	Comparação entre as Estimativas Pontuais	121
9.1.5	Comparação entre as Estimativas por Intervalo	122
9.1.6	O Efeito de Reparametrização na Análise Bayesiana do Modelo	125
9.1.7	Controle de Qualidade de um Lote de Componentes	127
9.2	Exemplo 2	129
9.3	Exemplo 3	137
10	Conclusões Finais e Perspectivas Futuras	144
10.1	Perspectivas de Trabalhos Futuros	146

Apêndice 1: O Método “Delta”	152
Apêndice 2: O Método de Aproximação de Laplace para Intgerais	154
Apêndice 2.1: Cáculos para obtenção da Densidade a Posteriori Marginal para o Parâmetro de forma p	157
Apêndice 3: Teoria da Verossimilhança: Regiões e Intervalos de Verossimilhança	161
Apêndice 4: Obtenção de Intervalos HPD	165
Bibliografia	167

Capítulo 1

Introdução

O tempo de duração de um determinado produto manufaturado, bem como o seu tempo de garantia, são fatores determinantes na relação produção-consumo, motivações permanentes de pesquisas industriais relacionadas com um controle de qualidade eficiente.

Em engenharia, diz-se que o objetivo é a análise da confiabilidade do componente (produto). Em particular, uma quantidade básica de interesse é o tempo médio de sobrevivência do componente sob condições normais de funcionamento em que usualmente é submetido, isto é, condições que assemelham-se às condições ambientes em que o componente em questão é submetido para operar.

Para estabelecer medidas relacionadas à confiabilidade do componente, torna-se necessário, inicialmente, planejar um experimento considerando uma amostra de componentes, e a resposta de interesse é dada por seus tempos de sobrevivência.

Escolhido um componente de interesse, um experimento trivial consiste em colocarmos n desses componentes em teste, nas condições normais de funcionamento em que usualmente são submetidos, e esperarmos até que todos falhem. Pode-se per-

ceber que, em muitos casos, dependendo do tipo de componente, como por exemplo, capacitores, transistores, isto é, dispositivos elétricos, eletrônicos, etc., o tempo e, conseqüentemente, o custo de experimentação, podem se tornar demasiadamente grandes – praticamente inviável para indústrias de varias áreas. Uma alternativa é diminuir artificialmente o tempo de sobrevivência dos componentes através dos chamados *Testes de Sobrevivência Acelerados*, nos quais, considera-se vários níveis de uma ou mais variáveis físicas que estressam o componente acima dos níveis usuais de funcionamento (condições normais de funcionamento). Dessa forma, temos possibilidade de observar o tempo de sobrevivência, com tempo e custo reduzidos.

Aplicações de condições de aceleração, que induzem à redução do tempo de sobrevivência, em geral, em engenharia, são produzidas por testes de componentes, sub-sistemas ou sistemas, em temperatura, tensão elétrica, pressão, umidade, etc., maiores que as comumente utilizadas. Com menor frequência, essas condições podem ser observadas em experimentações biológicas, que aparecem quando da aplicação de doses maiores do que as usuais de agentes químicos-farmacológicos e/ou radiobiológicos. Em ambos os casos, os dados obtidos sob condições aceleradas são utilizados para explorarmos algum nível baixo de estresse, onde o teste, em geral, é inviável dado o grande aumento do tempo e do custo de experimentação. Particularmente, em engenharia, esses dados são utilizados para inferirmos sobre o tempo médio de sobrevivência do componente, nas condições normais de funcionamento; nas áreas biológicas, para inferências sobre o tempo médio de sobrevivência de indivíduos (animais, vegetais) nas doses usuais dos agentes causadores de transformações patológicas.

Formalmente, seja T uma variável aleatória não-negativa, denotando o tempo de sobrevivência de um componente, com função densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por, $f(t, \underline{\lambda})$, onde $\underline{\lambda}$ é um vetor de parâmetros, e seja $\underline{S}$ um vetor de variáveis físicas que estressam o componente com níveis maiores do que os usuais de

funcionamento.

Devemos supor que (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974):

- a) o tipo da distribuição do tempo de sobrevivência não é afetado pelas condições de aceleração, caracterizadas em $\underline{S}$, mas os níveis de estresse influenciam os valores dos parâmetros em $\underline{\lambda}$;
- b) a relação entre $\underline{\lambda}$ e $\underline{S}$ (relação estresse-resposta) é conhecida, isto, é $\underline{\lambda} = g(\underline{S}, \alpha, \beta, \dots)$, exceto para um ou mais dos parâmetros $\alpha, \beta, \dots$, e é válida para um determinado intervalo de variação das variáveis em $\underline{S}$.

O principal objetivo do pesquisador, nesta área, é fazer inferências sobre $\underline{\lambda}$ ou funções de $\underline{\lambda}$, baseado em dados sobre T obtidos sob condições aceleradas.

Nos testes de sobrevivência acelerados, considera-se k níveis aleatorizados de uma ou mais variáveis estresse em $\underline{S}$, aplicados ao componente. Em cada nível i de estresse, $i = 2, 3, \dots, k$, uma ou mais unidades são submetidas a teste. O nível $i = 1$ é reservado às condições usuais de funcionamento.

Supondo que n_i unidades são colocadas em teste no i -ésimo nível de estresse e que m variáveis físicas de estresse estão envolvidas no processo, isto é, $\underline{S}' = (S_1, S_2, \dots, S_m)$, construímos a Tabela 1.1 do esquema de um experimento em testes de sobrevivência acelerados, onde, $S_2 < S_3 < \dots < S_k$, em cada uma das m variáveis.

Considerando a relação estresse-resposta, $g(\cdot)$, e assumindo a distribuição $f(t, \underline{\lambda})$ para os tempos de sobrevivência, inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_i , sob o i -ésimo nível de estresse, podem ser obtidas. Particularmente, pode-se inferir sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob os níveis usuais de

i	$S_1, S_2, \dots, S_m$	n_i	Dados observados
2	$S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2m}$	n_2	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n_2}$
3	$S_{31}, S_{32}, \dots, S_{3m}$	n_3	$t_{31}, t_{32}, \dots, t_{3n_3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{km}$	n_{k1}	$t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kn_k}$

Tabela 1.1: Esquema de um experimento em testes de sobrevivência acelerados.

estresse, $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m}$, como visto anteriormente, quantidade básica de interesse na análise da confiabilidade de componentes manufaturados.

Se o objetivo é reduzir ainda mais o tempo e o custo do experimento, pode-se associar os experimentos sob condições aceleradas a dados sob algum esquema de censura (ver por exemplo, Lawless, 1982).

A associação de algum esquema de censura aos experimentos acelerados torna-se, em geral, necessária, quando consideramos níveis baixos de estresse no experimento, onde, como visto anteriormente, o teste pode se tornar inviável.

Dessa forma, pode-se observar um número grande de censuras nesses níveis de estresse, garantindo a viabilidade do teste, conservando o tempo e, consequentemente, o custo do experimento, reduzidos. Neste contexto, como em geral, o interesse é explorar o nível usual de estresse, pode-se, quando possível, conduzir um teste acelerado, considerando-se n_1 componentes submetidos aos níveis usuais, $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m}$, das variáveis estresse, associados a algum esquema de censura, neste caso, $i = 1, 2, \dots, k$.

1.1 Importância das Relações Estresse-Resposta

Basicamente, a distribuição de sobrevivência de um determinado componente expressa uma tentativa de descrever matematicamente sua duração. Paralelamente, muitas variáveis físicas podem ser responsáveis, individual e/ou coletivamente, por sua falha, em um determinado instante. Em geral, considerar todas as variáveis físicas, possíveis causadoras da falha, torna-se inviável. Daí, a utilização de relações estresse-resposta, obtidas dos conceitos da mecânica estatística (ver por exemplo, Mann Schaffer e Singpurwalla, 1974), que objetivam isolar somente as variáveis físicas intrinsecamente ligadas ao tempo de sobrevivência do componente (responsáveis pelo mecanismo básico de falha), desconsiderando, com respaldo teórico, outras quaisquer variáveis, passíveis de controle experimental e/ou que não influenciam diretamente o tempo de sobrevivência.

1.2 Algumas das Relações Estresse-Resposta mais Utilizadas em Testes de sobrevivência Acelerados

Considere a variável aleatória T , definida anteriormente, com f.d.p. $f(t, \lambda)$. Em particular, seja $T \geq 0$ com uma distribuição Exponencial, com f.d.p. dada por,

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\}, \quad (1.1)$$

onde $\lambda_i > 0 (\lambda_i \in \lambda)$ é um parâmetro desconhecido representando a taxa constante de falha em um determinado nível i de estresse.

O tempo médio de sobrevivência, θ_i (função de λ), sob o i -ésimo nível de

estresse é dado por,

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (1.2)$$

De fato, além de depender dos tempos de sobrevivência dos componentes, θ_i também depende das condições de aceleração através de λ_i , que podem ser expressas pela relação estresse-resposta $g(\cdot)$, isto é, além de uma distribuição para os tempos de sobrevivência, associamos ao tempo médio de sobrevivência, θ_i , uma ou mais variáveis físicas de estresse que influenciam seu valor.

Das relações estresse-resposta mais conhecidas, mencionadas na literatura e utilizadas na prática, destacam-se o modelo Lei de Potência Inversa, o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius, e o modelo de Eyring.

A construção desses modelos respalda-se, como visto anteriormente, nos conceitos da mecânica estatística, tais como energia de ativação e teorias de taxa de reação (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

1.2.1 O Modelo Lei de Potência Inversa

O Modelo Lei de Potência Inversa, também conhecido como modelo Potência, determinado a partir de considerações da teoria cinética e energia de ativação, é dado por,

$$\lambda_i^{-1} = \frac{\alpha}{V_i^\beta}, \quad (1.3)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de voltagem, V , e α e β são parâmetros tais que, $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

Esse modelo expressa o aumento da taxa de falha λ com a β -ésima potência da voltagem V aplicada ao componente e tem como uma de suas aplicações o teste, sob condições aceleradas, de capacitores (ver por exemplo, Lavenbach, 1957).

1.2.2 O Modelo de Taxa de Reação Arrhenius

Representando a variação da taxa de falha como uma função da temperatura de operação, o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius, também chamado modelo de Arrhenius, é dado por,

$$\lambda_i = \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (1.4)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de temperatura, V , e α e β são os parâmetros desconhecidos, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

Aplicações deste modelo em testes de sobrevivência acelerados podem ser vistas em Thomas (1964).

1.2.3 O Modelo de Eyring

O Modelo de Eyring pode ser descrito em uma versão simplificada, envolvendo somente uma variável estresse de temperatura, e em uma versão generalizada, onde a taxa de falha, λ , é expressa em função de duas variáveis estresse, uma termal e outra não-termal.

O Modelo de Eyring com uma Variável Estresse

Derivado dos princípios da mecânica quântica, o modelo de Eyring com uma variável estresse expressa a variação da taxa de falha como uma função da

temperatura de operação (ver por exemplo, McGraw-Hill Encyclopedia of Science Technology, vol. 7, pg. 357), e é dado por,

$$\lambda_i = V_i \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (1.5)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de temperatura, V , e α e β são parâmetros desconhecidos, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

O modelo de Eyring Generalizado

Em sua versão generalizada, esse modelo é aplicável se o componente em questão está sujeito à aplicação constante de dois tipos de estresse, um termal e outro não-termal (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974), e é dado por,

$$\lambda_i = \alpha V_i \exp \left\{ \gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i} \right\}, \quad (1.6)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de temperatura, U_i é o i -ésimo nível da variável estresse não-termal, k_1 é a constante universal de Boltzmann ($k_1 = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/k}^\circ$) e α, β, γ e δ são parâmetros desconhecidos tais que, $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta, \gamma, \delta < \infty$.

Uma aplicação desse modelo em teste de sobrevivência acelerado de películas de filme é discutida por Goldberg (1964).

Deve-se enfatizar que as relações estresse-resposta (modelos) descritas acima podem ser válidas somente dentro de um determinado intervalo de variação das variáveis estresse envolvidas, e para serem extendidas a valores fora dos limites do

mesmo deve-se ter cautela. Isto devido ao fato de uma possível mudança no mecanismo básico de falha, responsável pela validade de um determinado modelo, $g(\cdot)$. Quando necessário, deve-se formular outra relação estresse-resposta que expresse o tempo médio de sobrevivência em função dos novos valores (fora dos limites do intervalo de variação previamente determinado) das variáveis estresse em questão (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

Além disso, a estrutura probabilística de $T, f(t, \Delta)$, pode ser dada por outras distribuições, além da Exponencial, considerada até o momento, como por exemplo, a Distribuição de Weibull, a Log-Normal, a Gamma, etc.

1.3 Revisão Bibliográfica e Objetivos

O problema de analisar testes de sobrevivência acelerados, considerando somente uma relação estresse-reposta, tem sido tema de pesquisa para vários autores.

Uma extensa bibliografia de aplicações desses testes pode ser encontrada em Nelson (1974).

Quando a distribuição dos tempos de sobrevivência dos componentes é Exponencial e os dados são não censurados (completos), Nelson (1972c) descreve métodos gráficos para a estimação dos parâmetros do modelo de Lei de Potência Inversa. Com dados sob o esquema de censura de tipo II (ver por exemplo, Lawless, 1982), Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974) determinam os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros dos modelos Potência, Arrhenius e Eyring com uma variável estresse, obtendo estimadores assintoticamente independentes, e um estimador não-viciado para o tempo médio de sobrevivência, θ_i , sob o i -ésimo nível de estresse. Também, sugerem a obtenção dos limites de confiança para esses parâmetros via função de verossimilhança relativa maximizada (ver por

exemplo, Kalbfleisch, 1985). Além disso, determinam os estimadores de mínimos quadrados para os parâmetros do modelo de Eyring generalizado e discutem estratégias de planejamento de experimentos acelerados.

Assumindo uma relação estresse-resposta que generaliza os modelos Potência e Arrhenius, uma distribuição Exponencial, e dados sob esquema de censura de tipo II, Yum e Kim (1990) apresentam um procedimento de planejamento amostral, através do qual determinam o número de falhas requerido em um determinado nível de estresse que será usado em um experimento acelerado com dois níveis de estresse maiores que o usual.

Com dados sob esquema de censura de tipo I ou II (ver por exemplo, Lawless, 1982), e uma relação estresse-resposta que generaliza os modelos mais utilizados na prática que consideram uma única variável estresse, Barbosa e Louzada Neto (1991a) obtêm uma análise geral para testes acelerados via Modelos Lineares Generalizados (ver por exemplo, McCullagh e Nelder, 1989).

Louzada Neto e Rodrigues (1991) estudam o efeito da reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) na inferência sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , de um determinado componente, sob o nível usual de estresse, assumindo uma distribuição Exponencial, dados sob esquema de censura de tipo II e quando a relação estresse-resposta é representada pelo modelo Potência; e mostram que a função de verossimilhança maximizada para esse parâmetro é invariante sobre esse tipo de reparametrização.

Uma solução Bayesiana para o problema de estimação dos parâmetros do modelo Potência, assumindo uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência e dados sob esquema de censura de tipo II, pode ser encontrada em Achcar e Dias (1990b) que obtêm a densidade a posteriori marginal para o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , e apresentam algumas sugestões sobre a determinação do número

de falhas requerido em um experimento acelerado.

Em Rodrigues, Achcar e Louzada Neto (1990) encontramos uma expressão em “forma fechada” para a moda da densidade a posteriori de θ_1 , obtida via reparametrização Ortogonal, considerando o modelo de Potência.

Achcar (1990a) desenvolve um procedimento de controle de qualidade usando densidades preditivas (ver por exemplo, Aichinson e Dunsmore, 1975) quando o modelo de Potência é adequado aos dados, assumindo uma distribuição Exponencial. Através do procedimento obtido, considerando um determinado nível de estresse fixo, obtém o tempo requerido de experimentação em um teste acelerado, e também, o nível de estresse, sob o qual o teste deve ser feito, considerando o tempo de experimentação fixo.

Considerando uma reparametrização ortogonal, Rodrigues (1991) obtém a densidade preditiva de uma observação futura sob o nível usual de estresse.

Vários autores tem abordado em suas pesquisas testes de sobrevivência acelerados, considerando outras distribuições para os tempos de sobrevivência.

Entre outros, considerando uma distribuição de Weibull, podemos citar Nelson (1970) que encontra os estimadores de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo Potência quando os dados são completos; Mann (1972) que discute uma estratégia de planejamento para esses testes assumindo que o logaritmo do parâmetro de escala da distribuição de Weibull é uma função polinomial de grau conhecido do inverso do nível de estresse, e que o parâmetro de forma não depende desse nível. Pelo planejamento obtido, especifica o número e quais níveis de estresse devem ser usados no teste, também, qual a proporção de elementos da amostra total que deve ser alocada aleatoriamente em cada nível de estresse.

Simulando experimentos fatoriais como número de níveis de estresse, porcentagens de censura e tamanhos de amostras diferentes, Bugaighis (1988) compara os estimadores de máxima verossimilhança com os melhores estimadores lineares não-viciados dos modelos de Potência e Arrhenius, quando a distribuição de sobrevivência é Weibull, de acordo com o critério do erro médio quadrático, e observa que, em geral, os dois tipos de estimadores tem eficiência equivalente, com excessão nas situações onde o número de censuras é muito grande, deixando algum nível da variável estresse com duas ou menos observações. Nestas situações, os estimadores de máxima verossimilhança são claramente melhores que os melhores estimadores lineares não-viciados.

Considerando também os modelos de Potência e Arrhenius e uma distribuição de Weibull, Wiell e Meeker (1990) mostram, através de simulação, que em um teste de sobrevivência acelerado, intervalos de confiança obtidos via teste da razão de verossimilhança são melhores que os intervalos de confiança baseados na teoria Normal assintótica.

Barbosa e Louzada Neto (1991b), utilizam Modelos Lineares Generalizados e técnicas de inferência relacionadas e determinam inferências pontuais e por intervalo para o tempo médio de sobrevivência de uma unidade sob a presença de dados censurados, considerando uma distribuição de sobrevivência de Weibull e uma relação estresse-resposta geral que tem como casos particulares os modelos Potência, Arrhenius, Eyring com uma variável estresse e Eyring generalizado.

Assumindo uma distribuição Normal ou Log-Normal para os tempos de sobrevivência, em uma série de artigos, Nelson (1971, 1972a, 1972b) determina os estimadores gráficos, de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo de Arrhenius quando todos os tempos de falha são conhecidos, assumindo que a média do logarítmo do tempo de falha é linear na variável estresse e

que a variância é independente desta variável. Também discute a utilização de alguns critérios relacionados a planejamento de experimentos acelerados, em particular, a minimização da variância do estimador do tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse.

Achcar e Rosales (1991c) obtém uma análise Bayesiana para testes acelerados considerando uma relação estresse-resposta linear no inverso da média da distribuição Gaussiana Inversa. Também propõe alguns critérios para serem usados em problemas de controle de qualidade.

Existem várias situações onde mais que uma relação estresse-resposta é considerada. Nestes casos, o tempo de sobrevivência de um determinado componente depende de uma causa de falha entre outras causas importantes. Entre outros, Klein e Basu (1981) descrevem uma análise de testes de sobrevivência acelerados de sistemas em série (ver por exemplo, Bain, 1978), assumindo uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência dos componentes com parâmetro de forma diferente para cada um dos componentes do sistema, dados sob o esquema de censura de tipo I, II ou progressiva (ver por exemplo, Lawless, 1982), e um modelo geral que inclui os modelos-padrões: Potência, Arrhenius e Eyring com uma variável estresse.

Vários autores tem analisado testes de sobrevivência acelerados no enfoque não-paramétrico. Entre outros, podemos citar, Shaked, Zinner e Ball (1979), Shaked e Singpurwalla (1982), Basu e Ebrahimi (1982).

Em muitas situações, dispomos somente de uma unidade para ser testada. Também, o componente manufaturado é feito para suportar um conhecido e especificado nível de estresse. Supondo que no teste verifica-se somente a sobrevivência ou falha da unidade em um determinado nível de estresse, Martz e Waterman (1978) desenvolvem um procedimento Bayesiano para determinar o nível de estresse reque-

rindo em um teste acelerado que maximiza a probabilidade esperada do componente sobreviver no nível de estresse conhecido.

Até o momento, uma suposição básica é termos distribuição de sobrevivência com mesma forma em todos os níveis de estresse. Porém, em muitas aplicações práticas, esta suposição pode não ser apropriada, e isto implica que os diferentes níveis de estresse podem ter diferentes efeitos no mecanismo causador das falhas, e do ponto de vista físico, isso pode ser mais realista, além de permitir diferentes formas de distribuição de sobrevivência nos diferentes níveis de estresse. Neste contexto, Proschan e Singpurwalla (1979), não supõe distribuição de sobrevivência alguma, nem relação estresse-resposta, e propõe um modelo não-paramétrico para testes de sobrevivência acelerados, utilizando inferência Bayesiana.

Finalmente, Nelson (1990), por ser o primeiro livro inteiramente voltado para testes de sobrevivência acelerados, é uma bibliografia indispensável, onde encontramos vários tópicos relacionados a esse tema. Entre outros, modelos para testes de sobrevivência com estresse constante, análises gráficas, de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança, planejamento de experimentos acelerados, modelos de sobrevivência com riscos competitivos, etc.

Nesta dissertação, consideramos as distribuições Exponencial e de Weibull para os tempos de sobrevivência dos componentes, e dados sob esquema de censura tipo II.

Apresentamos, no Capítulo 2, uma análise clássica do problema de inferência em testes de sobrevivência acelerados considerando o modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) e uma distribuição de sobrevivência Exponencial, e discutimos a ineficiência dos métodos tradicionais de estimação por intervalo baseados na teoria Normal assintótica. Consideramos também, neste capítulo, o estudo de algumas reparametrizações dos parâmetros envolvidos com a finalidade de obtermos

melhor aproximação Normal assintótica para suas funções de verossimilhança, como por exemplo, a reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) e a logarítmica.

Considerando densidades a priori não-informativas de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) para os parâmetros envolvidos, determinamos, no Capítulo 3, uma análise Bayesiana do Modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), explorando o uso do método de Laplace para aproximação de integrais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Kass, Tierney e Kadane, 1990), quando não conseguimos as soluções analíticas explícitas para as densidades a posteriori de interesse. A precisão dos valores aproximados também é estudada.

Transformações de variáveis são adotadas com o intuito de obtermos densidades a priori não-informativas de Jeffreys localmente uniforme, que implicam, em geral, em uma boa precisão nas aproximações das densidades a posteriori marginais via método de Laplace.

Ainda considerando o modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) e uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência, desenvolvemos no Capítulo 4 um procedimento de controle de qualidade de um lote de componentes, utilizando a densidade preditiva de uma observação futura (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975), em um nível especificado de estresse.

No Capítulo 5 obtemos uma análise Bayesiana do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) assumindo uma distribuição de sobrevivência de Weibull com parâmetro de forma comum em todos os níveis de estresse. A regra multiparamétrica de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) é usada para acharmos uma densidade a priori não-informativa para os parâmetros envolvidos.

Definindo uma relação estresse-resposta geral com uma única variável estresse que inclui, como casos particulares, os modelos Potência (1.3), Arrhenius (1.4)

e Eyring com uma variável estresse (1.5), determinamos, no Capítulo 6, um procedimento Bayesiano de análise válido para os três modelos em questão, assumindo uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência dos componentes, com parâmetros de forma comum para todos os níveis de estresse.

Em todos os capítulos mencionados, sempre consideramos o nível usual da variável estresse no teste acelerado. No Capítulo 7, essa limitação é suprimida, e somente com dois níveis de estresse estritamente maiores que os usuais e uma distribuição de sobrevivência de Weibull com parâmetro de forma diferente em cada um desses dois níveis, determinamos uma análise Bayesiana da relação estresse-resposta geral definida no capítulo anterior.

No Capítulo 8, inicialmente assumindo uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência, desenvolvemos um procedimento Bayesiano de análise do modelo de Eyring generalizado (1.6). Também, obtemos uma análise Bayesiana considerando esse modelo com dois parâmetros conhecidos e uma distribuição de sobrevivência de Weibull, mostrando sua equivalência com a análise da relação estresse-resposta descrita no Capítulo 6.

Exemplos de aplicação das metodologias obtidas são desenvolvidos no Capítulo 9.

Finalmente no Capítulo 10, são apresentadas algumas conclusões e comentários sobre as perspectivas futuras de pesquisas vinculadas a testes de sobrevivência acelerados.

Devemos informar que as análises obtidas nos Capítulos de 2 a 4 podem ser encontradas em Achcar e Louzada Neto (1991a). Em Achcar e Louzada Neto (1991b) encontramos a metodologia de análise que está no Capítulo 6, e em Achcar e Louzada Neto (1990c) temos os procedimentos Bayesianos determinados no Capítulo 8, assumindo-se uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência dos

componentes.

Capítulo 2

Análise Clássica do Modelo de Eyring com uma Variável Estresse

O modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), como visto no capítulo anterior, encontra-se entre as relações estresse-resposta mais utilizadas na prática para descrever a taxa de falha de um determinado componente manufaturado em função de uma variável estresse de temperatura. Além disso, apesar de intuitivamente observarmos que as taxas de falha crescem com o uso (envelhecimento) para a maioria dos componentes, podemos assumir, em um estudo inicial, que as falhas ocorrem aleatoriamente e considerarmos a distribuição Exponencial (amplamente utilizada em confiabilidade) para expressar matematicamente o comportamento dos tempos de sobrevivência.

Neste capítulo, considerando uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência e dados sob esquema de censura tipo II (ver por exemplo, Lawless, 1982), determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), e a partir da aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, estudamos a precisão das inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob os níveis usuais de estresse. Para obtermos melhores aproximações Normais para a função de verossimilhança

dos parâmetros envolvidos, exploramos o uso de reparametrizações.

2.1 O Experimento em Testes de Sobrevida Acelerados com Dados Censurados e uma Variável Estresse

Conforme vimos no capítulo anterior, em confiabilidade, é fundamental que os experimentos sejam eficientes em relação ao seu tempo de duração e consequentemente ao seu custo. Colocando-se unidades para serem testadas sob condições aceleradas de estresse essas exigências são de certa forma satisfeitas. Além disso, podemos considerar dados sob algum esquema de censura, o que reduz ainda mais o tempo e o custo de experimentação, isto é, o experimento termina num tempo T_0 , quando observamos uma dada proporção q de falhas das unidades em testes, num dado nível i de estresse.

Formalmente, considerando k níveis aleatorizados de uma variável estresse $V \in \underline{S}$, incluindo o nível usual de funcionamento, colocamos n_i unidades em teste no i -ésimo nível V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, e término do experimento ocorre quando uma quantidade pré-fixada $r_i (< n_i)$ das unidades falham, o que caracteriza dados sob um esquema de censura tipo II (ver por exemplo, Lawless, 1982). Dessa forma, denotando por T o tempo de sobrevivência de uma unidade em teste, temos $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$ tempos observados ordenados (observações não censuradas) dentre as n_i unidades no i -ésimo nível de estresse, e $n_i - r_i$ observações censuradas iguais a t_{ir_i} , como podemos observar na Tabela 2.1, onde V_1 é o nível usual de funcionamento do componente.

i	V_i	n_i	r_i	DADOS NÃO CENSURADOS
1	$V_1^{(*)}$	n_1	r_1	$t_{11}^{(**)}, t_{12}^{(**)}, \dots, t_{1r_1}^{(**)}$
2	V_2	n_2	r_2	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	V_k	n_k	r_k	$t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kr_k}$

(*) Nível usual da variável física de estresse.

(**) Tempos de sobrevivência dos n_i componentes em teste sob o nível usual de estresse da variável V .

Tabela 2.1: Esquema de um experimento utilizado em testes de sobrevivência acelerados com uma variável estresse e dados com censuras de tipo II.

2.2 Formulação do Modelo

A modelagem descrita nesta seção será definida a partir da relação estresse-resposta representada pelo modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) e a distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência dos componentes, considerando o experimento acelerado formulado na seção anterior (ver Tabela 2.1).

Seja T uma variável aleatória não-negativa denotando o tempo de sobrevivência de um componente com uma distribuição Exponencial com função densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por,

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\}, \quad (2.1)$$

onde $\lambda_i > 0$ é um parâmetro desconhecido representando a taxa constante de falha no i -ésimo nível de estresse $V_i, i = 1, 2, \dots, k$.

O tempo médio de sobrevivência sob o nível de estresse V_i é dado por,

$$\theta_i = 1/\lambda_i, \quad (2.2)$$

obtido calculando-se a esperança do tempo de sobrevivência, $E(T)$.

Assumindo um esquema de censura de tipo II para os dados (ver por exemplo, Lawless, 1982), a função de verossimilhança para λ_i , sob o i -ésimo nível de estresse V_i , é dada por,

$$L_i(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}, \lambda_i) S^{n_i-r_i}(t_{ir_i}, \lambda_i), \quad (2.3)$$

onde $f(t_{ij}, \lambda_i)$ é a f.d.p. (2.1) que representa a contribuição de uma observação não censurada à função de verossimilhança, e $S(t_{ir_i}, \lambda_i) = P(T \geq t_{ir_i}) = \int_{t_{ir_i}}^{\infty} \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\} dt = \exp\{-\lambda_i t_{ir_i}\}$ é a função de confiabilidade que expressa a contribuição de um componente (observação) censurado.

Desenvolvendo (2.3) obtemos,

$$L_i(\lambda_i) = \left[\prod_{j=1}^{r_i} \lambda_i e^{-\lambda_i t_{ij}} \right] \left[e^{-\lambda_i t_{ir_i}} \right]^{n_i-r_i} = \lambda_i^{r_i} \exp \left\{ -\lambda_i \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i} \right] \right\}.$$

Definindo $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i}$, temos:

$$L_i(\lambda_i) = \lambda_i^{r_i} \exp \{-\lambda_i A_i\}. \quad (2.4)$$

Com dados sob k níveis aleatorizados de estresse, $V_1, V_2, \dots, V_k$, a função de verossimilhança para $\underline{\lambda}' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ é dada por,

$$L(\underline{\lambda}) = \prod_{i=1}^k \{ \lambda_i^{r_i} \exp [-\lambda_i A_i] \}. \quad (2.5)$$

Considere o modelo de Eyring (1.5) onde a taxa de falha λ relaciona-se com o i -ésimo nível da variável estresse V através da relação estresse-resposta,

$$\lambda_i = V_i \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.5) obtemos a função de verossimilhança para α e β , dada por,

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^k \{V_i \exp [\alpha - \beta/V_i]\}^{r_i} \cdot \exp \{-V_i A_i e^{\alpha - \beta/V_i}\}.$$

Daí temos,

$$L(\alpha, \beta) \propto \exp \left\{ \alpha r - \beta a_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i} \right\}, \quad (2.7)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número total de falhas observadas e $a_1 = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}$.

