Versão Intervalar de Métodos Numéricos
para a Solução do Problema de
Auto-valores de Matrizes

Cleonice Fátima Bracciali

orientador: Prof. Odelar Leite Linhares

Dissertação apresentada ao ICMSC-USP como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e
Matemática Computacional.

*ao prof. Odegar
e
a meus pais*

Agradecimentos

Ao prof. Odelar Leite Linhares, pelo estímulo e apoio desde a iniciação científica até a concretização deste trabalho, pela felicidade de ter sido sua orientanda e poder presenciar tantos exemplos de sabedoria, humildade, disposição e incentivos constantes.

À profª Eliana Xavier Linhares de Andrade, pela amizade e ótimo convívio, por todas as vezes que prontamente atendeu às minhas dúvidas e pelas inúmeras discussões e contribuições, muito importantes para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, às minhas irmãs Sonia e Ana Maria e toda minha família, por tanto carinho e confiança e também pela compreensão à minha ausência constante.

Ao Arlindo, pelo carinho, companherismo, estímulo e demasiada confiança dedicados a mim desde que nos conhecemos.

Aos meus professores do IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto e do ICMSC - USP - São Carlos, pelo estímulo e conhecimentos básicos necessários à minha formação acadêmica.

A todos os meus amigos que de uma forma ou de outra ajudaram-me a percorrer mais esta etapa de vida.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - pelo apoio financeiro que foi decisivo à realização deste trabalho e pelo permanente estímulo a meus programas de estudos e pesquisas, concedendo-me, desde agosto de 1987 até julho de 1991, bolsas de Iniciação Científica e de Mestrado.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar e analisar métodos numéricos intervalares para a solução do problema de auto-valores de matrizes reais. Serão apresentados métodos intervalares para a limitação dos auto-valores e respectivos auto-vetores de matrizes simétricas (Nickel, Zhiying), e desenvolvidas versões intervalares de métodos numéricos para a determinação do polinômio característico de matrizes (Leverrier-Faddeev, Danilevsky), bem como de métodos numéricos iterativos clássicos (Rutishauser, Francis) para a solução do citado problema.

Abstract

The main purpose of this thesis is to introduce and analyse interval numerical methods for the solution of the eigenvalue problem of real matrices. Interval methods for bounding the eigenvalues and respective eigenvectors of symmetric matrices (Nickel, Zhiying) are presented. Interval versions of numerical methods for determining the characteristic polynomial of matrices (Leverrier- Faddeev, Danilevsky), and those of some classical numerical methods (Rutishauser, Francis) to solve the above mentioned problem are also presented.

Conteúdo

Introdução	viii
1 Matemática Intervalar	1
1.1 Um Breve Histórico	1
1.2 Número Intervalar	3
1.3 Aritmética Intervalar	4
1.4 Vetores e Matrizes Intervalares	9
1.5 Espaço Métrico $I(\mathfrak{R})$	13
1.6 Aritmética Intervalar Arredondada	17
2 Métodos Intervalares para Limitar os Auto-valores e Auto-vetores de Matrizes Simétricas	23
2.1 Método Proposto por Nickel	23
2.2 Método Proposto por Zhiying	25
2.3 Observações	28
2.4 Exemplos	29

3	Versão Intervalar de Métodos para Determinação dos Auto-valores através do Polinômio Característico da Matriz	30
3.1	Versão Intervalar de Métodos Numéricos para Determinação do Polinômio Característico de Matrizes	30
3.1.1	Método de Leverrier-Faddeev	31
3.1.2	Método de Danilevsky	32
3.2	Métodos Intervalares para Determinação de Zeros de Polinômios .	33
3.2.1	Método de Newton-Moore	33
3.2.2	Método de Herzberger	34
3.2.3	Método de Hansen	35
3.2.4	Método de Arthur	39
3.3	Observações	39
3.4	Exemplos	40
4	Versão Intervalar de Métodos Iterativos para a Determinação de Auto-valores de Matrizes	50
4.1	Método LR de Rutishauser	50
4.2	Método QR de Francis	53
4.3	Observações	55
4.4	Exemplos	55
5	Conclusões	60
	Referências Bibliográficas	62

Glossário

A = intervalo real

$\dot{A}$ = intervalo real pontual

a_1 = extremo inferior de A

a_2 = extremo superior de A

$A^{(k)}$ = elemento de uma sequência de intervalos reais

$a_1^{(k)}$ = extremo inferior de $A^{(k)}$

$a_2^{(k)}$ = extremo superior de $A^{(k)}$

$\mathcal{A}$ = matriz real

a_{ij} = elemento de uma matriz real

$[A]$ = matriz intervalar real

$\dot{[A]}$ = matriz intervalar real pontual

A_{ij} = elemento de uma matriz intervalar real

a_{ij1} = extremo inferior de A_{ij}

a_{ij2} = extremo superior de A_{ij}

$[A^{(k)}]$ = elemento de uma sequência de matrizes intervalares reais

$A_{ij}^{(k)}$ = elemento de uma matriz $[A^{(k)}]$

$[x]$ = vetor intervalar real

$\dot{[x]}$ = vetor intervalar real pontual

X_k = elemento de um vetor intervalar real

$[x^{(k)}]$ = elemento de uma sequência de vetores intervalares reais

Introdução

Consideremos o problema de auto-valores de matrizes

$$Ax = \lambda x$$

onde A é matriz real $n \times n$, λ , escalar e x , um vetor real não nulo de ordem n .

O objetivo desta dissertação é estudar e analisar métodos intervalares (métodos que utilizam a teoria da Matemática Intervalar) que limitam os auto-valores e respectivos auto-vetores de matrizes reais; também construir e analisar versões intervalares de conhecidos métodos iterativos para determinação dos auto-valores de matrizes e de métodos que determinam os auto-valores de A através do cálculo dos zeros de seu polinômio característico.

Para isso, dividimos o trabalho em 05 capítulos:

No capítulo 1 - **Matemática Intervalar** - fazemos algumas considerações gerais e um breve relato histórico sobre a Matemática Intervalar, e introduzimos os conceitos básicos necessários à compreensão e desenvolvimento da Dissertação, como: a noção de número intervalar, a aritmética intervalar na sua forma natural e arredondada, as propriedades métricas dos intervalos e o conceito de avaliação intervalar de uma função.

No capítulo 2 - **Métodos Intervalares para limitar os auto-valores e auto-vetores de matrizes simétricas** - apresentamos, e analisamos criticamente, métodos intervalares já existentes para a solução do problema auto-valores de matrizes simétricas.

No capítulo 3 - **Versão Intervalar de Métodos para Determinação do Auto-valores através do Polinômio Característico da Matriz** - desenvolvemos a versão intervalar de métodos numéricos para construção do polinômio característico de matrizes reais, e sugerimos alguns métodos intervalares para determinar os zeros desse polinômio.

No capítulo 4 - **Versão Intervalar de Métodos Iterativos para a Determinação dos Auto-valores de Matrizes** - construímos versões intervalares dos métodos iterativos LR, de Rutishauser e QR, de Francis para a solução do problema de auto-valores de matrizes.

No capítulo 5 - **Conclusões** - aqui apresentamos as conclusões e observações finais.

Por último, nas **Referências Bibliográficas** relacionamos os livros e artigos por nós consultados.

Capítulo 1

Matemática Intervalar

Neste capítulo faremos algumas considerações, falaremos um pouco da história da Matemática Intervalar e introduzimos os conceitos, as técnicas básicas e as propriedades, necessários à compreensão dos capítulos posteriores, e que podem ser encontrados em Alefeld [1].

1.1 Um Breve Histórico

Ao executarmos um processo numérico para a resolução de um problema em um computador, onde os cálculos são efetuados com precisão finita, é necessário fazermos estudos para verificar se o resultado obtido está próximo da solução exata e saber qual foi o erro cometido.

A Análise Intervalar consegue resolver, ao mesmo tempo e automaticamente, fazendo uso de sub-rotinas adequadas, os vários erros comuns aos cálculos computacionais, tais como, erros de arredondamento da máquina, erros de truncamento de processos infinitos, dados iniciais calculados de forma imprecisa, propagação destes erros, etc. . .

A base da Matemática Intervalar é o intervalo, uma extensão de número real, representado por um par ordenado de números reais, seus extremos.

Os métodos numéricos intervalares, utilizam a aritmética intervalar e sub-rotinas para controlar os erros de arredondamento da máquina, obtendo-se desta forma, intervalos cujos extremos têm precisão finita e que contêm os resultados exatos de precisão infinita. Os objetivos da Matemática Intervalar, neste

caso, tornam-se: produzir algoritmos computacionais para encontrar intervalos contendo as soluções procuradas e tornar estes intervalos tão pequenos quanto possível.

O uso de intervalos para controlar os erros de cálculos computacionais na Análise Numérica é recente, mas a idéia, de se obter um intervalo que contenha o resultado desejado é bem antiga. Temos o exemplo do “Método de Arquimedes” para aproximação do número π . Arquimedes considerou um círculo de diâmetro d , e deduziu um método para se calcular a razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro da seguinte forma: inicialmente considerou polígonos regulares, de 6 lados, inscritos e circunscritos à circunferência e, a cada passo, dobrava o número de lados e calculava seus perímetros. Assim, obteve uma sequência crescente de limites inferiores e uma sequência decrescente de limites superiores para a razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro, dividindo os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos pelo diâmetro.

Temos muitos outros exemplos de uso de intervalos na matemática, como a definição dos números reais através de intervalos encaixantes com extremos racionais, intervalos de confiança em Estatística, etc ...

A introdução do conceito de número intervalar na Análise Numérica, é devida a P. S. Dwyer que, em 1951, no livro “Linear Computations”, define as operações aritméticas básicas para intervalos (adição, subtração, multiplicação, divisão) e é considerado o criador da Matemática Intervalar.

Desde a publicação do livro “Interval Analysis” de R. E. Moore da Universidade de Wisconsin, em 1966, e traduzido para o alemão em 1969, a Matemática Intervalar vem se desenvolvendo rapidamente. Em 1974, G. Alefeld (Universidade de Karlsruhe) e J. Herzberger (Universidade de Oldenburg) publicaram o livro “Einführung in die Intervallrechnung” traduzido para o inglês em 1983. Em 1979, R. E. Moore publica o livro “Methods and Applications of Interval Analysis”, que possui, em seu apêndice, uma vasta bibliografia sobre o assunto (760 títulos), incluindo trabalhos publicados e não publicados, cobrindo o período de 1951 a 1979.

O periódico Freiburger Intervall-Berichte, publicado pela Universidade de Freiburg, Alemanha, sob coordenação do Professor K. L. E. Nickel divulga, desde 1978, tudo o que de mais significativo se produz, em todo o mundo, sobre Matemática Intervalar.

Inicialmente, este ramo da Análise Numérica, era conhecido como Análise Intervalar. Em 1974, L. Fox, da Universidade de Oxford, Inglaterra propôs o nome “Matemática Intervalar” para unificar as áreas como: análise

intervalar, aritmética intervalar, topologia intervalar, etc ...

Vários simpósios internacionais sobre Matemática Intervalar foram realizados. O primeiro foi organizado por L. Fox, 1968, em Oxford, Inglaterra. Os trabalhos apresentados neste simpósio foram reunidos e editados por E. R. Hansen, em "Topics in Interval Analysis", Oxford Press, 1969. O segundo, realizado em maio de 1975, em Karlsruhe, Alemanha, teve seus trabalhos editados por K. Nickel, em "Interval Mathematics", Lectures Notes in Computer Science, v.29, 1975. Em Freiburg, foram realizados simpósios internacionais em maio de 1980 e setembro de 1985 e seus trabalhos foram editados também por K. Nickel em "Interval Mathematics 1980", Academic Press, e "Interval Mathematics 1985", Lectures Notes in Computer Science, v.212, respectivamente.

1.2 Número Intervalar

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, cujos elementos serão denotados por letras minúsculas ($a, b, c, \dots$).

Definição 1.1 *Define-se por número intervalar real ou intervalo real ou simplesmente intervalo o subconjunto de $\mathbb{R}$:*

$$[a_1, a_2] = \{a \in \mathbb{R} : a_1 \leq a \leq a_2\}.$$

Denotaremos por $I(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os intervalos reais, e os seus elementos por letras maiúsculas ($A, B, C, \dots$).

Definição 1.2 *Seja $A = [a_1, a_2]$ intervalo real. Se $a_1 = a_2$ então A é chamado intervalo pontual ou degenerado.*

Pode-se escrever qualquer elemento de $\mathbb{R}$ como um elemento de $I(\mathbb{R})$, ou seja, $a \in \mathbb{R}$, pode ser representado por $[a, a] \in I(\mathbb{R})$.

Definição 1.3 *Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ intervalos reais.*

- *Se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $a_1 \leq t \leq a_2$ então dizemos que t pertence a A , ou seja, $t \in A$.*

- *A e B são ditos iguais se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.*

- Dizemos que A está contido em B se, e somente se, $b_1 \leq a_1$ e $a_2 \leq b_2$, ou seja, $A \subset B \Leftrightarrow b_1 \leq a_1$ e $a_2 \leq b_2$.

- Dizemos que A é menor do que B se, e somente se, $a_2 < b_1$, definindo assim uma ordem parcial para elementos de $I(\mathbb{R})$.

Definição 1.4 Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ intervalos reais.

- A intersecção de A e B , $A \cap B$, é definida como o intervalo

$$A \cap B = [\max \{a_1, b_1\}, \min \{a_2, b_2\}]$$

Se $a_1 > b_2$ ou $b_1 > a_2$ então a intersecção é vazia, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

- Se $A \cap B \neq \emptyset$, define-se a união de A e B , $A \cup B$, como o intervalo

$$A \cup B = [\min \{a_1, b_1\}, \max \{a_2, b_2\}]$$

1.3 Aritmética Intervalar

Definição 1.5 Seja $*$ um dos símbolos $\{+, -, \cdot, /\}$, representando uma das operações aritméticas. As operações aritméticas sobre intervalos são definidas por

$$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}, \text{ onde } A, B \in I(\mathbb{R}),$$

com a condição de que $0 \notin B$, para a divisão.

Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2] \in I(\mathbb{R})$. É fácil mostrar que :

1. $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$.
2. $-B = [-b_2, -b_1]$.
3. $A - B = A + (-B) = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$.
4. $A \cdot B = [\min \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \max \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]$.
5. Se $0 \notin B$, $1/B = [1/b_2, 1/b_1]$.
6. Se $0 \notin B$, $A/B = A \cdot 1/B = A \cdot [1/b_2, 1/b_1]$.

Propriedades da Aritmética Intervalar

Propriedades 1.1 *Sejam A, B e $C \in I(\mathbb{R})$, então valem:*

1. *para a adição intervalar*

- $A + B = B + A$ (comutativa)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)
- $\exists [0, 0] \in I(\mathbb{R})$ tal que $A + [0, 0] = [0, 0] + A = A$ (elemento neutro)
- Se $A = [a_1, a_2]$ é tal que $a_1 \neq a_2$ então $0 \in (A - A)$
Obs: não existe elemento inverso para a adição intervalar.

