UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Predição e análise visual de conjuntos de redes de conexões entre sinais suaves: aplicações em dados médicos de AVC

Rodrigo Colnago Contreras

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rodrigo Colnago Contreras

**Predição e análise visual de conjuntos de redes de
conexões entre sinais suaves: aplicações em dados
médicos de AVC**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação – ICMC-USP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Ciências – Ciências de Computação e Matemática
Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Luis Gustavo Nonato

USP – São Carlos
Junho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C764p Contreras, Rodrigo Colnago
 Predição e análise visual de conjuntos de redes
 de conexões entre sinais suaves: aplicações em dados
 médicos de AVC / Rodrigo Colnago Contreras;
 orientador Luis Gustavo Nonato. -- São Carlos, 2020.
 170 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2020.

 1. Ciência da Computação. 2. Matemática da
 Computação. 3. Teoria dos Grafos. 4. Aprendizado
 Baseado em Grafos. 5. Visualização. I. Nonato, Luis
 Gustavo, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Rodrigo Colnago Contreras

Graph learning on visual analytics of connection network
sets between smooth signals: applications in medical stroke
data

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Luis Gustavo Nonato

USP – São Carlos
June 2020

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

Ao professor Gustavo, que com muito zelo e paciência me orientou durante todos estes anos. Agradeço muito pelas críticas, pela infinita prestatividade e pela competência durante a condução deste trabalho.

Ao professor Afonso, que me auxiliou durante todo meu doutorado com processos burocráticos e com valiosas dicas de apresentação de trabalhos e de realização de pesquisa.

À professora Maria Cristina, que foi minha supervisora de estágio docência de Computação Gráfica por dois semestres e que muito me ajudou no meu enriquecimento didático.

A toda minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio incondicional, pelo incentivo, pelo amor e pelo carinho a mim dedicados. Agradeço por me acompanharem nessa jornada emocionante que foi minha formação acadêmica até aqui.

A minha amada namorada Monique, que com muita paciência, amor e carinho, compartilha sua existência comigo há mais de uma dúzia de anos. Agradeço também suas valiosas revisões dedicadas a este trabalho e ao amor e companheirismo dedicados a mim.

Ao meu querido amigo Alex, pelo companheirismo e amizade frente às mais diversas situações encaradas no decorrer desses anos de formação acadêmica. Além de perder nos mais variados jogos, onlines e de mesa, para mim e comigo. Agradeço também ao meu amigo Robson que ficou na torcida por mim à distância.

Ao pessoal do grupo de pesquisa de processamento geométrico e visualização da USP, em especial ao Alcebíades, pelo apoio e amizade.

À CAPES e à FAPESP, projeto 15/14358-0, pelo apoio financeiro.

*“Uma marca infalível do amor à verdade é não considerar
nenhuma proposição com uma convicção maior do que a
autorizada pelas provas em que se fundamenta.”
(John Locke - 1690)*

RESUMO

CONTRERAS, R. C. **Predição e análise visual de conjuntos de redes de conexões entre sinais suaves: aplicações em dados médicos de AVC.** 2020. 170 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Aprendizado baseado em grafos é uma vertente de aprendizado profundo na qual tem-se como intenção estimar um grafo que descreva uma rede de conexões em que as arestas correspondem a relacionamentos entre os elementos mais semelhantes, representados pelos nós da rede. Técnicas de aprendizado baseado em grafos vêm sendo desenvolvidas nos últimos anos na seara de processamento de sinais em grafos. Entretanto, até onde sabemos, sua utilização em análise visual de dados ainda não foi explorada. Neste trabalho, propomos o uso de técnicas de aprendizado baseado em grafos em uma aplicação, na qual confecciona-se um elevado número de redes de conexões para facilitar a percepção de padrões presentes nestas redes através de uma nova ferramenta de análise visual, intitulada NE-Motion. O ferramental desenvolvido é aplicado em uma base de dados formada por milhares de séries temporais. A base de dados foi fornecida por profissionais da área médica da *New York University*, os quais são especialistas em estudos de pessoas que sofreram Acidente Vascular Cerebral (AVC). A metodologia e ferramenta de visualização propostas foram capazes de revelar informações presentes nos dados e apresentá-los de maneira intuitiva aos peritos, os quais atestaram a efetividade de nossa abordagem.

Palavras-chave: Visualização, Análise Visual de Dados, Aprendizado Baseado em Grafos, Acidentes Vasculares Cerebrais, Teoria dos Conjuntos.

ABSTRACT

CONTRERAS, R. C. **Graph learning on visual analytics of connection network sets between smooth signals: applications in medical stroke data.** 2020. 170 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Graph learning is a branch of deep learning in which the intention is to estimate a graph that describes a network where the edges correspond to relationships between the most similar elements represented by the nodes of the network. Graph learning techniques have been developed in recent years by the most important researchers in the field of signal processing on graphs. However, to the best of our knowledge, its use in visual analytics has yet not been explored. In this work, we propose the use of graph learning methods in an application, in which a high number of networks are generated to facilitate the perception of patterns present in these networks, through a new visual analytics tool, called NE-Motion. The tool developed is applied to a database formed by thousands of time series. The database has been provided by medical professionals from New York University, who are specialists in studies of people who have had a stroke. The proposed methodology and visualization tool were able to reveal information present in the data while depicting it in an intuitive way to the experts, who attested to the effectiveness of our approach.

Keywords: Visualization, Visual Analytics, Graph Learning, Strokes, Set Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Elementos de $\mathcal{X}$ dispostos nos grafos G_1, G_2 e G_3 . Sendo que barras vermelhas representam valores reais positivos, barras azuis representam valores reais negativos e o tamanho da barra está diretamente relacionado ao módulo do valor numérico associado ao vértice.	49
Figura 2	– Associação do sinal $\vec{f} = \left(1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$ a um grafo de 9 vértices.	50
Figura 3	– Esquematização da técnica de (KALOFOLIAS <i>et al.</i> , 2017). Sendo X_i a i -ésima linha de X	68
Figura 4	– Grafo orientado representando fluxo de temperaturas nos EUA. Arestas mais claras simbolizam o deslocamento de baixas temperaturas e arestas mais escuras descrevem o deslocamento de temperaturas elevadas.	71
Figura 5	– Esquema de coleta de dados. No total, 17420 séries temporais com diferentes comprimentos foram geradas, sendo 8060 referentes a indivíduos afetados por AVC (representados na cor vermelha) e 9360 referentes a indivíduos de controle (representados na cor verde).	82
Figura 6	– Esquema que representa a metodologia proposta para a solução do problema.	89
Figura 7	– Esquema que representa a confecção de redes de conexões a partir de um indivíduo p_i	90
Figura 8	– Ferramenta de visualização NE-Motion. Em A , são apresentados os componentes referentes a visualização de redes de conexões. Em B , detalhes entre um relacionamento especificado pelo usuário são destacados em uma janela informativa. Em C , medidas estatísticas entre as séries temporais dos sensores são apresentadas. Em D , são apresentadas projeções que levam em consideração todos os indivíduos de uma filtragem especificada pelas caixas de seleção.	102
Figura 9	– Exemplo de uso do componente de visualização de arcos. São destacadas as relações, ou arestas, nas quais o sensor, ou vértice, “Thoracic Lateral - RT,deg” possui participação.	103
Figura 10	– Visualização de relações entre sensores (arestas) que são exclusivas a pacientes afetados por AVC, na cor vermelha, e de relações entre sensores que são exclusivas a indivíduos de controle, em verde. A caixa de opções que seleciona a filtragem especial está destacada dentro do retângulo seccionado azul.	104

Figura 11 – As duas arestas da seleção definida pelo usuário nas caixas de seleção que apresentam maiores valores de f_{cont} , destacando o fato de que estas arestas são as duas mais frequentes nas redes de conexões consideradas. O retângulo seccionado azul destaca a caixa de opção que determina o parâmetro da ordenação que controla o número de arestas apresentadas.	105
Figura 12 – Projeção MDS de séries temporais de indivíduos para cada sensor que compõe uma aresta e por meio do atributo visual b_2 . Os retângulos seccionados de cor rosa destacam os sensores que compõem a aresta e o retângulo seccionado azul destaca a função de distâncias utilizada no cômputo da matriz de distâncias par-a-par.	107
Figura 13 – Indicação da funcionalidade de cada atributo visual disponível no componente B de NE-Motion. Todos os recursos visuais coloridos na cor verde são relativos aos indivíduos saudáveis, assim como os recursos de cor vermelha são referentes aos indivíduos afetados por AVC.	108
Figura 14 – Apresentação do comportamento estatístico das séries temporais dos indivíduos da seleção estabelecida pelo usuário para o sensor $s_k = s_6 = \text{“Thoracic Lateral - RT,deg”}$. As curvas de cor verde fazem referência aos indivíduos saudáveis e as curvas de cor vermelha fazem referência aos indivíduos afetados por AVC.	110
Figura 15 – Três diferentes métodos de projeção disponibilizados pelo componente D do sistema visual. As projeções foram realizadas sobre o mesmo domínio de interesse.	111
Figura 16 – Apresentação dos componentes visuais E e F	113
Figura 17 – Alterações de configurações para realização das rotinas impostas.	119
Figura 18 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado esquerdo do corpo.	120
Figura 19 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado direito do corpo.	121
Figura 20 – Esquematização do movimento analisado. O ângulo θ define a abertura ($\theta > 0^\circ$) ou fechamento ($\theta < 0^\circ$) determinado pelo pulso no exercício. . . .	121
Figura 21 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado esquerdo do corpo e destacando-se as conexões nas quais o sensor “Wrist Supinator LT,deg” faz parte.	122
Figura 22 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado direito do corpo e destacando-se as conexões nas quais o sensor “Wrist Supinator RT,deg” faz parte.	123
Figura 23 – Análise do movimento “flexorSynergy” do indivíduo de índice 10, o qual foi afetado por AVC no lado esquerdo do corpo.	124

Figura 24 – Análise do movimento “pronationSupinationElbowAt90” do indivíduo de índice 10, o qual foi afetado por AVC no lado esquerdo do corpo.	126
Figura 25 – Detalhes sobre a conexão entre os sensores “Shoulder Abduction RT, deg” e “Shoulder Flexion RT, deg”. As linhas seccionadas azuis separam os quadrantes da projeção.	127
Figura 26 – Detalhes sobre a conexão entre os sensores “Shoulder Abduction RT, deg” e “Shoulder Flexion RT, deg”: projeção dos indivíduos por MDS e tempo médio necessário para execução dos movimentos.	128
Figura 27 – Correlações entre os sensores que definem as conexões mais frequentes em cada movimento considerado.	129
Figura 28 – Projeções MDS das séries temporais captadas pelos sensores que definem as conexões mais frequentes em cada movimento considerado. Cada círculo representa um indivíduo que possui a conexão em sua rede de conexões. . .	130
Figura 29 – Arestas exclusivas a pacientes de determinada condição que são mais frequentes na realização do movimento “sholderFlexionTo90” com o lado esquerdo do corpo.	131
Figura 30 – Detalhamento da aresta exclusiva a indivíduos saudáveis por meio da <i>pop-up box</i>	131
Figura 31 – Detalhamento da aresta exclusiva a indivíduos afetados por meio da <i>pop-up box</i>	132
Figura 32 – Detalhamento da aresta mais frequente que seja comum a pacientes de ambas as condições considerando-se o movimento “Shoulder Flexion to 90°” por meio da <i>pop-up box</i>	133
Figura 33 – Visualização das três arestas mais recorrentes (top 3) em todas as redes de conexões considerando-se todas as condições e todos os movimentos.	134
Figura 34 – Duas arestas mais frequentes nas redes de conexões considerando-se o movimento “Extensor Synergy”.	135
Figura 35 – Aresta mais frequente nas redes de conexões considerando-se o movimento “Pronation Supination Elbow At 0°”. As redes à esquerda são referentes ao lado esquerdo do corpo e as redes à direita ao lado direito.	136
Figura 36 – Aresta mais frequente nas redes de conexões considerando-se o movimento “Wrist Stability Elbow At 0°”. As redes à esquerda são referentes ao lado esquerdo do corpo e as redes à direita ao lado direito.	137
Figura 37 – Projeção com Autoencoder e MDS das curvas de movimento dos indivíduos de controle. As curvas referentes ao lado direito estão coloridas de amarelo e as referentes ao lado esquerdo estão coloridas de roxo.	137
Figura 38 – Projeção das estruturas das redes.	138

Figura 39 – Projeção PCA das curvas de movimento associadas a cada indivíduo na execução do movimento “ <i>Shoulder Flexion To 90°</i> ” executado com o lado esquerdo do corpo.	139
Figura 40 – Séries temporais espúrias de indivíduos dos grupos <i>G1</i> , <i>G2</i> , <i>G3</i> , <i>G4</i> , <i>G5</i> e <i>G7</i> . 140	
Figura 41 – Detalhes das séries temporais captadas pelo sensor “ <i>Shoulder Abduction LT, deg</i> ” em indivíduos dos agrupamentos <i>G1</i> a <i>G7</i>	141
Figura 42 – Projeção MDS com uso de auto-encoder, à esquerda, e projeção PCA, à direita, das curvas de movimentos dos indivíduos ao executarem o movimento “ <i>Extensor Synergy</i> ” com o lado direito do corpo.	142
Figura 43 – Padrões estatísticos nas séries temporais.	143
Figura 44 – Relação entre pontuação no protocolo FM de indivíduos afetados, no eixo <i>x</i> , e distância média entre indivíduos de controle, no eixo <i>y</i> , considerando-se todos os movimentos.	144
Figura 45 – Relação entre pontuação no protocolo FM de indivíduos afetados, no eixo <i>x</i> , e distância média entre indivíduos de controle, no eixo <i>y</i>	145

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Aprendizagem de redes de conexões entre sinais suaves.	57
Algoritmo 2 – Algoritmo de otimização primal-dual escalar com estratégia <i>Forward-Backward-Forward</i>	60
Algoritmo 3 – Algoritmo de otimização primal-dual escalar com estratégia <i>Forward-Backward-Forward</i> para determinação de uma rede de conexões entre sinais suaves por meio da técnica de Dong <i>et al.</i> (2016).	63
Algoritmo 4 – Algoritmo de redução de dimensionalidade e predição de redes de conexões por meio da técnica de Liu, Nejati e Cheung (2018).	66
Algoritmo 5 – Algoritmo de predição de redes orientadas de conexões causais por meio da técnica de Mei e Moura (2017).	74
Algoritmo 6 – Algoritmo de predição de redes de conexões entre sensores.	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Detalhes sobre a coleta de dados.	80
Tabela 2 – Resumo avaliativo dos estudos de caso.	147
Tabela 3 – Comparação de componentes do problema abordado neste trabalho, representado por AVC, e trabalhos que utilizem sinais de EEG. Os símbolos × e – indicam, respectivamente, a presença e a ausência de um componente. . .	151

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABG	Aprendizado Baseado em Grafos
AVC	Acidente Vascular Cerebral
FBF	<i>Forward-Backward-Forward</i>
FM	Fugl-Meyer
MDS	<i>Multidimensional Scaling</i>
MOBA	<i>Multiplayer Online Battle Arena</i>
NE-Motion	<i>Network Environment for Motion Capture Data Analysis</i>
NYU	<i>New York University</i>
PCA	<i>Principal Component Analysis</i>
PP	pré-processamento
RPCA	<i>Robust PCA</i>
SCAE	<i>Stacked Convolutional Auto-Encoder</i>
tSNE	<i>t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding</i>
UE	<i>Upper Extremity</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$G(V, E)$ — Grafo cujo conjunto de vértices é V e cujo conjunto de arestas é E

$A = (A_{i,j})$ — Matriz de adjacência

$\#(X)$ — Quantidade de elementos de X

ED — Energia de Dirichlet

$\vec{x}$ — Sinal no grafo

n — Número de vértices no grafo

m — Quantidade de sinais no grafo

L — Laplaciana do grafo

W — Matriz de adjacência ponderada do grafo

$\text{tr}(X)$ — Função traço de X

$\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ — Distribuição normal com média μ e variância Σ

$\Sigma^\dagger$ — pseudo-inversa de Moore-Penrose de Σ

$\mathcal{L}$ — Conjunto de todas as matrizes laplacianas

$\|X\|_F^2$ — Norma de Frobenius da matriz X

I_n — Matriz identidade de ordem n

W_n — Conjunto de todas as matrizes adjacências ponderadas possíveis

$\mathcal{W}_{\vec{v}}$ — Representação vetorial de W_n

prox_f — Operador proximal de f

∇f — Gradiente de f

$P_i(W, c)$ — Polinômio matricial de grau i em W com coeficientes c

N_s — Número de sensores utilizados em cada movimento

$N_{\mathcal{M}}$ — Número de movimentos considerados na confecção da base de dados avaliada

$N_p^{\text{AVC}^E}$ — Número de indivíduos afetados por AVC com hemiplegia no lado esquerdo do corpo

$N_p^{\text{AVC}^D}$ — Número de indivíduos afetados por AVC com hemiplegia no lado direito do corpo

$N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}}$ — Número de indivíduos saudáveis avaliados

$N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_D}$ — Número de indivíduos saudáveis avaliados no lado direito do corpo

$N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_E}$ — Número de indivíduos saudáveis avaliados no lado esquerdo do corpo

$N_{\mathcal{P}}$ — Número de indivíduos avaliados

$N_{\mathcal{T}}$ — Número de séries temporais da base de dados avaliada

$\mathcal{S}$ — Conjunto de sensores do problema

$\mathcal{M}$ — Conjunto de movimentos considerados para a confecção da base de dados

$\mathcal{P}$ — Conjunto de todos os pacientes considerados

$\mathcal{P}^{\text{AVC}}$ — Conjunto de todos os indivíduos afetados por AVC

$\mathcal{P}^{\text{AVC}_E}$ — Conjunto de todos os indivíduos afetados por AVC com hemiplegia no lado esquerdo do corpo

$\mathcal{P}^{\text{AVC}_D}$ — Conjunto de todos os indivíduos afetados por AVC com hemiplegia no lado direito do corpo

$\mathcal{P}^{\text{CTRL}}$ — Conjunto de todos os indivíduos saudáveis

$\mathcal{P}^{\text{CTRL}_E}$ — Conjunto de todos os indivíduos saudáveis analisados no lado esquerdo do corpo

$\mathcal{P}^{\text{CTRL}_D}$ — Conjunto de todos os indivíduos saudáveis analisados no lado direito do corpo

$\mathcal{T}_{i,j}$ — Conjunto das séries temporais coletadas do indivíduo p_i executando o movimento M_j

$\mathcal{T}$ — Conjunto de todas as séries temporais da base de dados

$G_{i,j}(\mathcal{S}, E_{i,j})$ — Rede de conexões confeccionada para as séries temporais que foram coletadas do indivíduo p_i durante a execução do movimento M_j

Λ — Seleção que define quais redes de conexões e quais arestas devem ser utilizadas para compor o domínio de interesse do problema

E_{Λ} — Conjunto formal de arestas que representam Λ

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	31
1.1	Contextualização e Motivação	31
1.2	Contribuições	32
1.3	Organização do trabalho	34
2	ANÁLISE VISUAL DE DADOS	37
2.1	Considerações iniciais	37
2.2	Visualização de dados de movimento	37
2.3	Visualização e comparação de séries temporais	41
2.4	Considerações finais	45
3	INTRODUÇÃO A TÉCNICAS DE APRENDIZADO BASEADO EM GRAFOS	47
3.1	Considerações Iniciais	47
3.2	Predição de redes de conexões a partir de sinais suaves	48
3.2.1	<i>Conceitos básicos de processamento de sinais em grafos</i>	48
3.2.2	<i>Processamento de sinais em grafos para confecção de redes de conexões entre sinais suaves</i>	50
3.2.3	<i>O algoritmo de aprendizagem de grafos</i>	55
3.2.4	<i>Generalização da técnica de predição de redes de conexões entre sinais suaves</i>	56
3.2.4.1	<i>Uso de uma técnica de otimização primal-dual escalar</i>	58
3.2.4.2	<i>Predição de redes de conexões como um problema primal-dual escalar</i>	60
3.2.5	<i>Redução de dimensionalidade de sinais suaves em grafos com presença de ruído</i>	64
3.3	Técnicas alternativas de predição de topologias	66
3.3.1	<i>Aprendizado baseado em grafos dinâmicos</i>	67
3.3.2	<i>Estimativa de difusão em grafos</i>	68
3.3.3	<i>Predição de redes Bayesianas</i>	70
3.4	Considerações Finais	74
4	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	75
4.1	Considerações Iniciais	75
4.2	Descrição do Problema	76

4.3	Base de dados	79
4.4	Tarefas e Requisitos do Sistema	82
4.5	Considerações Finais	86
5	MODELAGEM MATEMÁTICA PROPOSTA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	87
5.1	Considerações Iniciais	87
5.2	Desenvolvimento da Metodologia Proposta	87
5.3	Construção das Redes de Conexões Entre Sensores	89
5.4	Filtragens e Seleções de Redes e Arestas	93
5.4.1	<i>Atribuição de valores às arestas</i>	<i>97</i>
5.5	Considerações Finais	98
6	NE-MOTION: UMA FERRAMENTA DE ANÁLISE VISUAL DE CONJUNTOS DE REDES DE CONEXÕES	101
6.1	Considerações iniciais	101
6.2	Apresentação e Filtragem de Redes de Conexões	102
6.3	Análise de Relacionamentos entre Sensores	106
6.4	Comparações Visuais entre Curvas de Movimento	108
6.5	Projeções de Pacientes	109
6.6	Implementação	113
6.7	Considerações Finais	114
7	RESULTADOS E ESTUDO DE CASOS	117
7.1	Considerações Iniciais	117
7.2	Estudos de caso	118
7.2.1	<i>Estudo de caso 1: Visualização de grupos de redes específicas.</i>	<i>118</i>
7.2.2	<i>Estudo de caso 2: Análise de um indivíduo isolado.</i>	<i>122</i>
7.2.3	<i>Estudo de caso 3: Análise de coerência entre as principais conexões entre sensores.</i>	<i>126</i>
7.2.4	<i>Estudo de caso 4: Uso de filtragem especial e ordenação em arestas.</i>	<i>128</i>
7.2.5	<i>Estudo de caso 5: Presença de simetrias nas redes de conexões.</i>	<i>133</i>
7.2.6	<i>Estudo de caso 6: Existem diferenças estruturais entre as redes de conexões de indivíduos saudáveis e afetados por AVC?</i>	<i>136</i>
7.2.7	<i>Estudo de caso 7: Existem diferenças significativas entre as curvas de movimento de indivíduos saudáveis e afetados por AVC?</i>	<i>138</i>
7.2.8	<i>Estudo de caso 8: Há correlação entre protocolo de Fugl-Meyer de um indivíduo afetado por AVC e a sua respectiva distância média a indivíduos saudáveis?</i>	<i>143</i>

7.3	Opiniões dos especialistas acerca de NE-Motion	144
7.4	Avaliação Geral	146
7.5	Limitações	146
7.6	Considerações Finais	147
8	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	149
8.1	Contribuições	150
8.2	Trabalhos Futuros	151
REFERÊNCIAS		153
APÊNDICE A	DEMONSTRAÇÕES	161

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Motivação

Grafos, ou redes de conexões, são estruturas matemáticas que descrevem relações entre elementos de um determinado conjunto. Estas relações podem estabelecer graus de similaridades, fluxos e transportes, conceitos topológicos como vizinhanças, etc. Sendo assim, esta flexibilidade torna possível que a modelagem de inúmeros problemas matemáticos seja realizada por estruturas deste tipo. Como exemplo, é possível destacar aplicações recentes como compressão de imagens (FRACASTORO; THANOU; FROSSARD, 2016), detecção de comunidades em redes sociais (WAI *et al.*, 2018), detecção de fraudes em sistemas de energia (DRAYER; ROUTTENBERG, 2019), dentre outros. Entretanto, em uma grande parcela de problemas que demandam análises sobre um grafo, ou sobre um conjunto de grafos, não existe nenhuma rede de conexões pré-estabelecida. Para estes casos, é necessário fazer uso de alguma técnica de Aprendizado Baseado em Grafos (ABG), as quais são responsáveis por estimar relações entre os elementos que definem estes problemas (DONG *et al.*, 2019).

Neste trabalho de doutorado, é abordado um problema prático no qual é necessário analisar dezenas de redes de conexões de maneira conjunta. Entretanto, nenhuma rede é disponibilizada, sendo necessário construir estas redes com uma técnica de ABG. O problema tratado foi proposto a partir de uma parceria com profissionais da área da saúde da *New York University* (NYU). No caso, estes peritos dispunham de uma base de dados composta por milhares de séries temporais que descrevem movimentos (testes físicos) efetuados por indivíduos que sofreram Acidente Vascular Cerebral (AVC) e por indivíduos saudáveis observados durante a execução de testes físicos pré-definidos. As séries temporais são coletadas com a utilização de um conjunto de sensores, os quais são responsáveis por registrar movimentos realizados pela parte superior do corpo humano, ou *Upper Extremity* (UE). Compõe as rotinas de análises destes profissionais a realização de estudos sobre correlações existentes entre as séries temporais da base de dados, uma vez que é interessante detectar os sensores que captam sinais sincronizados durante a execução

de um exercício em especial. Principalmente, analisar se certas correlações são mais frequentes em indivíduos afetados por AVC do que em indivíduos saudáveis e vice versa.

Para solucionar este problema, é proposta uma abordagem baseada em redes de conexões. A partir das redes de conexões são realizadas diversas análises a fim de se detectarem padrões interessantes acerca das movimentações executadas pelos indivíduos, tais como ações compensatórias realizadas pelos indivíduos afetados que se movimentam com dificuldade. Sendo assim, como este problema é caracterizado por um elevado número de séries temporais que definem várias redes de conexões, é proposto neste trabalho analisar estas redes de conexões com o auxílio de um sistema de análise visual.

Visualização e exploração visual de grandes volumes de dados se colocam entre as mais relevantes áreas de pesquisa da atualidade, impulsionando o surgimento de novas metodologias matemáticas e computacionais. De fato, muito tem sido feito no desenvolvimento e aprimoramento de algoritmos e técnicas numéricas voltadas para o reconhecimento visual de tendências sociais e econômicas, prevenção de crimes, identificação e rastreamento de situações de risco, dentre outros cenários nos quais informações extraídas de bases de dados são fundamentais para realização da análise desejada. Especificamente, avanços matemáticos e computacionais muito importantes foram obtidos recentemente com o uso de conceitos de processamento de sinais em grafos na área de visualização. Como exemplo, destacam-se os trabalhos de [Valdivia *et al.* \(2015\)](#), no qual é apresentada uma nova metodologia de análise visual de dados variantes no tempo analisados sobre um grafo pré-definido, e [Col *et al.* \(2017\)](#), no qual é apresentado um método de análise visual de redes de conexões variantes no tempo. Tais métodos têm trazido novas perspectivas para problemas relacionados com o reconhecimento de padrões, detecção de eventos em dados variantes no tempo e identificação de atributos relevantes para fins de caracterização de dados definidos sobre um grafo. Entretanto, estes trabalhos não se adequam ao problema aqui abordado, uma vez que o grafo é dado como entrada para o problema, não sendo necessário inferir as conexões entre os nós. Além disso, nestes trabalhos, os sistemas apresentados se dedicam a analisar apenas uma rede de conexões por vez. Na verdade, revisando as principais conferências e os principais periódicos de visualização e processamento de sinais, percebe-se que métodos de ABG ainda não foram utilizados como suporte a ferramentas de visualização. Sendo assim, esta se mostra uma área na qual avanços significativos podem ser obtidos e é precisamente nesta seara que este trabalho de doutorado está compreendido.

1.2 Contribuições

Neste trabalho, desenvolvimentos teóricos e computacionais foram alcançados fazendo-se uso de ABG e análise visual de dados. Em detalhes, a construção do material oriundo deste trabalho se deu por meio de uma metodologia de desenvolvimento orientada por problema. Isto é, uma situação-problema foi estabelecida por especialistas, o material necessário para

solucionar o problema apresentado foi desenvolvido tendo-se a orientação direta dos especialistas e, finalmente, todo o ferramental é utilizado para solucionar o problema e uma avaliação dos peritos é realizada.

Contribuição geral: Este trabalho originou uma metodologia especializada na predição sistemática seguida da análise visual de muitas redes de conexões por meio de uma ferramenta computacional desenvolvida especificamente para solucionar um problema de análise de relacionamentos, definidos principalmente por medidas de correlação, entre séries temporais que descrevem a movimentação de indivíduos afetados por AVC e de indivíduos saudáveis na execução de exercícios pré-definidos.

Contribuições específicas: Em resumo, as principais contribuições deste trabalho de doutorado estão divididas da seguinte forma:

- (C1) Uso sistemático de ABG para construção de muitas redes de conexões;
- (C2) Introdução de técnicas de ABG em análise visual de dados;
- (C3) Desenvolvimento de uma ferramenta de análise visual de conjuntos de redes de conexões de séries temporais,
- (C4) Aplicação do material desenvolvido em um problema do mundo real.

A primeira contribuição (C1) faz referência à construção de muitas redes de conexões entre elementos de um mesmo conjunto de dados, o que resulta em um conjunto de redes de conexões. Este uso, feito de maneira sistemática e organizada, ainda não foi devidamente explorado na literatura especializada e é feito neste trabalho para estabelecer conexões entre séries temporais captadas por um mesmo conjunto de sensores em diversas situações.

Para que análises sejam efetuadas sobre o conjunto de redes de conexões construído em C1, é proposto que seja feito uso de um novo ferramental de análise visual de dados. O uso de métodos de inferência de grafos em análise visual é escasso, assim como metodologias de visualização especializadas em destacar padrões presentes em conjuntos de redes de conexões. Sendo assim, C2 configura um importante avanço no uso de métodos de ABG em metáforas visuais e na análise de redes estimadas com estes métodos.

C3 é representada pela ferramenta de visualização computacional desenvolvida com a intenção de tornar possível a validação, por meio da interação com os especialistas, dos resultados obtidos com o material teórico. Isto é, com esta ferramenta, os peritos foram capazes de detectar padrões relevantes e obter percepções acerca da base de dados fornecida. A contribuição contida em C3 é clara, uma vez que esta é a primeira aplicação de visualização especializada na apresentação e na análise de muitas redes de conexões entre séries temporais de dados de movimento. Além disso, a metodologia proposta é utilizada para solucionar um problema do

mundo real e que foi adotada por especialistas da NYU para orientar suas análises sobre a base de dados em questão, o que configura a contribuição C4.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em oito capítulos e um apêndice. Sendo este primeiro capítulo dedicado a uma breve introdução ao texto da tese de doutorado; os dois próximos capítulos são dedicados à revisão bibliográfica; no quarto capítulo, é detalhado o problema que orientou o desenvolvimento do material teórico e computacional que configura este trabalho de doutorado; no quinto capítulo, é descrita a metodologia proposta para solucionar o problema apresentado pelos especialistas da NYU; no sexto capítulo, a ferramenta de visualização computacional desenvolvida é apresentada; no sétimo capítulo, o material desenvolvido é validado pelos especialistas; este texto é concluído no oitavo capítulo com considerações finais acerca do material desenvolvido e com projeções de pesquisas futuras utilizando a metodologia proposta. Demonstrações matemáticas correspondentes ao conteúdo de ABG são discutidas no único apêndice deste texto.

Em detalhes, esta tese de doutorado é composta pelos seguintes capítulos:

- **[Capítulo 1: Introdução]** Capítulo responsável por introduzir o leitor ao tema no qual o trabalho de doutorado em questão se compreende. Assim como, destacar as contribuições obtidas durante a execução do projeto.
- **[Capítulo 2: Análise visual de dados]** Este capítulo possui caráter de revisão. Em especial, são destacados alguns trabalhos de visualização que descrevem técnicas de análise visual de dados de movimento e de dados variantes no tempo, uma vez que estas técnicas são as mais semelhantes na área de visualização às técnicas desenvolvidas neste trabalho.
- **[Capítulo 3: Introdução a técnicas de aprendizado baseado em grafos]** A intenção deste capítulo é apresentar uma revisão minuciosa e matematicamente precisa acerca de técnicas de processamento de sinais em grafos e de ABG, assim como os devidos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do material proposto.
- **[Capítulo 4: Descrição do problema e contribuições do trabalho]** Neste capítulo, o problema apresentado pelos especialistas da NYU é detalhado. Assim como a base de dados formada por milhares de séries temporais. Também neste capítulo, são definidas quais tarefas os peritos consideram importantes na confecção do material teórico e quais requisitos o sistema de visualização deve alcançar de forma que o problema seja considerado solucionado.
- **[Capítulo 5: Modelagem matemática proposta para a resolução do problema]** O uso sistemático de métodos de ABG, assim como sua adequação ao problema específico

trazido pelos peritos da NYU, são detalhados neste capítulo. Uma nova metodologia de filtragem de conteúdo é apresentada com a intenção de selecionar um conjunto de interesses formado por algumas das redes de conexões construídas e sobre o qual as análises devem ser efetuadas.

- **[Capítulo 6: NE-Motion: uma ferramenta de análise visual de conjuntos de redes de conexões]** Neste capítulo, é apresentado o sistema de análise visual confeccionado para facilitar a obtenção de percepções acerca da base de dados avaliada. Este sistema, NE-Motion, é especializado na apresentação e na análise de conjuntos de redes de conexões de séries temporais.
- **[Capítulo 7: Resultados e estudos de casos]** Neste capítulo são apresentados estudos de casos que validam o material desenvolvido, de forma que os peritos atestam o alcance dos requisitos estipulados e analisam padrões interessantes cuja percepção foi facilitada pelo sistema visual proposto.
- **[Capítulo 8: Conclusão e trabalhos futuros]** Este texto é finalizado com algumas considerações finais acerca do material desenvolvido e com projeções futuras de utilização e expansão do ferramental apresentado.
- **[Apêndice A: Demonstrações]** Este texto conta ainda com um apêndice no qual são reunidas algumas demonstrações matemáticas referentes à revisão contida no Capítulo 3.

ANÁLISE VISUAL DE DADOS

2.1 Considerações iniciais

A área de visualização possui como principal proposta a facilitação de percepções, ou *insights* nas palavras de [Telea \(2014\)](#), ao se analisar uma base de dados por meio de elementos gráficos interativos. Este capítulo possui caráter de revisão bibliográfica, entretanto, estudos acerca de visualização abrangem as mais diversas áreas e servem de aplicação em inúmeros problemas da atualidade ([SANTHI; REDDY, 2018](#); [REES; LARAMEE, 2019](#)), fazendo com que esta seja uma área muito abrangente e torne-se necessário que a revisão da literatura especializada seja focalizada em determinadas subáreas. Dessa forma, neste trabalho foi dada prioridade aos avanços obtidos no estado da arte da teoria de visualização em relação a duas principais frentes, sobre as quais o ferramental desenvolvido faz uso de fundamentações. Especificamente, este capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 2.2, é feita uma revisão acerca de trabalhos que abordam visualização de dados que descrevem movimentações fisiológicas; são destacados na Seção 2.3 métodos de análise visual de dados massivos formados por séries temporais; o capítulo é finalizado na Seção 2.4 com conclusões a respeito dos trabalhos apresentados.

2.2 Visualização de dados de movimento

Dados de movimentos são responsáveis por mapear computacionalmente mudanças de posicionamento de corpos no decorrer de instantes de tempo, sendo estes representados por estruturas variantes no tempo e com elevada dimensionalidade ([SCHROEDER et al., 2014](#)). Conjuntos contendo este tipo de informação geralmente apresentam muitos eventos importantes sobre os quais existe a intenção de se realizar análises, uma vez que o mapeamento de movimentações pode ser utilizado em diversas áreas de pesquisa, tais como medicina, esportes, games e animação. Entretanto, o grande montante de dados que compõe tais conjuntos aliado à natureza multivariada de seus dados configuram a impossibilidade de que sejam realizadas avaliações sem

o auxílio de ferramentas de visualização (BERNARD *et al.*, 2017). Nesta seção, são destacados trabalhos recentes que estabeleceram avanços significativos na confecção de metáforas de análise visual aplicadas em dados de movimento.

Krekel *et al.* (2010) apresentam uma metodologia baseada em análise visual na área conhecida como “cinemática”, a qual consiste na avaliação de movimentos. Os autores se concentram em investigar as respostas de sensores que mapeiam movimentos humanos relativos aos membros superiores do corpo por meio de uma ferramenta de visualização que é composta por diversas metáforas, tais como uma janela que exibe uma representação da seção superior de um esqueleto humano tridimensional que descreve os ângulos entre as juntas dos membros ao realizar a movimentação. O ferramental também é constituído por uma janela que apresenta, por meio de coordenadas paralelas, os valores numéricos de cada sensor conectado ao corpo do paciente avaliado. Sendo que a avaliação é feita com um paciente por vez e a aplicação se mostrou eficaz ao detectar diferenças sutis entre o lado sadio e o lado afetado de um indivíduo que se recuperava de uma fratura no úmero proximal.

Dados relativos a movimentação podem estar catalogados em forma de séries temporais multivariadas, como é o caso da base de dados HDM05 de Müller *et al.* (2007), a qual é composta por coleções de vetores que descrevem movimentos realizados por seres humanos ao mudar de posição. A ferramenta MotionExplorer foi confeccionada por Bernard *et al.* (2013) com a intenção de facilitar a análise visual de bases de dados como a HDM05. Orientados por especialistas, os autores realizam o agrupamento de movimentos similares e representam cada um desses movimentos como evoluções de transparências de silhuetas do tipo *stick-men* incluídas em um círculo. Também dispõem de uma metáfora de grafo em árvore que representa a hierarquia de cada movimentação em cada agrupamento. A metodologia, avaliada por especialistas, foi capaz de facilitar muitas tarefas, tais como a identificação de defeitos na coleta dos dados e a busca de posições intermediárias na realização de um movimento.

Uma tarefa de muita importância na análise de dados de movimento é a categorização e reconhecimento de gestos, devido ao fato de que muitas soluções da atualidade podem exigir componentes de reconhecimento gestual (BRASHEAR *et al.*, 2006; RAUTARAY; AGRAWAL, 2011; HSIAO; CHEN, 2016). Jang, Elmqvist e Ramani (2014) desenvolveram o conjunto de metáforas visuais *GestureAnalyser* para auxiliar neste tipo de tarefa. O *GestureAnalyser* é especializado em realizar o agrupamento hierárquico e semi-supervisionado de movimentos com respeito aos membros superiores do corpo humano, ao mesmo tempo em que descreve por meio de animações a execução de um movimento realizado por um indivíduo específico. O objetivo do ferramental é facilitar a classificação do movimento apresentado, além de permitir que o usuário, por meio de poucas interações, analise as movimentações de um conjunto de indivíduos e confirme similaridades entre os movimentos ao realizar a exploração de um grafo em árvore que exibe os agrupamentos calculados pela técnica.

Os mesmos autores Jang, Elmqvist e Ramani (2015) expandiram o *GestureAnalyser*

ao confeccionar uma aplicação de análise visual especializada na apresentação de movimentos sequenciais. De forma que o conjunto de dados de movimentos avaliado é exposto de acordo com a ordem em que cada posição do corpo humano evolui ao realizar determinado gesto. Esta evolução é apresentada na forma de um grafo orientado que indica o sequenciamento de posições que define uma movimentação. Além disso, a ferramenta dispõe de uma metáfora composta por um grafo em árvore que lista gestos em comum dentre diferentes movimentos. A aplicação também permite a análise do desenvolvimento de movimentações por meio de uma janela que executa a animação de um movimento ou de um grupo de movimentos concomitantemente. O ferramental é avaliado por seis estudantes de doutorado que realizam pesquisa em dados de movimento, os quais atestaram que o método desenvolvido facilita a organização e exploração de movimentações, simplificando a categorização e o reconhecimento de gestos.