2.3 Estimadores de Máxima Verossimilhança para os Parâmetros α e β

A partir do momento em que observamos os dados – no nosso caso, tempos de sobrevivência dos componentes em teste – toda a informação sobre os parâmetros está contida na função log-verossimilhança.

O logaritmo da função de verossimilhança para α e β é dado por,

$$\ell(\alpha, \beta) \propto \alpha r - \beta a_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}. \quad (2.8)$$

As primeiras derivadas de $\ell(\alpha, \beta)$ com respeito a α e β são dadas por,

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -a_1 + e^\alpha \sum_{i=1}^k A_i e^{-\beta/V_i}. \quad (2.10)$$

Igualando a zero as primeiras derivadas (2.9) e (2.10), e resolvendo o sistema de equações em α e β , obtemos os estimadores de máxima verossimilhança de α e β dados por,

$$\hat{\alpha} = \log \left[\frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\hat{\beta}/V_i}} \right], \quad (2.11)$$

e $\hat{\beta}$ que é a solução da equação

$$\frac{\sum_{i=1}^k A_i e^{-\hat{\beta}/V_i}}{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\hat{\beta}/V_i}} = \frac{a_1}{r}. \quad (2.12)$$

Como as equações (2.11) e (2.12) são não-lineares, suas soluções podem ser obtidas numericamente.

2.4 Inferência Sobre os Parâmetros α e β ou Funções dos Mesmos

Para inferências sobre os parâmetros de um determinado modelo ou funções dos mesmos, usualmente, utiliza-se a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver por exemplo, Mood, Graybill e Boes, 1974). Assim consideramos,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \stackrel{a}{\sim} N\{(\alpha, \beta); I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\}, \quad (2.13)$$

onde $I(\alpha, \beta)$ é a matriz de informação de Fisher dada pelas esperanças das segundas derivadas parciais de $\ell(\alpha, \beta)$ com respeito a α e β a menos do sinal (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973).

As segundas derivadas parciais da função log-verossimilhança $\ell(\alpha, \beta)$ (2.8) com respeito a α e β são dadas por,

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = -e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = e^\alpha \sum_{i=1}^k A_i e^{-\beta/V_i}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} = -e^\alpha \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{V_i} e^{-\beta/V_i}. \quad (2.16)$$

Como estamos assumindo dados sob esquema de censura de tipo II, os r_i são fixos, $i = 1, 2, \dots, k$, $E(A_i) = \frac{r_i}{\lambda_i}$, onde λ_i é dado em (2.6), isto é,

$$E(A_i) = \frac{r_i e^{\beta/V_i}}{V_i e^\alpha}. \quad (2.17)$$

Substituindo a expressão (2.17) em (2.14) temos,

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} \right\} = r,$$

em (2.15),

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} = -a_1,$$

e em (2.16),

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \right\} = a_2,$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $a_1 = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}$ e $a_2 = \sum_{i=1}^k \frac{r_i^2}{V_i^2}$.

Portanto, a matriz de informação de Fisher para α e β é dada por,

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} r & -a_1 \\ -a_1 & a_2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Assim, em (2.13),

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{ra_2 - a_1^2} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & r \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

isto é,

$$var(\hat{\alpha}) \cong \frac{a_2}{ra_2 - a_1^2}, var(\hat{\beta}) \cong \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \text{ e } cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \cong \frac{a_1}{ra_2 - a_1^2}.$$

Observe que os elementos da matriz (2.18) são constantes, o que implica numa boa aproximação Normal assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ (ver por exemplo, Sprott, 1973 e 1980), e as inferências sobre α e β podem ser baseadas em (2.13).

Usualmente, indústrias de várias áreas têm interesse em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível usual de funcionamento, V_1 . Um procedimento de inferência sobre esse parâmetro é a utilização do chamado método "Delta" (ver por exemplo, Miller, 1981; Apêndice 1).

Considerando as expressões (2.2) e (2.6), sob o nível de estresse usual, $V_1, \theta_1 = g(\alpha, \beta) = e^{\beta/V_1}/V_1 e^\alpha$, $\partial g/\partial \alpha = -e^{\beta/V_1}/V_1 e^\alpha$ e $\partial g/\partial \beta = e^{\beta/V_1}/V_1^2 e^\alpha$.

Pelo método "Delta", o estimador de máxima verossimilhança de $\theta_1 = g(\alpha, \beta)$ tem uma distribuição Normal assintótica, dada por,

$$\hat{\theta}_1 \stackrel{a}{\sim} N \left\{ \frac{e^{\hat{\beta}/V_1}}{V_1 e^{\hat{\alpha}}}; \hat{\sigma}_{\theta_1}^2 \right\}, \quad (2.20)$$

onde

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{a_2}{ra_2 - a_1^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}^2 + 2 \frac{a_1}{ra_2 - a_1^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} + \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}^2.$$

O estimador de máxima verossimilhança de θ_1 é dado por,

$$\hat{\theta}_1 = e^{\hat{\beta}/V_1}/V_1 e^{\hat{\alpha}}.$$

Também,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = -e^{\hat{\beta}/V_1}/V_1 e^{\hat{\alpha}} = -\hat{\theta}_1 \text{ e } \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = e^{\hat{\beta}/V_1}/V_1^2 e^{\hat{\alpha}} = \hat{\theta}_1/V_1.$$

Portanto,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{a_2 \hat{\theta}_1^2}{ra_2 - a_1^2} + \frac{r \hat{\theta}_1^2}{V_1^2 (ra_2 - a_1^2)} - 2 \frac{a_1 \hat{\theta}_1^2}{V_1 (ra_2 - a_1^2)},$$

isto é,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{\hat{\theta}_1^2}{(ra_2 - a_1^2)} \left\{ a_2 - 2 \frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2} \right\}. \quad (2.21)$$

Antes de utilizarmos a aproximação Normal assintótica (2.20), para inferências sobre θ_1 , devemos estudar com mais detalhes sua precisão, o que será feito na seção seguinte.

2.5 O Problema da Inferência sobre θ_1 Usando a Normalidade Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

O uso da aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é um dos procedimentos mais difundidos na aplicação de técnicas estatísticas em problemas práticos. É importante salientar que sempre devemos verificar se essa aproximação é viável, estudando sua precisão.

Primeiramente, podemos reescrever a função de verossimilhança (2.7), originalmente expressa em termos λ_i para a relação estresse-resposta representada pelo modelo de Eyring (2.6) com parâmetros α e β , em termos dos parâmetros θ_1 e β .

Explicitamente, de (2.2) e (2.6), sob o nível de estresse usual, $\theta_1 = e^{\beta/V_1}/V_1 e^\alpha$, isto é,

$$\alpha = \log \left\{ \frac{e^{\beta/V_1}}{\theta_1 V_1} \right\}. \quad (2.22)$$

substituindo α por (2.22) na função de verossimilhança (2.7) obtemos a função de verossimilhança para θ_1 e β , dada por,

$$L(\theta_1, \beta) \propto \left\{ \frac{e^{\beta/V_1}}{\theta_1 V_1} \right\}^r \exp \left\{ -\beta a_1 - \frac{e^{\beta/V_1}}{\theta_1 V_1} \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i} \right\},$$

isto é,

$$L(\theta_1, \beta) \propto \theta_1^{-r} \exp \left\{ -\beta \left(a_1 - \frac{r}{V_1} \right) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)} \right\}. \quad (2.23)$$

A função log-verossimilhança para θ_1 e β é dada por,

$$\ell(\theta_1, \beta) \propto -r \log \theta_1 - \beta \left(a_1 - \frac{r}{V_1} \right) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)}. \quad (2.24)$$

Derivando $\ell(\theta_1, \beta)$ com respeito a θ_1 e β , e igualando a zero, isto é, $\partial \ell / \partial \theta_1 = 0$ e $\partial \ell / \partial \beta = 0$, obtemos os estimadores de máxima verossimilhança de θ_1 e β dados por,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \exp \left\{ -\hat{\beta} \left[\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right] \right\}, \quad (2.25)$$

e $\hat{\beta}$ que é a solução da equação

$$\frac{\sum_{i=1}^k V_i A_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \exp \left\{ -\hat{\beta} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\}}{\sum_{i=1}^k V_i A_i \exp \left\{ -\hat{\beta} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\}} = \frac{a_1}{r} - \frac{1}{V_1}. \quad (2.26)$$

Por analogia ao procedimento adotado na seção (2.4), inferências sobre os parâmetros θ_1 e β são baseadas na aproximação assintótica Normal dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\beta}$, dada por,

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}) \stackrel{a}{\sim} N \left\{ (\theta_1, \beta); I^{-1}(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}) \right\}, \quad (2.27)$$

onde $I(\theta_1, \beta)$ é a matriz de informação de Fisher nos parâmetros θ_1 e β .

Calculando as segundas derivadas parciais da função log-verossimilhança (2.24) temos,

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1, \beta)}{\partial \theta_1^2} = \frac{r}{\theta_1^2} - \frac{2}{\theta_1^3} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1, \beta)}{\partial \theta_1 \partial \beta} = -\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\},$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta_1, \beta)}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)^2 \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\}.$$

Sabendo-se que $E(A_i) = r_i / \lambda_i$, $\lambda_i = V_i \exp\{\alpha - \beta/V_i\}$ e $\alpha = \log(e^{\beta/V_1} / \theta_1 V_1)$,
obtem-se,

$$E(A_i) = \frac{r_i \theta_1 V_1}{V_i \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right\}}.$$

Dessa forma, a matriz de informação de Fisher para θ_1 e β é dada por

$$I(\theta_1, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_1^2} & \frac{b_1}{\theta_1} \\ \frac{b_1}{\theta_1} & b_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde

$$b_1 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1) = a_1 - r/V_1 \text{ e } b_2 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1)^2 = a_2 - 2a_1/V_1 + r/V_1^2,$$

e em (2.27),

$$I^{-1}(\theta_1, \beta) = \frac{\theta_1^2}{r b_2 - b_1^2} \begin{bmatrix} b_2 & -\frac{b_1}{\theta_1} \\ -\frac{b_1}{\theta_1} & \frac{r}{\theta_1^2} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

A distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança para θ_1 é dada (de (2.27)) por,

$$\hat{\theta}_1 \stackrel{a}{\sim} N(\theta_1, \hat{\sigma}_{\theta_1}^2),$$

onde

$$\hat{\sigma}_{\theta_1} = \frac{b_2 \hat{\theta}_1^2}{r b_2 - b_1^2} = \frac{(a_2 - 2 \frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2}) \hat{\theta}_1^2}{r(a_2 - 2 \frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2}) - (a_1 - \frac{r}{V_1})^2}.$$

Portanto,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{\hat{\theta}_1^2}{r a_2 - a_1^2} \left\{ a_2 - 2 \frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2} \right\}. \quad (2.30)$$

Observamos que a variância assintótica de $\hat{\theta}_1$ (2.30) é igual à obtida em (2.21).

Considerando a matriz de informação de Fisher (2.28) observamos que seus elementos não são constantes (dependem de θ_1), implicando numa aproximação assintótica Normal, em geral, imprecisa para os estimadores de máxima verossimilhança de θ_1 e β para amostras pequenas e moderadas (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980). Assim, usando a aproximação Normal (2.20), obtida através do uso do método "Delta" (ver Apêndice 1), em geral, não obtemos boas inferências para θ_1 , um argumento forte para procurarmos outra parametrização, buscando uma melhor aproximação assintótica Normal da função de verossimilhança para esse parâmetro.

2.6 O Estudo de Diferentes Parametrizações

Com o objetivo de melhorarmos as inferências sobre θ_1 , consideramos nesta seção, o estudo de diferentes parametrizações visando a obtenção de funções de

verossimilhanças aproximadamente Normais.

2.6.1 Reparametrização Ortogonal: Ortogonalização em β

A reparametrização Ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) é uma reparametrização que diagonaliza a matriz de informação de Fisher para os parâmetros θ_1 e β dada em (2.28). Com isso, obtemos um estimador de β estável com respeito a θ_1 .

Para obtermos tal parametrização, transformamos os parâmetros originais θ_1 e β , onde θ_1 é o parâmetro de interesse e β o parâmetro “nuisance”, nos parâmetros ortogonais θ_1 e γ , resolvendo a equação diferencial,

$$-I_{\theta_1, \beta} = I_{\beta, \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1}, \quad (2.31)$$

onde $I_{\beta, \beta}$ e $I_{\theta_1, \beta}$ são os elementos da matriz de informação de Fisher (2.28) com respeito a β e ao produto cruzado (θ_1, β) , respectivamente.

Substituindo os elementos de (2.28) na equação diferencial (2.31), temos,

$$-\frac{b_1}{\theta_1} = b_2 \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1},$$

isto é,

$$-b_1 \frac{d\theta_1}{\theta_1} = b_2 d\beta,$$

e, uma solução é dada por,

$$-\frac{b_1}{b_2} \log(\theta_1) + c(\gamma) = \beta,$$

onde $c(\gamma)$ é uma função arbitrária de γ .

Considerando $c(\gamma) = \gamma$ temos que,

$$\beta = \gamma - \frac{b_1}{b_2} \log(\theta_1), \quad (2.32)$$

isto é,

$$\gamma = \beta + \frac{b_1}{b_2} \log(\theta_1). \quad (2.33)$$

substituindo (2.32) em (2.23), a nova função de verossimilhança em termos dos parâmetros ortogonais, θ_1 e γ , é dada por,

$$L(\theta_1, \gamma) \propto \theta_1^{-r} \exp \left\{ - \left[\gamma - \frac{b_1}{b_2} \log(\theta_1) \right] \left[a_1 - \frac{r}{V_1} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \exp \left[- \left(\gamma - \frac{b_1}{b_2} \log(\theta_1) \right) \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right] \right\}.$$

Portanto,

$$L(\theta_1, \gamma) \propto \theta_1^{\frac{b_1}{b_2} - r} \exp \left\{ - \gamma b_1 - \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\gamma \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)} \theta_1^{\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) - 1} \right\} \quad (2.34)$$

onde

$$r = \sum_{i=1}^k r_i, b_1 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1) = a_1 - r/V_1$$

e

$$b_2 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1)^2 = a_2 - 2a_1/V_1 + r/V_1^2 \left(a_1 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i \text{ e } a_2 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i^2 \right).$$

Considerando o logaritmo de (2.34), $\ell(\theta_1, \gamma)$, e as equações $\partial\ell/\partial\theta_1 = 0$ e $\partial\ell/\partial\gamma = 0$, os estimadores de máxima verossimilhança para θ_1 e γ satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left[1 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right] e^{-\gamma(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})} \hat{\theta}_1^{\frac{b_1}{b_2}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})-1} = r - \frac{b_1^2}{b_2}; \quad (2.35)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) e^{-\gamma(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})} \hat{\theta}_1^{\frac{b_1}{b_2}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})-1} = b_1. \quad (2.36)$$

Como $E(A_i) = \theta_1 V_1 r_i / V_i \exp\{-\beta(1/V_i - 1/V_1)\}$, onde $\beta = \gamma - (b_1/b_2) \log(\theta_1)$, temos,

$$E(A_i) = \frac{r_i V_1 \theta_1^{-\frac{b_1}{b_2}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})+1}}{V_i e^{-\gamma(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}}.$$

Calculando-se as segundas derivadas parciais de $\ell(\theta_1, \gamma)$, $\partial^2\ell/\partial\theta_1^2$, $\partial^2\ell/\partial\theta_1\partial\gamma$ e $\partial^2\ell/\partial\gamma^2$, e substituindo-se $E(A_i)$ dada acima, seus valores esperados a menos do sinal são dados por,

$$E \left\{ -\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1^2} \right\} = \frac{c_1}{\theta_1^2},$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= \left[\frac{b_1}{b_2} \left(a_1 - \frac{r}{V_1} \right) - r \right] + \sum_{i=1}^k r_i \left[1 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right] \left[2 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right] \\ &= r - \frac{b_1^2}{b_2}; \end{aligned}$$

$$E \left\{ \frac{-\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\gamma} \right\} = \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \left[1 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) \right] = 0;$$

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell}{\partial \gamma^2} \right\} = \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)^2 = b_2.$$

Portanto, a matriz de informação de Fisher para θ_1 e γ é dada por,

$$I(\theta_1, \gamma) = \begin{bmatrix} \frac{r-b_1^2/b_2}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Usando a aproximação assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ_1 , temos que $\hat{\theta}_1$ tem uma distribuição assintótica dada por,

$$\hat{\theta}_1 \sim N(\theta_1, \hat{\sigma}_{\theta_1}^2);$$

onde

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{b_2 \hat{\theta}_1^2}{r b_2 - b_1^2},$$

isto é,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{\hat{\theta}_1^2}{r a_2 - a_1^2} \left\{ a_2 - 2 \frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2} \right\}. \quad (2.38)$$

Observamos que, apesar de termos uma parametrização ortogonal (matriz (2.37) diagonal) (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987), como os elementos de $I(\theta_1, \gamma)$ em (2.37) não são constantes, a ortogonalização em β pode não melhorar a normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ_1 (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980).

2.6.2 Uma Proposta para Obtenção de Estimadores de α e β Assintoticamente Independentes

Visando a obtenção de estimadores assintoticamente independentes para os parâmetros α e β , Mann Schaffer e Singpurwalla (1974) sugerem um pequeno melhoramento na relação estresse-resposta (2.6), sem modificar sua característica básica, isto é, definindo,

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}}{\sum_{i=1}^k r_i} \quad (2.39)$$

como a média ponderada dos V_i^{-1} 's, o modelo de Eyring com uma variável estresse (2.6) pode ser reescrito na forma,

$$\lambda_i = V_i \exp\{\alpha - \beta(V_i^{-1} - \bar{V})\}. \quad (2.40)$$

Considerando-se a expressão (2.40) e a função de verossimilhança (2.5), a nova função de verossimilhança para α e β é dada por,

$$L(\alpha, \beta) \propto \exp \left\{ \alpha r - \beta d_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta(V_i^{-1} - \bar{V})} \right\}$$

onde $d_1 = \sum_{i=1}^k r_i (V_i^{-1} - \bar{V})$.

Observando que $d_1 = 0$, temos,

$$L(\alpha, \beta) \propto \exp \left\{ \alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta(V_i^{-1} - \bar{V})} \right\} \quad (2.41)$$

(observe que (2.41) poderia ser obtida via reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) adotada para o parâmetro α resolvendo-se a equação dife-

rencial $-I_{\alpha,\beta} = I_{\alpha,\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$, onde $I_{\alpha,\beta}$ e $I_{\alpha,\alpha}$ são os elementos de (2.18) com respeito a α e ao produto cruzado (α, β) .

Os estimadores de máxima verossimilhança de α e β , obtidos resolvendo-se as equações $\partial \ell(\alpha, \beta)/\partial \alpha = 0$ e $\partial \ell(\alpha, \beta)/\partial \beta = 0$, são dados por,

$$\hat{\alpha} = \log \left[\frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\hat{\beta}(V_i^{-1} - \bar{V})}} \right], \quad (2.42)$$

e $\hat{\beta}$ é a solução da equação

$$\sum_{i=1}^k V_i (V_i^{-1} - \bar{V}) A_i e^{-\hat{\beta}(V_i^{-1} - \bar{V})} = 0. \quad (2.43)$$

Considerando a relação estresse-resposta (2.40), obtemos,

$$E(A_i) = \frac{r_i \exp\{\beta(V_i^{-1} - \bar{V})\}}{V_i e^{\alpha}}.$$

As esperanças das segundas derivadas parciais $\partial^2 \ell(\alpha, \beta)/\partial \alpha^2$, $\partial^2 \ell(\alpha, \beta)/\partial \alpha \partial \beta$ e $\partial^2 \ell(\alpha, \beta)/\partial \beta^2$, a menos do sinal, são dadas por,

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \right\} = r;$$

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} = - \sum_{i=1}^k r_i (V_i^{-1} - \bar{V}) = 0;$$

e

$$E \left\{ \frac{-\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \right\} = \sum_{i=1}^k r_i (V_i^{-1} - \bar{V})^2 = d_1 = a_2 - \frac{a_1^2}{r}.$$

A matriz de informação de Fisher com respeito a α e β é dada por,

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & a_2 - \frac{a_1^2}{r} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Podemos observar que a matriz (2.44) é diagonal e constante, dessa forma, os parâmetros são ortogonais e os estimadores de máxima verossimilhança de α e β são distribuídos assintoticamente como variáveis aleatórias Normais (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980), isto é, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são assintoticamente independentes. Assim,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \sim N\{(\alpha, \beta); I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\},$$

onde

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \end{bmatrix},$$

isto é, $var(\hat{\alpha}) \cong 1/r$, $var(\hat{\beta}) \cong r/(ra_2 - a_1^2)$ e $cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \cong 0$.

Como o objetivo é inferir sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível de estresse usual, V_1 , de (2.40), $\theta_1 = g(\alpha, \beta) = \exp\{\beta(V_1^{-1} - \bar{V})\}/V_1 e^\alpha$, $\partial g/\partial \alpha = -\exp\{\beta(V_1^{-1} - \bar{V})\}/V_1 e^\alpha$ e $\partial g/\partial \beta = (V_1^{-1} - \bar{V}) \exp\{\beta(V_1^{-1} - \bar{V})\}/V_1 e^\alpha$. Pelo método "Delta" (ver por exemplo, Miller, 1981; Apêndice 1), o estimador de máxima verossimilhança de $\theta_1 = g(\alpha, \beta)$ tem uma distribuição assintótica dada por,

$$\hat{\theta}_1 \sim N\{\theta_1, \hat{\sigma}_{\theta_1}^2\},$$

onde

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = (1/r)(\partial g/\partial \alpha)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}^2 + (r/(ra_2 - a_1^2))(\partial g/\partial \beta)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}^2, \text{ mas,}$$

$$(\partial g/\partial \alpha)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = -\hat{\theta}_1, \text{ e } (\partial g/\partial \beta)_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = (V_1^{-1} - \bar{V})\hat{\theta}_1.$$

Daí,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{\theta_1^2}{ra_2 - a_1^2} \left\{ a_2 - \frac{a_1^2}{r} + r(V_1^{-1} - \bar{V})^2 \right\}.$$

Observando que $\bar{V} = a_1/r$,

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \frac{\theta_1^2}{ra_2 - a_1^2} \left\{ a_2 + \frac{r}{V_1^2} - 2\frac{a_1}{V_1} \right\}. \quad (2.45)$$

Para verificar se é boa a precisão da aproximação Normal assintótica do estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro θ_1 considerando-se a sugestão de Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974) (ver (2.39)), reescrevemos a função de verossimilhança de α e β (2.41) em termos dos parâmetros θ_1 e β , isto é, considerando-se a expressão (2.40) sob o nível de estresse usual, V_1 , obtemos,

$$\alpha = \log \left\{ \frac{e^{\beta(V_1^{-1} - \bar{V})}}{\theta_1 V_1} \right\}.$$

Substituindo α dado acima em (2.41) obtemos a expressão da função de verossimilhança para $\theta_1 e \beta$ igual a expressão (2.23), isto é,

$$L(\theta_1, \beta) \propto \theta_1^{-r} \exp \left\{ -\beta(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})} \right\}.$$

Dessa forma, como discutido na seção 2.5, a aproximação Normal assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$, obtida utilizando-se o método "Delta" (ver Apêndice 1) não terá boa precisão.

O fato é que, para todas as parametrizações adotadas, encontramos a mesma variância assintótica, $\hat{\sigma}_{\theta_1}^2$ – ver (2.21), (2.30), (2.38) e (2.45) – baseada na aproximação Normal assintótica do estimador de máxima verossimilhança para θ_1 . Isto significa que, se a aproximação não for precisa, as inferências sobre θ_1 serão ruins, independentemente da parametrização considerada. Também observamos que uma boa aproximação Normal assintótica para a função de verossimilhança para α e β não implica em boa aproximação Normal para o estimador de verossimilhança de θ_1 (função não-linear de α e β) sendo necessário muito cuidado em utilizá-la nas inferências sobre esse parâmetro.

2.6.3 Reparametrização Logarítmica em θ_1

Considerando a função de verossimilhança para θ_1 e β (2.23) e a reparametrização $\delta = \log \theta_1$, isto é, $\theta_1 = e^\delta$, a função de verossimilhança na parametrização δ e β é dada por,

$$L(\delta, \beta) \propto e^{-\delta r} \exp \left\{ -\beta \left(a_1 - \frac{r}{V_1} \right) - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)} \right\}. \quad (2.46)$$

Resolvendo as equações $\partial \ell(\delta, \beta) / \partial \delta = 0$ e $\partial \ell(\delta, \beta) / \partial \beta = 0$ com respeito a δ e β , obtemos os estimadores de máxima verossimilhança

$$\hat{\delta} = \log \left[\frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\hat{\beta} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)}}{r} \right] \quad (2.47)$$

e $\hat{\beta}$ que é a solução da equação

$$\frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right) e^{-\hat{\beta} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)}}{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\hat{\beta} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} \right)}} = \frac{a_1}{r} - \frac{1}{V_1}. \quad (2.48)$$

Como $E(A_i) = r_i V_1 e^{\delta} / V_i \exp\{-\beta(1/V_i - 1/V_1)\}$, a matriz de informação de Fisher para δ e β é dada por,

$$I(\delta, \beta) = \begin{bmatrix} r & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

onde, $b_1 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1)$ e $b_2 = \sum_{i=1}^k r_i (1/V_i - 1/V_1)^2$.

Os elementos da matriz (2.49) são constantes. Portanto, a aproximação Normal assintótica para a função de verossimilhança para δ e β tem boa precisão (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980).

Daí, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\delta}$, tem uma distribuição assintótica dada por,

$$\hat{\delta} \sim N(\delta, \hat{\sigma}_{\delta}^2), \quad (2.50)$$

onde $\hat{\sigma}_{\delta}^2$ é o elemento da inversa da matriz $I(\delta, \beta)$, em (2.49), com respeito a δ , isto é,

$$\hat{\sigma}_{\delta}^2 = \frac{b_2}{rb_2 - b_1^2} = \frac{1}{ra_2 - a_1^2} \left(a_2 - 2\frac{a_1}{V_1} + \frac{r}{V_1^2} \right), \quad (2.51)$$

e inferências baseadas em (2.50) terão boa precisão.

Considerando o nosso objetivo inicial, ou seja, obtenção de uma parametrização onde a aproximação Normal assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros envolvidos tenha boa precisão, o estudo estaria finalizado. Porém uma parametrização desejável é aquela que propicia, além de uma boa aproximação Normal assintótica da função de verossimilhança dos parâmetros envolvidos, parâmetros ortogonais (não correlacionados), isto é, uma parametrização assintoticamente independente.

Na seção seguinte essa parametrização é obtida via reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) associada a uma reparametrização logarítmica.

2.6.4 Parametrização Assintoticamente Independente

Para obtermos uma parametrização assintoticamente independente, inicialmente exploraremos o uso da reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) para ortogonalizar o parâmetro θ_1 , isto é, neste caso, consideramos β o parâmetro de interesse e θ_1 o parâmetro “nuisance”, e posteriormente aplicaremos uma reparametrização logarítmica no parâmetro ortogonal obtido.

A ortogonalização em θ_1 é caracterizada pela transformação dos parâmetros originais θ_1 e β , nos parâmetros ortogonais φ e β .

Essa reparametrização é obtida resolvendo-se a equação diferencial,

$$-I_{\theta_1, \beta} = I_{\theta_1, \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}, \quad (2.52)$$

onde I_{θ_1, θ_1} e $I_{\theta_1, \beta}$ são os elementos da matriz de informação de Fisher (2.28) com respeito a θ_1 e do produto cruzado (θ_1, β) , respectivamente.

Primeiramente podemos observar que a função de verossimilhança para θ_1 e β (2.23) pode ser reescrita na forma,

$$L(\theta_1, \beta) \propto \theta_1^{-r} \exp \left\{ \beta \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} \right) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} \right)} \right\},$$

isto é, definindo

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} \right)}{\sum_{i=1}^k r_i}$$

como a média ponderada dos $\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} \right)$'s ,

$$L(\theta_1, \beta) \propto \theta_1^{-r} \exp \left\{ \beta r \bar{V} - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} \right)} \right\}. \quad (253)$$

Analogamente, reescrevemos os elementos da matriz de informação de Fisher (2.28) em função de $\bar{V}$,

$$I(\theta_1, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_1^2} & -\frac{r\bar{V}}{\theta_1} \\ -\frac{r\bar{V}}{\theta_1} & b_2 \end{bmatrix}. \quad (254)$$

Substituindo os elementos de (2.54) na equação diferencial (2.52), temos,

$$\bar{V} d\beta = \frac{d\theta_1}{\theta_1}.$$

Uma solução dessa equação diferencial é dada por $\bar{V} \beta = \log(\theta_1) + c(\varphi)$, onde $c(\varphi)$ é uma função arbitrária de φ .

Considerando $c(\varphi) = \log\left(\frac{1}{\varphi}\right)$ obtemos,

$$\theta_1 = \varphi e^{\beta \bar{V}}. \quad (2.55)$$

Como, de (2.2) e (2.6) sob o nível usual de estresse V_1 , $\theta_1^{-1} = V_1 \exp\{\alpha - \frac{\beta}{V_1}\}$, temos que,

$$\varphi = \frac{e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \bar{V})}}{V_1 e^\alpha}, \quad (2.56)$$

e α pode ser escrito na forma,

$$\alpha = \log \left\{ \frac{e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \bar{V})}}{V_1 \varphi} \right\}. \quad (2.57)$$

Substituindo a expressão (2.57) na função de verossimilhança (2.7) obtemos a função de verossimilhança para os parâmetros ortogonais, φ e β , dada por,

$$L(\varphi, \beta) \propto \varphi^{-r} \exp \left\{ -\frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})} \right\}. \quad (2.58)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para φ e β são dados por,

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}}{r} \quad (2.59)$$

e $\hat{\beta}$ é a solução da equação

$$\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V} \right) e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})} = 0. \quad (2.60)$$

A matriz de informação de Fisher com respeito dos parâmetros φ e β é dada por,

$$I(\varphi, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\varphi^2} & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

onde $e_1 = \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V} \right)^2$.