2. *para a multiplicação intervalar*

- $A \cdot B = B \cdot A$ (comutativa)
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa)
- $\exists [1, 1] \in I(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot [1, 1] = [1, 1] \cdot A = A$ (elemento neutro)
- Se $0 \notin A$ então $1 \in (A/A)$
Obs: não existe elemento inverso para a multiplicação intervalar.

- 3.
- $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$ (subdistributividade)
 - Se $t \in \mathbb{R}$, então $t \cdot (A + B) = t \cdot A + t \cdot B$
 - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, se $b \cdot c \geq 0$ para todo $b \in B$ e $c \in C$.

Prova: Ver Alefeld [1], capítulo 1.

Teorema 1.1 (Monotonicidade da Inclusão) *Sejam A_1, A_2, B_1 e $B_2 \in I(\mathbb{R})$ tais que*

$$A_1 \subseteq B_1 \quad \text{e} \quad A_2 \subseteq B_2.$$

Então, para as operações aritméticas intervalares $$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ segue que*

$$A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2.$$

Prova:

$$A_1 \subseteq B_1 \Rightarrow (a \in A_1 \Rightarrow a \in B_1),$$

$$A_2 \subseteq B_2 \Rightarrow (a \in A_2 \Rightarrow a \in B_2),$$

então

$$A_1 * A_2 = \{a_1 * a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} \subseteq \{a_1 * a_2 : a_1 \in B_1, a_2 \in B_2\} = B_1 * B_2.$$

Definição 1.6 Se $r(x)$ é uma operação unitária contínua sobre $\mathbb{R}$, então

$$r(X) = [\min_{x \in X} r(x), \max_{x \in X} r(x)]$$

define uma operação unitária sobre $I(\mathbb{R})$.

Ex: $X^k (k \in \mathbb{R}), e^X, \ln(X), \sin(X), \cos(X), \text{ etc...}$

Note que se $0 \in X, X^2 \neq X \cdot X$

Ex: $X = [-2, 3]$

$X^2 = [0, 9]$

$X \cdot X = [-6, 9]$

Definição 1.7 Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ intervalos reais. Defina-se:

- Ponto médio de A como o número real

$$m(A) = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

- Distância entre A e B como o número real

$$d(A, B) = \max \{ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \}$$

- Valor absoluto de A como o número real

$$|A| = \max \{ |a_1|, |a_2| \} = \max_{a \in A} |a| = d(A, [0, 0])$$

- Diâmetro de A como o número real

$$D(A) = a_2 - a_1 \geq 0$$

Propriedades 1.2 Sejam $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2]$ e $E = [e_1, e_2]$ intervalos reais. Então:

1. (a) $d(A, B) \geq 0$ e, $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- (b) $d(A, B) = d(B, A)$
- (c) $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$

- (d) $d(A + B, A + C) = d(B, C)$
 (e) $d(A + B, C + E) \leq d(A, C) + d(B, E)$
 (f) $d(t \cdot A, t \cdot B) = |t| \cdot d(A, B), \quad t \in \mathfrak{R}$
 (g) $d(A \cdot B, A \cdot C) \leq |A| \cdot d(B, C).$

2. (a) $|A| \geq 0 \quad e, \quad |A| = 0 \Leftrightarrow A = [0, 0]$
 (b) $|A + B| \leq |A| + |B|$
 (c) $|t \cdot A| = |t| \cdot |A|, \quad t \in \mathfrak{R}$
 (d) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
 (e) $Se A \subseteq B \text{ então } |A| \leq |B|.$

3. (a) $D(A) = |A - A|$
 (b) $A \subseteq B \Rightarrow D(A) \leq D(B)$
 (c) $D(A \pm B) = D(A) + D(B)$
 (d) $D(A \cdot B) \leq D(A) \cdot |B| + |A| \cdot D(B)$
 (e) $D(t \cdot A) = |t| \cdot D(A), \quad t \in \mathfrak{R}$

Provas:

Daremos as provas de algumas propriedades; as demais provas podem ser encontradas em Alefeld [1].

$$1.(a) \quad d(A, B) = \max \{ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \} \geq 0 \text{ e,}$$

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \max \{ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \} = 0 \Leftrightarrow |a_1 - b_1| = |a_2 - b_2| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a_1 - b_1| = 0 \\ |a_2 - b_2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$$

$$1.(b) \quad d(A, B) = \max \{ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \} = \max \{ |b_1 - a_1|, |b_2 - a_2| \} = d(B, A).$$

$$1.(c) \quad d(A, C) + d(C, B) = \max \{ |a_1 - c_1|, |a_2 - c_2| \} + \max \{ |c_1 - b_1|, |c_2 - b_2| \}$$

$$\geq \max \{ |a_1 - c_1| + |c_1 - b_1|, |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2| \}$$

$$\geq \max \{ |a_1 - c_1 + c_1 - b_1|, |a_2 - c_2 + c_2 - b_2| \}$$

$$= \max \{ |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \}$$

$$= d(A, B)$$

$$1.(d) \quad d(A + B, A + C) = d([a_1 + b_1, a_2 + b_2], [a_1 + c_1, a_2 + c_2])$$

$$\begin{aligned}
&= \max \{ | (a_1 + b_1) - (a_1 + c_1) |, | (a_2 + b_2) - (a_2 + c_2) | \} \\
&= \max \{ | b_1 - c_1 |, | b_2 - c_2 | \} \\
&= d(B, C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.(e) \quad d(A + B, C + E) &= d([a_1 + b_1, a_2 + b_2], [c_1 + e_1, c_2 + e_2]) \\
&= \max \{ | (a_1 + b_1) - (c_1 + e_1) |, | (a_2 + b_2) - (c_2 + e_2) | \} \\
&= \max \{ | (a_1 - c_1) + (b_1 - e_1) |, | (a_2 - c_2) + (b_2 - e_2) | \} \\
&\leq \max \{ | (a_1 - c_1) | + | (b_1 - e_1) |, | (a_2 - c_2) | + | (b_2 - e_2) | \} \\
&\leq \max \{ | a_1 - c_1 |, | a_2 - c_2 | \} + \max \{ | b_2 - e_1 |, | b_2 - e_2 | \} \\
&= d(A, C) + d(B, E)
\end{aligned}$$

$$1.(f) \quad d(t \cdot A, t \cdot B) = d(t \cdot [a_1, a_2], t \cdot [b_1, b_2])$$

$$\begin{aligned}
\text{Se } t \geq 0 \Rightarrow t \cdot [a_1, a_2] &= [t \cdot a_1, t \cdot a_2] \\
t \cdot [b_1, b_2] &= [t \cdot b_1, t \cdot b_2]
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
d(t \cdot A, t \cdot B) &= d([t \cdot a_1, t \cdot a_2], [t \cdot b_1, t \cdot b_2]) \\
&= \max \{ | t \cdot a_1 - t \cdot b_1 |, | t \cdot a_2 - t \cdot b_2 | \} \\
&= \max \{ | t | \cdot | a_1 - b_1 |, | t | \cdot | a_2 - b_2 | \} \\
&= | t | \cdot \max \{ | a_1 - b_1 |, | a_2 - b_2 | \} \\
&= | t | \cdot d(A, B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Se } t < 0 \Rightarrow t \cdot [a_1, a_2] &= [t \cdot a_2, t \cdot a_1] \\
t \cdot [b_1, b_2] &= [t \cdot b_2, t \cdot b_1]
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
d(t \cdot A, t \cdot B) &= d([t \cdot a_2, t \cdot a_1], [t \cdot b_2, t \cdot b_1]) \\
&= \max \{ | t \cdot a_2 - t \cdot b_2 |, | t \cdot a_1 - t \cdot b_1 | \} \\
&= \max \{ | t | \cdot | a_2 - b_2 |, | t | \cdot | a_1 - b_1 | \} \\
&= | t | \cdot \max \{ | a_2 - b_2 |, | a_1 - b_1 | \} \\
&= | t | \cdot d(A, B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.(d) \quad | A \cdot B | &= \max_{x \in A \cdot B} | x | = \max_{a \in A, b \in B} | a \cdot b | \\
&= \max_{a \in A, b \in B} | a | \cdot | b | = \max_{a \in A} | a | \cdot \max_{b \in B} | b | \\
&= | A | \cdot | B |
\end{aligned}$$

2.(e) Seja $A \subseteq B$. Então, para todo $a \in A \Rightarrow a \in B$.

Assim, $| A | = \max_{a \in A} | a | \leq \max_{a \in B} | a | = | B |$.

$$\begin{aligned}
3.(a) \quad |A - A| &= |[a_1, a_2] - [a_1, a_2]| = |[a_1 - a_2, a_2 - a_1]| \\
&= \max\{|a_1 - a_2|, |a_2 - a_1|\} = \max\{|a_2 - a_1|, |a_2 - a_1|\} \\
&= |a_2 - a_1| = a_2 - a_1 \\
&= D(A).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.(c) \quad D(A + B) &= D([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) = D([a_1 + b_1, a_2 + b_2]) \\
&= (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \\
&= D(A) + D(B) \\
D(A - B) &= D([a_1, a_2] - [b_1, b_2]) = D([a_1 - b_2, a_2 - b_1]) \\
&= (a_2 - b_1) - (a_1 - b_2) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \\
&= D(A) + D(B)
\end{aligned}$$

1.4 Vetores e Matrizes Intervalares

Definição 1.8 – Um vetor intervalar real é um vetor cujos elementos são intervalos reais.

– Uma matriz intervalar real é uma matriz cujos elementos são intervalos reais.

Denotaremos por $V_n(I(\mathbb{R}))$ o conjunto de todos os vetores intervalares reais de dimensão n e seus elementos por letras minúsculas entre colchetes $([a], [b], \dots)$. E por $M_{mn}(I(\mathbb{R}))$ o conjunto de todas as matrizes intervalares reais de dimensão $m \times n$ e seus elementos por letras maiúsculas entre colchetes $([A], [B], \dots)$.

Definição 1.9 Sejam as matrizes intervalares $[A] = (A_{ij})$, $[B] = (B_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$,

$$[A] = [B] \text{ se, e somente se, } A_{ij} = B_{ij}, \text{ para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

$$[A] \subseteq [B] \text{ se } A_{ij} \subseteq B_{ij}, \text{ para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Definição 1.10 Seja a matriz $[A] = (A_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$; se os elementos de $[A]$ são intervalos pontuais, $[A]$ é chamada matriz pontual e será denotada por $[A]$.

Definição 1.11 Sejam $[A] = (A_{ij})$ e $[B] = (B_{ij})$ matrizes intervalares reais. A intersecção de $[A]$ e $[B]$ é definida como a matriz intervalar

$$[A] \cap [B] = (A_{ij} \cap B_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Definição 1.12 *Sejam as matrizes $[A] = (A_{ij}), [B] = (B_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$. Definimos, adição e subtração sobre $M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$ por:*

$$[A] + [B] = ((A + B)_{ij}) = (A_{ij} + B_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$[A] - [B] = ((A - B)_{ij}) = (A_{ij} - B_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Definição 1.13 *Sejam as matrizes $[A] = (A_{ik}) \in M_{mp}(I(\mathfrak{R}))$ e $[B] = (B_{kj}) \in M_{pn}(I(\mathfrak{R}))$. Define-se multiplicação intervalar de $[A]$ por $[B]$ como a matriz intervalar:*

$$[A] \cdot [B] = \left(\sum_{k=1}^p A_{ik} \cdot B_{kj} \right), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Definição 1.14 *Seja a matriz $[A] = (A_{ij}) \in M_{nn}(I(\mathfrak{R}))$. Define-se por traço de $[A]$, o intervalo real :*

$$tr([A]) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

Definição 1.15 *Sejam a matriz $[A] = (A_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$ e o intervalo real X . Define-se multiplicação intervalar de $[A]$ por X como a matriz intervalar:*

$$[A] \cdot X = X \cdot [A] = (X \cdot A_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Dada a matriz intervalar real $[A]$ de ordem n , entende-se por matriz inversa intervalar de $[A]$ a matriz que contém as matrizes inversas de todas as matrizes pontuais pertencentes a $[A]$. Notação: $[A^{-1}]$.

O produto da matriz intervalar pela sua inversa intervalar contém a matriz identidade real, isto é:

$$[A] \cdot [A^{-1}] \supseteq [I_n]$$

$$[A^{-1}] \cdot [A] \supseteq [I_n]$$

Entende-se por matriz ortogonal intervalar, a matriz intervalar $[Q]$ que satisfaz:

$$[Q^t] = [Q^{-1}]$$

Propriedades 1.3 Para matrizes e vetores intervalares valem as seguintes propriedades:

- $[A] \pm [B] = \{[A] \pm [B] : [A] \in [A], [B] \in [B]\}$, onde $[A]$ e $[B] \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$.
- $\{[A] \cdot [B] : [A] \in [A], [B] \in [B]\} \subseteq \{[M] : [M] \in [A] \cdot [B]\}$, onde $[A] \in M_{mn}(I(\mathbb{R}))$, $[B] \in M_{np}(I(\mathbb{R}))$.

Propriedades 1.4 Se $[A]$, $[B]$ e $[C]$, são matrizes intervalares reais, então valem:

- $[A] + [B] = [B] + [A]$
- $([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$
- $[A] + [0] = [0] + [A] = [A]$, onde $[0]$ é a matriz nula
- $[A] \cdot [I] = [I] \cdot [A] = [A]$, onde $[I]$ é a matriz identidade real
- $([A] + [B]) \cdot [C] \subseteq [A] \cdot [C] + [B] \cdot [C]$
- $[A] \cdot ([B] + [C]) \subseteq [A] \cdot [B] + [A] \cdot [C]$ (subdistributividade)

Provas: Ver Alefeld [1], capítulo 10.

Teorema 1.2 (Monotonicidade da Inclusão) Sejam $[A_1]$, $[A_2]$, $[B_1]$ e $[B_2]$ matrizes intervalares reais e $X, Y \in I(\mathbb{R})$, tais que

$$[A_1] \subseteq [B_1], \quad [A_2] \subseteq [B_2] \quad \text{e} \quad X \subseteq Y.$$

Então, para $*$ $\in \{+, -, \cdot\}$ temos

$$[A_1] * [A_2] \subseteq [B_1] * [B_2] \quad \text{e}$$

$$X \cdot [A_1] \subseteq Y \cdot [B_1].$$

Prova análoga à do Teorema 1.1.