O conceito de dados de movimentos não é restrito a apenas movimentos realizados por seres humanos. [Wilhelm et al. \(2015\)](#) confeccionaram juntamente com especialistas da área de medicina veterinária a ferramenta *FuryExplorer*, a qual consiste de uma aplicação computacional responsável por facilitar a análise visual de dados de movimentos realizados por cavalos. A metodologia consiste na junção de três principais metáforas visuais: a visualização de silhuetas em forma de glifos de cavalos descrevendo o posicionamento dos animais em função do tempo; a projeção em Análise de Componentes Principais, ou *Principal Component Analysis* (PCA), do posicionamento dos sensores conectados aos cavalos no decorrer da movimentação, o que detalha o intervalo visual em que cada sensor se encontra no desenvolvimento do movimento; e a apresentação das séries temporais dos sensores. Os especialistas que fizeram uso da ferramenta constataram, por exemplo, a facilitação que as metáforas visuais fornecem na detecção de ferimentos em animais feridos.

[Nguyen et al. \(2016\)](#) discutem a falta de técnicas de visualização confiáveis para facilitar a análise de dados de movimentação que envolvam joelhos humanos. Especificamente, os autores confeccionam uma metodologia capaz de auxiliar profissionais da área médica a examinar pacientes que apresentem instabilidade patelo-femoral, a qual consiste de um problema muito comum que ocorre no joelho e é causada pela movimentação anormal do osso conhecido como “patela”. A metodologia desenvolvida procura contornar alguns problemas apresentados pelas técnicas anteriormente utilizadas pelos profissionais da área, os quais consistem na exibição de informações exageradas ou inconsistentes. O ferramental confeccionado para tratar tais dificuldades é constituído de duas principais metáforas visuais: uma apresentação radial, definida por coordenadas polares, que compara os ângulos da patela de dois movimentos diferentes ao mesmo tempo; e uma apresentação da evolução espacial da patela no decorrer de uma movimentação específica em uma metáfora visual conhecida como espelho mágico ([KÖNIG et al., 1999](#)), a qual consiste essencialmente de um ambiente tridimensional que projeta o uso da patela no desenvolvimento de um movimento. A visualização proposta pelos autores foi capaz de facilitar o entendimento dos efeitos de cirurgias de correção realizadas na patela ao efetuarem análises sobre a movimentação dos pacientes antes e depois de passarem pela cirurgia.

Com a intenção de detectar posições-chave no decorrer de um movimento realizado por um agente humano, [Bernard et al. \(2017\)](#) desenvolveram um sistema de visualização baseado em classificações supervisionadas e não supervisionadas. A metodologia realiza o agrupamento de posicionamentos semelhantes com o uso de técnicas que utilizam classificações definidas em tempo de execução pelo usuário do sistema por meio de uma metáfora visual que permite interações enquanto apresenta a animação do movimento. Ao mesmo tempo, a aplicação exhibe diferentes recomendações realizadas por técnicas que não fazem uso de rótulos pré-definidos, o que possibilita a comparação de diferentes técnicas de detecção de posições-chave na execução de um movimento.

[Wagner et al. \(2018\)](#) iniciam seu trabalho ressaltando que aproximadamente 5.5% da população norte americana sofre de alguma doença ambulatorial que pode comprometer a capacidade de caminhar, sendo esta uma das mais importantes funções motoras. Dessa forma, são muito importantes sistemas que auxiliem os profissionais da área médica a recuperar habilidades de pacientes que possuem tais moléstias. Para tal, é proposto o *KAVAGait*, um ferramental que se baseia na exibição, em função do tempo, das curvas de intensidade de três diferentes forças realizadas pelos pés dos pacientes. A aplicação apresenta uma dupla de gráficos de caixa para cada parâmetro de um conjunto de parâmetros definido pelos especialistas, sendo um responsável por descrever o comportamento do parâmetro em uma determinada categoria selecionada e outro responsável por definir o comportamento do parâmetro ao considerar a mesma categoria normalizada. A utilização do *KAVAGait* facilitou a detecção de irregularidades em caminhadas realizadas por indivíduos que possuíam ferimento no quadril.

Como proposta de analisar a coordenação entre os músculos controlados pela rede de nervos conhecida como plexo braquial, [Chan et al. \(2019\)](#) desenvolveram, em conjunto com especialistas de fisioterapia e de ortopedia, a ferramenta *Motion Browser*. Os autores realizam as avaliações de seu ferramental em uma base de dados de sinais eletromiográficos, captados por sensores devidamente conectados em um paciente, que descrevem ativações presentes nos músculos dos membros superiores de um agente humano no decorrer da execução de um movimento específico. O sistema consiste na apresentação das séries temporais de cada sinal captado referente ao lado do corpo afetado juntamente com os sinais referentes ao lado do corpo sadio, para que as diferenças entre cada conjunto de sinais sejam evidenciadas. Ao mesmo tempo, a aplicação se baseia na exibição do vídeo do paciente realizando a movimentação enquanto destacam os músculos do paciente que possuem maior ativação no movimento. Fazendo uso do *MotionBrowser*, os especialistas foram capazes, por exemplo, de associar atividade excessiva dos músculos da região trapezoidal a movimentos compensatórios em indivíduos que não eram capazes de realizar determinados movimentos de forma adequada.

De posse da revisão apresentada nesta seção, pode-se concluir que as ferramentas que configuram o estado da arte da análise visual de dados de movimentos providenciaram considerável avanço na facilitação de extração de conclusões para especialistas, principalmente da

área médica. Entretanto, pouco foi feito para implementar a análise de relacionamentos entre sinais que compõem, por exemplo, o movimento de um agente. Neste trabalho, é apresentada uma nova técnica de representação de correlações entre sensores que mapeiam a movimentação de um grupo de indivíduos que sofreram acidente vascular cerebral e de um grupo de indivíduos de controle. Seguindo um procedimento semelhante ao apresentado pelos trabalhos discutidos nesta seção, é confeccionada uma ferramenta de visualização que faz uso de diversas metáforas visuais que auxiliam na exploração de relações entre sinais tendo-se como orientação uma situação-problema definida por especialistas da área médica.

2.3 Visualização e comparação de séries temporais

Dados que apresentem determinada dependência temporal são frequentes nas mais variadas áreas do conhecimento, tais como engenharia, medicina, meteorologia, finanças, entre outras (SHUMWAY; STOFFER, 2017). Dessa forma, a análise de séries temporais caracteriza uma área de pesquisa de grande relevância e impacto científico. Entretanto, séries temporais geralmente são representadas por vetores pertencentes a espaços de elevada dimensão e, em muitas situações, devem ser analisadas em conjunto com outras séries temporais, fazendo com que a investigação de suas propriedades se torne muito trabalhosa ou, até mesmo, impossível de ser realizada sem o auxílio de ferramentas de visualização (AIGNER *et al.*, 2007). Nesta seção, são apresentados trabalhos em que dados com características temporais foram abordados fazendo-se uso de técnicas de análise visual.

O uso de técnicas de visualização em sistemas especializados na análise de séries temporais não é algo recente. Keim *et al.* (2006) utilizaram conceitos de análise visual para representar crescimentos e decrescimentos relativos em séries temporais que representam o preço de um determinado produto. Os autores iniciam seu trabalho ressaltando que é necessário analisar o comportamento local de séries financeiras para categorizar de forma honesta a evolução do preço de determinados produtos, uma vez que o fator de escala pode ser determinante em tais análises. Para isso, é construída uma ferramenta de visualização que descreve em uma matriz, com o auxílio de um mapeamento linear de cores, o comportamento de altas e baixas de preços, sendo que altas são representadas pela cor verde e baixas são representadas pela cor vermelha. O sistema foi capaz de representar intervalos de tempo em que o preço de produtos sofreu considerável queda ou alta com respeito a todos os intervalos de tempo.

Baseados em metodologias de foco e contexto, ou *focus+context* (DOLEISCH; GASSER; HAUSER, 2003), Kehrer *et al.* (2008) realizam análises em uma base de dados de observações meteorológicas para confeccionar um robusto indicador visual de regiões mais sensíveis às mudanças climáticas. Os autores baseiam seu estudo em uma ferramenta de visualização que realça, em gráficos do tipo *scatter plot* ou em gráficos de barra horizontal, variações que não estejam contidas na escala natural de mudança de parâmetros, deixando evidenciadas regiões

que são mais sensíveis a alterações climáticas.

Tendo em vista que analisar grupos de séries temporais é uma tarefa de muita importância em inúmeras áreas do conhecimento, Zhao *et al.* (2011) construíram um sistema de visualização, ao qual deram o nome de *ChronoLenses*, especializado na exploração de características de várias séries temporais ao mesmo tempo e que tal análise não seja restrita a nenhum domínio pré-determinado. Dessa forma, o ferramental pode ser utilizado com a mesma taxa de sucesso por astrônomos, analistas financeiros, meteorologistas e especialistas de *streaming* em redes. Os autores avaliam o *ChronoLenses* juntamente a especialistas que atuam nas profissões citadas. O sistema é baseado no uso de variações da metáfora visual “Lentes Mágicas” (BIER *et al.*, 1993), sendo que o mesmo permite que usuários elaborem análises progressivas sobre grupos de séries temporais, extraíndo medidas que levam em consideração apenas uma série temporal, como a auto-regressão, ou busque por similaridades entre grupos de séries temporais com o uso de lentes mágicas e do cálculo de medidas pré-definidas em opções disponíveis no *layout*.

O ponto central do trabalho de Ward e Guo (2011) consiste na análise de uma única série temporal por meio da visualização do comportamento de suas seções, ou janelas. Esta abordagem é utilizada na detecção de ciclos e anomalias que compõem a série temporal. Especificamente, os autores propõem que seja realizado o particionamento de uma série temporal em vetores com a mesma quantidade de instantes de tempo. Em seguida, estes vetores são projetados em um gráfico utilizando-se a técnica PCA, sendo representados pela metáfora visual de glifo-perfil, a qual consiste na representação do conteúdo do vetor e que esquematiza os valores de suas coordenadas. Além disso, cada uma dessas projeções é colorida de acordo com o comportamento do vetor assumido no decorrer da série temporal, com a intenção de que comportamentos diferentes, tais como monotonias distintas, sejam coloridos de forma diferentes. Estas metáforas fizeram com que o ferramental fosse capaz de detectar anomalias e representar ciclos em séries temporais com sucesso.

Steiger *et al.* (2014) propõem um sistema que suporta tarefas exploratórias para a comparação de dados univariados e georreferenciados de sensores, com o objetivo de detectar anomalias. No sistema proposto, foram executadas as divisões das gravações em padrões de comprimento fixo e foram apresentadas para fazer uma comparação ao longo do tempo e espaço por meio de duas visualizações vinculadas. Além de apresentar a comparação georreferenciada entre os sensores, também há um suporte a diferentes padrões temporais para detectar efeitos sazonais, anomalias e periodicidades. Os padrões diários são apresentados para análise em uma visão baseada em agrupamento, já os padrões semanais são apresentados em uma visão baseada em calendário e os padrões sazonais são apresentados em uma visão baseada em projeção. O sistema de visualização proposto consiste em duas visualizações conectadas e que se complementam, a primeira é uma visualização de similaridade e a segunda é uma visualização de rede. A visualização de similaridade fornece uma visão geral de todos os padrões registrados de toda a rede, ao selecionar um nó específico na rede, o usuário pode investigar mudança de

padrões ao longo do tempo. A visualização de rede é um diagrama de grafos com funcionalidade de pesquisa com mais detalhes e exibe informações temporais nos nós representados por glifos, essa visualização utiliza uma metáfora visual baseada em detalhamento para selecionar os dados apresentados nas redes de conexões. Além das duas visualizações possuírem uma ligação visual, a interação que é feita em cada uma delas pode afetar a outra. O sistema foi verificado no quesito de usabilidade por meio de um estudo de caso do mundo real no domínio da rede elétrica com um especialista do domínio. O especialista afirmou ter identificado duas áreas de relevância, o monitoramento e o planejamento. O primeiro passo do especialista foi identificar alguns padrões com a ajuda da legenda da visualização de rede. Nesta legenda, foi verificado que o padrão que ocorreu com mais frequência apresentou ao especialista uma visão geral rápida da rede. Foi identificado a proeminência de padrões com valores significativos abaixo de zero durante o dia, e isso é incomum, esses padrões indicam um fluxo elétrico dos consumidores de volta à rede elétrica. A próxima etapa do especialista foi explorar a grade utilizando a visualização de rede, primeiro concentrando na visualização do calendário, por ser uma visualização mais próxima ao que o especialista está acostumado.

A característica temporal pode ser apenas uma das informações importantes a respeito de uma base de dados e, em determinadas ocasiões, é necessário que sua análise ocorra em conjunto com propriedades de outra natureza. Como exemplo, têm-se as bases de dados climáticas que descrevem a temperatura de cada região do planeta em diferentes períodos de tempo. [Poco et al. \(2014\)](#) confeccionam o *SimilarityExplorer* com a intenção de analisar bases de dados com tais características. Os autores constroem o sistema em conjunto com especialistas de estudos meteorológicos e realizam as avaliações sobre uma base de dados climática georreferenciada que descreve variações globais de 20 anos. A metáfora principal que compõe o *SimilarityExplorer* é a técnica conhecida como matriz multi-forma ([MACEACHREN et al., 2003](#)), que consiste na apresentação par-a-par de dois formatos de informação na mesma matriz. Especificamente, os autores apresentam o grau de correlação entre duas variáveis com respeito ao mesmo local na parte triangular inferior da matriz e a correlação no decorrer do tempo entre as variáveis correspondentes na parte triangular superior da matriz. O ferramental permitiu que os especialistas fossem capazes de obter uma visão geral das similaridades entre diferentes variáveis com respeito ao tempo e ao espaço e também de determinar o momento, o lugar e a intensidade de tais similaridades ao analisar a base de dados.

[Valdivia et al. \(2015\)](#) também abordam o problema de análise de dados com características espaço-temporais. Os autores desenvolvem uma metodologia que usa a teoria de wavelets ([MALLAT, 1999](#)), a qual é muito bem firmada na seara de processamento de sinais e que recentemente foi aperfeiçoada para o uso em processamento de sinais dispostos em grafos ([HAMMOND; VANDERGHEYNST; GRIBONVAL, 2011](#)). Os autores desenvolvem um ferramental modelado por uma sólida teoria matemática, sendo formado por um sistema de visualização que mapeia alterações suaves e abruptas de configurações de pontos específicos de um grafo, que em um estudo de caso é o mapa de Manhattan. Fazendo uso de coeficientes

wavelets, a aplicação foi capaz de detectar nós com elevada variação e destacar fenômenos e eventos interessantes definidos por viagens de táxi no centro da cidade de Manhattan.

Col *et al.* (2017) estendem os conceitos do ferramental de Valdivia *et al.* (2015) para grafos variantes no tempo, as redes de conexões conhecidas como dinâmicas. Sendo que tal aprimoramento é apresentado na forma de uma sólida teoria matemática cujo funcionamento é avaliado em um sistema de visualização que descreve o desenvolvimento de padrões dispostos em nós de um grafo definido em função do tempo. Os autores utilizam a aplicação visual para realizar análises em duas bases de dados formadas por interações temporais entre agentes e comparam sua metodologia com técnicas que representam o estado da arte, reforçando as vantagens alcançadas, principalmente ao utilizar metáforas de foco e contexto em determinados intervalos de tempo.

Análise de dados oriundos de jogos vem recebendo muita atenção de pesquisadores nos últimos anos. Em especial, os jogos virtuais conhecidos como *Multiplayer Online Battle Arena* (MOBA) por representarem um estilo diferente de jogo e despertar reações mais intensas em seus usuários (SHIM; KIM; KIM, 2014). Este tipo de jogo geralmente é definido por duas equipes contendo cinco membros cada uma e que disputam por meio de “campeões”, ou personagens virtualmente controlados, posições estratégicas em uma área (mapa) de extensões limitadas. Em conjunto com a empresa NetEase¹, os pesquisadores Li *et al.* (2016) desenvolveram uma ferramenta que permite a análise visual de dados extraídos de um jogo do estilo MOBA. Os dados possuem característica multi-facetada, com descrições espaço-temporal acerca dos jogadores, tais como posições no mapa em determinados instantes de tempo, quantidade de itens em cada momento do jogo, uso de recursos, dentre outras. O sistema foi confeccionado de forma a apresentar eventos importantes no mapa do jogo por meio de animações no mapa e o desenvolvimento de recursos em séries temporais. Com o auxílio da ferramenta de visualização, os especialistas foram capazes de analisar dois fenômenos muito importantes e que descrevem o balanceamento entre dificuldade e diversão em jogos do tipo MOBA: o fenômeno “bola de neve”, que descreve o acúmulo progressivo de vantagens de forma acelerada por uma equipe; e o fenômeno de “virada”, que representa a vitória de uma equipe que estava em desvantagem no início do jogo.

Na maioria dos modelos definidos por conjuntos de séries temporais é realizada uma etapa de pré-processamento (PP) para evidenciar um fenômeno específico contido nos dados. Entretanto, PPs podem remover características que são interessantes para a análise de dados multivariados. Bernard *et al.* (2019) desenvolveram uma teoria responsável por destacar os efeitos que diferentes PPs causam em um conjunto de dados formado por séries temporais multivariadas. A metodologia é apresentada na forma de uma aplicação interativa de análise visual que permite a exploração de diferentes rotinas de PP que evidenciam determinados fenômenos nas séries temporais analisadas. O sistema permite a construção de roteiros de sequências de PPs aplicados

¹ <https://www.neteasegames.com/>

em séries temporais, tornando o usuário capaz de visualizar os efeitos causados por uma ou mais rotinas de PPs em um grupo de séries temporais. Os autores avaliaram sua teoria em uma base de dados climáticos que apresenta coletas de 30 anos. Com o auxílio do método desenvolvido, especialistas realizam com sucesso tarefas de detecção de *outliers* e de compressão de dados.

Nesta seção, foram apresentadas técnicas que configuram o estado da arte da literatura especializada em análise visual de séries temporais. Em especial, foram destacadas metodologias que abordaram a tarefa de permitir a análise visual de conjuntos de séries temporais. Neste trabalho, é desenvolvida uma nova abordagem de análise visual de conjuntos de séries temporais, dando-se enfoque em suas relações de similaridade e correlações. A metodologia é feita a partir da análise de redes de conexões, como nos trabalhos de [Valdivia et al. \(2015\)](#) e [Col et al. \(2017\)](#), com a ressalva de que, nos trabalhos citados, as conexões entre as séries temporais são conhecidas e, portanto, o desenvolvimento das características temporais e espaciais dos dados representam o principal elemento avaliado, enquanto que na aplicação desenvolvida neste texto, as relações entre as séries temporais não estão explícitas e se tornam o componente central de investigação.

2.4 Considerações finais

Foram apresentados neste capítulo alguns trabalhos cuja fundamentação é especializada em análise visual de dados de movimentos. Ferramentais dedicados a apresentação de padrões existentes em bases de dados que caracterizam algum tipo de movimento foram confeccionados com a metodologia de “teoria orientada por problema”, a qual consiste no desenvolvimento teórico tendo como base um problema específico mas que sua generalização é facilmente obtida com poucas modificações no método. De posse da revisão apresentada, é evidente que existe uma escassez de trabalhos que dedicam sua fundamentação na análise de detalhamento de padrões existentes entre sensores que são dispostos em um agente em movimento. Além disso, pouco tem sido feito no sentido de avaliar e detalhar as relações existentes entre as séries temporais captadas por estes sensores, principalmente nos casos nos quais é levado em consideração um conjunto de indivíduos analisados. É com o intuito de suprir estas necessidades que a teoria desenvolvida neste texto de doutorado foi realizada.

Alguns sistemas visuais de apresentação de séries temporais foram apresentados. O uso desses sistemas facilitou a percepção de padrões existentes em todas as bases de dados avaliadas em cada trabalho. Além disso, análise visual de séries temporais facilitada por meio de grafos é uma tendência neste tipo de trabalho. Entretanto, nenhum avanço foi realizado até o momento da confecção deste texto no sentido de analisar séries temporais por meio de grafos implícitos entre estas. Isto é, pelo conhecimento do autor deste texto, nenhuma técnica de análise visual entre séries temporais foi desenvolvida com a confecção de grafos que as relacionam. É esta necessidade que o trabalho realizado neste doutorado procura suprir.

No Capítulo 3, são apresentadas técnicas de aprendizado baseado em grafo, as quais são

indispensáveis para o material teórico desenvolvido.

INTRODUÇÃO A TÉCNICAS DE APRENDIZADO BASEADO EM GRAFOS

3.1 Considerações Iniciais

Diversos problemas da atualidade são modelados de acordo com uma rede de conexões (DONG *et al.*, 2018). Como exemplo, tem-se a codificação e compressão de imagens (CHEUNG *et al.*, 2018); a segmentação de imagens (XU *et al.*, 2017); a análise de sinais oriundos do cérebro humano (LIU; NEJATI; CHEUNG, 2018); o estudo de dados climáticos (DAS; GHOSH, 2017); dentre outros. Entretanto, em determinadas situações, as conexões entre os elementos da rede não estão fornecidas de forma explícita, sendo necessário inferir tais relações com algum ferramental especializado.

Nos últimos anos, pesquisadores têm se dedicado no desenvolvimento de metodologias capazes de inferir de forma ótima conexões entre conjuntos de elementos. Neste capítulo, são apresentadas algumas dessas técnicas de forma unificada. Algumas demonstrações de resultados e teoremas foram realizadas neste trabalho, estando ausentes nos trabalhos originais.

Neste trabalho, é dada maior atenção a técnicas de predição de redes de conexões não orientadas, nas quais é assumido que um sinal suave é definido nos elementos (nós) da rede. Apresentamos na Seção 3.2 um método de predição de grafo a partir de sinais suaves, desde sua conceituação até sua generalização. Entretanto, também são discutidas na Seção 3.3 algumas metodologias que são responsáveis por inferir ligações menos triviais entre elementos de conjuntos de natureza variada. Este capítulo é finalizado na Seção 3.4 com algumas considerações finais a respeito das teorias apresentadas.

3.2 Predição de redes de conexões a partir de sinais suaves

3.2.1 Conceitos básicos de processamento de sinais em grafos

Para que seja iniciada a discussão a respeito de inferência de grafos, é necessário definir determinados conceitos centrais à teoria abordada. Sendo assim, são apresentadas na Definição 1 algumas estruturas que fundamentam o conceito matemático de “grafo” (BOLLOBÁS, 2013).

Definição 1 (Grafo não orientado). Considera-se o conjunto enumerável V e o conjunto $E \subseteq V \times V$ tal que se $(u, v) \in E$ então $(v, u) \in E$ para todo $(u, v) \in V \times V$.

- (a) Define-se como **grafo não orientado** G , ou simplesmente **grafo**, o par (V, E) , sendo denotado por $G(V, E)$.
- (b) No caso de V ser um conjunto finito, isto é, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então define-se como **matriz de adjacência** de G a matriz simétrica $A = (A_{i,j}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$, apresentada na Equação (3.1):

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{caso } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

- (c) Eventualmente, as coordenadas da matriz de adjacência podem apresentar valores não binários. Neste caso, a matriz de adjacência é conhecida como **matriz peso** de G ¹ e consiste de uma matriz simétrica $W = (W_{i,j}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ tal que se $(v_i, v_j) \in E$, então $W_{i,j} = W_{j,i} > 0$ e se $(v_i, v_j) \notin E$, então $W_{i,j} = W_{j,i} = 0$.

Alguns dos problemas modelados por grafos são caracterizados por conjuntos de dados que apresentam certo padrão de similaridade conhecido na literatura especializada como **suavidade** (*smoothness*). Para expressar matematicamente tal propriedade, é estabelecida uma medida de suavidade apresentada na Definição 2 (SHUMAN *et al.*, 2013).

Definição 2 (Energia de Dirichlet). Seja $G(V, E)$ um grafo com matriz de adjacências (ou de pesos) $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Considera-se um conjunto $\mathcal{X} = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. A **energia de Dirichlet** (ED) do conjunto $\mathcal{X}$ no grafo G é dada pela Equação (3.2).

$$\text{ED}(\mathcal{X}, G) = \sum_{i,j \in \{1, 2, \dots, n\}} W_{i,j} \cdot d(x_i, x_j)^2, \quad (3.2)$$

na qual d é uma função tal que $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma medida de distância.

¹ A partir deste ponto do texto, é considerado que toda matriz de adjacências W seja uma matriz de pesos não necessariamente binária e, a menos que seja explicitado o contrário, uma matriz simétrica cujas coordenadas são valores não negativos.

- (b) Considera-se a matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, em que $m \in \mathbb{N}$ é a dimensão de cada um dos n sinais de X . A **energia de Dirichlet** (ED) da matriz X no grafo G é dada pela Equação (3.3).

$$\text{ED}(X, G) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \cdot \|X_i - X_j\|^2, \quad (3.3)$$

na qual X_k é a k -ésima linha da matriz X .

No decorrer do texto, é padronizado que d seja a distância euclidiana (ou distância de Frobenius), a menos que seja explicitado o contrário.

Fica evidente a necessidade de uma rede de conexões para estabelecer a “suavidade” dos elementos de um dado conjunto, uma vez que, segundo a Definição 2, o conjunto $\mathcal{X}$ possui uma medida de suavidade em função de um grafo G . Sendo assim, $\mathcal{X}$ pode ser mais suave em um grafo do que em outros. Por exemplo, na Figura 1, supondo-se que os elementos de um conjunto $\mathcal{X}$ sejam dispostos nos vértices de 3 grafos distintos (G_1, G_2 e G_3), com $\mathcal{X} := \{v_i \mid i = 1, 2, \dots, 9 \text{ e } v_i \geq v_{i+1}\} \subset \mathbb{R}$ tal que v_i sejam valores fixados para qualquer i , nota-se claramente que $\text{ED}(\mathcal{X}, G_1) < \text{ED}(\mathcal{X}, G_2) < \text{ED}(\mathcal{X}, G_3)$. Mais geralmente, um conjunto $\mathcal{X}$ tem *comportamento suave* em uma rede de conexões se os vínculos desta se dão apenas entre elementos similares de $\mathcal{X}$, tornando, assim, sua respectiva energia de Dirichlet no grafo a *menor possível*.

Figura 1 – Elementos de $\mathcal{X}$ dispostos nos grafos G_1, G_2 e G_3 . Sendo que barras vermelhas representam valores reais positivos, barras azuis representam valores reais negativos e o tamanho da barra está diretamente relacionado ao módulo do valor numérico associado ao vértice.

Fonte: Adaptada de Dong et al. (2014).

Teoricamente, o conjunto $\mathcal{X}$ da Definição 2 pode ser composto por qualquer elemento matemático, mas propriedades muito interessantes podem ser analisadas nas situações especiais em que os elementos de $\mathcal{X}$ são valores numéricos ou vetoriais. Assim, a Definição 3 a seguir se torna uma das mais fundamentais na área de processamento de sinais em grafos (SHUMAN et al., 2013).

Definição 3 (Sinal no grafo). Seja $G(V, E)$ um grafo.

É considerado um **sinal no grafo** G a função f definida na Equação (3.4).

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_i &\longmapsto f(v_i) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sendo assim, de acordo com a Definição 3, no exemplo apresentado na Figura 1, as correspondências entre os elementos do conjunto $\mathcal{X}$ e os vértices dos grafos G_1, G_2 e G_3 configuram sinais em grafos.

Na literatura especializada, é comum representar sinais em grafos como vetores, uma vez que, no geral, o conjunto de vértices de um grafo é finito e, portanto, a imagem de um sinal f em um grafo $G(V, E)$, com $n < \infty$, é associada ao vetor $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ definido na Equação (3.5).

$$\vec{f} := f(V) = f(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) := (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)). \quad (3.5)$$

Intuitivamente, ao observar a Equação (3.5), torna-se claro que, na prática, um sinal em um grafo é a associação de valores numéricos aos seus vértices (Figura 2).

Figura 2 – Associação do sinal $\vec{f} = \left(1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$ a um grafo de 9 vértices.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.2 Processamento de sinais em grafos para confecção de redes de conexões entre sinais suaves

Foram apresentados na Subseção 3.2.1 alguns conceitos básicos de processamento de sinais em grafos, notabilizados principalmente por trabalhos relativamente recentes, tais como o de Shuman *et al.* (2013), que detalha analiticamente o comportamento de sinais em grafos e suas propriedades. Entretanto, em determinadas classes de problemas, a topologia do grafo não é conhecida². Nestes casos, a rede de conexões deve ser inferida. Para que isso seja possível, é considerado que os dados observados cumpram certos requisitos. Uma condição comum da literatura especializada é a de que os dados sejam suaves no grafo estimado.

² Por exemplo, dados climáticos como os dados do site mundial de registros meteorológicos: <http://www.worldclimate.com/sources.htm>.

Sendo assim, para formalizar o desafio de predição de redes de conexões entre sinais suaves é suposto que dado um conjunto de sinais $\mathcal{X} = \{\vec{x}_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, tais que $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$, tem-se como objetivo estimar a topologia de um grafo com n vértices de modo que os m sinais de $\mathcal{X}$ sejam concomitantemente os mais suaves possíveis no grafo. Em outras palavras, a finalidade do método abordado nesta subseção é determinar otimamente um grafo $G^*(V^*, E^*)$ no qual as linhas de $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sejam conectadas de maneira que a energia de Dirichlet do conjunto das linhas de X disposto neste grafo seja a menor possível e, ao mesmo tempo, que G^* constitua uma relação coerente entre as linhas de X . Desta forma, a relação a ser estabelecida neste problema é entre as n observações de cada um dos m sinais de $\mathcal{X}$, uma vez que em cada um dos n vértices do grafo estimado estará disposto um vetor de m coordenadas.

É recorrente na literatura especializada o uso de uma representação especial de grafos que é a matriz Laplaciana (Definição 4). Esta matriz é muito importante ao realizar a análise espectral de grafos além de também ser uma matriz que evidencia as relações entre os elementos de um grafo (BOLLOBÁS, 2013).

Definição 4 (Laplaciana). Seja $G(V, E)$ um grafo cuja matriz de adjacência é $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Define-se como **matriz de graus** de G , a matriz $D = (D_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dada pela Equação (3.6):

$$D_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n W_{i,k}, & \text{caso } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

- (b) Define-se como **Laplaciana combinatória do grafo G** (ou somente **Laplaciana do grafo G**), a matriz

$$L = D - W.$$

Como apresentado na Proposição 1, a matriz Laplaciana possui relação direta com a energia de Dirichlet. Portanto, ela é de fundamental importância na indicação da suavidade de sinais em grafos.

Proposição 1. Seja $G(V, E)$ um grafo com matriz de adjacência $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e Laplaciana L .

Considerando a matriz de sinais $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, é válido que

$$\text{ED}(X, G) = 2\text{tr}(X^T L X),$$

na qual $\text{tr}(M) = \sum_i M_{i,i}$ é a função **traço**.

Demonstração. Apêndice A.

□

Como consequência direta da Proposição 1, uma matriz de sinais $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é o mais suave possível em um grafo com Laplaciana $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se, e somente se, o valor $\text{tr}(X^T L X)$ for o menor possível.

Corolário 1. A matriz Laplaciana de qualquer grafo é semidefinida positiva.

Demonstração. Apêndice A.

□

É garantido por resultados básicos da álgebra linear que toda matriz semidefinida positiva admite decomposição espectral. Deste modo, pelo Corolário 1, a matriz laplaciana L pode ser decomposta de acordo com a Equação (3.7):

$$L = Q^T \Lambda Q, \quad (3.7)$$

na qual, Q é uma matriz cujas colunas são constituídas por uma base ortonormal de autovetores de L e a matriz Λ é uma matriz diagonal formada pelos respectivos autovalores de L . Além disso, algumas propriedades notáveis são observadas de imediato, tais como a propriedade apresentada na Proposição 2 abaixo.

Proposição 2. O vetor $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é autovetor da Laplaciana de qualquer grafo.

Demonstração. Apêndice A.

□

Corolário 2. O menor autovalor de uma matriz Laplaciana é o autovalor 0.

Demonstração. Apêndice A.

□

Os dois últimos resultados são úteis na categorização de matrizes Laplacianas válidas, uma vez que a abordagem de Dong *et al.* (2016) apresentada nesta seção tem como objetivo calcular uma matriz Laplaciana válida para representar o grafo estimado. A ideia principal de Dong *et al.* (2016) é assumir que o sinal definido no grafo segue uma distribuição Gaussiana, isto é, se $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um sinal definido em um grafo com n vértices cuja Laplaciana é dada como na Equação (3.7), então $\vec{x}$ pode ser escrito de acordo com a Equação (3.8) a seguir:

$$\vec{x} = Q\vec{h} + u_{\vec{x}} + \varepsilon, \quad (3.8)$$

onde, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ é a representação latente de $\vec{x}$, $u_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n$ é a média do sinal e ε é um ruído multivariado de média $\vec{0}$ e variância $\sigma_{\varepsilon}^2 I_n$, em que I_n é a matriz identidade de dimensões $n \times n$. Isto é, ε é descrito por uma distribuição normal de acordo com a Equação (3.9):

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \sigma_{\varepsilon}^2 I_n). \quad (3.9)$$

Para que a técnica de [Dong et al. \(2016\)](#) apresente resultados satisfatórios, é necessário estipular *a priori* que $\vec{h}$ seja uma versão gaussiana de $\vec{x}$ e **suave** no grafo. Para que isso seja possível, $\vec{h}$ é definida de acordo com a Equação (3.10):

$$\vec{h} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \Lambda^\dagger), \quad (3.10)$$

na qual, $\Lambda^\dagger$ é a pseudo-inversa de Moore-Penrose de Λ .

Segue diretamente de propriedades de análise multivariada ([TIPPING; BISHOP, 1999](#)) e das Equações (3.8), (3.9) e (3.10) as relações apresentadas nas Equações (3.11) e (3.12):

$$\vec{x} | \vec{h} \sim \mathcal{N}(Q\vec{h} + u_{\vec{x}}, \sigma_\epsilon^2 I_n), \quad (3.11)$$

$$\vec{x} \sim \mathcal{N}(u_{\vec{x}}, L^\dagger + \sigma_\epsilon^2 I_n). \quad (3.12)$$

Pela Equação (3.12), é claro que, em um cenário livre de ruído, $\vec{x}$ tem a variância descrita exatamente pela pseudo-inversa da Laplaciana do grafo. Então, a resolução do problema se dá ao determinar uma representação gaussiana *mais plausível possível* de $\vec{x}$, isto é, resolver o problema de *estimação por máxima verossimilhança a posteriori* (MAP) de uma variável latente $\vec{h}$ dado $\vec{x}$ da Equação (3.13):

$$\vec{h} := \arg \max_{\vec{h}} p(\vec{h} | \vec{x}), \quad (3.13)$$

na qual $p(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade.

O problema da Equação (3.13) pode ser estendido para uma representação mais efetiva, como observado na Equação (3.14).

$$\begin{aligned} \arg \max_{\vec{h}} p(\vec{h} | \vec{x}) &= \arg \max_{\vec{h}} p(\vec{x} | \vec{h}) p(\vec{h}), \text{ por Bayes} \\ &= \arg \max_{\vec{h}} \log(p(\vec{x} | \vec{h}) p(\vec{h})), \text{ pois "log" é crescente.} \\ &= \arg \min_{\vec{h}} \left(-\log(p(\vec{x} | \vec{h})) - \log(p(\vec{h})) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando, sem perda de generalidade, que $u_{\vec{x}} = \vec{0}$, então as respectivas leis de $p(\vec{x} | \vec{h})$ e $p(\vec{h})$ são determinadas pelas Equações (3.10) e (3.11). Especificamente,

$$p(\vec{x} | \vec{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\epsilon^2}} e^{-\frac{(\vec{x} - Q\vec{h})^T (\vec{x} - Q\vec{h})}{2\sigma_\epsilon^2}}, \quad (3.15a)$$

$$p(\vec{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\Lambda^\dagger)}} e^{-\frac{\vec{h}^T \Lambda \vec{h}}{2}}. \quad (3.15b)$$

Substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\vec{h} &:= \arg \min_{\vec{h}} \left[- \left(- \frac{(\vec{x} - Q\vec{h})^T (\vec{x} - Q\vec{h})}{2\sigma_\epsilon^2} - \frac{\vec{h}^T \Lambda \vec{h}}{2} \right) - \underbrace{\log \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon \sqrt{\det \Lambda^\dagger}} \right)}_{\text{Constante}} \right] \\
&\simeq \arg \min_{\vec{h}} \left(\frac{(\vec{x} - Q\vec{h})^T (\vec{x} - Q\vec{h})}{2\sigma_\epsilon^2} + \frac{\vec{h}^T \Lambda \vec{h}}{2} \right) \\
&= \arg \min_{\vec{h}} \left(\frac{\|\vec{x} - Q\vec{h}\|^2}{2\sigma_\epsilon^2} + \frac{\vec{h}^T \Lambda \vec{h}}{2} \right) \\
&= \arg \min_{\vec{h}} \left[\left(\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \right) \left(\|\vec{x} - Q\vec{h}\|^2 + \underbrace{\sigma_\epsilon^2}_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \cdot \vec{h}^T \Lambda \vec{h} \right) \right] \\
&\simeq \arg \min_{\vec{h}} \left(\|\vec{x} - Q\vec{h}\|^2 + \alpha \cdot \vec{h}^T \Lambda \vec{h} \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Definindo $\vec{y} := Q\vec{h}$, então

$$\vec{h} := Q^T \vec{y}. \tag{3.17}$$

E, pela Equação (3.7):

$$\vec{h}^T \Lambda \vec{h} = \vec{y}^T Q^T \Lambda Q^T \vec{y} = \vec{y}^T L \vec{y}. \tag{3.18}$$

Substituindo as equivalências das Equações (3.17) e (3.18) na Equação (3.16), obtem-se o seguinte problema de otimização:

$$\vec{y}^* := \arg \min_{\vec{y}} \left(\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \alpha \cdot \vec{y}^T L \vec{y} \right), \tag{3.19}$$

na qual $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Sendo assim, a solução $\vec{y}^*$ do problema de otimização da Equação (3.19) é a versão gaussiana mais suave possível do sinal de entrada $\vec{x}$ no grafo definido pela Laplaciana L , uma vez que determinar um sinal $\vec{y}^*$ tal que $\vec{y}^{*T} L \vec{y}^*$ seja menor possível acarreta na suavidade de $\vec{y}^*$ em L , como garantido pela Proposição 1. Entretanto, nesta classe de problema, o grafo também é desconhecido, então é necessário realizar a otimização da Equação (3.19) com respeito a uma Laplaciana. Ou seja, o resultado esperado é o par $(\vec{y}^*, L^*)$ como descrito na Equação (3.20):

$$(\vec{y}^*, L^*) := \arg \min_{(\vec{y}, L \in \mathcal{L})} \left(\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \alpha \cdot \vec{y}^T L \vec{y} \right), \tag{3.20}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $\mathcal{L}$ é o conjunto das matrizes Laplacianas, o qual é formado pelas matrizes $n \times n$ simétricas, cujas coordenadas não pertencentes à diagonal principal são não positivas (Definição 4) e também possuem como autovetor de autovalor 0 o vetor $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ (Proposição 2). Ou seja,

$$\mathcal{L} = \{L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L = L^T; L \cdot \vec{1} = \vec{0}; L_{i,j} \leq 0, \text{ se } i \neq j\}. \tag{3.21}$$

Além disso, para a maioria dos problemas citados no início desta seção, a rede de conexões estimada deve ser “esparsa”, isto é, os vértices do grafo calculado devem ter um número bem reduzido de vizinhos. Desta forma, para ser obtido o efeito de esparsidade, é adicionado a parcela que calcula a norma de Frobenius da Laplaciana à minimização dada na Equação (3.20), resultando na Equação (3.22).

$$(\vec{y}^*, L^*) := \arg \min_{(\vec{y}, L \in \mathcal{L})} \left(\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \alpha \cdot \vec{y}^T L \vec{y} + \beta \|L\|_F^2 \right), \quad (3.22)$$

na qual $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Deste modo, ao solucionar o problema de otimização da Equação (3.22), obtém-se $\vec{y}^*$, que é a versão gaussiana mais próxima de $\vec{x}$ no grafo cuja Laplaciana é L^* .