Como discutido em Cox e Reid (1987), o estimador de β obtido em (2.60) é estável com respeito a φ . Dessa forma, fazendo $\beta = \hat{\beta}$, de (2.55), temos que,

$$\theta_1 = \varphi e^{\bar{V}\hat{\beta}} \quad (2.62)$$

(função um a um de φ e θ_1).

Podemos observar que através da reparametrização ortogonal adotada para o parâmetro θ_1 um primeiro passo foi dado com relação à obtenção de uma parametrização assintoticamente independente, isto é, a matriz (2.61) é diagonal, implicando em uma parametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987). Porém, inferências sobre os parâmetros φ e β via aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança não terão boa precisão (os elementos de (2.61) não são constantes). Para solucionar esse problema, consideramos a reparametrização logarítmica, isto é, $\psi = \log \varphi$ ($\varphi = e^\psi$).

Considerando $\varphi = e^\psi$ e a função de verossimilhança (2.58), obtemos a função de verossimilhança para ψ e β , dada por,

$$L(\psi, \beta) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V} \right)} \right\}. \quad (2.63)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para ψ e β são dados por,

$$\hat{\psi} = \log \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}}{r} \right\}, \quad (2.64)$$

e $\hat{\beta}$ é a solução da equação

$$\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V} \right) e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})} = 0. \quad (2.65)$$

A matriz de informação de Fisher para ψ e β é dada por,

$$I(\psi, \beta) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

onde e_1 é dado em (2.61).

Como os elementos de $I(\psi, \beta)$ são constantes, uma boa precisão da aproximação Normal assintótica da função de verossimilhança (2.63) está garantida. Além disso, $I(\psi, \beta)$ é uma matriz diagonal o que implica em ortogonalidade entre os parâmetros. Dessa forma, os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\psi}$ e $\hat{\beta}$ são assintoticamente independentes.

Portanto, inferências sobre ψ podem ser baseadas na aproximação Normal assintótica,

$$\hat{\psi} \stackrel{a}{\sim} N(\psi, I^{-1}(\psi)), \quad (2.67)$$

onde $I^{-1}(\psi) = \frac{1}{r}$ é o elemento da matriz inversa de $I(\psi, \beta)$ com respeito a ψ , dada em (2.66). Também como $\varphi = e^\psi$, de (2.62), temos,

$$\theta_1 = e^\psi e^{\hat{\beta}\bar{V}}, \quad (2.68)$$

Daí considerando-se o estimador de máxima verossimilhança de ψ (2.64), o estimador de máxima verossimilhança de θ_1 é dado por,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}}{r}, \quad (2.69)$$

onde $\hat{\beta}$ é a solução da equação (2.65). Observe a existência de igualdade entre as expressões (2.25) e (2.69).

2.6.5 Retrospecto das Parametrizações Adotadas

Para resumir as parametrizações estudadas neste capítulo construímos o Quadro 2.1 onde podemos observar que tanto a utilização do método “Delta” quanto o uso da reparametrização ortogonal não têm efeito no sentido de proporcionar uma aproximação Normal assintótica precisa dos estimadores de máxima verossimilhança, mesmo sabendo que nessas últimas os parâmetros envolvidos são não correlacionados. Já Considerando uma reparametrização logarítmica para o parâmetro θ_1 conseguimos obter boa precisão assintótica. Porém, é através da ortogonalização adotada para o parâmetro θ_1 e da aplicação de uma reparametrização logarítmica no parâmetro ortogonal obtido que conseguimos uma parametrização assintoticamente independente.

Parame- trização Adotada	Matriz de Informação de Fisher	Reparametrização	Efeito da Reparametrização	
			Boa Aprox. Ortogonalidade	Normal Assint.
(θ_1, β)	$I(\theta_1, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_1^2} & \frac{b_1}{\theta_1} \\ \frac{b_1}{\theta_1} & b_2 \end{bmatrix}$	$\left(\theta_1 = \frac{e^{\frac{\beta}{V_1}}}{V_1 e^{\alpha}}, \beta \right)^{(*)}$	Não	Não
		$\left(\theta_1 = \frac{e^{\beta(V_1^{-1} - \bar{V})}}{V_1 e^{\alpha}}, \beta \right)^{(*)}$ (modificação sugerida por Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974)	Não	Não
(θ_1, γ)	$I(\theta_1, \gamma) = \begin{bmatrix} \frac{r - b_1^2/b_2}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$	$(\theta_1, \gamma = \beta + \frac{b_1}{b_2} \log \theta_1)$ (Ortogonalização em β)	Sim	Não
(δ, β)	$I(\delta, \beta) = \begin{bmatrix} r & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$	$(\delta = \log \theta_1, \beta)$ (Logarítmica em θ_1)	Não	Sim
(φ, β)	$I = (\varphi, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\varphi^2} & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$	$(\varphi = \theta_1 e^{-\beta \bar{V}}, \beta)$ (Ortogonalização em θ_1)	Sim	Não
(ψ, β)	$I(\psi, \beta) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$	$(\psi = \log \varphi, \beta)$ (Logarítmica em φ)	Sim	Sim

(*) Uso do método "Delta".

Quadro 2.1: Efeito das parametrizações adotadas.

Capítulo 3

Uma Análise Bayesiana do Modelo de Eyring com uma Variável Estresse

Procedimentos alternativos de análise estatística que podem simplificar as interpretações e conclusões de vários problemas práticos consistem dos métodos Bayesianos (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973; Press, 1989).

Neste contexto, assumindo dados sob esquema de censuras de tipo II (ver exemplo, Lawless, 1982), uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência e uma densidade a priori não-informativa de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) para os parâmetros do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), desenvolvemos, neste Capítulo uma análise Bayesiana, usando o método de Laplace para aproximar integrais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Kass, Tierney e Kadane, 1990) quando não conseguimos achar soluções analíticas explícitas para as densidades a posteriori marginais de interesse. Também estudamos a precisão dos valores aproximados (ver por exemplo, Achcar, 1988 e 1989; Achcar e Smith, 1990d) e exploramos o uso de algumas reparametrizações.

3.1 Densidade a Priori Não-Informativa para α e β

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros α e β , consideramos a densidade a priori não-informativa de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), dada por,

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \{\det I(\alpha, \beta)\}^{1/2},$$

onde $I(\alpha, \beta)$ é a matriz de informação de Fisher para α e β (2.18).

Observando que, $\det I(\alpha, \beta) = ra_2 - a_1^2$, temos,

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \text{constante}, \quad (3.1)$$

onde $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

3.2 Densidade a Posteriori Conjunta para α e β

Considerando a priori não-informativa (3.1) e a função de verossimilhança (2.7), a densidade a posteriori conjunta para α e β é dada por (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973),

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \pi(\alpha, \beta) L(\alpha, \beta),$$

isto é,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \exp \{ \alpha r - \beta a_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i} \}, \quad (3.2)$$

onde $-\infty < \alpha, \beta < \infty$, $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número total de falhas observadas e $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i$.

3.3 Densidades a Posteriori Marginais para α e β

Em Inferência Bayesiana, inferências são tipicamente baseadas nas densidades a posteriori marginais dos parâmetros envolvidos.

Nesta seção explicitamos as densidades para os parâmetros do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), α e β .

3.3.1 Densidade a Posteriori Marginal para β

A densidade a posteriori marginal para β é obtida integrando-se a densidade a posteriori conjunta (3.2) com respeito a α , isto é,

$$\begin{aligned}\pi(\beta/dados) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\alpha, \beta/dados) d\alpha \\ &\propto e^{-\beta a_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha r} \exp\left\{-e^{\alpha} \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\right\} d\alpha.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Para resolver (3.3), considere a transformação $u = e^{\alpha}$. Como $d\alpha = du/u$,

$$\pi(\beta/dados) \propto e^{-\beta a_1} \int_0^{\infty} u^{r-1} \exp\left\{-u \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\right\} du.$$

Observando que,

$$\int_0^\infty u^{r-1} \exp\{-u \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\} du = \frac{\Gamma(r)}{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}$$

(ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), a densidade a posteriori marginal para β é dada por,

$$\pi(\beta/dados) \propto \frac{e^{-\beta a_1}}{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}, \quad (3.4)$$

onde $-\infty < \beta < \infty$.

3.3.2 Densidade a Posteriori Marginal para α

Integrando a densidade a posteriori conjunta (3.2) com respeito a β , obtemos a densidade a posteriori marginal para α dada por,

$$\pi(\alpha/dados) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\alpha, \beta/dados) d\beta,$$

isto é,

$$\pi(\alpha/dados) \propto e^{\alpha r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_\alpha(\beta)} d\beta, \quad (3.5)$$

onde $-nh_\alpha(\beta) = -\beta a_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}$.

Em geral, os métodos Bayesianos estão sujeitos a algumas limitações relacionadas a resolução de integrais que podem não apresentar soluções analíticas explícitas. Para resolvermos este problema, uma possibilidade é o uso de métodos

de aproximação para integrais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986).

Como não conseguimos achar uma solução analítica explícita para a densidade a posteriori marginal para α (3.5), exploramos o uso do método de Laplace para aproximação de integrais (ver exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Kass, Tierney e Kadane, 1990; Apêndice 2) – um dos métodos mais utilizados em inferência Bayesiana aproximada (ver por exemplo, Achcar, 1988).

A primeira e a segunda derivada de $-nh_\alpha(\beta)$ com respeito a β são dadas por,

$$-nh'_\alpha(\beta) = -a_1 + e^\alpha \sum_{i=1}^k A_i e^{-\beta/V_i},$$

e

$$nh''_\alpha(\beta) = -e^\alpha \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{V_i} e^{-\beta/V_i},$$

respectivamente.

Usando o método de Laplace completamente exponencial para aproximação de integrais (ver Apêndice 2) obtemos a densidade a posteriori marginal aproximada para α dada por,

$$\pi(\alpha/dados) \propto \frac{\exp\{\alpha(r-1/2) - \hat{\beta}a_1 - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\hat{\beta}/V_i}\}}{\{\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{V_i} e^{-\hat{\beta}/V_i}\}}, \quad (3.6)$$

onde $-\infty < \alpha < \infty$ e $\hat{\beta}$ é o valor que maximiza $-nh_\alpha(\beta)$, em (3.5), para cada valor fixo de α , isto é, $-nh'_\alpha(\hat{\beta}) = 0$.

Ao utilizarmos o método de Laplace para aproximação de integrais, torna-se imprescindível questionarmos a precisão dos valores aproximados uma vez que esse método é uma aproximação Normal para densidade a posteriori de interesse (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986). Achcar (1988 e 1989) e Achcar e Smith (1990d) apresentam vários aspectos de inferência Bayesiana aproximada, observando que, em geral, aproximações de Laplace completamente exponenciais para integrais tornam-se mais precisas quando consideramos uma parametrização envolvendo uma priori não-informativa de Jeffreys localmente uniforme (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973).

Neste contexto, podemos observar que a priori não-informativa de Jeffreys (3.1) é uma priori localmente uniforme (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), o que implica, em geral, em uma boa precisão da aproximação Normal para a densidade a posteriori marginal para α (3.6).

3.4 Densidade a Posteriori para o Tempo Médio de Sobrevivência, θ_1 , sob o nível Usual de Estresse

Como visto anteriormente, usualmente, o objetivo dos pesquisadores de indústrias de várias áreas é inferir sobre $\theta_1 = 1/\lambda_1$ (tempo médio de sobrevivência do componente manufaturado sob o nível usual de funcionamento, V_1).

Considerando-se a transformação de variáveis $\theta_1 = e^{\beta/V_1}/V_1 e^\alpha$ e $\beta = \beta$, isto é, $\alpha = \beta/V_1 - \log(\theta_1) - \log(V_1)$ e $\beta = \beta$, e a densidade a posteriori conjunta (3.2), a densidade a posteriori conjunta para θ_1 e β é dada por,

$$\pi(\theta_1, \beta / \text{dados}) \propto \theta_1^{-1} \left(\frac{e^{\beta/V_1}}{\theta_1 V_1} \right)^r \exp \left\{ -\beta a_1 - \frac{e^{\beta/V_1}}{\theta_1 V_1} \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i} \right\},$$

isto é,

$$\pi(\theta_1, \beta/dados) \propto \theta_1^{-(r+1)} \exp\left\{-\beta(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}\right\}, \quad (3.7)$$

onde $\theta_1 > 0$, $-\infty < \beta < \infty$, $r = \sum_{i=1}^k r_i$ e $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i$.

Integrando a densidade a posteriori conjunta (3.7) com respeito a β , obtemos a densidade a posteriori marginal para θ_1 , dada por,

$$\pi(\theta_1/dados) \propto \theta_1^{-(r+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_{\theta_1}(\beta)} d\beta, \quad (3.8)$$

onde $-nh_{\theta_1}(\beta) = -\beta(a_1 - r/V_1) - \theta_1^{-1} \sum_{i=1}^k (V_i/V_1) A_i e^{-\beta(1/V_i - 1/V_1)}$.

Derivando $-nh_{\theta_1}(\beta)$ com respeito a β obtemos,

$$-nh'_{\theta_1}(\beta) = -(a_1 - \frac{r}{V_1}) + \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i (\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1}) e^{-\beta(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}.$$

A segunda derivada de $-nh_{\theta_1}(\beta)$ com respeito a β é dada por,

$$-nh''_{\theta_1}(\beta) = -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i (\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})^2 e^{-\beta(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}.$$

Usando o método de Laplace completamente exponencial para aproximação de integrais obtemos a densidade a posteriori marginal aproximada para θ_1 , dada por,

$$\pi(\theta_1/dados) \propto \frac{\theta_1^{-(r+1/2)} \exp\{-\hat{\beta}(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\hat{\beta}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}\}}{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i (\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})^2 \exp[-\hat{\beta}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})]\}^{1/2}}, \quad (3.9)$$

onde $\theta_1 > 0$ e β é o valor que maximiza $-nh_{\theta_1}(\beta)$, em (3.8), para cada valor fixo de θ_1 .

Considerando a matriz de informação de Fisher (2.28), a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para θ_1 e β é dada por (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973),

$$\pi(\theta_1, \beta) \propto \{\det I(\theta_1, \beta)\}^{1/2},$$

isto é,

$$\pi(\theta_1, \beta) \propto \frac{1}{\theta_1}, \quad (3.10)$$

onde $\theta_1 > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

Podemos observar que esta densidade a priori não é localmente uniforme, implicando em uma aproximação de Laplace completamente exponencial, em geral, não muito precisa para a densidade a posteriori marginal para θ_1 (3.9) (ver por exemplo, Achcar, 1988 e 1989).

De fato, esta aproximação tem sua precisão comprometida tendo em vista que, em geral, varia para mudanças na parametrização escolhida, e uma boa aproximação envolve o uso de uma parametrização adequada (ver por exemplo, Achcar e Smith, 1990d).

3.5 Reparametrização logarítmica em θ_1

Pretendendo obter uma aproximação de Laplace completamente exponencial precisa (para termos melhores inferências sobre θ_1) consideramos a transformação

de variáveis $\delta = \log(\theta_1)$ e $\beta = \beta$, isto é, $\theta_1 = e^\delta$ e $\beta = \beta$.

A densidade a priori não-informativa de Jeffreys para δ e β , considerando-se a matriz de informação de Fisher (2.49), é dada por,

$$\pi(\delta, \beta) \propto \text{constante}, \quad (3.11)$$

onde $-\infty < \delta, \beta < \infty$ (localmente uniforme), implicando em uma boa precisão da aproximação de Laplace para a densidade a posteriori de δ (ver por exemplo, Achcar, 1988 e 1989; Achcar e Smith, 1990d).

A densidade a posteriori conjunta na nova parametrização, δ e β , considerando-se a transformação $\theta_1 = e^\delta$ e $\beta = \beta$ e a densidade a posteriori conjunta (3.7), é dada por,

$$\pi(\delta, \beta / \text{dados}) \propto e^{-\delta r} \exp\left\{-\beta(a_1 - \frac{r}{V_1}) - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\beta(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}\right\}, \quad (3.12)$$

onde $-\infty < \delta, \beta < \infty$.

Portanto, a densidade a posteriori marginal para δ é dada por,

$$\pi(\delta / \text{dados}) \propto e^{-\delta r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_\delta(\beta)} d\beta, \quad (3.13)$$

onde $-nh_\delta(\beta) = -\beta(a_1 - r/V_1) - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k (V_i/V_1) e^{-\beta(1/V_i - 1/V_1)}$.

Calculando a primeira e a segunda derivada de $-nh_\delta(\beta)$ com respeito a β e usando o método de Laplace completamente exponencial para aproximação de

integrais obtemos a densidade a posteriori marginal aproximada para $\delta = \log(\theta_1)$, dada por,

$$\pi(\delta/dados) \propto \frac{e^{-\delta(r-1/2)} \exp\{-\hat{\beta}(a_1 - \frac{r}{V_1}) - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{-\hat{\beta}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}\}}{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i (\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})^2 e^{-\hat{\beta}(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1})}\}^{1/2}}, \quad (3.14)$$

onde $-\infty < \delta < \infty$ e $\hat{\beta}$ é o valor que maximiza $-nh_\delta(\beta)$ em (3.13).

Assim, encontramos uma métrica paramétrica que só muda em locação e não em escala (a densidade a priori não-informativa de Jeffreys (3.11) é localmente uniforme, ver por exemplo, Box e Tiao (1973)) condicionando à densidade a posteriori marginal para $\delta = \log(\theta_1)$, dada em (3.14), em geral, uma boa aproximação de Laplace completamente exponencial (ver por exemplo, Achcar, 1988 e 1989; Achcar e Smith, 1990d), isto é, podemos observar um aumento na precisão da aproximação usando uma parametrização que implica numa priori não-informativa de Jeffreys localmente uniforme.

3.6 O uso de uma Parametrização Independente

Como pudemos observar no Capítulo 2, a reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) adotada para o parâmetro θ_1 associada a uma reparametrização logarítmica no parâmetro ortogonal obtido possibilitou a obtenção de uma parametrização assintoticamente independente.

No contexto Bayesiano, pretendemos verificar se a utilização dessas reparametrizações proporciona alguma vantagem computacional e/ou melhoria em termos de aproximação de Laplace na obtenção da densidade a posteriori para o parâmetro de interesse θ_1 .

Considerando a matriz de informação de Fisher com respeito a ψ e β (2.66), a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para ψ e β é dada por,

$$\pi(\psi, \beta) \propto \text{constante}, \quad (3.15)$$

onde $-\infty < \psi, \beta < \infty$ (localmente uniforme).

A densidade a posteriori conjunta para ψ e β considerando-se a densidade priori (3.15) e a função de verossimilhança (2.63) é dada por,

$$\pi(\psi, \beta/\text{dados}) \propto e^{-\psi r} \exp\left\{-e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\right\}, \quad (3.16)$$

onde $-\infty < \psi, \beta < \infty$ e $\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}{r}$.

A densidade a posteriori marginal para β é dada por

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi r} \exp\left\{e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\right\} d\psi. \quad (3.17)$$

Considerando-se a transformação $u = e^{-\psi}$,

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \int_0^{\infty} u^{-(r+1)} \exp\left\{-u^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\right\} du,$$

isto é, analogamente à sub-seção 3.3.1,

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})} \right\}^{-r}, \quad (3.18)$$

onde $-\infty < \beta < \infty$.

A densidade a posteriori marginal ψ aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial é dada por ,

$$\pi(\psi/dados) \propto \frac{e^{-\psi(r-1/2)} \exp\{-e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\}}{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})^2 e^{\hat{\beta}(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\}^{1/2}}, \quad (3.19)$$

onde $-\infty < \psi < \infty$ e $\hat{\beta}$ maximiza $-nh\psi(\beta) = -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}$.

Porém, como a parametrização (ψ, β) é ortogonal (ver sub-seção 2.6.4) o estimador de β é estável com respeito ψ ; também, como maximizar (3.18) é equivalente a maximizar $-nh\psi(\beta)$ dado em (3.19), Podemos tomar $\hat{\beta} = \tilde{\beta}'$ onde $\tilde{\beta}'$ é a moda da densidade a posteriori marginal para β (3.18).

Daí,

$$\pi(\psi/dados) \propto e^{-\psi(r-1/2)} \exp\{-e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i} - \bar{V})}\}, \quad (3.20)$$

onde $-\infty < \psi < \infty$.

Na expressão (2.68), fazendo $\hat{\beta} = \tilde{\beta}'$, temos,

$$\theta_1 = e^{\psi} e^{\tilde{\beta}' \bar{V}}, \quad (3.21)$$

e a densidade a posteriori para θ_1 é dada por,

$$\pi(\theta_1/dados) = c \theta_1^{-(r+1/2)} \exp\{-\theta_1^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\}, \quad (3.22)$$

onde $c = \frac{\{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\}^{r-1/2}}{\Gamma(r-1/2)}$ (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973).

Isto é,

$$\pi(\theta_1/dados) = \frac{\{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\}^{r-1/2}}{\Gamma(r-1/2)} \theta_1^{-(r+1/2)}. \quad (3.23)$$

$$\exp\{-\theta_1^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\},$$

onde $\theta_1 > 0$ e $\tilde{\beta}'$ é a moda da densidade a posteriori (3.18) (observe que, (3.23) é uma densidade Gama), cuja moda a posteriori é dada por,

$$\tilde{\theta}_1' = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}}{r + 1/2}. \quad (3.24)$$

Podemos observar que importantes vantagens foram obtidas através das reparametrizações utilizadas, ou seja, obtemos boa aproximação de Laplace para a densidade a posteriori marginal de ψ (3.20) e facilidade computacional em seu cálculo, além disso, temos uma expressão sob “forma fechada” para moda a posteriori do parâmetro θ_1 , atribuída à ortogonalidade entre os parâmetros ψ e β .

Também, observar que (de (3.23)) a densidade a posteriori para

$$\frac{2 \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})} \right\}}{\theta_1}$$

é a densidade de uma distribuição Qui-Quadrado com $2r - 1$ graus de liberdade. Daí, um intervalo “a posteriori de maior probabilidade” (HPD) $100(1 - \gamma^*)\%$ para o tempo médio de sobrevivência θ_1 é dado por,

$$\left(\frac{2 \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}' (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}}{\chi^2_{2r-1(1-\frac{\gamma'}{2})}} ; \frac{2 \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{\tilde{\beta}' (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}}{\chi^2_{2r-1(\frac{\gamma'}{2})}} \right). \quad (3.25)$$

onde $\tilde{\beta}'$ é a moda da densidade a posteriori marginal para β (3.18) e $\chi^2_{2r-1(\frac{\gamma'}{2})}$ é o quantil da distribuição Qui-Quadrado dado por,

$$P(\chi^2_{2r-1} \leq \chi^2_{2r-1(\frac{\gamma'}{2})}) = \frac{\gamma'}{2}.$$

Observe que, apesar de termos considerado até o momento, somente o uso da reparametrização logarítmica e da reparametrização assintoticamente independente na análise Bayesiana do modelo, poderíamos considerar quaisquer das reparametrizações estudadas no Capítulo 2, sendo que as densidades a posteriori para os parâmetros envolvidos em cada uma delas podem ser obtidas facilmente de maneira análoga à descrita neste capítulo. Também, observe que uma expressão equivalente à (3.23) poderia ser obtida utilizando-se a parametrização (φ, β) (ver sub-seção 2.6.4).

Capítulo 4

Controle de Qualidade em testes de Sobrevivência Acelerados

No controle de qualidade de produtos industriais torna-se imprescindível a obtenção permanente de medidas da confiabilidade do produto produzido. Em geral, esse controle é feito em meio à linha de produção, selecionando-se uma amostra aleatória para teste, e um resultado rápido, com custo mínimo, se faz necessário.

Neste capítulo, determinamos um procedimento de controle de qualidade que pode ser aplicado rapidamente, com custo reduzido, usando testes de sobrevivência acelerados e considerando a densidade preditiva de uma observação futura (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975; Press, 1989). Assim, propomos um critério para achar o tempo requerido de teste em um dado nível de estresse, ou obter o nível de estresse necessário para um determinado tempo experimentação fixo.

4.1 Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de estresse V_j com β conhecido

Assumindo β conhecido, de (2.7), obtemos a função de verosimilhança para α , dada por,

$$L(\alpha) \propto \exp\{\alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}, \quad (4.1)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número de falhas observadas em um teste de sobrevivência acelerado com k níveis aleatorizados da variável estresse temperatura.

A informação de Fisher para α , considerando-se a matriz (2.18), é dada por,

$$I(\alpha) = r. \quad (4.2)$$

Daí, a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para α é dada por,

$$\pi(\alpha) \propto \text{constante}, \quad (4.3)$$

onde $-\infty < \alpha < \infty$ (localmente uniforme).

Portanto, de (4.1) e (4.3), a densidade a posteriori para α é dada por,

$$\pi(\alpha/\text{dados}) = c \exp\{\alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}, \quad (4.4)$$

onde $c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha r} \exp\{-e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\} d\alpha$.

Considerando a transformação de variáveis, $u = e^\alpha$, temos, $c^{-1} = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-ua} du$, onde $a = \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}$, isto é, $c^{-1} = \Gamma(r)/a^r$ (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973).

Assim, a densidade a posteriori para α é dada por,

$$\pi(\alpha/dados) = \frac{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}{\Gamma(r)} \exp\{\alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}, \quad (4.5)$$

onde $-\infty < \alpha < \infty$.

A densidade preditiva da observação futura $T_{(n+1)j}$ (onde $n = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número total de observações em teste), considerando um nível de estresse V_j e a densidade a posteriori (4.5) é dada por (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975; Press, 1989),

$$\begin{aligned} f^j(t_{(n+1)j}/dados) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^j(t_{(n+1)j}/\alpha) \pi(\alpha/dados) d\alpha \\ &= E_{\alpha/dados} \{f^j(t_{(n+1)j}/dados)\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $f^j(t_{(n+1)j}/\alpha) = V_j e^{\alpha - \beta/V_j} \exp\{-V_j e^{\alpha - \beta/V_j} t_{(n+1)j}\}$, isto é,

$$\begin{aligned} f^j(t_{(n+1)j}/dados) &= V_j e^{-\beta/V_j} \frac{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}{\Gamma(r)} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\alpha(r+1) - e^\alpha [V_j e^{-\beta/V_j} t_{(n+1)j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}]\} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considerando novamente a transformação de variáveis, $u = e^\alpha$, obtemos,

$$f^j(t_{(n+1)j}/\text{dados}) = V_j e^{-\beta/V_j} \frac{\{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty u^r e^{-ub} du, \quad (4.8)$$

onde $b = V_j e^{-\beta/V_j} t_{(n+1)j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}$.

Observando que $\int_0^\infty u^r e^{-ub} du = \Gamma(r+1)/b^{r+1}$ (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), e que $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$,

$$f^j(t_{(n+1)j}/\text{dados}) = \frac{r V_j e^{-\beta/V_j} \{\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^r}{\{V_j e^{-\beta/V_j} t_{(n+1)j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}\}^{r+1}}, \quad (4.9)$$

onde $t_{(n+1)j} > 0$ (densidade de Pareto).

4.2 Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de Estresse V_j assumindo β desconhecido

Considere a função de verossimilhança para α e β dada (em (2.41)) por

$$L(\alpha, \beta) \propto \exp\{\alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta(V_i^{-1} - \bar{V})}\}, \quad (4.10)$$

onde $\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i/V_i}{\sum_{i=1}^k r_i}$.

A priori não informativa de Jeffreys para α e β é dada (de (2.44)) por,

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \text{constante}, \quad (4.11)$$

onde $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

A densidade a posteriori para α e β é dada (de (4.10)) por,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \exp\{\alpha r - e^\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta(V_i^{-1} - \bar{V})}\}, \quad (4.12)$$

onde $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

A densidade preditiva da observação futura $T_{(n+1)j}$ sob o nível de estresse V_j é dada por,

$$f^j(t_{(n+1)j} / \text{dados}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^j(t_{(n+1)j} / \alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta / \text{dados}) d\alpha d\beta, \quad (4.13)$$

onde $f^j(t_{(n+1)j} / \alpha, \beta) = V_j e^{\alpha - \beta(V_j^{-1} - \bar{V})} \exp\{-V_j e^{\alpha - \beta(V_j^{-1} - \bar{V})} t_{(n+1)j}\}$ e $\pi(\alpha, \beta / \text{dados})$ é a densidade posteriori dada em (4.12).

Definindo $W_i = V_i^{-1} - \bar{V}$, $i = 1, 2, \dots, k$, temos,

$$f^j(t_{(n+1)j} / \text{dados}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta W_j} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\alpha(r+1) - e^\alpha c(\beta)\} d\alpha \right] d\beta, \quad (4.14)$$

onde $c(\beta) = V_j e^{-\beta W_j} t_{(n+1)j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta W_i}$.

Fazendo a transformação $u = e^\alpha$, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(r+1)} \exp\{-e^\alpha c(\beta)\} d\alpha = \int_0^{\infty} u^r e^{-uc(\beta)} du = \frac{\Gamma(r+1)}{\{c(\beta)\}^{r+1}}$$

(ver por exemplo, Box e Tiao, 1973).

Portanto,

$$f^j(t_{(n+1)j}/\text{dados}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh(\beta)} d\beta, \quad (4.15)$$

onde $nh(\beta) = \beta W_j + (r+1) \log(c(\beta))$.

Usando o método de Laplace completamente exponencial, temos que,

$$f^j(t_{(n+1)j}/\text{dados}) \propto \frac{e^{-\hat{\beta}W_j} [c(\hat{\beta})]^{-(r+1/2)}}{\{(r+1)^2 c''(\hat{\beta}) - W_j^2 c(\hat{\beta})\}^{1/2}}, \quad (4.16)$$

onde $t_{(n+1)j} > 0$, $\hat{\beta}$ é a solução da equação $\frac{c'(\hat{\beta})}{c(\hat{\beta})} = -\frac{W_j}{(r+1)}$, $c''(\beta) = V_j W_j^2 e^{-\beta W_j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i W_i^2 e^{-\beta W_i}$ e $c(\beta)$ é dada em (4.14).

