UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Modelos matemáticos para problemas de planejamento da produção em indústrias de processos

Artur Lovato da Cunha

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Artur Lovato da Cunha

Modelos matemáticos para problemas de planejamento da produção em indústrias de processos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Maristela Oliveira dos Santos

USP – São Carlos
Janeiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C972m Cunha, Artur Lovato da
 Modelos matemáticos para problemas de
planejamento da produção em indústrias de processos
/ Artur Lovato da Cunha; orientadora Maristela
Oliveira dos Santos. -- São Carlos, 2019.
 143 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2019.

 1. Pesquisa operacional. 2. Programação
matemática. 3. Programação da produção. 4. Indústria
de processos. I. Santos, Maristela Oliveira dos,
orient. II. Título.

Artur Lovato da Cunha

**Mathematical models for production planning problems in
process industries**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Maristela Oliveira dos Santos

USP – São Carlos
January 2019

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus pais Luiz e Edir e a minha tia Goreti, por todo o apoio que recebi durante a graduação e a pós-graduação.

À minha namorada LORIZ pela ajuda em diversos momentos dessa etapa da minha vida.

À minha orientadora Maristela por mais uma vez contribuir na minha formação acadêmica e pelo auxílio no decorrer deste trabalho.

À professora Ana-Póvoa pela recepção e suporte no meu estágio sanduíche em Portugal, e aos professores Reinaldo Morabio e Tânia Varela pelas discussões e conselhos nos trabalhos.

Aos membros da banca pelas sugestões de aprimoramento deste trabalho.

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro parcial deste trabalho e à empresa química brasileira pela abertura e confiança em apresentar seus problemas e sua cadeia produtiva.

“O ignorante afirma, o sábio duvida, o sensato reflete.”
(Aristóteles)

RESUMO

CUNHA, A. L. **Modelos matemáticos para problemas de planejamento da produção em indústrias de processos**. 2019. 143 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Nesta tese é realizado um estudo de caso em uma indústria química brasileira, no qual busca-se representar características da tomada de decisões para a programação da produção em plantas de bateladas. Para isso, foi proposto um modelo matemático do tipo MIP (*Mixed Integer Programming*) que considerou a disponibilidade de matérias-primas, múltiplas tarefas produtivas para um mesmo produto, tanques de armazenamento multiproduto, envase de produtos e demanda de produtos a granel e envasados. O objetivo principal desse estudo era permitir a obtenção de soluções compatíveis com a prática da empresa em tempo de processamento viável. A partir desse estudo de caso, foi efetuado um segundo estudo com objetivo de avaliar o desempenho de formulações matemáticas para a resolução de um problema de programação da produção. Foram considerados modelos clássicos das comunidades científicas de pesquisa operacional e de engenharia de sistemas de processo, além de um terceiro modelo desenvolvido a partir de conceitos dessas duas comunidades. Algumas características do estudo de caso não foram retratadas, como o consumo de matérias-primas e o envase dos produtos, porém, foram consideradas duas características comumente observadas em problemas da indústria de processos: bateladas com quantidade produzida flexível e tarefas que produzem mais de um produto. Por fim, um terceiro estudo foi realizado com base no estudo de caso da indústria química brasileira, porém, com um foco decisões mais próximas ao nível tático. Sendo assim, foi considerado apenas o dimensionamento de lotes, sem o sequenciamento da produção. Por outro lado, foram acrescentadas características pertinentes à aquisição de matérias-primas, como custos das matérias-primas e descontos por quantidade adquirida. O objetivo deste último trabalho era avaliar a influência da integração das decisões de dimensionamento de lotes e de aquisição das matérias-primas nos custos da cadeia produtiva durante todo o horizonte de planejamento.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional, Programação Matemática, Planejamento da Produção, Indústria de Processos.

ABSTRACT

CUNHA, A. L. **Mathematical models for production planning problems in process industries**. 2019. 143 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this thesis we developed a study case in a Brazilian chemical industry, in which the aim was to represent the characteristics of decision-making for production scheduling in batch plants. For this, a mixed integer programming model was proposed to consider the availability of raw materials, multiple productive tasks for the same product, multi-product storage tanks, product packaging and demand for products in bulk and packaged. The main objective of this study was develop a model that is able to obtain solutions that could be used in practice for this chemical industry in viable processing time. From this study case, a second work was carried out to evaluate the performance of mathematical formulations to solve a problem of production scheduling. Classic models of operational research and process system engineering communities were considered, and a third model was developed from concepts of these two communities. Some features of the case study were not modelled, such as the consumption of raw materials and the product packaging, however, two characteristics usually present in process industries were considered: flexible batch production quantity and multi-product task production. Finally, a third study developed based on the study case of the Brazilian chemical industry, but with focus on decisions more familiar to the tactical level. Thus, only lot sizing was modelled, without production scheduling. On the other hand, features relevant raw material purchasing were included, such as raw material costs and discounts for quantity purchased. The objective of this last work was to evaluate the influence of integrating lot sizing decisions and raw material purchasing decisions in the overall costs of the production chain during the entire planning horizon.

Keywords: Operations Research, Mathematical Programming, Production Planning, Process Industry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fluxograma resumido da planta produtiva.	30
Figura 2 – Custo total de aquisição da matéria-prima.	31
Figura 3 – Representação da variação do estoque da matéria-prima durante um mês. . .	31
Figura 4 – Exemplo de processo produtivo em que um produto possui duas receitas. . .	32
Figura 5 – Tempo de preparação dependente da sequência das receitas.	33
Figura 6 – Tanques de armazenamento dedicado e multiproduto.	34
Figura 7 – Envase de produto em três embalagens distintas.	35
Figura 8 – Representação dos patamares de estoque e de seus respectivos intervalos. . .	39
Figura 9 – Deslocamento de tempo para o período posterior.	40
Figura 10 – Exemplo ilustrativo de um sequenciamento produtivo.	41
Figura 11 – Redução da função objetivo obtida pela heurística <i>fix-and-optimize</i> , a partir da solução inicial fornecida pela heurística <i>relax-and-fix</i>	53
Figura 12 – Diagrama de Gantt para a programação da produção da unidade produtiva m_1 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria. . .	54
Figura 13 – Estoque da matéria-prima f_1 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	55
Figura 14 – Estoque da matéria-prima f_1 obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	55
Figura 15 – Redução do valor da função objetivo obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	56
Figura 16 – Diagrama de Gantt para a programação da produção da unidade produtiva m_1 obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	56
Figura 17 – Representação resumida do problema estudado.	63
Figura 18 – O tempo de preparação depende da ordem das tarefas produtivas.	64
Figura 19 – Características de problemas pouco exploradas pela comunidade OR.	64
Figura 20 – CSLP pode apresentar ociosidade indesejada em problemas de produção por batelada.	67
Figura 21 – Exemplo de uma representação por diagramas RTN.	69
Figura 22 – O modelo RTN pode evitar períodos ociosos nos problemas com produção por batelada.	70

Figura 23 – Representação da classe 1 por diagramas RTN.	72
Figura 24 – Quantidade de melhores soluções obtidas utilizando os modelos CSLP e RTN.	74
Figura 25 – Variáveis binárias que representam os processos produtivos.	77
Figura 26 – Quantidade de melhores soluções obtidas utilizando os modelos CSLP e CSLP-MP.	83
Figura 27 – Comparação das melhores soluções obtidas para os modelos RTN e CSLP-MP.	86
Figura 28 – Fluxograma de processos da cadeia produtiva.	95
Figura 29 – Exemplo de uma estrutura produtiva do problema abordado.	96
Figura 30 – Exemplo de uma estrutura de armazenamento do problema abordado.	97
Figura 31 – Representação de recursos e tarefas.	106
Figura 32 – Estrutura de produtos do problema considerado.	107
Figura 33 – Estrutura de armazenamento do problema considerado.	107
Figura 34 – Estrutura produtiva baseada na classe 2AC de (TEMPELMEIER; BUS- CHKÜHL, 2009).	108
Figura 35 – Estrutura produtiva baseada na classe 2GC de (TEMPELMEIER; BUS- CHKÜHL, 2009).	109
Figura 36 – Estrutura de envase do problema considerado.	110
Figura 37 – Estrutura de armazenamento do problema considerado.	110
Figura 38 – Quantidade adquirida por produto por período.	112
Figura 39 – Percentual de redução dos valores da função objetivo quando as soluções do MMI são comparadas com as do EMS para todas instâncias.	113
Figura 40 – Percentual médio de redução da função objetivo atingido pelo MMI, em relação ao EMS, para as instâncias baseadas no problema real.	114
Figura 41 – Comparação dos valores da função objetivo para as instâncias de Tempelmeier com 1 e 2 tarefas por produto.	115
Figura 42 – Número de tarefas para as instâncias de Tempelmeier.	116
Figura 43 – Custo das matérias-primas para as instâncias de Tempelmeier.	116
Figura 44 – Programação da produção da unidade produtiva m_2	137
Figura 45 – Programação da produção da unidade produtiva m_3	138
Figura 46 – Representação da classe 2 por diagramas RTN.	139
Figura 47 – Representação da classe 3 por diagramas RTN.	140
Figura 48 – Representação da classe 4 por diagramas RTN.	141
Figura 49 – Representação da Classe 5 por diagramas RTN.	143

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Informações gerais sobre as receitas produtivas.	50
Tabela 2	– Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_1	50
Tabela 3	– Informações gerais sobre o processo de envase dos produtos.	51
Tabela 4	– Capacidade total de armazenamento dos produtos em tanques dedicados. . .	51
Tabela 5	– Informações gerais sobre os tanques de armazenamento multiproduto. . . .	52
Tabela 6	– Sequência produtiva da unidade m_1 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	54
Tabela 7	– Sequência produtiva da unidade m_1 obtida pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	57
Tabela 5	– Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos CSLP e RTN.	73
Tabela 6	– Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos CSLP e RTN para as classes 1 e 2.	74
Tabela 7	– GAPs e tempos médios dos testes para os modelos CSLP e RTN.	75
Tabela 8	– Tempo médio de finalização das tarefas, considerando apenas instâncias em que o CSLP e o RTN permitiram a obtenção de soluções factíveis.	75
Tabela 9	– Características de acordo com as classes de instâncias.	80
Tabela 10	– Características que definiram os cenários das classes de instâncias.	81
Tabela 11	– Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos CSLP e CSLP-MP.	82
Tabela 12	– Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos CSLP e CSLP-MP para as classes 1 e 2.	82
Tabela 13	– GAPs e tempos médios dos testes para os modelos CSLP e CSLP-MP. . . .	82
Tabela 14	– Tempo médio de finalização das tarefas, considerando apenas instâncias em que o CSLP e o CSLP-MP permitiram a obtenção de soluções factíveis. . .	83
Tabela 15	– Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos RTN e CSLP-MP, para as classes 1 a 5.	84
Tabela 16	– Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos RTN e CSLP-MP para as classes 1 a 5.	85
Tabela 17	– GAPs e tempos médios dos testes para os modelos RTN e CSLP-MP.	85
Tabela 18	– Tempo médio de finalização das tarefas, apenas quando ambos modelos obtiveram solução factível.	87

Tabela 19 – Faixas e taxas de desconto dos fornecedores.	96
Tabela 20 – Comparação dos componentes da função objetivo dos estratégia sequencial e integrado.	112
Tabela 21 – GAPs das soluções fornecidos pelo pacote de otimização.	113
Tabela 22 – Análise da redução atingida pelo MMI na função objetivo.	114
Tabela 23 – Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_2	133
Tabela 24 – Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_3	134
Tabela 25 – Tempo disponível, em minutos, para as unidades produtivas em cada período.	134
Tabela 26 – Estoque inicial e fornecimento de matéria-prima durante o horizonte de planejamento.	134
Tabela 27 – Demanda a granel e envasada dos produtos.	135
Tabela 28 – Estado inicial da preparação dos equipamentos.	136
Tabela 29 – Sequência produtiva da unidade m_2 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	137
Tabela 30 – Sequência produtiva da unidade m_3 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.	138
Tabela 31 – Tempo de processamento das tarefas da classe 3.	141
Tabela 32 – Tempo de processamento das tarefas da classe 4.	142
Tabela 33 – Tempo de processamento das tarefas da classe 5.	142

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Motivação	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Organização	25
2	PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM UMA INDÚSTRIA QUÍMICA BRASILEIRA: UM ESTUDO DE CASO	27
2.1	Descrição do Problema	29
2.1.1	<i>Disponibilidade e Armazenamento de Matérias-Primas</i>	30
2.1.2	<i>Processos Produtivos</i>	32
2.1.3	<i>Armazenamento de Produtos</i>	33
2.1.4	<i>Demanda</i>	34
2.1.5	<i>Envase de Produtos</i>	35
2.2	Formulação Matemática	36
2.2.1	<i>Parâmetros e Variáveis</i>	36
2.2.1.1	<i>Parâmetros</i>	36
2.2.1.2	<i>Variáveis contínuas</i>	37
2.2.1.3	<i>Variáveis binárias</i>	37
2.2.1.4	<i>Variáveis inteiras</i>	38
2.2.2	<i>Modelo Matemático</i>	38
2.2.2.1	<i>Função Objetivo</i>	38
2.2.2.2	<i>Restrições</i>	38
2.2.2.2.1	<i>Estoque de matérias-primas</i>	38
2.2.2.2.2	<i>Planejamento da produção</i>	39
2.2.2.2.3	<i>Sequenciamento da produção</i>	41
2.2.2.2.4	<i>Estoque de produtos a granel</i>	42
2.2.2.2.5	<i>Planejamento do envase</i>	43
2.2.2.2.6	<i>Demanda</i>	44
2.3	Abordagem de Solução	45
2.3.1	<i>Modelo Matemático Reformulado</i>	45
2.3.1.1	<i>Função Objetivo</i>	46
2.3.1.2	<i>Restrições</i>	46
2.3.2	<i>Heurística Construtiva</i>	47

2.3.3	<i>Heurística de Melhoria</i>	48
2.4	Experimentos Computacionais	49
2.4.1	<i>Descrição dos Dados</i>	49
2.4.2	<i>Descrição da Abordagem de Solução</i>	52
2.4.3	<i>Análise da Solução</i>	53
2.5	Considerações Finais	57
3	PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO EM INDÚSTRIAS DE PRO- CESSOS	59
3.1	Revisão da Literatura	61
3.2	Definição do Problema	63
3.3	Modelos Matemáticos da Literatura	65
3.3.1	<i>Função Objetivo</i>	65
3.3.1.1	<i>Parâmetros</i>	65
3.3.1.2	<i>Variáveis contínuas</i>	65
3.3.2	<i>Modelo de Pesquisa Operacional</i>	65
3.3.2.1	<i>Parâmetros</i>	66
3.3.2.2	<i>Variáveis contínuas</i>	66
3.3.2.3	<i>Variáveis binárias</i>	66
3.3.2.4	<i>Restrições do CSLP</i>	67
3.3.3	<i>Modelo de Engenharia de Sistemas de Processo</i>	68
3.3.3.1	<i>Subconjuntos</i>	70
3.3.3.2	<i>Parâmetros</i>	70
3.3.3.3	<i>Variáveis contínuas</i>	70
3.3.3.4	<i>Variáveis binárias</i>	70
3.3.3.5	<i>Restrições do RTN</i>	71
3.3.4	<i>Experimentos Computacionais</i>	71
3.3.4.1	<i>Conjunto de Instâncias</i>	72
3.3.4.2	<i>Análise dos Resultados</i>	73
3.4	Modelo Matemático Proposto	76
3.4.1	<i>Índices, parâmetros e variáveis</i>	76
3.4.1.1	<i>Parâmetros</i>	76
3.4.1.2	<i>Variáveis contínuas</i>	76
3.4.1.3	<i>Variáveis binárias</i>	77
3.4.2	<i>Restrições do modelo CSLP-MP</i>	77
3.4.2.1	<i>Finalização da última tarefa</i>	78
3.4.2.2	<i>Planejamento da produção</i>	78
3.4.2.3	<i>Sequenciamento da produção</i>	78
3.4.2.4	<i>Planejamento de estoque</i>	79
3.4.2.5	<i>Sequenciamento do armazenamento</i>	79

3.4.3	Experimentos Computacionais	80
3.4.3.1	Conjunto de Instâncias	80
3.4.3.2	Análise dos Resultados: CSLP vs CSLP-MP	81
3.4.3.3	Análise dos Resultados: RTN vs CSLP-MP	84
3.5	Considerações Finais	87
4	INTEGRAÇÃO DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO E PLANEJAMENTO DE AQUISIÇÃO	89
4.1	Revisão da Literatura	90
4.1.1	Aquisição de Matérias-Primas	91
4.1.2	Dimensionamento de lotes produtivos	92
4.1.3	Indústria de Processos	93
4.1.4	Considerações Finais	94
4.2	Definição do Problema	94
4.3	Modelo Matemático	97
4.3.1	Funções, subconjuntos, parâmetros e variáveis	98
4.3.1.1	Funções	98
4.3.1.2	Subconjuntos	99
4.3.1.3	Parâmetros	99
4.3.1.4	Variáveis contínuas	100
4.3.1.5	Variáveis binárias	100
4.3.1.6	Variáveis inteiras	100
4.3.2	Modelo Matemático Integrado (MMI)	100
4.3.2.1	Função Objetivo	101
4.3.2.2	Restrições	101
4.3.2.2.1	Aquisição	101
4.3.2.3	Tarefas produtivas	102
4.3.2.4	Tarefas de envase	102
4.3.2.5	Controle de estoque	102
4.3.2.6	Controle dos tanques de armazenamento multipropósito	103
4.3.3	Estratégia Matemática Sequencial (EMS)	104
4.4	Experimentos Computacionais	105
4.4.1	Descrição dos Dados	105
4.4.1.1	Conjunto de instâncias reais	106
4.4.1.2	Conjunto de instâncias de Tempelmeier	109
4.4.2	Análise dos resultados	111
4.4.2.1	Exemplo Ilustrativo	111
4.4.2.2	Qualidade da Solução	112
4.4.2.3	Análise das Soluções	113
4.5	Considerações Finais	117

5	CONCLUSÃO	119
5.1	Considerações Finais	119
5.2	Perspectivas Futuras	121

REFERÊNCIAS	123
--------------------	------------

APÊNDICES

APÊNDICE A	–	DADOS COMPLEMENTARES DO ESTUDO DE CASO	133
A.1		Dados Estruturais do Estudo de Caso	133
A.2		Dados Operacionais do Estudo de Caso	134
A.3		Solução do Estudo de Caso	136
APÊNDICE B	–	INSTÂNCIAS COMPLEMENTARES DE INDÚSTRIAS DE PROCESSOS	139
B.1		Classe 2	139
B.2		Classe 3	140
B.3		Classe 4	141
B.4		Classe 5	142

INTRODUÇÃO

Uma das características do meio empresarial desse milênio é o aumento do número de competidores, englobando empresas nacionais e multinacionais, o que os obriga a melhorar seus processos internos para continuarem competitivos. O advento da Internet, e sua posterior popularização, disponibilizou as mais diversas informações sobre produtos. A abundância de fornecedores e, conseqüentemente, de escolhas condicionou os clientes a buscarem produtos de alta qualidade, com rápida entrega e serviços sob medida para suas necessidades, tudo isso a um baixo custo. Caso uma companhia não possa atender tais requerimentos, o cliente encontrará alguém mais flexível para atendê-lo (MONCZKA *et al.*, 2009, p. 5).