Definição 1.16 Sejam $[A] = (A_{ij})$ e $[B] = (B_{ij}) \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$. Definimos:

- Matriz ponto médio de $[A]$ como a matriz real

$$[M]([A]) = (m(A_{ij}));$$

- Distância entre $[A]$ e $[B]$ como a matriz real não negativa

$$d([A], [B]) = (d(A_{ij}, B_{ij})), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n;$$

- Valor absoluto de $[A]$ como a matriz real não negativa

$$|[A]| = (|A_{ij}|), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n;$$

- Diâmetro de $[A]$ como a matriz real não negativa

$$D([A]) = (D(A_{ij})), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Propriedades 1.5 Se $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ são matrizes intervalares reais e $[0]$ matriz nula intervalar, então valem:

- $d([A], [B]) = [0] \Leftrightarrow [A] = [B]$, $[A], [B] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $d([A] + [B], [A] + [C]) = d([B], [C])$, $[A], [B], [C] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $d([A] + [B], [C] + [D]) \leq d([A], [C]) + d([B], [D])$, $[A], [B], [C], [D] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $d([A] \cdot [B], [A] \cdot [C]) \leq |[A]| \cdot d([B], [C])$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R})), [B], [C] \in M_{np}(I(\mathfrak{R}))$;
- $d([A], [B]) \leq d([A], [C]) + d([B], [C])$, $[A], [B], [C] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $|[A]| \geq [0]$ e $|[A]| = [0] \Leftrightarrow [A] = [0]$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $[A] \subseteq [B] \Rightarrow |[A]| \leq |[B]|$, $[A], [B] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $|[A] + [B]| \leq |[A]| + |[B]|$, $[A], [B] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $|t \cdot [A]| = |[A] \cdot t| = |t| \cdot |[A]|$, $t \in \mathfrak{R}$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;

- $| [A] \cdot [B] | \leq | [A] | \cdot | [B] |$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$, $[B] \in M_{np}(I(\mathfrak{R}))$;
- $[A] \subseteq [B] \Rightarrow D([A]) \leq D([B])$, $[A], [B] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $D([A] \pm [B]) = D([A]) + D([B])$, $[A], [B] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$;
- $D([A] \cdot [B]) \geq | [A] | \cdot D([B])$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$, $[B] \in M_{np}(I(\mathfrak{R}))$;
- $D([A] \cdot [B]) \geq D([A]) \cdot | [B] |$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$, $[B] \in M_{np}(I(\mathfrak{R}))$;
- $D(t \cdot [A]) = | t | \cdot D([A])$, $t \in \mathfrak{R}$, $[A] \in M_{mn}(I(\mathfrak{R}))$.

Provas análogas às das Propriedades 1.2.

1.5 Espaço Métrico $I(\mathfrak{R})$

Com a definição 1.7 de distância entre dois intervalos, a função

$$d : I(\mathfrak{R}) \times I(\mathfrak{R}) \longrightarrow \mathfrak{R}^+$$

$$d([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = \max \{ | a_1 - b_1 |, | a_2 - b_2 | \}$$

é uma métrica sobre $I(\mathfrak{R})$ e $(I(\mathfrak{R}), d)$ é então um espaço métrico, que chamaremos de espaço métrico $I(\mathfrak{R})$, pois para quaisquer A , B , e $C \in I(\mathfrak{R})$ valem:

$$\text{i) } d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$\text{ii) } d(A, B) = d(B, A)$$

$$\text{iii) } d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

(Ver Propriedades 1.2).

A distância d entre dois intervalos $A, B \in I(\mathfrak{R})$ reduz-se a distância entre reais quando tomamos intervalos pontuais. A métrica d sobre $I(\mathfrak{R})$ é uma generalização da distância entre dois pontos do espaço $\mathfrak{R}$.

Podemos, agora, introduzir os conceitos de continuidade e de convergência.

Funções no $I(\mathfrak{R})$

Seja (M, ρ) , $M \subseteq \mathfrak{R}$ um espaço métrico com a função distância ρ .

Seja o espaço métrico $I(\mathfrak{R})$ com a distância d .

Seja $F : M \longrightarrow I(\mathfrak{R})$ uma função com valores intervalares.

Definição 1.17 *A função intervalar F é contínua em $x \in M$, se, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in M$, com $\rho(x, y) < \delta$, então $d(F(x), F(y)) < \epsilon$.*

Entendemos por função real racional, uma função nas variáveis reais $x_1, \dots, x_n$, cuja expressão funcional $f(x_1, \dots, x_n)$ é composta de um número finito de operandos reais e operações aritméticas reais. E por função intervalar racional, uma função nas variáveis intervalares $X_1, \dots, X_n$, cuja expressão funcional $F(X_1, \dots, X_n)$ é composta de um número finito de operandos intervalares e operações aritméticas intervalares.

Vamos considerar, a partir de agora, f função real, contínua e definida em algum subconjunto M de $\mathfrak{R}^n$,

$$f : M \longrightarrow \mathfrak{R}.$$

Definição 1.18 *Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma função real racional. A função intervalar racional $F(X_1, \dots, X_n)$ é uma extensão ou avaliação intervalar de f , se $F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ para $x_i \in X_i$, argumentos reais.*

Definição 1.19 *A extensão intervalar natural de uma função real racional f , é a função em que substituímos as variáveis reais por intervalares e as operações aritméticas reais por operações aritméticas intervalares.*

Pretendemos limitar a imagem de uma função real em algum intervalo (ou conjunto de intervalos) através de extensão intervalar.

Se $f(x_1, \dots, x_n)$ é uma função racional real, onde cada variável aparece somente uma vez na expressão, então a avaliação intervalar correspondente, $F(X_1, \dots, X_n)$, fornecerá a imagem de f , para $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é,

$$F(X_1, \dots, X_n) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Por isso, para uma função racional real de uma variável x , onde esta variável aparece n vezes em sua expressão funcional, é interessante substituir cada ocorrência de x por outras variáveis $x_1, \dots, x_n$.

Se a função é um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, seja $a_0 + x(a_1 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots)$ a forma de Horner para o polinômio. Devido à propriedade da subdistributividade dos intervalos temos que:
 $A_0 + A_1X + A_2XX + A_3XXX + \dots + A_nXX \dots X \supseteq$
 $A_0 + X(A_1 + X(A_2 + \dots + X(A_n) \dots))$.

Conclui-se que a avaliação intervalar da expressão do polinômio na forma de Horner produz intervalo de diâmetro menor que a avaliação intervalar da expressão original.

Ex: Seja o polinômio real $p(x) = 3 - 4x + \frac{1}{2}x^2$;
queremos saber, por exemplo, os valores de $p(x)$ para $x \in [1, 2]$.

A extensão intervalar natural de $p(x)$ é o polinômio intervalar
 $P(X) = [3, 3] - [4, 4]X + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]X^2$.

$$P([1, 2]) = [3, 3] - [4, 4][1, 2] + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}][1, 2]^2 = [-4.5, 1].$$

Usando a propriedade da subdistributividade, encontramos a seguinte extensão intervalar para $p(x)$:

$$Q(X) = [3, 3] + X(-[4, 4] + X[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]).$$

$$Q([1, 2]) = [3, 3] + [1, 2](-[4, 4] + [1, 2][\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [-4, 0].$$

Vemos que $P([1, 2]) \supset Q([1, 2])$.

Deve-se tomar cuidado quando a avaliação intervalar for feita para um intervalo que contenha o 0, pois se $0 \in X$, $X^2 \neq X \cdot X$.

Se $P(X) = A_0 + A_1X + A_2XX + A_3XXX + \dots + A_nXX \dots X$ e $R(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \dots + A_nX^n$, então para $0 \in X$, $P(X) \neq R(X)$.

Convergência

Seja uma sequência de intervalos $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}, \dots$, onde $A^{(i)} = [a_1^{(i)}, a_2^{(i)}]$, $i = 0, 1, \dots, k, \dots$, que denotamos por $\{A^{(k)}\}_{k=0}^\infty$.

Definição 1.20 Uma sequência de intervalos $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge para um intervalo $A = [a_1, a_2]$ se, e somente se, as sequências dos extremos inferiores $\{a_1^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ e dos extremos superiores $\{a_2^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ convergem para a_1 e a_2 respectivamente, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} a_1^{(k)} = a_1 & e \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_2^{(k)} = a_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d(A^{(k)}, A) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_1^{(k)} - a_1| = 0 & e \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |a_2^{(k)} - a_2| = 0 \end{pmatrix}$$

Definição 1.21 Uma sequência $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $A^{(0)} \supseteq A^{(1)} \supseteq \dots \supseteq A^{(k)}, \dots$ é dita uma sequência de intervalos encaixantes.

Teorema 1.3 Uma sequência de intervalos encaixantes $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge para o intervalo $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$.

Prova:

Seja $A^{(k)} = [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}]$. Então,

$\{a_1^{(k)}\}$ é uma sequência de números reais não decrescente limitada por $a_2^{(k)}$, e seja a_1 o seu limite e,

$\{a_2^{(k)}\}$ é uma sequência de números reais não crescente limitada por $a_1^{(k)}$, e seja a_2 o seu limite.

Como $a_1^{(k)} \leq a_2^{(k)}$ para todo k , temos que $a_1 \leq a_2$.

Logo $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge para $[a_1, a_2] = A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$.

Corolário 1.3.1 Toda sequência de matrizes intervalares $m \times n$, $\{[A^{(k)}]\}_{k=0}^{\infty}$, tal que $[A^{(0)}] \supseteq [A^{(1)}] \supseteq \dots \supseteq [A^{(k)}], \dots$, converge para uma matriz intervalar $[A] = (A_{ij})$, onde $A_{ij} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{ij}^{(k)}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição 1.22 Uma sequência de intervalos $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ tem convergência finita se existe um número inteiro positivo m tal que $A^{(k)} = A^{(m)}$ para todo $k \geq m$. Esta sequência será chamada de sequência convergente em m passos.

Exemplo:

$$\begin{aligned}
 A^{(0)} &= [0.000, 1.000] \\
 A^{(1)} &= [0.333, 0.667] \\
 A^{(2)} &= [0.444, 0.556] \\
 A^{(3)} &= [0.481, 0.519] \\
 A^{(4)} &= [0.493, 0.507] \\
 A^{(5)} &= [0.497, 0.503] \\
 A^{(6)} &= [0.499, 0.501] \\
 A^{(7)} &= [0.499, 0.501]
 \end{aligned}$$

Observação: Usando a representação de máquina com precisão finita, qualquer sequência de intervalos encaixantes tem convergência finita.

Teorema 1.4 *Seja $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ tal que existe um número real t , $t \in A^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Definimos a sequência de intervalos $\{B^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ por:*

$$B^{(0)} = A^{(0)}$$

$$B^{(k+1)} = A^{(k+1)} \cap B^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Então $\{B^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes com limite B e

$$t \in B \subseteq B^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1.6 Aritmética Intervalar Arredondada

Na prática, a aritmética real de precisão infinita não é possível de ser executada e sempre estaremos limitados a aritmética aproximada de precisão finita da máquina, o que provoca erros de arredondamento.

A aritmética intervalar, por si só, não nos dará os limites superiores e inferiores para a solução exata de muitos problemas. Em toda operação aritmética intervalar executada por um computador, usa-se a aritmética real para se obter os extremos dos intervalos resultantes e, portanto, continuamos com os erros de arredondamento da máquina. Surge, então, a necessidade de criarmos sub-rotinas que arredondem o extremo inferior, para a esquerda, e o extremo superior, para a direita, de modo a se obter um intervalo de máquina que contenha o intervalo verdadeiro.

Sabemos que um computador pode representar somente um conjunto finito de números que, em aritmética de ponto flutuante, escreve-se sob a

forma:

$$\pm 0, d_1 d_2 \dots d_n \cdot b^e = \pm m \cdot b^e \quad (1.1)$$

onde

$$1 \leq d_1 \leq b-1 \text{ e } 0 \leq d_i \leq b-1, i = 2, \dots, n,$$

b é a base, geralmente igual a 2, $e \in \mathbb{Z}$ é o expoente, limitado por $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$, dependendo da máquina a ser utilizada ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros).

Denotemos por $\mathbb{R}_M$ o conjunto de todos os números de máquina. É fácil ver que $\mathbb{R}_M \subset \mathbb{R}$.

Os números reais podem ser arredondados pelos números de máquina utilizando-se a função definida a seguir.

Definição 1.23 *Seja f_a uma função definida da seguinte forma:*

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_M$$

$$f_a(x) = \bar{x} = m \cdot b^e$$

f_a é chamada função arredondamento se

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y).$$

Definição 1.24 *Seja $\uparrow : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_M$ uma função arredondamento, $\uparrow$ é chamada de função arredondamento direcionado para cima (por excesso) se*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \uparrow(x)$$

Definição 1.25 *Seja $\downarrow : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_M$ uma função arredondamento, $\downarrow$ é chamada de função arredondamento direcionado para baixo (por falta) se*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \downarrow(x) \leq x$$

Escolhemos as funções arredondamento $\uparrow$ e $\downarrow$ de tal forma que:

$$\uparrow(x) = -(\downarrow(-x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

e para qualquer função arredondamento $f_a(x)$,

$$\uparrow(x) \leq f_a(x) \text{ e } \downarrow(x) \geq f_a(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Utilizamos estas funções arredondamento em $\mathfrak{R}$ para arredondar convenientemente os extremos dos intervalos de $I(\mathfrak{R})$ obtidos por alguma operação aritmética intervalar.

Denotaremos por $I(\mathfrak{R}_M)$ o conjunto dos intervalos cujos extremos estão em $\mathfrak{R}_M$, ou seja, $I(\mathfrak{R}_M) = \{[x_1, x_2] : x_1, x_2 \in \mathfrak{R}_M\} \subset I(\mathfrak{R})$, ou ainda, $I(\mathfrak{R}_M)$ é o conjunto dos intervalos de máquina.

Definição 1.26 *Seja $\uparrow$ uma função, da seguinte forma:*

$$\uparrow: I(\mathfrak{R}) \longrightarrow I(\mathfrak{R}_M)$$

$$X \longmapsto \uparrow(X)$$

$\uparrow$ é chamada função arredondamento intervalar se

$$i) X \in I(\mathfrak{R}) \Rightarrow X \subseteq \uparrow(X)$$

$$ii) X, Y \in I(\mathfrak{R}), X \subseteq Y \Rightarrow \uparrow(X) \subseteq \uparrow(Y)$$

Propriedades 1.6 $X \in I(\mathfrak{R}_M) \Rightarrow \uparrow(X) = X$

Se $X = [x_1, x_2]$, então escolhemos as funções arredondamento $\uparrow, \downarrow$ e $\uparrow$ de tal forma que:

$$\uparrow(X) = \uparrow([x_1, x_2]) = [\downarrow(x_1), \uparrow(x_2)]$$

$$\text{ou } \uparrow(X) = \uparrow([x_1, x_2]) = [\downarrow(x_1), -(\downarrow(-x_2))]$$

O nosso próximo passo será associar toda esta discussão sobre arredondamento às operações aritméticas intervalares. A isto chamaremos de Aritmética Intervalar Arredondada (AIA).