De forma mais geral, a técnica de [Dong et al. \(2016\)](#) determina uma rede de conexões entre um conjunto de sinais suaves e não apenas um único sinal. A generalização matricial do problema de otimização definido pela Equação (3.22) é natural e análogo, com a adição de uma restrição para controle de escala a fim de evitar soluções triviais: que a soma dos pesos da rede de conexão estimada seja igual ao número de vértices da rede. Tal restrição impossibilita, por exemplo, que a matriz nula seja obtida como uma Laplaciana válida. Matematicamente, a versão matricial do problema de otimização da Equação (3.22) é dada pela Equação (3.23):

$$(Y^*, L^*) := \arg \min_{(Y, L \in \mathcal{L})} \left(\|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T L Y) + \beta \|L\|_F^2 \right), \quad (3.23)$$

Sujeito a $\text{tr}(L) = n$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz de m sinais a serem dispostos em n vértices de algum grafo.

3.2.3 O algoritmo de aprendizagem de grafos

A otimização da Equação (3.23) não é trivial, uma vez que a função objetivo da mesma não é convexa. Entretanto, este problema pode ser analisado como uma otimização convexa alternada ([BOYD et al., 2011](#)). Desta forma, solucionar o problema de otimização da Equação (3.23) é equivalente a resolver o mesmo problema fixando uma das variáveis Y ou L alternadamente até que haja convergência. Ou seja, secciona-se o problema da Equação (3.23) em dois subproblemas, apresentados na Equação (3.24):

$$L := \arg \min_{L \in \mathcal{L}} \left(\alpha \cdot \text{tr}(Y^T L Y) + \beta \|L\|_F^2 \right) \quad (3.24a)$$

Sujeito a $\text{tr}(L) = n$

$$Y := \arg \min_Y \left(\|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T L Y) \right) \quad (3.24b)$$

Uma vez fixado Y , o problema de otimização da Equação (3.24a) se torna um problema de otimização quadrática. Além disso, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser modelada por um vetor $\vec{l} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, o qual representa, por exemplo, a parte inferior triangular de L , reduzindo pela metade o número de variáveis e a quantidade de memória utilizada pela máquina. Com relação ao problema da Equação (3.24b), existe uma solução direta, como comprovado na Proposição (3).

Lema 1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Então

$$\text{tr}(Y^T Y) = \|Y\|_F^2, \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \text{tr}(YA) = \text{tr}(AY) = \text{tr}(Y^T A^T) = \text{tr}(A^T Y^T) = A^T, \quad (3.25b)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \text{tr}(Y^T B Y) = (B + B^T)Y. \quad (3.25c)$$

Demonstração. (PETERSEN; PEDERSEN *et al.*, 2008). □

Proposição 3. A otimização da Equação (3.24b) possui uma única solução dada pela Equação (A.4).

$$\arg \min_Y \left(\|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T L Y) \right) = (\alpha L + I_n)^{-1} X. \quad (3.26)$$

Demonstração. Apêndice A. □

Nos casos em que n for relativamente grande, a inversa $(I_n + \alpha L)^{-1}$ pode ser calculada por fatoração de Cholesky para que a matriz Y seja determinada de maneira eficiente (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Finalmente, ao incorporar tais informações, é confeccionado o procedimento necessário para prever uma rede de conexões de um dado conjunto de sinais. O Algoritmo 1 consiste na solução dos problemas apresentados na Equação (3.24).

Na prática, é possível considerar que X seja definido por uma distribuição gaussiana, a mais suave possível no grafo obtido. Na verdade esta propriedade pode ser obtida por meio de filtragens, por exemplo. Neste caso, considera-se que $X = Y$ no Algoritmo 1 e soluciona-se iterativamente apenas o problema definido pela Equação (3.24a).

3.2.4 Generalização da técnica de predição de redes de conexões entre sinais suaves

A técnica Dong *et al.* (2016) apresentada neste capítulo pode ser generalizada em uma abordagem mais completa, como mostrou Kalofolias (2016) em seu trabalho. Nesta extensão, o autor propõe a generalização do problema apresentado na Equação (3.23) para uma versão na

Algoritmo 1 – Aprendizagem de redes de conexões entre sinais suaves.

```

1: Entrada:  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $N$ .
2: Saída: Laplaciana  $L$  e  $Y$  versão gaussiana de  $X$ .
3:  $Y_1 \leftarrow X$ ;
4: para  $i \leftarrow 1$  até  $N$  faça
5:    $L_i \leftarrow \arg \min_{L \in \mathcal{L}} \left( \alpha \cdot \text{tr}(Y_i^T L Y_i) + \beta \|L\|_F^2 \right)$  ;
     Sujeito a  $\text{tr}(L) = n$ 
6:    $Y_{i+1} \leftarrow \arg \min_Y \left( \|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T L_i Y) \right)$  ;
7:   se Houve convergência de  $L_i$  e de  $Y_i$  então
8:     Saia da estrutura de repetição;
9:   fim se
10: fim para
11:  $Y \leftarrow Y_N$ ;
12:  $L \leftarrow L_N$ ;

```

qual possam ser aplicados os “algoritmos de otimização primal-dual escalares” (KOMODAKIS; PESQUET, 2015), conhecidos na literatura especializada por sua rápida convergência em problemas que envolvam grandes conglomerados de dados. Especificamente, o problema de estimar uma rede de conexões entre uma matriz X de sinais suaves é universalizado por meio da Equação (3.27):

$$L^* := \arg \min_{L \in \mathcal{L}} [f(L, X) + g(L)], \quad (3.27)$$

onde que a função f é responsável por garantir a suavidade de X na rede estimada e g é uma função que incentiva a esparsidade do grafo.

O problema de otimização da Equação (3.27) determina apenas a rede de conexões entre os sinais de X , ao contrário da técnica da Equação (3.23) que determina otimamente um grafo, definido por L , e uma versão suave (Y) dos dados de entrada X . Isso se dá ao fato da interpretação que os autores fazem do conceito de “suavidade” estar correlacionado à filtragem de sinais em grafos, assim como Shuman *et al.* (2013), especificada na Definição 5.

Definição 5 (Suavidade por filtragem). Seja $G = (V, E)$ um grafo com Laplaciana L . Considere-se que L admite a decomposição espectral da Equação (3.28):

$$L = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_\Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} - & \vec{u}_1 & - \\ - & \vec{u}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{u}_n & - \end{bmatrix}}_{U^T}, \quad (3.28)$$

na qual $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(a) Dado um sinal $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, sua versão **filtrada no grafo** G é dada por $\vec{y}$:

$$\vec{y} := \sum_{i=1}^n (\vec{u}_i h(\lambda_i) \vec{u}_i^T \vec{x}), \quad (3.29)$$

onde, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de **filtro**, é uma função $\mathcal{C}^\infty$, isto é, uma função que possui derivada de qualquer ordem contínua.

(b) Diz-se que o sinal $\vec{y}$, definido na Equação (3.29), é uma versão **suave** no grafo G do sinal de entrada $\vec{x}$ se a função h é uma função decrescente.

Desta forma, pressupõe-se que os sinais de entrada X utilizados na técnica da Equação (3.27) sejam filtrados no grafo a ser determinado, isto é, pressupõe-se que os sinais de entrada X já sejam sua versão mais suave possível em algum grafo.

Além disso, para facilitar a interpretação intuitiva, tem-se como objetivo manipular diretamente a matriz de adjacência do grafo ao desenvolver a generalização, o que não altera os resultados, como evidenciado pela proposição a seguir.

Proposição 4. Sejam

$$\mathcal{W}_n := \{W \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \mid W = W^T; W_{i,i} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{W}_{\vec{v}} := \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}_+^{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \times 1} \right\}. \quad (3.31)$$

Então são equivalentes os conjuntos $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}_{\vec{v}}$ e $\mathcal{L}$ (Equação (3.21)).

Demonstração. Apêndice A.

□

Como consequência da Proposição 4, a otimização do problema da Equação (3.27) pode ser realizada em qualquer um dos conjuntos $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}_n$, ou $\mathcal{W}_{\vec{v}}$. Desta forma, ao desenvolver a teoria, é comum fazer uso dos conjuntos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{W}_n$, mas ao desenvolver aplicações práticas, o conjunto factível da otimização deve estar contido em $\mathcal{W}_{\vec{v}}$, uma vez que os elementos deste ocupam menos da metade de memória ocupada pelos elementos dos outros dois conjuntos.

3.2.4.1 Uso de uma técnica de otimização primal-dual escalar

Neste texto, as técnicas de otimização primal-dual escalares não estão propriamente detalhadas, devido ao objetivo do trabalho estar relacionado apenas à predição de redes de conexões. Uma explicação bem detalhada acerca do assunto assim como os resultados analisados e comprovados podem ser encontrados no trabalho de [Komodakis e Pesquet \(2015\)](#). De qualquer forma, para uma boa compreensão desta revisão da teoria, se fazem necessárias algumas definições ([KOMODAKIS; PESQUET, 2015](#)):

Definição 6 (Função convexa). Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é **convexa** se para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ e para qualquer $\gamma \in [0, 1]$ tem-se

$$f(\gamma\vec{x} + (1 - \gamma)\vec{y}) \leq \gamma f(\vec{x}) + (1 - \gamma)f(\vec{y}).$$

Definição 7 (Função convexa própria). Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa é **própria** se existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}_0) \neq +\infty$.

Definição 8 (Função semicontínua inferiormente). Diz-se que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é **semicontínua inferiormente** (S.C.I.) se o conjunto $f^{-1}(a, +\infty] := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) > a\}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Definição 9 (Função Lipschitziana). Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **Lipschitziana** se existe uma constante positiva Γ tal que para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ é válido

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq \Gamma \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Definição 10 (Operador proximal). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa própria semicontínua inferiormente. Define-se como **operador proximal de f** a aplicação $\text{prox}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que

$$\text{prox}_f(\vec{x}) := \arg \min_{\vec{y} \in \mathbb{R}^n} f(\vec{y}) + \frac{1}{2} \|\vec{y} - \vec{x}\|^2.$$

Definição 11 (Conjugado de função). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função. Define-se como **função conjugada de f** a aplicação $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que

$$f^*(\vec{u}) := \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} (\vec{u}^T \vec{x} - f(\vec{x})).$$

Essencialmente, as técnicas de otimização primal-dual escalares que são utilizadas neste trabalho podem ser sintetizadas na resolução de problemas descritos pela Equação (3.32):

$$\vec{x}^* := \arg \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} (f_1(\vec{x}) + f_2(K \cdot \vec{x}) + f_3(\vec{x})), \quad (3.32)$$

na qual, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um operador fixado e f_1 , f_2 e f_3 são funções convexas próprias e semicontínuas inferiormente. Além disso, o gradiente de f_3 deve ser uma aplicação Lipschitziana.

Sendo assim, se o problema de otimização for modelado de acordo com a Equação (3.32), então é possível utilizar em sua resolução os bem conhecidos algoritmos de otimização primal-dual escalares. No Algoritmo 2, é apresentado uma versão desse tipo de técnica de otimização que possui uma das mais rápidas taxa de convergência. O princípio do algoritmo é baseado em uma estratégia de resolução do tipo *Forward-Backward-Forward* (FBF).

Algoritmo 2 – Algoritmo de otimização primal-dual escalar com estratégia *Forward-Backward-Forward*.

- 1: **Entrada:** $N \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^m$, $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\nabla f_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 - 2: **Saída:** $\vec{x}^*$ solução da Equação (3.32)
 - 3: **Defina** $g \leftarrow f_2^*$; $\triangleright g$ é a função conjugada de f_2 .
 - 4: **para** $i \leftarrow 1$ **até** N **faça**
 - 5: Tome $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$;
 - 6: $\vec{y}_{1,i} \leftarrow \vec{x}_i - \gamma_i (\nabla f_3(\vec{x}_i) + K^T \vec{v}_i)$;
 - 7: $\vec{y}_{2,i} \leftarrow \vec{v}_i + \gamma_i K \vec{x}_i$;
 - 8: $\vec{p}_{1,i} \leftarrow \text{prox}_{\gamma_i f_1}(\vec{y}_{1,i})$;
 - 9: $\vec{p}_{2,i} \leftarrow \text{prox}_{\gamma_i g}(\vec{y}_{2,i})$;
 - 10: $\vec{q}_{1,i} \leftarrow \vec{p}_{1,i} - \gamma_i (\nabla f_3(\vec{p}_{1,i}) + K^T \vec{p}_{2,i})$;
 - 11: $\vec{q}_{2,i} \leftarrow \vec{p}_{2,i} + \gamma_i K \vec{p}_{1,i}$;
 - 12: $\vec{x}_{i+1} \leftarrow \vec{x}_i - \vec{y}_{1,i} + \vec{q}_{1,i}$;
 - 13: $\vec{v}_{i+1} \leftarrow \vec{v}_i - \vec{y}_{2,i} + \vec{q}_{2,i}$;
 - 14: **se** Houve convergência de $\vec{x}_i$ e de $\vec{v}_i$ **então**
 - 15: Saia da estrutura de repetição;
 - 16: **fim se**
 - 17: **fim para**
 - 18: $\vec{x}^* \leftarrow \vec{x}_{i+1}$;
-

3.2.4.2 Predição de redes de conexões como um problema primal-dual escalar

É possível descrever o problema apresentado na Equação (3.23) de forma que o mesmo possa ser solucionado eficientemente pela técnica de otimização primal-dual escalar FBF do Algoritmo 2. Para tal, é necessário supor que os sinais de entrada X são filtrados em algum grafo por algum filtro de acordo com a Definição 5. Em outras palavras, considera-se que $X = Y$. Desta forma, o problema em questão pode ser reformulado de acordo com a Equação (3.33):

$$\begin{aligned}
 L^* &:= \arg \min_{L \in \mathcal{L}} \left(\alpha \cdot \text{tr}(X^T L X) + \beta \cdot \|L\|_F^2 \right), \\
 &\text{Sujeito a } \text{tr}(L) = n
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
 L^* &:= \arg \min_{L \in \mathcal{L}} \left(\text{tr}(X^T L X) + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}_{\delta} \cdot \|L\|_F^2 \right). \\
 &\text{Sujeito a } \text{tr}(L) = n
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Pela Proposição 1, $\text{tr}(X^T L X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j} \|X_i - X_j\|^2$. Então, definindo $Z = (Z_{i,j})$ tal

que, $Z_{i,j} := \|X_i - X_j\|^2$, a Equação (3.34) se torna equivalente ao problema:

$$\begin{aligned} L^* &:= \arg \min_{L \in \mathcal{L}} \left(\|W \circ Z\|_1 + \underbrace{2\delta}_{\rho} \cdot \|L\|_F^2 \right) \\ &\text{Sujeito a } \operatorname{tr}(L) = n \end{aligned} \quad (3.35)$$

na qual, $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$ e $\circ$ é o produto ponto-a-ponto, isto é, $A \circ B = C = (c_{i,j})$ tal que $c_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \|L\|_F^2 = \|D - W\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n D_{i,i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n W_{i,j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n W_{i,j} \right)^2 + \|W\|_F^2 = \|W \cdot \vec{1}\|^2 + \|W\|_F^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

na qual $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Também é válido que,

$$\operatorname{tr}(L) = \sum_{i=1}^n D_{i,i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n W_{i,j} \right) = \|W\|_1. \quad (3.37)$$

Substituindo as Equações (3.36) e (3.37) no problema de otimização da Equação (3.38), obtém-se a equivalência a seguir:

$$\begin{aligned} W^* &:= \arg \min_{W \in \mathcal{W}_n} \left[\|W \circ Z\|_1 + \rho \cdot \left(\|W \cdot \vec{1}\|^2 + \|W\|_F^2 \right) \right], \\ &\text{Sujeito a } \|W\|_1 = n \end{aligned} \quad (3.38)$$

a qual possui a seguinte forma vetorial

$$\begin{aligned} \vec{w}^* &:= \arg \min_{\vec{w} \in \mathcal{W}_{\vec{v}}} \left[2 \cdot \vec{w}^T \vec{z} + \rho \cdot (S\vec{w} + 2 \cdot \vec{w}^T \vec{w}) \right], \\ &\text{Sujeito a } 2 \cdot \vec{1}^T \vec{w} = n \end{aligned} \quad (3.39)$$

na qual $S \in \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n-1)}{2}}$ é determinado previamente de forma que $S\vec{w} = W \cdot \vec{1}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, e $\vec{z}$ é a versão vetorial da parte superior da matriz de distâncias Z .

Desta forma, o problema da Equação (3.39) pode ser modelado de acordo com o problema de otimização primal-dual escalar da Equação (3.32). Basta tomar como funções f_1 , f_2 e f_3 as

funções:

$$f_1(\vec{w}) := ? \{ \vec{w}_i \geq 0, \forall i \} + 2 \cdot \vec{w}^T \vec{z}, \quad (3.40a)$$

$$f_2(2 \cdot \vec{1}^T \vec{w}) := ? \{ \vec{1}^T \vec{w} = n \}, \quad (3.40b)$$

$$f_3(\vec{w}) := \rho \cdot \vec{w}^T S^T S \vec{w} + 2\rho \cdot \vec{w}^T \vec{w}, \quad (3.40c)$$

sendo “ $? \{ \cdot \}$ ” a função que vale 0 no caso da condição entre as chaves for verdadeira e que vale $+\infty$ caso contrário.

Ao analisar os resultados a seguir, percebe-se que as funções da Equação (3.40) podem ser utilizadas para modelar um problema a ser solucionado eficientemente pela técnica de otimização primal-dual escalar do Algoritmo 2.

Lema 2 (Teorema Fundamental das funções convexas). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

f é uma função convexa se, e somente se,

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^T (x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 5. As funções da Equação (3.40) são funções convexas próprias, semicontínuas inferiormente e, além disso, o gradiente de f_3 é uma aplicação Lipschitziana.

Demonstração. Apêndice A. □

De acordo com a Proposição 5, as funções da Equação (3.40) modelam o problema apresentado na Seção 3.2 de determinar uma rede de conexões otimamente entre um conjunto X de sinais suaves. Sendo que tal modelagem possibilita a utilização do Algoritmo 2, que é um dos algoritmos de otimização do tipo que apresenta convergência mais rápida para grandes volumes de dados. Especificamente, fazendo uso dos operadores proximais de f_1 e de f_2^* , apresentados respectivamente nas Proposições 6 e 7, obtém-se a técnica de otimização apresentada no Algoritmo 3.

Proposição 6. Seja $\vec{p} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ o operador proximal de $\gamma f_1(\vec{y})$ para $\gamma \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de $\vec{p}$ são dadas por

$$\vec{p}_i = \begin{cases} (\vec{y} - 2\gamma \vec{z})_i, & \text{se } (\vec{y} - 2\gamma \vec{z})_i \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Apêndice A. □

Proposição 7. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, então o operador proximal de γf_2^* é determinado por

$$\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = y - \gamma n.$$

Demonstração. Apêndice A.

□

Algoritmo 3 – Algoritmo de otimização primal-dual escalar com estratégia *Forward-Backward-Forward* para determinação de uma rede de conexões entre sinais suaves por meio da técnica de Dong et al. (2016).

- 1: **Entrada:** $N \in \mathbb{N}$, $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^k$. As funções f_1 , f_2 e o operador S dados pelas Equação (3.40), ∇f_3 (Equação (A.12)).
 - 2: **Saída:** $\vec{w}^*$ solução da Equação (3.32) e versão vetorial da matriz de adjacência do grafo determinado.
 - 3: **para** $i \leftarrow 1$ **até** N **faça**
 - 4: Tome $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$;
 - 5: $\vec{y}_{1,i} \leftarrow \vec{w}_i - \gamma_i \left[2\rho \left(S^T S \vec{w}_i + 2\vec{w}_i \right) + (2 \cdot \vec{1}) \vec{v}_i \right]$;
 - 6: $\vec{y}_{2,i} \leftarrow \vec{v}_i + \gamma_i 2 \cdot \vec{1}^T \vec{w}_i$;
 - 7: $\vec{p}_{1,i} \leftarrow \max \left(\vec{y}_{1,i} - 2\gamma_i \vec{z}, \vec{0} \right)$; $\triangleright$ As coordenadas de $\vec{m} = \max(\vec{x}, \vec{u})$ são $\vec{m}_k = \max(\vec{x}_k, \vec{u}_k)$
 - 8: $\vec{p}_{2,i} \leftarrow \vec{y}_{2,i} - \gamma_i n$;
 - 9: $\vec{q}_{1,i} \leftarrow \vec{p}_{1,i} - \gamma_i \left[2\rho \left(S^T S \vec{p}_{1,i} + 2\vec{p}_{1,i} \right) + (2 \cdot \vec{1}) \vec{p}_{2,i} \right]$;
 - 10: $\vec{q}_{2,i} \leftarrow \vec{p}_{2,i} + \gamma_i (2 \cdot \vec{1}^T) \vec{p}_{1,i}$;
 - 11: $\vec{w}_{i+1} \leftarrow \vec{w}_i - \vec{y}_{1,i} + \vec{q}_{1,i}$;
 - 12: $\vec{v}_{i+1} \leftarrow \vec{v}_i - \vec{y}_{2,i} + \vec{q}_{2,i}$;
 - 13: **se** Houve convergência de $\vec{w}_i$ e de $\vec{v}_i$ **então**
 - 14: Saia da estrutura de repetição;
 - 15: **fim se**
 - 16: **fim para**
 - 17: $\vec{w}^* \leftarrow \vec{w}_{i+1}$;
-

Kalofolias (2016) sugere o uso de uma tripla de funções (f_1, f_2, f_3) diferente da apresentada na Equação (3.40). Especificamente, o autor analisa o funcionamento da predição de grafos, tomando como funções f_1 , f_2 e f_3 as funções:

$$f_1(\vec{w}) := ? \{ \vec{w}_i \geq 0, \forall i \} + 2 \cdot \vec{w}^T \vec{z}, \quad (3.41a)$$

$$f_2(\vec{1}^T \vec{w}) := -\alpha \cdot \vec{1}^T \cdot \log(\vec{1}^T \vec{w}), \quad (3.41b)$$

$$f_3(\vec{w}) := \beta \cdot \vec{w}^T \vec{w}, \quad (3.41c)$$

com α e β valores reais positivos.

As demonstrações de adequação ao uso do Algoritmo 2 para a tripla de funções apresentada na Equação (3.41) são análogas às realizadas para as funções da Equação (3.40). Desta forma, são omitidas neste texto.

Ressalta-se que na configuração de Kalofolias (2016), são necessários dois parâmetros (α e β), o que pode ser um problema ao utilizar a técnica abordada nesta seção para determinar grandes redes de conexões, tendo em vista a possível necessidade de avaliar várias configurações

diferentes de parâmetros para se obter uma rede de conexão satisfatória. Para contornar este problema, [Kalofolias e Perraudin \(2017\)](#) desenvolveram uma técnica que calcula otimamente a parametrização necessária utilizada na Equação (3.41) de acordo com a escala do grafo a ser determinado.

3.2.5 Redução de dimensionalidade de sinais suaves em grafos com presença de ruído

Nesta seção, é apresentada a técnica de [Liu, Nejati e Cheung \(2018\)](#)³, a qual possui como principal objetivo o de determinar a projeção de baixo *rank* de um conjunto de sinais ruidosos que seja a mais suave possível em um grafo esparso. Especificamente, de posse de uma matriz $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de m sinais ruidosos com baixa dimensionalidade intrínseca, e com $m \ll n$, tem-se como intenção, determinar uma projeção de X em um espaço de dimensão r muito menor que n e que seja isenta de ruído. Ao mesmo tempo, a técnica estima uma rede de conexões em que tal projeção seja a mais suave possível. Deste modo, a técnica baseia-se em três principais hipóteses:

1. As linhas de X possuem elevada correlação entre si. O que implica que existe um espaço de dimensão baixa que as representa satisfatoriamente bem;
2. A matriz X é contaminada por um ruído aditivo e esparso de norma consideravelmente elevada. Consequentemente, X pode ser separada em duas parcelas: uma representando sua versão de baixo *rank* que é isenta de ruído, modelada por S_0 ; e outra representando o ruído em si, modelada por M , como descreve a Equação (3.42)

$$X = S_0 + M, \quad (3.42)$$

em que $S_0 = PY^T$;

3. S_0 é uma matriz de sinais suaves em um grafo.

[Liu, Nejati e Cheung \(2018\)](#) iniciam a discussão de sua técnica relembrando que a Análise de Componentes Principais, ou *Principal Component Analysis* (PCA), consiste na projeção de uma matriz X em um espaço P^* de dimensão reduzida $r \ll n$. Sendo que esta projeção pode ser obtida ao determinar Y^* como resultado do problema de otimização definido na Equação (3.43):

$$\begin{aligned} (P^*, Y^*) = \arg \min_{(P, Y)} \quad & \|X - PY^T\|_F^2 \\ \text{Sujeito a} \quad & P^T P = I \end{aligned} \quad (3.43)$$

³ O trabalho citado é uma versão expandida do trabalho de [Rui et al. \(2017\)](#).

Isto é, $Y^{*T} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ é uma versão de dimensão reduzida de X , pois é suposto que r seja muito menor que n , no subespaço cuja base é definida pelas colunas de P^* . Dessa forma, este é um dos processos de redução de dimensionalidade mais conhecidos e utilizados na literatura especializada.

Entretanto, a técnica PCA tem sua performance muito comprometida quando há presença de ruído na matriz X . Desta forma, uma versão aprimorada desta projeção, conhecida como *Robust PCA* (RPCA), foi apresentada por Candès *et al.* (2011) com a intenção de se contornar tal adversidade. O RPCA consiste em separar X de seu ruído esparso M gerando uma versão descontaminada e de baixo *rank* S_0 . Matematicamente, este procedimento é modelado por meio da Equação (3.44), a qual descreve um processo de otimização que busca por uma versão S_0 de X com *rank* menor ou igual a r e pelo ruído esparso e aditivo M que contamina os dados originais.

$$\begin{aligned} (S_0^*, M^*) &= \arg \min_{(S_0, M)} \|S_0\|_* + \delta \|M\|_1 \\ \text{Sujeito a } & \begin{aligned} X &= S_0 + M \\ \text{rank}(S_0) &\leq r \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sendo $\|\cdot\|_*$ a norma matricial **convexa** conhecida como *norma nuclear*, a qual é definida pela soma dos valores singulares da matriz de entrada, e $\delta \in \mathbb{R}_+$ um valor que modela a intensidade do ruído M .

O cerne da proposta de Liu, Nejati e Cheung (2018) fundamenta-se na projeção dos dados de X por meio de um RPCA juntamente à predição de uma rede de conexões que relacione suas linhas, realizando uma filtragem nos dados originais e garantindo que sua versão sem ruído seja suave no grafo estimado.

Especificamente, o objetivo da técnica em questão consiste em determinar o grafo G^* , definido pela matriz laplaciana L^* , tal que $S_0 = X - M$, versão de X sem ruído aditivo obtida pelo RPCA, seja a mais suave possível em G^* . Para isso, deve-se solucionar o seguinte problema de otimização, apresentado na Equação (3.45).

$$\begin{aligned} (L^*, S_0^*, M^*) &= \arg \min_{(L, S_0, M)} \|S_0\|_* + \delta \|M\|_1 + \gamma \text{tr}(S_0^T L S_0) + \beta \|L\|_F^2 \\ \text{Sujeito a } & \begin{aligned} X &= S_0 + M \\ L &\in \mathcal{L} \\ \text{rank}(S_0) &\leq r \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.45)$$

O problema de otimização da Equação (3.45) não se trata de um problema convexo de otimização. Entretanto, Liu, Nejati e Cheung (2018) demonstram que o mesmo pode ser solucionado em duas etapas por meio de um processo de otimização alternada definido por dois sub-problemas convexos, cujos estágios são especializados respectivamente em projetar os dados utilizando-se uma modificação do RPCA (Equação (3.46a)) e em refinar a rede de conexões definida pelas linhas de X (Equação (3.46b)).

$$\begin{aligned}
(S_0^*, M^*) = & \arg \min_{(L, S_0, M)} \|S_0\|_* + \delta \|M\|_1 + \gamma \text{tr}(S_0^T L S_0) \\
\text{Sujeito a} & \quad X = S_0 + M \\
& \quad \text{rank}(S_0) \leq r
\end{aligned} \tag{3.46a}$$

$$\begin{aligned}
L^* = & \arg \min_{(L, S_0, M)} \gamma \text{tr}(S_0^T L S_0) + \beta \|L\|_F^2 \\
\text{Sujeito a} & \quad L \in \mathcal{L}
\end{aligned} \tag{3.46b}$$

Especificamente, os autores iniciam os cálculos com a otimização apresentada na Equação (3.46a) fornecendo como parâmetro de entrada do problema uma aproximação grosseira da matriz laplaciana L do grafo que conecta as linhas de X , sendo que, no caso, é confeccionado um grafo com a técnica de k vizinhos mais próximos sendo $k = 10$. Desta forma, são obtidos a projeção S_0^* e o ruído M^* . Na sequência, a técnica consiste no refinamento da rede de conexões por meio da otimização presente na Equação (3.46b), sendo obtido o melhor grafo esparso possível no qual S_0^* é suave.

Ressalta-se que ambos os problemas de otimização apresentados na Equação (3.46) podem ser resolvidos com as técnicas de otimização primal-dual escalares citadas na Seção 3.2.4.1.

Finalmente, a técnica de Liu, Nejadi e Cheung (2018) é sumarizada no Algoritmo 4.

Algoritmo 4 – Algoritmo de redução de dimensionalidade e predição de redes de conexões por meio da técnica de Liu, Nejadi e Cheung (2018).

- 1: **Entrada:** $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $r \in \mathbb{N}$, com $r \ll n$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma estimativa da matriz laplaciana da rede de conexões que relaciona as linhas de X . Também é necessário indicar os valores dos parâmetros da técnica: $(\delta, \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^3$.
 - 2: **Saída:** S_0^* como sendo a versão de X com $\text{rank } r$ livre de ruído, M^* como sendo o ruído aditivo e esparso que contamina X e L^* a matriz laplaciana do grafo que relaciona otimamente as linhas de X e no qual S_0^* é o mais suave possível.
 - 3: Resolver o problema de otimização da Equação (3.46a), fornecendo L e obtendo (S_0^*, M^*) .
 - 4: Resolver o problema de otimização da Equação (3.46b), fornecendo (S_0^*, M^*) e obtendo L^* .
-

3.3 Técnicas alternativas de predição de topologias

Na Seção 3.2, foram apresentadas técnicas de predição especializadas no aprendizado de apenas um grafo estático e de arestas não direcionadas entre um conjunto de sinais suaves. Entretanto, estão dispostas na literatura recente metodologias capazes de confeccionar ligações menos triviais entre um conjunto de sinais. Sendo possível, por exemplo, predizer um conjunto de grafos que descreve dinamicamente as relações entre séries temporais. Também é possível

confeccionar uma rede de conexões orientada que descreve as causalidades entre os elementos dispostos em seus nós. Além disso, em alguns casos é possível predizer um modelo físico que descreve a troca de informações entre os sinais de um grafo, mesmo sem determinar o grafo de fato.

Nesta seção, são apresentados brevemente alguns métodos que realizam os feitos citados e que são especializados na predição de redes de conexões cuja topologia seja mais elaborada.

3.3.1 Aprendizado baseado em grafos dinâmicos

Kalofolias *et al.* (2017) apresentam uma generalização de seu *framework*, o qual foi discutido neste texto na Seção 3.2.4, responsável por inferir redes de conexões dinâmicas entre conjunto de sinais temporais. Isto é, os autores propõem uma abordagem capaz de confeccionar um conjunto de grafos que relacionam diferentes instantes de tempo de séries temporais.

O método se fundamenta na premissa de que um conjunto de séries temporais seja suave em um grafo ao se considerar apenas alguns instantes de tempo consecutivos nestas séries e também que os grafos que interligam dois intervalos de tempo consecutivos sejam o mais semelhantes possível, ou, nas palavras dos autores, que sejam grafos que “mudem devagar”. Matematicamente, suponha-se $X \in \mathbb{R}^{n \times T}$ uma matriz de n séries temporais catalogadas em T instantes de tempo. Além disso, considera-se $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}$, K partições consecutivas, ou janelas sequenciais, das colunas de X , sendo K um divisor de T . Isto é, $X^{(1)}$ é uma matriz pertencente ao $\mathbb{R}^{n \times \frac{T}{K}}$, contendo da 1ª até a $\frac{T}{K}$ -ésima coluna de X ; $X^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times \frac{T}{K}}$ é formada pelas seguintes $\frac{T}{K}$ colunas de X ; e assim por diante. A técnica de Kalofolias *et al.* (2017) consiste em determinar um conjunto de K redes de conexões $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(K)}$, com matrizes de adjacência, $W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(K)}$, tais que $X^{(i)}$ seja o mais suave possível em $G^{(i)}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$, e, ao mesmo tempo, $W^{(i)} \approx W^{(i+1)}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, K-1\}$. Uma esquematização é apresentada na Figura 3.

De forma semelhante ao que foi apresentado na Seção 3.2.4, o aprendizado de grafos variantes no tempo se dá por meio do problema de otimização definido na Equação (3.47) a seguir.

$$\arg \min_{W^{(i)} \in \mathcal{W}_n, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}} \sum_{k=1}^K \left[\left\| W^{(k)} \circ Z^{(k)} \right\|_{1,1} + g \left(W^{(k)} \right) \right] + \gamma \sum_{k=2}^K \left\| W^{(k)} - W^{(k-1)} \right\|_F^2, \quad (3.47)$$

sendo $Z^{(k)}$ a matriz de distâncias ponto a ponto entre as linhas de $X^{(k)}$ e g definida de forma equivalente à função g da Equação (3.27).

Ressalta-se que a técnica apresentada nesta seção possui dois parâmetros: a quantidade de grafos inferida, no caso K , e a importância γ com a qual dois grafos consecutivos sejam

Figura 3 – Esquematisação da técnica de (KALOFOLIAS *et al.*, 2017). Sendo X_i a i -ésima linha de X .

Fonte: Elaborada pelo autor.

semelhantes. De fato, se K for igual a 1, então a metodologia deve inferir apenas um grafo médio e estático entre as séries temporais, mas se K for maior do que 1, então o problema de otimização da Equação (3.47) determina um conjunto de K grafos que evolui de acordo com um parâmetro temporal. Com respeito ao valor γ , o mesmo define o que os autores denominam “velocidade de mudança entre os grafos”, uma vez que ao assumir o valor nulo faz com que os grafos inferidos não necessariamente possuam alguma semelhança, ao mesmo tempo em que assumir um elevado valor faz com que a metodologia confeccione redes de conexões muito semelhantes.

De forma análoga à sequência apresentada na Seção 3.2.4.2, demonstra-se que o problema definido na Equação (3.47) pode ser solucionado por técnicas de otimização primal-dual escalares, o que garante que a utilização da metodologia de Kalofolias *et al.* (2017), além de robusta, apresenta resultados em um tempo computacional relativamente curto.

3.3.2 Estimativa de difusão em grafos

Um dos trabalhos mais representativos no campo de aprendizado de difusão em redes de conexões é o trabalho de Thanou *et al.* (2017), o qual apresenta uma metodologia capaz de prever um grafo que descreve trocas de calor entre os sinais dispostos em seus nós. Matematicamente, considera-se $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ como sendo uma matriz de m sinais dispostos em n nós do grafo a ser inferido. De forma análoga ao desenvolvimento realizado sobre a Equação (3.8), a metodologia abordada nesta seção considera que um sinal $\vec{x}$ disposto em um

grafo, cuja matriz laplaciana seja $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, possa ser decomposto de acordo com a Equação (3.48) a seguir.

$$\vec{x} = \mathcal{D}\vec{h} + \mu_{\vec{x}} + \varepsilon, \quad (3.48)$$

sendo $\vec{h} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ uma variável latente que controla $\vec{x}$, com $s \in \mathbb{N}$; $\mu_{\vec{x}}$ a média de $\vec{x}$, que para esta técnica é considerada nula; ε um ruído gaussiano que contamina $\vec{x}$; e $\mathcal{D}$ a matriz de difusão do grafo, definida de acordo com a Equação (3.49) a seguir.

$$\mathcal{D} = [\hat{g}_1(L), \hat{g}_2(L), \dots, \hat{g}_s(L)], \quad (3.49)$$

em que $\hat{g}_i$ é uma função, conhecida como filtro no grafo, definida sobre um domínio contendo o espectro da matriz laplaciana L e cuja imagem é uma matriz pertencente ao $\mathbb{R}^{n \times n}$.

A principal premissa do método de [Thanou et al. \(2017\)](#) é de que a matriz X é uma matriz cujos sinais foram gerados de acordo com o modelo físico conhecido como “difusão por calor” e que esta difusão é determinada pela matriz laplaciana do grafo que relaciona as linhas de X . Este tipo de difusão é muito utilizada para modelar fenômenos muito frequentes em análise de dados por meio de redes de conexões, tais como propagação de rumores em redes sociais e congestionamento de tráfego em redes de transportes. Para modelar esta técnica, suponha-se que o sinal $\vec{x}$ de X seja uma função de τ que é resultado do problema de valor inicial (PVI) da equação diferencial parcial apresentada na Equação (3.50).

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \tau} - L\vec{x} = \vec{0}, \\ \vec{x}(i, 0) = \vec{x}_i(0), \end{cases} \quad (3.50)$$

em que $\vec{x}(i, \tau)$ representa o calor apresentado no vértice de índice i do grafo no instante de tempo τ .

Utilizando teorias fundamentais da área de equações diferenciais parciais, obtém-se como solução do PVI da Equação (3.50) a função apresentada na Equação (3.51) a seguir.

$$\vec{x}(i, \tau) = e^{-\tau L} \vec{x}_i(0). \quad (3.51)$$

De acordo com [Smola e Kondor \(2003\)](#), de posse do resultado apresentado na Equação (3.51), pode-se concluir que as funções filtro $\hat{g}$ são dadas na forma $e^{-\tau L}$. Dessa forma, pode-se generalizar a Equação (3.48) por meio da Equação (3.52).

$$X = \mathcal{D} \cdot H + \varepsilon = [e^{-\tau_1 L}, e^{-\tau_2 L}, \dots, e^{-\tau_s L}] \cdot H + \varepsilon, \quad (3.52)$$

em que $\tau_i \in \mathbb{R}_+$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$, e $H \in \mathbb{R}^{s \times n \times m}$.

Sendo assim, o objetivo da técnica discutida nesta seção é determinar $\mathcal{D}$ e H tais que X respeite a distribuição estabelecida na Equação (3.52), com ruído mínimo. Para tal, é necessário

resolver o problema de otimização da Equação 3.53.

$$\begin{aligned}
 & \arg \min_{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s, L, H)} \|X - \mathcal{D} \cdot H\|_F^2 + \alpha \sum_{i=1}^{s \cdot n} \sum_{j=1}^m |h_{i,j}| + \beta \|L\|_F^2 \\
 & \text{Sujeito a} \quad \mathcal{D} = [e^{-\tau_1 L}, e^{-\tau_2 L}, \dots, e^{-\tau_s L}] \\
 & \quad \quad \quad L \in \mathcal{L} \\
 & \quad \quad \quad \tau_i \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

em que $H = (h_{i,j})_{i,j}$ e o par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ é formado por parâmetros de controle de esparsidade do modelo.

Como o problema de otimização apresenta multiplicação entre matrizes incógnitas, então o mesmo não é pertencente à classe de problemas convexos. Entretanto, os autores sugerem que a otimização seja realizada de forma alternada e por meio de algoritmos de otimização primal-dual escalares. Especificamente, o problema é solucionado em três passos: inicialmente, considera-se $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ e L como constantes fixadas e atualiza-se o valor de H ; na sequência, considera-se H e $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ fixados e atualiza-se, os valores de L e de $\mathcal{D}$; o último passo consiste em considerar H e L como constantes e atualizar o valor de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ e de D . Esses passos são repetidos por um número fixo de iterações ou até que haja convergência.

Vale ressaltar que, na técnica apresentada, a matriz laplaciana inferida é a matriz laplaciana combinatória e, portanto, pode-se obter a matriz de adjacência do grafo a partir dela. Entretanto, neste tipo de técnica nem sempre é possível identificar o grafo propriamente dito, uma vez que o objetivo da mesma é calcular a difusão do sinal em um grafo, a qual pode ser dada em forma de uma matriz laplaciana que não seja necessariamente a laplaciana combinatória e que não possa ser convertida em uma matriz de adjacência. Como exemplo, tem-se o trabalho de [Pasdeloup et al. \(2017\)](#), no qual os autores determinam apenas a difusão, ou filtragem, que o sinal sofreu de acordo com um grafo abstrato e que não é calculado no decorrer do processo.