A busca constante por processos mais eficientes em todos os setores, desde a aquisição de matérias-primas, a cadeia produtiva e o marketing, até setor de serviço de atendimento ao consumidor, está se tornando cada vez mais importante para o desenvolvimento ou consolidação das empresas. Devido à forte concorrência entre empresas nacionais e multinacionais, a sobrevivência de muitas organizações está diretamente condicionada a essas melhorias.

Algumas das estratégias utilizadas para concretizar o aprimoramento da gestão de suprimentos¹ das companhias são: a integração vertical, a redução do número de fornecedores e o estreitamento de suas relações (por exemplo, por meio de contratos de longo prazo), o agrupamento das requisições dos setores da empresa para aumentar sua influência no processo de compra, a integração das decisões de aquisição com o planejamento da produção, entre outros (CRAMA; PASCUAL; TORRES, 2004). Essa integração é ainda mais importante para situações em que uma empresa possui múltiplas tarefas produtivas para um mesmo produto. Dessa forma, a escolha das tarefas poderia considerar custos de matérias-primas e eventuais descontos, o que direcionaria o planejamento de forma mais sensata.

¹ A gestão de suprimentos ou *supply management* lida com responsabilidades estratégicas, que são atividades com maior impacto no desempenho de longo prazo da organização, e não atividades rotineiras ou de decisões do dia-a-dia, que fazem parte das responsabilidades tradicionais da aquisição de materiais (MONCZKA *et al.*, 2009, p. 8-9).

A aquisição eficiente de mercadorias tornou-se uma forma indispensável para ganhar vantagens competitivas sobre os concorrentes. Um indício desse reconhecimento são os altos salários pagos a profissionais do departamento de compras (MONCZKA *et al.*, 2009, p. 8). De acordo com Weber, Current e Benton (1991), a compra de materiais ou componentes constituem um grande percentual das despesas empresariais. Para a maioria das empresas dos EUA, de 40 a 60% dos custos finais dos produtos são oriundos das despesas de aquisição, ou seja, a cada 100 dólares obtidos em vendas, entre 40 e 60 dólares são repassados aos fornecedores.

Há muito tempo a seleção de fornecedores qualificados é considerada uma das mais importantes funções do departamento de compras (WEBER; CURRENT; BENTON, 1991). O fornecimento inadequado de material ou serviço pode afetar diretamente as operações de uma empresa. Matérias-primas ou serviços de baixa qualidade podem resultar em produtos não conformes ou em baixa eficiência, os quais podem não ser aceitos pelos clientes (MOURA, 2009). Adicionalmente, podem haver gastos extras para a empresa, originados de despesas como reparos de produtos (*recall*), o que ainda pode provocar a redução de sua participação no mercado, devido à perda de confiança dos clientes na qualidade dos seus produtos.

Outro aspecto importante para o sucesso das companhias é a gestão de suas plantas produtivas, as quais podem ser compostas por equipamentos de produção contínua ou por batelada, podendo haver ainda equipamentos produtivos de semi-batelada, que combina características de ambos. Sistemas contínuos são comuns quando há um número limitado de produtos com demanda relativamente alta, produzidos através de campanhas longas. Já sistemas de batelada costumam apresentar demandas relativamente baixa de um grande número de produtos, que são produzidos em equipamentos multipropósito e cuja campanha é caracterizada pela produção sequencial de diversas bateladas de um mesmo produto (KALLRATH, 2002).

A demanda dos produtos geralmente varia com o passar do tempo devido a fatores como sazonalidade, surgimento de novas empresas, desenvolvimento de novos produtos, entre outros. Em sistemas de produção de batelada, essas variações podem ser compensadas ao serem alocados um número maior ou menor de equipamentos para a produção de determinados produtos. Essa versatilidade torna os sistemas produtivos de bateladas mais flexíveis do que os sistemas contínuos (MAUDERLI; RIPPIN, 1979).

O planejamento e a programação da produção são atividades muito importantes em sistemas de manufatura, influenciando fortemente a utilização dos recursos, a rentabilidade e o tempo de entrega dos produtos (YANG; PARSAEI; LEEP, 2001). O planejamento da produção visa determinar a quantidade produzida e o nível dos estoques para que as demandas dos consumidores sejam completamente atendidas a um custo mínimo de processamento, levando em consideração restrições de capacidade produtiva. Já a programação da produção visa determinar o sequenciamento e o momento no qual cada tarefa produtiva deve ser alocada aos recursos, geralmente limitados, para atingir as metas de produtividade (KOPANOS; PUIGJANER; MARAVELIAS, 2011).

Em diversos momentos, as empresas tomam decisões de forma independente mesmo que algumas dessas decisões estejam relacionadas entre si. Isso pode ser explicado pela segmentação administrativa em departamentos, setores ou até mesmo em indivíduos que costumam trocar poucas informações antes de tomarem as decisões. Em muitas situações, o planejamento da produção é inicialmente definido para que posteriormente sejam tomadas decisões como a aquisição de matérias-primas ou mesmo a programação da produção. No ambiente de manufatura atual, caracterizado pelo tempo de resposta decrescente, padrões de qualidade rigorosos, maior variedade de componentes e com custos competitivos, é difícil alcançar resultados satisfatórios por meio dessa abordagem tradicional. Portanto, é necessário considerar abordagens que integrem o planejamento e a programação da produção (PHANDEN; JAIN; VERMA, 2011), bem como a aquisição de matérias-primas e o planejamento da produção (CRAMA; PASCUAL; TORRES, 2004).

1.1 Motivação

Uma indústria química brasileira de grande porte encontrava-se em dificuldade para automatizar o processo de planejamento da produção de suas plantas produtivas. Por esse motivo, Alvares (2010) desenvolveu um trabalho inicial que visava determinar o dimensionamento de lotes mensal de uma única planta produtiva utilizando uma formulação matemática conhecida como problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade (*Capacitated Lot Sizing Problem* ou CLPS). Entretanto, diversas características intrínsecas ao problema não foram consideradas, tais como disponibilidade de matérias-primas, preparação das unidades produtivas, presença de tanques de armazenamento e etapa de envase, logo foi desenvolvida uma extensão desse trabalho em que algumas características adicionais foram abordadas (CUNHA; SANTOS, 2017). Posteriormente, a indústria interessou-se em aprimorar as propostas anteriores e desenvolver um estudo detalhado sobre a programação da produção. Desse forma, foram realizadas diversas visitas técnicas à indústria para investigação das características mais relevantes, assim como para a captação de dados referentes aos processos produtivos e à tomada de decisões.

A partir do momento que o problema de programação da produção tornou-se bem definido, foi desenvolvido um modelo matemático de programação inteira mista (*Mixed Integer Programming* ou MIP) representando uma das plantas produtivas da indústria considerada. A concepção desse modelo levou em consideração diversos aspectos presentes no processo de tomada de decisões dos colaboradores dessa indústria, tais como: disponibilidade de matérias-primas, restrições de armazenamento, alocação de tanques de armazenamento multiproduto, além de capacidade disponível para a produção e para o envase. A resolução desse modelo matemático, em tempo computacional viável, apenas utilizando um pacote de otimização comercial não foi possível. Por esse motivo, foi proposto um método de solução que utilizou uma reformulação matemática simples e dois tipos de heurísticas baseadas em formulação matemática para obter soluções factíveis em tempo computacional razoável.

A dificuldade de resolução do modelo matemático desenvolvido para esse estudo de caso induziu à busca de formulações matemáticas alternativas que permitissem resoluções mais rápidas para o problema de programação da produção. Visto que a indústria química pode ser considerada uma indústria de processos, optou-se por investigar a formulação matemática genérica uniforme denominada redes de recursos e tarefas (*Resource-Task-Network* ou RTN). Dentre os modelos matemáticos da comunidade de pesquisa operacional, um dos que podem incorporar características do RTN mais facilmente é o problema de dimensionamento de lotes com preparação contínua (*Continuous Setup Lot sizing Problem* ou CSLP), portanto, essas duas abordagens foram investigadas.

Por fim, a necessidade de armazenamento e o consumo de matérias-primas tratados no estudo de caso realizado no início deste trabalho conduziu as investigações em uma linha de pesquisa que visa integrar as decisões de aquisição de matérias-primas com as decisões de planejamento da produção. A presença de múltiplas tarefas que podem produzir um mesmo produto, em alguns casos consumindo ingredientes distintos entre si, permite que a demanda das matérias-primas seja mais flexível para o planejamento de compras. Um ponto fundamental para fomentar a integração desses dois problemas é a presença de descontos de acordo com o volume de matérias-primas adquiridas. Quando todas essas características são consideradas simultaneamente para o planejamento da produção é possível encontrar oportunidades de reduzir o custo total da cadeia produtiva.

1.2 Objetivos

O primeiro objetivo desta tese é retratar um problema de planejamento da produção real presente em uma indústria química brasileira por meio de um modelo matemático baseado em programação inteira mista. Para isso é necessário identificar elementos e operações presentes, tais como matérias-primas, produtos, unidades produtivas, tarefas produtivas e de envase, tanques de armazenamento, conexões entre as unidades produtivas e os tanques, além da permissão de utilização dos tanques por produto. Essas características devem ser retratadas de modo que uma solução factível fornecida pelo modelo esteja apta a ser executada operacionalmente com o mínimo possível de ajustes dos especialistas.

O segundo objetivo desta tese é avaliar o desempenho de dois modelos matemáticos clássicos na resolução da programação da produção. Um modelo proposto pela comunidade científica de Pesquisa Operacional, denominado CSLP, e outro proposto pela comunidade científica de Engenharia de Sistemas de Processo, conhecido como RTN. Após essa avaliação, pretende-se desenvolver uma nova formulação que agregue características de ambos e que apresente desempenho superior aos dois modelos clássicos.

O terceiro e último objetivo desta tese consiste em integrar dois problemas bem estudados na literatura: o dimensionamento de lotes e a aquisição de matérias-primas. A partir da

formulação de um novo modelo matemático busca-se avaliar a influência nos custos operacionais proporcionada pela integração dessas decisões com relação à prática comum das indústrias, em que o planejamento da produção é definido inicialmente para então ser utilizado como parâmetro na tomada de decisão de aquisição de matérias-primas.

1.3 Organização

Esta tese de doutorado está dividida em cinco capítulos e dois apêndices. A organização desses capítulos e apêndices está na seguinte estrutura:

- Capítulo 1: é apresentada uma introdução geral dos problemas a serem tratados, seguida da motivação, dos objetivos e da organização da tese.
- Capítulo 2: é realizado um estudo de caso em uma indústria química brasileira, no qual foi proposto um modelo baseado em programação inteira mista para tratar seu problema de planejamento da produção.
- Capítulo 3: é efetuada uma comparação entre dois modelos clássicos, baseados em programação inteira mista, de programação de produção. Em seguida, é desenvolvido um novo modelo que agrega ideias dos dois modelos clássicos.
- Capítulo 4: é proposto um modelo baseado em programação inteira mista que integra dois problemas clássicos de otimização, o dimensionamento de lotes e a aquisição de matérias-primas.
- Capítulo 5: são apresentadas conclusões e perspectivas para futuras pesquisas decorrentes desta tese.
- Apêndice A: são apresentados os dados que compõem a estrutura do problema abordado no Capítulo 2.
- Apêndice B: são apresentados os dados estruturais de quatro classes de instâncias presentes no estudo realizado no Capítulo 3.

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM UMA INDÚSTRIA QUÍMICA BRASILEIRA: UM ESTUDO DE CASO

A indústria química que motivou o problema descrito neste capítulo possui mais de dez plantas produtivas situadas em vários países do continente americano e comercializa seus produtos nos continentes americano, europeu e asiático. Dentre a gama de produtos oferecidos pela empresa estão os agroquímicos, os de cuidados pessoais, os de limpeza doméstica e institucional, os de petróleo e gás, além dos de tinta e revestimento. A coordenação de uma cadeia produtiva composta por diversas matérias-primas, adquiridas de muitos fornecedores, diversos tanques de armazenamento, várias plantas produtivas que produzem um grande número de produtos, até a sua entrega para todos os mercados consumidores é um trabalho extremamente complexo.

As decisões do departamento de planejamento e controle da produção são essenciais para o desempenho eficiente das plantas produtivas. Más decisões podem levar a falta de matérias-primas ou à ausência de tanques de armazenamento, o que pode forçar o desligamento de uma unidade produtiva ou até mesmo de toda uma planta produtiva. O tempo de entrega de matérias-primas é um fator importante a ser considerado já que para uma planta produtiva, ele pode ser superior a um mês, quando há necessidade de importação. Dessa forma, o planejamento da compra deve estar bem alinhado com os planos produtivos futuros, visto que uma unidade produtiva corresponde a um elevado investimento, logo sua inoperância deve ser evitada veementemente.

As unidades produtivas são compostas por diversos componentes, como tanques de armazenamento, reatores, desodorizadores, conexões, entre outros. Dentre esses equipamentos, os reatores são os principais ativos, visto que são planejados cuidadosamente para controlar a pressão, a temperatura e o fluxo de mistura entre os reagentes durante o processo de reação. Além disso, os reatores são projetados para conterem em seus núcleos catalisadores específicos

para acelerar a reação entre os ingredientes das receitas produtivas que irão utilizá-los.

Os produtos devem ser mantidos em tanques cuja disponibilidade é restrita e que ainda possuem capacidade de armazenamento limitada. Por outro lado, a presença de conexões entre as unidades produtivas, os tanques de armazenamento e as unidades de envase podem dificultar ainda mais a obtenção de planos de produção. Por fim, existe um último aspecto relevante para o planejamento da produção que é a existência de contratos que asseguram o fornecimento de matérias-primas à indústria, porém, de acordo com esses contratos também existem cláusulas que exigem o consumo mensal de uma quantidade mínima e buscam restringir a quantidade máxima permitida.

Devido ao alto grau de complexidade imposto por todas essas características, a indústria encontrou dificuldades para desenvolver um procedimento computacional capaz de prover planos de produção factíveis, mesmo que para uma única planta produtiva. Sendo assim, [Alvares \(2010\)](#) desenvolveu um trabalho inicial visando determinar o dimensionamento de lotes para atender a demanda dos produtos, de uma das plantas produtivas dessa indústria, durante um horizonte de planejamento equivalente a um mês. Entretanto, esse trabalho não considerou diversas características intrínsecas ao problema de planejamento da produção, como disponibilidade e armazenamento de matérias-primas, preparação das unidades produtivas, presença de tanques de armazenamento multiproduto¹ e etapa de envase, além disso, foi considerado o planejamento de apenas vinte e um produtos. Posteriormente, [Cunha e Santos \(2017\)](#) estenderam esse trabalho inicial ao considerarem tanques de armazenamento multiproduto e tratarem um maior número de produtos.

Os problemas estudados anteriormente foram utilizados como ponto de partida para o desenvolvimento deste capítulo. Após diversas visitas técnicas à indústria, o problema a ser abordado foi redefinido, tornando-o mais próximo à realidade observada no dia-a-dia de uma planta produtiva. A partir dessa redefinição, foi proposto um modelo matemático, o qual foi aplicado a um estudo de caso fornecido pela indústria. Este estudo de caso foi fundamental para a identificação de outras duas linhas de pesquisa que são descritas nos capítulos posteriores.

A planta produtiva considerada neste capítulo produz uma ampla variedade de produtos por meio de diversas linhas produtivas, tanto contínuas como por batelada. As linhas de produção contínuas produzem poucos produtos em grande quantidade, logo o consumo de matérias-primas é mais constante durante o horizonte de planejamento. Já as linhas de produção por batelada produzem diversos produtos em menor quantidade, os quais consomem quantidades distintas de diversas matérias-primas. Essa grande variedade de produtos das linhas de produção por batelada permite que seu sequenciamento produtivo possa ser utilizado também para o controle dos níveis de estoque das matérias-primas, antecipando ou adiando as campanhas produtivas de acordo com

¹ Nesta tese, tanques de armazenamento foram denominados multiproduto quando puderem ser utilizados por mais de um produto, por outro lado, foram nomeados multipropósito quando podem ser utilizados por produtos e matérias-primas.

o consumo de cada uma das tarefas produtivas. A política de controle de estoque das matérias-primas visa manter o nível de estoque na metade de sua capacidade de armazenamento. Dessa forma, é possível cessar momentaneamente a recepção de matérias-primas sem interromper suas linhas produtivas ou então interromper momentaneamente suas linhas produtivas sem cessar a recepção dos materiais, e assim não infringir nenhuma das cláusulas dos contratos com os fornecedores.