4.3 O Uso da Densidade Preditiva $f^j(t_{(n+1)j}/\text{Dados})$ em Controle de Qualidade

Em controle de qualidade, um procedimento de interesse é selecionar uma amostra aleatória dos componentes de um determinado lote para verificar se estes estão sob controle, isto é, verificar se a confiabilidade dos produtos deste lote está garantida. Porém, isso deve ser feito com tempo e custo de experimentação reduzidos. Assim, consideramos um teste de sobrevivência acelerado com um nível alto de estresse, V_j , e um período de tempo de teste fixo, L_j .

Neste procedimento de controle, usualmente, os principais objetivos consistem em determinar:

- i) o valor de L_j para um dado nível de stress V_j fixo (estipulado pelos pesquisadores industriais);
- ii) o valor de V_j , considerando L_j fixo.

Isto é, usando a densidade preditiva (4.9) com β conhecido e considerando uma probabilidade fixa $(1 - \gamma')$, podemos achar os valores requeridos de V_j e L_j , tal que,

$$P^j(T_{(n+1)j} > L_j/dados) = 1 - \gamma' . \quad (4.17)$$

Assumindo β conhecido, da densidade preditiva (4.9) temos,

$$P^j(T_{(n+1)j} > L_j/dados) = \int_{L_j}^{\infty} f^j(t_{(n+1)j}/dados) dt_{(n+1)j} ,$$

isto é,

$$P^j(T_{(n+1)j} > L_j/dados) = r \left(\frac{c}{V_j e^{-\beta/V_j}} \right)^r \int_{L_j}^{\infty} \frac{dt_{(n+1)j}}{\{t_{(n+1)j} + \frac{c}{V_j e^{-\beta/V_j}}\}^{r+1}} , \quad (4.18)$$

onde $c = \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\beta/V_i}$.

Considerando $P^j(T_{(n+1)j} > L_j/dados) = 1 - \gamma'$, temos,

$$\frac{\left\{ \frac{c}{V_j e^{-\beta/V_j}} \right\}^r}{\left\{ L_j + \frac{c}{V_j e^{-\beta/V_j}} \right\}^r} = 1 - \gamma' . \quad (4.19)$$

Portanto, de (4.19), dado V_j (fixo), achamos L_j dado por,

$$L_j = \frac{c[1 - (1 - \gamma')^{1/r}]}{(1 - \gamma')^{1/r} V_j e^{-\beta/V_j}} , \quad (4.20)$$

e com L_j fixo, V_j é a solução da equação

$$\frac{c[1 - (1 - \gamma')^{1/r}]}{L_j (1 - \gamma')^{1/r}} = V_j e^{-\beta/V_j} . \quad (4.21)$$

Encontrados os valores de V_j e L_j tais que (4.17) seja satisfeita, e definindo $p^j = P^j(T_{(n+1)j} \leq L_j/dados)$, pode-se colocar m unidades novas em teste sob o nível de estresse, V_j , e observar seus tempos de sobrevivência durante um período fixo de tempo, L_j . Denotando por X o número de falhas em L_j , e assumindo $X \sim \text{bin}(m, p^j)$ (distribuição binomial), o lote de componentes está sob controle se não rejeitamos a hipótese $H_o : p^j \leq \gamma'$.

Se m é grande ($m \geq 30$) então temos, $X \stackrel{a}{\sim} N\{mp^j; mp^j(1 - p^j)\}$, e um critério de controle de qualidade pode ser baseado no teste de hipótese usual, isto é, o lote está fora de controle se $Z \geq z_{\alpha'}$, onde α' é um nível de significância, $Z = (X - m\gamma')/\sqrt{m\gamma'(1 - \gamma')} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$ e $z_{\alpha'}$ é tal que $P(Z \geq z_{\alpha'}) = \alpha'$.

Com β desconhecido, usando métodos numéricos, podemos achar V_j e L_j tais que $P(T_{(n+1)j} > L_j/dados) = 1 - \gamma'$, a partir da densidade preditiva (4.16).

Dessa forma, com o método proposto neste capítulo, os pesquisadores industriais têm liberdade para decidir por qual estratégia adotar em cada caso particular, escolhendo apropriadamente $1 - \gamma'$, V_j e L_j para cada problema prático.

Capítulo 5

Análise do Modelo de Eyring Assumindo uma Distribuição de Weibull para os tempos de Sobrevivência

Em aplicações práticas de testes de sobrevivência acelerados, dificilmente existem situações onde a distribuição dos tempos de sobrevivência é Exponencial. Uma distribuição muito utilizada é a de Weibull, dada a sua grande flexibilidade.

Assumindo uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência e um mecanismo de censura de tipo II, desenvolvemos neste capítulo uma análise Bayesiana do modelo de Eyring com uma variável estresse usando a regra multiparamétrica de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) para achar uma densidade a priori não-informativa para os parâmetros envolvidos.

5.1 Formulação do Modelo

Considere a variável aleatória T^* denotando o tempo de sobrevivência de uma unidade com uma densidade de Weibull dada por,

$$f(t^*; \lambda^*, p) = \lambda^* p (\lambda^* t^*)^{p-1} \exp\{-(\lambda^* t^*)^p\}, \quad (5.1)$$

onde $t^* > 0, \lambda^*, p > 0$; e assumamos que a variável estresse V influencia o parâmetro de escala λ^* , e que o parâmetro de forma p é comum para todos os níveis de estresse.

Assumindo k níveis aleatorizados de estresse e um mecanismo de censura de tipo II para os dados, colocamos n_i unidades em teste no i -ésimo nível de estresse, V_i , e o experimento termina quando r_i falhas são observadas. Dessa forma, temos r_i observações ordenadas não-censuradas dadas por, $t_{i1}^*, t_{i2}^*, \dots, t_{ir_i}^*$ e $n_i - r_i$ observações iguais a $t_{ir_i}^*, i = 1, 2, \dots, k$.

No i -ésimo nível de estresse V_i a função de verossimilhança para λ_i^* e p é dada por,

$$L_i(\lambda_i^*, p) = \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}^*; \lambda_i^*, p) S^{n_i-r_i}(t_{ir_i}^*; \lambda_i^*, p), \quad (5.2)$$

onde $S(t_{ij}^*; \lambda_i^*, p) = e^{-(\lambda_i^* t_{ij}^*)^p}$ é a função de confiabilidade e $f(t_{ij}^*; \lambda_i^*, p)$ é a função densidade de probabilidade (5.1).

Definindo $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p} + (n_i - r_i)t_{ir_i}^{*p}$, temos,

$$L_i(\lambda_i^*, p) = p^{r_i} \lambda_i^{*pr_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \exp\{-\lambda_i^{*p} A_i(p)\}. \quad (5.3)$$

Considerando dados de k níveis aleatorizados de estresse, $V_1, V_2, \dots, V_k$, e a relação estresse resposta representada pelo modelo de Eyring com uma variável estresse,

$$\lambda_i^* = V_i \exp\{\alpha - \beta/V_i\}, \quad (5.4)$$

a função de verossimilhança para os parâmetros α, β e p é dada por,

$$L(\alpha, \beta, p) = p^r \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^p r_i \right). \quad (5.5)$$

$$\exp \{ p\alpha r - p\beta a_1 - e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i} \},$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i$ e $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p} + (n_i - r_i)t_{ir_i}^{*p}$ (observar que com $p = 1$ temos (5.5) igual à expressão (2.7)).

5.2 Análise Bayesiana do Modelo Assumindo α, β e p desconhecidos

A densidade a priori para os parâmetros α, β e p pode ser escrita na forma,

$$\pi(\alpha, \beta, p) = \pi(\alpha, \beta/p) \pi_0(p). \quad (5.6)$$

Usando a regra multiparamétrica de Jeffreys temos (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973),

$$\pi(\alpha, \beta/p) \propto \{\det I_p(\alpha, \beta)\}^{1/2}, \quad (5.7)$$

onde $I_p(\alpha, \beta)$ é a matriz de informação de Fisher com respeito a α e β dado o parâmetro de forma p .

A função log-verossimilhança para α, β e p (de (5.5)) é dada por,

$$\ell(\alpha, \beta, p) \propto r \log(p) + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{ij}^*) + p \sum_{i=1}^k r_i \log(V_i) + \left. \begin{aligned} &+ p \alpha r - p\beta a_1 - e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

As segundas derivadas de $\ell(\alpha, \beta, p)$ para um dado valor de p são dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} &= -p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\beta p/V_i}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} &= p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\beta p/V_i}. \end{aligned}$$

Como a variável aleatória $T = T^{*p}$ tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \lambda^{*p}$ (ver por exemplo, Lawless, 1982), $E[A_i(p)] = \frac{r_i}{\lambda_i^{*p}}$, $\lambda_i^* = V_i \exp\{\alpha - \beta/V_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, isto é,

$$E[A_i(p)] = \frac{r_i}{V_i^p \exp\{p(\alpha - \beta/V_i)\}}.$$

Portanto, a matriz de informação de Fisher para α e β dado p é dada por,

$$I_p(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} rp^2 & -a_1 p^2 \\ -a_1 p^2 & a_2 p^2 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

onde r e a_1 são dados em (5.5) e $a_2 = \sum_{i=1}^k r_i/V_i^2$ (observar que com $p = 1$ a matriz (5.9) iguala-se a matriz (2.18)).

Assim,

$$\det\{I_p(\alpha, \beta)\} = p^4(ra_2 - a_1^2), \text{ e de (5.7)),}$$

$$\pi(\alpha, \beta/p) \propto p^2, \quad (5.10)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

Assumindo uma densidade a priori localmente uniforme para $\log(p)$ isto é,

$$\pi_0(p) \propto \frac{1}{p}, \quad (5.11)$$

onde $p > 0$, a densidade a priori não-informativa para α, β e p baseada na regra multiparamétrica de Jeffreys (ver(5.7)) é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, p) \propto p, \quad (5.12)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

5.2.1 Densidade a Posteriori Marginal para p

Considerando a densidade a priori (5.12) e a função de verossimilhança (5.5), a densidade a posteriori conjunta para α, β e p é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, p/\text{dados}) &\propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \cdot \\ &\cdot \exp\{p\alpha r - p\beta a_1 - e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}\}, \quad (5.13) \end{aligned}$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ (Se $p = 1$ temos (5.13) igual a densidade a posteriori conjunta para α e β (3.2)).

A densidade a posteriori marginal para p é dada (de (5.13)) por,

$$\pi(p/dados) \propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_p(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad (5.14)$$

onde $-nh_p(\alpha, \beta) = p\alpha r - p\beta a_1 - e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}$.

Usando o método de Laplace completamente exponencial para aproximação de integrais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Apêndice 2) achamos a densidade a posteriori marginal aproximada para p dada (ver Apêndice 2.1) por,

$$\pi(p/dados) \propto \frac{p^{r-1} e^{-pa_1\hat{\beta}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right)}{\left\{ r^2 \frac{\sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}} - a_1^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i} \right\}^r}, \quad (5.15)$$

onde $p > 0$ e $\hat{\beta}$ maximiza $g(\beta) = r \log \left\{ \frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}} \right\} - p\beta a_1 - r$ para cada valor fixo de p .

Portanto, considerando $T = T^{*p}$ com uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \lambda^{*p}$ com o valor de p dado pela moda da densidade a posteriori marginal para p (5.15), podemos considerar uma análise Bayesiana padrão do modelo de Eyring (1.5) com uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência, como dada nos Capítulos 3 e 4.

Ocorre que, para mantermos a equivalência entre os parâmetros da distribuição de Weibull e da distribuição Exponencial, devemos considerar uma transformação de escala, isto é, $\lambda_i^* = V_i \exp\{\alpha - \frac{\beta}{V_i}\}$, temos que $\lambda_i = V_i^p \exp\{p(\alpha - \frac{\beta}{V_i})\}$. Também, $\theta_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ é o tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse considerando-se os dados transformados T^{*p} com uma distribuição Exponencial com parâmetro λ_1 .

Daí, na escala original dos dados (onde temos dados com uma distribuição

de Weibull com parâmetro de escala $\lambda_1^* = \lambda_1^{\frac{1}{p}}$ o tempo médio de sobrevivência sob o nível de estresse é dado por, $\theta_1^* = \Gamma(1 + \frac{1}{p})/\lambda_1^*$.

Por exemplo, considerando $p = \tilde{p}$ ($\tilde{p}$ é a moda da densidade a posteriori (5.15)), $\lambda_i = V_i^{\tilde{p}} \exp\{\tilde{p}(\alpha - \frac{\beta}{V_i})\}$, e a densidade a posteriori marginal para β (3.4) deve ser escrita na forma,

$$\pi(\beta/dados) \propto \frac{e^{-\beta \tilde{p} a_1}}{\left\{ \sum_{i=1}^k V_i^{\tilde{p}} A_i(\tilde{p}) e^{-\frac{\beta \tilde{p}}{V_i}} \right\}^{r \tilde{p}}},$$

onde $-\infty < \beta < \infty$ e $A_i(\tilde{p}) = \sum_{j=1}^k t_{ij}^{*\tilde{p}} + (n_i - r_i) t_{i\cdot}^{*\tilde{p}}/r_i$. O mesmo procedimento deve ser adotado às outras expressões do Capítulo 3.

5.2.2 Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p

Em geral estamos interessados em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência dos componentes, θ_1^* , sob o nível de estresse usual, V_i , considerando o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, p , desconhecido.

O tempo médio de sobrevivência de um componente com distribuição de Weibull com parâmetro λ_i^* e p é dado por, $\theta_i^* = \frac{\Gamma(1+1/p)}{\lambda_i^*}$. Como $\lambda_i^* = V_i \exp\{\alpha - \beta/V_i\}$, temos,

$$\theta_i^* = \frac{e^{\beta/V_i} \Gamma(1+1/p)}{V_i e^\alpha}. \quad (5.16)$$

Considerando a transformação de variáveis $\theta_1^* = \frac{e^{\beta/V_1} \Gamma(1+1/p)}{V_1 e^\alpha}$, $\beta = \beta$ e $p = p$, a densidade a priori para θ_1, β e p é dada (de(5.12)) por,

$$\pi(\theta_1^*, \beta, p) \propto \frac{p}{\theta_1^*}, \quad (5.17)$$

onde $\theta_1^*, p > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$, e a densidade a posteriori conjunta para θ_1^*, β e p é dada (de (5.13)) por,

$$\left. \begin{aligned} \pi(\theta_1^*, \beta, p / \text{dados}) &\propto p^{r+1} \theta_1^{*-(pr+1)} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1}) \\ &(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i}) V_1^{-pr} [\Gamma(1 + 1/p)]^{pr} \\ &\exp\{-p\beta(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k (\frac{V_i}{V_1})^p A_i(p) e^{\beta p(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

onde $\theta_1^*, p > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

A densidade a posteriori conjunta marginal para θ_1^* e p aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Apêndice 2) é dada por ,

$$\left. \begin{aligned} \pi(\theta_1^*, p / \text{dados}) &\propto p^r \theta_1^{*-p(r-1/2)-1} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1}) \\ &(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i}) V_1^{-pr} [\Gamma(1 + 1/p)]^{p(r-1/2)} \\ &\frac{\exp\{-\hat{\beta} p(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k (\frac{V_i}{V_1})^p A_i(p) e^{\hat{\beta} p(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\}}{\{\sum_{i=1}^k (\frac{V_i}{V_1})^p A_i(p) (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})^2 e^{\hat{\beta} p(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})}\}^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

onde $\theta_1^*, p > 0$ e $\hat{\beta}$ é o valor que maximiza

$$-nh_{\theta_1^*, p}(\beta) = -\beta p(a_1 - \frac{r}{V_1}) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k (\frac{V_i}{V_1})^p A_i(p) e^{\beta p(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_i})} .$$

Com $p = 1$, a densidade a posteriori (5.19) reduz-se à densidade a posteriori marginal para θ_1 (3.9).

Capítulo 6

Testes de Sobrevivência Acelerados com uma Relação Estresse-Resposta Geral

Nos capítulos anteriores, considerando uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência, temos o desenvolvimento da metodologia clássica de análise do modelo de Eyring com uma variável estresse e considerações sobre o uso de parametrizações que possibilitam a obtenção de uma parametrização assintoticamente independente (ver Capítulo 2). Também, obtemos (ver Capítulo 3) uma Análise Bayesiana deste modelo, considerando uma densidade a priori não informativa de Jeffreys e explorando o uso do método de Laplace para aproximar integrais. Observamos que a parametrização que implica em uma densidade a priori não-informativa de Jeffreys localmente uniforme, “leva” a resultados satisfatórios do ponto de vista da aproximação de Laplace. No Capítulo 4, determinamos um procedimento de controle de qualidade através do uso da densidade preditiva de uma observação futura.

Considerando uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência, no Capítulo 5, obtemos uma Análise Bayesiana do modelo de Eyring, utilizando a

regra multiparamétrica de Jeffreys para achar a densidade a priori não-informativa dos parâmetros.

Até o momento, a mesma relação estresse-resposta foi considerada (modelo de Eyring com uma variável estresse), limitando, de certa forma, as análises de testes de sobrevivência acelerados que consideram uma única variável de estresse. De modo a suprimir tal limitação, consideramos, neste capítulo, uma relação estresse-resposta geral que inclui os modelos padrões (Potência, Arrhenius e Eyring com uma variável estresse) como casos particulares, com a qual são apresentadas metodologias de análise válidas para os três modelos em questão.

6.1 A Relação Estresse-Resposta Geral

As relações estresse-resposta mais comumente encontrados na literatura e utilizados na prática em testes acelerados que consideram somente uma variável física de estresse (modelo de Potência (1.3), Arrhenius (1.4) e Eyring (1.5)) podem ser expressas como casos particulares de relação estresse-resposta geral, dada por (ver por exemplo, Klein e Basu, 1981; Barbosa e Louzada Neto, 1991),

$$\lambda^* = \exp\{-(Z + \beta_0 + \beta_1 X)\}, \quad (6.1)$$

$$\text{onde } X = \begin{cases} -\log V, & \text{para o modelo Potência} \\ \frac{1}{V}, & \text{para os modelos Arrhenius e Eyring} \end{cases};$$

$$Z = \begin{cases} -\log V, & \text{para o modelo de Eyring} \\ 0, & \text{para os modelos Potência e Arrhenius} \end{cases};$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \log \alpha, & \text{para o modelo Potência} \\ -\alpha, & \text{para os modelos Arrhenius e Eyring} \end{cases};$$

e $\beta_1 = \beta$ para os três modelos (Potência, Arrhenius e Eyring).

Considerando a variável aleatória T^* com distribuição de Weibull (definida no Capítulo anterior), com f.d.p. dada por,

$$f(t^*; \lambda^*, p) = \lambda^* p (\lambda^* t^*)^{p-1} \exp\{-(\lambda^* t^*)^p\}, \quad (6.2)$$

onde $t^* > 0$ e $\lambda^*, p > 0$, a relação estresse-resposta (6.1) com k níveis aleatorizados de estresse $(X_1, X_2, \dots, X_k)$, e um mecanismo de censura de Tipo II para os dados, a função de verossimilhança para os parâmetros β_0, β_1 e p é dada por,

$$L(\beta_0, \beta_1, p) = p^r \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \exp \left\{ -p a_0^* - p \beta_0 r - p \beta_1 a_1^* - e^{-p \beta_0} \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p Z_i - p \beta_1 X_i} \right\}, \quad (6.3)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $a_0^* = \sum_{i=1}^k r_i Z_i$, $a_1^* = \sum_{i=1}^k r_i X_i$ e $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p} + (n_i - r_i) t_{ir_i}^{*p}$.

6.2 Procedimento Bayesiano de Análise com uma Densidade de Weibull

A densidade a priori para β_0, β_1 e p pode ser escrita na forma, $\pi(\beta_0, \beta_1, p) = \pi(\beta_0, \beta_1/p) \pi_0(p)$, e usando a regra multiparamétrica de Jeffreys, temos, $\pi(\beta_0, \beta_1/p) \propto \{\det I_p(\beta_0, \beta_1)\}^{1/2}$, onde $I_p(\beta_0, \beta_1)$ é a matriz de informação de Fisher para β_0 e β_1 dado p .

A matriz de informação de Fisher para β_0 e β_1 dado p é dada por,

$$I_p(\beta_0, \beta_1) = \begin{bmatrix} rp^2 & a_1^* p^2 \\ a_1^* p^2 & a_2^* p^2 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

onde r e a_1^* são dados em (6.3) e $a_2^* = \sum_{i=1}^k r_i X_i^2$.

Assumindo $\pi_0(p) \propto \frac{1}{p}, p > 0$, a densidade a priori para β_0, β_1 e p , baseada na regra multiparamétrica de Jeffreys é dada por,

$$\pi(\beta_0, \beta_1, p) \propto p, \quad (6.5)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

6.2.1 Densidade a Posteriori Marginal para p

Considerando-se a densidade a priori (6.5), a densidade a posteriori conjunta para β_0, β_1, p é dada por,

$$\left. \begin{aligned} \pi(\beta_0, \beta_1, p/\text{dados}) &\propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \exp \{ -pa_0^* - p\beta_0 r - p\beta_1 a_1^* \} \\ &\exp \left\{ -e^{-p\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-pZ_i - p\beta_1 X_i} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

A densidade a posteriori marginal para p , aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), é dada por,

$$\pi(p/dados) \propto \left\{ \frac{p^{r-1} e^{-p(a_0^* + \hat{\beta}_1 a_1^*)} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right)}{\left\{ r^2 \frac{\sum_{i=1}^k A_i(p) X_i^2 e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}}{\sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}} - a_1^{*2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)} \right\}^r} \right\}, \quad (6.7)$$

onde $p > 0$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $g(\beta_1) = -r \log \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i + \beta_1 X_i)}}{r} \right\} - p\beta_1 a_1^* - r$, para cada valor fixo de p .

Observe que com $X_i = \frac{1}{V_i}$, $Z_i = -\log V_i$, $\beta_0 = -\alpha$ e $\beta_1 = \beta$, temos (6.7) igual à densidade a posteriori marginal para p (5.15).

6.2.2 Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p

O tempo médio de sobrevivência sob o nível de estresse X_1 é dado por $\theta_1^* = \Gamma(1 + 1/p)/\lambda_1^*$, onde (de(6.1)) $\lambda_1^* = \exp\{-(Z_1 + \beta_0 + \beta_1 X_1)\}$.

Considerando a transformação de variáveis $\theta_1^* = \Gamma(1 + 1/p) \exp\{Z_1 + \beta_0 + \beta_1 X_1\}$, $\beta_1 = \beta_1$ e $p = p$, a densidade a posteriori conjunta para θ_1^*, β e p é dada (de(6.6)) por,

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1^*, \beta_1, p/dados) &\propto p^{r+1} \theta_1^{*-(pr+1)} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) e^{-p(a_0^* - rZ_1)} [\Gamma(1 + 1/p)]^{pr} \cdot \\ &\cdot \exp\{-p\beta_1(a_1^* - rX_1) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-(Z_i - Z_1) + p\beta_1(X_1 - X_i)}\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde $\theta_1^*, p > 0$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

A densidade a posteriori conjunta marginal para θ_1^* e p aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial é dada por,

$$\pi(\theta_1^*, p/dados) \propto p^r \theta_1^{*-p(r-1/2)-1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) e^{-p(a_0^* - rZ_1)} [\Gamma(1 + 1/p)]^{p(r-1/2)} \cdot \left. \frac{\exp\{-p\hat{\beta}_1(a_1^* - rX_1) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i - Z_1) + p\hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}}{\{\sum_{i=1}^k A_i(p) (X_1 - X_i)^2 e^{-p(Z_i - Z_1) + p\hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}^{1/2}} \right\} \quad (6.9)$$

onde $\theta_1, p > 0$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $-nh_{\theta_1^*, p}(\beta_1) = p\beta_1(a_1 - rX_1) - \theta_1^{*-p} [\Gamma(1 + 1/p)]^p \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i - Z_1) + p\beta_1(X_1 - X_i)}$, para cada par (θ_1^*, p) fixo.

Com $X_i = 1/V_i$, $Z_i = -\log V_i$, $\beta_0 = -\alpha$ e $\beta_1 = \beta$, (6.9) reduz-se à densidade a posteriori conjunta marginal (5.19).

6.3 Análise Bayesiana assumindo uma Distribuição Exponencial para T^*

Assumindo uma distribuição Exponencial para T^* com parâmetro $\lambda^*(p=1)$ em (6.2)), e considerando a densidade a priori não-informativa de Jeffreys localmente uniforme para β_0 e β_1 , dada por, $\pi(\beta_0, \beta_1) \propto \text{constante}$, $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$, a densidade a posteriori conjunta para β_0 e β_1 é dada por,

$$\pi(\beta_0, \beta_1/dados) \propto \exp\{-\beta_0 r - \beta_1 a_1^* - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}\}, \quad (6.10)$$

onde $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

A densidade a posteriori marginal para β_1 é dada por,

$$\pi(\beta_1/dados) \propto \frac{e^{-\beta_1 a_1^*}}{\{\sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}\}^r}, \quad (6.11)$$

onde $-\infty < \beta_1 < \infty$, e a densidade a posteriori marginal para β_0 , aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), é dada por,

$$\pi(\beta_0/dados) \propto \frac{\exp\{-\beta_0(r - 1/2) - \hat{\beta}_1 a_1^* - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \hat{\beta}_1 X_i}\}}{\{\sum_{i=1}^k A_i X_i^2 e^{-Z_i - \hat{\beta}_1 X_i}\}^{1/2}}, \quad (6.12)$$

onde $-\infty < \beta_0 < \infty$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $-\beta_1 a_1^* - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}$, para cada valor de β_0 fixo.

Considerando a transformação de variáveis $\theta_1^* = \exp\{Z_1 + \beta_0 + \beta_1 X_1\}$ e $\beta_1 = \beta_1$ a densidade a posteriori conjunta para θ_1^* e β_1 é dada (de(6.10)) por,

$$\pi(\theta_1^*, \beta_1/dados) \propto \theta_1^{*-(r+1)} \exp\{-\beta_1(a_1^* - rX_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}\}, \quad (6.13)$$

onde $\theta_1^* > 0$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

A densidade a posteriori marginal para θ_1^* aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2) é dada por,

$$\pi(\theta_1^*/dados) \propto \frac{\theta_1^{*-(r+1/2)} \exp\{-\hat{\beta}_1(a_1^* - rX_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}}{\{\sum_{i=1}^k A_i (X_1 - X_i)^2 e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}^{1/2}}, \quad (6.14)$$

onde $\theta_1^* > 0$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $-\beta_1(a_1^* - rX_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}$, para cada valor fixo de θ_1^* .

Observe que com $X_i = 1/V_i$, $Z_i = -\log V_i$, $\beta_0 = -\alpha$ e $\beta_1 = \beta_1$, as expressões obtidas nesta seção tornam-se iguais as obtidas no Capítulo 3 (ver seções 3.2, 3.3 e 3.4).

Dessa forma, temos liberdade na análise de testes de sobrevivência acelerados, no sentido de podermos considerar quaisquer dos três modelos com uma única variável de estresse (Potência, Arrhenius e Eyring). Também, a distribuição de sobrevivência tanto pode ser Weibull, como Exponencial.

Cabe ressaltar que, como no capítulo anterior, considerando $T = T^{*p}$ com uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \lambda^{*p}$, também podemos considerar uma Análise Bayesiana do modelo geral (6.1), onde p pode ser dado pela moda da densidade posterior marginal para p (6.7).

6.4 A Função de Confiabilidade em Experimentos Acelerados

Em geral, os pesquisadores industriais, além do usual interesse em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1^* , de um componente manufaturado, sob o nível usual de estresse, X_1 , têm interesse nas inferências sobre a probabilidade de um particular componente sobreviver pelo menos um determinado tempo t_1^* , considerando o nível X_1 , dada por,

$$R_1^* = P(T^* \geq t_1^*) . \quad (6.15)$$

A probabilidade (6.15) é dita a função de confiabilidade (ver por exemplo, Lawless, 1982) da variável aleatória T^* no nível usual de estresse X_1 .

Considerando T^* com uma distribuição de Weibull com parâmetros λ^* e p (ver (6.2)), a função de confiabilidade (6.15) é dada por (ver por exemplo, Lawless, 1982),

$$R_1^* = e^{-(\lambda_1^* t_1^*)^p} \quad (6.16)$$

(observe que nos Capítulos 2 e 5, já havíamos definido, resumidamente, a função de confiabilidade (ver seções 2.2 e 5.1)).

Nesta seção, (6.16) é determinada, considerando-se a relação estresse-resposta (6.1), tanto para uma distribuição de sobrevivência de Weibull, quanto para a Exponencial (quando $p = 1$).

6.4.1 Densidade a Posteriori Conjunta para a Função de Confiabilidade R_1^* e para o Parâmetro de Forma p da Distribuição de Weibull

Como $\theta_1^* = \frac{\Gamma(1+1/p)}{\lambda_1^*}$, considerando a transformação de variáveis $R_1^* = \exp\{-\theta_1^{*-p}[\Gamma(1+1/p)]^p t^{*p}\}$, $\beta_1 = \beta_1$ e $p = p$, a densidade a posteriori conjunta para R_1^*, β_1, p é dada (de (6.8)) por,

$$\pi(R_1^*, \beta_1, p / \text{dados}) \propto \left. \frac{p^r \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^r t_{ij}^{*p-1} \right) \exp\{-p\beta_1(a_1^* - rX_1) - t_1^{*-p}(-\log R_1^*) \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i - Z_1) + p\beta_1(X_1 - Z_i)}\}}{R_1^* (-\log R_1^*)^{-(r-1)} t_1^{*-pr} \exp\{-p(a_0^* - rZ_1)\}} \right\}, \quad (6.17)$$

onde $0 \leq R_1^* \leq 1, p > 0$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

Usando o método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), a densidade a posteriori conjunta marginal aproximada para R_1^* e p é dada por,

$$\pi(R_1^*, p/dados) \propto \left. \frac{p^{r-1} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1}) \exp\{-p\hat{\beta}_1(a_1^* - rX_1) - t_1^{*-p} (-\log R_1^*) \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i - Z_1) + p\hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}}{R_1^* (-\log R_1^*)^{-(r-3/2)} t_1^{*(pr-1/2)} e^{-p(a_0^* - rZ_1)} \{\sum_{i=1}^k A_i(p)(X_1 - X_i)^2 e^{-p(Z_i - Z_1) + p\hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}^{1/2}} \right\} \quad (6.18)$$

onde $0 \leq R_1^* \leq 1, p > 0$ e $\hat{\beta}$ maximiza

$-nh_{R_1^*, p}(\beta_1) = -p\beta_1(a_1^* - rX_1) - (-\log(R_1^*))t_1^{*-p} \sum_{i=1}^k A_i(p) e^{-p(Z_i - Z_1) + p\beta_1(X_1 - X_i)}$,
para cada valor fixo do par (R_1^*, p) .