3.3.3 Predição de redes Bayesianas

Alguns problemas da atualidade são modelados de acordo com grafos cujas arestas possuem indicação de direção, tais como o problema de análise de redes direcionadas no cérebro humano por meio do estudo de imagens de ressonância magnética ([LIAO et al., 2011](#)). Este tipo de rede de conexão é conhecido como **grafo direcionado**, as quais são definidas por matrizes de adjacência não necessariamente simétricas e com coordenadas podendo assumir valores negativos, como apresentado na Definição 12 ([BOLLOBAS, 2012](#)) a seguir.

Definição 12 (Grafo orientado). Considera-se o conjunto enumerável V e $E \subseteq V \times V$

- (a) Define-se como **grafo orientado** G a dupla (V, E) , denotando-se por $G(V, E)$.

- (b) No caso de V ser um conjunto finito, isto é $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ então define-se como **matriz de adjacência** de G a matriz $A = (A_{i,j}) \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$, apresentada na Equação (3.54):

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{caso } (v_i, v_j) \in E, \\ -1, & \text{caso } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.54)$$

- (c) Eventualmente, as coordenadas da matriz de adjacência podem apresentar valores não binários. Neste caso, a matriz de adjacência é uma matriz simétrica $W = (W_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que se $(v_i, v_j) \in E$, então $W_{i,j} > 0$, ou então se $(v_j, v_i) \in E$, então $W_{j,i} < 0$, e se $(v_i, v_j) \notin E$, então $W_{i,j} = 0$.

Ressalta-se que, de acordo com o item (c) da Definição 12, a matriz de adjacência de um grafo orientado não é necessariamente uma matriz simétrica sendo que as coordenadas de valores negativo representam a “saída” de uma aresta e as coordenadas positivas representam a “chegada”. Este tipo de estruturação pode ser útil na representação de fluxos de movimento em uma rede de conexões, como apresentado no exemplo disposto na Figura 4, que esquematiza o fluxo de correntes de ventos que realizam o deslocamento de temperatura nos EUA.

Figura 4 – Grafo orientado representando fluxo de temperaturas nos EUA. Arestas mais claras simbolizam o deslocamento de baixas temperaturas e arestas mais escuras descrevem o deslocamento de temperaturas elevadas.

Fonte: Adaptada de Mei e Moura (2017).

Devido à aplicabilidade dos grafos orientados, Mei e Moura (2017) propõem uma técnica de aprendizado baseado em grafos responsável pela confecção de redes de conexões orientadas que descrevem a relação causal presente em sinais de séries temporais. Especificamente, de posse de uma matriz de sinais $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sendo que $X_i \in \mathbb{R}^m$, a i -ésima linha de X , seja uma série temporal catalogada em m instantes de tempo para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se como intenção obter a estimativa de uma matriz de adjacência de um grafo de n nós

que represente as influências causais entre as linhas de X . Em termos matemáticos, suponha-se que um instante $t > 1$ das séries temporais de X é determinado pela projeção de seus instantes anteriores em polinômios da matriz de adjacência do grafo que se deseja inferir, como descrito no modelo da Equação (3.55).

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_t &= \vec{\epsilon}_t + \sum_{i=1}^T P_i(W, c) \vec{x}_{t-i} \\
 &= \vec{\epsilon}_t + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{j=0}^i c_{ij} W^j \right) \vec{x}_{t-i} \\
 &= \vec{\epsilon}_t + (c_{10}I + c_{11}W) \vec{x}_{t-1} + \\
 &\quad + (c_{20}I + c_{21}W + c_{22}W^2) \vec{x}_{t-2} + \dots + \\
 &\quad + (c_{T0}I + c_{T1}W + \dots + c_{TT}W^T) \vec{x}_{t-T},
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

em que $P_i(W, c)$ é um polinômio matricial de grau i em W com coeficientes $c = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ii})$ e T é o número de instantes passados de tempo necessários para que haja a causalidade de $\vec{x}_t$. Ou seja, a metodologia de [Mei e Moura \(2017\)](#) considera que, de acordo com os relacionamentos definidos pelo grafo G de matriz de adjacência W , um sinal $\vec{x}_t$, com $t > T$, pode ser descrito como a combinação de seus T instantes de tempo anteriores propagados de forma polinomial em G , fazendo com que as séries temporais dispostas nos nós de G sejam resultantes de um processo causal envolvendo alguns dos tempos anteriores de todas as séries temporais de X .

Desta forma, a intenção da técnica de predição de redes causais apresentada por [Mei e Moura \(2017\)](#), consiste em calcular uma matriz de adjacência $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que seja o mais esparsa possível e que minimize o ruído $\vec{\epsilon}_t$ para todo t . Além disso, para aprimorar a ordem de auto-regressão do modelo, é desejável que os coeficientes $c = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ii})$ apresentem esparsidade, fazendo com que os polinômios $P_i(W, c)$ sejam formados por uma pequena quantidade de termos. Para isso, basta solucionar o problema de otimização apresentado na Equação (3.56).

$$(W^*, c^*) = \arg \min_{(W, c)} \frac{1}{2} \sum_{t=T+1}^{m-1} \left\| \vec{x}_t - \sum_{i=1}^T P_i(W, c) \vec{x}_{t-i} \right\|_2^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |W_{i,j}| + \beta \|c\|_1, \tag{3.56}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ controlam, respectivamente, a esparsidade da matriz de adjacência W e dos coeficientes c .

O problema de otimização definido na Equação (3.56) não se trata de um problema convexo, mas é possível obter uma aproximação do ponto de minimização do mesmo ao tratá-lo em três passos separados:

1. Calcular uma aproximação para $R_i := P_i(W, c)$;
2. Definir, sem perda de generalidade, que $c_{10} = 0$ e $c_{11} = 1$, isto é,

$$P_1(W, c) = 0 \cdot I + 1 \cdot W = W \implies R_1 = W,$$

fazendo com que R_1 seja uma estimativa da matriz de adjacência do grafo;

3. Calcular uma estimativa para os coeficientes c .

Sendo assim, o primeiro passo da técnica consiste em detectar a matriz final R_i gerada pelo polinômio $P_i(W, c)$. Para tal, os autores destacam uma das propriedades destes polinômios: a comutatividade entre eles. Isto é, $R_i \cdot R_j = R_j \cdot R_i, \forall i, j$. Então o primeiro passo da técnica deve determinar um conjunto de matrizes, comutativas entre si, que mantenham a relação causal de X apresentada na Equação (3.55). Para isso, é necessário solucionar o problema definido na Equação (3.57).

$$R^{**} = \arg \min_R \frac{1}{2} \sum_{t=T+1}^{m-1} \left\| \vec{x}_t - \sum_{i=1}^T R_i \vec{x}_{t-i} \right\|_2^2 + \alpha \|\text{vec}(R_1)\|_1 + \gamma \sum_{i \neq j} \|R_i \cdot R_j - R_j \cdot R_i\|_F^2, \quad (3.57)$$

sendo $R = (R_1, R_2, \dots, R_T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um fator que controla a esparsidade no modelo e γ a importância com a qual os polinômios R_i devem ser comutativos entre si.

O problema da Equação (3.57) não é convexo, mas é multi-convexo, o que significa que pode ser solucionado considerando uma das matrizes R_i como sendo variável e considerando o restante das matrizes, no caso R_j com $j \neq i$, como sendo constantes. A metodologia utilizada para solucionar este problema é conhecida na literatura como *block coordinate descent* Xu e Yin (2013). Desta forma, o problema é dividido em T sub-problemas, os quais são definidos na Equação (3.58).

$$R_i^{**} = \arg \min_{R_i} \frac{1}{2} \sum_{t=T+1}^{m-1} \left\| \vec{x}_t - \sum_{i=1}^T R_i \vec{x}_{t-i} \right\|_2^2 + \alpha \|\text{vec}(R_1)\|_1 + \gamma \sum_{i \neq j} \|R_i \cdot R_j - R_j \cdot R_i\|_F^2. \quad (3.58)$$

O segundo passo basicamente consiste em tomar como estimativa para W a matriz R_1^{**} , uma vez que é suposto, sem perda de generalidade, que o primeiro polinômio $P_1(W, c)$ é igual a W . Além disso, também é possível calcular uma estimativa para os coeficientes dos polinômios P_i por meio da otimização realizada na Equação (3.59).

$$c_i^{**} = \arg \min_{c_i} \frac{1}{2} \|R_i - P_i(W, c_i)\|_F^2 + \alpha \|c_i\|_1, \quad (3.59)$$

sendo $c_i = (c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ii})$.

Ao calcular c_i^{**} para todo $i \in \{1, 2, \dots, T\}$ é finalizado o terceiro e último passo da técnica de Mei e Moura (2017) para calcular uma rede de conexões orientada que descreve o comportamento causal entre um conjunto de séries temporais X . Os autores também comentam que os valores obtidos ao solucionar os problemas das Equações (3.58) e (3.59) são confeccionadas aproximações (W^{**}, c^{**}) dos valores ótimos da Equação (3.56), mas que uma melhor solução pode ser confeccionada ao solucionar tal problema com um método de otimização “gradiente descendente” (RUDER, 2016) tendo como ponto de partida a solução inicial $(W^0, c^0) = (W^{**}, c^{**})$. De posse de tais informações, é apresentado o Algoritmo 5 resumando a sequência de passos da técnica discutida nesta seção.

Algoritmo 5 – Algoritmo de predição de redes orientadas de conexões causais por meio da técnica de Mei e Moura (2017).

- 1: **Entrada:** $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$. $N \in \mathbb{N}$ definindo o número máximo de iterações para calcular as matrizes R_i . Parâmetros da técnica: $(\alpha, \gamma, \beta) \in \mathbb{R}_+^3$.
 - 2: **Saída:** W^* como sendo a matriz de adjacência do grafo orientado que indica as relações causais entre as séries temporais presentes nas linhas de X . Também são apresentados os coeficientes c dos polinômios que descrevem o processo de propagação da causalidade entre as séries temporais.
 - 3: **para** $i \leftarrow 1$ **até** T **faça**
 - 4: $R_i^{(0)} := O$ ▷ O representa a matriz nula
 - 5: **fim para**
 - 6: **para** $k \leftarrow 1$ **até** N **faça** ▷ k representa as iterações do processo
 - 7: **para** $i \leftarrow 1$ **até** T **faça**
 - 8: Calcular $R_i^{(k)}$ utilizando a Equação (3.58) ▷ Deve-se utilizar sempre a versão mais recente de cada R_j , $j < i$
 - 9: **fim para**
 - 10: **fim para**
 - 11: $W := R_1^{(N)}$
 - 12: Calcular uma estimativa para c por meio da Equação (3.59)
 - 13: Resolver o problema de otimização da Equação (3.56) por meio de uma estratégia de gradiente descendente, fornecendo (W, c) como solução inicial e obtendo (W^*, c^*) .
-

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada uma minuciosa revisão a respeito de técnicas de aprendizado baseado em grafos. Especificamente, foi apresentado na Seção 3.2, um método que faz uso de conceitos de análise multivariada para desenvolver a teoria de predição de redes de conexões entre sinais suaves, o qual é generalizado por um *framework* que utiliza princípios de otimização primal-dual escalar. Todos os resultados apresentados para garantir o bom funcionamento do método foram demonstrados analiticamente. Inclusive a adequação da generalização da técnica para o uso de otimização primal-dual escalar. Também foi apresentada na mesma seção, uma metodologia responsável por realizar o aprendizado de um grafo entre sinais corrompidos ao mesmo tempo em que se realiza a redução de dimensionalidade de tais dados. Além disso, foram apresentadas na Seção 3.3, técnicas responsáveis pela predição de redes de conexões não triviais, tais como redes dinâmicas, redes de difusão e redes causais.

Nos capítulos seguintes, é desenvolvido um material teórico-prático que faz uso de uma abordagem sistemática de técnicas de ABG. Isto é, um problema do mundo real é apresentado e uma modelagem matemática e computacional é proposta para solucioná-lo por meio da teoria abordada neste capítulo. Além disso, é feita a introdução de ABG na seara de análise visual de dados massivos por meio da metodologia desenvolvida neste trabalho, a qual deve ser responsável pela análise de muitas redes de conexões ao mesmo tempo.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

4.1 Considerações Iniciais

Acidente vascular cerebral (AVC) é uma doença que causa problemas na irrigação sanguínea do cérebro, levando à perda de função cerebral por mais de 24 horas ou que causem morte ([WARLOW *et al.*, 2011](#)). Esta doença é a segunda maior causadora de mortes ou de sequelas no mundo ([ORGANIZATION *et al.*, 2003](#)). De acordo com [Bonita *et al.* \(2004\)](#), o número de afetados por AVC em âmbito mundial tende a aumentar devido às mudanças demográficas e ao controle inadequado dos fatores de risco da doença.

Dessa forma, é importante o desenvolvimento de novas metodologias que facilitem as análises e auxiliem no diagnóstico realizado por profissionais da área médica especializados na prevenção e tratamento de pessoas afetadas por AVC. Neste contexto, um dos protocolos mais utilizados para a análise de pacientes afetados por AVC é o protocolo de desempenho físico de Fugl-Meyer (FM) ([FUGL-MEYER *et al.*, 1975](#)), o qual consiste em um protocolo de pontuação associada para um paciente de acordo com o sucesso que este obtém na realização de exercícios pré-determinados. Mais especificamente, o profissional da área médica incentiva o paciente a executar um movimento utilizando um membro ou um lado do corpo em que se julga haver danos decorrentes do AVC e, de acordo com a performance, é atribuída a este paciente uma pontuação, na qual valores pequenos indicam dificuldades na atividade e valores elevados indicam sucesso.

Na última década, o uso de sensores conectados a pacientes tem se tornado recorrente para análises de protocolo FM ([DIN *et al.*, 2011](#); [WANG *et al.*, 2014](#); [YU *et al.*, 2016](#)). Tal procedimento consiste em equipar o paciente com uma rede de sensores nos membros superiores, ou *Upper Extremity* (UE), e, de acordo com os sinais captados pelos sensores no decorrer de um exercício, lhe é atribuída uma estimativa da pontuação FM. O conjunto de sensores gera um grande volume de dados a partir dos quais padrões de interesse, além de medidas FM, podem

ser extraídas. Entretanto, de acordo com a revisão bibliográfica apresentada no Capítulo 2, não existem ferramentas computacionais de visualização dedicadas à análise de dados oriundas de redes de sensores de monitoramento de indivíduos afetados por AVC. Desenvolver uma metodologia para sanar tal deficiência é o objetivo principal do trabalho aqui proposto.

Neste capítulo, são apresentados detalhes do problema que deu origem à metodologia desenvolvida durante a realização deste doutorado. O problema abordado foi proposto por pesquisadores da Universidade de Nova York (NYU), sendo eles responsáveis pela confecção da base de dados de séries temporais (sinais) geradas por sensores de monitoramento de movimentos, tanto de pacientes afetados por AVC quanto por indivíduos de controle saudáveis. Tal base é a principal fonte de dados empregada no trabalho aqui proposto.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 4.2, é apresentada a descrição do problema, seguida do detalhamento da base de dados que o representa na Seção 4.3; as características que a teoria desenvolvida deve possuir para atender à demanda dos especialistas são apresentadas na Seção 4.4. O Capítulo é finalizado na Seção 4.5 com conclusões acerca do problema apresentado.

4.2 Descrição do Problema

O trabalho aqui apresentado consiste em uma pesquisa orientada por problema (SEDLMAIR; MEYER; MUNZNER, 2012), ou seja, toda teoria foi elaborada em conjunto com especialistas de uma determinada área de aplicação, na forma de reuniões quinzenais no decorrer de um ano, a fim de compreender e estabelecer as demandas e requerimentos do problema. No caso, os especialistas foram Heidi Schambra, pesquisadora especialista em reabilitação de pessoas vítimas de AVC na NYU Langone Medical School, e Avinash Parnandi, pós-doutorando sob supervisão da profa. Schambra. O trabalho contou ainda com a colaboração do professor Claudio Silva, da NYU Tandon School of Engineering.

Os especialistas disponibilizaram uma base de dados contendo informações de movimentos realizados por pacientes afetados por AVC e sujeitos saudáveis, chamados indivíduos de controle. Tais informações foram armazenadas na forma de séries temporais geradas pela rede de sensores conectados ao corpo dos indivíduos. Mais precisamente, cada paciente realizou um conjunto de movimentos e os sinais capturados pelos sensores durante os movimentos foram armazenados como um conjunto de séries temporais para cada movimento.

O objetivo principal dos especialistas é analisar as relações e correlações entre os sensores, principalmente sensores localizados em partes relativamente distantes do corpo. Na falta de uma ferramenta dedicada, os profissionais utilizam ferramentas como o Excel¹ para efetuar análise de correlações cruzadas entre os sensores e para extrair outras medidas comumente utilizadas em

¹ <<https://www.office.com/excel>>

processamento de sinais (PROAKIS, 2001), tais como energia, entropia, valor médio, etc. Tais análises são, claramente, uma ação trabalhosa e de abrangência limitada.

Os movimentos são definidos de forma que o paciente seja capaz de realizá-los com apenas um lado do corpo, com o intuito de se avaliar o fenômeno conhecido como hemiplegia (WARLOW *et al.*, 2011), o qual consiste de uma sequela de paralisia lateral decorrente do AVC. Os pacientes afetados por AVC são orientados a executar movimentos utilizando o lado comprometido pela doença. Denotando o número de sensores conectados ao corpo de cada paciente por N_S , o número de pacientes por N_P e o número de movimentos por N_M , então o número de séries temporais contida na base de dados será $(N_P \cdot N_M \cdot N_S)$. Uma vez que o número de séries temporais cresce de forma quadrática para cada novo indivíduo adicionado a base, a análise manual das propriedades e relações das séries temporais se torna uma tarefa bastante limitada.

A fim de viabilizar uma análise sofisticada do conjunto de dados, foi desenvolvida, juntamente com os especialistas, a ferramenta *Network Environment for Motion Capture Data Analysis* (NE-Motion). *NE-Motion* é um sistema de análise visual de dados (KEIM *et al.*, 2008) confeccionado com a intenção de facilitar a detecção de padrões por meio da visualização de características definidas pelas relações entre sensores. Seguindo o mantra de Shneiderman (1996) para sistemas de visualização, o qual consiste em “*overview first, then details on demand*”, o sistema desenvolvido oferece uma apresentação geral do conteúdo dos dados para, então, evidenciar detalhes de acordo com os objetivos definidos pelo usuário.

NE-Motion se diferencia das demais técnicas de visualização de dados de movimentos disponíveis na literatura por evidenciar detalhes das relações entre os sensores (séries temporais) em uma visualização baseada em redes de conexões entre sensores, a qual leva em consideração todos os indivíduos e todos os movimentos. Os movimentos são analisados em conjunto, podendo se reduzir a um cenário de visualização local onde diversas metáforas visuais estão disponíveis por meio de filtros pré-definidos. Para isto, o método foi desenvolvido de acordo com o paradigma de Fuchs e Hauser (2009), que consiste na composição de várias metáforas visuais para formar um único sistema de analítica visual.

Entretanto, as contribuições obtidas neste trabalho não se resumem a *NE-Motion*, uma vez que neste texto são apresentados conteúdos inéditos em três principais escopos: técnico, computacional e conclusivo. No caso, *NE-Motion* consiste no sistema visual que representa apenas o avanço computacional, sendo esta uma ferramenta de visualização utilizada pelos especialistas para extrair percepções e detectar padrões na base de dados, o que configura a etapa conclusiva do texto. O funcionamento deste sistema se dá de acordo com os avanços técnicos e teóricos propostos neste trabalho.

Em detalhes, no escopo técnico, é apresentado o uso de aprendizado baseado em grafos (ABG) (DONG *et al.*, 2019) para definir e estabelecer as relações entre os sensores na forma de uma rede de conexões. O uso de técnicas de ABG neste contexto é inédito, o que torna

necessário o adequamento destas metodologias para solucionar o problema abordado. Entretanto, como detalhado na Seção 4.3, uma rede de conexões deve ser confeccionada para cada paciente considerando-se as séries temporais referentes a este indivíduo em cada movimento. Desta forma, para cada paciente deve-se construir uma rede de conexões para cada movimento que este paciente executou durante as análises médicas. Sendo assim, muitas redes de conexões são estipuladas a partir da base de dados avaliada e, portanto, técnicas de filtragem de interesse devem ser desenvolvidas para orientar os estudos de conexões específicas, ou conjuntos específicos de redes de conexões. Por exemplo, os peritos médicos possuem interesse em analisar as conexões entre sensores restritas aos indivíduos afetados por AVC e também as conexões restritas aos indivíduos de controle. A proposta e o desenvolvimento de regras de seleção e filtragem de conexões específicas dentre todas as redes de conexões confeccionadas também compõem o escopo técnico do trabalho. Além disso, configura o avanço técnico deste trabalho o uso de técnicas de ABG em analítica visual, uma vez que tais métodos ainda não foram introduzidos no contexto de visualização de dados e, como destacado nos Capítulos 5 e 6, a construção sistemática de muitas redes de conexões demanda uma ferramenta de visualização que conduza as análises sobre a base de dados.

Neste trabalho, a ferramenta de visualização proposta, *NE-Motion*, representa o avanço na seara computacional. Detalhada no Capítulo 6, esta nova ferramenta é especializada na filtragem e apresentação de informações relevantes presentes em muitas redes de conexões. No caso, este sistema é capaz de evidenciar visualmente detalhes presentes em redes de conexões entre sensores. Seu uso é direcionado para a realização de análises de movimentação e comparação de indivíduos afetados ou não por AVC. Além disso, detalhes acerca das séries temporais que definem os sensores dos problemas são apresentados neste sistema.

O escopo conclusivo de contribuições deste trabalho se concentra em resultados perceptivos que os escopos técnico e computacional foram capazes de fornecer aos peritos. Estes resultados são obtidos por meio de estudos de casos definidos com a intenção de avaliar a quantidade de informações que o material proposto torna os peritos capazes de extrair acerca da base de dados. Sendo que as informações podem configurar padrões interessantes tais como a identificação de indivíduos *outliers*; a detecção de sensores robustos na discriminação entre indivíduos saudáveis e afetados; tendências em comportamentos em cada movimento; e eliminação de pré-conceitos acerca dos dados.

Em resumo, as principais contribuições deste trabalho são:

- **Escopo técnico:** Confeção de muitas redes de conexões entre sensores por meio de métodos de ABG e filtragem de informação em redes de conexões;
- **Escopo computacional:** *NE-Motion*, um sistema de analítica visual com enfoque na apresentação de relações entre os sensores de um único indivíduo ou de um determinado grupo de indivíduos;

- **Escopo conclusivo:** Detecção de padrões interessantes presentes na base de dados abordada.

4.3 Base de dados

A coleta dos dados foi realizada da seguinte forma: são conectados $N_S = 20$ sensores na parte superior do corpo de cada paciente, isto é, os sensores capturam informação do posicionamento relativo da lombar, do tórax, dos ombros, dos cotovelos e dos pulsos durante a realização de um movimento pré-definido. Ao final da execução do movimento tem-se $N_T = 20$ séries temporais, uma para cada sensor. O comprimento (número de instantes de tempo) das séries temporais varia de paciente para paciente durante a realização de um exercício, uma vez que o tempo para executar o mesmo movimento varia de um paciente para outro. Entretanto, considerando-se o mesmo movimento e o mesmo paciente, todas as séries temporais possuem o mesmo comprimento, uma vez que a coleta realizada por todos os sensores é iniciada e finalizada no mesmo tempo.

Cada um dos pacientes avaliados é orientado a executar um total de $N_M = 13$ tipos de movimentos diferentes. No caso do paciente ser um indivíduo de controle, isto é, um indivíduo saudável, o mesmo é orientado a executar o movimento referente ao lado esquerdo e, em seguida, executar o mesmo movimento com o lado direito do corpo. No caso dos pacientes com AVC, o movimento é executado apenas com lado afetado pela hemiplegia, tendo em vista que apenas o lado do corpo que possui paralisia é interessante para a análise. Desta forma, ao contrário dos indivíduos de controle, os indivíduos afetados devem realizar cada movimento apenas com o lado afetado, com ressalva dos pacientes que possuem hemiplegia em ambos os lados do corpo.

Foram catalogados os movimentos de $N_P^{AVCE} = 17$ indivíduos que possuem paralisia decorrente de AVC no lado esquerdo do corpo; de $N_P^{AVCD} = 14$ indivíduos com paralisia no lado direito do corpo; e de $N_P^{CRTL} = 36$ indivíduos de controle. Em detalhes, os mesmos 18 indivíduos de controle são a fonte de coleta de sinais com respeito ao lado direito ($N_P^{CRTL_D}$) e ao lado esquerdo ($N_P^{CRTL_E}$) do corpo, embora, para corroborar com a generalização do material, considera-se estes indivíduos separadamente de acordo com o lado do corpo avaliado. Desta forma, são avaliados no total $N_P = 17 + 14 + 2 \cdot 18 = 67$ indivíduos. Portanto, a base de dados é constituída de N_T séries temporais, como apresentado na Equação (4.1) a seguir.

$$\begin{aligned}
 N_T &= N_P \cdot N_M \cdot N_S \\
 &= \left(N_P^{AVCE} + N_P^{AVCD} + N_P^{CRTL_E} + N_P^{CRTL_D} \right) \cdot N_M \cdot N_S \\
 &= (17 + 14 + 2 \cdot 18) \cdot 13 \cdot 20 \\
 &= 17420.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

A Tabela 1 detalha a quantidade de séries temporais na base de acordo com a condição dos indivíduos e lado do corpo avaliado.

Tabela 1 – Detalhes sobre a coleta de dados.

Condição dos pacientes	Lado	Pacientes	Movimentos	Sensores	Séries temporais
Afetado	Esquerdo	17	13	20	4420
Afetado	Direito	14	13	20	3640
Saudável	Esquerdo	18	13	20	4680
Saudável	Direito	18	13	20	4680
—	—	67	13	20	17420

Especificamente, a base de dados aqui apresentada é formada pelos conjuntos estipulados nas Definições 13, 14, 15 e 16 a seguir.

Definição 13 (Sensores). A base de dados se baseia no mapeamento de séries temporais captadas por $N_S = 20$ sensores, definidos no conjunto $\mathcal{S}$ a seguir.

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_{N_S}\}.$$

Definição 14 (Movimentos). Para que as séries temporais sejam mapeadas através dos sensores, é necessário que cada paciente realize um conjunto de $N_M = 13$ movimentos, os quais são definidos no conjunto $\mathcal{M}$ a seguir.

$$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_{N_M}\}.$$

Definição 15 (Pacientes). Informações acerca das quantidades de pacientes saudáveis e afetados por AVC são conhecidas, mas para manter a generalidade da teoria, são adotadas no decorrer do texto as seguintes notações:

- (i) $N_{\mathcal{P}}$: o número total de pacientes;
- (ii) $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}$: o número total de pacientes com AVC;
- (iii) $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVCE}}$: o número total de pacientes com AVC e hemiplegia no lado esquerdo;
- (iv) $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVCD}}$: o número total de pacientes com AVC e hemiplegia no lado direito;
- (v) $N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}}$: o número de pacientes saudáveis;
- (vi) $N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_E}$: o número de pacientes saudáveis cujo lado avaliado seja o esquerdo; e
- (vii) $N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_D}$: o número de pacientes de controle cujo lado avaliado seja o direito.

Do mesmo modo, define-se $\mathcal{P}$ como sendo o **conjunto de todos os pacientes**:

$$\mathcal{P} := \underbrace{\{p_1, p_2, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{AVC}}} \underbrace{\{p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}+1}, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{CTRL}}},$$

no qual, sem perda de generalidade, considera-se que os primeiros $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}$ indivíduos sejam pacientes afetados por AVC e os últimos $N_{\mathcal{P}} - N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}} = N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}}$ pacientes sejam indivíduos de controle.

Dessa forma, o conjunto dos indivíduos afetados por AVC é o conjunto $\mathcal{P}^{\text{AVC}}$ definido a seguir:

$$\mathcal{P}^{\text{AVC}} := \underbrace{\{p_1, p_2, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}_E}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{AVC}_E}} \underbrace{\{p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}_E}+1}, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{AVC}_D}},$$

sendo, também sem perda de generalidade, que os primeiros $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}_E}$ indivíduos sejam pacientes com hemiplegia no lado esquerdo do corpo, constituindo o conjunto $\mathcal{P}^{\text{AVC}_E}$, e os $N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}_D}$ indivíduos restantes sejam pacientes com hemiplegia no lado direito do corpo e formem o conjunto $\mathcal{P}^{\text{AVC}_D}$.

Do mesmo modo, é definido o conjunto dos indivíduos saudáveis, sendo sua formação determinada pelos pacientes cujo lado avaliado seja o esquerdo nos primeiros $N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_E}$ indivíduos e, na sequência, estejam dispostos os $N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_D}$ pacientes. Isto é,

$$\mathcal{P}^{\text{CTRL}} := \underbrace{\{p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}+1}, p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}+2}, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}+N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_E}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{CTRL}_E}} \underbrace{\{p_{N_{\mathcal{P}}^{\text{AVC}}+N_{\mathcal{P}}^{\text{CTRL}_E}+1}, \dots, p_{N_{\mathcal{P}}}\}}_{\mathcal{P}^{\text{CTRL}_D}}.$$

Em resumo, o conjunto dos pacientes avaliado neste trabalho é definido por $\mathcal{P}$ na Equação (4.2).

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}^{\text{AVC}} \cup \mathcal{P}^{\text{CTRL}} \\ &= \mathcal{P}^{\text{AVC}_E} \cup \mathcal{P}^{\text{AVC}_D} \cup \mathcal{P}^{\text{CTRL}_E} \cup \mathcal{P}^{\text{CTRL}_D}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definição 16 (Séries Temporais). A base de dados é constituída, de fato, pelas séries temporais associadas aos sensores conectados aos pacientes e que representam numericamente o movimento executado por eles. Cada paciente, ao executar um movimento específico, dá origem a N_S séries temporais, todas com o mesmo "comprimento", ou seja, mesmo número de passos de tempo. Sendo assim, para cada paciente $p_i \in \mathcal{P}$, ao executar o movimento $M_j \in \mathcal{M}$, associa-se o conjunto $\mathcal{T}_{i,j}$ de séries temporais:

$$\mathcal{T}_{i,j} = \{t_{i,j,1}; t_{i,j,2}; \dots; t_{i,j,N_S}\},$$

sendo $t_{i,j,k} \in \mathbb{R}^{m_{i,j}}$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, N_S\}$, em que $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ corresponde ao comprimento das séries temporais.

Finalmente, o conjunto $\mathcal{T}$ de todas as séries temporais desta base de dados é dado por:

$$\mathcal{T} := \bigcup_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \bigcup_{j=1}^{N_{\mathcal{M}}} \mathcal{T}_{i,j}.$$

A Figura 5 ilustra o conteúdo da base de dados utilizada neste trabalho

Ressalta-se que as séries temporais avaliadas neste texto não possuem valores faltantes, sendo suas coordenadas compostas por números reais.

Figura 5 – Esquema de coleta de dados. No total, 17420 séries temporais com diferentes comprimentos foram geradas, sendo 8060 referentes a indivíduos afetados por AVC (representados na cor vermelha) e 9360 referentes a indivíduos de controle (representados na cor verde).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na seção a seguir, são detalhadas as demandas apresentadas pelos especialistas a fim de realizar as análises de interesse.

4.4 Tarefas e Requisitos do Sistema

Seguindo o mesmo procedimento de muitos trabalhos presentes na literatura especializada em análise visual de dados de movimentos (JANG; ELMQVIST; RAMANI, 2014; WILHELM

et al., 2015; CHAN *et al.*, 2019), o desenvolvimento do sistema de analítica visual proposto neste trabalho, e detalhado nos capítulos seguintes, está fundamentado em tarefas e requisitos definidos a partir da interação com os especialistas, considerando ainda o que os profissionais esperam que o ferramental seja capaz de viabilizar. Sendo assim, são definidas tarefas de análises que os especialistas usualmente executam, ou possuem a intenção de executar, sobre a base de dados apresentada e os requisitos que o material deve alcançar para que este represente uma solução para o problema abordado.

Desta forma, a partir de um conjunto de entrevistas com os especialistas, foram identificadas as seguintes tarefas típicas que o material desenvolvido deve ser capaz de simular:

- T_1 Calcular correlações entre as séries temporais geradas pelos sensores conectados aos indivíduos.
- T_2 Realizar estudos sobre detalhes das correlações entre os sensores. Por exemplo, detectar quais duplas de sensores apresentam elevadas correlações mais frequentemente considerando-se um determinado grupo de pacientes. Ou ainda, analisar o comportamento médio das séries temporais captadas por sensores que apresentem elevada correlação.
- T_3 Descartar correlações que não sejam interessantes.
 - $T_{3.1}$ Os especialistas têm interesse em correlações de valor absoluto próximo a 1, isto é, concentram as análises em sensores fortemente correlacionados.
 - $T_{3.2}$ Correlações óbvias e/ou indesejadas são descartadas. Por exemplo, os especialistas não possuem interesse em analisar sensores restritos apenas ao lado direito do corpo de um paciente que esteja realizando um movimento referente ao lado esquerdo do corpo. Além disso, é sabido que sensores conectados em regiões muito próximas no corpo do indivíduo tipicamente possuem elevada correlação, uma vez que a mudança de posicionamento destes sensores varia de forma muito semelhante. Este tipo de relação é descartada pelos peritos.
 - $T_{3.3}$ Sensores que captam séries temporais constantes geralmente são responsáveis por descrever o posicionamento de partes do corpo que não são utilizadas em um movimento específico. Por exemplo, considerando-se um movimento no qual apenas o pulso deve ser utilizado pelo paciente, as séries temporais captadas por sensores próximos ao pulso devem possuir intensa variação, uma vez que estas representam o uso da região em questão. Ao mesmo tempo, os demais sensores devem captar séries temporais aproximadamente constantes, uma vez que nenhuma ou pouca movimentação é realizada sobre tais sensores nestas circunstâncias. Entretanto, duas séries temporais constantes apresentam as mais intensas das correlações. Sendo assim, este tipo de relação entre sensores, por mais que seja de elevada correlação, deve ser desconsiderada, tendo em vista que os peritos não desejam avaliar as relações

entre sensores que não capturam informação relevante durante a realização de um movimento.

- T_4 Extrair medidas da área de processamento de sinais das séries temporais dos sensores. Por exemplo, para saber se indivíduos afetados por AVC realizam movimentos mais restritos em determinados exercícios, apresentando séries temporais com valores menores do que os valores das séries temporais captadas de indivíduos saudáveis executando o mesmo exercício, os peritos calculam medidas como “energia” ou “valor médio” a partir das séries temporais para representar esta informação.
- T_5 Comparar os indivíduos avaliados e extrair padrões existentes nas séries temporais de indivíduos saudáveis e nas séries temporais de indivíduos afetados por AVC. Além disso, comparar os indivíduos com respeito à forma com a qual os sensores se relacionam durante a realização de um determinado movimento. Por exemplo, em um movimento no qual o ombro é muito utilizado, os sensores conectados no ombro devem estar fortemente correlacionados. Entretanto, a execução deficiente de um movimento pode comprometer estas correlações ideais, fazendo com que indivíduos saudáveis e afetados por AVC apresentem padrões distintos de correlação de sensores.

A tarefa T_3 detalha quais correlações entre sensores devem ser consideradas como sendo interessantes para o problema abordado. Para este tipo de correlação é adotada uma nomenclatura especial, como detalhado na Definição 17.

Definição 17 (Relação). Se dois sensores apresentam elevada correlação e esta correlação não é desconsiderada com a execução da tarefa T_3 , então diz-se que estes dois sensores possuem uma **relação**.

Para que as tarefas $T_1 - T_5$ possam ser realizadas com o auxílio de um sistema de análise visual, foram estabelecidos os requisitos $R_1 - R_{10}$, os quais o ferramental proposto deve satisfazer, definidos a seguir:

- R_1 **Visão Geral:** O sistema deve calcular (T_1) e apresentar as relações entre os sensores de todos os indivíduos e para todos os movimentos de forma conjunta, descartando o que não é interessante para os especialistas (T_3). O mesmo deve ocorrer com as séries temporais capturadas pelos sensores em todos os casos, uma vez que os peritos desejam avaliar o comportamento médio realizado pelos indivíduos em cada sensor.
- R_2 **Filtragem e Seleção:** Deve ser possível que o usuário interaja com o ferramental de forma que as análises sejam realizadas sobre um movimento em particular, um lado em particular, uma condição (saudável/afetado) em particular ou ainda sobre um indivíduo em particular. Por exemplo, o sistema deve tornar possível realizar análises sobre as relações entre sensores considerando-se apenas os indivíduos afetados por AVC.

- R_3 Análises Específicas:** Os profissionais possuem interesse na detecção de relações entre os sensores que apresentem certas particularidades. Dessa forma, é necessário que o ferramental disponha de uma metodologia que torne capaz a apresentação e análise de relações com características específicas. Como exemplo, é importante destacar relações que ocorram exclusivamente em indivíduos afetados ou exclusivamente em indivíduos saudáveis ($R_{3,1}$). Em contrapartida, é importante que sejam destacadas relações que sejam comuns a indivíduos saudáveis e a indivíduos afetados ($R_{3,2}$).
- R_4 Ordenações:** Rotinas de ordenação devem ser implementadas no sistema visual com o intuito de detectar quais relações entre sensores são mais frequentes (T_2), sendo possível que estas correlações sejam avaliadas sob determinadas condições de filtragem e seleção. Isto é, o ferramental deve ser capaz de apresentar relações entre sensores que sejam mais frequentes em indivíduos afetados (ou saudáveis) e/ou considerando-se um determinado movimento.
- R_5 Detalhamento de Relações entre Sensores:** É importante que sejam apresentados detalhes sobre relações entre sensores (T_2). Por exemplo, o sistema deve apresentar
- as séries temporais captadas pelos sensores da relação em questão;
 - os indivíduos dos quais estas séries temporais foram coletadas,
 - o movimento realizado por estes indivíduos nos quais as séries temporais definiram um relacionamento entre os sensores que as coletaram.
- R_6 Estatísticas das Curvas:** É necessário analisar o comportamento estatístico das séries temporais (T_4) dos indivíduos (T_5) para cada sensor, ressaltando os resultados para cada condição de paciente. Em detalhes, para cada sensor, o sistema deve apresentar uma curva média que represente todas as séries temporais captadas por este sensor representando de maneira separada as séries temporais captadas de indivíduos saudáveis e as séries temporais captadas de indivíduos afetados por AVC.
- R_7 Comparação entre os Indivíduos:** O método implementado deve viabilizar a comparação entre indivíduos (T_5). Além disso, a comparação não deve ser restrita a comparações par-a-par, possibilitando que seja possível realizar comparações entre todos os indivíduos que realizaram o mesmo movimento ou entre todos os indivíduos que possuam uma mesma relação entre sensores. Também é estabelecido pelos especialistas que as colorações utilizadas para simbolizar os pacientes saudáveis e os pacientes afetados sejam, respectivamente, verde e vermelho, uma vez que esta configuração faz parte de sua rotina e da rotina de toda equipe médica.
- R_8 Apresentação de Séries Temporais:** O sistema de visualização deve apresentar um componente que permita que seja realizada a comparação entre as séries temporais (T_4) capturadas por cada sensor para cada indivíduo (T_5).

- R₉ Representação e Disposição dos Sensores:** A ferramenta deve apresentar quais são os sensores avaliados, os quais devem estar associados com um nome que descreva o seu funcionamento e o que o mesmo deve mapear em uma série temporal. Além disso, é uma demanda dos especialistas que estes sensores sejam representados de forma a deixar claro uma sequência que simbolize sua posição no corpo humano.
- R₁₀ Junção entre Análise Global e Local:** O ferramental deve ser construído de forma a permitir que sejam realizadas análises de âmbito global em conjunto com análises de âmbito local. Para isso, os componentes devem ser confeccionados de modo claro, dispostos em diferentes seções do ferramental e com o objetivo de promover a fácil interação com o usuário.