Em suma, o objetivo deste capítulo é estudar uma indústria química brasileira e desenvolver um modelo matemático que represente seu problema de planejamento da produção a fim de que as soluções factíveis encontradas possam ser colocadas em prática, de forma que os níveis de estoque estejam próximos aos valores esperados pela empresa e o tempo de processamento computacional despendido seja viável.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 2.1 apresenta a descrição do problema tratado, seguida pela formulação matemática proposta na Seção 2.2. A Seção 2.3 descreve o método de solução utilizado para resolver o modelo matemático. Em seguida, são analisados os experimentos computacionais na Seção 2.4 e, por fim, a Seção 2.5 apresenta as considerações finais.

2.1 Descrição do Problema

O problema descrito anteriormente é representado de forma ilustrativa na Figura 1 com um fluxograma resumido de processos produtivos observados na planta estudada. Os retângulos representam matérias-primas e produtos sem restrições de armazenamento, hexágonos representam tarefas produtivas e de envase, trapézios representam tanques de armazenamento, o trapézios tracejados representam tanques de armazenamento multiproduto e os cilindros representam as unidades produtivas e de envase.

De acordo com a Figura 1, seis matérias-primas, f_1 a f_6 , são consumidas por quatro tarefas produtivas, r_1 a r_4 , resultando em quatro produtos, j_1 a j_4 . As tarefas produtivas r_1 e r_2 utilizam a unidade produtiva m_1 , e seus produtos podem ser armazenados no tanque multiproduto k_1 , desde que não simultaneamente. O produto j_2 é consumido pela tarefa r_3 para produzir o produto j_3 , o que caracteriza um sistema de produção com múltiplos níveis. Os produtos j_3 e j_4 possuem tanques de armazenamento dedicados e podem ser envasados no equipamento n_1 .

A indústria em estudo busca atender a demanda dos produtos utilizando uma política predominantemente do tipo *make-to-stock*, ou seja, os produtos são produzidos de acordo com uma previsão de demanda e ficam armazenados até que os clientes efetuem a compra desses produtos. Apenas uma pequena parcela da demanda é do tipo *make-to-order*, na qual os produtos são produzidos de acordo com a requisição prévia dos clientes. Sendo assim, as campanhas produtivas podem agregar diversas bateladas de um mesmo produto, o que tende a reduzir o tempo total de preparação das unidades produtivas durante o horizonte de planejamento.

Figura 1 – Fluxograma resumido da planta produtiva.

A política *make-to-stock* pode tornar o gerenciamento dos tanques de armazenamento multiproduto mais complexo. Por exemplo, caso o tanque de armazenamento k_1 , da Figura 1, tenha capacidade de 100 toneladas, não é possível armazenar simultaneamente 50 toneladas do produto j_1 e 50 do produto j_2 , visto que ocorreria a mistura de ambos. Logo, apenas penalizar o estoque dos produtos ou limitar o estoque de cada produto não garante que essa situação seja evitada. Sendo assim, para que um planejamento da produção seja o mais verossímil possível, é necessário considerar explicitamente tanto o número total de tanques de armazenamento, quanto suas respectivas capacidades máximas de estocagem, para que o modelo faça a alocação desses tanques aos produtos.

2.1.1 Disponibilidade e Armazenamento de Matérias-Primas

Problemas de planejamento da produção geralmente consideram matérias-primas como um recurso ilimitado e disponível imediatamente, tanto que nas revisões de Drexl e Kimms (1997), Karimi, Ghomi e Wilson (2003), Jans e Degraeve (2008) não é discutida a disponibilidade e o armazenamento de matérias-primas. Essa simplificação pode ser, em geral, contornada por empresas de médio e grande porte com uma gestão eficiente de compras, a qual é responsável por inferir as necessidades de materiais para o planejamento da produção e por sincronizar as entregas dos mesmos de forma que não haja interferência no planejamento da produção.

Figura 2 – Custo total de aquisição da matéria-prima.

Entretanto, a empresa que motivou este capítulo possui contrato com um de seus fornecedores, segundo o qual existem regras de consumo para uma matéria-prima específica. De acordo com esse contrato, o consumo mensal dessa matéria-prima deve estar contido dentro de um intervalo com quantidade mínima e máxima predefinidas. Caso o consumo seja inferior ou superior a esse intervalo, o custo do material fica sujeito a incidência de adicionais financeiros, previamente definido pelo contrato.

A Figura 2 ilustra uma situação hipotética segundo a qual o consumo mensal mínimo de uma matéria-prima deve ser 20 toneladas. Portanto, caso seja consumido menos de 20 toneladas, o custo total a ser pago pela empresa permanece em 1 milhão de reais. Caso o consumo fique entre 20 e 80 toneladas, o custo por tonelada permanece 50 mil reais. Entretanto, caso seja consumido mais de 80 toneladas, todo excedente terá custo de 400 mil reais.

Após a recepção dessa matéria-prima, ela é direcionada a um tanque de armazenamento exclusivo (tanque dedicado), que possui capacidade máxima de armazenamento. A política de gestão de estoque dessa matéria-prima visa manter o nível de estoque próximo à metade da

(a) Variação de estoque indesejada.

(b) Variação de estoque esperada.

Figura 3 – Representação da variação do estoque da matéria-prima durante um mês.

capacidade máxima do tanque de armazenamento. A Figura 3 apresenta duas situações distintas com relação à variação do estoque dessa matéria-prima. A situação representada pela Figura 3a não é desejada pela empresa, visto que em alguns momentos o estoque chega próximo ao limite máximo de armazenamento, representado pela linha vermelha tracejada, e em outros momentos o estoque é praticamente reduzido a zero. Já a Figura 3b representa a situação ideal para a empresa, visto que o estoque mantém-se próximo a 450 toneladas, representado pela linha cinza tracejada, durante todo o mês analisado. Dessa forma, caso alguma linha de produção precise ser desligada, não há risco de interromper a recepção dessa matéria-prima logo em seguida. Por outro lado, caso o fornecimento de matéria-prima precise ser interrompido pelo fornecedor, não seria preciso alterar o planejamento da produção imediatamente, reduzindo a possibilidade de desligamento de linhas produtivas. Portanto, é necessário coordenar a requisição mensal dessa matéria-prima, o nível de estoque atual do tanque de armazenamento e a programação da produção.

2.1.2 Processos Produtivos

Problemas de planejamento da produção geralmente tratam problemas com estrutura de processos ou de um único nível, no qual tarefas produtivas consomem apenas matérias-primas, ou de múltiplos níveis, em que algumas tarefas consomem um ou mais produtos produzidos pela mesma estrutura de processos produtivos. Em geral, os produtos são produzidos por uma única receita, como pode ser observado nas revisões de Karimi, Ghomi e Wilson (2003), Jans e Degraeve (2008).

A estrutura de processos produtivos observada na empresa é caracterizada por apresentar múltiplos níveis, ou seja, existem alguns produtos que utilizam outros produtos como ingredientes em suas receitas. Contudo, características das unidades produtivas e das decisões do departamento de planejamento permitem simplificar essa estrutura a fim de que ela possa ser representada por único nível. O departamento de planejamento prioriza a produção de produtos intermediários nas mesmas plantas em que serão consumidos por outras tarefas, dessa forma, a produção de produtos intermediários e de produtos finais pode ocorrer de forma sequencial na mesma unidade produtiva. Como as unidades produtivas possuem tanques de armazenamento internos, o

Figura 4 – Exemplo de processo produtivo em que um produto possui duas receitas.

Figura 5 – Tempo de preparação dependente da sequência das receitas.

procedimento padrão de produção consiste em produzir uma batelada do produto intermediário e armazená-lo nesses tanques internos para ser completamente consumido na sequência por uma campanha do produto final. Por exemplo, se uma tarefa produtiva produz 1,2 toneladas do produto intermediário j_1 , em 2 horas, e uma outra tarefa consome 0,4 toneladas desse produto (j_1) para produzir 1,3 toneladas de j_2 , em 3 horas, é possível definir apenas uma única tarefa produtiva que produz diretamente 3,9 toneladas de j_2 , em 11 horas.

Entretanto, existem produtos que podem ser obtidos por múltiplos processos produtivos, ou seja, há mais de uma tarefa produtiva que permite a produção de um mesmo produto, como descrito no trabalho de [Crama, Pascual e Torres \(2004\)](#). A Figura 4 ilustra essa situação, em que a receita r_{11} pode ser processada nas unidades produtivas m_2 e m_3 . Nesses dois casos, as receitas consomem proporções diferentes das três matérias-primas. Porém, como um dos principais objetivos desse estudo é controlar os níveis de estoque de uma única matéria-prima, a qual será denominada f_1 , as demais não serão consideradas durante o planejamento da produção.

Como as unidades produtivas são utilizadas por diversas receitas durante o horizonte de planejamento, geralmente é necessário realizar a preparação dessas unidades (*setup* ou *changeover*) entre o processamento de duas receitas distintas. A Figura 5 representa a preparação da unidade produtiva r_1 , por um retângulo preto, para três situações após o processamento da receita r_1 . A Situação 1 indica que a receita r_2 não necessita de preparação do equipamento quando for produzida imediatamente após r_1 . Por outro lado, as receitas r_3 e r_4 requerem a preparação da unidade produtiva sempre que sucederem a receita r_1 , sendo que o tempo de preparação utilizado para r_3 é maior do que o utilizado por r_4 , como ilustrado pelas Situações 2 e 3, respectivamente.

2.1.3 Armazenamento de Produtos

Problemas de planejamento da produção geralmente lidam com o armazenamento de produtos considerando penalização dos estoques na função objetivo. Outra maneira de impor limites de armazenamento é definindo uma restrição que limite o estoque dos produtos a um valor máximo. Entretanto, ambas abordagens são efetivas para situações em que todos os produtos possuem tanques dedicados, quando os produtos não requerem recipientes de armazenamento, ou quando não há restrições de espaço no armazém. De acordo com [Jans e Degraeve \(2008\)](#), o estudo de restrições de armazenamento de forma explícita é uma área de pesquisa promissora

Figura 6 – Tanques de armazenamento dedicado e multiproduto.

para problemas da indústria de processos.

Na indústria considerada neste estudo existem dois tipos de tanques de armazenamento: os dedicados (Figura 6a), que podem ser utilizados apenas por um único produto, e os multiprodutos (Figura 6b), que podem ser utilizados por diversos produtos, não simultaneamente. Dessa forma, é necessário controlar explicitamente a alocação dos produtos nos tanques multiprodutos durante os períodos, o que evita a obtenção de soluções em que mais de um produto deva ser armazenado simultaneamente em um mesmo tanque. Além disso, ainda é necessário considerar a preparação desses tanques sempre que houver mudança do produto que estiver sendo armazenado. Entretanto, nesse caso o tempo de preparação não depende da sequência dos produtos armazenados, sendo necessário um único ciclo de limpeza de duração total constante.

Baseando-se em seu histórico operacional, os produtos ficam estocados por mais de três dias nos tanques de armazenamento multiproduto. Devido a essa característica, a modelagem matemática proposta na Seção 2.2 considerou a discretização dos períodos de três em três dias, além de assumir que, durante cada período, apenas um produto poderia ser armazenando em cada tanque multiproduto.

2.1.4 Demanda

Problemas de planejamento da produção geralmente visam atender a demanda durante os períodos do horizonte de planejamento, como observado em Karimi, Ghomi e Wilson (2003), enquanto problemas de programação da produção visam muitas vezes minimizar o tempo final de processamento do último produto, conhecido como *makespan* (KALLRATH, 2002). Já a empresa retratada neste capítulo possui um pequeno percentual da demanda conhecida a priori, enquanto a maior parte de sua demanda ocorre em curto prazo após a finalização do planejamento da produção. Portanto, quanto maior a utilização efetiva das unidades produtivas, maior pode ser a quantidade produzida dos produtos ao reduzir os períodos de ociosidade.

Dessa forma, a empresa possui um departamento de planejamento da produção cuja função é analisar cenários de previsão de demanda para inferir quais produtos devem ser produzidos. Alguns desses produtos apresentam demanda contínua durante o horizonte de

planejamento, o que torna necessário a manutenção permanente de estoque. Sendo assim, pode ser necessário produzir mais de uma campanha produtiva para um mesmo produto durante o horizonte de planejamento, visto que as restrições de capacidade dos tanques de armazenamento geralmente inviabilizam soluções em que há apenas uma campanha produtiva por produto.

Por fim, o planejamento da produção da indústria possui dois tipos de demanda: produtos a granel e produtos envasados. Os produtos a granel devem ser mantidos em tanques de armazenamento até serem completamente adquiridos pelos clientes. Já os produtos envasados devem passar por uma etapa adicional nas linhas de envase antes de serem comercializados.

2.1.5 Envase de Produtos

Jans e Degraeve (2008) indicaram oportunidades promissoras na extensão de problemas de planejamento da produção, dentre as quais está a coordenação com atividades como as de envase dos produtos. Essa atividade é muito importante para a indústria de refrigerantes devido à necessidade de sincronização do estágio de produção com o envase, como pode ser observado em Ferreira, Morabito e Rangel (2009), e para a indústria cervejeira, na qual os produtos podem ser mantidos nos tanques de armazenamento antes de serem envasados (BALDO *et al.*, 2014).

A indústria estudada possui duas unidades funcionais de envase, as quais estão aptas a envasarem três tipos de embalagens, como ilustra a Figura 7. Entretanto, a linha de envase não restringe o fluxo produtivo da indústria, visto que apenas uma das unidades é utilizada, em geral. Por outro lado, a taxa de envase é similar para todas as embalagens e é dada em quilogramas por minuto. Portanto, essa etapa pode ser simplificada ao desconsiderar os tipos de embalagens utilizadas sem influenciar diretamente o planejamento da produção.

Por fim, também é necessário considerar a preparação do equipamento de envase sempre que houver alteração do produto que está sendo envasado. Porém, o tempo de preparação não depende da sequência dos produtos a serem envasados, visto que o gargalo dessa atividade é o redirecionamento das conexões dos tanques de armazenamento para o equipamento de envase.

Figura 7 – Envase de produto em três embalagens distintas.

2.2 Formulação Matemática

Esta seção descreve a formulação matemática desenvolvida para representar o problema descrito na seção anterior, que pode ser definida da seguinte forma. Um conjunto de matérias-primas f ($f \in \{1, \dots, F\}$) armazenadas de acordo com os patamares de estoque o ($o \in \{1, \dots, O\}$), são consumidas por tarefas r ($r \in \{1, \dots, R\}$), as quais podem ocorrer em equipamentos produtivos m ($m \in \{1, \dots, M\}$), produzindo produtos j ($j \in \{1, \dots, J\}$), os quais podem ser mantidos em tanques de armazenamento k ($k \in \{1, \dots, K\}$) ou podem ser envasados pelos equipamentos de envase n ($n \in \{1, \dots, N\}$). O horizonte de planejamento é finito e composto por períodos t ($t \in \{1, \dots, T\}$).

Com relação às decisões, o modelo proposto define a quantidade de matérias-primas consumidas e seus respectivos níveis de estoque, o número de bateladas produzidas por cada receita, de acordo com cada uma das unidades produtivas, e a quantidade produzida de cada produto. Além disso, o início e o final do processo produtivo para todas as receitas são situadas no horizonte de planejamento. O modelo também define o quanto e em qual período os produtos são envasados, além do controle e alocação dos tanques para o armazenamento dos produtos a granel. Para guiar essas decisões, busca-se minimizar os estoques de produtos ao mesmo tempo que reduzir os desvios dos níveis desejados de estoque das matérias-primas.