Teorema 1.5 *Sejam as operações aritméticas intervalares e A_1, A_2, B_1 e $B_2 \in I(\mathfrak{R}_M)$ tais que $A_1 \subseteq B_1$ e $A_2 \subseteq B_2$. Se $C_1 = \uparrow(A_1 * A_2)$ e $C_2 = \uparrow(B_1 * B_2)$ então $C_1 \subseteq C_2$.*

Teorema 1.6 *Sejam $A, B \in I(\mathfrak{R}_M)$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ operações aritméticas intervalares e seja $\uparrow$ a função arredondamento intervalar. Então temos que*

$$A * B \subseteq \uparrow(A * B) \in I(\mathfrak{R}_M).$$

Prova:

Seja o intervalo $C = A * B$; pela definição 1.26 $C \subseteq \downarrow(C)$.

Portanto $A * B \subseteq \downarrow(A * B)$.

Este teorema garante que o intervalo resultante calculado pela AIA contém o intervalo verdadeiro (de precisão infinita). Estes resultados calculados numericamente satisfazem ao Teorema da Monotonicidade da Inclusão.

A AIA elimina a acumulação de erros de arredondamento de cálculos e permite controlar a propagação dos erros nos dados iniciais.

Implementação da Aritmética Intervalar Arredondada

As definições 1.5 e 1.26 dão a estrutura para a realização da implementação da AIA. A implementação da primeira definição em qualquer linguagem de programação de alto nível é simples, por isso não nos preocuparemos com esta parte. A implementação dos arredondamentos convenientes, entretanto, requer algum trabalho, pois não estão usualmente disponíveis em linguagens de programação.

Faremos a implementação da função arredondamento direcionado para baixo ($\downarrow$) no procedimento LOW, em linguagem PASCAL. Da equação 1.2 vemos que não há necessidade de se implementar a função $\uparrow$.

Um intervalo $A = [a_1, a_2]$ é definido como um ARRAY [1..2] OF REAL, onde $A[1]$ conterà o valor a_1 e $A[2]$ o valor a_2 .

A parte principal do procedimento dependerá das seguintes propriedades das operações aritméticas da máquina:

1. Tipos de arredondamento usados quando operamos os números reais em ponto flutuante:
 - (a) truncamento dos dígitos, em excesso no comprimento da palavra, para o número de máquina menor mais próximo ou,
 - (b) arredondamento para o número em ponto flutuante mais próximo.
2. Comportamento nas vizinhanças do 0. Se o resultado da operação real é, em valor absoluto, menor do que o menor número de máquina positivo, então:

- (a) igualamos o resultado a 0, se quisermos arredondar o extremo inferior ou,
 - (b) fazemos o resultado igual ao menor número de máquina, em valor absoluto, com o sinal do resultado real, se quisermos arredondar o extremo superior.
3. Quando houver “overflow”, uma extensão sensível das operações intervalares de máquina é somente possível em casos excepcionais. Geralmente interrompemos os cálculos quando isto acontece.

Sendo k o número de dígitos da mantissa m da representação 1.1 ,

$\text{minpos} := \min\{x : x \in \mathbb{R}_M, x > 0\}$

$\text{fator A} := 1 - b^{1-k}$, fator de conversão usado para o caso do item 1.(a),

$\text{fator B} := 1 - \frac{1}{2}b^{1-k}$, fator de conversão usado para o caso do item 1.(b),

são as constantes que, dependendo da máquina usada, serão utilizadas nos arredondamentos convenientes.

Como a máquina que estamos usando arredonda os valores de acordo com o item 1.(b), o procedimento será da forma:

```
function LOW(var x : real) : real;
begin
  if x ≥ 0
  then begin
    x := x * fatorB;
    if x ≤ minpos then x := 0
  end
  else begin
    x := x / fatorB;
    if x > -minpos then x := -minpos
  end
  LOW := x;
end;
```

Para exemplificar o uso da function **LOW**, daremos agora o procedimento da adição intervalar:

interval: array [1..2] of real;

```
procedure ADIÇÃO (a,b : interval; var c : interval);  
var soma :real;  
begin  
    soma:= a[1] + b[1];  
    c[1]:= LOW(soma);  
    soma:= a[2] + b[2];  
    c[2]:= -LOW(-soma);  
end;
```

Capítulo 2

Métodos Intervalares para Limitar os Auto-valores e Auto-vetores de Matrizes Simétricas

Apresentaremos neste capítulo, um método intervalar para limitar os auto-vetores de matrizes reais simétricas devido a Nickel [12], e uma considerável modificação deste método devida a Zhiying [17], que o torna iterativo e limitador também dos auto-valores da matriz.

2.1 Método Proposto por Nickel

Inicialmente apresentaremos o método real que motivou o método intervalar para a limitação dos auto-vetores de matrizes simétricas.

Seja $\mathcal{A} = (a_{ij})$ uma matriz real simétrica de ordem n . Seja λ um auto-valor de $\mathcal{A}$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz singular

$A - \lambda I_n$, após convenientes trocas de linhas e colunas, obtemos a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} & b_{1t+1} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2t} & b_{2t+1} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{tt} & b_{tt+1} & \dots & b_{tn} \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

com $b_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, t$ e $r = n - t$ linhas nulas.

Escolhendo r vetores, $r \times 1$, linearmente independentes $y_1, y_2, \dots, y_r$, define-se $x_i = \begin{pmatrix} z_i \\ y_i \end{pmatrix}$, onde z_i , para $i = 1, 2, \dots, r$ são vetores, $t \times 1$, desconhecidos.

Resolve-se, então, para cada x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, o sistema linear $Bx_i = 0$, de t equações.

Pode-se mostrar facilmente que o número r de linhas nulas da matriz B , é a multiplicidade do auto-valor λ e que os r vetores $x_1, x_2, \dots, x_r$, são auto-vetores linearmente independentes correspondentes a λ .

Teoricamente o algoritmo acima é bem eficiente, porém, ao usarmos a aritmética de ponto flutuante de um computador, nem sempre conseguimos bons resultados, devido aos erros de arredondamento, que podem modificar o posto da matriz $B = A - \lambda I_n$, arbitrariamente.

Usando aritmética intervalar, Nickel apresentou a versão intervalar do método dado acima.

Analogamente ao caso real, seja A , matriz real simétrica de ordem n e seja $\Lambda = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ um intervalo real, tal que os auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A satisfazem

$$\begin{cases} \lambda_i \in \Lambda, & \text{para } i = 1, 2, \dots, r \text{ e} \\ \lambda_i \notin \Lambda, & \text{para } i = r + 1, r + 2, \dots, n \end{cases}$$

Seja $[B] = [A] - \Lambda[I_n]$ matriz intervalar $n \times n$, onde $[A] = (A_{ij})$ e $A_{ij} = [a_{ij}, a_{ij}]$. Aplicando o Método de Eliminação de Gauss Intervalar em $[B]$ e

após convenientes trocas de linhas e colunas, obtemos a matriz intervalar:

$$[B] = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} & B_{1t+1} & \dots & B_{1n} \\ & B_{22} & \dots & B_{2t} & B_{2t+1} & \dots & B_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & B_{tt} & B_{tt+1} & \dots & B_{tn} \\ & & & & B_{t+1t+1} & \dots & B_{t+1n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & B_{nt+1} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}$$

com $0 \notin B_{ii}$, para $i = 1, 2, \dots, t$ e $0 \in B_{ik}$, para $i, k = t+1, \dots, n$.

Sendo $m = n-t$, escolhem-se m vetores intervalares pontuais, $m \times 1$, linearmente independentes $[y_1], [y_2], \dots, [y_m]$, e define-se $[x_i] = \begin{pmatrix} [z_i] \\ [y_i] \end{pmatrix}$, onde $[z_i]$, para $i = 1, 2, \dots, m$ são vetores intervalares, $t \times 1$, desconhecidos.

Resolve-se, então, para cada x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, o sistema linear intervalar $[B][x_i] = [0]$, de t equações, onde $[0]$ é um vetor intervalar pontual, $n \times 1$, com todos os seus elementos iguais a $[0, 0]$.

Teorema 2.1 *Para o algoritmo intervalar acima valem as seguintes propriedades:*

- 1) $m \geq r$;
- 2) $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq \{[x_1], [x_2], \dots, [x_m]\}$
onde $x_i, i = 1, 2, \dots, r$ são auto-vetores da matriz A .

Prova:

Todos os valores finais e intermediários do algoritmo real são obtidos dos valores a_{ij} da matriz A e de λ e, no caso intervalar são obtidos de a_{ij} e Λ . Como $\lambda \in \Lambda$, pela propriedade intervalar da monotonicidade da inclusão, o teorema fica provado.

Portanto, no caso intervalar, o número de linhas da matriz $[B]$ que contém o zero em todos os seus elementos, pode ser maior que o número de linhas nulas de B do caso real.

2.2 Método Proposto por Zhiying

Quando $m = r$ temos que $x_i \in [x_i]$, $i = 1, 2, \dots, r$. Considerando somente o caso em que $m = r$ e a partir do método descrito acima,

Zhiying construiu um método iterativo de modo a obter melhores resultados para limitar os auto-valores e correspondentes auto-vetores.

Dada uma matriz simétrica real $\mathcal{A} = (a_{ij}), n \times n$ e um intervalo real $\Lambda = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ que contém um único auto-valor de multiplicidade r , λ , de $\mathcal{A}$, novamente define-se a matriz intervalar $[B] = [A] - \Lambda[I_n]$ e obtém-se o vetor intervalar $[x_i]$, $i = 1, 2, \dots, r$ pelo método anterior. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \notin \Lambda$.

Temos, então, $[x_i] = \begin{pmatrix} [z_i] \\ [y_i] \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, r$, onde $[y_i]$ são vetores intervalares pontuais linearmente independentes, $r \times 1$, e, portanto, pelo menos um elemento de cada $[y_i]$ é diferente de zero. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que o último elemento dos vetores $[y_i]$ é igual a $[1, 1]$, isto é, $[y_{ir}, y_{ir}] = [1, 1]$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Assim,

$$[x_i] = \begin{pmatrix} [z_i] \\ [y_{i1}, y_{i1}] \\ \vdots \\ [y_{ir-1}, y_{ir-1}] \\ [1, 1] \end{pmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$

De $x_i \in [x_i]$ tem-se que $x_{in} = 1$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Como $\mathcal{A}x_i = \lambda x_i$, sua última equação se escreve como:

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} x_{ik} = \lambda x_{in} = \lambda. \quad (2.1)$$

Mas, $x_i \in [x_i]$, então $x_{ik} \in X_{ik}$ e $A_{nk} = [a_{nk}, a_{nk}]$, pela equação 2.1 temos que

$$\lambda \in \sum_{k=1}^n A_{nk} X_{ik}. \quad (2.2)$$

E como $\lambda \in \Lambda$, usando 2.2 concluímos que

$$\lambda \in \sum_{k=1}^n A_{nk} X_{ik} \cap \Lambda, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$

Sabe-se que $0 \notin \Lambda$. Logo, $\lambda \neq 0$ e $\mathcal{A}x_i = \lambda x_i \Rightarrow x_i = \frac{\mathcal{A}x_i}{\lambda}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Portanto,

$$x_i \in \frac{[A][x_i]}{\Lambda} \quad e \quad x_i \in \frac{[A][x_i]}{\Lambda} \cap [x_i], \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Com base na discussão acima, podemos agora, construir o seguinte algoritmo:

Algoritmo Intervalar

Dados:

$\mathcal{A}$ – matriz real simétrica de ordem n

Λ – intervalo real, com $0 \notin \Lambda$ e contendo apenas o auto-valor λ de $\mathcal{A}$ de multiplicidade r .

1. Definir a matriz intervalar

$$[B] = [A] - \Lambda[I_n].$$

2. Aplicar o método de eliminação de Gauss Intervalar para resolver:

$$[B][x_i^{(0)}] = [0], \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

3. Definir $\Lambda^{(0)} = \Lambda$.

4. Para $k = 1, 2, \dots$, executar os passos abaixo até que $[x_i^{(k+1)}] = [x_i^{(k)}]$.

- (a) Para $i = 1, 2, \dots, r$:

$$\text{calcular } \Lambda_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n A_{nj} X_{ij}^{(k)} \cap \Lambda^{(k)}.$$

$$\text{calcular } [x_i^{(k+1)}] = \frac{[A][x_i^{(k)}]}{\Lambda^{(k)}} \cap [x_i^{(k)}].$$

- (b) Calcular $\Lambda^{(k+1)} = \Lambda_1^{(k+1)} \cap \Lambda_2^{(k+1)} \cap \dots \cap \Lambda_r^{(k+1)}$

5. Fim do algoritmo.

Teorema 2.2 (Convergência) *As seqüências $\{\Lambda^{(k)}\}$ e $\{[x_i^{(k)}]\}$, geradas pelo algoritmo intervalar, são convergentes, isto é,*

$$\text{quando } k \rightarrow \infty, \quad \begin{cases} \Lambda^{(k)} \rightarrow \Lambda^*, \\ [x_i^{(k)}] \rightarrow [x_i^*], \end{cases} \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$

Além disso, $\lambda \in \Lambda^, x_i \in [x_i^*]$, para $i = 1, 2, \dots, r$.*

Prova:

A prova a seguir é dada por Zhiying [17].

Do algoritmo iterativo intervalar anterior, tem-se que:

$$\Lambda^{(0)} \supseteq \Lambda^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \Lambda^{(k)} \supseteq \dots$$

$$[x_i^{(0)}] \supseteq [x_i^{(1)}] \supseteq \dots \supseteq [x_i^{(k)}] \supseteq \dots, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$

E $\lambda \in \Lambda^{(0)}, x_i \in [x_i^{(0)}]$

Daí, segue o Teorema.

2.3 Observações

Um dos problemas observados no algoritmo intervalar acima é que podemos obter $[x_i^{(k)}] = [x_i^{(k+1)}]$, porém, com o diâmetro de $[x_i^{(k)}]$ ainda não suficientemente pequeno. Para contornar isto, podemos dividir o intervalo $\Lambda^{(k)}$ ao meio, conforme sugestão de J. Zhiying [17], obtendo dois intervalos Λ' e Λ'' e tomarmos aquele em que posto $([A] - \Lambda[I_n]) = n - r$ e continuarmos o processo com $[x_i^{(0)}] = [x_i^{(k)}]$. Se, em ambos os intervalos, o posto for igual a $n - r$, escolhe-se arbitrariamente um deles e abandona-se ao encontrarmos, por exemplo, $m = 0$ ou alguma intersecção do algoritmo intervalar igual a vazio, e retoma-se o processo com o outro intervalo.