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o problema no qual a fundamentação da metodologia proposta é baseada. O elevado número de séries temporais dificulta a realização de análises sobre os dados de movimento apresentados. Além disso, muitas configurações são estabelecidas pelos peritos responsáveis pela base de dados discutida, tais como a necessidade de separação entre a condição do sujeito (afetado ou saudável), entre o lado do corpo analisado e tipo de movimento.

Sendo assim, o uso de uma ferramenta de análise visual se torna de suma importância para viabilizar as análises desejadas. As tarefas de análise foram modeladas em conjunto com os especialistas.

No Capítulo 5 a seguir, é apresentada a fundamentação matemática do ferramental proposto, o qual viabiliza as análises definidas pelos especialistas da área médica.

MODELAGEM MATEMÁTICA PROPOSTA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

5.1 Considerações Iniciais

No Capítulo 4, foram apresentados os principais desafios encontrados por especialistas ao tratarem o problema apresentado e também os requisitos que uma metodologia deve satisfazer para que a mesma seja considerada uma solução para o problema.

Neste capítulo, são apresentadas e discutidas as etapas principais que compõem a metodologia proposta para solucionar o problema de análise e comparação de pacientes afetados por AVC e de indivíduos de controle. Mais especificamente, é detalhada a fundamentação teórico-matemática utilizada para modelar o sistema de analítica visual de modo a atender os requisitos apontados no capítulo anterior.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 5.2 são apresentadas as principais etapas que compõem a metodologia proposta para solucionar o problema definido no Capítulo 4; na Seção 5.3 é discutido o procedimento proposto para a construção de redes de conexões entre as séries temporais que estabelecem as relações entre sensores como uma estrutura de grafos; na Seção 5.4, manipulações de conjuntos são definidas para tornar possível a seleção de redes de conexões específicas a serem analisadas; o capítulo é finalizado na Seção 5.5 com algumas considerações acerca do material discutido.

5.2 Desenvolvimento da Metodologia Proposta

A metodologia proposta é constituída de três principais etapas: identificação dos desafios e requisitos do problema (E_1), etapa já discutida no Capítulo 4; modelagem matemática que dá suporte ao ferramental (E_2); e a construção do sistema de analítica visual (E_3) para análise dos

dados a partir do modelo definido na etapa E_2 .

A segunda etapa E_2 consiste no desenvolvimento da fundamentação teórica que dá suporte ao sistema de visualização que foi desenvolvido na etapa E_3 . O principal objetivo da etapa E_2 é modelar o problema apresentado em uma linguagem matemática de modo que se possa atender aos requisitos estipulados na etapa E_1 . Em detalhes, a teoria proposta deve ser responsável por:

- estabelecer relacionamentos entre sensores de maneira otimizada, sendo proposto o uso de aprendizado baseado em grafos para atingir este objetivo com a construção de conjuntos de redes de conexões entre sensores ($E_{2.1}$);
- permitir a filtragem de informações entre os conjuntos de redes de conexões ($E_{2.2}$);
- analisar detalhes de relacionamentos entre sensores, tais como a frequência com que alguns sensores se **sincronizam** em indivíduos saudáveis e em indivíduos afetados por AVC ($E_{2.3}$), permitindo a análise das características das **séries temporais** captadas por tais sensores ($E_{2.4}$);
- extrair tendências estatísticas das séries temporais dos indivíduos ($E_{2.5}$) de modo a viabilizar comparações ($E_{2.6}$).

Finalmente, a terceira fase que compõe a metodologia é responsável pela apresentação e análise dos dados gerados a partir dos modelos. A validação dos resultados obtidos também faz parte da fase E_3 . Especificamente, a etapa E_3 é composta pela confecção de um sistema de visualização ($E_{3.1}$) e validação dos resultados ($E_{3.2}$) com a supervisão direta dos especialistas. Esta etapa é discutida nos Capítulos 6 e 7.

Na Figura 6, é apresentado um esquema que ilustra a metodologia utilizada. Colorido em rosa, são apresentados os passos que caracterizam a primeira etapa; na cor azul os passos que compõem a construção do material teórico; e, na cor amarela, os passos da última etapa são destacados.

É válido ressaltar que, mesmo que a metodologia destacada na Figura 6 sugira uma forte linearidade em todo o seu processo de desenvolvimento, todas as etapas precisaram ser revisadas ao longo do trabalho. Como exemplo, em diversos casos foi necessário reajustar a fundamentação matemática ou a adequação da ferramenta de visualização após a interação com os especialistas o que corresponde ao processo inverso ao apresentado no esquema da metodologia. Desta forma, nenhuma etapa necessitou ser concluída para se dar início a outra e todas elas estiveram conectadas durante a realização do projeto.

Figura 6 – Esquema que representa a metodologia proposta para a solução do problema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Construção das Redes de Conexões Entre Sensores

De acordo com as tarefas T_1 , T_2 e T_3 da Seção 4.2, é evidente a necessidade da construção de redes de conexões entre os sensores $s_1, s_2, \dots, s_{N_s}$ para cada indivíduo, uma para cada

movimento. Isto é, para cada conjunto de séries temporais $\mathcal{T}_{i,j}$, deve-se confeccionar uma rede de conexões com base em suas "correlações". Para tal, é proposto a utilização de técnicas de aprendizado baseado em grafos discutidas no Capítulo 3. Mais especificamente, é utilizado uma adaptação do *framework* apresentado na Equação (3.38).

Para cada indivíduo $p_i \in \mathcal{P}$, ao executar o movimento $M_j \in \mathcal{M}$, tem-se um conjunto das N_s séries temporais $\mathcal{T}_{i,j}$ captadas pelos N_s sensores implantados no indivíduo. Especificamente, para cada indivíduo p_i e movimento M_j , é confeccionada uma matriz de adjacências $W_{i,j}$ cujas entradas correspondem à correlação entre pares de séries temporais de $\mathcal{T}_{i,j}$, como esquematizado na Figura 7.

Figura 7 – Esquema que representa a confecção de redes de conexões a partir de um indivíduo p_i .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todas as redes de conexões construídas possuem o mesmo conjunto de nós, os quais representam os sensores. Desta forma, as redes de conexões geradas diferem apenas no conjunto de suas arestas. Isto é, cada matriz de adjacência $W_{i,j}$ define um grafo $G_{i,j}(\mathcal{S}, E_{i,j})$, sendo $\mathcal{S}$ o conjunto dos N_s sensores utilizados e $E_{i,j}$ o conjunto de arestas que relaciona as séries temporais geradas pelos sensores quando o paciente p_i executa o movimento M_j .

Para que seja utilizado o *framework* da Equação (3.38), é necessário estabelecer uma matriz de distâncias par-a-par entre os elementos (nós) da rede de conexões. É com base nesta matriz que se determina quais séries temporais darão origem às arestas do grafo. A matriz de distâncias, denominada $Z_{i,j}$, é definida de modo a atender a tarefa T_3 , sendo a modelagem realizada juntamente com os especialistas. A matriz $Z_{i,j}$ estabelece quais elementos, ou séries temporais, possuem maior similaridade.

Tendo em vista que as tarefas T_1 e T_3 determinam os critérios acerca do que é uma relação importante entre dois sensores, definimos a matriz de distâncias $Z_{i,j}$ de acordo com três critérios: o primeiro critério define uma função de distâncias z_1 que estabelece a intensidade da correlação

entre duas séries temporais (T_1), descartando correlações de baixa intensidade ($T_{3.1}$); o segundo critério define uma função de distâncias z_2 que descarta relações indesejadas entre sensores ($T_{3.2}$); o terceiro critério define uma função de distâncias z_3 que penaliza relações entre sensores que apresentam séries temporais constantes ($T_{3.3}$). A matriz de distâncias Z , estabelecida na Equação (5.1), é obtida a partir da combinação linear das funções z_1 , z_2 e z_3 :

$$Z_{i,j} = (z_{x,y})_{x,y \in \mathcal{T}_{i,j}} = (\alpha \cdot z_1(x,y) + \beta \cdot z_2(x,y) + \gamma \cdot z_3(x,y))_{x,y \in \mathcal{T}_{i,j}}, \quad (5.1)$$

sendo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ parâmetros de controle cujos valores padrão são $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$.

De acordo com as tarefas T_1 e T_3 , apenas séries temporais com elevada correlação devem possuir uma relação (aresta no grafo). Assim, z_1 é definida como sendo a distância de correlação de Spearman (SPEARMAN, 1961), a qual é uma distância baseada na correlação de ranqueamentos que é conhecida por apresentar robustez na determinação de correlações mesmo na presença de ruído ou *outliers*. De acordo com esta distância, quanto mais “próximos” dois elementos são, mais correlacionados estão. Matematicamente, a distância de Spearman (XIE *et al.*, 2016) entre duas séries temporais t_1 e t_2 de $\mathcal{T}_{i,j}$ é definida como:

$$\begin{aligned} z_1 : \mathcal{T}_{i,j} \times \mathcal{T}_{i,j} &\longrightarrow [0, 1] \\ (t_1, t_2) &\longmapsto z_1(t_1, t_2) = 1 - \left| \frac{\text{COV}(\text{rr}(t_1), \text{rr}(t_2))}{\text{DP}(\text{rr}(t_1)) \cdot \text{DP}(\text{rr}(t_2))} \right|, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde COV é a função de covariância, DP é a função de desvio padrão e rr é a função de ranqueamento relativo entre t_1 e t_2 .

Como garantido pela teoria discutida no Capítulo 3, se a matriz de distâncias fosse determinada apenas por z_1 , apenas as séries temporais com as maiores correlações seriam conectadas, enquanto que séries temporais que não apresentassem correlações intensas não seriam conectadas por arestas no grafo. Tendo em vista que as redes geradas pela técnica são esparsas, apenas séries temporais que estejam muito correlacionadas seriam conectadas no grafo, o que já satisfaz a tarefa $T_{3.1}$. Entretanto, outros procedimentos são observados pelos especialistas na realização da tarefa T_3 . Um destes procedimentos é o de eliminar relacionamentos evidentes ou indesejados entre sensores, como detalhado na tarefa $T_{3.2}$. Sendo assim, para cada conjunto de séries temporais $\mathcal{T}_{i,j}$, os peritos dispõem de um conjunto $E'_{i,j} \subset \mathcal{T}_{i,j} \times \mathcal{T}_{i,j}$ de relações entre séries temporais que não devem ser levadas em consideração. Para simular este funcionamento, a função de distâncias z_2 tem o objetivo de penalizar pares de séries temporais que pertençam a $E'_{i,j}$, o que é definido como: (5.3).

$$\begin{aligned} z_2 : \mathcal{T}_{i,j} \times \mathcal{T}_{i,j} &\longrightarrow \{0, 2\} \\ (t_1, t_2) &\longmapsto z_2(t_1, t_2) = \begin{cases} 2, & \text{caso } (t_1, t_2) \in E'_{i,j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A função z_2 acrescenta no cálculo das distâncias um valor até duas vezes maior que o maior valor possível a ser assumido por z_1 , o que implica que mesmo que duas séries temporais

estejam fortemente correlacionadas, apresentando distância z_1 igual a 0, estas serão consideradas distantes se configurarem uma relação a ser descartada, uma vez que a distância z_2 entre elas será de valor igual 2.

De acordo com a tarefa T_3 , deve-se descartar sensores que apresentem comportamento aproximadamente constante, como detalhado em $T_{3.3}$. Para simular este comportamento, definimos a função de penalidade z_3 como na Equação (5.4), sendo uma medida responsável por acrescentar a uma relação entre duas séries temporais um valor de penalização no caso de alguma destas séries apresentar comportamento aproximadamente constante.

$$\begin{aligned} z_3 : \mathcal{T}_{i,j} \times \mathcal{T}_{i,j} &\longrightarrow [0, 2] \\ (t_1, t_2) &\longmapsto z_3(t_1, t_2) = e^{-\text{diff}(t_1)} + e^{-\text{diff}(t_2)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde diff é a função que calcula a soma do módulo das diferenças entre duas coordenadas subsequentes de um dado vetor, como definido na Equação (5.5).

$$\text{diff}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} |x_i - x_{i+1}|, \quad (5.5)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

No caso em que uma série temporal t_1 apresenta variações consideráveis entre suas coordenadas subsequentes, o valor de $\text{diff}(t_1)$ será elevado, o que acarretará em $e^{-\text{diff}(t_1)}$ ser próximo de 0. No caso contrário, se uma série temporal t_1 apresenta comportamento aproximadamente constante, haverá pouca variação entre suas coordenadas subsequentes, o que implica em $\text{diff}(t_1)$ ser próximo de 0 e, portanto, $e^{-\text{diff}(t_1)}$ será próximo de 1. Dessa forma, se duas séries temporais (t_1, t_2) forem muito correlacionadas, mas também apresentarem comportamento aproximadamente constante, então $z_1(t_1, t_2)$ será aproximadamente 0, mas $z_3(t_1, t_2)$ terá um valor próximo de 2, acrescentando uma penalidade em Z para t_1 e t_2 . A modelagem de z_3 corresponde à tarefa $T_{3.3}$, uma vez que sensores que não são utilizados em uma movimentação, ou seja, sensores que são representados por séries temporais aproximadamente constantes não serão conectados por nenhuma aresta na rede de conexões.

De posse das informações discutidas nesta seção, a metodologia de confecção de redes de conexões definida no Algoritmo 6, o qual sumariza todos os passos para a criação de um grafo $G_{i,j}$ para cada indivíduo $p_i \in \mathcal{P}$ ao executar o movimento M_j . O algoritmo utiliza como entrada todos os conjuntos de séries temporais $\mathcal{T}_{i,j}$ e apresenta, como saída, todas as redes de conexões $G_{i,j}(\mathcal{S}, E_{i,j})$, definidas pelas matrizes de adjacências $W_{i,j}$.

É importante ressaltar que, como orientado pelos peritos envolvidos no projeto, nenhuma técnica de pré-processamento foi aplicada nas séries temporais avaliadas. Dessa forma, todas as análises realizadas nesta metodologia foram feitas diretamente nos dados em sua forma original.

Algoritmo 6 – Algoritmo de predição de redes de conexões entre sensores.

Entrada:	$\mathcal{T}_{i,j} = \{t_1, t_2, \dots, t_{N_s}\}$	Conjunto de séries temporais
	$E'_{i,j}$	Conjunto de arestas proibidas (utilizado por z_2)
1: $Z_{i,j} := 0$ $\triangleright 0 \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ representa a matriz nula 2: para $l \leftarrow 1$ até N_s faça 3: para $c \leftarrow l + 1$ até N_s faça 4: $Z_{i,j}[l, c] := z_1(t_l, t_c) + z_2(t_l, t_c) + z_3(t_l, t_c)$ 5: $Z_{i,j}[c, l] := Z_{i,j}[l, c]$ 6: fim para 7: fim para 8: Resolver o problema de otimização da Equação (3.38), fornecendo Z como matriz de distâncias entre as séries temporais e obtendo a matriz de adjacências $W_{i,j}$. 9: Confeccionar o grafo $G_{i,j}(\mathcal{S}, E_{i,j})$ a partir de $W_{i,j}$.		
Saída:	$W_{i,j}$	Matriz de adjacência construída
	$G_{i,j}(\mathcal{S}, E_{i,j})$	Rede de conexões entre os N_s sensores de $\mathcal{T}_{i,j}$

5.4 Filtragens e Seleções de Redes e Arestas

Como pode ser observado na seção anterior, muitas redes de conexões são geradas na metodologia proposta. Sendo assim, para atender ao requisito R_2 , é necessário que o sistema disponha de aparatos que tornem possível a seleção de quais redes de conexões, ou quais conjuntos de redes de conexões, a técnica proposta deve analisar. Em outras palavras, o artifício apresentado nesta seção tem como principal objetivo restringir quais grupos de conexões devem ser considerados dentre todas as redes de conexões confeccionadas a fim de se construir um domínio de análises no qual os estudos são realizados. Por exemplo, se as análises forem executadas apenas sobre as redes de conexões referentes aos indivíduos afetados por AVC no lado esquerdo do corpo ao efetuarem o exercício M_1 , então o método de filtragem proposto deve ser capaz de orientar as avaliações para este domínio de interesse.

Em âmbito geral, o ferramental desenvolvido faz uso da bem conhecida teoria dos conjuntos (JECH, 2013) para facilitar a análise de conjuntos de redes de conexões específicos. Em outras palavras, o método proposto é baseado na análise de um único grafo cujo conjunto de vértices é uma representação do conjunto de sensores $\mathcal{S}$, o mesmo para todos os grafos construídos, e o conjunto de arestas é constituído por elementos específicos pertencentes à união dos conjuntos de arestas de todos os grafos confeccionados. Sendo assim, a técnica de filtragem desenvolvida atua principalmente nos conjuntos de arestas das redes construídas.

Todo tipo de filtragem efetuada neste trabalho ocorre sobre um conjunto universo definido por um grafo G_U , o qual é formado pela união de todas as redes confeccionadas, detalhado na Equação (5.6).

$$G_U = G_U(\mathcal{S}, E_U) = G_U \left(\mathcal{S}, \bigcup_{p_i \in \mathcal{P}, M_j \in \mathcal{M}} E_{i,j} \right). \quad (5.6)$$

Desta forma, o conjunto de arestas E_U , utilizado na Equação (5.6), é definido como a união de todos os conjuntos de arestas confeccionados para todos os pacientes ao efetuarem todos os movimentos e G_U é o grafo definido por este conjunto de arestas.

Especificamente, a metodologia desenvolvida torna possível que uma determinada característica, podendo ser uma condição, ou um determinado movimento, ou um determinado lado de hemiplegia ou um paciente específico seja fixado de forma que apenas a união entre os conjuntos de arestas das redes de conexões referentes a esta seleção seja apresentada. Em outras palavras, para o método proposto considera-se que uma seleção Λ seja um conjunto que estabeleça quais indivíduos (p_i) e quais movimentos (M_j) devem ser considerados para que seja confeccionado um grafo G_Λ associado a essa seleção e que represente o domínio de interesse no qual as análises serão efetuadas.

Para que as devidas filtrações, ou seleções, especifiquem o conteúdo a ser considerado como representante do domínio de interesse, é proposto que se faça uso de um conjunto Λ de arestas, o qual deve ser definido de forma literal, e, a partir deste, seja construída uma versão definida matematicamente e que represente o mesmo conjunto de arestas considerado como domínio de interesse. Sendo assim, o procedimento proposto neste trabalho como método de filtração para especificar quais redes de conexões devem ser consideradas para se realizar as devidas análises é determinado por apenas três passos:

- **Passo 1:** Especificar um conjunto Λ de arestas, contido em E_U , de forma literal;
- **Passo 2:** Associar a Λ um conjunto de arestas E_Λ , definida em função dos conjuntos $E_{i,j}$, tais que $p_i \in \mathcal{P}$ e $M_j \in \mathcal{M}$, de forma que Λ e E_Λ configurem o mesmo conjunto de arestas;
- **Passo 3:** Confeccionar o grafo associado G_Λ que representa o domínio de interesse.

Nos Exemplos 1 a 5 são apresentadas algumas situações nas quais o processo de filtração proposto é utilizado para definir um domínio de interesse.

Exemplo 1. Suponha que o domínio de interesse seja pacientes afetados por AVC com hemiplegia no lado esquerdo do corpo ($\mathcal{P}^{AVC_E}$) ao realizar o movimento M_2 ($j = 2$). Dessa forma, para atender ao primeiro passo, a seleção considerada deve ser igual ao conjunto Λ_1 definido na Equação (5.7).

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{“arestas das redes de conexões confeccionadas} \\ \text{para os indivíduos afetados} \\ \text{ao executarem o movimento } M_2 \text{ com o lado esquerdo do corpo”} \end{array} \right\}. \quad (5.7)$$

No cumprimento do segundo passo, o conjunto formal de arestas associado à seleção Λ_1 é o conjunto E_{Λ_1} , descrito na Equação (5.8).

$$E_{\Lambda_1} = \left\{ e \in \bigcup_{i,j} E_{i,j} \subset E_U \mid p_i \in \mathcal{P}^{AVC_E} \text{ e } j = 2 \right\}. \quad (5.8)$$

Dessa forma, finalizando-se o terceiro passo, o grafo considerado como domínio de interesse para a seleção Λ_1 é o grafo G_{Λ_1} , apresentado na Equação (5.9).

$$G_{\Lambda_1} = G_{\Lambda_1}(\mathcal{S}, E_{\Lambda_1}). \quad (5.9)$$

□

Exemplo 2. Do mesmo modo, é possível restringir as arestas de E_U apenas às redes de conexões dos indivíduos saudáveis que realizaram o movimento M_2 com o lado esquerdo do corpo. Para tal, basta que seja considerada uma seleção Λ_2 definida de acordo com a Equação (5.10).

$$\Lambda_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{“arestas das redes de conexões confeccionadas} \\ \text{para os indivíduos saudáveis} \\ \text{ao executarem o movimento } M_2 \text{ com o lado esquerdo do corpo”} \end{array} \right\}. \quad (5.10)$$

Para esta seleção, o conjunto de arestas que define o domínio de interesses referente à Λ_2 é o conjunto E_{Λ_2} definido na Equação (5.11).

$$E_{\Lambda_2} = \left\{ e \in \bigcup_{i,j} E_{i,j} \subset E_U \mid p_i \in \mathcal{P}^{\text{CTRL}_E} \text{ e } j = 2 \right\}. \quad (5.11)$$

Finalmente, o grafo considerado como representante do domínio de interesse para a seleção Λ_2 é o grafo G_{Λ_2} , apresentado na Equação (5.12).

$$G_{\Lambda_2} = G_{\Lambda_2}(\mathcal{S}, E_{\Lambda_2}). \quad (5.12)$$

□

Com esta modelagem também é possível realizar filtragens mais elaboradas e restritivas que façam uso de combinações de seleções mais simples, como destacado no exemplo 3 a seguir.

Exemplo 3. Suponha que seja necessário considerar apenas as arestas que sejam exclusivas nas redes de conexões dos indivíduos afetados que realizaram o movimento M_2 com o lado esquerdo do corpo.

Isto é, as arestas consideradas não devem aparecer em qualquer indivíduo saudável que tenha realizado o movimento M_2 com o lado esquerdo do corpo.

Neste caso, a seleção literal é definida como sendo Λ_3 , detalhada na Equação (5.13).

$$\Lambda_3 = \left\{ \begin{array}{l} \text{“arestas exclusivas às redes de conexões confeccionadas} \\ \text{para os indivíduos afetados} \\ \text{ao executarem o movimento } M_2 \text{ com o lado esquerdo do corpo”} \end{array} \right\}. \quad (5.13)$$

Para confeccionar o conjunto formal de arestas E_{Λ_3} referente à seleção Λ_3 , pode-se utilizar os conjuntos E_{Λ_1} e E_{Λ_2} , entretanto este conjunto é facilmente obtido em função dos

conjuntos de arestas $E_{i,j}$, como detalhado na Equação (5.14).

$$\begin{aligned}
 E_{\Lambda_3} &= E_{\Lambda_1} - E_{\Lambda_2} \\
 &= \{e \in E_U \mid e \in E_{\Lambda_1} \text{ e } e \notin E_{\Lambda_2}\} \\
 &= \left\{ e \in E_U \mid e \in \bigcup_{i_1,j} E_{i_1,j} \text{ e } e \notin \bigcup_{i_2,j} E_{i_2,j} \text{ e } p_{i_1} \in \mathcal{P}^{\text{AVCE}} \right. \\
 &\quad \left. \text{e } p_{i_2} \in \mathcal{P}^{\text{CTRL}_E} \text{ e } j = 2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Isto é, de acordo com a Equação (5.14), são consideradas para definir o domínio de interesse apenas as arestas existentes nas redes de conexões dos indivíduos afetados por AVC, de forma que as mesmas não estejam presentes nas redes de conexões confeccionadas para os indivíduos saudáveis na execução do mesmo exercício M_2 . $\square$

Exemplo 4. Considera-se neste exemplo um domínio semelhante ao apresentado no Exemplo 3 com a ressalva de que o domínio de interesse se restrinja apenas às arestas existentes somente nas redes de conexões dos indivíduos saudáveis.

Sendo assim, a seleção literal é definida como sendo Λ_4 , detalhada na Equação (5.15).

$$\Lambda_4 = \left\{ \begin{array}{l} \text{“arestas exclusivas às redes de conexões confeccionadas} \\ \text{para os indivíduos saudáveis} \\ \text{ao executarem o movimento } M_2 \text{ com o lado esquerdo do corpo”} \end{array} \right\}. \tag{5.15}$$

O conjunto formal de arestas E_{Λ_4} referente à seleção Λ_4 , é então descrito na Equação (5.16).

$$E_{\Lambda_4} = E_{\Lambda_2} - E_{\Lambda_1}. \tag{5.16}$$

Isto é, de acordo com a Equação (5.16), são consideradas para definir o domínio de interesse apenas as arestas existentes nas redes de conexões dos indivíduos saudáveis, de forma que as mesmas não estejam presentes nas redes de conexões confeccionadas para os indivíduos afetados por AVC na execução do mesmo exercício M_2 . $\square$

Exemplo 5. Nos Exemplos 3 e 4, foram estabelecidos domínios nos quais eram consideradas apenas as arestas exclusivas às redes de conexões de indivíduos de uma mesma determinada condição. Neste exemplo, deve-se estabelecer como domínio de interesse as arestas que são comuns às redes de conexões dos indivíduos saudáveis e às redes de conexões dos indivíduos afetados ao executarem o exercício M_2 com o lado esquerdo do corpo.

Para tal, considera-se como seleção literal, o conjunto Λ_5 , definido na Equação (5.17).

$$\Lambda_5 = \left\{ \begin{array}{l} \text{“arestas comuns às redes de conexões confeccionadas} \\ \text{para os indivíduos saudáveis} \\ \text{e para os indivíduos afetados ao executarem o} \\ \text{movimento } M_2 \text{ com o lado esquerdo do corpo”} \end{array} \right\}. \tag{5.17}$$

E para esta seleção, também é possível descrever o conjunto formal de arestas associado em função de seleções anteriores, como detalhado na Equação (5.18).

$$E_{\Lambda_5} = E_{\Lambda_1} \cup E_{\Lambda_2} - E_{\Lambda_3} \cup E_{\Lambda_4}. \quad (5.18)$$

Em outras palavras, E_{Λ_5} pode ser descrito como sendo a união das arestas que definem as redes de conexões de todos os indivíduos, tanto saudáveis quanto afetados, que executaram o exercício M_2 com o lado esquerdo do corpo ($E_{\Lambda_1} \cup E_{\Lambda_2}$), excluindo-se as arestas que existem apenas em redes de conexões de indivíduos de mesma condição ($E_{\Lambda_3} \cup E_{\Lambda_4}$). $\square$

Sendo assim, uma vez que as condições de interesse, ou seleção Λ , sejam definidas, é possível construir um conjunto de arestas $E_{\Lambda} \subset E_U$ e o grafo associado G_{Λ} , que representem as conexões nas quais tem-se como objetivo avaliar características e fenômenos interessantes.

5.4.1 Atribuição de valores às arestas

Atribuições de valores em arestas é fundamental na realização de várias tarefas associadas à ordenação, tais como detectar a conexão mais recorrente em redes de conexões de indivíduos afetados por AVC ao executarem um movimento específico, ou ainda descartar arestas que sejam pouco frequentes dentre as redes de conexões de pacientes de determinada seleção para que seja possível direcionar o estudo a conexões que existam em um número considerável de redes. Rotinas como estas fazem referência ao requisito R_4 , no qual os especialistas determinam que seja feita atribuição de valores às arestas das redes de conexões confeccionadas e que o material desenvolvido facilite tarefas de ordenação. É proposto neste trabalho que este tipo de tarefa seja efetuada na forma de filtragens. Especificamente, as rotinas de destacar grupos de arestas de acordo com valores atribuídos às mesmas são realizadas nesta metodologia como uma extensão do conceito de filtragem de arestas e redes, o qual é introduzido no início da Seção 5.4.

Para todos os casos, o procedimento consiste inicialmente em definir uma função f responsável por atribuir valores às arestas das redes de conexões confeccionadas. Isto é, para cada aresta e de E_U é atribuído um valor numérico $f(e)$, como apresentado na Equação (5.19).

$$\begin{aligned} f: E_U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e &\longmapsto f(e). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Na sequência, levando-se em consideração os valores atribuídos em cada uma das arestas por f , determina-se uma seleção Λ que pode ser utilizada para realizar rotinas de filtragem. No Exemplo 6, a técnica proposta é empregada para a realização de uma rotina de ordenação por meio de filtragem.

Exemplo 6. Considere o grafo formado apenas pela aresta mais recorrente nas redes de conexões dos indivíduos saudáveis que executaram o movimento M_8 , “*Wrist Flexion Extension Elbow At*

90°”, com o lado direito do corpo. Desta forma, a seleção literal de arestas a ser considerada é a seleção Λ_6 , definida na Equação (5.20).

$$\Lambda_6 = \left\{ \begin{array}{l} \text{“aresta mais recorrente dentre as arestas das redes de conexões} \\ \text{confeccionadas para os indivíduos saudáveis} \\ \text{ao executarem o} \\ \text{movimento } M_8 \text{ com o lado direito do corpo”} \end{array} \right\}. \quad (5.20)$$

Na sequência, é necessário definir uma função que associe a cada conexão o número de conjuntos de arestas, dentre os conjuntos de arestas de todas as redes consideradas, nas quais esta conexão faça parte. Matematicamente, é necessário atribuir para cada aresta e , o número de conjuntos de arestas, considerando-se apenas as redes confeccionadas para os indivíduos saudáveis que realizaram o movimento M_8 com o lado direito do corpo, nos quais e faça parte. A função que representa este valor é f_{cont} , definida na Equação (5.21).

$$f_{\text{cont}}(e) := \# \left(\left\{ E_{i,j} \subset E_U \mid e \in E_{i,j}, \quad p_i \in \mathcal{P}^{\text{CTRL}_D}, \quad j = 8 \right\} \right), \quad (5.21)$$

sendo $\#(\cdot)$ a função que contabiliza quantos elementos um conjunto possui.

Finalmente, o conjunto formal E_{Λ_6} que estabelece quais arestas devem ser consideradas como domínio de interesse é apresentado na Equação (5.22).

$$E_{\Lambda_6} = \left\{ e \in \bigcup_{i,j} E_{i,j} \subset E_U \mid p_i \in \mathcal{P}^{\text{CTRL}_D}, j = 8, f_{\text{cont}}(e) = \max \{ f_{\text{cont}}(E_U) \} \right\}. \quad (5.22)$$

Em outras palavras, E_{Λ_6} é o conjunto formado pelas arestas mais recorrentes, ou que possuem o maior valor de f_{cont} , às redes de conexões dos indivíduos saudáveis que realizaram o movimento M_8 com o lado direito do corpo. $\square$

Desta forma, pode-se constatar que, por meio de combinações simples dos conjuntos de arestas $E_{i,j}$, baseando-se em informações a respeito da condição de pacientes, isto é se são saudáveis ou afetados, do movimento, do lado avaliado, ou de valores atribuídos às arestas, é possível determinar um domínio de interesse, representado por um grafo G_Λ e seu conjunto de arestas E_Λ nos quais as análises são efetuadas, o que serve de orientação para as aplicações práticas que têm como principal objetivo extrair e apresentar padrões pertencentes a essas seleções.

5.5 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentadas as principais etapas da metodologia utilizada para a resolução do problema trazido pelos especialistas. Sendo que a primeira etapa foi alcançada no

Capítulo 4 por meio da interação com os peritos, a segunda etapa foi concluída neste capítulo com a apresentação do componente teórico matemático do ferramental desenvolvido e a terceira etapa da metodologia proposta é detalhada nos dois próximos capítulos reservados para a definição e validação de um sistema de análise visual confeccionado para apresentar propriedades dispostas na base de dados abordada que foram calculadas com o modelo matemático proposto.

As medidas de correlação definidas entre as séries temporais extraídas pelos sensores são otimizadas com a construção de redes de conexões por meio da bem fundamentada técnica de aprendizado baseado em grafos. Uma adequação de tais técnicas foi proposta para tornar possível a confecção de redes de conexões entre sensores levando-se em conta algumas orientações advindas dos peritos, tais como conectar sensores que possuam elevada correlação e desconsiderar sinais constantes e sensores específicos no cálculo.

Uma técnica de filtragem e seleção de domínios de interesse formados principalmente por arestas foi apresentada neste capítulo para que fosse possível realizar análises em grupos específicos de redes de conexões ou em arestas especiais. Esta técnica se baseia em destacar conexões específicas tendo-se como orientação a condição médica do paciente para o qual a rede de conexões que possivelmente contenha a aresta foi construída, o lado utilizado na execução de um movimento, um movimento em particular, ou ainda valores associados às arestas, o que possibilita que a técnica de filtragem também seja utilizada como rotina de ordenação.

Neste capítulo, foi proposta uma metodologia de confecção e de filtragem de um grande número de redes de conexões. Entretanto, informações e detalhes a respeito dessas conexões precisam ser explorados. Desta forma, fica claro o grande montante de informação que necessita ser apresentado fazendo-se uso destas redes. Sendo assim, o uso de um sistema de análise visual para avaliar propriedades interessantes destas informações se faz necessário. Os componentes deste sistema são propostos e detalhados no Capítulo 6.

NE-MOTION: UMA FERRAMENTA DE ANÁLISE VISUAL DE CONJUNTOS DE REDES DE CONEXÕES

6.1 Considerações iniciais

Neste capítulo, é apresentado como um dos resultados deste trabalho de doutorado o sistema de visualização desenvolvido em parceria com pesquisadores da Universidade de Nova York (NYU), sendo estes peritos da área médica responsável pela análise de efeitos decorrentes de AVC. A técnica proposta consiste em uma ferramenta de visualização que permite a análise visual da relação entre determinadas seções dos membros superiores humanos durante a execução de um conjunto pré-definido de movimentos. Para tal, é desenvolvido o NE-Motion, ou *Network Environment for Motion Capture Data Analysis*, que consiste no protótipo computacional responsável pela avaliação da metodologia em uma base de dados real formada por indivíduos que sofreram AVC e por indivíduos de controle.

O protótipo computacional da ferramenta é apresentado e possui como principal interesse alcançar os requisitos R_1 a R_{10} para que as tarefas de análise T_1 a T_5 sejam realizadas com mais facilidade e rapidez. Para que isso seja possível, é considerado que todas as redes de conexões $G_{i,j}(S, E_{i,j})$ estejam confeccionadas com o material apresentado na Seção 5.3 do Capítulo 5.

NE-Motion é um sistema cujo objetivo consiste na apresentação visual de relacionamentos entre sensores por meio de metáforas visuais baseadas em grafos. O sistema também possibilita que sejam realizadas comparações entre séries temporais de dados de movimentos. Além disso, a abordagem torna o usuário capaz de acompanhar o desempenho dos pacientes em cada movimentação específica ou em cada sensor utilizado e analisar similaridades dentro do conjunto de pacientes por meio de projeções. Na Figura 8, estão representados os principais componentes da ferramenta.

Figura 8 – Ferramenta de visualização NE-Motion. Em **A**, são apresentados os componentes referentes a visualização de redes de conexões. Em **B**, detalhes entre um relacionamento especificado pelo usuário são destacados em uma janela informativa. Em **C**, medidas estatísticas entre as séries temporais dos sensores são apresentadas. Em **D**, são apresentadas projeções que levam em consideração todos os indivíduos de uma filtragem especificada pelas caixas de seleção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas seções seguintes, os principais componentes visuais de NE-Motion são detalhados. De forma que na Seção 6.2, são apresentados os componentes visuais que facilitam a determinação de seleções pelos usuários sobre os conjuntos de redes de conexões e que torna possível a amostragem de informações específicas nestes conjuntos. Nessa mesma seção é discutida a maneira de apresentar as redes de conexões confeccionadas na Seção 5.3 do Capítulo 5. Na Seção 6.3, informações acerca de uma relação específica entre sensores estabelecida na forma de uma aresta são apresentadas em uma janela informativa. Medidas estatísticas extraídas das séries temporais de cada indivíduo na execução de um ou mais exercícios são dispostas em NE-Motion através do componente apresentado na Seção 6.4. São discutidos na Seção 6.5 componentes do sistema NE-Motion responsáveis por facilitar a comparação de indivíduos. Na Seção 6.6, detalhes das ferramentas computacionais utilizadas para a confecção de NE-Motion são apresentados. O Capítulo é finalizado na Seção 6.7 com conclusões a respeito do material discutido.

6.2 Apresentação e Filtragem de Redes de Conexões

O objetivo principal do componente A, apresentado na Figura 8, descrito nesta seção, é tornar o usuário do sistema NE-Motion capaz de definir uma seleção Λ que represente um

domínio de interesse (R_2) na forma de um grafo $G_\Lambda = G(S, E_\Lambda)$ e o apresenta através de um atributo de visualização de redes.

Para que os grafos construídos possam ser apresentados (R_1) de forma que haja uma ordem na disposição dos nós (R_9), é utilizada uma metáfora de visualização de arcos (WATTENBERG, 2002). Nessa metáfora, os vértices (Figura 8 - a_3) dos grafos apresentados são dispostos de acordo com uma sequência pré-estabelecida, a qual foi determinada anteriormente pelos especialistas. Em detalhes, os peritos precisam que o ferramental desenvolvido represente a seguinte ordem entre os sensores: sensores do pulso esquerdo; sensores do cotovelo esquerdo; sensores dos ombros esquerdo; sensores do tórax; sensores da lombar; sensores do ombro direito; sensores do cotovelo direito; e sensores do pulso direito. Além disso, esta metáfora permite que as relações entre os sensores sejam o conceito principal da apresentação, uma vez que as arestas (Figura 8 - a_2) dos grafos considerados ocupam grande parte do sistema visual e tornam natural e intuitiva a tarefa de destacar relacionamentos (R_5).

Na Figura 9, é apresentado um exemplo de uso do componente de representação de redes de conexões por visualização em arcos do sistema NE-Motion. A interação com o usuário é realizada por meio da movimentação do cursor do mouse, possibilitando que sejam destacadas as relações inerentes a um sensor selecionado.

Figura 9 – Exemplo de uso do componente de visualização de arcos. São destacadas as relações, ou arestas, nas quais o sensor, ou vértice, “Thoracic Lateral - RT,deg” possui participação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A determinação de quais variáveis devem ser fixadas para definir uma seleção Λ é feita através das quatro primeiras caixas de opções, da esquerda para a direita, apresentadas na Figura 8- a_1 , as quais permitem que sejam estabelecidos, respectivamente, a condição do paciente, o lado da hemiplegia considerado, o movimento executado (M_j) e também é possível visualizar apenas as redes referentes a um único indivíduo (p_i).

Na Figura 10, é apresentado um exemplo de uso deste componente de NE-Motion que

permite a análise de arestas exclusivas, como definido em $R_{3.1}$. Neste caso, o conjunto de arestas que compõem a seleção é o conjunto arestas exclusivas às redes de conexões de indivíduos de uma mesma condição, isto é, as arestas devem existir somente nas redes de conexões de indivíduos afetados por AVC ou somente nas redes de conexões de indivíduos saudáveis. Além disso, neste exemplo são consideradas apenas as redes confeccionadas com respeito ao lado de hemiplegia esquerdo dos indivíduos que executaram o movimento “*Flexor Synergy*”, o qual é o primeiro movimento considerado ($j = 1$). Sendo assim, o componente de filtragem é estabelecido pela seleção $\Lambda_{\text{NE-Motion},1}$, apresentada na Equação (6.1).

$$\Lambda_{\text{NE-Motion},1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{"arestas exclusivas às redes de conexões de indivíduos saudáveis} \\ \text{ou exclusivas às redes de conexões de indivíduos afetados por AVC,} \\ \text{as quais são confeccionadas para a execução do movimento } M_1 \\ \text{utilizando-se o lado esquerdo do corpo."} \end{array} \right\}, \quad (6.1)$$

sendo que esta seleção define o conjunto formal de arestas $E_{\Lambda_{\text{NE-Motion},1}}$ e o grafo $G_{\Lambda_{\text{NE-Motion},1}}$, apresentado na Figura 10, de forma que arestas existentes apenas em redes referentes a indivíduos saudáveis são coloridas na cor verde e arestas existentes apenas em redes de indivíduos afetados por AVC são coloridas na cor vermelha. A coloração se faz necessária para satisfazer a restrição estabelecida pelos especialistas em R_7 .