2.2.1 Parâmetros e Variáveis

2.2.1.1 Parâmetros

$a_{r,m}^{Prod}$	tempo de processamento de uma batelada da tarefa r no equipamento m ;
$a_{j,n}^{Pack}$	tempo de envase por tonelada do produto j no equipamento de envase n ;
$b_{s,r,m}^{Prod}$	tempo de preparação do equipamento m da tarefa s para a r ;
$b_{j,n}^{Pack}$	tempo de preparação do equipamento de envase n para o produto j .
$c_j^{StorDedic}$	capacidade de armazenamento dos tanques dedicados ao produto j ;
$c_k^{StorMulti}$	capacidade de armazenamento do tanque multiproduto k ;
$d_{j,t}^{BulkMTO}$	demanda a granel (<i>make-to-order</i>) do produto j no período t ;
$d_j^{BulkMTS}$	demanda a granel (<i>make-to-stock</i>) do produto j ;
$d_{j,t}^{PackMTO}$	demanda envasada (<i>make-to-order</i>) do produto j no período t ;
$d_j^{PackMTS}$	demanda envasada (<i>make-to-stock</i>) do produto j ;
$e_{f,r,m}^{Feed}$	taxa de consumo da matéria-prima f pela tarefa r no equipamento m ;
$g_{r,m}^{Prod}$	quantidade produzida por uma batelada da tarefa r no equipamento m ;
$\bar{l}_f^{Feed}$	quantidade de estoque desejada da matéria-prima f ;
$p_{f,t}^{Feed}$	quantidade programada da matéria-prima f a ser recebida no período t ;
$u_{f,o}^{Feed}$	quantidade máxima de estoque da matéria-prima f no patamar o ;
$v_{m,k}^{Conn}$	(binário) indica se há conexão entre o equipamento m e o tanque k ;
$v_{j,k}^{Forb}$	(binário) indica se o produto j não tem permissão para utilizar o tanque k ;

$CAP_{m,t}^{Prod}$	tempo total disponível no equipamento m no período t ;
Ω	número suficientemente grande;

2.2.1.2 Variáveis contínuas

$B_{f,t}^{Feed}$	(variável artificial) quantidade ausente de matéria-prima f no período t ;
$B_{j,t}^{DemBulk}$	(variável artificial) atraso da demanda a granel do produto j no período t ;
$B_{j,t}^{DemPack}$	(variável artificial) atraso da demanda envasada do produto j no período t ;
$B_{j,t}^{Stor}$	(variável artificial) capacidade adicional de armazenamento do produto j no período t ;
$E_{r,m,t}^{Prod}$	tempo de finalização da tarefa r no equipamento m no período t ;
$I_{f,t}^{Feed}$	estoque da matéria-prima f no período t ;
$I_{f,o,t}^{Feed+}$	estoque da matéria-prima f acima do esperado, dentro do patamar o no período t ;
$I_{f,o,t}^{Feed-}$	estoque da matéria-prima f abaixo do esperado, dentro do patamar o no período t ;
$I_{j,k,t}^{Bulk}$	estoque do produto j , a granel, armazenamento no tanque k no período t ;
$I_{j,0,t}^{Bulk}$	estoque do produto j , a granel, armazenamento em tanque dedicado no período t ;
$I_{j,t}^{Pack}$	estoque envasado do produto j no período t .
$Q_{r,m,t}^{Prod}$	quantidade produzida pela tarefa r no equipamento m no período t ;
$Q_{j,r,m,k,t}^{BulkProd}$	quantidade do produto j proveniente da tarefa r do equipamento m , destinado ao tanque k no período t ;
$Q_{j,r,m,0,t}^{BulkProd}$	quantidade do produto j proveniente da tarefa r do equipamento m , destinado à tanques dedicados no período t ;
$Q_{j,k,t}^{DemBulk}$	quantidade do produto j proveniente do tanque k utilizada para atender a demanda a granel do período t ;
$Q_{j,0,t}^{DemBulk}$	quantidade do produto j proveniente de tanque dedicado utilizada para atender a demanda a granel do período t ;
$Q_{j,k,n,t}^{PackBulk}$	quantidade do produto j proveniente do tanque k destinada ao equipamento de envase n no período t ;
$Q_{j,0,n,t}^{PackBulk}$	quantidade do produto j proveniente de tanque dedicado destinada ao equipamento de envase n no período t ;
$Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd}$	quantidade do produto j obtido pela tarefa r no equipamento m envasada pela unidade de envase n no período t ;
$S_{m,t}^{Prod}$	tempo de processamento deslocado do equipamento m no período t ;

2.2.1.3 Variáveis binárias

$X_{s,r,m,t}^{Prod}$	preparação da tarefa s para a tarefa r no equipamento m iniciada no período t ;
$X_{i,j,k,t}^{Stor}$	preparação do produto i para o produto j no tanque k iniciada no período t ;
$X_{j,n,t}^{Pack}$	preparação do produto j no equipamento de envase n iniciada no período t ;
$Y_{r,m,t}^{Prod}$	tarefa r designada ao equipamento m no início do período t ;

- $Y_{j,k,t}^{Stor}$ produto j designado ao tanque k no início do período t ;
 $Y_{j,n,t}^{Pack}$ produto j designado ao equipamento de envase n no início do período t ;

2.2.1.4 Variáveis inteiras

- $Z_{r,m,t}^{Prod}$ número de bateladas da receita r no equipamento m no período t .

2.2.2 Modelo Matemático

A modelagem matemática buscou representar diversas características observadas durante a tomada de decisões da programação da produção, de forma que uma solução factível do modelo matemático fosse suficientemente similar a uma solução viável na prática. Sendo assim, o modelo apresentado a seguir possui diversos conjuntos de restrições.

2.2.2.1 Função Objetivo

$$\min \sum_j \sum_t (I_{j,t}^{Pack} + \sum_{k=0}^K I_{j,k,t}^{Bulk}) + \sum_f \sum_o \sum_t o * (I_{f,o,t}^{Feed+} + I_{f,o,t}^{Feed-}) \quad (2.1)$$

A função objetivo (2.1) visa reduzir os níveis de estoque de produtos envasados ($I_{j,t}^{Pack}$) e de produtos que utilizem os tanques de armazenamento ($I_{j,k,t}^{Bulk}$), além de buscar a manutenção do nível médio de estoque de matérias-primas cuja quantidade mínima e máxima de compra são preestabelecidas por contratos. Nesse caso, tanto níveis inferiores ($I_{f,o,t}^{Feed-}$) quanto níveis superiores ($I_{f,o,t}^{Feed+}$) ao nível médio desejado são penalizados, e a cada novo patamar o atingido, o peso da penalização desse segmento é incrementado.

2.2.2.2 Restrições

Devido ao elevado número de restrições necessárias para representar o problema, elas foram agrupadas de acordo com suas finalidades para simplificar a compreensão do modelo matemático.

2.2.2.2.1 Estoque de matérias-primas

Uma das metas da indústria é manter os níveis de estoque da matéria-prima f_1 próximos a valores desejados. Para penalizar desvios dessa meta, foram definidos patamares de penalização para os níveis de estoque, de forma que cada patamar possui um intervalo bem definido de valores que representam os desvios do nível de estoque desejado, conforme ilustrado pela Figura 8. Os patamares definem penalizações na função objetivo, com coeficientes estritamente crescente, aos desvios do nível de estoque desejado.

Figura 8 – Representação dos patamares de estoque e de seus respectivos intervalos.

Variações no nível de estoque entre o intervalo 0 a $u_{f,1}^{Feed}$ estão localizadas no primeiro patamar, ou seja, não sofrem penalizações. Já variações entre o intervalo $u_{f,1}^{Feed}$ e $\sum_{o=1}^2 u_{f,o}^{Feed}$ estão no segundo patamar, a partir do qual inicia-se a incidência de penalização. Caso a variação no nível de estoque fique entre $\sum_{o=1}^2 u_{f,o}^{Feed}$ e $\sum_{o=1}^3 u_{f,o}^{Feed}$, o coeficiente de penalização é maior do que o aplicado ao patamar anterior, e assim sucessivamente.

$$I_{f,t}^{Feed} = \bar{I}_f^{Feed} + \sum_o (I_{f,o,t}^{Feed-} - I_{f,o,t}^{Feed+}), \quad \forall f, t \quad (2.2)$$

$$0 \leq I_{f,o,t}^{Feed-} < u_{f,o}^{Feed}, \quad \forall f, o, t \quad (2.3)$$

$$0 \leq I_{f,o,t}^{Feed+} < u_{f,o}^{Feed}, \quad \forall f, o, t \quad (2.4)$$

$$I_{f,t-1}^{Feed} + p_{f,t}^{Feed} = \sum_r \sum_m e_{f,r,m}^{Feed} \cdot Q_{r,m,t}^{Prod} + I_{f,t}^{Feed}, \quad \forall f, t \quad (2.5)$$

As restrições (2.2) são responsáveis por determinar a quantidade que a matéria-prima f desviou de seu estoque desejado. Já as restrições (2.3) e (2.4) são responsáveis por canalizar a variação dos níveis de estoque, como na Figura 8. Por fim, o conjunto de restrições (2.5) é responsável por gerenciar a quantidade de estoque ao final de cada período, ou seja, a quantidade da matéria-prima f proveniente do final do período anterior ($t - 1$) somado à quantidade recebida da matéria-prima deve ser igual à quantidade consumida por todas as tarefas r em todos os equipamentos m mais o estoque da matéria-prima f ao final do período t .

2.2.2.2.2 Planejamento da produção

Os modelos comumente utilizados para tratar o planejamento da produção em ambientes com produção por batelada apresentam um problema recorrente nos finais dos períodos, a descontinuidade produtiva. Caso a duração dos períodos não sejam múltiplos comuns dos

Figura 9 – Deslocamento de tempo para o período posterior.

tempos de processamento das receitas, haverá ociosidade no final do período, como ilustrado na Situação 1 da Figura 9. [Sung e Maravelias \(2008\)](#) propuseram um modelo matemático em que a preparação de um equipamento pode iniciar em um período t e finalizar apenas no período $t + 1$. Para isso, o modelo flexibiliza o final do período t , de forma que ele seja deslocado para o final da preparação, aumentando a duração de t e reduzindo a de $t + 1$. Dessa forma, a preparação ocorre apenas durante o período t do modelo matemático, mas na prática ela situa-se entre dois períodos.

A partir da ideia de deslocamento de tempo entre períodos, o modelo desenvolvido neste capítulo propõem a antecipação do final de um período quando houver ociosidade, incrementando o tempo total do período posterior. Esse período de tempo deslocado pode ser utilizado para qualquer atividade produtiva, não estando restrito apenas às preparações. O tempo total deslocado entre períodos é limitado pelo menor tempo de processamento das receitas produtivas, ou seja, o deslocamento do final do período t deve estar contido dentro do intervalo representado pelo retângulo cinza da Figura 9. A situação 2 ilustra como essa nova característica permite que as atividades do planejamento ocorram continuamente. Note que caso fosse permitido a ocorrência de atividades produtivas durante o intervalo de tempo deslocado entre períodos, uma abordagem similar à proposta por ([SUNG; MARAVELIAS, 2008](#)) permitiria ao modelo finalizar uma atividade dentro de um período t , quando na realidade ela poderia de fato finalizar no início do período $t + 1$. Esses conceitos estão presentes nas restrições que controlam o planejamento da produção, as quais são apresentadas a seguir.

$$S_{m,t}^{Prod} \leq CAP_{m,t}^{Prod}, \quad \forall m, t \quad (2.6)$$

$$S_{m,t}^{Prod} \leq \min_{\forall r} \{a_{r,m}^{Prod}\}, \quad \forall m, t \quad (2.7)$$

$$S_{m,t}^{Prod} + \sum_r a_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod} + \sum_s \sum_r b_{s,r,m}^{Prod} \cdot X_{s,r,m,t}^{Prod} \leq CAP_{m,t}^{Prod} + S_{m,t-1}^{Prod}, \quad \forall m, t \quad (2.8)$$

$$a_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod} \leq (CAP_{m,t}^{Prod} + \min_{\forall s,r,m} \{a_{r,m}^{Prod}\}) \cdot (Y_{r,m,t}^{Prod} + \sum_s X_{s,r,m,t}^{Prod}), \quad \forall r, m, t \quad (2.9)$$

$$\sum_r Y_{r,m,t}^{Prod} = 1, \quad \forall m, t \quad (2.10)$$

Figura 10 – Exemplo ilustrativo de um sequenciamento produtivo.

$$\sum_s X_{s,r,m,t}^{Prod} \leq Z_{r,m,t}^{Prod}, \quad \forall r, m, t \quad (2.11)$$

$$g_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod} = \sum_n Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} + \sum_{k=0}^K v_{m,k}^{Conn} \cdot v_{j,k}^{Forb} \cdot Q_{j,r,m,k,t}^{BulkProd}, \quad \forall j, r, m, t \quad (2.12)$$

Os conjuntos de restrições (2.6) e (2.7) determinam o limite superior da variável $S_{m,t}^{Prod}$, que indica o tempo máximo de um período que é permitido ser deslocado ao período posterior. As restrições (2.8) representam a utilização dos equipamentos pelas tarefas. Portanto, a soma do tempo deslocado para o período posterior com o tempo utilizado para processar as batelas das tarefas e com o tempo de preparação do equipamento deve ser menor ou igual ao tempo disponível no período atual somado ao tempo adicional deslocado do período anterior. Já as restrições (2.9) são desigualdades válidas que condicionam a ocorrência de uma batelada de uma tarefa r em um equipamento m apenas quando essa tarefa estiver preparada no equipamento desde o início do período t , ou caso ocorra uma preparação de outra tarefa s para a tarefa r durante o período.

As restrições (2.10) garantem que, no início de cada período, uma única tarefa está preparada para cada equipamento. O conjunto de restrições (2.11) evita a ocorrência de múltiplas preparações encadeadas sem haver de fato produção, o que pode ocorrer quando não há desigualdade triangular entre os tempos de preparação. Nesse caso, o tempo de preparação de um produto A para um produto B e do produto B para um produto C é menor do que o tempo de preparação de A para C. Por outro lado, caso houvesse uma situação em que uma preparação fosse a última atividade do período t , o modelo proposto efetuaria o deslocamento do tempo dessa preparação para o período $t + 1$, de forma que essa preparação fosse a primeira atividade do período seguinte. Por fim, as restrições (2.12) definem para onde os produtos são enviados. A quantidade do produto j produzido pela tarefa r no equipamento m , representado por $g_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod}$, deve ser igual à soma da parcela enviada diretamente para envase com a parcela enviada aos tanques dedicados do produto j , quando $k = 0$, e aos tanques multiprodutos, quando $k \in \{1, \dots, K\}$.

2.2.2.2.3 Sequenciamento da produção

Toda tarefa deve suceder alguma outra tarefa, a menos que ela seja a primeira de um período. Dessa forma, o tempo de finalização de uma tarefa intermediária, como r_2 da Figura 10 deve ser maior ou igual ao tempo de finalização da tarefa r_1 (E_{r_1,m_1,t_1}^{Prod}) somado aos tempos de preparação da unidade produtiva (b_{r_1,r_2,m_1}^{Prod}) e de processamento das bateladas de r_2 ($a_{r_2,m_1}^{Prod} \cdot Z_{r_2,m_1,t_1}^{Prod}$).

Por outro lado, o tempo de finalização da primeira tarefa do período apresenta duas situações. Quando a unidade produtiva está preparada, como para a tarefa r_1 no período t_1 , o tempo de finalização da tarefa deve ser maior ou igual ao tempo de processamento das bateladas ($a_{r_1,m_1}^{Prod} \cdot Z_{r_1,m_1,t_1}^{Prod}$). Já as situações nas quais é necessária uma preparação logo no início do período são equivalentes às preparações de tarefas intermediárias, mas o tempo de finalização da tarefa predecessora é zero ($E_{r_2,m_1,t_2}^{Prod} = 0$).

$$Y_{r,m,t-1}^{Prod} + \sum_s X_{s,r,m,t}^{Prod} = \sum_s X_{r,s,m,t}^{Prod} + Y_{r,m,t}^{Prod}, \quad \forall r, m, t \quad (2.13)$$

$$E_{s,m,t}^{Prod} + a_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod} + b_{s,r,m}^{Prod} \cdot X_{s,r,m,t}^{Prod} - \Omega \cdot (1 - X_{s,r,m,t}^{Prod}) \leq E_{r,m,t}^{Prod}, \quad \forall s, r, m, t \quad (2.14)$$

$$a_{r,m}^{Prod} \cdot Z_{r,m,t}^{Prod} \leq E_{r,m,t}^{Prod} \leq \Omega \cdot Z_{r,m,t}^{Prod}, \quad \forall r, m, t \quad (2.15)$$

$$E_{r,m,t}^{Prod} \leq CAP_{m,t}^{Prod} + S_{m,t-1}^{Prod} - S_{m,t}^{Prod}, \quad \forall r, m, t \quad (2.16)$$

As restrições (2.13) garantem o balanço do fluxo de preparações, ou seja, considerando a máquina m , se o estado inicial da tarefa r no período $t - 1$ for igual a um ou se durante o período t houve a troca de alguma outra tarefa s para a tarefa r , então necessariamente deve haver uma troca da tarefa r para outra tarefa s ou o estado inicial da tarefa r deve ser igual a um.

As restrições (2.14) definem o sequenciamento das tarefas, logo, se a tarefa r suceder a tarefa s , o horário de finalização de r deve ser maior ou igual ao horário de finalização da tarefa s mais o tempo preparação do equipamento m somado ao tempo de processamento das bateladas da tarefa r . Por outro lado, se a tarefa s não preceder a tarefa r , a constante Ω permite que não haja relação direta entre os horários de finalização das tarefas s e r .

O conjunto de restrições (2.15) é necessário para assegurar que o horário de finalização da primeira batelada seja maior ou igual ao seu tempo de processamento. Já a outra parcela da desigualdade restringe o horário de finalização da produção em zero, caso não haja produção de uma determinada tarefa. Por fim, as restrições (2.16) definem que o horário final da produção de uma tarefa seja menor ou igual ao tempo total disponível no período em que ela ocorre acrescido do tempo deslocado do período predecessor menos o tempo que será deslocado para o período seguinte.

2.2.2.2.4 Estoque de produtos a granel

Os produtos resultantes das tarefas devem ser envasados imediatamente após o término dos processos produtivos ou então devem ser armazenados em tanques. O controle do estoque dos produtos a granel é feito individualmente para cada tanque e os produtos podem ser enviados aos tanques apenas se esses estiverem designados aos primeiros, durante o período.

$$I_{j,k,t-1}^{Bulk} + \sum_r \sum_m v_{m,k}^{Conn} \cdot v_{j,k}^{Forb} \cdot Q_{j,r,m,k,t}^{BulkProd} = Q_{j,k,t}^{DemBulk} + \sum_n Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} + I_{j,k,t}^{Bulk}, \quad \forall k \in \{0 \cup K\}, j, t \quad (2.17)$$

$$Q_{j,0,t}^{DemBulk} + \sum_n Q_{j,n,t}^{PackBulk} + I_{j,0,t}^{Bulk} \leq c_j^{StorDedic}, \quad \forall j, t \quad (2.18)$$

$$Q_{j,k,t}^{DemBulk} + \sum_n Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} + I_{j,k,t}^{Bulk} \leq c_k^{StorMulti} \cdot Y_{j,k,t}^{Stor}, \quad \forall j, k, t \quad (2.19)$$

$$Y_{j,k,t-1}^{Stor} + \sum_i X_{i,j,k,t}^{Stor} = \sum_i X_{j,i,k,t}^{Stor} + Y_{j,k,t}^{Stor}, \quad \forall j, k, t \quad (2.20)$$

$$\sum_j Y_{j,k,t}^{Stor} = 1, \quad \forall k, t \quad (2.21)$$

$$\sum_i X_{i,j,k,t}^{Stor} \leq Y_{j,k,t}^{Stor}, \quad \forall j, k, t \quad (2.22)$$

$$\sum_i X_{j,i,k,t}^{Stor} \leq (1 - Y_{j,k,t}^{Stor}), \quad \forall j, k, t \quad (2.23)$$

As restrições (2.17) controlam o estoque de produtos a granel, ou seja, a quantidade do produto j armazenada no tanque k ao final do período $t - 1$ adicionada à quantidade desse mesmo produto proveniente das tarefas que ocorreram em unidades produtivas com conexão ao tanque k deve ser igual à soma da quantidade utilizada de j para atender a demanda a granel com a quantidade do produto que foi enviada aos equipamentos de envase e com a quantidade de estoque do produto j armazenada no tanque k ao final do período t .