6.4.2 Densidade a Posteriori para R_1^* Assumindo uma Distribuição Exponencial para T^*

Assumindo T^* com uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda^*(p = 1$ em (6.2)), a densidade a posteriori conjunta para R_1^* e β_1 é dada (de (6.13)) por,

$$\pi(R_1^*, \beta_1/dados) \propto \frac{\exp\{-\beta_1(a_1^* - rX_1) - (-\log R_1^*)t_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}\}}{R_1^* (-\log(R_1^*))^{-(r-1)}}, \quad (6.19)$$

onde $0 \leq R_1^* \leq 1$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

Definindo $-nh_{R_1^*}(\beta_1) = -\beta_1(a_1^* - rX_1) - (-\log(R_1^*))t_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}$, a densidade a posteriori marginal para R_1^* , aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), é dada por,

$$\pi(R_1^*/dados) \propto \left. \frac{(-\log R_1^*)^{r-\frac{3}{2}} \exp\{-\hat{\beta}_1(a_1^* - rX_1) - (-\log(R_1^*))t_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}}{R_1^* \{\sum_{i=1}^k A_i (X_1 - X_i)^2 e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (6.20)$$

onde $0 \leq R_1^* \leq 1$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $-nh_{R_1^*}(\beta_1)$.

Capítulo 7

Experimentos Acelerados com Níveis de Estresse Somente Maiores que os Usuais

Em muitas situações práticas, não é possível a condução de um experimento acelerado, considerando-se o nível usual da variável física de estresse, mesmo se considerarmos um número grande de censuras neste nível. Neste contexto, observe que nos capítulos anteriores, apesar de sempre n_1 componentes serem testados sob o nível usual de estresse, se temos dados somente com k níveis de estresse estritamente maiores que os usuais, $i = 2, 3, \dots, k$, como assumimos que as relações estresse-resposta envolvidas (ver (1.3), (1.4) e (1.5), ou (6.1)) são válidas para esses níveis e também para o nível usual, podemos inferir sob esse nível, e as expressões obtidas serão iguais as obtidas anteriormente, com $i = 2, 3, \dots, k$.

Particularmente, assumindo dois níveis de estresse maiores que o usual e um mecanismo de censura de Tipo II para os dados, desenvolvemos, neste capítulo, uma Análise Bayesiana da relação estresse-resposta geral, proposta no capítulo anterior, mostrando que é possível a obtenção de inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível usual de estresse, mesmo sem termos dados sob esse

nível.

7.1 Determinação do Modelo Considerando somente níveis de estresse maiores que os usuais

Considere um teste de sobrevivência acelerado com dois níveis de estresse, X_2 e X_3 , maiores que o usual, $X_1 (> 0)$, sob os quais $n_i (i = 2, 3)$ unidades são testadas, e que o experimento termina quando r_i falhas ocorrem. Também, considere a variável aleatória T^* com uma densidade de Weibull com parâmetros λ^* e p (ver(6.2)).

Assumindo que o parâmetro de forma, p , é diferente para cada um dos dois níveis de estresse e que a variável estresse X relaciona-se com λ^* através de (6.1), a função de verossimilhança para λ_i^* e p_i , no i -ésimo nível de estresse, é dado por,

$$L_i(\lambda_i^*, p_i) = p_i^{r_i} \lambda_i^{*p_i r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p_i-1} \right) e^{-\lambda_i^{*p_i} A_i(p_i)}, \quad (7.1)$$

onde $A_i(p_i) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p_i} + (n_i - r_i)t_{ir_i}^{*p_i}$.

Com dados sob os dois níveis de estresse, X_2 e X_3 , a função de verossimilhança para $\beta_0, \beta_1, p_2, p_3$ é dada (de(6.1) e (7.1)) por,

$$\left. \begin{aligned} L(\beta_0, \beta_1, p_2, p_3) &= \left(\prod_{i=2}^3 p_i^{r_i} \right) \left(\prod_{i=2}^3 \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p_i-1} \right) \\ &\exp \left\{ \sum_{i=2}^3 p_i r_i Z_i - \beta_0 \sum_{i=2}^3 p_i r_i - \beta_1 \sum_{i=2}^3 p_i r_i X_i \right\} \\ &\exp \left\{ - \sum_{i=2}^3 A_i(p_i) e^{-p_i Z_i - \beta_0 p_i - \beta_1 p_i X_i} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

7.2 Uma Análise Bayesiana do Modelo

A densidade a priori para β_0, β_1, p_2 e p_3 pode ser escrita na forma, $\pi(\beta_0, \beta_1, p_2, p_3) = \pi(\beta_0, \beta_1/p_2, p_3)\pi_0(p_2, p_3)$. Usando a regra multiparamétrica de Jeffreys, temos, $\pi(\beta_0, \beta_1/p_2, p_3) \propto \{\det I_{p_2, p_3}(\beta_0, \beta_1)\}^{1/2}$, onde $I_{p_2, p_3}(\beta_0, \beta_1)$ é a matriz de informação de Fisher para β_0 e β_1 dado p_2 e p_3 , dada por,

$$I_{p_2, p_3}(\beta_0, \beta_1) = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^3 p_i^2 r_i & \sum_{i=2}^3 p_i^2 r_i X_i \\ \sum_{i=2}^3 p_i^2 r_i X_i & \sum_{i=2}^3 p_i^2 r_i X_i^2 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\pi(\beta_0, \beta_1/p_2, p_3) \propto p_2 p_3,$$

onde $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

Assumindo densidades a priori localmente uniformes e independentes para $\log p_2$ e $\log p_3$, $\pi_0(p_2, p_3) \propto (p_2, p_3)^{-1}$, $p_2, p_3 > 0$, temos,

$$\pi(\beta_0, \beta_1, p_2, p_3) \propto \text{constante}, \quad (7.3)$$

onde $p_2, p_3 > 0$ e $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

A densidade a posteriori conjunta para β_0, β_1, p_2 e p_3 é dada (de (7.2) e (7.3)) por,

$$\left. \begin{aligned} & \pi(\beta_0, \beta_1, p_2, p_3/\text{dados}) \propto \\ & (\prod_{i=2}^3 p_i^{r_i}) (\prod_{i=2}^3 \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p_i-1}) \exp\{-\sum_{i=2}^3 p_i r_i Z_i - \beta_0 \sum_{i=2}^3 p_i r_i - \beta_1 \sum_{i=2}^3 p_i r_i X_i\} \\ & \exp\{-\sum_{i=2}^3 A_i(p_i) e^{-p_i Z_i - \beta_0 p_i - \beta_1 p_i X_i}\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

onde $p_2, p_3 > 0$ e $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$.

Usando o método de Laplace completamente exponencial para aproximação de integrais, a densidade a posteriori conjunta marginal aproximada para p_2 e p_3 é dada (de (7.4)) por

$$\pi(p_2, p_3 / \text{dados}) \propto \frac{(\prod_{i=2}^3 p_i^{r_i})(\prod_{j=1}^3 \prod_{i=2}^3 t_{ij}^{r_i p_i - 1}) \exp\{-\sum_{i=2}^3 p_i r_i Z_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=2}^3 p_i r_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=2}^3 A_i(p_i) e^{-p_i r_i Z_i - \hat{\beta}_0 p_i - \hat{\beta}_1 p_i X_i}\}}{\{\sum_{i=2}^3 p_i^2 A_i(p_i) e^{-p_i Z_i - \hat{\beta}_0 p_i - \hat{\beta}_1 p_i X_i} \sum_{i=2}^3 p_i^2 X_i^2 A_i(p_i) e^{p_i Z_i - \hat{\beta}_0 p_i - \hat{\beta}_1 p_i X_i} - (\sum_{i=2}^3 p_i^2 X_i A_i(p_i) e^{-p_i Z_i - \hat{\beta}_0 p_i - \hat{\beta}_1 p_i X_i})^2\}^{1/2}} \quad (7.5)$$

onde $p_2, p_3 > 0$ e o par $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ maximiza $-nh_{p_2, p_3}(\beta_0, \beta_1) = -\beta_0 \sum_{i=2}^3 p_i r_i - \beta_1 \sum_{i=2}^3 p_i r_i X_i - \sum_{i=2}^3 A_i(p_i) e^{-p_i Z_i - \beta_0 p_i - \beta_1 p_i X_i}$, para cada par (p_2, p_3) fixo.

Observe que assumindo $p_2 = p_3 = p$ e uma densidade a priori localmente uniforme para $\log p$, $\pi_0(p) \propto 1/p$, $p > 0$, a densidade a priori não informativa para β_0, β_1 e p , baseada na regra multiparamétrica de Jeffreys ($\pi(\beta_0, \beta_1 / p) \propto \{\det I_p(\beta_0, \beta_1)\}^{1/2}$), é dada por, $\pi(\beta_0, \beta_1, p) \propto p$, $p > 0$, e a densidade a posteriori marginal para p é dada por,

$$\pi(p / \text{dados}) \propto \frac{p^{r'-1} e^{-p(a_0^{*'} + \hat{\beta}_1 a_1^{*'})} (\prod_{i=2}^3 \prod_{j=1}^3 t_{ij}^{r_i p - 1})}{\{r'^2 \frac{\sum_{i=2}^3 A_i(p) X_i^2 e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}}{\sum_{i=2}^3 A_i(p) e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}} - a_1^{*2}\}^{1/2} \{\sum_{i=2}^3 A_i(p) e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}\}^{r'}}, \quad (7.6)$$

onde $p > 0$, $\hat{\beta}$ maximiza $-nh_p(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = g(\beta_1) = -r' \log\{\frac{\sum_{i=2}^3 A_i(p) e^{-p(Z_i + \hat{\beta}_1 X_i)}}{r'}\} - p\beta_1 a_1^{*'} - r'$ para cada valor fixo de p , $r' = \sum_{i=2}^3 r_i$, $a_0^{*'} = \sum_{i=2}^3 r_i Z_i$ e $a_1^{*'} = \sum_{i=2}^3 r_i X_i$ (observe que esta expressão é equivalente a (6.7)).

Considerando o par (p_2, p_3) igual a moda da densidade a posteriori conjunta (7.5), $(\tilde{p}_2'', \tilde{p}_3'')$, podemos fazer a transformação $T_2^{*\tilde{p}''}$ e $T_3^{*\tilde{p}''}$, com $\tilde{p}'' = \frac{\sum_{i=2}^3 r_i \tilde{p}_i''}{\sum_{i=2}^3 r_i}$ (média ponderada dos $\tilde{p}_i'', i = 2, 3$), onde essas variáveis aleatórias têm distribuição Expo-

nencial comparâmetros $\lambda_2^{*\beta''}$ e $\lambda_3^{*\beta''}$, respectivamente, e considerar a análise Bayesiana padrão para o modelo geral, dada na seção seguinte, assumindo p_1 conhecido dado por $p_1 = \tilde{p}''$.

Além disso, observe que a densidade a posteriori conjunta (7.5) pode ser utilizada para verificarmos se o parâmetro p pode ser considerado igual nos níveis de estresse.

7.3 Análise Bayesiana assumindo $p_2 = p_3 = 1$

Assumindo $p_2 = p_3 = 1$, isto é, T^* com uma distribuição Exponencial com parâmetro λ^* , a função de verossimilhança para β_0 e β_1 é dada (de(7.2)) por,

$$L(\beta_0, \beta_1) = \exp\{-a_0^{*'} - \beta_0 r' - \beta_1 a_1^{*'} - e^{-\beta_0} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}\}, \quad (7.7)$$

onde r' , $a_0^{*'}$ e $a_1^{*'}$ são dados em (7.6) e $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^* + (n_i - r_i)t_{ir_i}^*$.

Como o interesse é inferir sobre o tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse X_1 , dado por $\theta_1^* = 1/\lambda_1^*$, mostremos o seguinte resultado que relaciona o parâmetro λ_1^* com os parâmetros, λ_2^* e λ_3^* .

Resultado: Se a relação entre λ^* e X , dada (de(6.1)) por, $\lambda^* = \exp\{-(Z + \beta_0 + \beta_1 X)\}$, é válida para os três níveis $X_1 < X_2 < X_3$, tal que $X_1 > 0$, então,

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_2^{*Y_1}}{\lambda_3^{*Y_2}} \exp\{-Z_1 + Y_1 Z_2 - Y_2 Z_3\}, \quad (7.8)$$

onde $Y_1 = \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2}$ e $Y_2 = \frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_2}$.

Prova:

Assumindo (6.1) válida para os três níveis de estresse, temos,

$$\lambda_1^* = \exp\{-(Z_1 + \beta_0 + \beta_1 X_1)\} , \quad (7.9)$$

$$\lambda_2^* = \exp\{-(Z_2 + \beta_0 + \beta_1 X_2)\} , \quad (7.10)$$

$$\lambda_3^* = \exp\{-(Z_3 + \beta_0 + \beta_1 X_3)\} . \quad (7.11)$$

Resolvendo as equações (7.10) e (7.11) com respeito a β_0 e β_1 , obtemos,

$$\beta_0 = \log \left(\frac{\lambda_3^* \frac{X_2}{X_3 - X_2}}{\lambda_2^* \frac{X_3}{X_3 - X_2}} \right) - \left(\frac{X_3}{X_3 - X_2} \right) Z_2 + \left(\frac{X_2}{X_3 - X_2} \right) Z_3 , \quad (7.12)$$

e

$$\beta_1 = \log \left(\frac{\lambda_2^*}{\lambda_3^*} \right)^{\frac{1}{X_3 - X_2}} - \frac{Z_3 - Z_2}{X_3 - X_2} . \quad (7.13)$$

Substituindo (7.12) e (7.13) em (7.9) obtemos (7.8). $\square$

Igualando as expressões (7.8) e (7.9) (ver Resultado), temos,

$$e^{-\beta_0} = \frac{\lambda_2^{*Y_1}}{\lambda_3^{*Y_2}} \frac{\exp\{-Z_1 + Y_1 Z_2 - Y_2 Z_3\}}{\exp\{-(Z_1 + \beta_1 X_1)\}} . \quad (7.14)$$

Substituindo (7.14) em (7.7), temos,

$$L(\lambda_2^*, \lambda_3^*, \beta_1) \propto \left\{ \frac{\lambda_2^{*Y_1}}{\lambda_3^{*Y_2}} \frac{\exp\{-Z_1 + Y_1 Z_2 - Y_2 Z_3\}}{\exp\{-(Z_1 + \beta_1 X_1)\}} \right\}^{r'} e^{-\beta_1 a_1^*} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_2^{*Y_1}}{\lambda_3^{*Y_2}} \frac{\exp\{-Z_1 + Y_1 Z_2 - Y_2 Z_3\}}{\exp\{-(Z_1 + \beta_1 X_1)\}} \right)^{-1} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} \right\} \quad (7.15)$$

Daí, como $\theta_1^* = 1/\lambda_1^*$, $\lambda_1^* = \frac{\lambda_2^{*Y_1}}{\lambda_3^{*Y_2}} \exp\{-Z_1 + Y_1 Z_2 - Y_2 Z_3\}$ (ver Resultado), a função de verossimilhança para θ_1^* e β_1 é dada (de(7.15)) por,

$$L(\theta_1^*, \beta_1) = \theta_1^{*-r'} \exp\{-\beta_1(a_1^* - r'X_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}\} \quad (7.16)$$

Observe que poderíamos obter a mesma expressão notando que $\theta_1^* = \exp\{Z_1 + \beta_0 + \beta_1 X_1\}$ (sob o nível usual de estresse) pode ser substituído diretamente na função de verossimilhança (7.7), uma vez que assumimos que a relação estresse- resposta (6.1) é válida para o nível usual, X_1 .

A densidade a priori não-informativa de Jeffreys para θ_1^* e β_1 é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1^*, \beta_1) &\propto \{\det I(\theta_1^*, \beta_1)\}^{1/2} \\ &\propto \frac{1}{\theta_1^*}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde $\theta_1^* > 0$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

Considerando a densidade a priori (7.17), a densidade a posteriori conjunta para θ_1^* e β_1 é dada por

$$\pi(\theta_1^*, \beta_1 / \text{dados}) \propto \theta_1^{*-(r'+1)} \exp\{-\beta_1(a_1^* - r'X_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}\}, \quad (7.18)$$

onde $\theta_1^* > 0$ e $-\infty < \beta_1 < \infty$.

Definindo $-nh_{\theta_1^*}(\beta_1) = -\beta_1(a_1^{*'} - r'X_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}$ a densidade a posteriori marginal de θ_1^* aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2) é dada por,

$$\left. \begin{aligned} & \pi(\theta_1^*/\text{dados}) \propto \theta_1^{-(r'+1/2)} e^{-\hat{\beta}_1(a_1^{*'} - r'X_1)} \\ & \frac{\exp\{-\theta_1^{*-1} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}}{\{\sum_{i=2}^3 A_i (X_1 - X_i)^2 e^{-(Z_i - Z_1) + \hat{\beta}_1(X_1 - X_i)}\}^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

onde $\theta_1^* > 0$ e $\hat{\beta}_1$ maximiza $-\beta(a_1^{*'} - r'X_1) - \theta_1^{*-1} \sum_{i=2}^3 A_i e^{-(Z_i - Z_1) + \beta_1(X_1 - X_i)}$.

Observe a equivalência entre (7.19) e (6.14).

Assim, mesmo sem a utilização do nível usual de estresse, X_1 , podemos obter inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1^* .

Capítulo 8

Análise de Testes de Sobrevivência Acelerados com o Modelo de Eyring Generalizado

Até o momento, consideramos experimentos acelerados de componentes submetidos a níveis de uma única variável física de estresse. Comumente encontramos situações práticas onde os componentes são submetidos a níveis de duas ou mais variáveis estresse.

O modelo de Eyring generalizado (1.6), como visto na seção 1.2, é uma das relações estresse-resposta mais utilizadas em testes de sobrevivência acelerados de componentes que estão sob efeito de dois tipos de estresse, um termal e outro não-termal, por exemplo, voltagem e temperatura.

Neste capítulo, assumindo dados sob esquema de censura de Tipo II, apresentamos os resultados de uma Análise Bayesiana do modelo de Eyring generalizado, considerando inicialmente uma distribuição de sobrevivência Exponencial, e enfatizamos os problemas existentes em uma análise clássica usual deste modelo.

Em uma segunda etapa, considerando uma distribuição de Weibull para os

tempos de sobrevivência, com parâmetro de forma comum para todas as combinações de níveis de estresse, mostramos que, assumindo o modelo de Eyring generalizado com dois parâmetros conhecidos, é possível analisá-lo da mesma forma que fizemos com a relação estresse-resposta geral (6.1).

8.1 Formulação do Experimento Acelerado

Considere o modelo de Eyring generalizado (1.6), dado por,

$$\lambda_i = \alpha V_i \exp\left\{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}\right\} \quad (8.1)$$

e assuma dados sob um esquema de censura de Tipo II.

Sob k combinações aleatorizadas de níveis de estresse U_i e V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, o experimento termina quando observamos r_i falhas entre as n_i observações na i -ésima combinação de estresse.

Assim, com n_i unidades em teste sob os níveis de estresse U_i e V_i , temos, r_i observações ordenadas não censuradas dadas por, $t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{ir_i}$, e $n_i - r_i$ observações censuradas iguais a t_{ir_i} , $i = 1, 2, \dots, k$.

8.2 Procedimento usual de Análise do Modelo

Na análise do modelo de Eyring generalizado é usual obter os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo linear, pois a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança requer a solução de quatro equações não-lineares simultâneas (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974), o que de certa forma demanda um esforço computacional relativamente grande.

Seja $\hat{\lambda}_i = r_i/A_i$, onde $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{i,r_i}$, o estimador de máxima verossimilhança de λ_i sob a i -ésima combinação de níveis de estresse U_i e V_i , considerando-se a f.d.p. dada (em(2.1)) por,

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\}.$$

Considerando um termo de erro multiplicativo, e o modelo $\hat{\lambda}_i = \lambda_i \xi_i, i = 1, 2, \dots, k$, temos (de(8.1)),

$$\log \hat{\lambda}_i = \log \alpha + \log V_i + \gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i} + \log \xi_i. \quad (8.2)$$

Definindo,

$$\underline{\alpha}' = (\log \alpha, \gamma, \delta, -\beta),$$

$$\underline{\xi}' = (\log \xi_1, \log \xi_2, \dots, \log \xi_k),$$

$$\underline{Y}' = (\log(\hat{\lambda}_1/V_1), \log(\hat{\lambda}_2/V_2), \dots, \log(\hat{\lambda}_k/V_k)),$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & U_1 & U_1/k_1 V_1 & (k_1 V_1)^{-1} \\ 1 & U_2 & U_2/k_1 V_2 & (k_1 V_2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & U_k & U_k/k_1 V_k & (k_1 V_k)^{-1} \end{bmatrix},$$

o modelo (8.2) pode ser escrito na forma matricial,

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\alpha} + \underline{\xi}. \quad (8.3)$$

O melhor estimador linear não-viciado para o vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ pode ser obtido se as condições necessárias para usarmos o Teorema de Gauss - Markoff são satisfeitas, isto é, $E(\xi) = 0$ e $E(\xi\xi') = \sigma^2 \mathbb{I}$, onde σ^2 é constante e $\mathbb{I}$ é a matriz identidade. Dessa forma, se a distribuição do vetor $\underline{Y}$ é Normal multivariada, os limites de confiança para o vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ podem ser obtidos com facilidade (ver por exemplo, Seber, 1977).

Singpurwalla e Goldschen (1974) mostram, através de simulações de Monte-Carlo, que as condições necessárias para usarmos o Teorema de Gauss-Markoff é que $\log(\hat{\lambda}_i)$ tenha distribuição Normal, e que $r_i = r$ para todo i , isto é, que o número de falhas seja o mesmo em todas as combinações de níveis de estresse U_i e V_i $i = 1, 2, \dots, k$ (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singapurwalla, 1974).

Portanto, assumindo $r_i = r, i = 1, 2, \dots, k$ e $\log \hat{\lambda}_i$ com distribuição Normal, os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo são dados por,

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\alpha}}' &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underline{Y}, \\ e \\ \hat{\underline{\alpha}} &\sim N(\underline{\alpha}; \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}), \end{aligned} \tag{8.4}$$

onde $\underline{\alpha}' = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4)$, $\alpha_1 = \log \alpha$, $\alpha_2 = \gamma$, $\alpha_3 = \delta$ e $\alpha_4 = -\beta$.

Devido a suposição de normalidade, os elementos de $\hat{\underline{\alpha}}$ são os estimadores de máxima verossimilhança dos elementos de $\underline{\alpha}$.

Com os estimadores $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$, e $\hat{\alpha}_4$, observamos que,

$$\hat{\lambda}_i = V_i \exp\left\{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 U_i + \hat{\alpha}_3 \frac{U_i}{k_1 V_i} + \hat{\alpha}_4 \frac{1}{k_1 V_i}\right\} \tag{8.5}$$

é um estimador assintoticamente não-viciado para λ_i sob os níveis de estresse U_i e V_i , e um intervalo de confiança $100(1 - \alpha')\%$ para λ_i é dado por,

$$p[\hat{\lambda}_i \exp\{t_{(\alpha'/2)} J_i\} \leq \lambda_i \leq \hat{\lambda}_i \exp\{-t_{(\alpha'/2)} J_i\}] = 1 - \alpha', \quad (8.6)$$

onde $J_i = \{S^2[1 + X'_i(X'X)^{-1}X_i]\}^{1/2}$, $X'_i = (1, U_i, \frac{U_i}{K_1 V_i}, \frac{1}{K_1 V_i})$, $S^2 = \{Y'[\mathbb{I} - X(X'X)^{-1}X']Y\}/(k - 4)$, e $t_{\alpha'/2}$ é o $100(\alpha'/2)$ -ésimo percentil da distribuição t de Student com $K - 4$ graus de liberdade (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

Podemos notar que quando usamos esta metodologia de análise estamos considerando um modelo linear com $\log(\hat{\lambda}_i)$ em lugar dos dados de cada combinação de estresse U_i e V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, isto é, toda a variabilidade dos dados em cada combinação de níveis de estresse não é considerada. Também, o modelo tem um termo de erro multiplicativo, o qual pode não ser apropriado.

Assim, temos motivação suficiente para desenvolvermos uma Análise Bayesiana do modelo de Eyring generalizado.

8.3 Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Generalizado assumindo uma Distribuição Exponencial para os tempos de Sobrevivência

Nesta seção, um procedimento Bayesiano de análise do modelo de Eyring generalizado é determinado. Consideramos inicialmente os parâmetros α, β e γ desconhecidos, depois assumimos γ e δ conhecidos e finalmente, consideramos uma análise Bayesiana assumindo β, γ e δ conhecidos.

8.3.1 Uma Análise Bayesiana assumindo α, β, γ e δ desconhecidos

Assumindo k combinações aleatorizadas de níveis de estresse U_i e V_i , uma distribuição de sobrevivência Exponencial e um esquema de censura de Tipo II, a função de verossimilhança para $\underline{\lambda}' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ é dada (ver seção 2.2) por,

$$L(\underline{\lambda}) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{r_i} \exp\{-\lambda_i A_i\}. \quad (8.7)$$

Substituindo λ_i , dado em (8.1), na expressão (8.7), obtemos a função de verossimilhança para α, β, γ e δ dada por,

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha^r \left(\prod_{i=1}^k V_i^{r_i} \right) \exp\{\gamma a_1 + \delta a_2 - \beta a_3 - \alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i}\}, \quad (8.8)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i U_i$, $a_2 = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k r_i U_i / V_i$, $a_3 = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k r_i / V_i$ e $b_i = \frac{\beta}{k_1 V_i} - \gamma U_i - \frac{\delta U_i}{k_1 V_i}$.

A matriz de informação de Fisher com respeito a α, β, γ e δ é dada por,

$$I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\alpha^2} & -\frac{1}{k_1 \alpha} \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} & \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k r_i U_i & \frac{1}{k_1 \alpha} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i} \\ \frac{1}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i^2} & -\frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i} & -\frac{1}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i^2} & \\ & \sum_{i=1}^k r_i U_i^2 & \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i^2}{V_i} & \\ \text{simétrica} & & \frac{1}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i^2}{V_i^2} & \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Considerando (8.9), a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \propto \frac{1}{\alpha}, \quad (8.10)$$

onde $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta, \gamma, \delta < \infty$.

A densidade a posteriori conjunta para α, β, γ e δ é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta / \text{dados}) \propto \alpha^{r-1} \exp\{\gamma a_1 + \delta a_2 - \beta a_3 - \alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}}\}, \quad (8.11)$$

onde $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta, \gamma, \delta < \infty$.

A densidade a posteriori conjunta marginal para β, γ e δ é dada (de(8.11)) por,

$$\pi(\beta, \gamma, \delta / \text{dados}) \propto \exp\{\gamma a_1 + \delta a_2 - \beta a_3\} \left(\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}} \right)^{-r}, \quad (8.12)$$

onde $-\infty < \beta, \gamma, \delta < \infty$.

Usando o método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), a densidade a posteriori conjunta marginal aproximada para γ e δ é dada por,

$$\pi(\gamma, \delta / \text{dados}) \propto \frac{\exp\{\gamma a_1 + \delta a_2 - \hat{\beta} a_3\} \{h''_{\gamma, \delta}(\hat{\beta})\}^{1/2}}{\left\{ \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \hat{\beta} \frac{1}{k_1 V_i}} \right\}^r}, \quad (8.13)$$

onde $-\infty < \gamma, \delta < \infty$, $\hat{\beta}$ maximiza $-nh_{\gamma, \delta}(\beta) = -\beta a_3 - r \log(\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i})$ para cada par (γ, δ) fixo, $b_i = \frac{\beta}{k_1 V_i} - \gamma U_i - \delta \frac{U_i}{k_1 V_i}$ e

$$-nh''_{\gamma, \delta}(\beta) = \frac{r}{k_1} \frac{(\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{V_i} e^{-b_i} \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i}) - (\sum_{i=1}^k A_i e^{-b_i})^2}{(\sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i})^2}.$$

8.3.2 Uma Análise Bayesiana assumindo γ e δ conhecidos

Assumindo γ e δ conhecidos, a função de verossimilhança para α e β é dada (de (8.8)) por,

$$L(\alpha, \beta) \propto \alpha^r \exp\{-\beta a_3 - \alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i}\}, \quad (8.14)$$

onde a_3 e b_i são dados em (8.8).

Considerando uma priori não-informativa para α e β , dada por, $\pi(\alpha, \beta) \propto \alpha^{-1}, \alpha > 0, -\infty \leq \beta \leq \infty$, a densidade a posteriori conjunta para α e β é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \alpha^{r-1} \exp\{-\beta a_3 - \alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i}\}, \quad (8.15)$$

onde $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

A densidade a posteriori marginal para β é dada por,

$$\pi(\beta / \text{dados}) \propto e^{-\beta a_3} \left\{ \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}} \right\}^{-r}, \quad (8.16)$$

onde $-\infty < \beta < \infty$.

Como temos interesse em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob os níveis usuais de estresse, U_1 e V_1 , obtemos agora a densidade a posteriori para θ_1 .

Observe que a densidade a posteriori conjunta para α e β (8.15) pode ser escrita na forma,

$$\pi(\alpha, \beta/dados) \propto \alpha^{r-1} \exp\{-\beta a_3 - \alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{c_i - \beta \frac{1}{k_1 V_i}}\}, \quad (8.17)$$

onde $c_i = \gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i}$, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < \infty$.

Considerando a transformação $\psi_1 = \exp\{\beta/k_1 V_1\}$ e $\psi_2 = \alpha V_1 e^{c_1}$ (isto é, $\beta = k_1 V_1 \log(\psi_1)$ e $\alpha = \psi_2/(V_1 e^{c_1})$), a densidade a posteriori conjunta para ψ_1 e ψ_2 é dada por,

$$\pi(\psi_1, \psi_2/dados) \propto \psi_2^{r-1} \psi_1^{-(a_3 k_1 V_1 + 1)} \exp\{-\psi_2 e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i} \psi^{-V_1/V_i}\}, \quad (8.18)$$

onde $\psi_1, \psi_2 > 0$.