Pelo fato de reiniciarmos a iteração com $[x_i^{(0)}] = [x_i^{(k)}]$ ao fazermos a bissecção de $\Lambda^{(k)}$, os auto-vetores obtidos nem sempre têm boa precisão. Através de uma pequena modificação no método dado, recalculando os auto-vetores iniciais $[x_i^{(0)}]$ usando o método da seção 2.1 cada vez que dividimos o intervalo $\Lambda^{(k)}$ ao meio, isto é, retornando ao passo 1 do algoritmo, conseguimos melhorar significativamente os auto-vetores.

Na tentativa de estendermos o algoritmo para matrizes quaisquer, verificamos que, se os auto-vetores correspondentes ao auto-valor $\lambda \in \Lambda$ forem linearmente independentes, o comportamento é o mesmo que para matrizes simétricas.

2.4 Exemplos

1)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad \Lambda^{(0)} = [9, 12]$$

$$m = 1 ,$$

$$\text{para } k = 202,$$

$$\Lambda^{(k)} = [9.9999999969e + 00, 1.0000000004e + 01]$$

$$[x_1^{(k)}] = \begin{pmatrix} [-1.0000000051e+00, -9.9999999689e-01] \\ [4.9999999880e-01, 5.0000000184e-01] \\ [1.0000000000e+00, 1.0000000000e+00] \end{pmatrix} ,$$

2)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad \Lambda^{(0)} = [-3.0, -0.1]$$

$$m = 2 ,$$

$$\text{para } k = 358,$$

$$\Lambda^{(k)} = [-2.0000000038e + 00, -1.9999999944e + 00]$$

$$[x_1^{(k)}] = \begin{pmatrix} [1.0000000073e+00, -9.9999999376e-01] \\ [0.0000000000e+00, 0.0000000000e+00] \\ [1.0000000000e+00, 1.0000000000e+00] \end{pmatrix} ,$$

$$[x_2^{(k)}] = \begin{pmatrix} [-2.0000000146e+00, -1.9999999875e+00] \\ [-1.0000000000e+00, 0.0000000000e+00] \\ [1.0000000000e+00, 1.0000000000e+00] \end{pmatrix} ,$$

Capítulo 3

Versão Intervalar de Métodos para Determinação dos Auto-valores através do Polinômio Característico da Matriz

Outra maneira bem conhecida de se determinar os auto-valores de uma matriz real, é calcular o seu polinômio característico, e encontrar os zeros desse polinômio. Com o objetivo de fazer a versão intervalar dessa técnica, tomamos o polinômio característico intervalar de uma matriz intervalar real e sugerimos alguns métodos intervalares para limitação de suas raízes.

3.1 Versão Intervalar de Métodos Numéricos para Determinação do Polinômio Característico de Matrizes

Consideremos a matriz real $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $n \times n$, $p(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_n)$ é o polinômio característico de $\mathcal{A}$.

$$p(\lambda) = (-1)^n(p^{(0)}\lambda^n - p^{(1)}\lambda^{n-1} - \dots - p^{(n-1)}\lambda - p^{(n)}) \quad (3.1)$$

onde $p^{(0)} = 1$.

Substituindo a matriz real A pela matriz intervalar pontual $[A]$, onde $(A_{ij}) = [a_{ij}, a_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, nosso objetivo é encontrar os coeficientes do polinômio característico intervalar de $[A]$,

$$P(\Lambda) = (-1)^n (P^{(0)}\Lambda^n - P^{(1)}\Lambda^{n-1} - \dots - P^{(n-1)}\Lambda - P^{(n)}) \quad (3.2)$$

onde $p^{(i)} \in P^{(i)}$ para $i = 1, \dots, n$ e $P^{(0)} = [1, 1]$.

Para isso, estudamos as versões intervalares de métodos que determinam os coeficientes do polinômio característico de matrizes reais.

3.1.1 Método de Leverrier-Faddeev

Seja a matriz intervalar real pontual $[A]$, como definida acima. A versão intervalar do método de Leverrier-Faddeev é dada pela construção de uma sequência de matrizes intervalares $[A_1], [A_2], \dots, [A_n]$, e uma sequência de intervalos reais $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}$ da seguinte forma:

$$[A_1] = [A], \quad P^{(1)} = \text{tr}([A_1]), \quad [B_1] = [A_1] - P^{(1)}[I_n]$$

$$[A_2] = [A][B_1], \quad P^{(2)} = \frac{\text{tr}([A_2])}{[2, 2]}, \quad [B_2] = [A_2] - P^{(2)}[I_n]$$

.....

$$[A_{n-1}] = [A][B_{n-2}], \quad P^{(n-1)} = \frac{\text{tr}([A_{n-1}])}{[n-1, n-1]}, \quad [B_{n-1}] = [A_{n-1}] - P^{(n-1)}[I_n]$$

$$[A_n] = [A][B_{n-1}], \quad P^{(n)} = \frac{\text{tr}([A_n])}{[n, n]}, \quad [B_n] = [A_n] - P^{(n)}[I_n].$$

Os intervalos reais $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}$ são os coeficientes intervalares do polinômio intervalar 3.2. Pelo Teorema da Monotonicidade da Inclusão temos que os intervalos resultantes $P^{(1)}, \dots, P^{(n)}$ contêm os coeficientes reais $p^{(1)}, \dots, p^{(n)}$ do polinômio característico 3.1, respectivamente.

Quando a matriz $[A]$ é de ordem alta (> 6) e/ou os seus auto-valores são valores altos em módulo, os intervalos obtidos têm diâmetros grandes, isto é,

conseguimos um intervalo que contém o respectivo coeficiente real mas com uma margem de erro muito grande.

Cremos que isto ocorre por causa das $(n - 1)$ multiplicações de matrizes que existem no método, pois, notamos também que $D(P^{(1)}) < D(P^{(2)}) < \dots < D(P^{(n)})$, isto é, o diâmetro dos coeficientes intervalares cresce com a ordem da matriz.

3.1.2 Método de Danilevsky

Seja a matriz intervalar pontual $[A]$. A versão intervalar do método de Danilevsky por nós construída consiste em reduzir a matriz $[A]$ à forma:

$$[P] = \begin{pmatrix} P^{(1)} & P^{(2)} & \dots & P^{(n-1)} & P^{(n)} \\ [1, 1] & [0, 0] & \dots & [0, 0] & [0, 0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0, 0] & [0, 0] & \dots & [1, 1] & [0, 0] \end{pmatrix}$$

por meio de $(n - 1)$ transformações de similaridade, ou seja:

$$[P] = [M_1^{-1}][M_2^{-1}] \dots [M_{n-1}^{-1}][A][M_{n-1}] \dots [M_2][M_1]$$

onde $[M_i^{-1}] \cdot [M_i] \supseteq [I_n]$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, e

$$[M_i] = \begin{pmatrix} [1, 1] & [0, 0] & \dots & [0, 0] & \dots & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 1] & \dots & [0, 0] & \dots & [0, 0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{A_{i+1,1}^{(n-(i+1))}}{A_{i+1,i}^{(n-(i+1))}} & -\frac{A_{i+1,2}^{(n-(i+1))}}{A_{i+1,i}^{(n-(i+1))}} & \dots & \frac{[1,1]}{A_{i+1,i}^{(n-(i+1))}} & \dots & -\frac{A_{i+1,n}^{(n-(i+1))}}{A_{i+1,i}^{(n-(i+1))}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0, 0] & [0, 0] & \dots & [0, 0] & \dots & [1, 1] \end{pmatrix},$$

$$[M_i^{-1}] = \begin{pmatrix} [1, 1] & [0, 0] & \dots & [0, 0] & \dots & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 1] & \dots & [0, 0] & \dots & [0, 0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i+1,1}^{(n-(i+1))} & A_{i+1,2}^{(n-(i+1))} & \dots & A_{i+1,i}^{(n-(i+1))} & \dots & A_{i+1,n}^{(n-(i+1))} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0, 0] & [0, 0] & \dots & [0, 0] & \dots & [1, 1] \end{pmatrix}$$

e $[A^{(k)}] = (A_{ij}^{(k)})$
 $[A^{(0)}] = [A]$
 $[A^{(k)}] = [M_{n-k}^{-1}] \cdots [M_{n-1}^{-1}][A][M_{n-1}] \cdots [M_{n-k}]$
 Portanto, $[P] = [A^{(n-1)}]$.

Os elementos $P^{(i)}, i = 1, \dots, n$ da matriz $[P]$ são os coeficientes do polinômio característico 3.2 da matriz $[A]$ e contêm os respectivos coeficientes do polinômio característico 3.1 da matriz real $\mathcal{A}$.

Para que todas as transformações acima sejam realizadas, vamos supor, sempre, que $A_{i+1,i}^{(n-(i+1))}$, não contenha o zero, para $i = 1, \dots, n-1$.

3.2 Métodos Intervalares para Determinação de Zeros de Polinômios

A seguir, apresentaremos métodos intervalares para determinação de zeros de funções, e que serão por nós utilizados, para determinar os zeros dos polinômios característicos obtidos pelos métodos acima. Estudamos o capítulo 7 de Moore [10] e os artigos de Herzberger [8], Hansen [7] e Arthur [2] para encontrar métodos intervalares mais eficientes e abrangentes para determinação de zeros de polinômios. Descreveremos os seguintes métodos:

3.2.1 Método de Newton-Moore

Moore [10] apresenta o seguinte método, conhecido por Método de Newton-Moore.

Considere $f(x)$ uma função real racional, tal que $f(x)$ é limitada em $x \in [x_1, x_2]$. Então f tem uma derivada contínua, f' , em $[x_1, x_2]$ e para $x, y \in [x_1, x_2]$ temos, do Teorema do Valor Médio

$$f(x) = f(y) + f'(y + \theta(x - y))(x - y) \quad \text{para } \theta \in [0, 1]$$

Se x é um zero de f e f' não se anula em $[x_1, x_2]$, então:

$$x = y - \frac{f(y)}{f'(y + \theta(x - y))}.$$

Seja $f(x)$ uma função real racional com apenas uma raiz simples em $[x_1, x_2]$. Seja $F'(X)$ a extensão intervalar de f' tal que $0 \notin F'(X)$. Define-se

a função intervalar $N : [x_1, x_2] \longrightarrow I(\mathbb{R})$, por

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}, \quad X \subset [x_1, x_2]. \quad (3.3)$$

Quando os coeficientes de $f(x)$ são conhecidos somente em certos intervalos, toma-se a extensão intervalar $F(X)$ de $f(x)$ e define-se $N(X)$ por:

$$N(X) = m(X) - \frac{F(m(X))}{F'(X)}, \quad X \subset [x_1, x_2] \quad (3.4)$$

Para $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$, construímos a sequência de intervalos $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... do seguinte modo:

$$X^{(i+1)} = N(X^{(i)}) \cap X^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Observação: $N(X)$ será definida somente quando f possuir um zero simples em X .

Lema 3.1 *Seja $N(X)$ definida como em 3.3. Se o intervalo X contém apenas um zero, x^* , de f , então $x^* \in N(X)$.*

Prova: Ver Moore [10].

Lema 3.2 *Se $N(X) \cap X$ é vazio, então não existem zeros de $f(x)$ em X . Caso contrário, $N(X) \cap X$ contém pelo menos o zero de f que está em X .*

Prova: Ver Moore [10].

3.2.2 Método de Herzberger

Herzberger [8] faz a seguinte modificação no Método de Newton Intervalar:

Se $f(x_1^{(0)}) < 0$, consideramos o seguinte intervalo:

$$Y^{(i)} = \begin{cases} [x_1^{(i)}, m(X^{(i)})], & \text{se } f(m(X^{(i)})) > 0 \\ [m(X^{(i)}), x_2^{(i)}], & \text{se } f(m(X^{(i)})) < 0. \end{cases}$$

Definimos

$$X^{(i+1)} = \left\{ m(X^{(i)}) - \frac{f(m(X^{(i)}))}{F'(Y^{(i)})} \right\} \cap Y^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Analogamente, se $f(x_1^{(0)}) > 0$ e, como $Y^{(i)} \subset X^{(i)}$, pelo Teorema da Monotonicidade da Inclusão, $F'(Y^{(i)}) \subset F'(X^{(i)})$ e portanto,

$$\left\{ m(X^{(i)}) - \frac{f(m(X^{(i)}))}{F'(Y^{(i)})} \right\} \cap Y^{(i)} \subset \left\{ m(X^{(i)}) - \frac{f(m(X^{(i)}))}{F'(X^{(i)})} \right\} \cap X^{(i)}.$$

Daí concluímos que o método de Herzberger apresenta melhores resultados que o de Moore.

3.2.3 Método de Hansen

Em Hansen [7] encontramos outra considerável modificação do Método de Newton Intervalar, que passaremos a expor:

Considere a função $f(x)$ em que a variável x ocorre mais de uma vez.

Como sugerido na seção 1.5, substitui-se cada ocorrência da variável x por outras variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ construindo a função $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $g(x, x, \dots, x) = f(x)$.

Considerando $g(x)$ como uma função de uma variável simples x_1 , a expansão de $g(x)$ em série nos fornece:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial x_1} g(\epsilon_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\epsilon_1 \in [x_1, y_1].$$

Agora, considerando $g(y_1, x_2, \dots, x_n)$ como uma função de uma variável simples x_2 , obtem-se:

$$g(y_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) + (x_2 - y_2) \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, \epsilon_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$\epsilon_2 \in [x_2, y_2].$$

E assim sucessivamente até que:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_n - y_n) \frac{\partial}{\partial x_n} g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \epsilon_n),$$

$$\epsilon_n \in [x_n, y_n].$$

Logo,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1 - y_1) \frac{\partial}{\partial x_1} g(y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_2 - y_2) \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, y_2, \dots, y_n) + \dots + (x_n - y_n) \frac{\partial}{\partial x_n} g(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \frac{\partial}{\partial x_i} g(y_1, \dots, y_{i-1}, \epsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

onde $\epsilon_i \in [x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Então:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} g(y_1, \dots, y_{i-1}, \epsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Tomamos intervalos iniciais $X_1, \dots, X_n$, tais que $x_i, y_i \in X_i$, e portanto $\epsilon_i \in X_i$.

Seja $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = y$ e deixando $\epsilon_i \in X_{ii}$ para algum intervalo X_{ii} , temos

$$g(y, y, \dots, y) = g(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^n (y - x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(X_{i1}, \dots, X_{ii-1}, X_{ii}, x, \dots, x),$$

ou seja,

$$f(y) = f(x) + (y - x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g(X_{i1}, \dots, X_{ii-1}, X_{ii}, x, \dots, x).$$

Supondo y raiz de f , obtemos:

$$y = x - \frac{f(x)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g(X_{i1}, \dots, X_{ii-1}, X_{ii}, x, \dots, x)}$$

Em nosso caso, cada um dos intervalos $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ii}$ para $i = 1, \dots, n$ são iguais a X . Usa-se notação diferente apenas para enfatizar que eles são independentes.