As restrições (2.18) asseguram os limites de armazenamento dos produtos em seus respectivos tanques cativos. Para isso, a quantidade utilizada do produto j para atender a demanda a granel mais a quantidade do produto que foi enviada aos equipamentos de envase e mais a quantidade de estoque do produto j armazenado ao final do período t deve ser menor ou igual à capacidade dos tanques que armazenam cativo. Já as restrições (2.19) são similares às anteriores, garantindo os limites de armazenamento dos produtos em cada tanque multiproduto. Nesse caso a utilização do tanque pelos produtos estará sujeita à condição da variável de estado do produto j ($Y_{j,k,t}^{Stor}$).

As restrições 2.20 garantem que se o tanque de armazenamento k estava preparado para o produto j , tm $t - 1$, ou se foi preparado a partir de algum produto i , em t , ao final do período t esse tanque ainda deve estar preparado para j ou então deve ter havido uma troca de j para algum produto i . Por fim, as restrições 2.21 asseguram que apenas um produto está apto a utilizar um tanque durante um período.

As restrições (2.22) indicam que caso o estado do produto j não esteja preparado para o tanque k , então não é permitida a troca de nenhum produto i para o produto j no tanque k . Por outro lado, as restrições (2.23) indicam que caso o estado do produto j esteja preparado para o tanque k , então não é permitida a troca do produto j para nenhum produto i no tanque k .

2.2.2.2.5 Planejamento do envase

O planejamento do envase não foi tratado com o mesmo nível de detalhamento que o planejamento da produção, visto que este último geralmente apresenta maior dificuldade para a

tomada de decisões. Portanto, considerou-se apenas o tempo disponível por período, além de preparações independentes da sequência de produtos envasados.

$$\sum_j \left[a_{j,n}^{Pack} \cdot \left(\sum_r \sum_m Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} + \sum_{k=0}^K Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} \right) + b_{j,n}^{Pack} \cdot X_{j,n,t}^{Pack} \right] \leq CAP_{n,t}^{Pack}, \quad \forall n,t \quad (2.24)$$

$$\sum_j a_{j,n}^{Pack} \cdot \left(\sum_r \sum_m Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} + \sum_{k=0}^K Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} \right) \leq \sum_j CAP_{n,t}^{Pack} \cdot (X_{j,n,t}^{Pack} + Y_{j,n,t}^{Pack}), \quad \forall n,t \quad (2.25)$$

$$Y_{j,n,t}^{Pack} - Y_{j,n,t-1}^{Pack} \leq X_{j,n,t}^{Pack}, \quad \forall j,n,t \quad (2.26)$$

$$\sum_j Y_{j,n,t}^{Pack} = 1, \quad \forall n,t \quad (2.27)$$

As restrições (2.24) representam a utilização dos equipamentos de envase pelos produtos, ou seja, tempo gasto para envase dos produtos provenientes diretamente das unidades produtivas e dos tanques de armazenamento somado aos tempos de preparação devem ser menores ou igual à capacidade dos equipamentos de envase. As restrições (2.25) permitem que haja o envase do produto j apenas se o estado inicial de algum equipamento n estiver preparado para esse produto ($Y_{j,n,t}^{Pack} = 1$) ou se houver uma troca de algum produto para o produto j ($X_{j,n,t}^{Pack} = 1$).

As restrições (2.26) definem a ocorrência da troca do estado inicial de um equipamento de envase, ou seja, indica se o equipamento n passou a ser designado para o produto j a partir do período t , sem que haja dependência da sequência dos produtos. Por fim, as restrições (2.27) asseguram que apenas um produto encontra-se preparado para cada equipamento de envase ao início de cada período.

2.2.2.2.6 Demanda

O modelo matemático considerou demandas do tipo *make-to-order*, em que as entregas ocorrem durante o horizonte de planejamento, conforme as requisições dos clientes, e do tipo *make-to-stock*, cuja produção visa a manutenção dos níveis de estoque dos produtos, os quais são redefinidos periodicamente a partir de previsões de demanda. Para ambos os tipos são consideradas as demandas de produtos envasados e de produtos a granel.

$$d_{j,t}^{BulkMTO} \leq \sum_{k=0}^K Q_{j,k,t}^{DemBulk}, \quad \forall j,t \quad (2.28)$$

$$d_j^{BulkMTO} + \sum_t d_{j,t}^{BulkMTO} = \sum_t \sum_{k=0}^K Q_{j,k,t}^{DemBulk}, \quad \forall j \quad (2.29)$$

$$I_{j,t-1}^{Pack} + \sum_r \sum_m \sum_n Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} + \sum_n \sum_k Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} = d_{j,t}^{PackMTO} + I_{j,t}^{Pack}, \quad \forall j,t \quad (2.30)$$

$$d_j^{PackMTO} + \sum_t \left(d_{j,t}^{PackMTO} + \sum_r \sum_m \sum_n Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} \right) = \sum_t \sum_n \sum_{k=0}^K Q_{j,k,n,t}^{PackBulk}, \quad \forall j \quad (2.31)$$

As restrições (2.28) asseguram que a demanda a granel *make-to-order* de um produto j seja atendida pela produção. Já as restrições (2.29) garantem que a somatória de toda a demanda a granel de um produto j (*make-to-order* e *make-to-stock*) durante o horizonte de planejamento seja igual à quantidade desse produto proveniente de todos os tanques de armazenamento.

As restrições (2.30) controlam o estoque dos produtos envasados, garantindo que o estoque proveniente do período anterior somado às quantidades envasadas a partir das unidades produtivas e dos tanques de armazenamento deve satisfazer a demanda *make-to-order*. Por fim, as restrições (2.31) garantem que a somatória de toda demanda envasada de um produto j (*make-to-order* e *make-to-stock*) durante o horizonte de planejamento seja igual à quantidade desse produto envasada a partir das unidades produtivas e dos tanques de armazenamento.

2.3 Abordagem de Solução

O modelo matemático proposto na Seção 2.2, assim como diversos modelos de programação inteira mista que representam problemas reais, é muito difícil ser tratado computacionalmente. Assim, geralmente são utilizadas abordagens heurísticas para contornar essa dificuldade (AKARTUNALI; MILLER, 2009).

O procedimento heurístico desenvolvido para o problema estudado neste capítulo é composto por uma reformulação matemática que introduz variáveis artificiais no modelo original e, dessa forma, permite que o pacote de otimização obtenha soluções factíveis para o problema relaxado desde o princípio do seu processamento.

Dois procedimentos heurísticos, um construtivo e outro de melhoria, utilizam esse modelo reformulado a fim de guiar o pacote de otimização durante a minimização das variáveis artificiais acrescentadas. Assim que essas variáveis adicionais são completamente eliminadas, a solução do modelo reformulado equivale a uma solução factível do modelo original.

Esta seção inicia-se descrevendo a reformulação do modelo matemático, em seguida apresenta as heurísticas construtiva e de melhoria que foram consideradas e, por fim, detalha como o procedimento de resolução do problema foi projetado para que soluções factíveis pudessem ser obtidas em tempo computacional viável.

2.3.1 Modelo Matemático Reformulado

A primeira etapa do método de solução consiste em redefinir o modelo matemático proposto na Seção 2.2 introduzindo variáveis artificiais que resultaram nas alterações da função objetivo, que visa apenas minimizá-las, e de alguns conjuntos de restrições. As restrições de consumo de matérias-primas permitiram que a quantidade utilizada excedesse a disponibilidade, já as restrições de armazenamento de matérias-primas permitiram que as capacidades dos tanques fossem ultrapassadas, e as restrições de atendimento da demanda permitiram o atraso

das entregas.

2.3.1.1 Função Objetivo

A função objetivo (2.1) foi substituída por outra função que visa minimizar as variáveis artificiais, as quais representam infactibilidades no modelo original.

$$\min \sum_f \sum_t B_{f,t}^{Feed} + \sum_j \sum_t B_{j,t}^{DemBulk} + \sum_j \sum_t B_{j,t}^{DemPack} + \sum_j \sum_t B_{j,t}^{Stor} \quad (2.32)$$

Essa função objetivo, descrita por (2.32), visa encontrar uma solução factível eliminando a escassez de matérias-primas ($B_{f,t}^{Feed}$), o atraso na produção dos produtos com demanda a granel ($B_j^{DemBulk}$, $B_{j,t}^{DemBulk}$) e demanda envasada ($B_j^{DemPack}$, $B_{j,t}^{DemPack}$), além da falta de capacidade de armazenamento dos produtos ($B_{j,t}^{Stor}$).

2.3.1.2 Restrições

As restrições (2.5), que gerenciam a quantidade de estoque de matérias-primas ao final dos períodos, foram substituídas pelas restrições (2.33) que permitem o consumo dos materiais mesmo que não haja estoque disponível. As restrições (2.18), responsáveis por assegurar os limites de armazenamento dos produtos em seus tanques cativos foram substituídas pelas restrições (2.34), as quais permitem que as capacidades desses tanques sejam extrapoladas e ao mesmo tempo penalizadas na função objetivo. As restrições (2.28), responsáveis por garantir que as demandas a granel sejam atendidas, foram substituídas por (2.35), nas quais parte dessa demanda pode estar com a produção atrasada. As restrições (2.29), as quais garantem que toda a demanda a granel do horizonte de planejamento seja produzida, foram substituídas por (2.36), segundo a qual nem toda demanda precisa ser atendida durante o horizonte de planejamento.

$$I_{f,t-1}^{Feed} + p_{f,t}^{Feed} + B_{f,t}^{Feed} = \sum_r \sum_m e_{f,r,m}^{Feed} \cdot Q_{r,m,t}^{Prod} + I_{f,t}^{Feed}, \quad \forall f, t \quad (2.33)$$

$$Q_{j,0,t}^{DemBulk} + \sum_n Q_{j,0,n,t}^{PackBulk} + I_{j,0,t}^{Bulk} \leq c_j^{StorDedic} + B_{j,t}^{Stor}, \quad \forall j, t \quad (2.34)$$

$$d_{j,t}^{BulkMTO} \leq B_{j,t}^{DemBulk} + \sum_{k=0}^K Q_{j,k,t}^{DemBulk}, \quad \forall j, t \quad (2.35)$$

$$d_j^{BulkMTO} + \sum_t d_{j,t}^{BulkMTO} = \sum_t \left(B_{j,t}^{DemBulk} + \sum_{k=0}^K Q_{j,k,t}^{DemBulk} \right), \quad \forall j \quad (2.36)$$

$$I_{j,t-1}^{Pack} + \sum_r \sum_m \sum_n Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} + \sum_n \sum_k Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} + B_{j,t}^{PackMTO} = d_{j,t}^{PackMTO} + I_{j,t}^{Pack}, \quad \forall j, t \quad (2.37)$$

$$d_j^{PackMTO} + \sum_t \left(d_{j,t}^{PackMTO} + \sum_r \sum_m \sum_n Q_{j,r,m,n,t}^{PackProd} \right) = \sum_t \left(B_{j,t}^{DemPack} + \sum_n \sum_k Q_{j,k,n,t}^{PackBulk} \right), \quad \forall j \quad (2.38)$$

As restrições (2.30) responsáveis por garantir que as demandas dos produtos envasados sejam atendidas foram substituídas pelas restrições (2.37), as quais permitem que o atendimento

das demandas esteja atrasado. As restrições (2.31), as quais garantem que toda a demanda dos produtos envasados seja produzida durante o horizonte de planejamento, foram substituídas pelas restrições (2.38), segundo a qual nem toda demanda precisa ser atendida durante o horizonte de planejamento.

2.3.2 Heurística Construtiva

O modelo apresentado na Subseção 2.3.1 foi tratado por uma heurística construtiva do tipo *relax-and-fix* (DILLENBERGER *et al.*, 1994). De acordo com tal procedimento heurístico, busca-se resolver o modelo matemático em diversas etapas, cada uma resolvendo um subproblema derivado do modelo completo. A cada etapa, apenas um subconjunto das variáveis inteiras (e binárias) são de fato otimizadas, enquanto as demais variáveis são convertidas em contínuas, o que reduz significativamente o esforço computacional. Após a resolução de um subproblema, o subconjunto de variáveis inteiras que foi otimizado é fixado com os valores da solução encontrada e um novo subconjunto de variáveis inteiras é então selecionado para a próxima iteração. Esse procedimento termina quando todas as variáveis inteiras tiverem sido fixadas ou quando um subproblema não fornecer solução factível, seja por falta de tempo de processamento ou por infactibilidade. Descrições mais detalhadas sobre heurísticas construtivas do tipo *relax-and-fix* podem ser encontradas em Akartunalı e Miller (2009) e em Beraldi *et al.* (2008).

O Algoritmo 1 descreve resumidamente as principais etapas da implementação dessa heurística. A inicialização do procedimento construtivo (linha 1) requer um modelo matemático (m), o tempo máximo de processamento (t), a quantidade de partições de variáveis a serem otimizadas por iteração (q) e o número de partições fixadas por iteração ($f, f \leq q$). Na linha 2, define-se o tempo máximo permitido para processamento dos subproblemas no pacote de otimização. Em seguida, são definidas as partições das variáveis inteiras e/ou binárias (linha 3) e todas elas são convertidas em variáveis contínuas (linha 4). Na linha 5, inicia-se a resolução dos subproblemas (partições) de forma iterativa. A linha 6 garante que algumas variáveis inteiras previamente convertidas em contínuas são revertidas. O procedimento de conversão tem início na

Algoritmo 1 – Heurística *relax-and-fix*

```

1: procedimento RELFIX( $m, t, q, f$ )
2:    $otm \leftarrow$  Tempo Máximo ( $t$ )
3:    $p \leftarrow$  Número de Partições ( $m$ )
4:   ConvVarCont( $m$ )
5:   para  $i \leftarrow 0$  até  $\left(\left\lfloor \frac{p}{f} \right\rfloor - 1\right)$  faça
6:     ConvVarInt( $m, i \times f, q$ )
7:      $otm(m)$ 
8:     FixVar( $m, i \times f, f$ )
9:   fim para
10: fim procedimento

```

variável da posição $i \times f$ e aplica-se às próximas $q - 1$ variáveis. Posteriormente o subproblema resultante é resolvido (linha 7). Por fim, na linha 8 são fixadas as variáveis inteiras a partir da posição $i \times f$ até as próximas $f - 1$ posições.

Nos experimentos computacionais desse trabalho, foi aplicada a heurística *relax-and-fix* com um particionamento de variáveis de acordo com os recursos, ou seja, cada subproblema continha apenas as variáveis inteiras e binárias correspondentes a um único equipamento produtivo. Essa abordagem é promissora devido às características do problema, visto que apenas um produto pode ser produzido por mais de um equipamento, como descrito na Seção 2.4. Sendo assim, o planejamento para cada unidade produtiva possui um elevado grau de independência, mas não chega a ser totalmente independente devido aos tanques de armazenamento que podem ser compartilhado entre os produtos.

2.3.3 Heurística de Melhoria

Na heurística construtiva não há garantia de obtenção da solução ótima, logo, não é possível afirmar, de fato, que todas as variáveis artificiais do modelo apresentado na Subseção 2.3.1 serão minimizadas. Portanto, caso a melhor solução obtida pela heurística *relax-and-fix* não tenha eliminado todas as variáveis artificiais, utiliza-se a heurística de melhoria *fix-and-optimize* (HELBER; SAHLING, 2010). O procedimento básico da heurística *fix-and-optimize* consiste em melhorar a solução incumbente de forma iterativa. A cada iteração, apenas um subconjunto de variáveis inteiras (e binárias) de fato é otimizado, enquanto as demais variáveis permanecem fixadas nos valores da solução incumbente. Ao final da iteração, as variáveis que estavam livres são fixadas com os valores da melhor solução entre a solução inicial e a final. Esse procedimento é finalizado após atingir um número limite de iterações ou quando nenhuma das partições proporcionar melhora na solução. Descrições mais detalhadas sobre essa heurística construtiva podem ser encontradas em Sahling *et al.* (2009) e em Helber e Sahling (2010).