Observando que (de(8.1)) sob os níveis usuais de estresse, $\theta_1 = 1/\lambda_1 = \psi_1/\psi_2$, e considerando a transformação $\theta_1 = \psi_1/\psi_2$ e $\psi_2 = \psi_2$ temos que a densidade a posteriori conjunta para θ_1 e ψ_2 é dada por,

$$\pi(\theta_1, \psi_2/dados) \propto \frac{\exp\{-\psi_2 e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i} \psi_2^{-V_1/V_i} \theta_1^{-V_1/V_i}\}}{\psi_2^{a_3 k_1 V_1 - r + 1} \theta_1^{a_3 k_1 V_1 + 1}}, \quad (8.19)$$

onde $\psi_1, \psi_2 > 0$.

Utilizando o método de aproximação de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2), a densidade a posteriori marginal aproximada para θ_1 é dada por,

$$\pi(\theta_1/dados) \propto \frac{\exp\{-e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i} \hat{\psi}_2^{(1 - \frac{V_i}{V_1})} \theta_1^{-V_1/V_i}\}}{\theta_1^{a_3 k_1 V_1 + 1} \hat{\psi}_2^{a_3 k_1 V_1 - r + 1} \{h''_{\theta_1}(\hat{\psi}_2)\}^{1/2}}, \quad (8.20)$$

onde $\vartheta_1 > 0, \hat{\psi}_2$ maximiza $-nh_{\theta_1}(\psi_2) = -(a_3 k_1 V_1 - r + 1) \log \psi_2 - e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i} \psi_2^{(1-\frac{V_i}{V_1})} \theta_1^{-V_1/V_i}$, e

$$-nh''_{\theta_1}(\psi_2) = \frac{a_3 k_1 V_1 - r + 1}{\psi_2^2} + e^{-c_1} \sum_{i=1}^k A_i e^{c_i} \left(1 - \frac{V_i}{V_1}\right) \psi_2^{-(1+\frac{V_i}{V_1})} \theta_1^{-\frac{V_i}{V_1}}.$$

Podemos observar que poderíamos ter obtido a densidade a posteriori marginal para θ_1 considerando somente a transformação $\theta_1 = \exp\{\beta/k_1 V_1\}/\alpha V_1 e^{c_1}$ e $\beta = \beta$.

Também, até o momento, nada discutimos sobre a precisão das densidades a posteriori aproximadas pelo método de Laplace completamente exponencial. Neste contexto, como a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (ver(8.10)) não é localmente uniforme, eventuais aproximações de Laplace completamente exponenciais para as densidades a posteriori dos parâmetros envolvidos, em geral, não terão boa precisão (ver por exemplo, Achar e Smith, 1990d).

O mesmo problema é detectado quando assumimos os parâmetros γ e δ conhecidos, isto é, $\pi(\alpha, \beta) \propto \alpha^{-1}$ (não é localmente uniforme). Além disso, as densidades a priori não-informativas para os parâmetros transformados são dadas por, $\pi(\psi_1, \psi_2) \propto (\psi_1, \psi_2)^{-1}$ e $\pi(\theta_1, \psi_2) \propto (\theta_1 \psi_2)^{-1}$, ambas não são constantes, sugerindo que a aproximação da densidade a posteriori marginal para θ_1 (8.20), pelo método de Laplace completamente exponencial, não tem, em geral, boa precisão (ver por exemplo, Achcar, 1988, 1989).

Dessa forma, considerando a transformação $\phi_1 = \log \theta_1$ e $\phi_2 = \log \psi_2$, a densidade a priori para ϕ_1 e ϕ_2 é dada por,

$$\pi(\phi_1, \phi_2) \propto \text{constante}, \quad (8.21)$$

onde $-\infty < \phi_1, \phi_2 < \infty$ (localmente uniforme).

A densidade a posteriori conjunta para ϕ_1 e ϕ_2 é dada (de (8.19)) por,

$$\pi(\phi_1, \phi_2 / \text{dados}) \propto \frac{\exp\{-e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i - \phi_1 \frac{V_i}{V_1} - \phi_2 \frac{V_i}{V_1}}\}}{\exp\{\phi_1 a_3 k_1 V_1 + \phi_2 (a_3 k_1 V_1 - r + 2)\}}, \quad (8.22)$$

onde $-\infty < \phi_1, \phi_2 < \infty$.

Definindo $-nh_{\phi_1}(\phi_2) = -\phi_2(a_3 k_1 V_1 - r + 2) - e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i - \phi_1 \frac{V_i}{V_1} - \phi_2 \frac{V_i}{V_1}}$, a densidade a posteriori marginal para $\phi_1 = \log \theta_1$ aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial (ver Apêndice 2) é dada por,

$$\pi(\phi_1 / \text{dados}) \propto \frac{\exp\{-\phi_1 a_3 k_1 V_1 - \hat{\phi}_2 (a_3 k_1 V_1 - r + 2) - e^{-c_1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i e^{c_i - \phi_1 \frac{V_i}{V_1} - \hat{\phi}_2 (1 + \frac{V_i}{V_1})}\}}{\{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_1} A_i (1 + \frac{V_i}{V_1})^2 e^{c_i - \phi_1 \frac{V_i}{V_1} - \hat{\phi}_2 (1 + \frac{V_i}{V_1})}\}^{1/2}} \quad (8.23)$$

onde $-\infty < \phi_1 < \infty$ e $\hat{\phi}_2$ maximiza $-nh_{\phi_1}(\phi_2)$.

Observe que nesta parametrização (ϕ_1 e ϕ_2), a densidade a posteriori aproximada (8.23) tem, em geral, boa precisão ($\pi(\phi_1, \phi_2)$ é localmente uniforme).

8.3.3 Uma Análise Bayesiana assumindo β, γ e δ conhecidos

Assumindo β, γ e δ conhecidos, a função de verossimilhança para α é dada (de (8.8)) por,

$$L(\alpha) \propto \alpha^r \exp\left\{-\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}}\right\}. \quad (8.24)$$

Considerando uma densidade a priori não-informativa para α dada por, $\pi(\alpha) \propto \alpha^{-1}, \alpha > 0$, a densidade a posteriori para α é dada por,

$$\pi(\alpha/dados) \propto \alpha^{r-1} \exp\left\{-\alpha \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}}\right\}, \quad (8.25)$$

onde $\alpha > 0$.

A densidade a posteriori para $\theta_1 = e^{b_1}/(\alpha V_1)$, $b_1 = \beta \frac{1}{k_1 V_1} - \gamma U_1 - \delta \frac{U_1}{k_1 V_1}$, é dada por,

$$\pi(\theta_1/dados) = \frac{B^r}{V_1^r \Gamma(r)} \theta_1^{-(r+1)} \exp\left\{-\frac{B}{\theta_1 V_1}\right\}, \quad (8.26)$$

onde $\theta_1 > 0$, $B = e^{b_1} \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-b_i}$ e $b_i = \beta \frac{1}{k_1 V_i} - \gamma U_i - \delta \frac{U_i}{k_1 V_i}$.

A moda da densidade a posteriori (8.26) é dada por,

$$\tilde{\theta}_1' = \frac{B}{V_1(r+1)} \quad (8.27)$$

Observe que (de (8.26)) a densidade a posteriori para $\frac{2B}{V_1 \theta_1}$ é a densidade de uma distribuição Qui-Quadrado com $2r$ graus de liberdade. Portanto, um intervalo HPD $100(1 - \gamma')\%$, para o tempo médio de sobrevivência θ_1 é dado por,

$$\left(\frac{2B}{V_1 \chi_{2r(1-\gamma'/2)}^2}; \frac{2B}{V_1 \chi_{2r(\gamma'/2)}^2} \right), \quad (8.28)$$

onde $\chi_{2r(\gamma'/2)}^2$ é o quantil da distribuição Qui-Quadrado dado por, $P(\chi_{2r}^2 \leq \chi_{2r(\gamma'/2)}^2) = \gamma'/2$.

8.4 Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Generalizado assumindo uma Distribuição de Sobrevivência de Weibull

Na seção anterior onde desenvolvemos um procedimento Bayesiano de análise do modelo de Eyring generalizado considerando uma distribuição Exponencial, em nenhum momento nos preocupamos em fazer relação entre esse modelo e as relações estresse-resposta que consideram uma única variável estresse (ver seção 1.2).

Considerando uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência, mostramos nesta seção que, assumindo o modelo de Eyring generalizado com dois parâmetros conhecidos, é possível analisa-lo, no enfoque Bayesiano, de forma análoga à análise da relação estresse-resposta geral (6.1) (ver Capítulo 6).

8.4.1 Procedimento Bayesiano de Análise Assumindo todos os Parâmetros Desconhecidos

Considere T^* a variável aleatória com distribuição de Weibull, com f. d. p. dada (de(6.2)) por,

$$f(t^*, \lambda^*, p) = \lambda^* p (\lambda^* t^*)^{p-1} \exp\{-(\lambda^* t^*)^p\},$$

onde $\lambda^* = \alpha V \exp\{\gamma U + \delta \frac{U}{k_1 V} - \beta \frac{1}{k_1 V}\}$ (U é a variável não-termal e V é a variável temperatura) e p é comum para todas as combinações de níveis de estresse.

Assuma o modelo de Eyring generalizado escrito na forma,

$$\lambda_i^* = V_i \exp\{\alpha^* + \gamma U_i + \delta \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta \frac{1}{k_1 V_i}\}, \quad (8.29)$$

onde $\alpha^* = \log \alpha$ e dados sob um esquema de censura de Tipo II.

Então, sob k combinações de níveis de estresse U_i e V_i , a função de verossimilhança para $\alpha^*, \gamma, \delta, \beta$ e p é dada por,

$$L(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta, p) = p^r \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \cdot \exp\{\alpha^* pr + \gamma pa_1 + \delta pa_2 - \beta pa_3\} \cdot \exp\{-e^{-\alpha^* p} \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^p e^{\gamma p U_i + \delta p \frac{U_i}{V_i} - \beta p \frac{1}{V_i}}\}, \quad (8.30)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i U_i$, $a_2 = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i}$, $a_3 = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k r_i / V_i$, $e A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p} + (n_i + r_i) t_{ir_i}^{*p}$.

Observe que, com $\alpha^* = \log \alpha$ e $p = 1$, (8.30) reduz-se à expressão (8.8).

A matriz de informação de Fisher com respeito a $\alpha^*, \gamma, \delta, \beta$ dado p é dada por,

$$I_p(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta) = \begin{bmatrix} p^2 r & -\frac{p^2}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} & p^2 \sum_{i=1}^k r_i U_i & p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i} \\ \frac{p^2}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i^2} & -\frac{p^2}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i} & -\frac{p^2}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i}{V_i^2} & \\ & p^2 \sum_{i=1}^k r_i U_i^2 & \frac{p^2}{k_1} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i^2}{V_i} & \\ \text{simétrica} & & \frac{p^2}{k_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i U_i^2}{V_i^2} & \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

A densidade a priori não-informativa para $\alpha^*, \gamma, \delta, \beta$ e p pode ser escrita na forma,

$$\pi(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta, p) = \pi(\alpha^*, \gamma, \delta, \beta/p) \pi_0(p). \quad (8.32)$$

Usando a regra multiparamétrica de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973),

$$\pi(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta/p) \propto \frac{\det\{I_p(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta)\}^{1/2}}{p^2},$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha^*, \gamma, \delta, \beta < \infty$.

Assumindo $\pi_0(p) \propto 1/p, p > 0$ (densidade a priori localmente uniforme para $\log p$), a densidade a priori não-informativa para $\alpha^*, \gamma, \delta, \beta$ e p , baseada na regra multiparamétrica de Jeffreys, é dada por,

$$\pi(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta, p) \propto p, \quad (8.33)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha^*, \gamma, \delta, \beta < \infty$.

Considerando a densidade a priori (8.33), a densidade a posteriori para $\alpha^*, \gamma, \delta, \beta$ e p é dada por,

$$\left. \begin{aligned} \pi(\alpha^*, \beta, \gamma, \delta, p/\text{dados}) &\propto p^{r-1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \\ &\exp\{\alpha^* pr + \gamma pa_1 + \delta pa_2 - \beta pa_3\} \cdot \\ &\exp\{-e^{\alpha^* p} \sum_{i=1}^k A_i(p) U_i^p e^{\gamma p U_i + \delta p \frac{U_i}{k_1 V_i} - \beta p \frac{1}{k_1 V_i}}\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

onde $p > 0$ e $-\infty < \alpha^*, \beta, \gamma, \delta < \infty$.

Observe que, utilizando o método de Laplace para aproximação de integrais (ver Apêndice 2), e com algum esforço algébrico, podemos obter a densidade a posteriori marginal para o parâmetro p . Além disso, considerar o modelo de Eyring generalizado na forma (8.29) onde $\alpha^* = \log(\alpha)$ torna-se interessante a medida que

nesta parametrização temos uma densidade a priori não-informativa para α^*, β, γ e δ , localmente uniforme (ver (8.31) com $p = 1$), onde, como visto nos capítulos anteriores, podemos ter maior precisão quando da utilização do método de aproximação de Laplace no cálculo de densidades a posteriori marginais.

8.4.2 Procedimento Bayesiano de Análise assumindo γ e δ conhecidos

Assumindo γ e δ conhecidos, a função de verossimilhança para α^*, β e p é dada (de (8.30)) por,

$$L(\alpha^*, \beta, p) \propto p^r (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k t_{ij}^{*p-1}) (\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i}) \exp\{\alpha^* pr - \beta pa_3\} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \cdot \exp\{-e^{\alpha^* p} \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^p e^{c'_i - \beta p \frac{1}{k_1 V_i}}\} \end{array} \right\} \quad (8.35)$$

onde r, a_3 e $A_i(p)$ são dados em (8.30) e $c'_i = \gamma p U_i + \delta p \frac{U_i}{k_1 V_i}$.

Considerando uma densidade a priori não-informativa para α^*, β e p , dada por, $\pi(\alpha^*, \beta, p) \propto p, p > 0$ e $-\infty < \alpha^*, \beta < \infty$, a densidade a posteriori conjunta para esses três parâmetros é dada por,

$$\pi(\alpha^*, \beta, p / \text{dados}) \propto p^{r+1} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k t_{ij}^{*p-1}) (\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i}) \exp\{\alpha^* pr - \beta pa_3\} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \cdot \exp\{-e^{\alpha^* p} \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^p e^{c'_i - \beta p \frac{1}{k_1 V_i}}\} \end{array} \right\} \quad (8.36)$$

onde $p > 0, -\infty < \alpha^*, \beta < \infty$ e c'_i é dada em (8.35).

Podemos observar que, definindo adequadamente as variáveis estresse e os parâmetros na expressão (8.36), esta torna-se equivalente à expressão (6.6), isto é, definindo $\beta_0 = -\alpha^*, \beta_1 = \frac{\beta}{k_1}, X_i = \frac{1}{V_i}$ e $Z_i = (\log V_i + c'_i)$, temos (8.36) igual à (6.6).

Dessa forma, seria redundante finalizarmos a Análise Bayesiana do modelo de Eyring generalizado assumido γ e δ conhecidos, pois, como esse modelo pode ser visto como caso particular do modelo geral (6.1), essa análise restringe-se à análise obtida no Capítulo 6.

Capítulo 9

Exemplos de Aplicação

Após termos determinado nos capítulos anteriores uma metodologia Bayesiana de análise para testes de sobrevivência acelerados, é de grande interesse, a título de ilustração, desenvolvermos alguns exemplos de aplicação das técnicas obtidas. É o que faremos neste capítulo.

9.1 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo de aplicação nosso objetivo é a comparação das análises Clássica e Bayesiana do modelo de Eyring com uma variável estresse desenvolvidas nos Capítulos 2 e 3, e a aplicação do procedimento de controle de qualidade obtido no Capítulo 4.

Os dados estão na Tabela 9.1, e foram gerados assumindo o modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) com $\alpha = -10$ e $\beta = 5$, a Distribuição Exponencial (2.1) e um esquema de censura de tipo II.

i	V_i^*	n_i	r_i	θ_i	A_i	Dados não censurados				
1	10	20	5	3631,55	18085,00	178	301	574	920	1007
2	15	20	6	2049,36	13182,00	101	115	147	609	705
3	20	20	7	1414,13	9907,03	767				
4	25	20	9	1076,13	9646,02	89	96	106	246	315
5	30	20	10	867,37	8676,00	347	622			
6	35	20	12	725,97	8763,96	95	98	131	221	236
7	40	20	13	623,98	7837,96	283	377	561	637	
8	45	20	14	547,00	7466,06	24	62	245	314	332
9	50	20	15	486,96	7137,90	338	386	401	491	553
10	55	20	18	438,59	8372,98	73	96	132	177	211
						345	361	378	399	416
						560	624			
						13	16	52	52	148
						229	255	288	317	359
						560	581	621		
						17	21	32	52	68
						87	112	197	366	384
						395	490	611	662	
						10	13	83	87	129
						135	196	244	250	262
						264	293	318	624	705
						11	39	53	90	96
						115	153	228	259	323
						356	388	411	597	761
						763	823	969		

(*) níveis da variável estresse temperatura.

Tabela 9.1: Dados gerados com $\alpha = -10$ e $\beta = 5$ - tempos de sobrevivência dos componentes.

9.1.1 Verificação Gráfica da Adequabilidade do Modelo

Um procedimento gráfico pode ser adotado para verificarmos a adequabilidade do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5).

Considere a expressão (2.6) que relaciona a taxa constante de falha, λ , e a variável estresse, V , sob o i -ésimo nível de estresse dada por, $\lambda_i = V_i \exp\{\alpha - \beta/V_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, isto é,

$$\log\left(\frac{\lambda_i}{V_i}\right) = \alpha - \beta \frac{1}{V_i}.$$

Considerando os dados da Tabela 9.1 e os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_i = \frac{r_i}{A_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ (ver por exemplo, Lawless, 1982), podemos construir um gráfico de $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$ versus $\frac{1}{V_i}$, e verificar a existência ou não de uma relação linear aproximada. Caso exista, dizemos que o modelo de Eyring com uma variável estresse é válido para a amostra em questão.

$\hat{\lambda}_i$	V_i	$\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$	$\frac{1}{V_i}$
0,0002765	10	-10,4960	0,1000
0,0004552	15	-10,4029	0,0667
0,0007066	20	-10,2508	0,0500
0,0009330	25	-10,1960	0,0400
0,0011526	30	-10,1669	0,0333
0,0013692	35	-10,1488	0,0286
0,0016586	40	-10,0907	0,0250
0,0018752	45	-10,0857	0,0222
0,0021015	50	-10,0771	0,0200
0,0021498	55	-10,1497	0,0182

Tabela 9.2: Valores de $\hat{\lambda}_i$, V_i , $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$ e $\frac{1}{V_i}$.

Dessa forma, obtemos a Tabela 9.2 dos valores de $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$ e $\frac{1}{V_i}$ e construímos (ver Figura 9.1) o gráfico de $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$ versus $\frac{1}{V_i}$.

Podemos observar na Figura 9.1 a existência de uma relação linear aproximada, implicando na adequabilidade do conjunto de dados gerados (ver Tabela 9.1) ao modelo de Eyring com uma variável estresse.

Figura 9.1: Gráfico de $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{v_i})$ versus $\frac{1}{v_i}$.

9.1.2 Análise Clássica do Problema

Nesta seção, aplicamos, aos dados da Tabela 9.1, a metodologia de análise clássica, baseada na aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros envolvidos (ver Capítulo 2).

Considerando os dados da Tabela 9.1 e as expressões (2.11) e (2.12), obtemos, numericamente, os estimadores de máxima verossimilhança para α e β dados por, $\hat{\alpha} = -9,9971$ e $\hat{\beta} = 5,2052$.

Como $r = 109$, $a_1 = 3,5496$ e $a_2 = 0,1565$, a inversa da matriz de informação de Fisher para α e β é dada (de (2.19)) por,

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0,0351 & 0,7961 \\ 0,7961 & 24,4460 \end{bmatrix},$$

e os intervalos de confiança 95% para α e β , considerando-se a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ (2.13), são dados por, $-10,3643 \leq \alpha \leq -9,6299$ e $-4,4856 \leq \beta \leq 14,8960$.

Usualmente, os pesquisadores industriais têm interesse em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível usual de estresse, V_1 .

O estimador de máxima verossimilhança para $\theta_1 = \frac{e^{\frac{\beta}{10}}}{10e^{\alpha}}$, considerando-se os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, obtidos acima, é dado por, $\hat{\theta}_1 = 3696,2453$.

A variância assintótica para θ_1 é dada (de (2.21)) por, $\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = 1.645.609,0910$, e um intervalo de confiança 95% para θ_1 , considerando-se a aproximação Normal assintótica (2.20), obtida através da utilização do método "Delta" (ver Apêndice 1), é dado por, $1181,9320 \leq \theta_1 \leq 6210,5590$.

Como visto no Capítulo 2, a aproximação assintótica (2.20), em geral, não tem boa precisão. Assim consideramos a reparametrização $\delta = \log \theta_1$ (ver sub-seção 2.6.3), onde temos uma melhor aproximação Normal do estimador de máxima verossimilhança de δ .

O estimador de máxima verossimilhança para δ é dado (de (2.47)) por, $\hat{\delta} = 8,215074$, a variância assintótica de δ é dada (de (2.51)) por, $\hat{\sigma}_{\delta}^2 = 0,120449$, e um intervalo de confiança 95% aproximado para θ_1 é dado por, $1872,0699 \leq \theta_1 \leq 7297,5941$.

9.1.3 Uma Solução Bayesiana para o Problema

Como visto no Capítulo 3, em inferência Bayesiana, inferências sobre os parâmetros de interesse são tipicamente baseadas nas suas densidades a posteriori.

Figura 9.2: Densidade a posteriori marginal para α .

Para inferirmos sobre os parâmetros de α e β , considerando o conjunto de dados da Tabela 9.1, construímos o gráfico da densidade a posteriori marginal aproximada para α (3.6), obtida pelo método de aproximação de Laplace completamente exponencial, e o gráfico da densidade a posteriori marginal para β (3.4) (ver Figuras 9.2 e 9.3). As modas dessas densidades a posteriori são dadas por, $\tilde{\alpha} = -9,9998$ e $\tilde{\beta} = 5,2040$. Os intervalos HPD aproximados 95% para α e β são dados por, $-10,3807 \leq \alpha \leq -9,5887$ e $-4,0197 \leq \beta \leq 15,8504$ (ver no Apêndice

4 a construção de Intervalos HPD).

Figura 9.3: Densidade a posteriori marginal para β .

Na Figura 9.4 temos o gráfico da densidade a posteriori marginal para θ_1 (3.9), aproximada pelo método de Laplace, cuja moda a posteriori é dada por $\tilde{\theta}_1 = 3704,00$. Um intervalo HPD aproximado 95% para θ_1 é dado por, $1981,2549 \leq \theta_1 \leq 7899,6863$.

Alternativamente, um intervalo HPD aproximado para θ_1 pode ser obtido considerando-se a transformação $\delta = \log \theta_1$. Nesta parametrização, como visto no Capítulo 3, temos uma boa precisão da aproximação de Laplace para a densidade a posteriori marginal para δ dada em (3.14). Assim construímos a Figura 9.5 do gráfico da densidade a posteriori marginal para δ . A moda desta densidade a posteriori é dada por $\tilde{\delta} = 8,217169$ ($\tilde{\theta}_1 = 3704,0015$). Um intervalo HPD aproximado 95% para δ é dado por, $7,6339 \leq \delta \leq 8,9429$, isto é, um intervalo HPD aproximado 95% para

θ_1 é dado por, $2067,0960 \leq \theta_1 \leq 7653,3596$.

Figura 9.4: Densidade a posteriori marginal para θ_1 .

9.1.4 Comparação entre as Estimativas Pontuais

Na Tabela 9.3 temos os estimadores de máxima verossimilhança para α e β (ver (2.11) e (2.12), respectivamente) e $\hat{\theta}_1 = e^{\beta/10}/10e^{\hat{\alpha}}$ e as modas das densidades a posteriori para α e β e θ_1 (ver (3.6), (3.4) e (3.9), respectivamente).

Parâmetros	Valor para Geração	Estimador de Máxima Verossimilhança	Moda a Posteriori
α	-10	$\hat{\alpha} = -9,9971$	$\tilde{\alpha} = -9,9998$
β	5	$\hat{\beta} = 5,2052$	$\tilde{\beta} = 5,2040$
θ_1	3631,55	$\hat{\theta}_1 = 3696,2453$	$\tilde{\theta}_1 = 3704,0000$

Tabela 9.3: Estimadores de máxima verossimilhança e modas a posteriori para os parâmetros α , β e θ_1 .

Observamos que as estimativas pontuais para os parâmetros são muito próximas.

Figura 9.5: Densidade a posteriori marginal para $\delta = \log \theta_1$.

9.1.5 Comparação entre as Estimativas por Intervalo

Para compararmos as estimativas por intervalo obtidas, pelo método clássico de estimação (baseadas na aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros envolvidos) e pela análise Bayesiana do problema, usamos a estatística da razão de verossimilhança assintótica, a qual é invariante sob parametrizações (ver por exemplo, Bickel e Doksum, 1977). Intervalos de confiança baseados nesta estatística podem ser obtidos graficamente via teoria de verossimilhança (ver por exemplo, Kalbfleisch, 1985; Apêndice 3).

Considerando a função de verossimilhança para α e β (2.8) obtemos as

funções de verossimilhança relativas maximizadas para α e β , $r_\beta(\alpha)$ e $r_\alpha(\beta)$, respectivamente, e pelos gráficos de α versus $r_\beta(\alpha)$ e de β versus $r_\alpha(\beta)$, determinamos os intervalos de confiança aproximados 95% para α e β dados por, $-10,4863 \leq \alpha \leq -9,6231$ e $-3,6331 \leq \beta \leq 15,6763$, como descrito no Apêndice 3.

Analogamente, considerando $\ell(\theta_1, \beta)$ (dada em (2.24)), obtemos $r_\beta(\theta_1)$, e um intervalo de confiança aproximado 95% para θ_1 é dado por, $2055,5556 \leq \theta_1 \leq 7800,0000$.

Normalidade Assintótica de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$	Normalidade Assintótica de $\hat{\theta}_1$ (método "Delta")
$(-10,364 \leq \alpha \leq -9,630)$	$(1181,932 \leq \theta_1 \leq 6210,559)$
$(-4,486 \leq \beta \leq 14,896)$	
Estatística da Razão de Verossimilhança Assintótica Parametrização α e β	Parametrização θ_1 e β
$(-10,486 \leq \alpha \leq -9,623)$	$(2055,556 \leq \theta_1 \leq 7800,00)$
$(-3,633 \leq \beta \leq 15,676)$	
Intervalos HPD Baseados nas Densidades a Posteriori para α , β e $\delta = \log \theta_1$ dados em (3.6), (3.4) e (3.14).	
$(-10,357 \leq \alpha \leq -9,605)$	$(2067,096 \leq \theta_1 \leq 7653,036)$
$(-3,588 \leq \beta \leq 15,984)$	

Tabela 9.4: Intervalos de confiança e Intervalos HPD 95% para α, β e θ_1 .

Para facilitar a comparação construímos a Tabela 9.4 onde temos alguns intervalos de confiança e intervalos HPD para α, β e θ_1 .

Observamos (ver Tabela 9.4) que todos os intervalos para α e β são aproximadamente iguais, porém, tal fato não ocorre para θ_1 . O intervalo HPD aproximado 95% para θ_1 obtido através da densidade a posteriori para $\delta = \log \theta_1$ é muito próximo do intervalo de confiança 95% para θ_1 obtido via estatística da razão de verossimilhança assintótica. Já o intervalo de confiança 95% para θ_1 obtido pelo

método “Delta” fornece um resultado bem diferente (como mencionado do Capítulo 2, o pesquisador deve ter muito cuidado em utilizar esse método neste caso, pois a aproximação Normal, em geral, não é precisa).

Figura 9.6: Contornos da função de verossimilhança para α e β .

Tal fato é ilustrado graficamente. Na Figura 9.6 temos o gráfico dos contornos da função de verossimilhança para α e β (2.7). Observe a existência de uma boa forma elíptica, isto é, boa normalidade para os estimadores de máxima verossimilhança para α e β . Porém, considerando o gráfico dos contornos da função de verossimilhança para θ_1 e β (2.23) (ver Figura 9.7) notamos que não apresenta uma boa forma elíptica, sugerindo que não é precisa a aproximação Normal assintótica

para a função de verossimilhança para θ_1 e β .

Figura 9.7: Contornos da função de verossimilhança para θ_1 e β .

9.1.6 O Efeito de Reparametrização na Análise Bayesiana do Modelo

Em geral, o uso de reparametrização na análise Bayesiana de modelos estatísticos têm certas implicações práticas. Por exemplo, Hills (1987) estuda a eficiência da regra de Gauss-Hermite, usada em muitas rotinas de integração para determinar momentos a posteriori, e observa que essa regra pode não ser apropriada ou ineficiente quando a densidade a posteriori dos parâmetros de interesse não tem boa aproximação por uma densidade Normal multiplicada por um polinômio.

Quando da utilização de métodos de aproximação para integrais, o método

de aproximação de Laplace (ver Apêndice 2) pode ter sua precisão comprometida se a densidade a posteriori de interesse não tem uma forma bem comportada (aproximadamente Normal) e a procura de uma parametrização adequada torna-se interessante.

Figura 9.8: Contornos das densidades a posteriori conjuntas para (θ_1, β) , (δ, β) , (φ, β) e (ψ, β) .