Assim, para $x \in X$, define-se

$$N_n(X) = x - \frac{f(x)}{G'(X)}$$

onde

$$\begin{aligned} G'(X) = & \frac{\partial}{\partial x_1} g(X, x, \dots, x) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(X, X, x, \dots, x) + \dots \\ & + \frac{\partial}{\partial x_n} g(X, X, \dots, X). \end{aligned} \quad (3.6)$$

sem perda de generalidade, faremos $x = m(X) \in X$

Substituindo-se $N(X^{(i)})$ por $N_n(X^{(i)})$ na equação 3.5, obtém-se a vantagem de que certos argumentos aparecem na forma real e, em geral fornecem resultados de diâmetro menor. E $0 \notin G'(X)$ é menos restritivo do que $0 \notin F'(X)$.

Faremos, agora, algumas considerações para o caso em que a função é um polinômio.

$$\text{Seja } p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

$$\text{e } P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n.$$

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + \dots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}.$$

Reescrevendo o polinômio na forma de Horner;
 $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_n) \dots))$, e substituindo cada ocorrência da variável x por variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, construímos a função:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= a_0 + x_1(a_1 + x_2(a_2 + \dots + x_n(a_n) \dots)) \\ &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_1x_2 \dots x_{n-1} + a_nx_1x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Calculando $G'(X)$ por 3.6 temos que,

$$\begin{aligned} G'(X) = & a_1 + a_2x + a_3xx + \dots + a_nxx \dots x \\ & + a_2X + a_3Xx + \dots + a_nXx \dots x \\ & + a_3XX + \dots + a_nXX \dots x + \dots \\ & + a_nXX \dots X. \end{aligned}$$

$$G'(X) = \sum_{j=1}^n [(a_j + \sum_{k=j+1}^n a_k x^{k-j}) \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{(j-1) \text{ vezes}}]. \quad (3.7)$$

Como $x \in X$ e pela propriedade da subdistributividade, vê-se facilmente que $G'(X) \subset P'(X)$.

Sabemos que se $0 \in X$, $X^2 \neq X \cdot X$. Ao fazermos substituição de variáveis em polinômios, alguns problemas podem ocorrer.

Por exemplo, se, $p(x) = x^3 + 4x - 16$, $p'(x) = 3x^2 + 4$ e $P'(X) = 3X^2 + 4$

Seja $X = [-2, 3]$, Então, $P'([-2, 3]) = [4, 31]$.

Se definirmos $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + 4x_1 - 16$, obtemos
 $G'(X) = x^2 + xX + XX + 4$

então, se $x = 1$

$G'([-2, 3]) = [-3, 17]$,

logo $G'(X) \not\subset P'(X)$.

Para evitar este problema, quando $0 \in X$, tomamos $x = 0$ em 3.7, obtendo assim,

$$G'(X) = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}. \quad (3.8)$$

logo, $G'(X) = 4 + X^2 = [4, 13] \subset P'(X)$.

Como $G'(X) \subset P'(X)$ temos:

$$m(X) - \frac{p(m(X))}{G'(X)} \subset m(X) - \frac{p(m(X))}{P'(X)}$$

obtendo melhores resultados que no método da Newton-Moore.

A grande "frustração" de todos os métodos que acabaram de ser apresentados é que se $x \in X^{(0)}$ (intervalo inicial) é uma raiz múltipla de $f(x)$ ou se existe mais de uma raiz de $f(x)$ em $X^{(0)}$, $N(X^{(0)})$ não está definida. O próximo método procura resolver estas dificuldades.

3.2.4 Método de Arthur

Baseando-se no método de Derr, que é quadraticamente convergente,

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f^{(m-1)}(x^{(i)})}{f^{(m)}(x^{(i)})}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

para o caso em que x é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$, Arthur [2] propôs o método abaixo.

Como $f^{(m)}(x) \neq 0$, existe uma vizinhança de x , tal que para qualquer y nesta vizinhança $f^{(m)}(y) \neq 0$. Assim, pode-se encontrar um intervalo $X^{(0)}$ tal que $0 \notin F^{(m)}(X^{(0)})$. Definimos então, a função

$$N(X) = m(X) - \frac{f^{(m-1)}(m(X))}{F^{(m)}(X)}$$

e o método iterativo para zeros múltiplos:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} \cap N(X^{(i)}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots$$

3.3 Observações

1) Teste de Parada:

Para cada um dos métodos iterativos anteriores temos:

$$X^{(i+1)} = N(X^{(i)}) \cap Y^{(i)}, \quad \text{onde } X^{(i)} \subseteq Y^{(i)} \quad \text{e } x^* \in X^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Temos então, uma sequência de intervalos encaixantes $\{X^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$ com $x^* \in X^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ e baseando-nos no teorema 1.4 e na definição 1.22, paramos o processo quando $X^{(i)} = X^{(i+1)}$.

2) Portanto, podemos limitar os auto-valores reais de uma matriz determinando o seu polinômio característico intervalar pelo métodos de Leverrier-Faddeev Intervalar ou Danilevsky Intervalar e, partindo de um intervalo inicial que contém um auto-valor simples desta matriz, pelos métodos de Moore, Herzberger ou Hansen, encontramos um intervalo que contém este auto-valor, com diâmetro tão pequeno quanto possível ou, ainda, partindo de uma intervalo que contém um único auto-valor de multiplicidade m , pelo método de Arthur podemos limitá-lo.

3.4 Exemplos

Os métodos intervalares dados neste capítulo foram programados em linguagem PASCAL, submetidos a microcomputador da linha IBM-PC e muitos testes foram realizados.

Daremos agora, alguns exemplos, onde apresentaremos a matriz real testada, seus auto-valores e polinômio característico, os coeficientes $P^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, dos polinômios característicos intervalares obtidos pelos métodos intervalares de Leverrier-Faddeev e Danilevsky (quando este for possível de ser executado) e ainda, intervalos iniciais adequados à execução dos métodos de Newton-Moore, Herzberger, Hansen e Arthur, juntamente com os intervalos soluções e o número de iterações realizadas para obtê-los. Estes intervalos soluções são as raízes do polinômio característico intervalar e contêm os auto-valores da matriz real dada.

As matrizes apresentadas nestes exemplos foram construídas segundo Linhares [9], que nos fornece uma maneira fácil de se obter matrizes reais cujos auto-valores são conhecidos.

1)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 14 & -9 & 13 & 2 & -18 \\ 2 & 3 & 13 & 2 & -18 \\ 2 & 12 & 4 & 2 & -18 \\ 2 & 12 & -3 & 9 & -18 \\ 2 & 12 & -3 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

auto-valores: $-9, 2, 5, 7$ e $12,$

polinômio característico: $-x^5 + 17x^4 + 7x^3 - 1265x^2 + 6162x - 7560$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-1.70000000000000e+01, -1.70000000000000e+01] \\ P^{(2)} &= [-7.00000000000078e+00, -6.9999999999924e+00] \\ P^{(3)} &= [1.26499999999996e+03, 1.26500000000004e+03] \\ P^{(4)} &= [-6.16200000000134e+03, -6.16199999999866e+03] \\ P^{(5)} &= [7.55999999994864e+03, 7.56000000005138e+03] \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n e de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
$[-11, -6.3]$	$[-9.00000000000130e+00, -8.99999999999870e+00]$	7	6	6
$[-16, -6.3]$	$[-9.00000000000130e+00, -8.99999999999870e+00]$	*	7	6
$[1.0, 2.5]$	$[1.99999999996716e+00, 2.00000000003285e+00]$	8	7	7
$[0.6, 4.3]$	$[1.99999999996716e+00, 2.00000000003285e+00]$	*	8	*
$[4.9, 5.1]$	$[4.99999999989952e+00, 5.00000000010044e+00]$	5	5	
	$[4.99999999989951e+00, 5.00000000010044e+00]$			3
$[4.6, 5.1]$	$[4.99999999989952e+00, 5.00000000010044e+00]$	*	7	*
$[6.9, 7.1]$	$[6.9999999992149e+00, 7.00000000007854e+00]$	3	3	
	$[6.9999999992149e+00, 7.00000000007853e+00]$			3
$[6.6, 7.1]$	$[6.9999999992149e+00, 7.00000000007854e+00]$	*	7	*
$[11.5, 12.5]$	$[1.1999999999899e+01, 1.2000000000101e+01]$	4	4	4
$[11.5, 13.5]$	$[1.1999999999899e+01, 1.2000000000101e+01]$	*	7	7

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

Método de Danilevsky Intervalar

$$\begin{aligned}
 P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\
 P^{(1)} &= [-1.70000000000003e+01, -1.69999999999967e+01] \\
 P^{(2)} &= [-7.00000000001956e+00, -6.99999999998044e+00] \\
 P^{(3)} &= [1.2649999999974e+03, 1.26500000000026e+03] \\
 P^{(4)} &= [-6.16200000000026e+03, -6.16199999999736e+03] \\
 P^{(5)} &= [7.55999999998936e+03, 7.56000000001062e+03]
 \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n ° de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
[-11, -6.3]	[-9.00000000000176e + 00, -8.9999999999823e + 00]	7	6	6
[-16, -6.3]	[-9.00000000000176e + 00, -8.9999999999823e + 00]	*	7	6
[1.0, 2.5]	[1.99999999998960e + 00, 2.00000000001038e + 00]	7	6	7
[0.6, 4.3]	[1.99999999998960e + 00, 2.00000000001038e + 00]	*	7	*
[4.9, 5.1]	[4.9999999994094e + 00, 5.00000000005910e + 00]	4	4	4
[4.6, 5.1]	[4.9999999994094e + 00, 5.00000000005910e + 00]	*	8	*
[6.9, 7.1]	[6.9999999992960e + 00, 7.00000000007036e + 00]	4	4	
	[6.9999999992960e + 00, 7.00000000007037e + 00]			4
[6.6, 7.1]	[6.9999999992959e + 00, 7.00000000007037e + 00]	*	6	*
[11.5, 12.5]	[1.1999999999753e + 01, 1.20000000000247e + 01]	4	4	4
[11.5, 13.5]	[1.1999999999753e + 01, 1.20000000000247e + 01]	*	7	8

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

2)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 60 & 5 & 10 & 15 & -89 \\ 10 & 55 & 10 & 15 & -89 \\ 10 & 15 & 50 & 15 & -89 \\ 10 & 15 & 20 & 45 & -89 \\ 10 & 15 & 20 & 25 & -69 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 1, 20, 30, 40 e 50,

polinômio característico: $-x^5 + 141x^4 - 7240x^3 + 161100x^2 - 1354000x + 1200000$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-1.41000000000000e+02, -1.41000000000000e+02] \\ P^{(2)} &= [7.23999999999996e+03, 7.24000000000004e+03] \\ P^{(3)} &= [-1.61100000000006e+05, -1.61099999999994e+05] \\ P^{(4)} &= [1.35399999999902e+06, 1.35400000000098e+06] \\ P^{(5)} &= [-1.20000000015774e+06, -1.19999999984226e+06] \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n e de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
[0.2, 4.0]	[9.99999999849258e - 01, 1.00000000015074e + 00] [9.99999999849257e - 01, 1.00000000015074e + 00]	6	5	6
[-2.0, 5.0]	[9.99999999849258e - 01, 1.00000000015074e + 00]	*	6	7
[19.8, 20.2]	[1.99999999984196e + 01, 2.00000000015804e + 01]	6	6	5
[19.4, 20.2]	[1.99999999984196e + 01, 2.00000000015804e + 01]	*	8	*
[29.99, 30.01]	[2.99999999966582e + 01, 3.00000000033418e + 01] [2.99999999966581e + 01, 3.00000000033418e + 01]	4	4	3
[39.99, 40.01]	[3.99999999973136e + 01, 4.00000000026867e + 01] [3.99999999973134e + 01, 4.00000000026864e + 01]	3	3	5
[49.9, 50.2]	[4.9999999992258e + 01, 5.0000000007744e + 01] [4.9999999992256e + 01, 5.0000000007744e + 01]	7	7	7
[49.9, 50.5]	[4.9999999992254e + 01, 5.0000000007745e + 01]	*	7	*

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

Método de Danilevsky Intervalar

$$\begin{aligned}
 P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\
 P^{(1)} &= [-1.41000000000055e+02, -1.4099999999945e+02] \\
 P^{(2)} &= [7.2399999999542e+03, 7.24000000000458e+03] \\
 P^{(3)} &= [-1.61100000000134e+05, -1.61099999999866e+05] \\
 P^{(4)} &= [1.3539999999864e+06, 1.35400000000137e+06] \\
 P^{(5)} &= [-1.20000000001242e+06, -1.19999999998764e+06]
 \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n.º de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
[0.2, 4.0]	[9.99999999986832e - 01, 1.00000000001322e + 00]	7	5	7
[-2.0, 5.0]	[9.99999999986832e - 01, 1.00000000001322e + 00]	*	7	*
[19.8, 20.2]	[1.99999999987832e + 01, 2.00000000012168e + 01]	5	5	6
[19.4, 20.2]	[1.99999999987833e + 01, 2.00000000012167e + 01]	*	10	*
[29.99, 30.01]	[2.99999999941002e + 01, 3.00000000058990e + 01]	4	4	
	[2.99999999941005e + 01, 3.00000000058991e + 01]			4
[39.99, 40.01]	[3.99999999908277e + 01, 4.00000000091738e + 01]	3	3	
	[3.99999999908274e + 01, 4.00000000091735e + 01]			7
[49.9, 50.2]	[4.99999999954675e + 01, 5.00000000045321e + 01]		6	8
	[4.99999999954673e + 01, 5.00000000045319e + 01]	6		
[49.9, 50.5]	[4.99999999954675e + 01, 5.00000000045218e + 01]	*	8	*

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

3)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 2, 3 e 7,

polinômio característico: $-x^3 + 12x^2 - 41x + 42$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-1.20000000000000e+01, -1.20000000000000e+01] \\ P^{(2)} &= [4.09999999999999e+01, 4.10000000000001e+01] \\ P^{(3)} &= [-4.20000000000006e+01, -4.19999999999994e+01] \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n.º de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
[1.8, 2.2]	[1.99999999999985e + 00, 2.00000000000015e + 00]	4	4	3
[1.8, 2.6]	[1.99999999999985e + 00, 2.00000000000015e + 00]	*	7	*
[2.8, 3.1]	[2.99999999999978e + 00, 3.00000000000022e + 00]	7	7	7
[2.8, 3.4]	[2.99999999999977e + 00, 3.00000000000022e + 00]	*	8	*
[6.4, 8.2]	[6.99999999999992e + 00, 7.00000000000008e + 00]	7	6	7
[6.2, 8.7]	[6.99999999999992e + 00, 7.00000000000008e + 00]	*	7	7
[6.0, 20.0]	[6.99999999999992e + 00, 7.00000000000008e + 00]	*	*	8