Figura 10 – Visualização de relações entre sensores (arestas) que são exclusivas a pacientes afetados por AVC, na cor vermelha, e de relações entre sensores que são exclusivas a indivíduos de controle, em verde. A caixa de opções que seleciona a filtragem especial está destacada dentro do retângulo seccionado azul.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além da análise de arestas exclusivas a redes de pacientes de uma mesma condição, também é possível realizar a apresentação do grafo no qual suas arestas sejam comuns tanto a indivíduos saudáveis quanto a indivíduos afetados por AVC ($R_{3.2}$). Neste caso, o sistema NE-Motion não usa nenhum tipo de coloração especial nas arestas apresentadas, uma vez que todas

as arestas presentes são existentes em redes de conexões de indivíduos de ambas as condições, fazendo com que o ferramental apresente todas as arestas coloridas em azul.

Com respeito a ordenações (R_4), o sistema permite que sejam apresentadas as arestas que assumam os maiores valores apresentados por uma função f definida para a seleção considerada (Equação (5.19)). Sendo que a ordenação é especificada por meio da quinta caixa de seleções da esquerda para a direita da Figura 8- a_1 .

Na Figura 11, é apresentado um exemplo no qual deseja-se visualizar as duas arestas mais frequentes (Top 2) dentre todas as arestas das redes de conexões de indivíduos saudáveis que executaram o movimento “*Wrist Flexion Extension Elbow At 90°*”, cujo índice é $j = 8$, com o lado direito do corpo. Para isto, é considerado que f seja igual a função f_{cont} definida na Equação (5.21) do Exemplo 6. Desta forma, o grafo apresentado na Figura 11 é o grafo referente à seleção $\Lambda_{\text{NE-Motion},2}$, definida na Equação (6.2):

$$\Lambda_{\text{NE-Motion},2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{"as duas arestas mais recorrentes nos conjuntos de arestas} \\ \text{que definem as redes de conexões de todos os indivíduos saudáveis} \\ \text{que executaram o movimento } M_8 \text{ com o lado direito do corpo."} \end{array} \right\}, \quad (6.2)$$

Figura 11 – As duas arestas da seleção definida pelo usuário nas caixas de seleção que apresentam maiores valores de f_{cont} , destacando o fato de que estas arestas são as duas mais frequentes nas redes de conexões consideradas. O retângulo seccionado azul destaca a caixa de opção que determina o parâmetro da ordenação que controla o número de arestas apresentadas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que o objetivo do componente A de apresentação e filtragem de redes é estabelecer uma seleção Λ e o respectivo domínio de interesse, representado pelo grafo $G_{\Lambda} = G(\mathcal{S}, E_{\Lambda})$,

considera-se nas seções seguintes que todas as rotinas de análises são efetuadas sobre um domínio pré-estabelecido pelo usuário do sistema visual.

6.3 Análise de Relacionamentos entre Sensores

Na Figura 8-B, é possível visualizar o componente responsável por destacar detalhes presentes em uma determinada aresta, tais como o número de indivíduos que a possuem em suas redes de conexões, a sua distribuição dentre os indivíduos realizando os movimentos, uma estimativa entre as séries temporais captadas pelos sensores que compõem esta aresta, etc. Desta forma, o componente é apresentado pelo sistema visual assim que o usuário seleciona uma aresta e , fazendo com que detalhes acerca desta aresta sejam descritos por meio de sub-atributos visuais deste componente.

Estes detalhes são descritos em uma janela informativa, a qual é formada por três principais atributos visuais: b_1 , no qual é detalhada a distribuição da aresta especificada dentre as redes de conexões dos indivíduos ao executar cada movimento; b_2 , no qual é representado um gráfico do tipo *scatter plot* formado entre medidas de processamento de sinais estabelecidas em b_3 , tais como energia e entropia, extraídas das curvas captadas pelos sensores que estabelecem a conexão selecionada; e b_4 , no qual é apresentada uma estimativa, em módulo, de médias das curvas de movimento dos indivíduos que possuem a aresta selecionada em suas redes de conexões.

Especificamente, o atributo visual b_1 é responsável por destacar a distribuição de indivíduos nos quais uma aresta e faça parte de suas redes de conexões consideradas na seleção (R_5). Para facilitar a comparação entre a quantidade de indivíduos saudáveis e afetados por AVC nos quais pelo menos uma de suas redes de conexões seja composta pela aresta e , é utilizada uma metáfora visual baseada em gráfico de barras horizontais, na qual é construída uma barra para cada grupo de indivíduos: uma barra colorida na cor verde fazendo referência à quantidade de indivíduos saudáveis; e uma barra colorida na cor vermelha fazendo referência à quantidade de indivíduos afetados por AVC. O comprimento destas barras deve ser proporcional à quantidade de indivíduos que as mesmas representam.

Toda modelagem do atributo visual b_2 é realizada supondo-se que para cada indivíduo, no qual a aresta selecionada e faça parte de pelo menos uma de suas redes de conexões referentes à seleção definida pelo usuário, associam-se duas séries temporais: uma para cada sensor que é conectado pela aresta e . Para cada uma dessas duas séries temporais é calculado um valor utilizando-se alguma medida específica da área de processamento de sinais, tal como energia, entropia, etc. NE-Motion permite que esta função seja estabelecida na caixa de opções b_3 pelo usuário através da escolha de uma função pertencente a um conjunto de funções. Deste modo, para cada um dos indivíduos é possível associar uma coordenada bidimensional obtida por meio da extração de alguma medida específica de suas séries temporais assumidas nos sensores

conectados por e . Esta coordenada é então apresentada em um gráfico do tipo *scatter plot* como um círculo, colorido na cor verde se este estiver representando um usuário saudável ou colorido na cor vermelha no caso contrário.

O atributo visual b_2 também torna possível a comparação de séries temporais diretamente e sem a utilização de medidas de processamento de sinais. Isto é feito com o uso de técnicas de projeção de elementos através de matrizes de distâncias par-a-par, de forma que elementos distintos sejam projetados mais afastados no plano do que elementos semelhantes. Neste caso, os sensores que definem a aresta e são analisados separadamente. Para isto, o plano de projeção *scatter plot* é seccionado horizontalmente em dois planos disjuntos, sendo cada um deles responsável por representar as séries temporais de cada sensor extraída dos indivíduos nos quais e faça parte de pelo menos uma de suas redes de conexões da seleção considerada. Em detalhes, o atributo b_3 permite o uso de duas das principais técnicas de projeção baseadas em matrizes de distâncias: o método conhecido como *Multidimensional Scaling* (MDS) (YOUNG, 2013) e o método *t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding* (tSNE) (MAATEN; HINTON, 2008). Para cada uma dessas técnicas é possível determinar qual função de distâncias deve ser utilizada no procedimento de projeção. Na Figura 12, é apresentado um exemplo de uso da técnica MDS na qual foi utilizada uma matriz de distâncias entre as séries temporais de cada sensor computada com a distância cosseno.

Figura 12 – Projeção MDS de séries temporais de indivíduos para cada sensor que compõe uma aresta e por meio do atributo visual b_2 . Os retângulos seccionados de cor rosa destacam os sensores que compõem a aresta e o retângulo seccionado azul destaca a função de distâncias utilizada no cômputo da matriz de distâncias par-a-par.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O atributo visual b_4 é especializado na apresentação do comportamento das séries temporais de cada sensor separadamente. Este componente é formado por dois pares de gráficos que apresentam curvas em semi-eixos espelhados, sendo associado um par para cada um dos sensores que definem uma aresta escolhida pelo usuário. Este par é formado pela média das séries temporais dos indivíduos saudáveis que possuem a aresta e em suas redes de conexões, representada na cor verde, e pela média das séries temporais dos indivíduos afetados por AVC, representada na cor vermelha, nos quais a aresta escolhida compõe suas redes de conexões. Além disso, o sistema permite que o usuário determine se as séries temporais devem ser apresentadas com o mesmo número de coordenadas ou de forma que sejam representadas as proporções de

quantidade de tempo médio que os indivíduos de cada classe levam para concluir os exercícios considerados. Vale ressaltar que, para este atributo visual, as séries temporais passam por um processo de *up-sampling* utilizando as bem conhecidas técnicas de interpolação por *spline* (AVERBUCH; NEITTAANMAKI; ZHELUDEV, 2014), de modo que todas as séries possuam a mesma quantidade de coordenadas.

Na Figura 13, os atributos visuais b_1, b_2, b_3 e b_4 , são representados e a funcionalidade de cada um é destacada de forma resumida.

Figura 13 – Indicação da funcionalidade de cada atributo visual disponível no componente *B* de NE-Motion. Todos os recursos visuais coloridos na cor verde são relativos aos indivíduos saudáveis, assim como os recursos de cor vermelha são referentes aos indivíduos afetados por AVC.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.4 Comparações Visuais entre Curvas de Movimento

Para estimar os intervalos que delimitam as séries temporais captadas por cada sensor, é proposto o componente visual *C* da Figura 8. Neste componente são apresentadas estimativas de um intervalo de confiança, definidas por medidas estatísticas de média e desvio padrão de curvas, que representam, para cada grupo de pacientes, o comportamento das respectivas curvas de movimento. Isto é feito levando-se em consideração todos os indivíduos da base de dados (R_6 e R_8) e não apenas indivíduos que apresentem determinada aresta em suas redes de conexões, como

foi o caso do componente *B*. Além disso, as análises são realizadas de forma que as principais diferenças entre as estatísticas de cada condição de pacientes sejam destacadas, sendo que o ferramental permita que sejam visualizadas as particularidades das séries temporais com respeito às condições de maneira isolada. Para este componente visual, as séries temporais também passam por um processo de *up-sampling* utilizando *spline* (AVERBUCH; NEITTAANMAKI; ZHELUDEV, 2014) para que todas possuam a mesma quantidade de coordenadas.

O conjunto de séries temporais considerado neste componente é definido de acordo com a seleção Λ pré-estabelecida. Entretanto, para definir este conjunto é utilizado apenas as informações referentes ao movimento executado e o lado do corpo utilizado. Informações relativas à condição dos pacientes não são necessárias, uma vez que séries temporais de ambas as condições são avaliadas neste componente.

Em detalhes, NE-Motion apresenta em c_1 a curva média das séries temporais de indivíduos de cada uma das condições e uma área de variação determinada pela curva de desvio padrão dos indivíduos da mesma condição. Matematicamente, no caso dos indivíduos afetados por AVC, o ferramental é responsável por apresentar para cada sensor s_k a curva média de todas as séries temporais consideradas na seleção, representada por $\mu_{k,AVC}$ e colorida em vermelho, e delimitada por uma área, colorida em vermelho e com aspecto semi-transparente, definida pelas curvas $\mu_{k,AVC} + \sigma_{k,AVC}$ e $\mu_{k,AVC} - \sigma_{k,AVC}$, sendo $\sigma_{k,AVC}$ a curva que representa o desvio padrão de todas as séries temporais dos indivíduos afetados. No caso dos indivíduos saudáveis, o procedimento é análogo com a ressalva de se utilizar a coloração verde nos componentes visuais. Todas estas curvas são apresentadas no atributo visual c_1 da Figura 8, no qual cada divisão diz respeito a um sensor, desde que este defina pelo menos uma aresta apresentada no componente A.

O componente *C* também é formado por um atributo visual, c_2 , com função de simular um efeito de *zoom* em uma das áreas do atributo c_1 selecionada pelo usuário. Na Figura 14, este atributo é utilizado para visualizar detalhes referentes às curvas captadas pelo sensor “*Thoracic Lateral - RT,deg*”, sendo que este atributo está apresentado juntamente com a esquematização de como são utilizadas as medidas estatísticas extraídas das curvas de movimento de cada grupo de indivíduo.

6.5 Projeções de Pacientes

Nesta seção, são descritos alguns componentes de NE-Motion responsáveis por apresentar projeções dos indivíduos a fim de facilitar a comparação de medidas extraídas a partir das séries temporais ou das redes de conexões associadas aos mesmos (R_7). O sistema visual permite tais comparações por meio de três componentes gráficos: o componente *D*, no qual os indivíduos, tanto saudáveis quanto afetados, são projetados de acordo com medidas estruturais extraídas de suas redes de conexões ou de acordo com características extraídas diretamente de suas

Figura 14 – Apresentação do comportamento estatístico das séries temporais dos indivíduos da seleção estabelecida pelo usuário para o sensor $s_k = s_6 = \text{“Thoracic Lateral - RT,deg”}$. As curvas de cor verde fazem referência aos indivíduos saudáveis e as curvas de cor vermelha fazem referência aos indivíduos afetados por AVC.

Fonte: Elaborada pelo autor.

séries temporais; o componente E , o qual possibilita a projeção de séries temporais apenas de indivíduos saudáveis e facilita a comparação de simetrias presentes nestas séries; e o componente F , exclusivo para análises de indivíduos afetados por AVC, o qual apresenta uma relação, por meio de um *scatter plot*, entre a distância média apresentada pelas séries temporais do indivíduo afetado com respeito às séries dos indivíduos saudáveis e sua respectiva pontuação no protocolo Fugl-Meyer (FM). Sendo os dois últimos componentes anexos à tela principal de NE-Motion. Cada um desses componentes são detalhados na sequência desta seção.

O componente D possibilita que a projeção dos indivíduos seja realizada por meio de três metodologias diferentes:

- **Projeção de medidas extraídas das redes de conexões de cada indivíduo:** Esta primeira metodologia aborda a projeção dos indivíduos com base em propriedades extraídas de suas redes de conexões. Isto é, para cada indivíduo é associado um vetor formado por medidas bem conhecidas da literatura de análise de grafos (NEWMAN, 2004) extraídas de cada rede de conexões. Estas medidas são responsáveis por associar ao grafo de um indivíduo um vetor que apresenta um valor numérico para cada um dos vértices desse grafo, caracterizando, assim, sua representação topológica acerca deste grafo. Desta forma, neste trabalho, as medidas utilizadas associam a cada rede de conexões um vetor no $\mathbb{R}^{N_s}$ que descreve uma característica dos vértices desta rede. Em detalhes, as medidas utilizadas são: medida de grau do nó (OPSAHL; AGNEESSENS; SKVORETZ, 2010); medida de proximidade (BRANDES, 2001); medida de centralidade de auto-vetor (BERKHIN, 2005); e medida de coeficiente de agrupamento local (WATTS; STROGATZ, 1998). Desta forma, para cada paciente, é associado um vetor pertencente ao espaço $\mathbb{R}^{4 \cdot N_s}$. A projeção é então realizada por meio de uma análise de componentes principais (PCA) destes vetores.

- **Projeção das séries temporais dos indivíduos através de PCA:** Esta segunda metodologia consiste na projeção dos indivíduos fazendo-se uso direto de suas séries temporais captadas pelos sensores. Matematicamente, para cada indivíduo, suas séries temporais passam por um processo de *up-sampling* fazendo-se uso de *splines* (AVERBUCH; NEIT-TAANMAKI; ZHELUDEV, 2014) de forma que todas pertençam ao mesmo espaço. Em seguida, as séries de cada sensor, extraídas de um mesmo indivíduo, são unidas de maneira que formem um vetor para este indivíduo. A projeção destes vetores é então realizada por PCA.
- **Projeção de características profundas das séries temporais dos indivíduos:** Nesta metodologia, para analisar as séries temporais de um indivíduo, é proposto que seja feito uso de uma rede neural artificial do tipo Auto-Encoder Convolucional Empilhado, ou *Stacked Convolutional Auto-Encoder* (SCAE) (MASCI *et al.*, 2011). Estas redes neurais são especializadas na extração das bem conhecidas características profundas das séries temporais, as quais são invariantes a translações presentes nos exemplos apresentados e são robustas à presença de ruído. Desta forma, é proposto neste item utilizar um SCAE para descrever as séries temporais dos indivíduos de maneira eficiente. Em detalhes, o SCAE proposto é treinado com todas as séries temporais de $\mathcal{T}$ mapeadas para o mesmo espaço por meio de *up-sampling* com *spline*. Sendo assim, as características profundas das séries temporais de cada indivíduo são extraídas com o SCAE de maneira a definir um vetor. Estes vetores são então projetados no componente D fazendo-se uso da técnica MDS.

Na Figura 15, são apresentados três exemplos de uso do componente D nos quais os métodos de projeção descritos são utilizados. Percebe-se que existem diferenças significativas em cada uma destas projeções as quais são capazes de orientar diferentes análises, como discutido em estudos de caso do Capítulo 7.

Figura 15 – Três diferentes métodos de projeção disponibilizados pelo componente D do sistema visual. As projeções foram realizadas sobre o mesmo domínio de interesse.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o intuito de realizar comparações de indivíduos de mesma condição, são propostos dois componentes anexos à ferramenta NE-Motion que são responsáveis por facilitar a conferência de propriedades que os especialistas acreditam serem intrínsecas aos dados. Estes componentes, são considerados anexos ao ferramental principal apresentado por serem responsáveis por apresentar informações muito específicas acerca do problema abordado e de caráter de confirmação de conhecimento dos especialistas.

Em detalhes, é proposto um componente visual (E) responsável por representar os indivíduos de controle de forma que seja possível avaliar a existência de simetrias entre as séries temporais desses indivíduos no sentido de que sensores especializados em captar movimentos das mesmas regiões localizadas no corpo humano devem mapear sinais corporais que apresentem comportamento semelhante. Por exemplo, os sensores que captam a movimentação dos ombros, tanto esquerdo quanto direito, de um indivíduo devem apresentar séries temporais semelhantes quando este indivíduo efetuar o mesmo movimento com cada um dos lados. Sendo assim, é proposto que as séries temporais extraídas do lado esquerdo de um indivíduo de controle ao realizar um movimento utilizando este lado sejam comparadas com as séries temporais extraídas do lado direito deste mesmo indivíduo de controle ao realizar o mesmo movimento utilizando o lado direito do corpo. Estas séries temporais são comparadas por meio de um SCAE para extração de características profundas. Em detalhes, para cada indivíduo de controle são construídos dois vetores: um referente às características profundas das séries temporais captadas pelos sensores conectados ao lado esquerdo do corpo; e outro referente às características profundas das séries temporais dos sensores do lado direito. Após confeccionar estes dois vetores para todos os pacientes de controle, estes são projetados utilizando-se a técnica MDS.

O segundo componente (F) anexo ao sistema NE-Motion consiste em um aparato visual dedicado à apresentação da relação entre o protocolo FM de um indivíduo afetado e o quão distintas suas séries temporais são com respeito às séries temporais de indivíduos saudáveis. Dessa forma, apenas indivíduos afetados por AVC são avaliados neste componente, uma vez que os peritos possuem interesse em analisar se o uso do lado afetado pelo AVC é diferente do uso do mesmo lado por indivíduos saudáveis na realização dos mesmos movimentos na mesma proporção na qual o protocolo de FM indica severidade no comprometimento da região do corpo pela doença. Em detalhes, o componente em questão é um gráfico do tipo *scatter plot* que relaciona estes valores. Sendo assim, para cada indivíduo $p_i \in \mathcal{P}^{AVC}$, é associado um par de coordenadas $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ tal que x_i seja o valor de protocolo FM fornecido pelos peritos e y_i é um valor que representa a média entre as distâncias que o indivíduo p_i apresenta com respeito aos indivíduos saudáveis da mesma seleção considerada.

Na Figura 16, são apresentados os componentes E e F de NE-Motion responsáveis por facilitar a comparação de propriedades específicas pertencentes aos indivíduos de cada condição.

Figura 16 – Apresentação dos componentes visuais E e F.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.6 Implementação

Foi desenvolvido um protótipo computacional da ferramenta de visualização e análise de conjuntos de redes de conexões NE-Motion. As confecções de todas as redes de conexões foi feita com a utilização do ambiente de programação Python¹. Todas as séries temporais foram armazenadas em um banco de dados utilizando-se um sistema de gerenciamento MySQL². De forma que estas são acessadas pela interface do NE-Motion utilizando-se a linguagem PHP³ e a biblioteca Ajax⁴.

A interface visual de NE-Motion foi programada com uso de javascript⁵ e D3.JS⁶.

As redes de conexões foram estruturadas em um arquivo do tipo JSON para possibilitar sua leitura no javascript.

O ferramental não precisa de nenhum componente físico adicional para seu funcionamento, uma vez que o mesmo é executado plenamente em qualquer computador pessoal e pode ser acessado através do site <http://www.manywebvis.com/>. Os componentes em anexo do

¹ <https://www.python.org/>

² <https://www.mysql.com/>

³ www.php.net

⁴ <https://ajax.googleapis.com/ajax>

⁵ <https://www.javascript.com/>

⁶ <https://d3js.org/>

NE-Motion também podem ser acessados por um site, no caso http://www.manywebvis.com/left_right/.

A interação com o usuário é sempre facilitada por meio de eventos do tipo *Drag'n Drop*. Isto é, todos os componentes visuais de NE-Motion possuem a capacidade de serem arrastados sobre a tela com o uso do mouse, facilitando a visualização e comparação de informações dispostas nestes componentes. Além disso, todos os componentes visuais de NE-Motion podem ser utilizados em conjunto para visualizar padrões interessantes tanto em análises globais, envolvendo vários indivíduos e informações em conjunto, quanto em análises locais, nas quais apenas uma informação em detalhes pode ser averiguada, o que corresponde ao requisito R_{10} .

6.7 Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentada a ferramenta de análise visual NE-Motion. O sistema apresenta componentes visuais que se baseiam em princípios da teoria dos conjuntos para realizar rotinas de contagem e apresentar análises detalhadas sobre as principais relações entre sensores, tais como quem são os indivíduos nos quais suas redes de conexões possuem determinada relação na forma de uma aresta, a ocorrência de uma aresta nas redes de conexões de indivíduos no decorrer dos movimentos, as principais medidas de processamento de sinais que as séries temporais captadas por estes sensores nas redes de conexões destes indivíduos, as curvas médias que representam todas essas séries temporais, etc.

As análises realizadas pelos componentes de NE-Motion são sempre executadas levando-se em consideração uma seleção definida pelo usuário. Esta seleção define uma amostragem de redes de conexões e séries temporais nas quais as análises são efetuadas. Estas seleções são responsáveis pela filtragem de informação apresentada ao usuário do sistema visual desenvolvido.

Foram apresentados componentes que apresentam estatísticas acerca de séries temporais, sendo estas curvas baseadas em média e desvio padrão entre as coordenadas dessas séries. A visualização permite que sejam dispostas no ferramental as informações acerca de sensores que são utilizados pelas redes de conexões resultantes da filtragem realizada com a seleção pré-definida pelo usuário. Além disso, um componente de efeito zoom a essas curvas é utilizado.

Os indivíduos da base de dados podem ser comparados em três diferentes componentes de NE-Motion (D , E e F). Em D , três metodologias diferentes são apresentadas de forma a possibilitar a comparação de indivíduos de ambas as condições. Em E , é facilitada a comparação entre os sinais extraídos de mesmas regiões do corpo humano dispostas em lados opostos de indivíduos de controle. Finalmente, em F , um *scatter plot* descreve a relação existente entre o protocolo de FM de um indivíduo afetado por AVC e o quão diferente este indivíduo é em relação aos saudáveis de acordo com suas séries temporais.

O ferramental proposto alcança os requisitos visuais $R_1 - R_{10}$, uma vez que cada compo-

nente foi confeccionado de acordo com a demanda definida nestes requisitos. No Capítulo 7, são apresentados estudos de casos que auxiliam na validação da metodologia proposta e nos quais considerações são facilitadas com a utilização do sistema NE-Motion.

RESULTADOS E ESTUDO DE CASOS

7.1 Considerações Iniciais

Nos Capítulos 5 e 6, foram detalhados os principais componentes visuais e as respectivas fundamentações que fazem parte do ferramental desenvolvido neste trabalho de doutorado, o qual foi denominado NE-Motion. Neste capítulo, são apresentados alguns estudos de casos estabelecidos para avaliar o funcionamento de NE-Motion. Estas avaliações são definidas com a intenção de identificar o quanto o sistema de visualização desenvolvido viabilizou a realização das tarefas ($T_1 - T_5$) usualmente efetuadas pelos especialistas. Desta forma, estes estudos de casos são caracterizados pela avaliação qualitativa do ferramental proposto a qual é efetuada com a supervisão e interação dos peritos. Também neste capítulo são apresentados em resumo alguns comentários dos peritos que caracterizam suas opiniões a respeito do desempenho do sistema visual proposto.

As avaliações são realizadas com a utilização de um protótipo computacional¹ desenvolvido com as fundamentações que compõem o sistema NE-Motion. Estas avaliações consistem em submeter os peritos a situações que colocam NE-Motion à prova a fim de atestar se o sistema de fato lhes foi útil na solução de problemas que fazem parte de sua rotina.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 7.2, são detalhados oito estudos de caso que têm como principal objetivo avaliar o potencial de apresentação de informações do material proposto; na Seção 7.3, alguns comentários dos especialistas acerca de NE-Motion são sumarizados; na Seção 7.4 é apresentado um apanhado sobre as tarefas e os requisitos determinados pelos especialistas que o método proposto foi capaz de atender; o capítulo é finalizado na Seção 7.6 com algumas considerações do conteúdo abordado.

¹ Disponível no site <<http://www.manywebvis.com>>

7.2 Estudos de caso

Estudos de caso consistem em uma das mais utilizadas estratégias de validação de teorias desenvolvidas orientadas por problema. Praticamente todos os trabalhos revisados na Seção 2.2 fazem uso deste artifício. De modo geral, a técnica de validação fundamenta-se em submeter os peritos que supervisionaram a confecção do sistema de visualização ao uso do mesmo, os quais podem ter a forma de orientação ou questionamento, que modelem o cumprimento de suas tarefas habituais. Neste trabalho, todos os estudos de caso foram estipulados a fim de resolver algum problema apresentado inicialmente pelos especialistas no início do projeto. Com estes testes é possível compreender se houve ou não facilitação na conclusão das atividades realizadas. Desse modo, as avaliações detalhadas na sequência desta seção foram executadas pelos peritos do problema, de forma que apenas a mínima orientação possível foi lhes fornecida no sentido da interação com o sistema de visualização a fim de também ser avaliada a usabilidade da ferramenta de visualização.

Especificamente, em cada estudo de caso, foi sugerido aos peritos um roteiro de atividades em forma de rotinas, as quais foram estipuladas com a intenção de orientar os especialistas na utilização de NE-Motion. Com a execução das rotinas sugeridas, considerações acerca das percepções obtidas com o uso do ferramental são descritas em cada estudo de caso. Em outras palavras, com o uso de NE-Motion, alguns padrões interessantes são apresentados em cada um dos cenários avaliados.

Vale ressaltar que as rotinas apresentadas não foram de nenhuma maneira impostas aos especialistas no decorrer da realização dos estudos de caso. Sendo apenas um componente facultativo de sugestão que, de acordo com a necessidade de cada situação, serve apenas de orientação para os usuários do sistema e que, portanto, os estudos de caso foram concluídos da forma mais espontânea possível pelos peritos.

7.2.1 *Estudo de caso 1: Visualização de grupos de redes específicas.*

Nesta primeira situação, o principal intuito da atividade estabelecida é avaliar o potencial de sumarização e filtragem de informações providenciados por NE-Motion, de forma que os especialistas sejam capazes de, por meio de poucos comandos, visualizar informações a respeito de diferentes subconjuntos de redes de conexões. Para isso, as seguintes rotinas foram definidas de maneira que os peritos as realizassem e indicassem o grau de dificuldade em suas respectivas interações, assim como percepções que o ferramental disponibilizou:

- **Rotina 1:** Destacar a rede de conexões que representa a união de todas as redes de conexões dos indivíduos afetados por AVC no lado esquerdo do corpo ao realizar o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0”;

- **Rotina 2:** Realizar o mesmo considerando-se apenas indivíduos saudáveis;
- **Rotina 3:** Repetir as duas rotinas anteriores considerando-se o lado direito;
- **Rotina 4:** Analisar nas redes de conexões geradas nas rotinas anteriores apenas as ligações entre os sensores responsáveis por mapear as atividades dos músculos supinadores, os quais recebem os códigos “Wrist Supinator LT,deg” no pulso esquerdo e “Wrist Supinator RT,deg” no pulso direito.

A configuração e a interação com NE-Motion se dá por meio do estabelecimento de quais grupos de indivíduos devem ser considerados na apresentação de suas respectivas redes de conexões. Isto é definido através das caixas de opções apresentadas no Capítulo 6 e que compõem o sistema visual NE-Motion. Estas configurações são facilmente alteradas por meio de poucos cliques com o mouse, como ilustrado na Figura 17. O grafo resultante da seleção estipulada é apresentado automaticamente após as filtragens serem definidas.

Figura 17 – Alterações de configurações para realização das rotinas impostas.

(a) Determinação da condição dos indivíduos.

(b) Determinação do lado utilizado para realizar o movimento.

(c) Determinação do movimento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como resultado das Rotinas 1 e 2, NE-Motion apresenta as redes de conexões dispostas na Figura 18. Como apenas os sensores do lado esquerdo do corpo são empregados, as redes são geradas de modo que nenhuma aresta aparece conectando os sensores do lado direito, o que é uma indicação do bom funcionamento da modelagem matemática proposta. Analogamente, na

Figura 19 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado direito do corpo.

(a) Rede de conexões dos indivíduos afetados por AVC.

(b) Rede de conexões dos indivíduos de controle.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Esquematisação do movimento analisado. O ângulo θ define a abertura ($\theta > 0^\circ$) ou fechamento ($\theta < 0^\circ$) determinado pelo pulso no exercício.

Fonte: Adaptada de Gebai (2016).

sensores do músculo supinador apresentam ligação com todos os outros sensores referentes ao lado utilizado no exercício realizado enquanto que, no grupo de redes dos indivíduos afetados por AVC, apresentado nas Figuras 21-(a) e 22-(a), existem sensores, destacados por retângulos amarelos, que não estão correlacionados com o sensor avaliado. Isto acontece devido ao fato de que os padrões de sincronização muscular dos indivíduos saudáveis apresentam diferenças consideráveis com relação aos indivíduos afetados e este fato se faz perceptível na análise deste sensor.

Figura 21 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado esquerdo do corpo e destacando-se as conexões nas quais o sensor “Wrist Supinator LT,deg” faz parte.

(a) Rede de conexões dos indivíduos afetados por AVC. Os retângulos amarelos, artificiais à ferramenta, indicam ausência de conexão entre o sensor avaliado e o sensor destacado.

(b) Rede de conexões dos indivíduos de controle.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.2 Estudo de caso 2: Análise de um indivíduo isolado.

O intuito principal neste estudo de caso é avaliar a capacidade de NE-Motion de apresentar informações de um único indivíduo isoladamente, tais como as redes de conexões confeccionadas para este indivíduo na realização dos exercícios, suas curvas de movimento e

Figura 22 – Redes de conexões para o movimento “wristFlexionExtensionElbowAt0” utilizando-se o lado direito do corpo e destacando-se as conexões nas quais o sensor “Wrist Supinator RT,deg” faz parte.

(a) Rede de conexões dos indivíduos afetados por AVC. Os retângulos amarelos, artificiais à ferramenta, indicam ausência de conexão entre o sensor avaliado e o sensor destacado.

(b) Rede de conexões dos indivíduos de controle.

Fonte: Elaborada pelo autor.

realizar comparações com os demais pacientes. Para tal, foram estabelecidas para este cenário as seguintes rotinas que os especialistas utilizaram como orientação em suas observações:

- **Rotina 1:** Fixar um indivíduo para avaliar isoladamente;
- **Rotina 2:** Destacar e analisar a rede de conexões confeccionada para este indivíduo na realização de um movimento específico;
- **Rotina 3:** Comparar o paciente fixado com os demais por meio de projeções realizadas utilizando-se suas curvas de movimento;
- **Rotina 4:** Avaliar as curvas de movimento deste indivíduo;
- **Rotina 5:** Executar as rotinas anteriores em outro movimento.

Para concluir a primeira rotina, foi selecionado o indivíduo afetado por AVC no lado esquerdo do corpo e cujo código no sistema é “stroke_10”. Este paciente se encontra em estágio intermediário de recuperação, de forma que ele é capaz de realizar com sucesso alguns movimentos enquanto que sua performance em outros exercícios ainda não é satisfatória. Sendo assim, este é um indivíduo que pode apresentar ações compensatórias na execução destes exercícios, as quais devem ser destacadas por meio de NE-Motion.

O indivíduo selecionado é representado por um ponto que sofre uma alternância de coloração em um curto período de tempo, o que simula um efeito de “piscar”. Isto é um artifício muito útil para auxiliar a detecção do posicionamento deste paciente nos componentes de projeções e o acompanhamento das atualizações em cada alternância de configuração de movimento.

O sistema foi utilizado para orientar as avaliações sobre o indivíduo selecionado considerando-se o movimento *flexor synergy*, o qual corresponde, aproximadamente, à movimentação realizada com a extremidade superior do corpo humano para se atender um telefone. Este é um movimento no qual os indivíduos costumam apresentar muita dificuldade em sua realização e, portanto, a maioria dos pacientes o executa apenas de maneira parcial.

Na Figura 23, constam as informações apresentadas por NE-Motion na conclusão de todas as rotinas estipuladas e a utilização de cada um dos componentes **C1-C6** é detalhada na sequência.

Figura 23 – Análise do movimento “flexorSynergy” do indivíduo de índice 10, o qual foi afetado por AVC no lado esquerdo do corpo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A ligação representada pela aresta em cinza e assinalada como **C1** na figura 23, que ocorre entre os sensores instalados na região lombar, não deveria estar presente em uma execução ideal do movimento, uma vez que esta região não deve ser utilizada de maneira acentuada para concluir o movimento. Desta forma, selecionando a aresta em questão para saber mais a respeito dela, o que acarreta na apresentação da janela de informações, discutida no Capítulo 6, apresentada à esquerda na figura 23.

A diferença entre as áreas das curvas médias de movimento dos indivíduos afetados e dos indivíduos de controle, indicada como **C2** na figura, chama a atenção. A área da curva vermelha, correspondente aos indivíduos afetados, é visivelmente maior que a área da curva verde, correspondente aos indivíduos sadios. Além disso, como o valor médio das curvas da maioria dos indivíduos apresentados na projeção *scatter plot* (**C3**) é inferior a 5 no eixo y e a 10 no eixo x , fica claro que a anormalidade está representando o comportamento do indivíduo selecionado, o qual está destacado no centro do círculo amarelo seccionado.

A terceira rotina envolve a componente de projeção de características presentes nas curvas de movimento (**C4**). A projeção evidencia que as curvas de movimento do indivíduo avaliado, destacado pelo círculo amarelo seccionado, são muito distintas das curvas de movimento dos demais indivíduos, uma vez que sua respectiva projeção está representada de maneira isolada no gráfico, o que configura, assim como no componente **C3**, um comportamento de *outlier*. Este comportamento se dá principalmente pelo uso disforme da lombar na execução do movimento como ação compensatória, como pode ser observado no componente **C5**, na região destacada pelo retângulo seccionado azul. Especificamente, no componente **C6**, é destacado em detalhes a série temporal do sensor que descreve a angulação da lateral esquerda da lombar do paciente avaliado na execução do movimento. Com a ajuda deste componente, é possível observar que as séries temporais dos indivíduos de controle são aproximadamente constantes e limitadas ao intervalo $[-10^\circ, 10^\circ]$ e algo semelhante é válido para os pacientes afetados. Entretanto, a série temporal do paciente avaliado alcança valores próximos de -90° , o que configura uma acentuada ação compensatória na realização do exercício.

Na realização da última rotina, repete-se as análises das rotinas anteriores mas fixando outros movimentos. A análise resultante deixa claro que o indivíduo avaliado demonstra um comportamento semelhante em outros movimentos também. Na Figura 24, por exemplo, pode-se visualizar que, ao executar o movimento “*pronationSupinationElbowAt90*”, o indivíduo “*stroke_10*” também configura um comportamento distinto dos demais e apresenta ações compensatórias através do uso indevido das regiões lombares e torácicas, como destacado na região do retângulo seccionado azul.

Figura 24 – Análise do movimento “pronationSupinationElbowAt90” do indivíduo de índice 10, o qual foi afetado por AVC no lado esquerdo do corpo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.3 Estudo de caso 3: Análise de coerência entre as principais conexões entre sensores.

O objetivo neste cenário é avaliar detalhes presentes nas ligações mais recorrentes entre sensores por meio da janela informativa de NE-Motion e averiguar se o material teórico de ABG utilizado está funcionando adequadamente. É neste estudo de caso que são apresentadas no sistema de visualização medidas de processamento de sinais das séries temporais captadas pelos sensores que definem uma conexão. Além disso, comparações por meio de projeções (MDS) também são disponibilizadas para os especialistas. Para isto, as seguintes rotinas são sugeridas para orientar os peritos na utilização do ferramental:

- **Rotina 1:** Analisar a aresta mais frequente nas redes de conexões construídas para todos os movimentos realizados utilizando-se o lado direito;
- **Rotina 2:** Utilizar a opção “*Proportional*” para visualizar qual grupo de pacientes demora mais para concluir o exercício;
- **Rotina 3:** Comparar os indivíduos por meio de projeções;
- **Rotina 4:** Conferir se existe elevada correlação na aresta mais recorrente de cada movimento considerado de maneira isolada;

- **Rotina 5:** Avaliar as projeções MDS dos indivíduos nas conexões mais recorrentes de cada movimento considerado de maneira isolada.

Como resultado da primeira rotina, foi dado destaque à conexão estabelecida pelos sensores “Shoulder Abduction RT, deg” e “Shoulder Flexion RT, deg”, a qual é a mais recorrente considerando-se todos os movimentos realizados utilizando-se o lado direito do corpo. Na Figura 25, pode-se observar detalhes desta conexão por meio da janela informativa, ou *pop-up box*. Os sensores da conexão analisada são responsáveis por captar ações do ombro direito, sendo assim, faz sentido que a mesma seja mais frequente em movimentos nos quais o ombro seja um agente principal. De fato, é exatamente isto que se visualiza no componente, uma vez que a conexão analisada é mais recorrente nos movimentos “Shoulder Flexion to 90°”, “Shoulder Abduction to 90°” e “Shoulder Flexion 90° to 180°”, os quais são movimentos de flexão e abdução do ombro. Além disso, é notável que indivíduos afetados concentram-se no quadrante inferior esquerdo da projeção *scatter plot*, o que significa que suas curvas de movimento apresentam valores de energia inferiores aos valores apresentados pelos indivíduos de controle, os quais se concentram no quadrante superior direito do mesmo gráfico. Também é visível que indivíduos afetados que ocupam o quadrante superior direito são indivíduos que apresentam recuperação avançada, tendo obtido pelo menos 75% da pontuação máxima do protocolo Fugl-Meyer (FM). Desta forma, a energia das curvas de movimento captadas pelos sensores da conexão em questão possui potencial para discriminar o comportamento dos indivíduos de cada grupo.

Figura 25 – Detalhes sobre a conexão entre os sensores “Shoulder Abduction RT, deg” e “Shoulder Flexion RT, deg”. As linhas seccionadas azuis separam os quadrantes da projeção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 26, é possível visualizar o resultado da segunda e da terceira rotina. Ativando a opção “Proportional”, pode-se observar que os indivíduos de controle levam, em média, apenas 60% do tempo utilizado pelos indivíduos afetados para concluir os movimentos. Além disso, a projeção MDS com distância cosseno deixa claro que, por mais que esta seja a ligação mais comum entre todos os indivíduos, o movimento captado pelos sensores referente aos indivíduos

de cada classe é consideravelmente distinto, dada a capacidade de segregação que o método apresenta.

Figura 26 – Detalhes sobre a conexão entre os sensores “Shoulder Abduction RT, deg” e “Shoulder Flexion RT, deg”: projeção dos indivíduos por MDS e tempo médio necessário para execução dos movimentos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A quarta rotina consiste na avaliação da principal conexão (top 1) de cada movimento e visualizar as correlações apresentadas pelas séries temporais captadas pelos sensores que a definem. Na Figura 27, são apresentados alguns exemplos. É possível observar que as curvas médias apresentadas estão muito correlacionadas positiva ou negativamente, o que corrobora para a confirmação do bom funcionamento do método e garante a coerência de cada conexão.