Neste contexto, na Figura 9.8, onde temos os contornos das densidades

a posteriori conjuntas para os parâmetros (θ_1, β) (parametrização original), $(\delta = \log \theta_1, \beta)$ (reparametrização logarítmica em θ_1), $(\varphi = \theta_1^{-1} e^{\beta \bar{V}}, \beta)$ (reparametrização ortogonal em θ_1) e $(\psi = \log(\theta_1^{-1} e^{\beta \bar{V}}), \beta)$ (reparametrização ortogonal associada à logarítmica), podemos observar o efeito de reparametrização na análise Bayesiana do modelo, e apesar de não ser possível uma conclusão geral sobre transformações paramétricas em testes de sobrevivência acelerados considerando uma distribuição Exponencial, observe que na parametrização independente (ψ, β) , onde a matriz de informação de Fisher é diagonal e constante (ver (2.66)) e a densidade a priori é localmente uniforme (ver (3.15)), o método de aproximação de Laplace pode ter mais precisão do que quando trabalhamos na parametrização original (θ_1, β) cuja matriz de informação de Fisher não é diagonal, nem constante (ver (2.28)) e a densidade a priori não é localmente uniforme (ver (3.10)), pois enquanto na Figura 9.8 (D) temos uma boa forma elíptica, na Figura 9.8 (A), essa forma não é observada.

V_j	L_j
10	814,297
20	317,088
25	241,298
30	194,490
35	162,783
40	132,914
50	109,168

Tabela 9.5: Valores requeridos de L_j considerando-se V_j fixo e $1 - \gamma' = 0,80$.

9.1.7 Controle de Qualidade de um Lote de Componentes

Para achar o nível de estresse, V_j , e o período de tempo, L_j , requeridos em um teste de controle de qualidade, aplicamos os procedimentos obtidos no Capítulo 4, utilizando a densidade preditiva de uma observação futura dada em (4.9).

Com os dados da Tabela 9.1 temos $r = 109$ e (de (4.18)) $c = 1806870,2750$.

Assumindo $\beta = 5$ conhecido, $1 - \gamma' = 0,80$ e um nível de estresse V_j fixo, na Tabela 9.5 temos os valores de L_j , obtidos utilizando a expressão (4.20), considerando diferentes valores de V_j .

Considerando vários valores fixos de L_j , obtemos os valores dos níveis de estresse, V_j , necessários em um teste de controle de qualidade, através da expressão (4.21) com $\beta = 5$ e $1 - \gamma' = 0,80$ (ver Tabela 9.6).

L_j	V_j
800	10,119
700	11,080
600	12,343
500	14,087
400	16,667
350	18,492
300	20,910
250	24,274
200	29,291
150	37,608
100	54,166

Tabela 9.6: Valores de V_j considerando-se L_j fixo e $1 - \gamma^* = 0,80$.

Dessa forma, por exemplo, se o pesquisador industrial deseja verificar se os componentes de um determinado lote estão sob controle, considerando uma probabilidade de sobrevivência após L_j igual a 0,80, e tem para esse experimento $L_j = 250$ unidades de tempo, pela Tabela 9.6, ele deve usar nesse teste um nível de estresse $V_j = 24,274$ unidades de temperatura. Analogamente, se tecnicamente só é possível testar os componentes a 25 unidades de temperatura, pela Tabela 9.5, ele deve conduzir o experimento até 241,298 unidades de tempo. Em ambos os casos deve observar a proporção p^j de componentes que falharam dentre as m unidades em teste. Se $p^j \leq 0,20$, o lote de componentes está sob controle (ver seção 4.3).

9.2 Exemplo 2

Considerando uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência e a relação estresse-resposta geral (6.1) que inclui o modelos usuais, Potência, Arrhenius e Eyring com uma variável estresse, aplicamos, aos dados deste exemplo, as metodologias Bayesianas de análise propostas nos Capítulos 6 e 7. Em particular consideramos a análise Bayesiana do modelo de Eyring com uma variável estresse desenvolvida no Capítulo 5.

Na Tabela 9.7 temos um conjunto de dados gerados considerando um modelo de Eyring com uma variável estresse e uma distribuição de Weibull com $\alpha = -12,7$; $\beta = 6,2$ e $p = 2$ (isto é, $\beta_0 = 12,7$; $\beta_1 = 6,2$; $X_i = \frac{1}{V_i}$ e $Z_i = -\log V_i$ no modelo geral (6.1)).

i	V_i	n_i	r_i	Observações não-censuradas
1	20	15	5	39,45,67,88,100
2	30	15	7	27,34,42,61,67,79,97
3	40	15	8	22,32,37,48,53,70,79,88
4	50	15	10	18,25,32,47,56,61,70,79,82,94
5	60	15	12	20,22,30,34,50,58,64,73,79,88,88,100

Tabela 9.7: Dados gerados com $\alpha = 12,7$, $\beta = 6,2$ e $p = 2$.

Na Figura 9.9 temos o gráfico da densidade a posteriori marginal aproximada para p (ver (5.15)), cuja moda a posteriori é dada por, $\tilde{p} = 1,9864$. Um

intervalo HPD aproximado 95% para p é dado por $(1,4750; 2,5750)$.

Figura 9.9: Densidade a posteriori marginal para p .

Considerando p conhecido ($p = 1,9864$) e como $T = T^{*p}$ tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \lambda^{*p}$, podemos considerar a análise Bayesiana padrão do modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5) dada no Capítulo 3 (observar a transformação de escala envolvida - ver sub-seção 5.2.1).

Neste contexto, construímos (ver Figura 9.10) o gráfico da densidade a posteriori marginal para $\delta = \log(\theta_1)$ (dada em (3.14) considerando-se as devidas modificações de escala), onde θ_1 é o tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse considerando a transformação de dados $T^{*1,9864}$ com uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda_1 = \frac{1}{\theta_1}$. A moda dessa densidade a posteriori é dada por, $\tilde{\delta} = 10,05612$ (isto é, $\tilde{\theta}_1 = 23297,9348$ ou $\tilde{\lambda}_1 = 0,00004292$).

Voltando para a escala original dos dados, onde temos uma distribuição de sobrevivência de Weibull com parâmetro de escala $\lambda_1^* = \lambda_1^{\frac{1}{p}}$, $\tilde{\lambda}_1^* = 0,006329$, o tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse $\theta_1^* = \Gamma(1 + \frac{1}{p})/\lambda_1^*$ é estimado por $\tilde{\theta}_1^* = 140,0410$.

Figura 9.10: Densidade a posteriori marginal para $\delta = \log(\theta_1)$ com os dados transformados $T^{*1,9864}$.

Considerando p desconhecido, podemos obter inferências conjuntas para θ_1^* e p através da densidade a posteriori conjunta para θ_1^* e p dada em (5.19). Na Figura 9.11 temos o gráfico dos contornos HPD aproximados 95%, 90%, 70% e 50% dessa densidade a posteriori, cuja a moda a posteriori é dada por, $\tilde{\theta}_1^* = 128,1200$ e $p = 2,0455$.

Considerando a escala logarítmica para θ_1^* e p ($\delta^* = \log(\theta_1^*)$ e $\gamma^* = \log(p)$) construímos, na Figura 9.12, o gráfico dos contornos HPD aproximados 95%, 90%,

70% e 50% da densidade a posteriori conjunta para δ^* e γ^* , onde podemos observar uma boa forma elíptica. A moda dessa densidade a posteriori é dada por, $\tilde{\delta}^* = 4,88503(\tilde{\theta}_1^* = 131,7005)$ e $\gamma^* = 0,72506(\tilde{p} = 2,06485)$. Um intervalo HPD aproximado 95% para p é dado por $(1,5863; 2,6209)$.

Figura 9.11: Contornos HPD 95%, 90%, 70% e 50% da densidade a posteriori conjunta para θ_1^* e p .

Na Tabela 9.8 temos os intervalos HPD aproximados 95% para θ_1 considerando p conhecido ou desconhecido. Observamos que os resultados são relativamente próximos.

p	Intervalos HPD 95% para θ_1^*
conhecido	(99,1935; 214, 6563)
desconhecido	(92,1299; 205,2031)

Tabela 9.8: Intervalos HPD aproximados 95% para θ_1^* .

Figura 9.12: Contornos HPD 95%, 90%, 70% e 50% da densidade a posteriori conjunta para $\delta^* = \log(\theta_1^*)$ e $\gamma^* = \log(p)$.

Observe que no desenvolvimento desse exemplo, apesar de termos considerado as expressões do Capítulo 5, e por vezes do 3, os mesmos resultados poderiam ser obtidos considerando-se as expressões do Capítulo 6.

Na Figura 9.13 temos os gráficos das densidades a posteriori marginais para a função de confiabilidade R_1^* , assumindo $p = 1,9864$ conhecido, dada em (6.20), para t_1^* igual a 50, 95 e 130, cujas modas a posteriori são dadas por $\tilde{R}_1^*(50) = 0,9154$, $\tilde{R}_1^*(95) = 0,7195$ e $\tilde{R}_1^*(130) = 0,5247$, respectivamente (observe que para a construção desses gráficos consideramos os dados transformados $T^{*,1,9864}$; também, as alturas das curvas são iguais porque consideramos as “densidades a posteriori

relativas" (ver Apêndice 4)).

Figura 9.13: Densidades a posteriori para R_1^* .

Considerando os níveis de estresse $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$ (ver Tabela 9.7), aplicamos a seguir os procedimentos Bayesianos de análise da relação estresse-resposta (6.1), desenvolvidos no Capítulo 7, direcionados às situações onde não é possível a condução de experimentos considerando-se o nível usual de estresse. Os resultados são comparados com os resultados obtidos considerando-se o experimento acelerado com $V_1 = 20$, $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$ (ver tabela 9.7).

Na Figura 9.14 temos os gráficos das densidades a posteriori marginais para o parâmetro p tanto considerando o nível usual de estresse no experimento (isto é, experimento com $V_1 = 20$, $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$), como não o considerando (isto é, experimento somente com $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$) (ver (6.7) e (7.6), respectivamente). Denotando por $\tilde{p}_c$ e $\tilde{p}_s$ as modas dessas densidades a posteriori, respectivamente,

temos que $\tilde{p}_c = 1,9627$ e $\tilde{p}_s = 1,8272$.

Um Intervalo HPD aproximado 95% para p quando consideramos $V_1 = 20$ no experimento é dado por, $(1,2847; 2,8361)$ e um intervalo HPD aproximado 95% para p quando $V_1 = 20$ não é considerado é dado por, $(1,1875; 2,8194)$.

Figura 9.14: Densidades a posteriori marginais para p .

Como T^{*p} tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \lambda^{*p}$, de forma análoga a que fizemos anteriormente quando tínhamos cinco níveis de estresse no experimento, desenvolvemos uma análise Bayesiana assumindo p conhecido, isto é, consideramos as transformações de dados, $T^{*pc} = T^{*1,9627}$ (quando $V_1 = 20$ é considerado) e $T^{*ps} = T^{*1,8782}$ (quando consideramos somente $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$). Na Figura 9.15 temos o gráfico das densidades a posteriori marginais para $\delta = \log(\theta_1)$ em ambos os casos (ver (6.14) e (7.19), respectivamente, na escala logarítmica e considerando as transformações de dados), onde θ_1 é o tempo médio de sobrevivência

sob o nível de estresse usual, V_1 , considerando-se os dados transformados $T^{*1,9627}$ e $T^{*1,8782}$ com distribuição Exponencial. As modas dessas densidades a posteriori são dadas, respectivamente, por, $\tilde{\delta}_c = 9,9548(\tilde{\theta}_{1c}^* = 141,4009)$ e $\tilde{\delta}_s = 9,4678(\tilde{\theta}_{1s}^* = 137,2467)(\theta_1^* = \Gamma(1 + \frac{1}{p})/\lambda_1^*, \text{ na escala original, onde os dados tem uma distribuição de Weibull com parâmetros de escala } \lambda_1^* = \lambda_1^{\frac{1}{p}})$.

Figura 9.15: Densidades a posteriori marginais para $\delta = \log(\theta_1)$ (com os dados transformados $T^{*1,9627}$ e $T^{*1,8782}$).

$V_1 = 20$	Intervalos HPD 95% para θ_1^*
é considerado	(98,6004; 222,4494)
não é considerado	(54,1836; 404,9531)

Tabela 9.9: Intervalos HPD aproximados 95% para θ_1^* considerando ou não

$V_1 = 20$ no experimento e assumindo p conhecido.

Na Tabela 9.9 temos os intervalos HPD aproximados 95% para o tempo

médio de sobrevivência, θ_1^* , considerando ou não considerando o nível $V_1 = 20$ no experimento.

Observe que quando não consideramos o nível usual de estresse no experimento, o intervalo HPD para o tempo médio de sobrevivência, θ_1^* , é bem maior do que o obtido quando esse nível é utilizado no teste (ver Tabela 9.9). Além disso, considerando os dados dos níveis $V_1 = 20$, $V_2 = 30$ e $V_4 = 50$, que são uma proporção dos dados utilizados no início do exemplo quando os cinco níveis da Tabela 9.7 foram considerados, obtemos, considerando p conhecido, um intervalo HPD 95% para θ_1^* próximo do intervalo HPD obtido considerando-se V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 no experimento (ver Tabelas 9.8 e 9.9).

9.3 Exemplo 3

Considere que certos componentes eletrônicos têm uma distribuição de sobrevivência Exponencial sob todos os ambientes possíveis. Com o objetivo de inferir sobre o tempo médio de sobrevivência dos componentes nas condições usuais de funcionamento (temperatura de 30° C e 100 v de voltagem), formula-se um experimento acelerado, considerando-se voltagem combinada com temperatura como mecanismo básico de aceleração de falha. Em cada combinação voltagem-temperatura coloca-se 10 componentes em teste e o teste termina quando 6 falhas são observadas. Na tabela 9.10 temos 12 combinações de estresse (V_i, U_i) , $i = 1, 2, \dots, 12$, onde V_i é o i -ésimo nível de temperatura e U_i é o i -ésimo nível de voltagem, $n_i = 10, r_i = 6$; também temos os estimadores de máxima verossimilhança para $\theta_i = \frac{1}{\lambda_i}$.

i	V_i	U_i	θ_i	Observações
1	30	100	1500	400,600,650,700,800,1170,1170+,1170+,1170+,1170+
2	30	200	1400	300,450,500,600,620,1186,1186+,1186+,1186+,1186+
3	30	300	1100	250,300,400,500,800,1320,1320+,1320+,1320+,1320+
4	30	400	1000	200,300,350,500,650,800,800+,800+,800+,800+
5	40	100	1400	400,500,600,650,800,1090,1090+,1090+,1090+,1090+
6	40	200	1100	200,300,350,500,700,910,910+,910+,910+,910+
7	40	300	1000	250,300,350,500,700,780,780+,780+,780+,780+
8	40	400	900	150,250,380,400,500,744,744+,744+,744+,744+
9	50	100	1100	180,260,350,480,750,916,916+,916+,916+,916+
10	50	200	1000	200,280,320,460,780,792,792+,792+,792+,792+
11	50	300	900	150,220,310,470,680,714,714+,714+,714+,714+
12	50	400	800	120,180,280,360,620,648,648+,648+,648+,648+

Tabela 9.10: Tempos de sobrevivências dos componentes em horas (dados com '+' são censurados).

Assumindo que o modelo de Eyring generalizado (1.6) é apropriado para o conjunto de dados da Tabela 9.10, podemos estimar os parâmetros do modelo, α, β, γ e δ , usando o método de mínimos-quadrados. De (8.3) temos,

$$\log\left(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 U_i + \alpha_3 \frac{U_i}{k_1 V_i} + \alpha_4 \frac{1}{k_1 V_i} + \xi_i,$$

onde $\hat{\lambda}_i$ são os estimadores de máxima verossimilhança de $\lambda_i = \frac{1}{\theta_i}, i = 1, 2, \dots, k$, $\alpha_1 = \log \alpha, \alpha_2 = \gamma, \alpha_3 = \delta$ e $\alpha_4 = -\beta$.

Os estimadores de mínimos-quadrados (EMQ) $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ e $\hat{\alpha}_4$ (ver Tabela 9.11) têm uma distribuição Normal assintótica dada por, $N\{\underline{\alpha}; \sigma^2(X'X)^{-1}\}$, onde,

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 11,7720 & -0,0390 & 1,9860 \times 10^{-16} & -5,9580 \times 10^{-14} \\ & 0,0002 & -7,9430 \times 10^{-19} & 1,9860 \times 10^{-16} \\ & & 4,1980 \times 10^{-33} & -1,0500 \times 10^{-30} \\ \text{simétrica} & & & 3,1490 \times 10^{-28} \end{bmatrix}$$

O estimador de σ^2 baseado na soma de quadrados dos resíduos (SQR) é dado por, $\sigma^2 = SQR/(k - 4) = 0,01280/8 = 0,0016$ (ver por exemplo, Draper e Smith, 1981).

EMQ para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	EMQ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Intervalo de confiança 95% para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\hat{\alpha}_1 = -11,282$	$\hat{\alpha} = e^{\alpha_1} = 1,259 \times 10^{-5}$	(0,0000092; 0,0000173)
$\hat{\alpha}_2 = -0,000603$	$\hat{\gamma} = \hat{\alpha}_3$	(-0,0005546; 0,0017614)
$\hat{\alpha}_3 = 3,75 \times 10^{-18}$	$\hat{\delta} = \hat{\alpha}_3$	$(-2,2385 \times 10^{-18}; 9,7389 \times 10^{-18})$
$\hat{\alpha}_4 = -1,593 \times 10^{-15}$	$\hat{\beta} = \hat{\alpha}_4$	$(-3,2333 \times 10^{-15}; 0,0469 \times 10^{-15})$

Tabela 9.11: Estimadores de mínimos-quadrados e intervalos de confiança 95%

para α, β, γ e δ .

Na Tabela 9.11 temos os estimadores de mínimos-quadrados e os intervalos de confiança 95% para α, β, γ e δ .

Com os estimadores de mínimos-quadrados para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 achamos um estimador de $\lambda_1 = V_1 \exp\{\alpha_1 + \alpha_2 U_1 + \alpha_3 \frac{U_1}{k_1 V_1} + \alpha_4 \frac{1}{k_1 V_1}\}$, onde $V_1 = 30$ e $U_1 = 100$, dado (de (8.5)) por, $\hat{\lambda}_1 = 0,0006450$. Dessa forma, um estimador para o tempo médio de sobrevivência dos componentes sob os níveis usuais é dado por $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{\hat{\lambda}_1} = 1549,1900$.

Um intervalo de confiança 95% para λ_1 é dado (de (8.6)) por, (0,0005740; 0,0007260), isto é, um intervalo de confiança aproximado 95% para $\theta_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ é dado por, (1376,710; 1743,2680).

Observe que este intervalo de confiança para θ_1 é determinado a partir do modelo (8.2) que considera $\log(\hat{\lambda}_i)$ como a variável resposta, onde $\hat{\lambda}_i$ é o estimador de máxima verossimilhança para λ_i em cada combinação de estresse, e um modelo de erro multiplicativo, $\hat{\lambda}_i = \lambda_i \cdot \xi_i$. Dessa forma, uma análise Bayesiana do modelo de Eyring generalizado pode ser de grande interesse prático.

Na Figura 9.16 temos o gráfico de um contorno da densidade a posteriori conjunta (8.13) para γ e δ aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial. A moda dessa densidade a posteriori é dada por $\tilde{\gamma} \cong 0,0005590$ e $\tilde{\delta} \cong 5,2020 \times 10^{-18}$.

Figura 9.16: Contornos da densidade a posteriori conjunta para γ e δ .

Assumindo γ e δ conhecidos ($\gamma = 0,0005590$ e $\delta = 5,2020 \times 10^{-18}$) temos na Figura 9.17 o gráfico da densidade a posteriori marginal para β dada em (8.16). A moda dessa densidade a posteriori é dada por $\tilde{\beta} = -1,2178 \times 10^{-15}$.

Figura 9.17: Densidade a posteriori marginal para β assumindo γ e δ conhecidos.

Na Figura 9.18 temos o gráfico da densidade a posteriori para θ_1 dada em (8.20) assumindo $\gamma = 0,0005590$ e $\delta = 5,2020 \times 10^{-18}$ conhecidos e aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial. A moda dessa densidade a posteriori é dada por $\tilde{\theta}_1 = 1553,33$. Um intervalo HPD 95% aproximado para θ_1 é dado por, (1060,00; 2317,00) (ver Figura 9.18) o qual é diferente do intervalo de confiança 95% dado por, (1376,7130; 1743,2680), obtido considerando-se (8.6).

Assumindo $\gamma = 0,0005590$, $\delta = 5,2020 \times 10^{-18}$ e $\beta = -1,2178 \times 10^{-15}$ conhecidos, construímos na Figura 9.19, o gráfico da densidade a posteriori para α dada em (8.25). A moda dessa densidade a posteriori é dada por $\tilde{\alpha} = 1,2575 \times 10^{-5}$.

Finalmente, na Figura 9.20, temos o gráfico da densidade a posteriori para θ_1 assumindo γ, δ e β conhecidos dada em (8.26). A moda dessa densidade a posteriori é dada (de (8.27)) por $\tilde{\theta}_1' = 1602,0543$ e um intervalo HPD aproximado 95% para θ_1 é dado (ver (8.28)) por, (1276,2688; 2021,8559).

Figura 9.18: Densidade a posteriori para θ_1 assumindo γ e δ conhecidos.

Figura 9.19: Densidade a posteriori para α assumindo γ, δ e β conhecidos.

Figura 9.20: Densidade a posteriori para θ_1 assumindo γ, δ e β conhecidos.

Capítulo 10

Conclusões Finais e Perspectivas Futuras

Em todo o desenvolvimento desta dissertação, assumindo uma distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência, e em particular, uma distribuição Exponencial, podemos observar que o uso de métodos Bayesianos em testes de sobrevivência acelerados podem ser de grande interesse prático tanto na análise do modelo de Eyring com uma variável estresse, quanto na análise de relação estresse-resposta geral (6.1) que tem como casos particulares, além do modelo de Eyring com uma variável estresse, os modelos de Potência e Arrhenius.

Esses procedimentos Bayesianos permitem a obtenção de inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível usual de estresse, V_1 , com boa precisão e tornam-se uma boa alternativa aos métodos clássicos assintóticos usuais. Também, inferências sobre a função de confiabilidade dos componentes sob o nível usual estresse podem ser obtidas. Além disso, usando a densidade preditiva de uma observação Futura, pudemos desenvolver um procedimento para controle de qualidade de um lote de componentes que têm grande aplicabilidade em indústrias de várias áreas e através do qual o pesquisador tem liberdade para decidir por qual estratégia deve adotar em cada caso particular.

Como, em muitas situações práticas, não é possível a condução de um teste acelerado que considera o nível usual da variável física que estressa o componente, podemos desenvolver (ver Capítulo 7) uma Análise Bayesiana da relação estresse-resposta geral (6.1) direcionada a essas situações, e inferências sobre o tempo médio de sobrevivência sob o nível usual de estresse podem ser obtidas considerando um experimento acelerado somente com níveis de estresse maiores que o usual.

Do ponto de vista da precisão do método de Laplace completamente exponencial nas aproximações das densidades a posteriori de interesse, podemos observar que, em geral, as reparametrizações que “levam” a uma densidade a priori localmente uniforme melhoram sensivelmente a precisão das aproximações.

Observamos que a reparametrização ortogonal tem efeito relevante na Análise Bayesiana dos modelos usuais de teste de sobrevivência acelerado, pois, como proporciona a obtenção de parâmetros não-correlacionados, utilizando-a, conseguimos obter um estimador Bayesiano, sob “forma fechada”, para o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob nível usual de estresse e inferências por intervalo sobre esse parâmetro com grande simplicidade.

Finalmente, apesar do modelo de Eyring generalizado ter uma forma mais elaborada por considerar a possibilidade de termos componentes sob níveis de duas variáveis estresse, conseguimos desenvolver uma Análise Bayesiana deste modelo, e pelos resultados obtidos podemos observar que essa análise é mais atrativa do que a análise clássica via método de mínimos-quadrados.

10.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

O uso de uma Parametrização Independente na Determinação de um Procedimento de Controle de Qualidade

Como visto no Capítulo 4, a determinação de um procedimento de controle de qualidade quando o parâmetro β é desconhecido envolve o uso de metodologia numérica, introduzindo, de certa forma, dificuldade adicional ao problema.

Alternativamente, futuramente, poderemos nos empenhar no desenvolvimento e estudo de um procedimento de controle de qualidade, obtido via reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) adotada para o parâmetro θ , ou então, através da associação dessa reparametrização à reparametrização logarítmica adotada para o parâmetro ortogonal obtido.

Por hora, apresentamos a seguir alguns resultados preliminares, obtidos via reparametrização ortogonal em θ associada a logarítmica.

Considerando as expressões (2.2) e (2.6), sob um determinado nível de estresse V_j fixo, $\theta_j = e^{\beta/V_j}/V_j e^\alpha$, isto é ,

$$\alpha = \log \left(\frac{e^{\beta/V_j}}{\theta_j V_j} \right). \quad (10.1)$$

Substituindo (10.1) em (2.7), a função de verossimilhança para θ_j e β é dada por,

$$L(\theta_j, \beta) \propto \theta_j^{-r} \exp \left\{ -\beta \left(a_1 - \frac{r}{V_j} \right) - \frac{1}{\theta_j} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_j} A_i e^{\beta \left(\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i} \right)} \right\}, \quad (10.2)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ e $a_1 = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}$.

A matriz de informação de Fisher com respeito a θ_j e β é dada por,

$$I(\theta_j, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_j^2} & \frac{b_{1j}}{\theta_j} \\ \frac{b_{1j}}{\theta_j} & b_{2j} \end{bmatrix}, \quad (10.3)$$

onde $b_{1j} = \sum_{i=1}^k r_i (\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i})$ e $b_{2j} = \sum_{i=1}^k r_i (\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i})^2$.

Definindo $\bar{V}_j = \frac{\sum_{i=1}^k r_i (\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i})}{\sum_{i=1}^k r_i}$, de forma análoga à sub-seção (2.6.4), e explorando o uso da reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) adotada para o parâmetro θ_j , associada a reparametrização logarítmica adotada para o parâmetro ortogonal obtido, obtemos, $\theta_j = e^\psi e^{\beta \bar{V}_j}$.

Daí,

$$L(\psi, \beta) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_j} A_i e^{\beta (\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i} - \bar{V}_j)} \right\} \quad (10.4)$$

e a matriz de informação de Fisher com respeito a ψ e β é dada por,

$$I(\psi, \beta) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & e_j \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

onde $e_j = \sum_{i=1}^k r_i (\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i} - \bar{V}_j)^2$.

A densidade a priori não informativa de Jeffreys para ψ e β é dada por,

$$\pi(\psi, \beta) \propto \text{constante}, \quad (10.6)$$

onde $-\infty < \psi, \beta < \infty$.

A densidade a posteriori para ψ e β é dada (de (10.6) e (10.4)) por,

$$\pi(\psi, \beta/dados) \propto e^{-\psi r} \exp\left\{-e^{-\psi} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_j} A_i e^{\beta(\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i} - \bar{V}_j)}\right\}, \quad (10.7)$$

onde $-\infty < \psi, \beta < \infty$.

De forma análoga a desenvolvida na seção 3.6, temos que a densidade a posteriori para θ_j é dada por,

$$\pi(\theta_j/dados) = \left. \begin{aligned} & \frac{\left\{ \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_j} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i})} \right\}^{1/2}}{\Gamma(r-1/2)} \theta_j^{(r+1/2)} \\ & \cdot \exp\left\{-\theta_j^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{V_j} A_i e^{\tilde{\beta}'(\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i})}\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

onde $\theta_j > 0$ e $\tilde{\beta}'$ é a moda da densidade a posteriori marginal para β dada (de (10.7)) por,

$$\pi(\beta/dados) \propto \left\{ \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\beta(\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i} - \bar{V}_j)} \right\}^{-r}, \quad (10.9)$$

onde $-\infty < \beta < \infty$.

A densidade preditiva de uma observação futura $T_{(n+1)j}$ sob o nível de estresse V_j é dada por (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975; Press, 1989),

$$f^{j*}(t_{(n+1)j}/dados) = \int_0^\infty f^j(t_{(n+1)j}/\theta_j) \pi(\theta_j/dados) d\theta_j, \quad (10.10)$$

onde $f^j(t_{(n+1)j}/\theta_j) = \theta_j^{-1} \exp\{-\theta_j^{-1} t_{(n+1)j}\}$, para $t_{(n+1)j} \geq 0$, e $\pi(\theta_j/dados)$ é dada em (10.8), isto é,

$$f^{j*}(t_{(n+1)j}/\text{dados}) = \frac{(r-1/2)V_j e^{-\tilde{\beta}'/V_j} \left\{ \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\tilde{\beta}'/V_i} \right\}^{r-1/2}}{\left\{ t_{(n+1)j} V_j e^{-\tilde{\beta}'/V_j} + \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{-\tilde{\beta}'/V_i} \right\}^{r+1/2}} \quad (10.11)$$

onde $t_{(n+1)j} > 0$ (densidade de Pareto).

Considerando a densidade preditiva (10.11) temos que,

$$P^{j*}(T_{(n+1)j} > L_j^*/\text{dados}) = (r-1/2) \left(\frac{c e^{\tilde{\beta}'/V_j}}{V_j} \right)^{r-1/2} \int_{L_j^*}^{\infty} \frac{dt_{(n+1)j}}{\left\{ \frac{c e^{\tilde{\beta}'/V_j}}{V_j} + t_{(n+1)j} \right\}^{r+1/2}}, \quad (10.12)$$

onde $c = \sum_{i=1}^k V_i A_i e^{\tilde{\beta}'/V_i}$.

Fixando essa probabilidade em $(1 - \gamma')$ obtemos,

$$\frac{\left(\frac{c e^{\tilde{\beta}'/V_j}}{V_j} \right)^{r-1/2}}{\left(L_j^* + \frac{c e^{\tilde{\beta}'/V_j}}{V_j} \right)^{r-1/2}} = 1 - \gamma'. \quad (10.13)$$

De (10.13), como V_j é fixo, achamos L_j^* , dado por,

$$L_j^* = \frac{c[1 - (1 - \gamma')^{\frac{1}{r-1/2}}]}{V_j e^{-\tilde{\beta}'/V_j}(1 - \gamma')^{\frac{1}{r-1/2}}}, \quad (10.14)$$

onde $\tilde{\beta}'$ é a moda da densidade a posteriori (10.9).

Portanto, um procedimento de controle de qualidade pode ser adotado a partir de (10.14).