O Algoritmo 2 descreve resumidamente as principais etapas da implementação dessa

Algoritmo 2 – Heurística *fix-and-optimize*

```

1: procedimento FIXOPT( $m, t, q, f$ )
2:    $otm \leftarrow$  Tempo Máximo ( $t$ )
3:    $p \leftarrow$  Número de Partições ( $m$ )
4:   para  $i \leftarrow 1$  até  $p$  faça
5:      $FixVar(m, i, 1)$ 
6:   fim para
7:   para  $i \leftarrow 0$  até  $\left(\lfloor \frac{p}{f} \rfloor - 1\right)$  faça
8:      $DesfixVar(m, i \times f, q)$ 
9:      $otm(m)$ 
10:     $FixVar(m, i \times f, f)$ 
11:  fim para
12: fim procedimento

```

heurística. A inicialização do procedimento de melhoria (linha 1) requer um modelo matemático (m), o tempo máximo de processamento (t), a quantidade de partições a serem reotimizadas por iteração (q) e o número de partições fixadas por iteração ($f, f \leq q$). Na linha 2 define-se o tempo máximo permitido para processamento dos subproblemas, no pacote de otimização. Em seguida, são definidas as partições das variáveis inteiras e/ou binárias (linha 3) e todas elas são fixadas com os valores da solução incumbente (linhas 4 a 6). Na linha 7 inicia-se a resolução dos subproblemas de forma iterativa. A linha 8 garante que algumas variáveis inteiras previamente fixadas são liberadas. O procedimento de liberação tem início na variável da posição ($i \times f$) e aplica-se às próximas ($q - 1$) variáveis. Posteriormente o subproblema resultante é resolvido (linha 9). Por fim, na linha 10 as variáveis inteiras são fixadas a partir da posição ($i \times f$) até as próximas ($f - 1$) posições.

Para os experimentos computacionais desse trabalho, a heurística *fix-and-optimize* foi aplicada utilizando dois tipos de particionamento: por recursos e por períodos. No primeiro caso, cada subproblema continha apenas as variáveis inteiras e binárias correspondentes a um único equipamento produtivo. Já no particionamento por períodos, cada subproblema continha apenas as variáveis inteiras e binárias correspondentes a alguns períodos do horizonte de planejamento. Nesse último caso, foi utilizada a estratégia regressiva, ou seja, partindo do último período e voltando até o primeiro. Essa abordagem por períodos é válida pois existem produtos que podem ser produzidos em mais de um equipamento, logo ela permite a troca de bateladas produzidas entre os equipamentos e auxiliar na prevenção a mínimos locais, obtidos pela estratégia de particionamento por recursos.

2.4 Experimentos Computacionais

A validação do modelo matemático proposto neste capítulo foi baseada em uma situação real fornecida pela empresa estudada. Esta seção descreve os dados utilizados nos experimentos computacionais, juntamente com algumas características específicas da indústria em questão, e posteriormente analisa os resultados obtidos nos experimentos.

2.4.1 Descrição dos Dados

Os experimentos computacionais utilizaram como base um caso real de planejamento da produção referente a uma das plantas produtivas de uma indústria química brasileira. As demandas dos produtos são múltiplas da quantidade produzida por suas respectivas bateladas. O departamento de planejamento realiza um pré-processamento que tem como objetivo distribuir as demandas mensais previstas entre as plantas produtivas, sem levar em considerações aspectos operacionais como: disponibilidade de matérias-primas, tanques de armazenamento, tempo de preparação dos equipamentos, entre outros.

Esse estudo de caso possui três unidades produtivas e 24 receitas, das quais uma (r_{11})

Tabela 1 – Informações gerais sobre as receitas produtivas.

Receita	Unidade Produtiva	Tempo da Reação (Min)	Batelada Mínima (Kg)	Batelada Máxima (Kg)	Produtos Produzidos	Matérias-Primas Consumidas	Quantidade Consumida (Kg)
r_1	m_1	1062	2175	2175	j_1	-	-
r_2	m_1	1572	2274	2274	j_2	f_1	610
r_3	m_1	996	2160	2160	j_3	f_1	550
r_4	m_1	432	2141	2141	j_4	f_1	1100
r_5	m_1	660	1886	1886	j_5	-	-
r_6	m_1	1392	2025	2025	j_6	-	-
r_7	m_1	720	1890	1890	j_7	-	-
r_8	m_2	1218	18315	18315	j_8	f_1	17890
r_9	m_2	372	5340	5340	j_9	f_1	2950
r_{10}	m_2	482	7350	7350	j_{10}	-	-
r_{11}	m_2	504	7750	7750	j_{11}	f_1	5000
r_{11}	m_3	330	28800	28800	j_{11}	f_1	18540
r_{12}	m_2	336	7720	7720	j_{12}	f_1	7000
r_{13}	m_2	360	7741	7741	j_{13}	f_1	3420
r_{14}	m_2	378	5490	5490	j_{14}	f_1	3075
r_{15}	m_2	1794	21900	21900	j_{15}	f_1	19040
r_{16}	m_2	558	7200	7200	j_{16}	f_1	3960
r_{17}	m_2	4248	22800	22800	j_{17}	f_1	4093
r_{18}	m_3	222	28250	28250	j_{18}	f_1	12950
r_{19}	m_3	222	29000	29000	j_{19}	f_1	16190
r_{20}	m_3	198	29490	29490	j_{20}	f_1	19350
r_{21}	m_3	210	29500	29500	j_{21}	f_1	19950
r_{22}	m_3	174	28705	28705	j_{22}	f_1	10220
r_{23}	m_3	648	27515	27515	j_{23}	f_1	18395
r_{24}	m_3	240	28640	28640	j_{24}	-	-

pode ocorrer em duas unidades produtivas distintas (m_2 e m_3). A Tabela 1 apresenta a maior parte das informações sobre as receitas, como as unidades produtivas em que elas ocorrem, seu tempo de processamento, bateladas mínimas e máxima (que devem ser consideradas iguais para a indústria estudada), produtos resultantes e quantidade de matérias-primas consumidas (sendo considerada apenas uma matéria-prima cujo controle de estoque é crítico).

A Tabela 2 apresenta os tempos de preparação da unidade produtiva m_1 para as receitas, em horas. Esses tempos são dependentes da sequência das receitas. Portanto, o tempo de preparação da unidade m_1 para a receita r_1 é de 5 horas, caso a receita anterior tenha sido r_3 ou r_5 , por outro lado, o tempo é de 2,5 horas, caso a receita anterior tenha sido r_4 . Note que a receita

Tabela 2 – Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_1 .

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
r_1	0	0	5	2,5	5	-	-
r_2	0	0	5	5	-	5	-
r_3	5	5	0	5	-	-	5
r_4	2,5	2,5	2,5	0	-	-	-
r_5	5	-	-	-	0	5	5
r_6	-	5	-	-	5	0	5
r_7	-	-	5	-	5	5	0

Tabela 3 – Informações gerais sobre o processo de envase dos produtos.

Produto	Unidade de envase	Tempo de envase (Min)	Quantidade (Kg)	Tempo de preparação (Min)
j_1	n_1	10	1000	240
j_2	n_1	10	1000	240
j_3	n_1	10	1000	240
j_4	n_1	10	1000	240
j_5	n_1	10	1000	240
j_6	n_1	10	1000	240
j_7	n_1	10	1000	240
j_9	n_1	3	210	240
j_{11}	n_1	10	1000	240
j_{12}	n_1	10	1000	240
j_{14}	n_1	3	210	240
j_{15}	n_1	10	1000	240
j_{16}	n_1	10	1000	240
j_{17}	n_1	10	1000	240
j_{18}	n_1	10	1000	240
j_{19}	n_1	10	1000	240
j_{20}	n_1	10	1000	240
j_{21}	n_1	10	1000	240
j_{22}	n_1	10	1000	240
j_{23}	n_1	10	1000	240
j_{24}	n_1	10	1000	240
j_8	n_2	60	280	240
j_{10}	n_2	60	180	240

r_1 não requer tempo de preparação para a unidade produtiva m_1 caso a receita anterior tenha sido a própria r_1 ou então r_2 . Entretanto, não é possível processar a receita r_1 imediatamente após as receitas r_6 ou r_7 . Por fim, os tempos de preparação entre as receitas não são simétricos, ou seja, é necessário 5 horas para preparar a unidade produtiva m_1 de r_2 para r_4 , enquanto é necessário 2,5 horas para prepará-la de r_4 para r_2 .

Após a etapa produtiva, os produtos podem ser armazenados em tanques ou serem envasados em duas unidades distintas. A Tabela 3 apresenta em qual equipamento os produtos podem ser envasados, bem como o tempo consumido, a quantidade envasada e o tempo de preparação dos equipamentos. Note que, ao contrário da etapa produtiva, o tempo de preparação dos equipamentos na etapa de envase não depende da sequência dos produtos envasados, ou

Tabela 4 – Capacidade total de armazenamento dos produtos em tanques dedicados.

Produto	Capacidade (Kg)
j_{11}	540000
j_{12}	158200
j_{13}	150000
j_{20}	742000
j_{21}	335914
j_{22}	351759

Tabela 5 – Informações gerais sobre os tanques de armazenamento multiproduto.

Tanque	Capacidade (Kg)	Conexões	Produtos não permitidos
k_1	24275	m_1, m_2	j_8, j_{10}
k_2	20977	m_1, m_2	j_8, j_{10}
k_3	130646	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_4	106000	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_5	106000	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_6	125790	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_7	316900	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_8	540000	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_9	117000	$m_1 - m_3$	j_8, j_{10}
k_{10}	16812	$m_1 - m_3$	$j_1 - j_7, j_9, j_{11} - j_{24}$
k_{11}	28000	$m_1 - m_3$	$j_1 - j_7, j_9, j_{11} - j_{24}$

seja, o tempo gasto para a limpeza e/ou ajuste dos equipamentos pode ser considerado constante independentemente da ordem de envase dos produtos.

A Tabela 4 apresenta a capacidade total de armazenamento dos seis produtos que possuem tanques de armazenamento dedicados. Logo, esse produtos podem ser armazenados nesses tanques de uso exclusivo ou ainda podem utilizar os tanques de armazenamento multiproduto.

As informações sobre os onze tanques multiprodutos da planta produtiva em estudo são apresentadas na Tabela 5. Além das capacidades totais de armazenamento de cada tanque multiproduto, também são informadas quais unidades produtivas possuem conexões diretas com os tanques e quais produtos não podem ser armazenados em cada tanque. Sendo assim, nenhum produto resultante de reações que ocorram a unidade produtiva m_3 podem ser armazenados nos tanques k_1 e k_2 . Por outro lado, apenas os produtos j_8 e j_{10} podem utilizar os tanques k_{10} e k_{11} .

2.4.2 Descrição da Abordagem de Solução

A abordagem utilizada para a resolução do problema descrito nesta seção consiste em encontrar uma solução inicial factível para o modelo relaxado e, em seguida, melhorá-la. A descrição detalhada dos procedimentos utilizados para resolver o problema proposto neste capítulo está no Algoritmo 3.

Inicialmente, cria-se o modelo matemático conforme descrito na Subseção 2.3.1, cuja introdução de variáveis artificiais representam infactibilidades no problema real e com a função objetivo passando a considerar exclusivamente a penalização dessas variáveis (linha 1). Em seguida, aplica-se a heurística construtiva *relax-and-fix* recursiva, com particionamento das variáveis de acordo com as unidades produtivas, de forma que cada partição possui um limite de 60 segundos de processamento (linha 2).

Ao final da heurística *relax-and-fix*, geralmente existem variáveis artificiais que ainda não foram completamente minimizadas. Portanto, inicia-se a etapa de melhoria, cujo objetivo é

Algoritmo 3 – Método de solução para o problema de planejamento da produção

```

1:  $m \leftarrow$  Modelo Matemático Subseção 2.3.1
2:  $RelFixRec(m, 60, 1, 1)$ 
3: para  $i \leftarrow 0$  até 10 faça
4:    $FixOptPerReg(m, 2^i, 5, 2)$ 
5:    $FixOptRec(m, 2^i, 1, 1)$ 
6: fim para
7:  $m_2 \leftarrow$  Modelo Matemático Subseção 2.2.2
8:  $m_2 \leftarrow sol(m)$ 
9:  $otm \leftarrow$  Tempo Máximo (1800)
10:  $otm(m_2)$ 

```

minimizá-las até que assumam valores nulos. Essa etapa possui uma estrutura de repetição que permite no máximo dez iterações de melhoria (linha 3). A cada iteração, duas heurísticas são aplicadas: uma heurística *fix-and-optimize* por período regressivo (linha 4) e, posteriormente, uma heurística *fix-and-optimize* por recursos (linha 5). A cada iteração o tempo de processamento máximo designado aos subproblemas dobra, inviabilizando um número maior de repetições.

Caso uma solução ótima seja encontrada para o modelo da Subseção 2.3.1, todas suas variáveis artificiais são reduzidas a zero. Dessa forma, a solução obtida também é factível para o modelo matemático da Subseção 2.2.2, visto que ambos diferem entre si apenas pelas variáveis artificiais. Nesse caso, o modelo da Subseção 2.2.2 é criado (linha 7) e a solução previamente obtida é copiada (linha 8). Por fim, define-se um tempo limite de 1800 segundos (linha 9) para que o pacote de otimização minimize a função objetivo ao reduzir estoques desnecessários e, principalmente, ao ajustar o estoque das matérias-primas.

2.4.3 Análise da Solução

Os experimentos computacionais foram realizados no pacote de otimização CPLEX 12.6 em um *cluster* cujos nós eram compostos por dois processadores Intel Xeon E5-2680 v2 2.8

Figura 11 – Redução da função objetivo obtida pela heurística *fix-and-optimize*, a partir da solução inicial fornecida pela heurística *relax-and-fix*.

Figura 13 – Estoque da matéria-prima f_1 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

produzir uma campanha da receita r_4 , composta por 2 bateladas. A linha pontilhada delimita a duração de cada uma dessas bateladas. Em seguida, há um período de ociosidade sucedido por uma nova preparação para que seja produzida uma batelada da receita r_2 . Por fim, entre os 18 e 27 havia uma manutenção preventiva programada, o que resultou em uma parada de 9 dias.

Figura 14 – Estoque da matéria-prima f_1 obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

Figura 15 – Redução do valor da função objetivo obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

A Tabela 6 apresenta a programação da produção mais detalhadamente, em que cada linha corresponde a uma campanha a ser produzida. Como visualizado na Figura 12, a primeira campanha corresponde à receita r_4 , em que devem ser produzidas 2 bateladas com início às 5:00 do dia 1 e fim às 19:24 do mesmo dia. Os demais diagramas de Gantt e as tabelas de campanhas produtivas estão no Apêndice A.

A Figura 13 ilustra a variação do estoque da matéria-prima f_1 durante o horizonte de planejamento. Entre os dias 3 e 11 o estoque de f_1 atinge valores superiores a 600 toneladas e aproximando-se de 700 toneladas entre os dias 9 e 10. Entretanto, como a empresa visa manter o estoque dessa matéria-primas próximo a 450 toneladas, utilizou-se o modelo apresentado na Seção 2.2.2 a fim de encontrar novas soluções que mantivessem o estoque de f_1 em níveis mais próximos ao desejado, além de reduzir os estoques de produtos. A redução efetiva da função objetivo ocorre durante os primeiros 100 segundos, como pode ser observado na Figura 15, posteriormente são observadas pequenas reduções esporádicas.

A nova solução obtida reduziu os picos de estoque de f_1 para valores próximos a 560 toneladas, como ilustrado pela Figura 14, e assim, é possível atender a uma das requisições da

Figura 16 – Diagrama de Gantt para a programação da produção da unidade produtiva m_1 obtido pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

Tabela 7 – Sequência produtiva da unidade m_1 obtida pelo modelo matemático da Subseção 2.2.2 a partir da solução inicial fornecida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

Receita	Número de bateladas	Início		Fim	
		Dia	Hora	Dia	Hora
r_4	1	01	05:00	01	12:12
r_2	1	02	14:36	03	16:48
r_3	3	03	21:48	05	23:36
r_4	2	06	04:36	06	19:00
r_1	1	06	21:30	07	15:12
r_3	3	07	20:12	09	22:00
r_7	5	10	03:00	12	15:00
r_6	3	12	21:48	15	19:24
r_6	3	15	19:24	18	17:00
r_5	3	28	05:00	29	14:00
r_7	2	29	19:00	30	19:00

indústria. A Figura 16 utiliza o diagrama de Gantt para representar a programação da produção da unidade produtiva m_1 , após a resolução do modelo matemático apresentado na Subseção 2.2.2.

As alterações observadas na programação da produção dessa nova solução foram pequenas. As duas campanhas produtivas da receita r_4 foram invertidas, o que provocou o deslocamento de 2 horas e 12 minutos em algumas campanhas. Por outro lado, a batelada adicional da receita r_7 , que havia sido incluída na solução inicial, foi removida da solução final. A Tabela 7 apresenta a programação da produção da solução final de forma mais detalhada.

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi abordado um problema real de planejamento da produção encontrado em uma indústria química brasileira. A modelagem matemática considera as seguintes características: controle de estoque da matéria-prima f_1 ; múltiplas receitas produtivas para um mesmo produto; flexibilização do tamanho dos períodos; máquinas paralelas distintas; sequenciamento da produção; preparação dos equipamentos dependente da sequência; planejamento de envase; e controle de estoque de produtos a granel e envasado. A função objetivo visa manter os níveis de estoque dentro de um intervalo de segurança, além de buscar a minimização dos estoques de produtos a granel e envasados.

A indústria em estudo forneceu os dados reais do planejamento da produção de um mês. Apesar da solução obtida nesse estudo de caso não ter sido comparada à solução original adotada pela empresa, é possível obter algumas conclusões. O tempo de processamento para a obtenção da solução apresentada foi inferior a uma hora. Por outro lado, colaboradores especializados nessa tarefa, com muitos anos de experiência na empresa, requerem aproximadamente quatro horas de trabalho para apresentar uma solução viável. Porém, caso não seja possível encontrar

uma solução adequada, é necessário interagir com o departamento de planejamento da produção para que as demandas sejam modificadas. Após esse processo, é necessário uma nova análise dos dados para a obtenção de uma solução viável, o que requer um tempo adicional para essa etapa.