Semelhante à quarta rotina, a última rotina consiste em analisar as projeções MDS dos indivíduos que possuam a conexão avaliada em suas redes de conexões. Como detalhado no Capítulo 6, as projeções levam em consideração as séries temporais dos indivíduos captadas pelos sensores que definem a conexão. Na Figura 28, é possível perceber que, nas principais conexões de cada movimento os indivíduos afetados apresentam séries temporais muito distintas daquelas captadas de indivíduos de controle, uma vez que a formação de grupos é consideravelmente acentuada em cada uma das projeções.

7.2.4 Estudo de caso 4: Uso de filtragem especial e ordenação em arestas.

Para este caso de estudo foram definidas rotinas que orientassem a realização de estudos sobre conjuntos de arestas que fossem detentoras de características específicas, tais como serem exclusivas às redes de conexões de indivíduos afetados por AVC ou às redes de indivíduos de controle. Além disso, neste estudo de caso, os peritos avaliaram a capacidade do sistema visual

Figura 27 – Correlações entre os sensores que definem as conexões mais frequentes em cada movimento considerado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

apresentar informações relativas a ordenações, destacando arestas que fossem mais comuns às redes de determinados grupos de pacientes. Para isso, as rotinas estabelecidas são as seguintes:

- **Rotina 1:** Selecionar um movimento;
- **Rotina 2:** Realizar a filtragem especial de arestas exclusivas a uma determinada condição, a qual no sistema recebe o nome de “*Difference*”;
- **Rotina 3:** Analisar as arestas que estão presentes na maior quantidade (*Top 1*) de redes de conexões confeccionadas para o movimento selecionado;
- **Rotina 4:** Realizar a filtragem que considera apenas as arestas existentes em grafos de indivíduos saudáveis e de indivíduos afetados por AVC, a qual é intitulada “*Similarity*” no sistema visual e refazer a rotina anterior para este caso.

Com respeito à primeira rotina, foi destacado o movimento “*Shoulder Flexion to 90°*”, o qual consiste no exercício de elevar o braço até que este esteja paralelo ao chão.

Como resultado da segunda e da terceira rotina, NE-Motion apresenta a configuração disposta na Figura 29. Neste caso, são apresentadas aos usuários a aresta mais recorrente nas redes de conexões dos indivíduos saudáveis e que não existem em nenhuma rede de conexões de indivíduos afetados, colorida em verde, e a aresta mais recorrente nas redes de conexões dos indivíduos afetados por AVC e que não existe em nenhuma rede de conexões de indivíduos de

Figura 28 – Projeções MDS das séries temporais captadas pelos sensores que definem as conexões mais frequentes em cada movimento considerado. Cada círculo representa um indivíduo que possui a conexão em sua rede de conexões.

Fonte: Elaborada pelo autor.

controle. De forma que todas as redes de conexões consideradas são aquelas confeccionadas para os indivíduos ao executarem o movimento “*Shoulder Flexion to 90°*”.

Na Figura 30, é possível visualizar detalhes da conexão exclusiva a indivíduos saudáveis por meio de uma janela informativa (*pop-up box*). Esta conexão é formada pela aresta que liga os sensores “*Wrist Supination LT, deg*”, responsável por descrever a angulação realizada pelo pulso esquerdo no sentido horário durante a execução do movimento, e “*Shoulder Flexion LT, deg*”, responsável por descrever o ângulo formado entre o ombro esquerdo e o chão durante a execução do movimento. Esta ligação ocorre devido à correlação entre estes dois sensores em indivíduos de controle. Além disso, tem-se como significado desta correlação que indivíduos saudáveis costumam rotacionar o pulso ao flexionar o ombro esquerdo. Em contrapartida, como esta aresta é inexistente a indivíduos afetados por AVC, fica claro que não há nenhuma sincronia entre a rotação horária realizada pelo pulso esquerdo e o ombro esquerdo durante a execução do movimento por estes pacientes. Isto ocorre pelo fato de que os indivíduos com algum nível de paralisia no braço movimentam de forma irregular o pulso enquanto flexionam o ombro, possivelmente como tentativa de facilitar a execução do movimento.

Do mesmo modo, a janela informativa apresentada na Figura 31 destaca alguns detalhes acerca da conexão exclusiva a indivíduos afetados por AVC ao executarem o movimento em questão, a qual é formada pelos sensores “*Wrist Supination LT, deg*”, já descrito nesta seção, e “*Elbow Flexion LT, deg*”, que descreve o ângulo de fechamento do cotovelo, ou seja, o ângulo

Figura 29 – Arestas exclusivas a pacientes de determinada condição que são mais frequentes na realização do movimento “sholderFlexionTo90” com o lado esquerdo do corpo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Detalhamento da aresta exclusiva a indivíduos saudáveis por meio da *pop-up box*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

entre o antebraço e o braço. Esta correlação, de fato, somente poderia existir em indivíduos afetados, uma vez que para concluir o movimento em questão não é permitido que haja nenhuma flexão do cotovelo. Entretanto, fica claro que as curvas de movimento captadas pelos sensores da conexão avaliada possuem elevada correlação, como é o caso do indivíduo de índice 8 destacado na imagem e cujas curvas estão coloridas na cor preta. Desta forma, os indivíduos afetados que possuem esta conexão rotacionam o pulso no sentido horário e flexionam o cotovelo para executar o exercício selecionado, configurando assim, ações compensatórias.

Figura 31 – Detalhamento da aresta exclusiva a indivíduos afetados por meio da *pop-up box*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As duas últimas rotinas consistem em avaliar a aresta mais recorrente que pertença às redes de conexões de indivíduos de ambas as condições. Esta conexão se dá entre os sensores “*Shoulder Flexion LT, deg*”, já descrito nesta seção, e “*Thoracic Flexion, deg*”, o qual descreve o ângulo de fechamento (flexão) apresentado na lombar. A janela informativa com detalhes desta conexão está apresentada na Figura 32. No componente *scatter plot*, os indivíduos estão projetados de acordo com os respectivos valores médios das curvas de movimento captadas pelos sensores da conexão em questão durante a execução do movimento. Sendo assim, pode-se observar que o valor médio captado pelo sensor “*Shoulder Flexion LT, deg*” é geralmente maior para indivíduos saudáveis, uma vez que estes se concentram à direita do gráfico, o que significa que estes indivíduos conseguem flexionar o ombro a ângulos superiores comparados aos indivíduos afetados que possuam esta conexão. Desta forma, esta aresta é comum a indivíduos de ambas as condições, entretanto existem diferenças acentuadas na execução do movimento por estes indivíduos.

Figura 32 – Detalhamento da aresta mais frequente que seja comum a pacientes de ambas as condições considerando-se o movimento “Shoulder Flexion to 90°” por meio da *pop-up box*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.5 Estudo de caso 5: Presença de simetrias nas redes de conexões.

É esperado que haja padrões de conexões semelhantes entre os sensores que captam as movimentações do lado esquerdo e os sensores que captam as movimentações do lado direito do corpo. Em outras palavras, as sincronizações que ocorrem entre seções do lado esquerdo do corpo, tais como pulso e cotovelo, ao realizar um exercício também devem ocorrer no lado direito ao se realizar o mesmo exercício. Este tipo de simetria deve ocorrer principalmente entre as conexões mais recorrentes em cada um dos movimentos. Esta suposição é levantada pelos peritos como forma de avaliar o bom funcionamento do ferramental desenvolvido. Sendo assim, as seguintes rotinas foram propostas para a utilização de NE-Motion:

- **Rotina 1:** Avaliar as arestas mais recorrentes nas redes de conexões dos indivíduos considerando-se todos os movimentos de maneira conjunta realizados com o lado esquerdo do corpo;
- **Rotina 2:** Repetir a rotina anterior considerando-se o lado direito;
- **Rotina 3:** Realizar o mesmo procedimento considerando-se apenas os indivíduos saudáveis e, em seguida, considerando-se apenas os indivíduos afetados por AVC;
- **Rotina 4:** Repetir as rotinas anteriores para todos os movimentos isoladamente;
- **Rotina 5:** Avaliar a simetria entre os lados dos indivíduos de controle na projeção do componente anexo à NE-Motion.

Na Figura 33, pode-se observar os resultados das duas primeiras rotinas. Conexões entre sensores correspondentes estão destacadas em retângulos seccionados de mesma coloração. Por exemplo, destacada com um retângulo amarelo seccionado em (a) está a conexão entre os sensores “*Wrist Extension LT, deg*” e “*Wrist Radial LT, deg*” e, em (b), a conexão correspondente ao lado direito do corpo, destacada também com um retângulo amarelo seccionado, é definida pelos sensores “*Wrist Extension RT, deg*” e “*Wrist Radial RT, deg*”. Desta forma, as três conexões mais recorrentes em cada um dos lados do corpo, considerando-se todos os movimentos de uma só vez, são correspondentes, o que sugere a existência de simetria entre as conexões em cada lado do corpo. Além disso, com a execução da terceira rotina, observou-se que as três conexões mais recorrentes dos indivíduos saudáveis são exatamente as mesmas apresentadas na Figura 33. Entretanto, isto não ocorre quando considerado apenas os indivíduos afetados por AVC. Este fenômeno pode ser explicado pela ausência de um padrão bem definido entre as movimentações realizadas pelos indivíduos afetados por AVC, uma vez que cada indivíduo desenvolve ações compensatórias próprias para executar os exercícios e estas ações ocorrem de maneira distinta em cada um dos lados do corpo.

Figura 33 – Visualização das três arestas mais recorrentes (top 3) em todas as redes de conexões considerando-se todas as condições e todos os movimentos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a conclusão da quarta rotina, fica clara a ausência de simetria entre as redes de conexões dos indivíduos afetados por AVC, enquanto que, nos grafos de indivíduos de controle, a simetria está sempre presente nas principais conexões. Este fato confirma que os movimentos realizados pelos indivíduos afetados são muito irregulares e diferentes de acordo com o lado do corpo considerado. Nas Figuras 34, 35 e 36, são apresentados alguns exemplos nos quais este fenômeno ocorre.

A última rotina diz respeito à presença de simetria nas curvas de movimentos dos indivíduos de **controle**. Como detalhado no Capítulo 6, o auto-encoder extrai as características

Figura 34 – Duas arestas mais frequentes nas redes de conexões considerando-se o movimento “Extensor Synergy”.

Fonte: Elaborada pelo autor.

profundas das séries temporais dos indivíduos de controle e considera apenas os sensores relativos à mesma região do corpo e de forma correspondente na construção da projeção. Na Figura 37, são apresentados alguns exemplos desta projeção considerando-se três movimentos distintos. As características profundas das séries temporais relativas ao lado direito do corpo estão representadas por círculos amarelos e relativas ao lado esquerdo estão representadas por círculos roxos. Fica evidente que, mesmo que as curvas sejam de indivíduos de controle, as características profundas delas são bem mais semelhantes considerando-se o mesmo lado utilizado do que os indivíduos em si. Desta forma, de acordo com a projeção avaliada, as séries temporais de ambos os lados do mesmo indivíduo são, geralmente, mais distintas do que as séries temporais do mesmo lado de diferentes indivíduos. Isto não significa que não há simetria entre os lados do corpo dos indivíduos de controle, mas sim que, mesmo em indivíduos saudáveis, as ações realizadas para concluir os exercícios estudados são executadas de maneira diferente em cada lado do corpo.

Figura 35 – Aresta mais frequente nas redes de conexões considerando-se o movimento “*Pronation Supination Elbow At 0°*”. As redes à esquerda são referentes ao lado esquerdo do corpo e as redes à direita ao lado direito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.6 Estudo de caso 6: Existem diferenças estruturais entre as redes de conexões de indivíduos saudáveis e afetados por AVC?

Os estudos de caso discutidos nas Seções 7.2.1 e 7.2.5 sugerem que existem diferenças perceptíveis entre as redes de conexões de indivíduos saudáveis e as redes de conexões de indivíduos afetados por AVC. Sendo assim, o estudo de caso apresentado nesta seção tem como principal objetivo confirmar a presença de diferenças estruturais nas redes de conexões dos indivíduos de cada condição. Para isso, é feito uso da projeção através da análise de componentes principais (PCA) de medidas estruturais extraídas das redes de conexões, tais como grau do nó, coeficiente de agrupamento, etc. O procedimento para construir esta projeção é apresentado no Capítulo 6. Desta forma, este estudo de caso é composto de apenas uma rotina: avaliar as projeções de medidas estruturais das redes de conexões em alguns movimentos selecionados.

Na Figura 38, são apresentadas as projeções de alguns movimentos avaliados. Em detalhes, na Figura 38a as medidas estruturais das redes de conexões estão projetadas levando-se em consideração o movimento “*Hand To Lumbar Spine*” executado com o lado direito. Neste caso, existe uma segregação definida na projeção, destacada com a linha azul, o que indica uma acentuada diferença entre as estruturas das redes de conexões. Na Figura 38b, esta segregação

Figura 36 – Aresta mais frequente nas redes de conexões considerando-se o movimento “*Wrist Stability Elbow At 0°*”. As redes à esquerda são referentes ao lado esquerdo do corpo e as redes à direita ao lado direito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Projeção com Autoencoder e MDS das curvas de movimento dos indivíduos de controle. As curvas referentes ao lado direito estão coloridas de amarelo e as referentes ao lado esquerdo estão coloridas de roxo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

não está tão bem definida, entretanto, destacado com o círculo seccionado azul está o grupo com a maior quantidade de indivíduos saudáveis unidos aos indivíduos com AVC que concluíram o exercício “*Shoulder Flexion To 90°*” com sucesso, obtendo valor máximo de pontuação no protocolo FM. Além disso, destacados com o círculo seccionado amarelo, estão os indivíduos que obtiveram a menor pontuação durante a execução do exercício. Isto sugere que as redes de conexões dos indivíduos afetados por AVC que se recuperaram o suficiente para concluir o exercício possuem estruturação semelhante à estruturação das redes de conexões dos indivíduos saudáveis, enquanto que os indivíduos que apresentam a pior performance são associados às

redes de conexões com estruturação mais distinta e, por este motivo, estão afastados dos demais indivíduos na projeção.

Sendo assim, este estudo de caso reforça a existência da diferença estrutural entre as redes de conexões de indivíduos de cada condição. Isto indica que as conexões entre cada sensor se dão de maneira diferente nos indivíduos afetados por AVC e nos indivíduos de controle.

Figura 38 – Projeção das estruturas das redes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.7 Estudo de caso 7: Existem diferenças significativas entre as curvas de movimento de indivíduos saudáveis e afetados por AVC?

O principal intuito neste estudo de caso é avaliar a capacidade de NE-Motion em destacar diferenças visuais entre as curvas de movimento captadas pelos sensores. Além disso, avaliar a capacidade de permitir a análise de todos os indivíduos de maneira conjunta, fazendo com que a tarefa de comparar as curvas de movimento de cada paciente seja concluída de forma natural e simplificada pelos peritos. Desta forma, com este cenário de testes, espera-se visualizar padrões distintos presentes em cada grupo de pacientes, uma vez que seus movimentos são executados de maneira distinta.

Sendo assim, as seguintes rotinas foram sugeridas para obtenção da resposta deste cenário:

- **Rotina 1:** Selecionar um movimento específico;
- **Rotina 2:** Analisar uma projeção das curvas de movimento dos indivíduos para o exercício selecionado;
- **Rotina 3:** Analisar as curvas de movimento em sua forma espúria;

- **Rotina 4:** Repetir as rotinas anteriores para outros movimentos.

O movimento selecionado para avaliação foi o movimento “*Shoulder Flexion To 90°*” executado com o lado esquerdo do corpo, o que conclui a primeira rotina. Para este movimento, existem três possíveis pontuações no protocolo FM: 0, que significa que o indivíduo não foi capaz de realizar o movimento nem mesmo de maneira parcial; 1, indicando execução parcial do exercício; e 2, associado aos indivíduos que realizam satisfatoriamente o exercício.

Para a segunda rotina, foi analisada a projeção PCA das curvas de movimento dos indivíduos. Na Figura 39, pode-se observar que sete agrupamentos estão bem definidos na projeção: *G1 – G7*. De forma que os indivíduos de cada um desses grupos possuem padrões singulares em suas curvas de movimento.

Figura 39 – Projeção PCA das curvas de movimento associadas a cada indivíduo na execução do movimento “*Shoulder Flexion To 90°*” executado com o lado esquerdo do corpo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em detalhes, com a conclusão da terceira rotina, é possível visualizar as curvas de movimento de alguns membros dos grupos *G1*, *G2*, *G3*, *G4*, *G5* e *G7* na Figura 40. Desta forma, nota-se que as curvas captadas pelo sensor “*Shoulder Abduction LT, deg*”, destacadas pelo retângulo azul, são as principais responsáveis pela formação dos agrupamentos na projeção.

Com o auxílio do componente de função zoom de NE-Motion, apresentado na Figura 41, pode-se observar detalhes das curvas de movimento de alguns indivíduos dos agrupamentos formados na projeção e associar para cada um desses agrupamentos um comportamento distinto:

- *G1*: A curva é constante, de forma que o sensor não captou nenhuma movimentação durante a execução do exercício. Isto ocorre devido ao fato de que o paciente caracterizado por este agrupamento não foi capaz de iniciar o movimento;

Figura 40 – Séries temporais espúrias de indivíduos dos grupos G1, G2, G3, G4, G5 e G7.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- G2: A curva é aproximadamente constante. Neste agrupamento houve tentativa de realização do movimento, mas nenhum indivíduo foi capaz de executar o exercício nem mesmo parcialmente;
- G3: A curva apresenta um comportamento ligeiramente decrescente. Isto decorre do fato de que estes pacientes concluíram o exercício de maneira parcial;
- G4: A curva apresenta um comportamento decrescente com ação acentuada no final do exercício. Este é o comportamento considerado ideal, por esta razão existem tanto indivíduos recuperados com pontuação máxima no protocolo FM quanto indivíduos de controle neste grupo;
- G5: A curva apresenta comportamento crescente com ação acentuada no final. Este indivíduo de controle é o único paciente que apresenta este comportamento, provavelmente por esta razão ele foi projetado isoladamente dos outros pacientes do gráfico;
- G6: A curva apresenta um comportamento decrescente seguido de uma ação crescente e abrupta sendo finalizada com um comportamento decrescente. Este comportamento pode ser uma anomalia decorrente da coleta de dados, o que pode representar um fenômeno de presença de artefato. Entretanto, isto ocorre em indivíduos saudáveis e afetados que se recuperaram e o ferramental proposto foi capaz de detectar e representar este padrão ruidoso;
- G7: Este grupo de apenas um indivíduo apresenta o mesmo padrão do grupo anterior. Entretanto as séries temporais que definem o uso do seu tórax e de sua região lombar, como apresentado nas cinco últimas áreas referentes a este indivíduo na Figura 40, destacam o uso irregular destas regiões na conclusão do exercício por este paciente, tornando o indivíduo em questão um *outlier* na projeção.

Figura 41 – Detalhes das séries temporais captadas pelo sensor “*Shoulder Abduction LT, deg*” em indivíduos dos agrupamentos G1 a G7.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, não apenas as curvas de movimento dos indivíduos afetados possuem diferenças significativas das curvas de movimentos dos indivíduos saudáveis, mas também as curvas de indivíduos de mesma condição podem apresentar padrões distintos considerando-se um mesmo exercício.

Realizando a última rotina, foi dado destaque ao movimento “*Extensor Synergy*” executado com o lado direito do corpo. Este movimento é um exercício no qual o comportamento dos indivíduos afetados não difere muito do comportamento dos indivíduos saudáveis, uma vez que as ações compensatórias são difíceis de se detectar. Desta forma, a projeção PCA não foi capaz de segregar de maneira satisfatória os grupos de indivíduos. Entretanto, a projeção MDS das características profundas extraídas das curvas de movimento pelo auto-encoder foi capaz de diferenciar adequadamente as curvas dos indivíduos de cada grupo, como pode ser observado na Figura 42. Além disso, nesta projeção, os indivíduos com menor pontuação no protocolo FM, destacados no círculo preto, foram dispostos proximamente. Fato que não ocorre na projeção PCA, pois os mesmos indivíduos, destacados com círculos pretos, se encontram distantes no gráfico.

Durante a conclusão da última rotina, os peritos visualizaram padrões estatísticos muito distintos nas curvas de movimento dos indivíduos de cada condição, como apresentado na Figura 43.

Figura 42 – Projeção MDS com uso de auto-encoder, à esquerda, e projeção PCA, à direita, das curvas de movimentos dos indivíduos ao executarem o movimento “*Extensor Synergy*” com o lado direito do corpo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em detalhes, na Figura 43a, a média e o intervalo de confiança, confeccionado com base no desvio padrão, das coordenadas das curvas dos indivíduos saudáveis, coloridas em verde, são menores do que estes valores, coloridos em vermelho, extraídos das curvas referentes aos indivíduos afetados por AVC. Isto significa que, para rotacionar o pulso esquerdo, o qual é o movimento em questão, os indivíduos afetados flexionam o cotovelo com maior intensidade do que os indivíduos saudáveis, uma vez que o valor captado pelo sensor “*Elbow Flexion LT, deg*” corresponde ao ângulo de flexão do cotovelo esquerdo. Estas informações comprovam que, estatisticamente, os indivíduos afetados por AVC utilizam de maneira acentuada o cotovelo como ação compensatória na realização do exercício. Na Figura 43b, ao analisar este mesmo sensor correspondente ao lado direito do corpo na realização do movimento “*Pronation Supination Elbow At 90°*”, o qual consiste na rotação do antebraço mantendo-se o cotovelo flexionado a 90°, percebe-se que a flexão do cotovelo se altera de maneira mais acentuada nos indivíduos saudáveis do que nos indivíduos afetados por AVC. Isto pode indicar a presença de rigidez em indivíduos afetados na execução deste exercício. De maneira semelhante, pode-se visualizar nas Figuras 43c e 43d que o ângulo de flexão dos ombros, captados pelos sensores “*shoulderFlexion LT, deg*” e “*shoulderFlexion RT, deg*”, apresenta valores superiores nos movimentos “*Wrist Stability Elbow At 0°*” e “*Pronation Supination Elbow At 90°*”, respectivamente.

Desta forma, é possível concluir que as curvas de movimento dos indivíduos afetados diferem significativamente das curvas de movimento dos indivíduos saudáveis.

Figura 43 – Padrões estatísticos nas séries temporais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7.2.8 Estudo de caso 8: Há correlação entre protocolo de Fugl-Meyer de um indivíduo afetado por AVC e a sua respectiva distância média a indivíduos saudáveis?

Este estudo de caso consiste em um cenário muito simples, o qual é definido pela utilização direta do componente anexo à ferramenta NE-Motion responsável por apresentar a relação entre a pontuação de um paciente afetado por AVC no protocolo FM e a distância média entre as suas respectivas séries temporais, captadas pelos sensores durante a execução dos movimentos, e as séries temporais de indivíduos de controle. Espera-se que haja uma correlação entre esses valores, uma vez que quanto menor a pontuação de um indivíduo no protocolo FM, mais distintas devem ser suas séries temporais das séries temporais dos indivíduos saudáveis realizando um mesmo movimento. Sendo assim, apenas duas rotinas são definidas para este estudo de caso:

- **Rotina 1:** Avaliar a relação entre a pontuação do protocolo FM dos indivíduos afetados e

a distância média de suas séries temporais das séries temporais dos indivíduos saudáveis considerando-se todos os movimentos em conjunto;

- **Rotina 2:** Repetir a rotina anterior para movimentos isolados.

Na Figura 44, pode-se observar que a suspeita é validada. O gráfico deixa claro que, quanto maior a distância média das séries temporais de um indivíduo afetado com respeito às séries temporais dos indivíduos saudáveis, menor é sua pontuação no protocolo FM.

Figura 44 – Relação entre pontuação no protocolo FM de indivíduos afetados, no eixo x, e distância média entre indivíduos de controle, no eixo y, considerando-se todos os movimentos.

(a) Movimentos com o lado esquerdo.

(b) Movimentos com o lado direito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Algo semelhante ocorre considerando-se apenas um movimento específico, como apresentado na Figura 45.

7.3 Opiniões dos especialistas acerca de NE-Motion

A análise de correlações entre os sensores com respeito a grupos de indivíduos e à filtragem de informações é uma tarefa na qual os especialistas gastam dias de trabalho em suas rotinas usuais. Entretanto, eles foram capazes de realizar estas tarefas em questão de minutos com a ajuda de NE-Motion. As rotinas em cada estudo de caso serviram como orientações claras para que os peritos se familiarizassem com a interface e fossem capazes de estabelecer novas rotinas de visualização.

Os peritos avaliaram positivamente a quantidade de informação visual apresentada por NE-Motion em cada um dos estudos de caso. Como exemplo, a possibilidade de avaliar o desempenho de um mesmo paciente na realização de um exercício tendo como base uma

Figura 45 – Relação entre pontuação no protocolo FM de indivíduos afetados, no eixo x , e distância média entre indivíduos de controle, no eixo y .

Fonte: Elaborada pelo autor.

comparação direta com os demais pacientes e com as séries temporais captadas pelos sensores, assim como medidas de processamento de sinais extraídas das mesmas, os levam a conclusões imediatas sobre como adequar o tratamento deste indivíduo para uma recuperação mais precisa.

O componente *pop-up box* (**B**) de NE-Motion torna possível a visualização de muita informação acerca de uma conexão específica. Este artifício foi útil para os especialistas analisarem não somente a conexão mas também elementos que configuram esta conexão, uma vez que este componente destaca detalhes sobre a conexão em cada grupo de indivíduos com muita facilidade.

As filtragens de caráter especial tornaram os peritos capazes de diferenciar o comportamento de indivíduos saudáveis do comportamento de indivíduos afetados durante a execução de um exercício pré-selecionado, uma vez que existem conexões entre sensores presentes apenas nos grafos de indivíduos saudáveis e conexões que existem apenas em grafos de indivíduos afetados. Cada uma dessas conexões pôde ser avaliada para se obter novas percepções acerca da movimentação dos indivíduos de cada condição, o que também serve de ferramenta para detecção de ações compensatórias e adequação do tratamento dos indivíduos afetados. O uso da coloração adequada nas arestas, nas curvas de movimento e nas projeções tornaram as devidas associações muito naturais, fazendo com que os peritos rapidamente obtivessem conclusões específicas para cada classe, ou condição, de indivíduo.

Os especialistas destacam a eficiência de NE-Motion em apresentar e comprovar de maneira clara questionamentos que inicialmente possuem elevada complexidade em suas tarefas habituais. Como exemplo, a tarefa de detectar simetrias nas redes de conexões ainda não havia

sido concluída por eles em seus testes com respeito à base de dados analisada devido à elevada complexidade do procedimento. Entretanto, com a ajuda do sistema de visualização desenvolvido, a conclusão da tarefa se fez de maneira natural trazendo novas conclusões a respeito do tema.

O sistema de visualização possibilitou a comparação direta entre componentes estruturais das redes de conexões de todos os indivíduos. Este recurso dispensa a necessidade de realizar avaliações em cada uma das arestas nas redes de conexões dos indivíduos para efetuar comparações. Além disso, a existência de mais de uma maneira de projetar as curvas de movimento dos indivíduos torna ideal a diferenciação de cada grupo em exercícios nos quais os indivíduos afetados apresentam mais facilidade na sua realização. Desta forma, as projeções juntamente com a visualização das séries temporais espúrias de cada indivíduo foram muito úteis na detecção de padrões presentes em cada agrupamento definido nas mesmas. NE-Motion também facilitou a detecção de padrões estatísticos nas séries temporais de cada grupo de pacientes. Tarefa esta que ocupava muito tempo nos estudos dos especialistas e que, com o uso do ferramental proposto, pôde ser concluída de forma imediata.

Sendo assim, na Seção 7.4, é apresentada uma sumarização de como cada estudo de caso apresentado neste capítulo abordou as tarefas e os requisitos definidos pelos especialistas no Capítulo 4.

7.4 Avaliação Geral

Na Seção 4.4, foram apresentadas as tarefas que o ferramental proposto deve atender e os requisitos que o sistema de visualização desenvolvido deve alcançar. Os estudos de caso discutidos neste capítulo foram propostos com a intenção de avaliar se o material desenvolvido está atendendo todas as tarefas e está alcançando todos os requisitos visuais. Está apresentado na Tabela 2, confeccionada em acordo com os peritos, um apanhado de quais tarefas foram simuladas e quais requisitos visuais foram alcançados em cada um dos estudos de caso. Além disso, também é associado para todo estudo de caso uma pontuação, variando de 1 até 5, que estipula o grau de dificuldade que os procedimentos propostos ofereceram para os especialistas.

Sendo assim, de acordo com a Tabela 2, todas as tarefas que os especialistas executam em suas rotinas de análises foram satisfatoriamente simuladas com ajuda do material proposto e todos os requisitos estipulados por eles foram alcançados pelo sistema de visualização NE-Motion, o qual apresentou baixo grau de dificuldade em sua utilização.

7.5 Limitações

O sistema possui algumas limitações visuais. Uma delas está vinculada ao número de sensores, uma vez que quanto maior o número de sensores usados para capturar dados de movimento, mais espaço de tela ocupam os vértices das redes associados a esses elementos. Este

Tabela 2 – Resumo avaliativo dos estudos de caso.

Estudo de caso	Tarefa(s) simulada(s)	Requisito(s) alcançado(s)	Dificuldade [1, 5]
1	T_1, T_3	R_1, R_2, R_9	1
2	T_3, T_4, T_5	$R_2, R_5, R_7, R_8, R_{10}$	2
3	T_2, T_3, T_4, T_5	$R_2, R_4, R_5, R_7, R_8, R_9, R_{10}$	2
4	T_2, T_3, T_4	R_2, R_3, R_4, R_5	1
5	T_2, T_3, T_4	R_2, R_4, R_7	1
6	T_5	R_7	1
7	T_5	$R_1, R_6, R_7, R_8, R_{10}$	2
8	T_5	R_7	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

fato pode comprometer os componentes A e C do NE-Motion. Da mesma forma, o número de movimentos pode comprometer o componente B, dificultando a visualização de distribuição dos relacionamentos entre sensores em cada um dos movimentos.

O uso das cores verde e vermelho para representar os dois grupos de indivíduos torna o uso do NE-Motion restrito a pessoas sem deficiência visual do daltonismo. No entanto, os especialistas insistiram no uso dessa configuração de cores (R_7), pois a equipe médica que deveria usar o NE-Motion está acostumada com essa configuração.

7.6 Considerações Finais

Neste capítulo, foram detalhados oito estudos de casos nos quais os especialistas foram submetidos a roteiros de testes a fim de avaliar o potencial do método proposto em sumarizar e apresentar informações relevantes extraídas da base de dados fornecida. Em cada um desses estudos de caso foi definido um objetivo na forma de instrução direta ou questionamento nos quais os peritos deveriam utilizar o sistema NE-Motion para que fosse possível obter as devidas conclusões. Na Seção 7.3, foram apresentados alguns comentários dos especialistas que evidenciam as facilidades que o material desenvolvido fornece.

No início do desenvolvimento da teoria, os peritos determinaram tarefas que os mesmos estão habituados a realizar em suas rotinas de análises sobre a base de dados fornecida. Além disso, também foram estabelecidos requisitos que o ferramental visual desenvolvido deveria ser capaz de alcançar. Na Seção 7.4, ficou claro que todas as tarefas foram atendidas e todos os requisitos foram satisfeitos neste trabalho. Além disso, os peritos afirmaram ter empenhado pouco esforço na utilização do sistema visual desenvolvido, uma vez que o mesmo apresenta baixa complexidade em sua usabilidade.

No Capítulo 8 são apresentadas as conclusões relativas a este trabalho de doutorado e algumas considerações acerca de trabalhos futuros nos quais a teoria desenvolvida deve ser aplicada.

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho de doutorado serviu de auxílio na análise visual de dados de um problema real da área médica descrito por conjuntos de séries temporais. Para que isso fosse possível, situações que envolvem dados com estruturação semelhante foram discutidas e uma minuciosa revisão da literatura de aprendizado baseado em grafos (ABG), assim como conceitos fundamentais de sua teoria, foi apresentada.

O problema, estabelecido por profissionais da saúde da NYU, serviu de orientação para o desenvolvimento do ferramental que compõe este trabalho e consiste na extração de informações relevantes a partir de séries temporais coletadas por sensores durante a execução de exercícios por indivíduos que foram vítima de um acidente vascular cerebral (AVC) e por indivíduos saudáveis. Para efetuar a análise de relacionamentos entre sensores sincronizados o uso sistemático de técnicas de ABG foi essencial para a composição da teoria. Ademais, muitas redes de conexões foram confeccionadas e uma metodologia de seleção que restrinja o domínio de análises foi proposta.

Uma nova ferramenta de visualização, NE-Motion¹, especializada na apresentação de conjuntos de redes de conexões de séries temporais foi proposta a fim de tornar natural o processo de analisar um elevado número de redes de conexões em conjunto por meio da metodologia de seleção que compõe a teoria deste trabalho. A ferramenta foi avaliada por meio de oito estudos de casos diferentes, de forma que, em cada um destes estudos de casos, informações relevantes acerca da base de dados apresentada foram obtidas e evidenciadas pelo material proposto. Consequentemente, ficou claro para os especialistas que o ferramental desenvolvido neste trabalho satisfaz todos os requisitos e alcança todos os objetivos estabelecidos.

¹ *Network Environment for Motion Capture Data Analysis*

8.1 Contribuições

Em resumo, como principais resultados obtidos neste trabalho destacam-se:

- Uma nova aplicação de ABG em um problema real,
- Uma nova ferramenta de visualização especializada na análise de muitas redes de conexões de séries temporais.

A primeira contribuição se deu na adequação de uma técnica de ABG para tornar possível sua utilização no problema de confecção de redes de conexões entre séries temporais de elevada correlação que satisfizessem determinados requisitos estabelecidos por especialistas da área médica de estudos de AVC. Esta adequação tornou a metodologia capaz de construir apenas relacionamentos importantes entre sensores, direcionando os estudos dos peritos a sincronizações que descrevessem algum padrão interessante de acordo com os requisitos estabelecidos.

A necessidade de direcionar as análises entre as muitas redes de conexões confeccionadas foi suprida com NE-Motion. A ferramenta de analítica visual tornou os peritos capazes de detectarem padrões visuais interessantes na base de dados apresentada, uma vez que a mesma faz uso de componentes especializados na representação das conexões definidas pelos sensores e na comparação de indivíduos e de suas respectivas séries temporais. Como exemplo, os múltiplos componentes do sistema destacaram o comportamento anômalo de pacientes observados por meio de projeções e evidenciou a realização de manobras compensatórias na execução dos exercícios por meio da representação gráfica das séries temporais captadas. Em detalhes, esta ferramenta de visualização, que representa a segunda contribuição mais relevante do trabalho, é inovadora no sentido de que pouco tinha sido feito na exploração de dados definidos em conjuntos de grafos, especificamente se estes dados forem séries temporais.

Estas contribuições foram capazes de alcançar todos os requisitos estabelecidos pelos especialistas e também satisfaz todos os objetivos deste trabalho. A qualidade destas contribuições foi confirmada pelos peritos, os quais relataram a utilidade e a facilidade com a qual a detecção de padrões visuais interessantes foi efetuada durante a realização dos estudos de casos. Padrões estes que dificilmente seriam notados sem a utilização de NE-Motion. Além disso, este trabalho de doutorado foi responsável pelo acréscimo de pacotes de *software* à biblioteca de visualização que vem sendo desenvolvida pelo grupo de Processamento Visual e Geométrico do ICMC-USP.

Estes avanços na área de analítica visual de dados de movimento compõem o artigo intitulado “*NE-Motion: A Network Environment for Motion Capture Data Analysis Applied to Medical Data of Stroke-Affected Patients*”, o qual é oriundo deste trabalho de doutorado. Este artigo foi submetido para publicação na revista “*IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*” (TVCG).

8.2 Trabalhos Futuros

Embora o material desenvolvido tem como orientação um determinado problema, toda a teoria pode ser estendida para qualquer situação que seja representada por séries temporais multivariadas realizando-se poucos ajustes. Por exemplo, NE-Motion pode ser utilizado para facilitar análises de séries temporais de eletroencefalografia (EEG) (SUBHA *et al.*, 2010), as quais são sinais que representam atividades elétricas do cérebro captados por vários eletrodos acoplados ao couro cabeludo de indivíduos. Existem trabalhos recentes na literatura que fazem uso destes sinais coletados a partir de indivíduos saudáveis e de indivíduos afetados por alguma doença mental como doença de Alzheimer (BI; WANG, 2019) e doença de Parkinson (OH *et al.*, 2018). Na Tabela 3, é apresentada uma comparação entre os componentes do problema de dados de movimento abordado neste trabalho e os componentes de problemas que abordam sinais de EEG.

Tabela 3 – Comparação de componentes do problema abordado neste trabalho, representado por AVC, e trabalhos que utilizem sinais de EEG. Os símbolos × e – indicam, respectivamente, a presença e a ausência de um componente.

Problema	AVC	EEG
Sinais captados por sensores	×	×
Os sinais são séries temporais	×	×
Dois grupos de pacientes	×	×
Lados	×	–
Movimentos	×	–

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, o ferramental proposto se mostra versátil e, portanto, promissor a ser utilizado na análise de diversos problemas da atualidade.

REFERÊNCIAS

AIGNER, W.; MIKSCH, S.; MÜLLER, W.; SCHUMANN, H.; TOMINSKI, C. Visualizing time-oriented data—a systematic view. **Computers & Graphics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 401–409, 2007. Citado na página [41](#).

AVERBUCH, A. Z.; NEITTAANMAKI, P.; ZHELUDEV, V. A. **Spline and Spline Wavelet Methods with Applications to Signal and Image Processing: Volume I: Periodic Splines**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014. Citado nas páginas [108](#), [109](#) e [111](#).

BERKHIN, P. A survey on pagerank computing. **Internet Mathematics**, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 73–120, 2005. Citado na página [110](#).

BERNARD, J.; DOBERMANN, E.; VÖGELE, A.; KRÜGER, B.; KOHLHAMMER, J.; FELLNER, D. Visual-interactive semi-supervised labeling of human motion capture data. **Electronic Imaging**, Society for Imaging Science and Technology, v. 2017, n. 1, p. 34–45, 2017. Citado nas páginas [38](#) e [40](#).

BERNARD, J.; HUTTER, M.; REINEMUTH, H.; PFEIFER, H.; BORS, C.; KOHLHAMMER, J. Visual-interactive preprocessing of multivariate time series data. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2019. v. 38, n. 3, p. 401–412. Citado na página [44](#).

BERNARD, J.; WILHELM, N.; KRÜGER, B.; MAY, T.; SCHRECK, T.; KOHLHAMMER, J. Motionexplorer: Exploratory search in human motion capture data based on hierarchical aggregation. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 19, n. 12, p. 2257–2266, 2013. Citado na página [38](#).

BI, X.; WANG, H. Early alzheimer’s disease diagnosis based on eeg spectral images using deep learning. **Neural Networks**, Elsevier, v. 114, p. 119–135, 2019. Citado na página [151](#).

BIER, E. A.; STONE, M. C.; PIER, K.; BUXTON, W.; DEROSE, T. D. Toolglass and magic lenses: the see-through interface. In: ACM. **Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques**. [S.l.], 1993. p. 73–80. Citado na página [42](#).

BOLLOBAS, B. **Graph theory: an introductory course**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 63. Citado na página [70](#).

BOLLOBÁS, B. **Modern graph theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 184. Citado nas páginas [48](#) e [51](#).

BONITA, R.; MENDIS, S.; TRUELSEN, T.; BOGOUSSLAWSKY, J.; TOOLE, J.; YATSU, F. The global stroke initiative. **The Lancet Neurology**, Elsevier, v. 3, n. 7, p. 391–393, 2004. Citado na página [75](#).

BOYD, S.; PARIKH, N.; CHU, E.; PELEATO, B.; ECKSTEIN, J. *et al.* Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. **Foundations and Trends® in Machine learning**, Now Publishers, Inc., v. 3, n. 1, p. 1–122, 2011. Citado na página [55](#).

- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 56.
- BRANDES, U. A faster algorithm for betweenness centrality. **Journal of mathematical sociology**, Taylor & Francis, v. 25, n. 2, p. 163–177, 2001. Citado na página 110.
- BRASHEAR, H.; HENDERSON, V.; PARK, K.-H.; HAMILTON, H.; LEE, S.; STARNER, T. American sign language recognition in game development for deaf children. In: ACM. **Proceedings of the 8th international ACM SIGACCESS conference on Computers and accessibility**. [S.l.], 2006. p. 79–86. Citado na página 38.
- CANDÈS, E. J.; LI, X.; MA, Y.; WRIGHT, J. Robust principal component analysis? **Journal of the ACM (JACM)**, ACM, v. 58, n. 3, p. 11, 2011. Citado na página 65.
- CHAN, G. Y.-Y.; NONATO, L. G.; CHU, A.; RAGHAVAN, P.; ALURU, V.; SILVA, C. T. Motion browser: Visualizing and understanding complex upper limb movement under obstetrical brachial plexus injuries. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, 2019. Citado nas páginas 40, 82 e 83.
- CHEUNG, G.; MAGLI, E.; TANAKA, Y.; NG, M. K. Graph spectral image processing. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 106, n. 5, p. 907–930, 2018. Citado na página 47.
- COL, A. D.; VALDIVIA, P.; PETRONETTO, F.; DIAS, F.; SILVA, C. T.; NONATO, L. G. Wavelet-based visual analysis of dynamic networks. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 24, n. 8, p. 2456–2469, 2017. Citado nas páginas 32, 44 e 45.
- DAS, M.; GHOSH, S. K. Spatio-temporal prediction of meteorological time series data: An approach based on spatial bayesian network (spabn). In: SPRINGER. **International Conference on Pattern Recognition and Machine Intelligence**. [S.l.], 2017. p. 615–622. Citado na página 47.
- DIN, S. D.; PATEL, S.; COBELLI, C.; BONATO, P. Estimating fugl-meyer clinical scores in stroke survivors using wearable sensors. In: IEEE. **2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society**. [S.l.], 2011. p. 5839–5842. Citado na página 75.
- DOLEISCH, H.; GASSER, M.; HAUSER, H. Interactive feature specification for focus+ context visualization of complex simulation data. In: **VisSym**. [S.l.: s.n.], 2003. v. 3, p. 239–248. Citado na página 41.
- DONG, X.; THANOU, D.; FROSSARD, P.; VANDERGHEYNST, P. Learning graphs from signal observations under smoothness prior. **submitted to: IEEE Transactions on Signal Processing**, 2014. Citado na página 49.
- _____. Learning laplacian matrix in smooth graph signal representations. **IEEE Transactions on Signal Processing**, IEEE, v. 64, n. 23, p. 6160–6173, 2016. Citado nas páginas 19, 52, 53, 55, 56 e 63.
- DONG, X.; THANOU, D.; RABBAT, M.; FROSSARD, P. Learning graphs from data: A signal representation perspective. **arXiv preprint arXiv:1806.00848**, 2018. Citado na página 47.
- _____. Learning graphs from data: A signal representation perspective. **IEEE Signal Processing Magazine**, IEEE, v. 36, n. 3, p. 44–63, 2019. Citado nas páginas 31 e 77.

DRAYER, E.; ROUTTENBERG, T. Detection of false data injection attacks in smart grids based on graph signal processing. **IEEE Systems Journal**, IEEE, 2019. Citado na página 31.

FRACASTORO, G.; THANOU, D.; FROSSARD, P. Graph transform learning for image compression. In: IEEE. **2016 Picture Coding Symposium (PCS)**. [S.l.], 2016. p. 1–5. Citado na página 31.

FUCHS, R.; HAUSER, H. Visualization of multi-variate scientific data. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2009. v. 28, n. 6, p. 1670–1690. Citado na página 77.

FUGL-MEYER, A. R.; JÄÄSKÖ, L.; LEYMAN, I.; OLSSON, S.; STEGLIND, S. The post-stroke hemiplegic patient. 1. a method for evaluation of physical performance. **Scandinavian journal of rehabilitation medicine**, v. 7, n. 1, p. 13–31, 1975. Citado na página 75.

GEBAL, S. S. **A Novel Design of Tuned Vibration Absorber for Tremor in Hand of Parkinsonian Patients**. 110 p. Dissertação (Mestrado) — Lebanese International University, Sídon, Líbano, 2016. Citado na página 121.

HAMMOND, D. K.; VANDERGHEYNST, P.; GRIBONVAL, R. Wavelets on graphs via spectral graph theory. **Applied and Computational Harmonic Analysis**, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 129–150, 2011. Citado na página 43.

HSIAO, H.-S.; CHEN, J.-C. Using a gesture interactive game-based learning approach to improve preschool children's learning performance and motor skills. **Computers & Education**, Elsevier, v. 95, p. 151–162, 2016. Citado na página 38.

JANG, S.; ELMQVIST, N.; RAMANI, K. Gestureanalyzer: visual analytics for pattern analysis of mid-air hand gestures. In: ACM. **Proceedings of the 2nd ACM symposium on Spatial user interaction**. [S.l.], 2014. p. 30–39. Citado nas páginas 38, 82 e 83.

_____. Motionflow: Visual abstraction and aggregation of sequential patterns in human motion tracking data. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 22, n. 1, p. 21–30, 2015. Citado na página 38.

JECH, T. **Set theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 93.

KALOFOLIAS, V. How to learn a graph from smooth signals. In: **Artificial Intelligence and Statistics**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 920–929. Citado nas páginas 56 e 63.

KALOFOLIAS, V.; LOUKAS, A.; THANOU, D.; FROSSARD, P. Learning time varying graphs. In: IEEE. **2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)**. [S.l.], 2017. p. 2826–2830. Citado nas páginas 15, 67 e 68.

KALOFOLIAS, V.; PERRAUDIN, N. Large scale graph learning from smooth signals. **arXiv preprint arXiv:1710.05654**, 2017. Citado na página 64.

KEHRER, J.; LADSTÄDTER, F.; MUIGG, P.; DOLEISCH, H.; STEINER, A.; HAUSER, H. Hypothesis generation in climate research with interactive visual data exploration. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, IEEE, v. 14, n. 6, p. 1579–1586, 2008. Citado na página 41.

- KEIM, D. A.; MANSMANN, F.; SCHNEIDEWIND, J.; THOMAS, J.; ZIEGLER, H. Visual analytics: Scope and challenges. In: **Visual data mining**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 76–90. Citado na página 77.
- KEIM, D. A.; NIETZSCHMANN, T.; SCHELWIES, N.; SCHNEIDEWIND, J.; SCHRECK, T.; ZIEGLER, H. A spectral visualization system for analyzing financial time series data. In: **Eurographics/IEEE TCVG Symposium on Visualization**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 195–202. Citado na página 41.
- KOMODAKIS, N.; PESQUET, J.-C. Playing with duality: An overview of recent primal-dual approaches for solving large-scale optimization problems. **IEEE Signal Processing Magazine**, IEEE, v. 32, n. 6, p. 31–54, 2015. Citado nas páginas 57 e 58.
- KÖNIG, A. H.; DOLEISCH, H.; GRÖLLER, E. *et al.* Multiple views and magic mirrors-fmri visualization of the human brain. Citeseer, 1999. Citado na página 39.
- KREKEL, P. R.; VALSTAR, E. R.; GROOT, J. D.; POST, F. H.; NELISSEN, R. G.; BOTHA, C. P. Visual analysis of multi-joint kinematic data. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2010. v. 29, n. 3, p. 1123–1132. Citado na página 38.
- LI, Q.; XU, P.; CHAN, Y. Y.; WANG, Y.; WANG, Z.; QU, H.; MA, X. A visual analytics approach for understanding reasons behind snowballing and comeback in moba games. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 23, n. 1, p. 211–220, 2016. Citado na página 44.
- LIAO, W.; DING, J.; MARINAZZO, D.; XU, Q.; WANG, Z.; YUAN, C.; ZHANG, Z.; LU, G.; CHEN, H. Small-world directed networks in the human brain: multivariate granger causality analysis of resting-state fmri. **Neuroimage**, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 2683–2694, 2011. Citado na página 70.
- LIU, R.; NEJATI, H.; CHEUNG, N.-M. Joint estimation of low-rank components and connectivity graph in high-dimensional graph signals: Application to brain imaging. **arXiv preprint arXiv:1801.02303**, 2018. Citado nas páginas 19, 47, 64, 65 e 66.
- MAATEN, L. v. d.; HINTON, G. Visualizing data using t-sne. **Journal of machine learning research**, v. 9, n. Nov, p. 2579–2605, 2008. Citado na página 107.
- MACEACHREN, A.; XIPING, D.; HARDISTY, F.; GUO, D.; LENGERICH, G. Exploring high-d spaces with multiform matrices and small multiples. In: IEEE. **IEEE Symposium on Information Visualization 2003 (IEEE Cat. No. 03TH8714)**. [S.l.], 2003. p. 31–38. Citado na página 43.
- MALLAT, S. **A wavelet tour of signal processing**. [S.l.]: Elsevier, 1999. Citado na página 43.
- MASCI, J.; MEIER, U.; CIREŞAN, D.; SCHMIDHUBER, J. Stacked convolutional auto-encoders for hierarchical feature extraction. In: SPRINGER. **International Conference on Artificial Neural Networks**. [S.l.], 2011. p. 52–59. Citado na página 111.
- MEI, J.; MOURA, J. M. Signal processing on graphs: Causal modeling of unstructured data. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 65, p. 2077–2092, 2017. Citado nas páginas 19, 71, 72, 73 e 74.
- MÜLLER, M.; RÖDER, T.; CLAUSEN, M.; EBERHARDT, B.; KRÜGER, B.; WEBER, A. Documentation mocap database hdm05. Citeseer, 2007. Citado na página 38.

- NEWMAN, M. E. Analysis of weighted networks. **Physical review E**, APS, v. 70, n. 5, p. 056131, 2004. Citado na página 110.
- NGUYEN, K. T.; GAUFFIN, H.; YNNERMAN, A.; ROPINSKI, T. Quantitative analysis of knee movement patterns through comparative visualization. In: **Visualization in Medicine and Life Sciences III**. [S.l.]: Springer, 2016. p. 265–284. Citado na página 39.
- OH, S. L.; HAGIWARA, Y.; RAGHAVENDRA, U.; YUVARAJ, R.; ARUNKUMAR, N.; MURUGAPPAN, M.; ACHARYA, U. R. A deep learning approach for parkinson’s disease diagnosis from eeg signals. **Neural Computing and Applications**, Springer, p. 1–7, 2018. Citado na página 151.
- OPSAHL, T.; AGNEESSENS, F.; SKVORETZ, J. Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths. **Social networks**, Elsevier, v. 32, n. 3, p. 245–251, 2010. Citado na página 110.
- ORGANIZATION, W. H. *et al.* The world health report: 2003: shaping the future. Geneva: World Health Organization, 2003. Citado na página 75.
- PASDELOUP, B.; GRIPON, V.; MERCIER, G.; PASTOR, D.; RABBAT, M. G. Characterization and inference of graph diffusion processes from observations of stationary signals. **IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks**, IEEE, v. 4, n. 3, p. 481–496, 2017. Citado na página 70.
- PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. *et al.* The matrix cookbook. **Technical University of Denmark**, v. 7, n. 15, p. 510, 2008. Citado na página 56.
- POCO, J.; DASGUPTA, A.; WEI, Y.; HARGROVE, W.; SCHWALM, C.; COOK, R.; BERTINI, E.; SILVA, C. Similarityexplorer: A visual inter-comparison tool for multifaceted climate data. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2014. v. 33, n. 3, p. 341–350. Citado na página 43.
- PROAKIS, J. G. **Digital signal processing: principles algorithms and applications**. [S.l.]: Pearson Education India, 2001. Citado na página 77.
- RAUTARAY, S. S.; AGRAWAL, A. Interaction with virtual game through hand gesture recognition. In: IEEE. **2011 International Conference on Multimedia, Signal Processing and Communication Technologies**. [S.l.], 2011. p. 244–247. Citado na página 38.
- REES, D.; LARAMEE, R. S. A survey of information visualization books. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2019. v. 38, n. 1, p. 610–646. Citado na página 37.
- RUDER, S. An overview of gradient descent optimization algorithms. **arXiv preprint arXiv:1609.04747**, 2016. Citado na página 73.
- RUI, L.; NEJATI, H.; SAFAVI, S. H.; CHEUNG, N.-M. Simultaneous low-rank component and graph estimation for high-dimensional graph signals: Application to brain imaging. In: IEEE. **2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)**. [S.l.], 2017. p. 4134–4138. Citado na página 64.
- SANTHI, K.; REDDY, R. M. Critical analysis of big visual analytics: A survey. In: **2018 IADS International Conference on Computing, Communications & Data Engineering (CCODE)**. [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 37.

- SCHROEDER, D.; KORSAKOV, F.; KNIPE, C. M.-P.; THORSON, L.; ELLINGSON, A. M.; NUCKLEY, D.; CARLIS, J.; KEEFE, D. F. Trend-centric motion visualization: Designing and applying a new strategy for analyzing scientific motion collections. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 20, n. 12, p. 2644–2653, 2014. Citado na página 37.
- SEDLMAIR, M.; MEYER, M.; MUNZNER, T. Design study methodology: Reflections from the trenches and the stacks. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 18, n. 12, p. 2431–2440, 2012. Citado na página 76.
- SHIM, J. Y.; KIM, T. H.; KIM, S. W. Decision support of bad player identification in moba games using pagerank based evidence accumulation and normal distribution based confidence interval. **International Journal of Multimedia & Ubiquitous Engineering**, v. 9, n. 8, p. 13–16, 2014. Citado na página 44.
- SHNEIDERMAN, B. The eyes have it: A task by data type taxonomy for information visualizations. In: IEEE. **Proceedings 1996 IEEE symposium on visual languages**. [S.l.], 1996. p. 336–343. Citado na página 77.
- SHUMAN, D. I.; NARANG, S. K.; FROSSARD, P.; ORTEGA, A.; VANDERGHEYNST, P. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. **IEEE Signal Processing Magazine**, IEEE, v. 30, n. 3, p. 83–98, 2013. Citado nas páginas 48, 49, 50 e 57.
- SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time series analysis and its applications: with R examples**. [S.l.]: Springer, 2017. Citado na página 41.
- SMOLA, A. J.; KONDOR, R. Kernels and regularization on graphs. In: **Learning theory and kernel machines**. [S.l.]: Springer, 2003. p. 144–158. Citado na página 69.
- SPEARMAN, C. The proof and measurement of association between two things. Appleton-Century-Crofts, 1961. Citado na página 91.
- STEIGER, M.; BERNARD, J.; MITTELSTÄDT, S.; LÜCKE-TIEKE, H.; KEIM, D.; MAY, T.; KOHLHAMMER, J. Visual analysis of time-series similarities for anomaly detection in sensor networks. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer graphics forum**. [S.l.], 2014. v. 33, n. 3, p. 401–410. Citado na página 42.
- SUBHA, D. P.; JOSEPH, P. K.; ACHARYA, R.; LIM, C. M. Eeg signal analysis: a survey. **Journal of medical systems**, Springer, v. 34, n. 2, p. 195–212, 2010. Citado na página 151.
- TELEA, A. C. **Data visualization: principles and practice**. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2014. Citado na página 37.
- THANOU, D.; DONG, X.; KRESSNER, D.; FROSSARD, P. Learning heat diffusion graphs. **IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks**, IEEE, v. 3, n. 3, p. 484–499, 2017. Citado nas páginas 68 e 69.
- TIPPING, M. E.; BISHOP, C. M. Probabilistic principal component analysis. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Wiley Online Library, v. 61, n. 3, p. 611–622, 1999. Citado na página 53.

- VALDIVIA, P.; DIAS, F.; PETRONETTO, F.; SILVA, C. T.; NONATO, L. G. Wavelet-based visualization of time-varying data on graphs. In: IEEE. **2015 IEEE Conference on Visual Analytics Science and Technology (VAST)**. [S.l.], 2015. p. 1–8. Citado nas páginas [32](#), [43](#), [44](#) e [45](#).
- WAGNER, M.; SLIJEPCEVIC, D.; HORSACK, B.; RIND, A.; ZEPPELZAUER, M.; AIGNER, W. Kavagait: Knowledge-assisted visual analytics for clinical gait analysis. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 25, n. 3, p. 1528–1542, 2018. Citado na página [40](#).
- WAI, H.-T.; SEGARRA, S.; OZDAGLAR, A. E.; SCAGLIONE, A.; JADBABAIE, A. Community detection from low-rank excitations of a graph filter. In: IEEE. **2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)**. [S.l.], 2018. p. 4044–4048. Citado na página [31](#).
- WANG, J.; YU, L.; WANG, J.; GUO, L.; GU, X.; FANG, Q. Automated fugl-meyer assessment using svr model. In: IEEE. **2014 IEEE International Symposium on Bioelectronics and Bioinformatics (IEEE ISBB 2014)**. [S.l.], 2014. p. 1–4. Citado na página [75](#).
- WARD, M. O.; GUO, Z. Visual exploration of time-series data with shape space projections. In: WILEY ONLINE LIBRARY. **Computer Graphics Forum**. [S.l.], 2011. v. 30, n. 3, p. 701–710. Citado na página [42](#).
- WARLOW, C. P.; GIJN, J. V.; DENNIS, M. S.; WARDLAW, J. M.; BAMFORD, J. M.; HANKEY, G. J.; SANDERCOCK, P. A.; RINKEL, G.; LANGHORNE, P.; SUDLOW, C. *et al.* **Stroke: practical management**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado nas páginas [75](#) e [77](#).
- WATTENBERG, M. Arc diagrams: Visualizing structure in strings. In: IEEE. **IEEE Symposium on Information Visualization, 2002. INFOVIS 2002**. [S.l.], 2002. p. 110–116. Citado na página [103](#).
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998. Citado na página [110](#).
- WILHELM, N.; VÖGELE, A.; ZSOLDOS, R.; LICKA, T.; KRÜGER, B.; BERNARD, J. Furyexplorer: visual-interactive exploration of horse motion capture data. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. **Visualization and Data Analysis 2015**. [S.l.], 2015. v. 9397, p. 93970F. Citado nas páginas [39](#), [82](#) e [83](#).
- XIE, Y.; WANG, Y.; NALLANATHAN, A.; WANG, L. An improved k-nearest-neighbor indoor localization method based on spearman distance. **IEEE Signal Process. Lett.**, v. 23, n. 3, p. 351–355, 2016. Citado na página [91](#).
- XU, Y.; CARLINET, E.; GÉRAUD, T.; NAJMAN, L. Hierarchical segmentation using tree-based shape spaces. **IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence**, v. 39, n. 3, p. 457–469, 2017. Citado na página [47](#).
- XU, Y.; YIN, W. A block coordinate descent method for regularized multiconvex optimization with applications to nonnegative tensor factorization and completion. **SIAM Journal on imaging sciences**, SIAM, v. 6, n. 3, p. 1758–1789, 2013. Citado na página [73](#).
- YOUNG, F. W. **Multidimensional scaling: History, theory, and applications**. [S.l.]: Psychology Press, 2013. Citado na página [107](#).

YU, L.; XIONG, D.; GUO, L.; WANG, J. A remote quantitative fugal-meyer assessment framework for stroke patients based on wearable sensor networks. **Computer methods and programs in biomedicine**, Elsevier, v. 128, p. 100–110, 2016. Citado na página [75](#).

ZHAO, J.; CHEVALIER, F.; PIETRIGA, E.; BALAKRISHNAN, R. Exploratory analysis of time-series with chronolenses. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, IEEE, v. 17, n. 12, p. 2422–2431, 2011. Citado na página [42](#).

DEMONSTRAÇÕES

Neste apêndice são apresentadas as demonstrações contidas no texto desta tese.

Proposição 1: Seja $G(V, E)$ um grafo cuja matriz de adjacência é $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e sua Laplaciana é L .

Considerando a matriz de sinais $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, é válido que

$$ED(X, G) = 2\text{tr}(X^T L X),$$

na qual $\text{tr}(M) = \sum_i M_{i,i}$ é a função **traço**.

Demonstração. Como o grafo em questão possui n vértices, então a energia de Direchlet de X no grafo G será calculada considerando-se que em cada vértice de G seja disposta a respectiva linha de X , isto é,

$$ED(X, G) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \|X_i - X_j\|^2,$$

na qual $X_k = (\vec{x}_{1,k}, \vec{x}_{2,k}, \dots, \vec{x}_{m,k})^T \in \mathbb{R}^m$.

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \|X_i - X_j\|^2 &= \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} (X_i - X_j)^T W_{i,j} (X_i - X_j) \\ &= \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} (X_i^T W_{i,j} X_i - X_i^T W_{i,j} X_j - X_j^T W_{i,j} X_i + X_j^T W_{i,j} X_j) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Levando em consideração que $W_{i,j} = W_{j,i}$, a Equação (A.1) equivale à:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \|X_i - X_j\|^2 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i^T W_{i,j} X_i - X_i^T W_{i,j} X_j) \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^T X_i \sum_{j=1}^n W_{i,j} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i^T W_{i,j} X_j \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^T X_i D_{i,i} - 2 \operatorname{tr}(X^T W X) \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^T D_{i,i} X_i - 2 \operatorname{tr}(X^T W X) \\
 &= 2 \operatorname{tr}(X^T D X) - 2 \operatorname{tr}(X^T W X) \\
 &= 2 \operatorname{tr}(X^T (D - W) X) \\
 &= 2 \operatorname{tr}(X^T L X).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

□

Corolário 1. A matriz Laplaciana de qualquer grafo é semidefinida positiva.

Demonstração. Considera-se a matriz coluna $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $L = D - W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz Laplaciana de algum grafo.

Então, pela Proposição 1:

$$\sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \|X_i - X_j\|^2 = 2 \cdot \operatorname{tr}(X^T L X) = 2X^T L X.$$

E como, $\sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} W_{i,j} \|X_i - X_j\|^2 \geq 0$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então $X^T L X \geq 0$.

Logo $L \succeq 0$.

□

Proposição 2. O vetor $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é autovetor da Laplaciana de qualquer grafo.

Demonstração. De fato, pois se $L = D - W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz Laplaciana, então:

$$\begin{aligned}
 L \cdot \vec{1} &= (D - W) \cdot \vec{1} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n W_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n W_{2,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^n W_{n,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{1,1} & \cdots & W_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n,1} & \cdots & W_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n W_{1,k} - \sum_{k=1}^n W_{1,k} \\ \sum_{k=1}^n W_{2,k} - \sum_{k=1}^n W_{2,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n W_{n,k} - \sum_{k=1}^n W_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \vec{1}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Portanto,

$$L \cdot \vec{1} = 0 \cdot \vec{1}$$

e, consequentemente, $\vec{1}$ é autovetor da Laplaciana referente ao autovalor 0. $\square$

Corolário 2. O menor autovalor de uma matriz Laplaciana é o autovalor 0.

Demonstração. Suponha-se que $\vec{v}$ é um autovetor não nulo de uma Laplaciana L , e λ seu respectivo autovalor. Inicialmente, como L é simétrica, então todos os seus autovalores são reais. Agora, pela Proposição 1, é válido que:

$$L\vec{v} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \vec{v}^T L\vec{v} = \lambda \vec{v}^T \vec{v} \Rightarrow \lambda \|\vec{v}\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Pela Proposição 2, “0” é autovalor de qualquer Laplaciana, então conclui-se que o mesmo é sempre o menor autovalor. $\square$

Proposição 3. A otimização da Equação (3.24b) possui uma única solução dada pela Equação (A.4).

$$\arg \min_Y \left(\|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T LY) \right) = (\alpha L + I_n)^{-1} X. \tag{A.4}$$

Demonstração. Considera-se $F(Y) := \|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T LY)$.

Sabe-se que os mínimos locais de F satisfazem $\frac{\partial}{\partial Y} F(Y) = \mathbf{O}$, tal que $\mathbf{O}$ é a matriz nula de dimensões $n \times m$.

Então,

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\|X - Y\|_F^2 + \alpha \cdot \text{tr}(Y^T LY) \right) = \mathbf{O}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& \frac{\partial}{\partial Y} \left(\text{tr} \left((X - Y)^T (X - Y) \right) + \alpha \cdot \text{tr} (Y^T L Y) \right) = \mathbf{O} \\
& \Downarrow \\
& \frac{\partial}{\partial Y} \left(\text{tr} (X^T X) - \text{tr} (X^T Y) - \text{tr} (Y^T X) + \text{tr} (Y^T Y) + \alpha \cdot \text{tr} (Y^T L Y) \right) = \mathbf{O}
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 1,

$$-X - X + 2Y + \alpha(L + L^T)Y = \mathbf{O}$$

Como $L = L^T$,

$$-2X + 2Y + 2\alpha LY = \mathbf{O}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& (I_n + \alpha L)Y = X
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 1, L é semidefinida positiva, consequentemente $(I_n + \alpha L)$ é positiva definida e, portanto, possui inversa. Então Y pode ser determinado de forma única e de acordo com a seguinte expressão:

$$Y = (I_n + \alpha L)^{-1} X.$$

□

Proposição 4. Sejam

$$\mathcal{W}_n := \{W \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \mid W = W^T; W_{i,i} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{W}_{\vec{v}} := \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}_+^{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \times 1} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Então são equivalentes os conjuntos $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}_{\vec{v}}$ e $\mathcal{L}$ (Equação (3.21)).

Demonstração. A equivalência entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{W}_n$ é evidente, uma vez que dada uma laplaciana L , obtém-se uma única matriz de adjacência W , no caso $W_{i,j} = -L_{i,j}$ se $i \neq j$ e $W_{i,i} = 0$. E dada uma matriz de adjacência W , obtém-se uma única Laplaciana L dada de acordo com a Definição 4. No caso da equivalência entre $\mathcal{W}_n$ e $\mathcal{W}_{\vec{v}}$, considera-se a transformação:

$$\begin{aligned}
T & : \mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{W}_{\vec{v}} \\
W & \mapsto T(W) := \vec{w} \quad ,
\end{aligned}$$

na qual,

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 & w_{1,2} & \dots & w_{1,n-1} & w_{1,n} \\ w_{1,2} & 0 & \dots & w_{2,n-1} & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{1,n-1} & w_{2,n-1} & \dots & 0 & w_{n-1,n} \\ w_{1,n} & w_{2,n} & \dots & w_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ \vdots \\ w_{1,n-1} \\ w_{1,n} \\ w_{2,3} \\ \vdots \\ w_{2,n-1} \\ w_{2,n} \\ \vdots \\ w_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Isto é, T associa W à sua forma vetorizada $\vec{w}$.

Claramente T é uma transformação linear bijetora, o que torna $\mathcal{W}_n$ equivalente a $\mathcal{W}_{\vec{v}}$.

Logo,

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{W}_n \sim \mathcal{W}_{\vec{v}}.$$

□

Proposição 5 As funções da Equação (3.40) são funções convexas próprias, semicontínuas inferiormente e, além disso, o gradiente de f_3 é uma aplicação Lipschitziana.

Demonstração. De fato,

Função f_1 : Sendo $f_1 : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que $f_1(\vec{w}) = \begin{cases} 2 \cdot \vec{w}^T \vec{z} & \text{se } \vec{w}_i \geq 0, \forall i \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$.

[**Convexidade própria:**] Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. No caso de que alguma coordenada de $\vec{x}$ ou $\vec{y}$ seja negativa, suponha-se sem perda de generalidade que $\vec{x}_i < 0$, então $f_1(\vec{x}) = +\infty$, portanto é válido para qualquer $\gamma \in [0, 1]$ que

$$f_1(\gamma\vec{x} + (1-\gamma)\vec{y}) \leq \gamma f_1(\vec{x}) + (1-\gamma)f_1(\vec{y}).$$

No caso em que todas as coordenadas de $\vec{x}$ e de $\vec{y}$ sejam não negativas, então para qualquer $\gamma \in [0, 1]$, as coordenadas de $\vec{u} = \gamma\vec{x} + (1-\gamma)\vec{y}$ também são não negativas. Então,

$$\begin{aligned} f_1(\vec{u}) &= 2 \cdot \vec{u}^T \vec{z} \\ &= 2 \cdot (\gamma\vec{x} + (1-\gamma)\vec{y})^T \vec{z} \\ &= \gamma\vec{x}^T \vec{z} + (1-\gamma)\vec{y}^T \vec{z} \\ &= \gamma f_1(\vec{x}) + (1-\gamma)f_1(\vec{y}). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Logo, f_1 é convexa.

Além disso, $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tal que $f_1(\vec{0}) = 0 < +\infty$, o que configura f_1 como sendo uma função convexa própria.

[Semicontinuidade inferior:] Seja $a \in \mathbb{R}$.

Suponha-se que $a \leq 0$, então

$$f_1^{-1}(a, +\infty] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_1(\vec{x}) > a\} = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, \quad (\text{A.8})$$

pois $f_1(\vec{x})$ é positiva para qualquer vetor não nulo em $\mathbb{R}^n$.

Logo, neste caso, como $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ é aberto, então $f_1^{-1}(a, +\infty]$ é aberto.

Já no caso em que $a > 0$, tem-se que se $\vec{x} \in f_1^{-1}(a, +\infty]$ significa que $f_1(\vec{x}) > a > 0$. Sendo assim, se $\vec{x}$ possui alguma coordenada negativa, então

$$\vec{x} \in \bigcup_{i=1}^n \left[\mathbb{R} \times \cdots \times \underbrace{\left(\mathbb{R}_- \setminus \{0\} \right)}_{i\text{-ésimo fator}} \times \cdots \times \mathbb{R} \right]. \quad (\text{A.9})$$

E como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ são conjuntos abertos, então a união finita dos produtos apresentados na Equação (A.9) é um conjunto aberto.

Agora, se considerado que $\vec{x}$ possui todas as coordenadas não negativas, então a função f_1 é idêntica à função $\bar{f}_1 : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que $\bar{f}_1(\vec{x}) := 2 \cdot \vec{x}^T \vec{z}$, a qual é contínua e, como consequência, possui a propriedade de “corresponder conjunto aberto em conjunto aberto”. Sendo assim, como $f_1^{-1}(a, +\infty] = \bar{f}_1^{-1}(a, +\infty)$ e $(a, +\infty)$ é aberto, então $\bar{f}_1^{-1}(a, +\infty)$ é aberto. Neste caso, para qualquer $a > 0$:

$$\vec{x} \in \left\{ \bigcup_{i=1}^n \left[\mathbb{R} \times \cdots \times \underbrace{\left(\mathbb{R}_- \setminus \{0\} \right)}_{i\text{-ésimo fator}} \times \cdots \times \mathbb{R} \right] \right\} \cup \bar{f}_1^{-1}(a, +\infty), \quad (\text{A.10})$$

ou seja $f_1^{-1}(a, +\infty]$ é a união de dois conjuntos abertos e, portanto é um conjunto aberto para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, f_1 é semicontínua inferiormente.

Função f_2 : Sendo $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que $f_2(x) = ? \{x = n\}$.

[Convexidade própria:] Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Considerando sem perda de generalidade que $x \neq n$, então para qualquer $\gamma \in [0, 1]$, a desigualdade a seguir é válida:

$$f_2(\gamma x + (1 - \gamma)y) \leq \gamma f_2(x) + (1 - \gamma)f_2(y),$$

pois $f_2(x) = +\infty$.

Agora, se $x = y = n$, então para qualquer $\gamma \in [0, 1]$, $\gamma x + (1 - \gamma)y = \gamma n + (1 - \gamma)n = n$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} f_2(\gamma x + (1 - \gamma)y) &= f_2(n) \\ &= 0 \\ &= \gamma 0 + (1 - \gamma)0 \\ &= \gamma f_2(x) + (1 - \gamma)f_2(y). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Logo, f_2 é convexa.

Além disso, $\exists n \in \mathbb{R}$ tal que $f_2(n) = 0 < +\infty$, o que configura f_2 como sendo uma função convexa própria.

[**Semicontinuidade inferior:**] Considera-se $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < 0$, então

$$f_2^{-1}(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) > a\} = \mathbb{R},$$

pois $f_2(x) \geq 0 > a$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, como $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto, então $f_2^{-1}(a, +\infty]$ é um conjunto aberto.

Ao considerar $a \geq 0$, então

$$f_2^{-1}(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) > a \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) = +\infty\} = \mathbb{R} \setminus \{n\}.$$

E como $\mathbb{R} \setminus \{n\}$ também é um conjunto aberto, então $f_2^{-1}(a, +\infty]$ é um conjunto aberto para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Logo, f_2 é semicontínua inferiormente.

Função f_3 : Sendo $f_3 : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que $f_3(\vec{w}) = \rho S\vec{w} + 2\rho\vec{w}^T\vec{w}$.

[**Convexidade própria:**] Considera-se que f_3 não seja convexa, isto é, pelo Lema 2, existem $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tais que

$$f_3(\vec{x}) - f_3(\vec{y}) \geq \nabla f_3(\vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y}).$$

Isto é,

$$\rho\vec{x}^T S^T S\vec{x} + 2\rho\vec{x}^T\vec{x} - \rho\vec{y}^T S^T S\vec{y} - 2\rho\vec{y}^T\vec{y} < (2\rho S^T S\vec{y} + 4\rho\vec{y})^T \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

$\Downarrow$

$$\rho\vec{x}^T S^T S\vec{x} + 2\rho\vec{x}^T\vec{x} - \rho\vec{y}^T S^T S\vec{y} - 2\rho\vec{y}^T\vec{y} < 2\rho\vec{y}^T S^T S\vec{x} - 2\rho\vec{y}^T S^T S\vec{y} + 4\rho\vec{y}^T\vec{x} - 4\rho\vec{y}^T\vec{y}$$

$\Downarrow$

$$[2\rho\vec{x}^T\vec{x} - 2\rho\vec{y}^T\vec{y} - 4\rho\vec{y}^T\vec{x} + 4\rho\vec{y}^T\vec{y}] + [\rho\vec{x}^T S^T S\vec{x} - \rho\vec{y}^T S^T S\vec{y} - 2\rho\vec{y}^T S^T S\vec{x} + 2\rho\vec{y}^T S^T S\vec{y}] < 0$$

↓

$$[2\rho\vec{x}^T\vec{x} - 4\rho\vec{y}^T\vec{x} + 2\rho\vec{y}^T\vec{y}] + [\rho\vec{x}^T S^T S\vec{x} - 2\rho\vec{y}^T S^T S\vec{x} + \rho\vec{y}^T S^T S\vec{y}] < 0$$

↓

$$2\rho \|\vec{y} - \vec{x}\|^2 + \rho \|S(\vec{y} - \vec{x})\|^2 < 0,$$

O que configura um absurdo.

Logo, f_3 é uma função convexa.

Além disso, $f_3(\vec{w}) < +\infty$ para qualquer $\vec{w} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Então, f_3 é uma função convexa própria.

[Semicontinuidade inferior:] Como f_3 é uma função contínua, então

$$f_3^{-1}(a, +\infty] = f_3^{-1}(a, +\infty), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Além disso, também pela continuidade de f_3 , como $(a, +\infty)$ é um conjunto aberto, então $f_3^{-1}(a, +\infty)$ é um conjunto aberto. Logo, $f_3^{-1}(a, +\infty]$ é aberto e, portanto, f_3 é semicontínua inferiormente.

[Gradiente Lipschitziano:] O gradiente de f_3 é dado pela aplicação:

$$\nabla f_3(\vec{w}) = 2\rho S^T S\vec{w} + 4\rho\vec{w}. \quad (\text{A.12})$$

Então, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla f_3(\vec{x}) - \nabla f_3(\vec{y})\| &= \|2\rho S^T S\vec{x} + 4\rho\vec{x} - 2\rho S^T S\vec{y} - 4\rho\vec{y}\| \\ &= \|2\rho S^T S(\vec{x} - \vec{y}) + 4\rho(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &\leq \|2\rho S^T S(\vec{x} - \vec{y})\| + \|4\rho(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &= 2\rho \|S^T S(\vec{x} - \vec{y})\| + 4\rho \|(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &\leq 2\rho \|S^T S\| \|\vec{x} - \vec{y}\| + 4\rho \|(\vec{x} - \vec{y})\| \\ &= (2\rho \|S^T S\| + 4\rho) \|\vec{x} - \vec{y}\|. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Então ∇f_3 é Lipschitziana, com constante $\Gamma = (2\rho \|S^T S\| + 4\rho)$.

□

Proposição 6. Seja $\vec{p} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ o operador proximal de $\gamma f_1(\vec{y})$ para $\gamma \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de $\vec{p}$ são dadas por

$$\vec{p}_i = \begin{cases} (\vec{y} - 2\gamma\vec{z})_i, & \text{se } (\vec{y} - 2\gamma\vec{z})_i \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. O operador proximal de f_1 é dado por

$$\text{prox}_{\gamma f_1}(\vec{y}) = \arg \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \left(\gamma \{ \vec{x}_i \geq 0, \forall i \} + 2\gamma \vec{x}^T \vec{z} + \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \right).$$

Considera-se $\hat{f}_1(\vec{x}) := \gamma \{ \vec{x}_i \geq 0, \forall i \} + 2\gamma \vec{x}^T \vec{z} + \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$.

Então, $\text{prox}_{\gamma f_1}(\vec{y}) = \arg \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \hat{f}_1(\vec{x})$. Como $\hat{f}_1(\vec{x}) = +\infty$ se alguma coordenada de $\vec{x}$ for negativa, então, claramente o mínimo de $\hat{f}_1(\vec{x})$ deve ser algum $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Mas se $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^{\frac{n(n-1)}{2}}$, então

$$\hat{f}_1(\vec{x}) := 2\gamma \vec{x}^T \vec{z} + \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2,$$

e, neste caso, os mínimos de $\hat{f}_1$ respeitam a seguinte relação:

$$\nabla \hat{f}_1(\vec{x}) = \vec{0},$$

ou seja,

$$2\gamma \vec{z} + \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x} = \vec{y} - 2\gamma \vec{z},$$

mas como $\vec{y}$ é qualquer vetor em $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, então $\vec{x}$ não necessariamente possui todas as suas coordenadas não negativas. Sendo assim, é necessário tomar como mínimo de $\hat{f}_1(\vec{x})$ a projeção de $\vec{x}$ em $\mathbb{R}_+^{\frac{n(n-1)}{2}}$, que é o ponto mais próximo a $\vec{x}$ em $\mathbb{R}_+^{\frac{n(n-1)}{2}}$, dada por:

$$\text{proj}_{\mathbb{R}_+^{\frac{n(n-1)}{2}}} \vec{x} := \vec{p},$$

tal que as coordenadas de $\vec{p}$ sejam dadas por

$$\vec{p}_i = \begin{cases} (\vec{y} - 2\gamma \vec{z})_i, & \text{se } (\vec{y} - 2\gamma \vec{z})_i \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desta forma, $\text{prox}_{\gamma f_1}(\vec{y}) = \vec{p}$. □

Proposição 7 Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, então o operador proximal de γf_2^* é determinado por

$$\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = y - \gamma n.$$

Demonstração. De fato, pois

$$\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \underbrace{\gamma \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(xu - \underbrace{\{x=n\}}_{f_2(x)} \right) \right]}_{f_2^*(u)} + \frac{1}{2} \|u - y\|^2 \right\},$$

mas como $\gamma\{x = n\}$ só é um valor finito com $x = n$, então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (xu - \gamma\{x = n\}) = nu.$$

Então o operador proximal de γf_2^* é equivalente a

$$\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \left(\gamma nu + \frac{1}{2}(u - y)^2 \right).$$

Considerando $\hat{f}_2^*(u) := \gamma nu + \frac{1}{2}(u - y)^2$, obtém-se $\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}} \hat{f}_2^*(u)$. Desta forma, para descrever o operador proximal, é necessário determinar os pontos mínimos de $\hat{f}_2^*(u)$, os quais respeitam a relação:

$$\frac{d\hat{f}_2^*}{du}(u) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{du} \left(\gamma nu + \frac{1}{2}(u - y)^2 \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma n + (u - y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u = y - \gamma n.$$

Logo, $\text{prox}_{\gamma f_2^*}(y) = y - \gamma n$.

□