Como exemplo, verificamos que considerando os dados da Tabela 9.1 e assumindo $j = 1$, $V_1 = 10$, $1 - \gamma' = 0,80$, a moda da densidade a posteriori marginal

(10.9) é dada por $\tilde{\beta}' = 5,20525$, e o período de tempo requerido em um teste de controle de qualidade é dado (de (10.14)) por, $L_j^* = 833,293$, próximo do obtido considerando-se β conhecido, dado (ver Tabela 9.5) por, 814, 297.

Outros Tópicos de Interesse

Observe que, no Capítulo 2, em nenhum momento, mencionamos as possíveis interrelações e equivalências entre as reparametrizações adotadas.

Neste contexto, poderíamos nos ater, por exemplo, a mostrar que a função de verossimilhança relativa maximizada para o tempo médio de sobrevivência, θ_1 , sob o nível usual de funcionamento é invariante sob a reparametrização ortogonal (ver por exemplo, Cox e Reid, 1987) adotada para o parâmetro β , como pode ser visto em Louzada Neto e Rodrigues (1991) que analisam, sobre esse enfoque, o modelo de Potência. Isto pode ser considerado um estudo que futuramente poderá ser desenvolvido.

Outro tópico de interesse é o uso de planejamentos fatoriais (ver por exemplo, Box, Hunter e Hunter, 1978) em testes de sobrevivência acelerados no enfoque Bayesiano. Análises de testes acelerados considerando o uso de planejamento fatoriais, no enfoque clássico de análise, podem ser encontrados em Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974).

Considerar uma Análise Bayesiana com outras distribuições para os tempos de sobrevivência dos componentes submetidos a um teste acelerado, como por exemplo, a Gamma, e distribuições mistas, como por exemplo, Weibull - Exponencial - Weibull, assumindo a relação estresse-resposta geral (6.1), consiste em um outro tópico de pesquisa futura. Além disso, considerar a análise da confiabilidade de sistemas em séries e paralelo (ver por exemplo, Bain, 1978).

Um estudo detalhado de diferentes parametrizações em testes de sobrevivência acelerados no enfoque Bayesiano poderá ser considerado (além do incluído nesta dissertação), incluindo seu uso em controle de qualidade.

Possivelmente, poderemos obter resultados de forma similar aos obtidos nesta dissertação (usando o método de Laplace para aproximação de integrais) considerando diferentes densidades a priori, em particular, densidades a priori informativas.

Finalmente, temos interesse no desenvolvimento de um software de fácil acesso, que operacionaliza a análise de testes de sobrevivência acelerados, no estudo da confiabilidade de um determinado componente manufaturado.

Apêndice 1

O Método “Delta”

O método “Delta” pode ser encontrado em vários textos de inferência (ver por exemplo, Miller, 1981) e é definido da seguinte forma.

Supor que Y é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 e que estamos interessados em determinar a distribuição de alguma função $g(Y)$ contínua de Y .

Expandindo $g(Y)$ ao redor de μ , por uma série de Taylor,

$$g(Y) = g(\mu) + (Y - \mu) \frac{\partial}{\partial Y} g(Y) + \dots, \quad (\text{A1.1})$$

e desconsiderando os termos de ordens mais elevadas (> 1),

$$E[g(Y)] \cong g(\mu) \quad (\text{A1.2})$$

e

$$\sigma_g^2 \cong \sigma^2 \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \right)^2. \quad (\text{A1.3})$$

Além disso, se $Y \stackrel{d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, então

$$g(Y) \stackrel{d}{\sim} N(g(\mu); \sigma_g^2) \quad (\text{A1.4})$$

(ver por exemplo, Leite e Singer, 1990 - Teorema 3.3.2).

Em sua versão multivariada, supor X e Y duas variáveis aleatórias com médias μ_X e μ_Y e variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , respectivamente, e covariância σ_{XY} , e que, também, desejamos a distribuição de $g(X, Y)$ contínua em X e Y .

Expandindo $g(X, Y)$ ao redor de (μ_X, μ_Y) , por uma série de Taylor,

$$g(X, Y) = g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X) \frac{\partial}{\partial X} g(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y) \frac{\partial}{\partial Y} g(\mu_X, \mu_Y) + \dots, \quad (\text{A1.5})$$

e desconsiderando os termos de ordens mais elevadas (> 1),

$$E[g(X, Y)] \cong g(\mu_X, \mu_Y) \quad (\text{A1.6})$$

e

$$\sigma_g^2 \cong \sigma_X^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^2 + \sigma_Y^2 \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \right)^2 + 2\sigma_{XY} \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \right). \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{Se } (X, Y) \stackrel{a}{\sim} N \left\{ (\mu_X, \mu_Y) ; \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right\}, \text{ então,}$$

$$g(X, Y) \stackrel{a}{\sim} N \{ g(\mu_X, \mu_Y) ; \sigma_g^2 \} \quad (\text{A1.8})$$

(ver por exemplo, Leite e Singer, 1990 - Teorema 3.3.4).

Apêndice 2

O Método de Aproximação de Laplace para Integrais

Uma das limitações dos métodos Bayesianos nas aplicações em geral relaciona-se à resolução de integrais que muitas vezes não apresentam soluções analíticas explícitas e exigem o uso de métodos de aproximação.

Neste sentido, um dos métodos mais utilizados em inferência Bayesiana aproximada é o Método de Laplace para aproximação de integrais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Kass, Tierney e Kadane, 1990).

Supor que estamos interessados em resolver a integral em θ , dada por,

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta. \quad (\text{A2.1})$$

No caso uniparamétrico ($\theta \in \mathbb{R}$) se $\hat{\theta}$ é o valor que maximiza $-nh(\theta)$ em (A2.1), $f(\theta)$ é uma função monótona positiva e $\sigma = \{nh''(\hat{\theta})\}^{-\frac{1}{2}}$, então o método de aproximação de Laplace é dado por (ver por exemplo, Kass, Tierney e Kadane, 1990),

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta \cong \sqrt{2\pi\sigma} f(\hat{\theta}) e^{-nh(\hat{\theta})}. \quad (\text{A2.2})$$

No caso multiparamétrico, com $\theta \in \mathbb{R}^m$, a aproximação de Laplace para (A2.1) é dada por,

$$\int f(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta \cong (2\pi)^{\frac{m}{2}} |nD^2h(\hat{\theta})|^{-\frac{1}{2}} f(\hat{\theta}) e^{-nh(\hat{\theta})}, \quad (\text{A2.3})$$

onde $\hat{\theta}$ maximiza $-nh(\theta)$, $D^2h(\hat{\theta})$ é a matriz Hessiana calculada em $\hat{\theta}$.

Em geral, em inferência Bayesiana, o interesse é inferir sobre um determinado parâmetro, e a obtenção de sua densidade a posteriori marginal, através de integração, se faz necessária.

Supor que estamos interessados em obter a densidade a posteriori de um parâmetro ϕ na presença de parâmetro “nuisance” γ , isto é,

$$\pi(\phi/dados) = \int \pi(\phi, \gamma/dados) d\gamma = \int \pi(\phi, \gamma) L(\phi, \gamma) d\gamma, \quad (\text{A2.4})$$

onde $\pi(\phi, \gamma)$ é a densidade a priori para ϕ e γ e $L(\phi, \gamma)$ é a função de verossimilhança para ϕ e γ .

Considerando,

$$f(\gamma) e^{-nh_{\phi}(\gamma)} = \pi(\phi, \gamma) L(\phi, \gamma), \quad (\text{A2.5})$$

a densidade a posteriori marginal para θ pode ser escrita na forma,

$$\pi(\phi/dados) = \int f(\gamma) e^{-nh_{\phi}(\gamma)} d\gamma. \quad (\text{A2.6})$$

Neste caso, o método de Laplace para aproximação de integrais é dado por (ver por exemplo, Kass, Tierney e Kadane, 1990),

$$\int f(\gamma) e^{-nh_{\phi}(\gamma)} d\gamma \cong f(\hat{\gamma}) | -nh''_{\phi}(\hat{\gamma}) |^{-\frac{1}{2}} e^{-nh_{\phi}(\hat{\gamma})}, \quad (\text{A2.7})$$

onde $\hat{\gamma}$ maximiza $-nh_{\phi}(\gamma)$ para cada valor fixo de ϕ e $-nh_{\phi}''(\hat{\gamma})$ é a segunda derivada de $-nh_{\phi}(\gamma)$ com respeito a γ calculada em $\hat{\gamma}$.

Sem perda de generalidade, definindo,

$$f(\gamma) = \mathbb{I}, \quad (\text{A2.8})$$

e

$$-nh_{\theta}(\gamma) = \log(\pi(\phi, \gamma))\ell(\phi, \gamma),$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade e $\ell(\phi, \gamma) = \log(L(\phi, \gamma))$, podemos escrever (A2.4) na forma,

$$\pi(\phi/dados) = \int e^{-nh_{\phi}(\gamma)} d\gamma. \quad (\text{A2.9})$$

O método de Laplace, neste caso, é dado (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986) por,

$$\int e^{-nh_{\phi}(\gamma)} d\gamma \cong |-nh_{\phi}''(\hat{\gamma})|^{\frac{1}{2}} e^{-nh_{\phi}(\hat{\gamma})}. \quad (\text{A2.10})$$

Quando $f(.) = \mathbb{I}$ chamaremos o método de Laplace por método de Laplace completamente exponencial.

Devemos ressaltar que essa aproximação (A2.10) no caso multiparamétrico é obtida de forma análoga.

Maiores detalhes e estudo sobre a precisão da metodologia descrita acima podem ser encontrados em Tierney e Kadane, (1986); Kass, Tierney e Kadane,

(1990), Achcar (1988,1989) e Achcar e Smith (1990d). Em Bolfarine, Rodrigues e Achcar (1991) encontramos aplicações do método de Laplace completamente exponencial em modelos de sobrevivência.

Apêndice 2.1

Cálculos para Obtenção da Densidade a Posteriori Marginal para o Parâmetro de forma p

A densidade a posteriori marginal para p é dada (de (5.13)) por,

$$\pi(p/dados) \propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_p(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad (A2.1.1)$$

onde $-nh_p(\alpha, \beta) = p\alpha r - p\beta a_1 - e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}$.

Para resolver esta integral usamos o método de Laplace completamente exponencial no caso multiparamétrico (ver Apêndice 2), isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_p(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \cong (2\pi)^{\frac{m}{2}} \{ \det(nD^2 h_p(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \}^{-\frac{1}{2}} e^{-nh_p(\hat{\alpha}, \hat{\beta})},$$

onde o par $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ maximiza $-nh_p(\alpha, \beta)$ e $D^2 h_p(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é a matriz Hessiana de $h_p(\alpha, \beta)$ calculada em $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

As primeiras derivadas de $-nh_p(\alpha, \beta)$ são dadas por,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial nh_p(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= pr - pe^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}, \\ -\frac{\partial nh_p(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= -pa_1 + pe^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\beta p/V_i} \end{aligned} \right\} \quad (A2.1.2)$$

Igualando as primeiras derivadas (A2.1.2) a zero, o máximo de $-nh_p(\alpha, \beta)$ é dado por $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ que satisfazem:

$$\left. \begin{aligned} r &= e^{p\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}, \\ a_2 &= e^{p\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.1.3})$$

Portanto, $\hat{\beta}$ é a solução da equação,

$$\frac{r}{a_1} = \frac{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}}{\sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}}, \quad (\text{A2.1.4})$$

e

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta}p/V_i}} \right\}. \quad (\text{A2.1.5})$$

Observe que para cada valor fixo de p podemos achar β que maximiza $-nh_p(\hat{\alpha}, \beta)$ onde $\hat{\alpha}$ é dado em (A2.1.5), isto é, substituindo (A2.1.5) em $-nh_p(\alpha, \beta)$, dado em (A2.1.1) podemos definir,

$$g(\beta) = -nh(\hat{\alpha}, \beta) = r \log \left\{ \frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}} \right\} - p\beta a_1 - r. \quad (\text{A2.1.6})$$

Assim, para cada valor fixo de p achamos $\hat{\beta}$ que maximiza $g(\beta)$ e daí, encontramos $\hat{\alpha}$ a partir de (A2.1.5).

Agora, devemos obter o $\det\{nD^2h_p(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\}$.

As segundas derivadas de $-nh_p(\alpha, \beta)$ são dadas por,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 nh(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} &= p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\beta p/V_i}, \\ \frac{\partial^2 nh(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} &= p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\beta p/V_i}, \\ \frac{\partial^2 nh(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} &= -p^2 e^{p\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\beta p/V_i}. \end{aligned} \right\} \quad (A2.1.7)$$

Observe que,

$$\frac{\partial^2 nh(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha^2} = p^2 e^{p\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i} = rp^2 \text{ por (A2.1.3)},$$

$$\frac{\partial^2 nh(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \beta^2} = p^2 e^{p\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i},$$

e

$$\frac{\partial^2 nh(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \alpha \partial \beta} = -p^2 e^{p\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^k V_i^{p-1} A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i} = -a_1 p^2 \text{ (por (A2.1.3))}.$$

Dessa forma,

$$\det\{nD^2 h_p(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} = p^4 \left\{ r^2 \frac{\sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i}}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i}} - a_1^2 \right\}. \quad (A2.1.8)$$

Considerando as expressões (A2.1.1), (A2.1.6) e (A2.1.8), a densidade a posteriori marginal para p aproximada pelo método de Laplace completamente exponencial, é dada por,

$$\pi(p/\text{dados}) \propto \frac{p^{r-1} e^{-pa_1 \hat{\beta}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{*p-1} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right)}{\left\{ r^2 \frac{\sum_{i=1}^k V_i^{p-2} A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i}}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i}} - a_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta} p/V_i} \right\}^r}, \quad (A2.1.9)$$

onde $p > 0$ e $\hat{\beta}$ é o valor que maximiza $g(\beta) = r \log \left\{ \frac{r}{\sum_{i=1}^k V_i^p A_i(p) e^{-\hat{\beta} p / V_i}} \right\} - p\beta a_1 - r$, para cada valor fixo de p (obtemos assim, a expressão (5.15)).

Apêndice 3

Teoria da Verossimilhança: Regiões e Intervalos de Verossimilhança

Neste apêndice apresentamos, resumidamente, uma técnica para obtenção de intervalos de confiança totalmente baseada na função de verossimilhança para os parâmetros envolvidos.

Supor uma determinada função de probabilidade que envolve dois parâmetros desconhecidos ϕ e γ , e que, somente, ϕ é o parâmetro de interesse.

A função de verossimilhança relativa para ϕ e γ é dada por (ver por exemplo, Kalbfleisch, 1985),

$$R(\phi, \gamma) = \frac{L(\phi, \gamma)}{L(\hat{\phi}, \hat{\gamma})}, \quad (\text{A3.1})$$

onde $L(\phi, \gamma)$ é a função de verossimilhança para ϕ e γ e $L(\hat{\phi}, \hat{\gamma}) = \sup_{\phi, \gamma} L(\phi, \gamma)$, com o par $(\hat{\phi}, \hat{\gamma})$ estimadores de máxima verossimilhança para (ϕ, γ) .

A função de verossimilhança relativa maximizada para ϕ é dada por,

$$R_{\gamma}(\phi) = \max_{\gamma} R(\phi, \gamma) = R(\phi, \hat{\gamma}(\phi)). \quad (\text{A3.2})$$

O conjunto de valores de ϕ para os quais $R_{\gamma}(\phi) \geq p$ é chamado de região de verossimilhança 100p% para ϕ . Usualmente, uma região de verossimilhança 100p% consiste de um intervalo de valores reais chamado de Intervalo de Verossimilhança 100p% para ϕ .

Na maioria dos casos, usamos Intervalos de Verossimilhança com $p =$

$0,5, p = 0,10, p = 0,01$, isto é Intervalos de Verossimilhança 50%, 10% e 1% para ϕ . Valores dentro dos Intervalos de Verossimilhança 100p% são considerados mais prováveis para ϕ , segundo os dados obtidos em um determinado experimento e um nível especificado 100p%.

Intervalos de verossimilhança 100 . 0,147% para ϕ são muitas vezes calculados, que são, aproximadamente, intervalos de confiança 95% para ϕ (ver por exemplo, Kalbfleisch, 1985).

Um intervalo aleatório $[\phi_*, \phi^*]$ é chamado de intervalo de confiança para ϕ se sua Probabilidade de Cobertura (PC) é dada por,

$$PC(\phi_0) = P(\phi_* \leq \phi_0 \leq \phi^*/\phi = \phi_0) , \quad (\text{A3.3})$$

para todos os valores possíveis de ϕ_0 .

A Probabilidade de Cobertura (PC) do intervalo de confiança é o chamado coeficiente de confiança.

Portanto, particularmente, um intervalo de confiança 95% para ϕ é dado por,

$$P(\phi_* \leq \phi_0 \leq \phi^*/\phi = \phi_0) = 0,95 , \quad (\text{A3.4})$$

para todos os possíveis valores de ϕ_0 .

Agora, definindo,

$$r_\gamma(\phi) = \log(R_\gamma(\phi)) , \quad (\text{A3.5})$$

observamos que,

$$-2r_{\gamma}(\phi) \stackrel{a}{\sim} \chi^2_{(1)}, \quad (\text{A3.6})$$

e os Intervalos de Verossimilhança para ϕ são exatamente ou aproximadamente os intervalos de confiança para ϕ ; e o coeficiente de confiança de um intervalo de verossimilhança é dado por,

$$PC \cong P\{\chi^2_{(1)} \leq -2\log p\}. \quad (\text{A3.7})$$

Daí, com $p = 0,147$, $P\{\chi^2_{(1)} \leq 2\log(0,147)\} = P\{\chi^2_{(1)} \leq 2(-1,92)\} = 0,95$.

Fazendo um gráfico de ϕ versus $r_{\gamma}(\phi)$, determinamos graficamente um intervalo de verossimilhança 100 . 0,147% aproximado para ϕ , isto é, um intervalo de confiança aproximado 95% para ϕ é obtido traçando-se uma reta em $r_{\gamma}(\phi) = -1,92$, como na Figura A3.1. Podemos notar que o mesmo intervalo pode ser obtido construindo-se o gráfico de ϕ versus $R_{\gamma}(\phi)$ e traçando-se uma reta em $R_{\gamma}(\phi) = 0,147$ (ver por exemplo, Kalbfleisch, 1985).

Um estudo mais detalhado sobre o método descrito acima pode ser encontrado em Kalbfleisch (1985). Mann, Schaffer e Singpurwalla, (1974), Barbosa e Louzada Neto (1991a) apresentam aplicações desta metodologia em testes de sobrevivência acelerado.

Figura A3.1: Gráfico de ϕ versus $r_\gamma(\phi)$ com um Intervalo de Confiança Aproximado 95% para ϕ Dado Por (ϕ_*, ϕ^*) .

Apêndice 4

Obtenção de Intervalos HPD

Em inferência Bayesiana, em geral temos interesse em determinar uma região R (do espaço paramétrico) para a qual a probabilidade de conter a densidade a posteriori para um determinado parâmetro ϕ é $(1 - \gamma')$.

Como discutido em Box e Tiao (1973), tal região é chamada de Região “a Posteriori de maior Probabilidade” (HPD) $100(1 - \gamma')\%$ se

$$\int_R \pi(\phi/dados) d\phi = 1 - \gamma', \quad (\text{A4.1})$$

onde $\pi(\phi/dados)$ é a densidade a posteriori para ϕ , e

$$\pi(\phi_1/dados) \geq \pi(\phi_2/dados) \text{ para todo } \phi_1 \in R \text{ e } \phi_2 \notin R \quad (\text{A4.2})$$

(ver por exemplo, Martz e Waller, 1982).

Em muitos problemas práticos existem dificuldades na determinação de R . Porém, como no Apêndice 3, podemos definir, de forma análoga, a “densidade a posteriori relativa para ϕ ”, dada por

$$R = R(\phi/dados) = \frac{\pi(\phi/dados)}{\pi(\tilde{\phi}/dados)}, \quad (\text{A4.3})$$

onde $\pi(\phi/dados)$ é definida em (A4.1) e $\pi(\tilde{\phi}/dados)$ é o valor da densidade a posteriori para ϕ calculada em $\tilde{\phi}$ ($\tilde{\phi}$ é a moda a posteriori para ϕ); e o conjunto de valores de ϕ tais que $R \geq \phi'$ é chamado de intervalo HPD para ϕ .

Considerando a aproximação χ^2 , isto é, $-2\log R \stackrel{a}{\sim} \chi^2_{(1)}$,

$$1 - \gamma' \approx P(\chi^2_{(1)} \leq -2 \log \phi') . \quad (\text{A4.4})$$

Portanto, se $\phi' = 0,147$, $P(\chi^2_{(1)} \leq 2(-1,92)) \approx 0,95$, e um intervalo HPD aproximado 95% para ϕ pode ser obtido graficamente contruindo-se o gráfico de ϕ versus R e traçando-se uma reta em $R = 0,147$ como na Figura A4.1.

Figura A4.1: Gráfico de ϕ versus $R(\phi/dados)$ com um intervalo HPD aproximado 95% para ϕ , dado por, (ϕ_*, ϕ^*) .

Bibliografia

- ACHCAR, J.A. Alguns Aspectos de Inferência Bayesiana Aproximada. São Carlos, ICMSC-USP, 1988, 94 p. (Tese de Livre Docência).
- ACHCAR, J.A. Reparametrizations and Laplace Approximations for Posterior Moments in Binomial Models. *Revista de Matemática e Estatística*, 7, 73-86, 1989.
- ACHCAR, J.A. Use of Predictive Densities in Quality Control with Accelerated Life Tests Assuming a Power Rule Model and an Exponential Distribution. São Carlos, ICMSC-USP, 1990a, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 76).
- ACHCAR, J.A.; DIAS, T.C.D. Accelerated Life Tests with an Exponential Distribution: A Bayesian Approach with the Power Rule Model and Type II Censored Data. São Carlos, ICMSC-USP, 1990b, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 67).
- ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. Accelerated Life Tests with an Exponential Distribution: A Bayesian Approach with the Generalized Eyring Model and Type II Censored Data. São Carlos, ICMSC-USP, 1990c, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 73).
- ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. Accelerated Life Tests with one Stress Variable: A Bayesian Analysis of the Eyring Model. São Carlos, ICMSC-USP, 1991a, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 85).

- ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F.** A Bayesian Approach for Accelerated Life Tests Considering the Weibull Distribution. São Carlos, ICMSC-USP, 1991b, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 99).
- ACHCAR, J.A.; SMITH, A.F.M.** Aspects of Reparametrization in Approximate Bayesian Inference. *Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics*. North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V., 1990d.
- ACHCAR, J.A.; ROSALES, O.L.A.** A Bayesian Approach for Accelerated Life Tests Assuming an Inverse Gaussian Distribution. São Carlos, ICMSC-USP, 1991c, 19 p. (Notas do ICMSC-USP, 94).
- AITCHINSON, J.; DUNSMORE, I.R.** *Statistical Prediction Analysis*. Cambridge University Press, 1975.
- BAIN, L.J.** *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*. New York, Dekker, 1978.
- BARBOSA, E.P.; LOUZADA NETO, F.** Análise de Experimentos de Testes de Vida Acelerados com Distribuição de Falhas Exponencial via Modelos Lineares Generalizados. 1991a. (Submetido).
- BARBOSA, E.P.; LOUZADA NETO, F.** Analysis of Accelerated Life Test via Generalized Linear Modelling in the Case of a Weibull Failure Distribution and Stress-Response Relationship. 1991b. (Submetido).
- BASU, A.P.; EBRAHIMI, N.** Nonparametric Accelerated Life Testing. *IEEE Transactions on Reliability*, R-31, 5, 432-435, 1982.
- BICKEL, P.J.; DUKSUM, K.A.** *Mathematical Statistics - Basic Ideas and Selected Topics*. San Francisco, Holden-Day, 1977.

- BOLFARINE, H.; RODIGUES, J.; ACHCAR, J.A. Análise de Sobrevida. Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1991, 112 p. (Notas do Minicurso da II Escola de Modelos de Regressão).
- BOX, G.E.P.; HUNTER, W.G.; HUNTER, J.S. *Statistics for Experimenters*. New York, John Wiley & Sons, 1978.
- BOX, G.E.P.; TIAO, G.C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. New York, Addison-Wesley, 1973.
- COX, D.R.; REID, N. Orthogonal Parameters and Approximated Conditional Inference with Discussion. *Journal Royal Statistical Society B*, 49, 1, 1-39, 1987.
- DRAPER, N.R.; SMITH, H. *Applied Regression Analysis*, 2ª ed., New York, John Wiley & Sons, 1981.
- GOLDBERG. Comprehensive Failure Mechanisms Theory. *Physics of Failure in Eletronics*, 2ª ed., 25-60, 1964.
- HILLS, S.E. Parameters Transformations. Nottingham Statistics Group, Mathematics Departament, Nottingham University, 1987. (Relatório Técnico).
- KALBFLEISCH, J.G. *Probability and Statistical Inference - Vol 2: Statistical Inference*. 2ª ed., New York, Springer-Verlag, 1985.
- KASS, R.E.; TIERNEY, L.; KADANE, J.B. The Validity of Posterior Expansions based on Laplace's Method, in *Essays in Honor of George A. Barnard*, Hödger, Amsterdam, 1990.
- KLEIN, J.P.; BASU, A.P. Weibull Accelerated Life Tests when There are Competing Causes of Failure. *Communications in Statistics. Part A: Theory and Methods*, 10(20), 2073-2100, 1981.

- LAWLESS, J.F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York, John Wiley & Sons, 1982.
- LEITE, J.G.; SINGER, J.M. Métodos Assintóticos em Estatística - Fundamentos e Aplicações. São Paulo, IME-USP, 1990, 130 p. (Notas do Mini-Curso do IX Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística).
- LEVENBACH, G.J. Accelerated Life Testing of Capacitors. *IRE Transactions*, 10, 9-20, 1957.
- LOUZADA NETO, F.; RODRIGUES, J. Reparametrização Ortogonal em Testes de Sobrevida Acelerados com o Modelo de Potência. 1991. (Submetido).
- MANN, N.R. Design of Over-Stress Life-Test Experiments when Failure Times Have the Two-Parameters Weibull Distribution. *Technometrics*, 14, 2, 437-451, 1972.
- MANN, N.R.; SCHAFFER, R.E.; SINGPURWALLA, N.D. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Test Data*. New York, John Wiley & Sons, 1974.
- MARTZ, H.F.; WALLER, R.A. *Bayesian Reliability Analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1982.
- McCullagh, P.; Nelder, J. *Generalized Linear Models*. New York, Chapman and Hall, 1989.
- McGraw-Hill Encyclopedia of Science Technology*, 7, 357. New York, McGraw-Hill Book Company.
- MILLER, R.G. *Survival Analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1981.

- MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A; BOES, D.C. *Introduction to the Theory of Statistics*, 3a ed., New York, McGraw-Hill, 1974.
- NELSON, W. Statistical Methods for Accelerated Life Test Data - The Inverse Power Law Model. *General Electric Company, Corporation Research and Development Technical Information Service Report*, 71 - C-011, 1970.
- NELSON, W. Analysis of Accelerated Life Test Data - Part I: The Arrhenius Models and Graphical Methods. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, EI-6, 4 165-181, 1971.
- NELSON, W. Analysis of Accelerated Life Test Data - Part II: Numerical Methods and Test Planning. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, EI-7, 1, 36-55, 1972a.
- NELSON, W. Analysis of Accelerated Life Test Data - Part III: Product Comparisons and Checks on the Validity of the Model and Data. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, EI-7, 2, 99-119, 1972b.
- NELSON, W. Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data with Inverse Power Law Model. *IEEE Transactions on Reliability*, R-21, 1, 2-11, 1972c.
- NELSON, W. A Survey of Methods for Planning and Analyzing Accelerated Tests. *IEEE Transactions on Reliability*, EI-9, 1, 12-18, 1974.
- NELSON, W. *Accelerated Testing - Statistical Models, Tests Plans and Data Analyses*. New York, John Wiley & Sons, 1990.
- NELSON, W.; HAHN, G.J. Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data - Part I: Simple Methods and Their Application. *Technometrics*, 14, 2, 247-269, 1972d.

NETTSON, W.; HAHN, G.J. Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data - Part II: Best Unbiased Estimation and Theory. *Technometrics*, 15, 1, 133-150, 1973.

PRESS, S.J. *Bayesian Statistics: Principles, Models and Applications*. New York, John Wiley & Sons, 1989.

PROSCHAN, F.; SINGPURWALLA, N.D. Accelerated Life Testing - A Pragmatic Bayesian Approach. *Optimizing Methods in Statistics*. Academic Press, 385-401, 1979.

RODRIGUES, J. Bayes Predictive Likelihood Function for the Accelerated Life Tests via the Orthogonal Parameters. São Carlos, ICMSC-USP, 1991, 4 p. (Notas do ICMSC-USP, 84).

RODRIGUES, J.; ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. A Bayesian Analysis of the Accelerated Life Tests via the Orthogonal Parameters. São Carlos, ICMSC-USP, 1990, s.p. (Notas do ICMSC-USP, 75).

SHAKED, M.; SINGPURWALLA, N.D. Nonparametric Estimation and Goodness-of-Fit Testing of Hypotheses for Distributions in Accelerated Life Testing. *IEEE Transactions on Reliability*, R-31, 1, 69-74, 1982.

SHAKED, M.L ZIMMER, W.J.; BALL, C.A. A Nonparametric Approach to Accelerated Life Testing. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 367, 694-699, 1979.

SINGPURWALLA, N.D.; GOLDSCHEN, D.Y. Inference from Accelerated Life Tests Using Eyring Type Reparametrization, *Naval Research Logistics*, 22(2), 289-296, 1975.

- SPROTT, D.A. Normal Likelihood and Their Relation to Large Sample Theory of Estimation. *Biometrika*, 60, 3, 457-465, 1973.
- SPROTT, D.A. Maximum Likelihood in Small Samples: Estimation in the Presence of Nuisance Parameters. *Biometrika*, 67, 3, 515-523, 1980.
- THOMAS, R.E. When is a Life Truly Accelerated? *Electronic Design*, 64-70, 1964.
- TIERNEY, L.; KADANE, J.B. Accurate Approximations for the Posterior Moments and Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 82-86, 1986.
- YUM, B.; KIM, S. Development of Life-Test Sampling Plans for Exponential Distributions Based on Accelerated Life Testing. *Communications in Statistics. Part A: Theory and Methods*, 19(7), 2735-2745, 1990.