Ao resolver o modelo matemático proposto neste capítulo, é possível identificar demandas que excedam a capacidades dos recursos disponíveis, quando o pacote de otimização não for capaz de eliminar completamente o atraso na entrega das demandas, após tempo suficiente de processamento. Além disso, é possível programar produções superiores às requisitadas pelas demandas. Essa característica do modelo permite flexibilizar a solução final a fim de controlar os níveis de estoque da matéria-prima f_1 , evitando que eles atinjam valores próximos do limite máximo de armazenamento.

Pesquisas futuras podem focar na extensão da formulação matemática proposta ou no desenvolvimento de abordagens de solução. A extensão da formulação matemática pode abordar aspectos como: controle do estoque de todas as matérias-primas, inclusão do planejamento de compra das matérias-primas, sequenciamento do armazenamento dos produtos. Já o desenvolvimento de abordagens de solução é necessário para reduzir o tempo de processamento utilizado para obtenção de solução viáveis e para permitir que soluções factíveis possam ser obtidas a partir de computadores de custos mais acessíveis. Por fim, é importante gerar um conjunto de instâncias a fim de avaliar o desempenho geral dos modelos e das abordagens de solução de forma mais pragmática.

PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO EM INDÚSTRIAS DE PROCESSOS

O mercado global faz com que as empresas redefinam seus objetivos econômicos constantemente, o que resulta em uma busca contínua por melhoria em suas gestões operacionais. A implantação de um planejamento da produção eficiente pode facilitar o alcance dessa meta. O dimensionamento de lotes apresenta uma visão tática do problema, abordando elementos como a capacidade produtiva disponível, o custo de manutenção dos estoques ou ainda determinar quais produtos devem ser priorizados para maximizar os ganhos financeiros. Já a programação da produção visa o uso dos recursos de forma mais operacional avaliando o custo de produção, os custos de preparação dos equipamentos entre as campanhas produtivas, chegando até ao nível de serviço dos clientes. Do ponto de vista gerencial, é primordial integrar e explorar simultaneamente aspectos do planejamento, dentre os quais encontra-se o problema de dimensionamento e programação de lotes produtivos.

Problemas de planejamento da produção vêm sendo estudado pela comunidade científica de Pesquisa Operacional (*Operations Research* ou OR) nas últimas décadas. Desde então foram propostas várias formas de representação do horizonte de planejamento, dentre as quais está a discretização do horizonte de planejamento em períodos de duração fixa e uniforme. Essa discretização pode ser dividida em duas classes: macroperíodo (*big bucket*) e microperíodo (*small bucket*). O primeiro é caracterizado por períodos mais longos que permitem a realização de múltiplas tarefas (itens), enquanto o segundo utiliza períodos mais curtos que permitem a realização de um único tipo de tarefa (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003). Problemas de dimensionamento de lotes frequentemente utilizam a formulação com macroperíodos, visto que informações sobre o sequenciamento das tarefas produtivas durante o período não são essenciais. Por outro lado, quando problemas de programação da produção consideram a formulação com microperíodos, como o problema de dimensionamento e programação de lotes discretos (*Discrete Lot sizing and Scheduling Problem* ou DLSP) e o problema de dimensionamento de lotes com

preparação contínua (*Continuous Setup Lot sizing Problem* ou CSLP), o sequenciamento da produção está intrinsecamente relacionado à ordem dos períodos, visto que apenas um único tipo de tarefa pode ser executado por período. A principal diferença entre as formulações DLSP e CSLP diz respeito à quantidade produzida durante um período, visto que a primeira obriga que o processo produtivo ocorra durante todo o período, enquanto a segunda permite que a tarefa produtiva possa ser encerrada antes do final do período (DREXL; KIMMS, 1997), tornando-a mais genérica do que a primeira.

Simultaneamente à comunidade científica de OR, a comunidade de Engenharia de Sistemas de Processo (*Process System Engineering* ou PSE) também vem desenvolvendo formulações matemáticas baseadas na caracterização de tempo discreta e contínua (FLOUDAS; LIN, 2004; MÉNDEZ *et al.*, 2006a). Diferentes tipos de representações de problemas têm sido exploradas seguindo duas metodologias principais: representações específicas e representações genéricas uniformes. Na primeira metodologia, todas as características específicas dos problemas são explicitamente modeladas na formulação, resultando em formulações customizadas. Já a segunda metodologia é caracterizada por apresentar uma estrutura de representação geral uniforme, independentemente das diferenças inerentes aos problemas, que contém os aspectos de dimensionamento e programação de lotes produtivos. Duas das principais formulações dessa última metodologia são as redes de estado e tarefa (*State-Task-Network* ou STN) e as redes de recursos e tarefas (*Resource-Task-Network* ou RTN) (PINTO-VARELA; BARBOSA-PÓVOA; NOVAIS, 2011). A STN foi a primeira representação genérica uniforme desenvolvida por Kondili, Pantelides e Sargent (1993), a qual visava aplicações em problemas de dimensionamento e programação de lotes. Posteriormente, Pantelides (1994) desenvolveu uma representação genérica uniforme mais abrangente do que a anterior.

Baseado no conhecimento das duas comunidades científicas OR e PSE, este capítulo compara uma formulação matemática de cada uma dessas comunidades e propõe uma nova formulação que resulta na principal contribuição deste estudo. Inicialmente, foi realizada uma comparação entre as formulações CSLP e RTN. Posteriormente, foram incorporados conceitos do RTN ao CSLP, resultando em uma nova formulação denominada CSLP-MP. Conjuntos de instâncias representando problemas estudados por ambas comunidades científicas foram explorados e os resultados foram analisados. Como conclusão, o CSLP-MP supera as duas outras formulações para a maioria das instâncias consideradas.

Este capítulo está organizado da forma a seguir. A Seção 3.1 apresenta uma breve revisão da literatura, seguida pela definição do problema na Seção 3.2. A Seção 3.3 apresenta duas formulações matemáticas, o CSLP da comunidade OR e o RTN da comunidade PSE. Em seguida, o desempenho de ambas é avaliado de acordo com duas classes de instâncias. Com base no conhecimento dessas duas formulações e visando superar algumas deficiências da formulação CSLP, uma nova formulação (CSLP-MP) é proposta na Seção 3.4. No decorrer dessa seção, são apresentadas as comparações dessa nova formulação com as duas anteriores. Por fim, algumas

conclusões e trabalhos futuros são discutidos na Seção 3.5.

3.1 Revisão da Literatura

O dimensionamento de lote e a programação da produção vêm sendo explorados há décadas pelas comunidades científicas de Pesquisa Operacional (OR) e Engenharia de Sistemas de Processo (PSE), como observado nas diversas revisões disponíveis (DREXL; KIMMS, 1997; KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003; MÉNDEZ *et al.*, 2006a; BUSCHKÜHL *et al.*, 2010; COPIL *et al.*, 2016). Essas revisões destacam as características dos problemas abordados, vantagens e desvantagens, metodologias de solução, além de apontar tendências e lacunas a serem exploradas. Entretanto, a troca de conhecimento e experiências entre as duas comunidades com objetivo de aprimorar as formulações matemáticas ainda é muito escassa. Sendo assim, o escopo deste trabalho visa o desafio de fortalecer a relação entre essas comunidades.

A comunidade OR classifica problemas de dimensionamento de lotes e de programação da produção de acordo com a duração dos períodos: micropériosodos e macropériosodos. O problema abordado neste trabalho situa-se na classe de micropériosodos, os quais permitem um único tipo de tarefa por período. A formulação matemática de micropériosodos foi inicialmente estudada por Lanzenauer (1970) e assumia a prerrogativa de que o equipamento deveria produzir durante todo o período ou não deveria produzir nada. Posteriormente, (FLEISCHMANN, 1990) definiu o termo problema discreto de dimensionamento de lotes e programação da produção (DLSP). Karmarkar e Schrage (1985) propuseram a primeira formulação do CSLP com multi-itens. Esta nova formulação torna a abordagem dos problemas mais realista, visto que não é mais necessário que a tarefa produtiva ocorra durante todo o período (DREXL; KIMMS, 1997), logo a formulação matemática considerada neste trabalho é a CSLP. Poucas extensões foram propostas na literatura a partir do trabalho de Karmarkar e Schrage (1985). Karmarkar, Kekre e Kekre (1987) estudaram uma variação do CSLP em que havia um único item para os casos com e sem restrições de capacidade. Matta e Guignard (1995) propõem uma modelagem para o problema com múltiplas máquinas sem considerar sua preparação. Sandbothe (1996) trata o problema com múltiplos itens e uma única máquina em que há custo de preparação independente da sequência, mas sem tempo de preparação. Wolsey (1997) propõe uma formulação geral de fluxo que é efetiva para considerar preparações no modelo proposto por Karmarkar e Schrage (1985). Constantino (2000) desenvolveu inequações válidas para o CSLP com múltiplos itens e uma única máquina em que o tempo de preparação é independente da sequência. Almada-Lobo *et al.* (2010) estudaram um sistema com múltiplas máquinas paralelas de moldagem, representando-o como um modelo CSLP com tempo e custo de preparação dependente da sequência e também propuseram inequações válidas para melhorar os limitantes inferiores.

A comunidade PSE classifica problemas de dimensionamento de lotes e programação da produção de acordo com o tempo, em formulações de tempo contínuo ou discreto. O objetivo

deste trabalho baseia-se em uma representação genérica uniforme proposta por Pantelides (1994), denominada *Resource-Task-Network* (RTN), a qual considera intervalos de tempo discretos para tratar a programação da produção de processos de batelada. Moniz, Barbosa-Póvoa e Sousa (2014) propuseram uma formulação de programação da produção para campanhas em plantas multipropósito de bateladas. Produtos com demanda periódica possuem uma programação cíclica ao contrário de produtos com demanda esporádica. Os autores desenvolveram uma formulação RTN que utiliza a abordagem de horizonte rolante e aplicam estratégias de ramificação para tratar a complexidade computacional do problema. Chen, Yan e Shi (2014) propuseram um modelo de programação inteira mista para a programação da produção de plantas de batelada que visa maximizar o lucro usando a representação RTN. O modelo é resolvido utilizando um procedimento híbrido baseado em um algoritmo de agrupamento para competição e em programação linear, para o qual foram exploradas duas instâncias de testes. Castro, Rodrigues e Matos (2014) abordaram um problema de programação da produção para planta de batelada multiestágio com restrições de energia. Com isso, há limitação no uso do equipamento de aquecimento térmico que é compartilhado entre digestores paralelos de diferentes capacidades para a produção de polpa. A formulação é composta por três diferentes representações genéricas: *State-Task-Network*, *Resource-Task-Network* e *State-Sequence-Network*. Vieira, Pinto-Varela e Barbosa-Póvoa (2015) utilizaram a representação RTN para abordar uma ampla diversidade de problemas operacionais, nos quais foram considerados as flexibilidades necessárias para a indústria de processos, o atendimento das demandas de mercado e de níveis de serviço. Os autores exploraram os processos químicos da indústria de tintas com alocação de recursos e otimização da programação da produção. Lee e Maravelias (2017) propuseram uma nova formulação de tempo discreto baseada em MIP para a programação da produção em plantas multipropósito de bateladas. Os autores discutiram como essas plantas podem ser representadas pelo STN e pelo RTN considerando as definições de batelada, estados, recursos e tarefas. Por fim, eles desenvolveram duas formulações baseadas em cada uma dessas representações para analisar recursos compartilhados, além da disponibilidade e custo variáveis dos recursos através do tempo.

Apesar dos trabalhos citados anteriormente focarem exclusivamente em sua própria comunidade, existem estudos que iniciaram um processo de integração entre essas duas comunidades científicas. Gaglioppa, Miller e Benjaafar (2008) aborda um problema de planejamento e programação da produção com multitarefas e multiestágios. Os autores formularam um modelo matemático do tipo MIP que baseou-se no problema de dimensionamento de lotes capacitado (*Capacitated Lot Sizing Problem* ou CLSP), da indústria de manufatura discreta, e nas representações STN e RTN, da indústria de processos. Amorim *et al.* (2013) apresentaram uma análise sistemática sobre os desenvolvimentos recentes de formulações das comunidades OR e PSE. A partir das comparações entre os modelos e do conhecimento de ambas comunidades foi proposta uma reformulação que apresentou desempenho superior às demais formulações para a maioria das instâncias consideradas nos testes, as quais foram criadas por um gerador aleatório

e automático. Entretanto, poucos trabalhos além desses foram desenvolvidos com o intuito integrar o conhecimento dessas duas comunidades, logo este trabalho visa dar continuidade a essa integração para contribuir no preenchimento dessa lacuna da literatura.

3.2 Definição do Problema

Este capítulo foi baseado no estudo de caso apresentado no Capítulo 2. Entretanto, não foram consideradas as matérias-primas nem a etapa de envase dos produtos, ou seja, este estudo restringe-se à programação da produção no curto prazo para plantas multipropósito de bateladas e ao armazenamento dos produtos em tanques dedicados e multiprodutos. O objetivo deste estudo é minimizar o tempo de finalização (*makespan*) da última tarefa e as demandas não atendidas levando em consideração diversos conjuntos de restrições que caracterizam a situação retratada.

O problema abordado neste capítulo é composto por um conjunto de tarefas produtivas que devem ser designadas às unidades produtivas durante o horizonte de planejamento para que os produtos demandados pelos clientes sejam produzidos. A Figura 17 ilustra quatro tarefas produtivas, das quais duas (r_1 e r_2) podem ser alocadas na unidade produtiva m_1 e duas (r_3 e r_4) na unidade produtiva m_2 . Algumas tarefas produtivas requerem o consumo de produtos intermediários, como no caso de r_3 , o que resulta em uma estrutura produtiva de múltiplos níveis.

Figura 17 – Representação resumida do problema estudado.

De modo geral, uma unidade produtiva deve ser preparada entre o processo produtivo de duas tarefas distintas. Além disso, a ordem dessas tarefas pode influenciar o tempo necessário para a preparação das unidades produtivas, como pode ser observado na Figura 18. De acordo com a Situação 1, o tempo de preparação é maior quando a unidade produtiva deve ser ajustada para a tarefa r_2 , após produzir a tarefa r_1 , do que para a Situação 2, em que ocorre a preparação inversa.

Os estoques dos produtos devem ser armazenados em tanques dedicados ou multiprodutos. Os tanques dedicados são exclusivos de um único produto durante todo o horizonte de planejamento, como pode ser observado para os produtos j_3 e j_4 da Figura 17. Já os tanques multiprodutos podem ser utilizados por mais de um produto, desde que não simultaneamente, como é o caso do tanque k_1 , o qual pode armazenar os produtos j_1 ou j_2 . Além disso, os tanques

multiprodutos podem necessitar de preparações entre o armazenamento de dois produtos distintos e, assim como para as unidades produtivas, o tempo dessa preparação depende da sequência dos produtos a serem armazenados.

Um produto que não tiver sido produzido em quantidade suficiente para atender suas demandas internas (requerida por tarefas) ou suas demandas externas (requeridas pelos clientes) é considerado um produto com atraso em sua produção. Esse produto pode ser produzido em um período posterior para que sua demanda seja atendida com atraso ou pode não ser produzido e deixar de atender a demanda dos clientes.

Apesar dessas características comuns ao estudo realizado no Capítulo 2, o problema abordado neste capítulo difere do anterior ao considerar duas características pouco exploradas pela comunidade de pesquisa operacional, mas que é comumente observada em problemas da indústria de processos: bateladas com quantidade produzida flexível e tarefas que produzem mais de um produto.

Os problemas de dimensionamento de lotes com bateladas geralmente representam a produção dessas bateladas como variáveis inteiras. A partir dessas variáveis, a quantidade total produzida é obtida ao multiplicá-las por um parâmetro que corresponde à quantidade total produzida por uma batelada. Contudo, problemas da indústria de processos podem ser flexíveis quanto à quantidade total produzida por uma batelada. A Figura 19a ilustra um exemplo em que a tarefa r_1 pode ser produzida na unidade produtiva m_1 e a quantidade produzida pode variar entre uma quantidade mínima e uma quantidade máxima definida de acordo com parâmetro Δ .

A indústria de processos aborda várias situações em que uma única tarefa pode produzir diversos produtos. A Figura 19b ilustra um exemplo em que a tarefa r_1 produz n produtos, de

Figura 18 – O tempo de preparação depende da ordem das tarefas produtivas.

Figura 19 – Características de problemas pouco exploradas pela comunidade OR.

j_1 a j_n . Por outro lado, problemas de dimensionamento de lotes costumam assumir que tarefas produtivas produzem um único produto, visto que em geral suas formulações matemáticas são propostas considerando diretamente produtos. Ainda assim existem trabalhos da comunidade de pesquisa operacional que também abordam essa característica. [Luche, Morabito e Pureza \(2009\)](#) tratam um problema sobre grãos eletrofundidos em que a qualidade da reação está diretamente relacionada à proximidade da matéria-prima com a condução de eletricidade, logo durante o processamento são produzidos diferentes produtos por lote, e [Furlan et al. \(2015\)](#) trata um problema sobre a produção de papel e celulose em que o digestor produz dois produtos, a polpa de celulose virgem e o licor negro fraco.

3.3 Modelos Matemáticos da Literatura

Esta seção descreve duas formulações clássicas utilizadas na literatura para a resolução de problemas de sequenciamento da produção. O primeiro modelo foi proposto pela comunidade de pesquisa operacional, enquanto o segundo foi proposto pela comunidade de engenharia de sistemas de processos.

3.3.1 Função Objetivo

A função objetivo considera o atraso na entrega dos produtos j ($j \in \{1, \dots, J\}$) por todos os períodos t ($t \in \{1, \dots, T\}$) do horizonte de planejamento.

3.3.1.1 Parâmetros

c custo de penalização para produtos com atraso nas entregas.