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

Método de Danilevsky Intervalar

$$\begin{aligned}
 P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\
 P^{(1)} &= [-1.20000000000000e+01, -1.20000000000000e+01] \\
 P^{(2)} &= [4.09999999999999e+01, 4.10000000000001e+01] \\
 P^{(3)} &= [-4.20000000000002e+01, -4.19999999999998e+01]
 \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n.º de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
[1.8, 2.2]	[1.99999999999991e + 00, 2.00000000000009e + 00] [1.99999999999990e + 00, 2.00000000000010e + 00]	3	3	
[1.8, 2.6]	[1.99999999999991e + 00, 2.00000000000009e + 00]	*	7	*
[2.8, 3.1]	[2.99999999999983e + 00, 3.00000000000017e + 00]	7	6	7
[2.8, 3.4]	[2.99999999999983e + 00, 3.00000000000017e + 00]	*	7	*
[6.4, 8.2]	[6.99999999999991e + 00, 7.00000000000009e + 00]	7	7	7
[6.2, 8.7]	[6.99999999999991e + 00, 7.00000000000009e + 00]	*	7	7
[6.0, 20.0]	[6.99999999999991e + 00, 7.00000000000009e + 00]	*	*	8

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

4)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 6 & -10 & 14 & -5 & -7 & 4 \\ 2 & -6 & 14 & -5 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -5 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

auto-valores: $-8, -1, 2, 4, 5$ e 7 ,

polinômio característico: $x^6 - 9x^5 - 39x^4 + 585x^3 - 1554x^2 + 72x + 2240$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-9.00000000000001e+00, -8.99999999999999e+00] \\ P^{(2)} &= [-3.90000000000003e+01, -3.89999999999997e+01] \\ P^{(3)} &= [5.84999999999993e+02, 5.85000000000007e+02] \\ P^{(4)} &= [-1.55400000000016e+03, -1.55399999999984e+03] \\ P^{(5)} &= [7.19999999999996e+01, 7.20000000000003e+01] \\ P^{(6)} &= [2.23999999999998e+03, 2.24000000000001e+03] \end{aligned}$$

Intervalo inicial	Intervalo solução	n e de iterações		
		Mo.	He.	Ha.
$[-10.0, -6.8]$	$[-8.00000000000083e+00, -7.99999999999917e+00]$	7	7	6
$[-9.5, -4.0]$	$[-8.00000000000083e+00, -7.99999999999917e+00]$	*	8	*
$[-4.0, 0.0]$	$[-1.000000000001868e+00, -9.99999999981319e-01]$	8	7	7
$[1.9, 2.2]$	$[1.99999999989056e+00, 2.00000000010944e+00]$	8	7	7
$[1.6, 2.5]$	$[1.99999999989056e+00, 2.00000000010944e+00]$	*	8	*
$[3.99, 4.01]$	$[3.99999999969850e+00, 4.00000000030145e+00]$	4	4	
	$[3.99999999969850e+00, 4.00000000030146e+00]$			5
$[4.99, 5.01]$	$[4.99999999975565e+00, 5.00000000024440e+00]$	4	4	
	$[4.99999999975565e+00, 5.00000000024439e+00]$			4
$[4.99, 5.1]$	$[4.99999999975565e+00, 5.00000000024439e+00]$	*	6	*
$[6.9, 7.1]$	$[6.9999999996442e+00, 5.0000000003556e+00]$	5	5	5
$[6.9, 7.3]$	$[6.9999999996442e+00, 5.0000000003556e+00]$	*	6	*

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

5)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 2 & -11 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & -11 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & -11 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 3, 3, 3, 3 e 3,

polinômio característico: $-x^5 + 15x^4 - 90x^3 + 270x^2 - 405x + 243$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-1.50000000000000e+01, -1.50000000000000e+01] \\ P^{(2)} &= [8.99999999999996e+01, 9.00000000000000e+01] \\ P^{(3)} &= [-2.70000000000000e+02, -2.69999999999999e+02] \\ P^{(4)} &= [4.04999999999998e+02, 4.05000000000000e+02] \\ P^{(5)} &= [-2.43000000004303e+02, -2.42999999995697e+02] \end{aligned}$$

<i>Intervalo inicial</i>	<i>Intervalo solução</i>	Arthur	
		<i>n e de iterações</i>	<i>m</i>
[0.0, 6.0]	[2.99999999999999e + 00, 3.00000000000000e + 00]	4	5
[2.0, 4.0]	[2.99999999999999e + 00, 3.00000000000000e + 00]	4	5
[-2.0, 8.0]	[2.99999999999999e + 00, 3.00000000000000e + 00]	4	5

m: multiplicidade do auto-valor.

6)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 & -6 \\ 7 & 9 & 2 & -6 \\ 7 & 2 & 9 & -6 \\ 7 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auto-valores: $-3, 7, 7$ e 12 ,

polinômio característico: $x^4 - 23x^3 + 139x^2 + 63x - 1764$

Método de Leverrier-Faddeev Intervalar

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= [1.00000000000000e+00, 1.00000000000000e+00] \\ P^{(1)} &= [-2.30000000000000e+01, -2.30000000000000e+01] \\ P^{(2)} &= [1.39000000000000e+02, 1.39000000000000e+02] \\ P^{(3)} &= [6.29999999999925e+01, 6.30000000000075e+01] \\ P^{(4)} &= [-1.76400000000016e+03, -1.76399999999984e+03] \end{aligned}$$

<i>Intervalo inicial</i>	<i>Intervalo solução</i>	Arthur <i>n e de iterações</i> <i>m</i>	
[6.4, 7.6]	[6.9999999999970e + 00, 7.00000000000030e + 00]	4	2
[6.5, 7.5]	[6.9999999999971e + 00, 7.00000000000030e + 00]	4	2

m: multiplicidade do auto-valor.

<i>Intervalo inicial</i>	<i>Intervalo solução</i>	<i>n e de iterações</i>		
		Mo.	He.	Ha.
[-10.0, -1.0]	[-3.00000000000013e + 00, -2.99999999999987e + 00]	7	7	6
[11.4, 12.1]	[1.19999999999991e + 01, 1.20000000000009e + 01]	6	6	5
[10.7, 13.2]	[1.19999999999991e + 01, 1.20000000000009e + 01]	*	7	*

Mo. : Método Newton-Moore

He. : Método de Herzberger

Ha. : Método de Hansen

* não foi possível executar o método para este intervalo inicial.

Capítulo 4

Versão Intervalar de Métodos Iterativos para a Determinação de Auto-valores de Matrizes

Neste capítulo desenvolveremos versões intervalares dos métodos iterativos LR de Rutishauser e QR de Francis, para a solução do problema de auto-valores de matrizes.

4.1 Método LR de Rutishauser

Método *LR* no caso real:

Sejam $\mathcal{A}$ uma matriz real, $n \times n$, e M_i seus menores principais de ordem i , $i = 1, \dots, n$. Se $\det M_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, então existe uma única decomposição $\mathcal{A} = LR$, onde L é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e R é uma matriz triangular superior.

Usando o resultado acima, constrói-se o método iterativo conhecido por Método LR ou de Rutishauser, definindo-se uma sequência de matrizes $\mathcal{A}^{(k)}$, onde $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$ (matriz original) e $\mathcal{A}^{(k+1)}$ é obtida decompondo-se a matriz $\mathcal{A}^{(k)}$ no produto $\mathcal{A}^{(k)} = L^{(k)} R^{(k)}$ dado acima, e multiplicando as matrizes obtidas em ordem inversa, ou seja:

- $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$
- para $k = 1, 2, \dots$ repita

$$\mathcal{A}^{(k)} = L^{(k)} R^{(k)}$$

$$\mathcal{A}^{(k+1)} = R^{(k)} L^{(k)}$$

Prova-se que $\mathcal{A}^{(k)}$ e $\mathcal{A}^{(k+1)}$ são matrizes similares e portanto têm os mesmos auto-valores.

Prova-se também que se certas condições são impostas à matriz $\mathcal{A}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}^{(\infty)}$, onde $\mathcal{A}^{(\infty)}$ é uma matriz triangular superior, ao longo de cuja diagonal principal estão os auto-valores de $\mathcal{A}$, dispostos em ordem decrescente de seus módulos. Ver [15] e [16].

Método *LR* no caso intervalar:

Seja $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matriz real de ordem n e $[A] = \mathcal{A}$, isto é, $[A] = (A_{ij})$ e $A_{ij} = [a_{ij}, a_{ij}]$.

Fizemos a versão intervalar direta do método *LR*, isto é, substituímos todas as operações e matrizes reais por operações e matrizes intervalares, respectivamente, construindo uma sequência de matrizes intervalares $[A^{(k)}]$ que converge para uma matriz triangular superior intervalar cujos intervalos da diagonal principal contêm os auto-valores da matriz original $\mathcal{A}$, da seguinte forma:

- $[A^{(1)}] = [A]$
- para $k = 1, 2, \dots$ repita

$$[A^{(k)}] = [L^{(k)}][R^{(k)}]$$

$$[A^{(k+1)}] = [R^{(k)}][L^{(k)}]$$

onde $[L^{(k)}]$ é matriz triangular inferior intervalar, cujos elementos da diagonal principal são iguais a $[1, 1]$ e $[R^{(k)}]$ é matriz triangular superior intervalar.

O método, no caso real, possui a característica de convergir para uma matriz triangular superior em cuja diagonal principal estão os auto-valores da matriz inicial dispostos em ordem decrescente de seus módulos. Para isto, no decorrer do método, os auto-valores que não estão no seu devido lugar vão sendo ordenados.

No caso intervalar, o mesmo acontece, mas quando os intervalos diagonais vão sendo ordenados, pode ocorrer divisão por intervalo que contém o zero, e então não podemos mais continuar a execução do método.

Experimentalmente, concluímos que o método intervalar funciona perfeitamente bem quando a matriz original satisfaz as condições de convergência do método real e não houver a necessidade de reordenação dos auto-valores ao longo da diagonal principal das matrizes triangulares superiores geradas. Verificamos que não há necessidade de reordenação dos auto-valores quando, a cada passo, os menores principais das matrizes $[A^{(k)}]$, $(\Delta_i, i = 0, 1, \dots, n, \Delta_0 = 1)$ satisfizerem:

$$(\Delta_i)^2 > |\Delta_{i-1} * \Delta_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

ou ainda se,

$$|r_{ii}^{(k)}| < |r_{i-1,i-1}^{(k)}|, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

onde $[R^{(k)}] = (R_{ij}^{(k)})$ e $(R_{ii}^{(k)}) = [r_{ii1}^{(k)}, r_{ii2}^{(k)}]$.

Algoritmo Intervalar

Dada $\mathcal{A} = (a_{ij})$ - uma matriz real de ordem n .

1. Definir a matriz intervalar pontual

$$[A] = \mathcal{A} \quad \text{onde} \quad [A] = (A_{ij}) \quad \text{e} \quad A_{ij} = [a_{ij}, a_{ij}]$$

2. Fazer $[A^{(1)}] = [A]$

3. Para $k = 1, 2, \dots$, executar os passos abaixo até que $A_{ii}^{(k)} = A_{ii}^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$

- (a) Decompor $[A^{(k)}] = [L^{(k)}][R^{(k)}]$

- (b) Fazer $[B] = [R^{(k)}][L^{(k)}]$

- (c) Para $i, j = 1, 2, \dots, n$, se $A_{ij}^{(k)} \subset B_{ij}$
então $A_{ij}^{(k+1)} = A_{ij}^{(k)}$
senão $A_{ij}^{(k+1)} = B_{ij}$

4. Fim do algoritmo.

4.2 Método QR de Francis

Método QR, no caso real

O método iterativo de Francis para a determinação dos autovalores de matrizes consiste em:

Dada a matriz $\mathcal{A}$, define-se uma sequência de matrizes $\mathcal{A}^{(k)}$, onde $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$ (matriz original), e $\mathcal{A}^{(k+1)}$ é obtida de $\mathcal{A}^{(k)}$, decompondo-a no produto $\mathcal{A}^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$, onde $Q^{(k)}$ é uma matriz ortogonal e $R^{(k)}$ é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos, e efetuando o produto em ordem inversa, isto é:

- $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$
- para $k = 1, 2, \dots$ repita
$$\mathcal{A}^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$$
$$\mathcal{A}^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$$

Verifica-se facilmente, que o método acima consiste de uma série de transformações de similaridade aplicadas à matriz inicial $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)} \Rightarrow (Q^{(k)})^{-1} \mathcal{A}^{(k)} = R^{(k)} \quad e \quad \mathcal{A}^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)} = (Q^{(k)})^{-1} \mathcal{A}^{(k)} Q^{(k)}.$$

Portanto, $\mathcal{A}^{(k+1)}$ e $\mathcal{A}^{(k)}$ são similares.

Francis provou que se certas condições são impostas à matriz $\mathcal{A}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}^{(\infty)}$, onde $\mathcal{A}^{(\infty)}$ é uma matriz triangular superior, ao longo de cuja diagonal estão os auto-valores de $\mathcal{A}$, dispostos em ordem decrescente de seus módulos. Ver [6], [15] e [16].

Método QR, no caso intervalar

Seja $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matriz real de ordem n e $[A] = \mathcal{A}$, como no método anterior.

Construímos, a partir de $[A]$, uma sequência de matrizes intervalares $[A^{(k)}]$, $k = 1, 2, \dots$, da seguinte forma:

- $[A^{(1)}] = [A]$
- para $k = 1, 2, \dots$ repita

$$[A^{(k)}] = [Q^{(k)}][R^{(k)}]$$

$$[A^{(k+1)}] = [R^{(k)}][Q^{(k)}]$$

onde $[R^{(k)}]$ é matriz triangular superior intervalar e $[Q^{(k)}]$ é matriz ortogonal intervalar.

Obtemos melhores resultados, quando ao fazermos a decomposição intervalar $[A^{(k)}] = [Q^{(k)}][R^{(k)}]$ evitamos o uso de raízes quadradas, isto porque, pode ocorrer o caso do intervalo radicando conter números negativos, devido aos arredondamentos efetuados.

Observamos que se os auto-valores da matriz original são distintos em módulo, o método QR intervalar converge para uma matriz triangular superior intervalar, ao longo de cuja diagonal principal estão intervalos que contêm os auto-valores de A .

Algoritmo Intervalar

Dada $A = (a_{ij})$ - uma matriz real de ordem n .

1. Definir a matriz intervalar pontual

$$[A] = A \quad \text{onde} \quad [A] = (A_{ij}) \quad e \quad A_{ij} = [a_{ij}, a_{ij}]$$

2. Fazer $[A^{(1)}] = [A]$

3. Para $k = 1, 2, \dots$, executar os passos abaixo até que $A_{ii}^{(k)} = A_{ii}^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$

- (a) Decompor $[A^{(k)}] = [Q^{(k)}][R^{(k)}]$

- (b) Fazer $[B] = [R^{(k)}][Q^{(k)}]$

- (c) Para $i, j = 1, 2, \dots, n$, se $A_{ij}^{(k)} \subset B_{ij}$
 então $A_{ij}^{(k+1)} = A_{ij}^{(k)}$
 senão $A_{ij}^{(k+1)} = B_{ij}$

4. Fim do algoritmo.

4.3 Observações

1) Teste de Parada:

Como, para os métodos descritos acima, não utilizamos dados iniciais que contêm os dados exatos, não podemos fazer interseção do tipo $[A^{(k+1)}] = [A^{(k)}] \cap [R^{(k)}][L^{(k)}]$ ou $[A^{(k+1)}] = [A^{(k)}] \cap [R^{(k)}][Q^{(k)}]$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Fazemos então a intersecção $A_{ij}^{(k+1)} = A_{ij}^{(k)} \cap A_{ij}^{(k+1)}$ apenas quando $A_{ij}^{(k)} \subset A_{ij}^{(k+1)}, i, j = 1, \dots, n$.

E paramos o método quando $A_{ii}^{(k+1)} = A_{ii}^{(k)}, i = 1, \dots, n$.

2) Notamos que nos métodos iterativos dados acima, a sequência de matrizes $[A^{(k)}]$ vai se aproximando de uma matriz intervalar ao longo de cuja diagonal principal estão intervalos que contêm os auto-valores da matriz original, e que para algum $k = k_0 > 0$, $[A^{(k_0)}]$ é exatamente esta matriz. As matrizes seguintes $[A^{(k_0+1)}], [A^{(k_0+2)}], \dots$, têm em suas diagonais principais, intervalos que contêm os auto-valores de A , mas com diâmetro cada vez maior, isto por causa dos arredondamentos efetuados. Daí, a necessidade de se fazer intersecções entre os elementos das duas matrizes $[A^{(k)}]$ e $[A^{(k+1)}]$, para evitarmos acúmulo de erros desnecessários.

3) Observamos que os intervalos da diagonal principal contêm os auto-valores da matriz inicial e que o diâmetro destes intervalos são arbitrariamente pequenos, o que mostra que os métodos LR e QR intervalares obtêm os auto-valores de A , com alta precisão (veja exemplos).

4.4 Exemplos

As versões intervalares dos métodos LR e QR foram implementadas em linguagem PASCAL e vários exemplos foram testados em microcomputador compatível com IBM-PC.

Aqui apresentamos algumas das matrizes testadas, juntamente com os intervalos resultantes que contêm os auto-valores obtidos pelas versões intervalares.

As matrizes apresentadas nestes exemplos também foram construídas segundo Linhares [9].

1)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 14 & -9 & 13 & 2 & -18 \\ 2 & 3 & 13 & 2 & -18 \\ 2 & 12 & 4 & 2 & -18 \\ 2 & 12 & -3 & 9 & -18 \\ 2 & 12 & -3 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

auto-valores: $-9, 2, 5, 7$ e 12 .

Obtemos os seguintes intervalos que limitam os auto-valores acima:

Método LR Intervalar com 39 iterações:

[1.1999999999335e+01 , 1.20000000000677e+01]
[-9.00000000256534e+00 , -8.99999999744349e+00]
[6.99999999570529e+00 , 7.00000000431852e+00]
[4.99999999788743e+00 , 5.00000000211264e+00]
[1.9999999913410e+00 , 2.00000000086590e+00]

Método QR Intervalar com 38 iterações:

[1.1999999999931e+01 , 1.20000000000068e+00]
[-9.0000000006230e+00 , -8.9999999993757e+00]
[6.9999999991595e+00 , 7.00000000008403e+00]
[4.9999999995822e+00 , 5.00000000004157e+00]
[1.9999999998439e+00 , 2.00000000001549e+00]

2)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 60 & 5 & 10 & 15 & -89 \\ 10 & 55 & 10 & 15 & -89 \\ 10 & 15 & 50 & 15 & -89 \\ 10 & 15 & 20 & 45 & -89 \\ 10 & 15 & 20 & 25 & -69 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 1, 20, 30, 40 e 50.

Obtemos os seguintes intervalos que limitam os auto-valores acima:

Método LR Intervalar com 14 iterações:

[4.9999999999993e+01 , 5.00000000000007e+01]
[3.9999999999990e+01 , 4.00000000000011e+01]
[2.9999999999988e+01 , 3.00000000000012e+01]
[1.9999999999988e+01 , 5.00000000000013e+01]
[9.9999999999189e-01 , 2.00000000000076e+00]

Método QR Intervalar com 14 iterações:

[4.9999999999958e+01 , 5.00000000000038e+01]
[3.9999999999936e+01 , 4.00000000000062e+01]
[2.9999999999923e+01 , 3.00000000000076e+01]
[1.9999999999932e+01 , 5.00000000000066e+01]
[9.99999999996328e-01 , 2.000000000000363e+00]

3)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 20 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 20 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 20 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 20 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 20 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 20 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 20 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 20 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 20 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17 e 47.

Obtemos os seguintes intervalos que limitam os auto-valores acima:

Método LR Intervalar com 36 iterações:

[4.6999999999959e+01 , 4.70000000000039e+01]
 [1.6999999999977e+01 , 1.70000000000024e+01]
 [1.6999999999982e+01 , 1.70000000000019e+01]
 [1.6999999999984e+01 , 1.70000000000017e+01]
 [1.6999999999985e+01 , 1.70000000000016e+01]
 [1.6999999999986e+01 , 1.70000000000015e+01]
 [1.6999999999987e+01 , 1.70000000000014e+01]
 [1.6999999999987e+01 , 1.70000000000014e+01]
 [1.6999999999987e+01 , 1.70000000000014e+01]
 [1.6999999999987e+01 , 1.70000000000013e+01]

Método QR Intervalar com 19 iterações:

[4.6999999999799e+01 , 4.70000000000196e+01]
 [1.6999999999926e+01 , 1.70000000000071e+01]
 [1.6999999999946e+01 , 1.70000000000051e+01]
 [1.6999999999954e+01 , 1.70000000000042e+01]
 [1.6999999999962e+01 , 1.70000000000036e+01]
 [1.6999999999965e+01 , 1.70000000000033e+01]
 [1.6999999999967e+01 , 1.70000000000031e+01]
 [1.6999999999969e+01 , 1.70000000000028e+01]
 [1.6999999999970e+01 , 1.70000000000027e+01]
 [1.6999999999972e+01 , 1.70000000000025e+01]

4)

$$\text{matriz real : } \begin{pmatrix} 13 & -2 & 0 & 6 & 1 & -3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & 8 & 0 & 6 & 1 & -3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 9 & 6 & 1 & -3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 14 & 1 & -3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 8 & -3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 2 & 3 & -6 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 2 & -2 & -1 & 0 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 2 & -2 & -5 & 4 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 2 & -2 & -5 & 1 & 5 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 7 & 2 & -2 & -5 & 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

auto-valores: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1.

Obtemos os seguintes intervalos que limitam os auto-valores acima:

Método LR Intervalar com 51 iterações:

```
[ 9.9999999999934e+00 , 1.00000000000007e+01 ]
[ 8.9999999999935e+00 , 9.00000000000072e+00 ]
[ 7.9999999999918e+00 , 8.00000000000084e+00 ]
[ 6.9999999999841e+00 , 7.00000000000162e+00 ]
[ 5.9999999999820e+00 , 6.00000000000187e+00 ]
[ 4.9999999999802e+00 , 5.00000000000199e+00 ]
[ 3.9999999999787e+00 , 4.00000000000212e+00 ]
[ 2.9999999999766e+00 , 3.00000000000234e+00 ]
[ 1.9999999999742e+00 , 2.00000000000256e+00 ]
[ 9.9999999998028e-01 , 1.00000000000196e+00 ]
```

Método QR Intervalar com 51 iterações:

```
[ 9.9999999998385e+00 , 1.00000000000159e+01 ]
[ 8.9999999999411e+00 , 9.00000000000585e+00 ]
[ 7.9999999998263e+00 , 8.00000000001822e+00 ]
[ 6.9999999996463e+00 , 7.00000000003745e+00 ]
[ 5.9999999996984e+00 , 6.00000000003033e+00 ]
[ 4.9999999997239e+00 , 5.00000000002756e+00 ]
[ 3.9999999997744e+00 , 4.00000000002245e+00 ]
[ 2.9999999995489e+00 , 3.00000000004488e+00 ]
[ 1.9999999994557e+00 , 2.00000000005408e+00 ]
[ 9.9999999965493e-01 , 1.00000000003433e+00 ]
```

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo apresentaremos as conclusões finais e algumas observações sobre os métodos numéricos intervalares construídos ou analisados.

Dos algoritmos construídos, o da versão intervalar do Método QR de Francis, foi o que apresentou melhor desempenho, funcionando tão bem quanto o do caso real, com as mesmas condições de convergência deste caso. Não há restrições quanto a ordem (elevada ou não) da matriz. Como a extração de raiz quadrada, em Matemática Intervalar gera problemas, às vezes de difícil solução, optou-se, no cálculo das matrizes ortogonais intervalares $[Q^{(k)}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, pela versão do método de Francis, que não faz uso dessa raiz. Assim, outras versões do método QR foram descartadas, por terem apresentado problemas, dada a necessidade de extração de raízes quadradas. Aliás, há alguns tópicos que continuam a merecer a atenção dos pesquisadores em Análise Intervalar, pois estão ainda mal equacionados, como, por exemplo, o da função quadrada (cálculo do quadrado de um intervalo), o da extração de raiz quadrada e o cálculo de produto escalar de dois vetores intervalares.

A versão intervalar do método LR de Rutishauser apresenta, também, bom desempenho, funcionando tanto para matrizes de baixa, quanto de alta ordem e com as mesmas condições de convergência do caso real. Há, porém, uma restrição importante: ocorrer a necessidade de reordenação dos auto-valores, ao longo da diagonal principal das matrizes triangulares superiores geradas. Verificou-se, experimentalmente que se as matrizes geradas $[A^{(k)}]$, forem tais que seus menores principais Δ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ ($\Delta_0 = 1$) satisfizerem:
 $(\Delta_j)^2 > |\Delta_{j-1} * \Delta_{j+1}|$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, não ocorre a reordenação citada.

Na versão intervalar dos dois métodos iterativos citados, estabele-

lecem-se, como teste de parada a condição que se interrompa a execução do problema quando se tiver

$$A_{ii}^{(k+1)} = A_{ii}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

para alguma iteração $k = k_0 > 0$. Toma-se então, como os auto-valores intervalares de $\mathcal{A}$, os elementos diagonais de $[A^{k_0}]$.

Para os métodos iterativos QR e LR, várias versões intervalares foram tentadas. Apenas as apresentadas, neste trabalho, tiveram relativo sucesso. Também outros métodos iterativos mereceram nossa atenção, porém, sem sucesso. Vê-se, desse modo, que o assunto tem muito a oferecer, em termos de pesquisa.

A versão intervalar dos métodos de Leverrier-Faddeev e de Danilevsky (polinômio característico) funcionam bem apenas para matrizes de baixa ordem n ($n \leq 6$). A partir desse valor, os intervalos obtidos continuam a conter os coeficientes do polinômio característico, porém com diâmetro crescendo muito com a ordem n . Mais um problema a merecer pesquisa posterior.

Quanto ao método de J. Zhinying para limitação de auto-valores e de auto-vetores de matriz $\mathcal{A}$ real, simétrica, observamos que, se os auto-vetores correspondentes ao auto-valor $\lambda \in \Lambda$ forem linearmente independentes, o comportamento é o mesmo que para matrizes simétricas.

No método de Zhiying quando obtemos duas iterações iguais, isto é, $[x_i^{(k)}] = [x_i^{(k+1)}]$ e temos que fazer bissecção no intervalo $\Lambda^{(k)}$ é interessante que recalculemos os vetores intervalares $[x_i]$ pelo método de Nickel a cada bissecção para se obter melhores limitantes para os auto-vetores.

Muitos problemas aqui citados e com os quais nos defrontamos no decorrer de nossa pesquisa derivam da não existência, no país, de máquina (computadores) com arquitetura ("hardware") adequadas ao processamento de dados intervalares. Tivemos que nos valer de microcomputadores da linha IBM-PC, utilizando a linguagem PASCAL munida de "software" especializado em Aritmética Intervalar.

Uma das dificuldades por nós encontrada foi a escassa bibliografia disponível. Os artigos publicados sobre métodos intervalares para a solução do problema de auto-valores não passam de 04 ou 05, o que uma vez mais, evidencia a complexidade do problema abordado.

Referências Bibliográficas

- [1] ALEFELD, G., HERZBERGER, J. *Introduction to interval computations*. New York, Academic Press, 1983.
- [2] ARTHUR, D.W. *The use of interval arithmetic to bound the zeros of real polynomials*. J. Inst. Maths. Applics, v.10, p. 231-237, 1972.
- [3] DEWAR, J.K.S. *Procedures for interval arithmetic*. Computer J., v.14, p. 447-450, 1971.
- [4] DWYER, P.S. *Linear computation*. New York, John Wiley & Sons, 1951.
- [5] FADDEEVA, V.N. *Computational methods of linear algebra*. New York, Dover Publications, 1959.
- [6] FRANCIS, J.F.G. *The QR transformation. A unitary analogue to the LR transformation, Parts I and II*. Computer Journal, 4 p. 265-271; 332-345, 1961/62.
- [7] HANSEN, E. *Interval forms of Newtons method*. Computing, v.20, p. 153-163, 1978.
- [8] HERZBERGER, J. *Bemerkungen zu einem Verfahren von R. E. Moore*. ZAMM, v.53, p.356-358, 1973.
- [9] LINHARES, O.L. *Classes de matrizes quadradas para teste de algoritmos computacionais*. Notas do ICMSC - USP, v. 14, 1985.
- [10] MOORE, R.E. *Interval analysis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.
- [11] MOORE, R.E. *Methods and applications of interval analysis*. Philadelphia, SIAM, 1979.
- [12] NICKEL, K.L.E. *Bounding eigenvectors of a symmetric matrix*. Interval

Mathematics 1980, Academic Press, p. 433-447, 1980.

- [13] QINGRONG, L., ZHIYING, J. *A method for solving the eigenproblem of symmetric interval matrix.* Freiburger Intervall - Berichte, v.87/7, p. 9-14, 1987.
- [14] SCHWARZ, H.R., RUTISHAUSER, H., STIEFEL, E. *Numerical analysis of symmetric matrices.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973.
- [15] WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problems.* Oxford, Claredon Press, 1965.
- [16] WILKINSON, J.H. *Convergence of the LR, QR, and algorithms* Computer Journal, v.8, p.77-84, 1965.
- [17] ZHIYING, J. *An interval method for bounding the eigenvalue and eigenvectors of a symmetric matrix.* Freiburger Intervall - Berichte, v.87/7, p. 17-21, 1987.