3.3.1.2 Variáveis contínuas

$\Omega_{\max}$ tempo de finalização da última tarefa;

$B_{j,t}$ atraso na entrega do produto j no período t .

$$\min \quad \Omega_{\max} + c \cdot \sum_j \sum_t B_{j,t} \quad (3.1)$$

A função objetivo, representada (3.1), busca minimizar o tempo de finalização da última tarefa (*makespan*), enquanto penaliza o atraso nas entregas através da constante c .

3.3.2 Modelo de Pesquisa Operacional

O modelo de dimensionamento de lotes com preparação contínua (CSLP) pode ser definido da seguinte forma. Um conjunto de tarefas r ($r \in \{1, \dots, R\}$) utilizam unidades produtivas

m ($m \in \{1, \dots, M\}$) para produzirem produtos j ($j \in \{1, \dots, J\}$), os quais são posteriormente armazenados em tanques multiprodutos k ($k \in \{1, \dots, Q\}$). O horizonte de planejamento é finito e composto por períodos t ($t \in \{1, \dots, T\}$). A seguir são apresentados os parâmetros e as variáveis contínuas e binárias consideradas no modelo.

3.3.2.1 Parâmetros

$a_{r,m}$	tempo de processamento da tarefa r , na unidade produtiva m ;
CAP_t	tempo de processamento disponível no período t ;
$b_{r',r,m}^P$	tempo de preparação da tarefa r' para a tarefa r na unidade produtiva m ;
$d_{j,t}$	demanda do produto j no período t ;
$g_{r,m}$	quantidade mínima da batelada da tarefa r produzida na unidade produtiva m ;
$h_{r,m}$	quantidade máxima da batelada da tarefa r produzida na unidade produtiva m ;
$e_{j,r,m}$	quantidade produzida do produto j pela tarefa r na unidade produtiva m ;
$f_{j,k,m}$	quantidade consumida do produto j pela tarefa r na unidade produtiva m ;
I_j^{DT}	capacidade máxima dos tanques dedicados ao produto j ;
I_k^{MT}	capacidade máxima do tanque multiproduto k ;
$\mathcal{I}_j^{DT}$	estoque inicial, nos tanques dedicados, do produto j ;
$\mathcal{I}_{j,k}^{MT}$	estoque inicial do produto j no tanque multiproduto k ;
$\mathcal{Y}_{r,m}^P$	estado inicial da tarefa r na unidade produtiva m ;
$\mathcal{Y}_{j,k}^S$	estado inicial do produto j no tanque multiproduto k .

3.3.2.2 Variáveis contínuas

$\Omega_{\max}$	tempo de finalização da última tarefa;
$B_{j,t}$	atraso na entrega do produto j no período t ;
$Q_{r,m,t}^P$	quantidade produzida pela tarefa r na unidade produtiva m no período t ;
$I_{j,t}$	estoque do produto j no período t ;
$I_{j,t}^{DT}$	estoque do produto j , em tanque dedicado, no período t ;
$I_{j,k,t}^{MT}$	estoque do produto j armazenado no tanque k no período t .

3.3.2.3 Variáveis binárias

$X_{r',r,m,t}^P$	preparação da tarefa r' para a tarefa r na unidade produtiva m iniciando no período t ;
$X_{j',j,k,t}^S$	preparação do produto j' para o produto j no tanque k iniciando no período t ;
$Y_{r,m,t}^P$	indica se a unidade produtiva m está designada à tarefa r no início do período t ;
$Y_{j,k,t}^S$	indica se o tanque k está designado ao produto j no início do período t ;
$W_{r,m,t}^P$	indica se a tarefa r está apta a ocorrer na unidade produtiva m no início do período t ;
$W_{j,k,t}^S$	indica se o produto j está apto a utilizar o tanque k no início do período t ;
$Z_{r,m,t}^P$	indica se uma batelada da tarefa r é iniciada na unidade produtiva m no período t .

Figura 20 – CSLP pode apresentar ociosidade indesejada em problemas de produção por batelada.

O modelo CSLP assume que no máximo uma tarefa pode ser realizada por período em cada unidade produtiva. Sendo assim, esse modelo pode apresentar períodos de ociosidade indesejados quando utilizado para tratar problemas com produção por batelada em que o tempo de processamento de todas as tarefas não sejam iguais. A Figura 20 ilustra uma situação em que as tarefas r_1 e r_2 são produzidas na unidade m_1 . Durante os períodos t_1 a t_3 , a tarefa r_1 utiliza a unidade produtiva de forma contínua, mesmo que no período t_3 a capacidade total do equipamento não tenha sido utilizada. Já no período t_4 há uma preparação e a produção de uma batelada da tarefa r_2 . Porém, a tarefa r_2 não possui duração suficiente para utilizar os t_5 e t_6 completamente, o que resulta em momentos de ociosidade.

3.3.2.4 Restrições do CSLP

$$t \cdot Z_{r,m,t}^P \leq \Omega_{\max}, \quad \forall r, m, t \quad (3.2)$$

$$a_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P + \sum_{r'} (b_{r',r,m}^P \cdot X_{r',r,m,t}^P) \leq CAP_t \cdot Y_{r,m,t}^P, \quad \forall r, m, t \quad (3.3)$$

$$\sum_r Y_{r,m,t}^P = 1, \quad \forall m, t \quad (3.4)$$

$$Y_{r',m,t-1}^P + Y_{r,m,t}^P - 1 \leq X_{r',r,m,t}^P, \quad \forall r, r' \neq r, m, t \quad (3.5)$$

$$Y_{r,m,0}^P = \mathcal{Y}_{r,m}^P, \quad \forall r, m \quad (3.6)$$

$$g_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P \leq Q_{r,m,t}^P \leq h_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P, \quad \forall r, m, t \quad (3.7)$$

$$I_{j,t-1} + \sum_r \sum_m (e_{j,r,m} \cdot Q_{r,m,t-1}^P - f_{j,r,m} \cdot Q_{r,m,t}^P) - B_{j,t-1} = d_{j,t} - B_{j,t} + I_{j,t}, \quad \forall j, t \quad (3.8)$$

$$I_{j,t} = I_{j,t-1}^{DT} + \sum_r I_{j,r,t-1}^{MT}, \quad \forall j, t \quad (3.9)$$

$$I_{j,t}^{DT} \leq l_j^{DT}, \quad \forall j, t \quad (3.10)$$

$$I_{j,k,t}^{MT} \leq l_k^{MT} \cdot (Y_{j,k,t}^S - \sum_{j'} X_{j',j,k,t}^S), \quad \forall j, k, t \quad (3.11)$$

$$I_{j,0}^{DT} = \mathcal{I}_j^{DT}, \quad \forall j \quad (3.12)$$

$$I_{j,k,0}^{MT} = \mathcal{I}_{j,k}^{MT}, \quad \forall j, k \quad (3.13)$$

$$\sum_j Y_{j,k,t}^S = 1, \quad \forall k, t \quad (3.14)$$

$$Y_{j',k,t-1}^S + Y_{j,k,t}^S - 1 \leq X_{j',j,k,t}^S, \quad \forall j, j' \neq j, k, t \quad (3.15)$$

$$Y_{j,k,0}^S = \mathcal{Y}_{j,k}^S, \quad \forall j, k \quad (3.16)$$

As restrições (3.2) garantem que o tempo total do planeamento é maior ou igual ao tempo de finalização da última tarefa. Já as restrições (3.3) asseguram que o tempo de processamento mais o tempo de preparação não excedam o tempo disponível do período. As restrições (3.4) definem que em cada período as unidades de produção devem estar designadas a uma única tarefa, enquanto as restrições (3.5) controlam a troca entre duas tarefas distintas. As preparações iniciais de cada unidade produtiva são definidas de acordo com as restrições (3.6). A quantidade total produzida por cada batelada é estabelecida pelas restrições (3.7), enquanto a quantidade produzida de cada produto por essa batelada é controlada pelas restrições (3.8).

As restrições (3.9) agregam o estoque por produto dos tanques dedicados e dos tanques multiprodutos. O limite de estoque dos tanques dedicados é definido pelas restrições (3.10), enquanto as restrições (3.11) limitam o estoque dos produtos nos tanques multiprodutos apenas quando esses estiverem designados aos primeiros ($Y_{j,m,t}^S - \sum_{j'} X_{j',j,m,t}^S$). As restrições (3.12) e (3.13) definem o estoque inicial dos tanques dedicados e multiprodutos, respectivamente.

As restrições (3.14) definem que em cada período os tanques multiprodutos devem estar designados a um único produto. Já as restrições (3.15) controlam a troca de dois produtos distintos que utilizam o mesmo tanque sequencialmente. Por fim, as restrições (3.16) definem as preparações iniciais de cada tanque multiproduto.

3.3.3 Modelo de Engenharia de Sistemas de Processo

O modelo *Resource-Task-Network* é uma metodologia genérica uniforme de representação de problemas, proposta por Pantelides (1994), que basicamente utiliza apenas os conceitos de recursos e de tarefas. Os recursos podem ser classificados como: não renováveis, os quais deixam de existir após serem utilizados (matérias-primas, produtos intermediários, mão de obra, entre outros), e renováveis, os quais tornam-se novamente disponíveis após a utilização (equipamentos, depósitos, centros de distribuição, entre outros). Já as tarefas são operações abstratas que consomem e/ou produzem um conjunto predefinido de recursos.

Um exemplo gráfico de recursos e tarefas que compõem um diagrama RTN é ilustrado pela Figura 21a. Os recursos (r^1) são representados por círculos, as tarefas (k) são representadas por retângulos e as relações de consumo / produção, por setas. A situação representada nessa figura é composta por uma unidade produtiva, duas tarefas de produção, dois produtos, duas tarefas de armazenamento e um tanque de armazenamento multiproduto. Os recursos r_1 e r_2 representam a mesma unidade produtiva, porém, r_1 corresponde à unidade preparada para a

¹ Note que apenas para a formulação RTN optou-se por manter os índices de recursos (r) e tarefas (k) comumente utilizados na literatura clássica. Nas formulações, figuras e diagramas das demais subseções foram utilizados os índices de forma semelhante ao demais capítulos desta tese.

Figura 21 – Exemplo de uma representação por diagramas RTN.

tarefa k_1 , enquanto r_2 para a tarefa k_2 . Portanto, como existe apenas uma unidade produtiva, caso haja um recurso r_1 não haverá recurso r_2 e caso haja um recurso r_2 não haverá recurso r_1 . A transição entre os recursos r_1 e r_2 é realizada pelas tarefas k_5 e k_6 . A tarefa k_5 consome uma unidade do recurso r_2 e produz uma unidade do recurso r_1 , ou seja, essa tarefa realiza uma atividade denominada preparação. Por outro lado, a tarefa k_6 consome uma unidade do recurso r_1 e produz uma unidade do recurso r_2 .

A tarefa k_1 requer uma unidade do recurso r_1 para ser iniciada. Ao final do seu processo ela produz novamente uma unidade do recurso r_1 e uma batelada do recurso r_3 , que representa um produto. Os recursos renováveis, como r_1 e r_2 são sempre consumidos e produzidos em quantidades unitárias, enquanto que os recursos não renováveis, como r_3 e r_4 , podem ser consumidos e produzidos em quantidades arbitrárias, limitados a intervalos previamente definidos. Os recursos r_5 e r_6 representam o mesmo tanque de armazenamento multiproduto e, assim como para a unidade produtiva, cada um corresponde a uma preparação distinta para armazenar recursos diferentes (r_3 e r_4) e a transição entre eles depende de tarefas de preparação (k_7 e k_8).

O número de tarefas de preparação pode crescer rapidamente, visto que uma unidade capaz de processar n tarefas produtivas ou um tanque capaz de armazenar n produtos requerem $n \times (n - 1)$ tarefas de preparação. Para contornar essa limitação, os recursos replicados e as ligações entre suas tarefas foram representadas de forma reduzida por apenas um único recurso com linhas tracejadas, facilitando a visualização da estrutura relacional dos dados. Dessa forma, os recursos r_1 e r_2 e as tarefas k_5 e k_6 da Figura 21a são representados apenas como o recurso r_1 da Figura 21b.

3.3.3.1 Subconjuntos

- $\mathbb{K}$ tarefas produtivas;
 $\mathbb{R}^k$ unidades produtivas (recursos) usadas pela tarefa k .

3.3.3.2 Parâmetros

- a_k tempo de processamento da tarefa k ;
 $\mu_{k,r,t}$ coeficiente dos recursos renováveis r produzido/consumido pela tarefa k que inicia no período t ;
 $\nu_{k,r,t}$ coeficiente dos recursos não-renováveis r produzido/consumido pela tarefa k que inicia no período t ;
 $\pi_{r,t}$ quantidade do recurso r recebida/entregue no período t ;
 $r_r^{\max}$ disponibilidade máxima do recurso r ;
 $v_{k,r}^{\min}$ quantidade mínima da tarefa k no recurso r ;
 $v_{k,r}^{\max}$ quantidade máxima da tarefa k no recurso r .

3.3.3.3 Variáveis contínuas

- $\Omega_{\max}$ tempo de finalização da última tarefa;
 $B_{j,t}$ atraso na entrega do produto j no período t ;
 $R_{r,t}$ quantidade do recurso r disponível no período t ;
 $\xi_{k,t}$ tamanho da batelada da tarefa k no período t .

3.3.3.4 Variáveis binárias

- $N_{k,t}$ tarefa k inicia no período t .

Figura 22 – O modelo RTN pode evitar períodos ociosos nos problemas com produção por batelada.

O modelo RTN assume que o tempo de processamento das tarefas não deve ser menor do que a duração dos períodos. Dessa forma, esse modelo evita ociosidades indesejadas quando utilizado para tratar problemas de bateladas. A Figura 22 ilustra a mesma situação apresentada na Subseção 3.3.2, entretanto, para o modelo RTN a duração dos períodos é menor. Então durante os períodos t_1 a t_3 , apenas a primeira batelada da tarefa k_1 é produzida. Já os períodos de t_4 a t_9 são necessários para produzir as outras duas bateladas de k_1 . Uma operação de preparação ocorre durante o período t_{10} e as três bateladas da tarefa k_2 utilizam os períodos t_{11} a t_{16} , permitindo que os períodos t_{17} e t_{18} possam ser utilizados por outras tarefas, evitando momentos de ociosidade.

3.3.3.5 Restrições do RTN

$$(t + a_k - 1) \cdot N_{k,t} \leq \Omega_{\max}, \quad \forall k \in \mathbb{K}, t \quad (3.17)$$

$$R_{r,t+1} = R_{r,t} + \sum_k \sum_{\theta=0}^{\tau_k} (\mu_{k,r,\theta} \cdot N_{k,t-\theta} + v_{k,r,\theta} \cdot \xi_{k,t-\theta}) + \pi_{r,t} - B_{r,t-1} + B_{r,t}, \quad \forall r, t \quad (3.18)$$

$$0 \leq R_{r,t} \leq r_{r,t}^{\max}, \quad \forall r, t \quad (3.19)$$

$$v_{k,r}^{\min} \cdot N_{k,t} \leq \xi_{k,t} \leq v_{k,r}^{\max} \cdot N_{k,t}, \quad \forall k, r \in \mathbb{R}^k, t \quad (3.20)$$

As restrições (3.17) garantem que o tempo total do planejamento é maior ou igual ao tempo de finalização da última tarefa. As tarefas são caracterizadas por um par de variáveis $(N_{k,t}, \xi_{k,t})$, em que $N_{k,t}$ é uma variável binária e $\xi_{k,t}$, contínua. A primeira indica se a tarefa k inicia no período t , enquanto a última representa a quantidade total de recursos processada nessa tarefa. Sendo assim, as restrições (3.18) controlam a disponibilidade dos recursos considerando a quantidade produzida/consumida pelas tarefas, a quantidade entregue para atender a demanda e eventuais aquisições. A parcela $\mu_{k,r,\theta} \cdot N_{k,t-\theta}$ controla a quantidade de recursos renováveis, enquanto $v_{k,r,\theta} \cdot \xi_{k,t-\theta}$ controla a quantidade de recursos não renováveis consumida ($v_{k,r,\theta} < 0$) ou produzida ($v_{k,r,\theta} > 0$) e, por fim, $\pi_{r,t}$ controla a quantidade de expansão/retração de recursos renováveis ou a venda / aquisição de recursos renováveis no período t . As restrições (3.19) limitam a quantidade máxima dos recursos disponíveis, visto que a variável $R_{r,t}$ representa a quantidade do recurso r em excesso durante o período t , isto é, a quantidade que não foi envolvida em nenhuma tarefa. Por fim, as restrições (3.20) limitam o tamanho mínimo e máximo das bateladas de cada tarefa.

3.3.4 Experimentos Computacionais

Vários experimentos computacionais foram realizados para comparar os modelos, cada um considerando diferentes estruturas de tarefas. Esta seção inicia descrevendo os dados utilizados nos testes e conclui analisando os resultados obtidos.

Os experimentos computacionais foram realizados no pacote de otimização CPLEX 12.6, em um servidor cujos nós eram compostos por dois processadores Intel Xeon E5-2680 v2 2.8

GHz, cada um com 10 núcleos e 128 GB de memória RAM. Portanto, dez instâncias foram executadas simultaneamente por processador com os seguintes parâmetros: 3600 segundos de tempo limite, 8 *threads* e 24GB de memória para a árvore *branch and cut*.

3.3.4.1 Conjunto de Instâncias

Os experimentos computacionais desta etapa são compostos por duas classes, denominadas classe 1 e classe 2, as quais foram baseadas na estrutura de produtos proposta por Tempelmeier e Buschkühl (2009). A classe 1 é ilustrada pela Figura 23, enquanto a classe 2 está representada no Apêndice B.

A classe 1 possui três unidades produtivas (m_1 a m_3), as quais são utilizadas por sete tarefas de produção (r_1 a r_7) para produzirem sete produtos distintos (j_1 a j_7), apenas um para cada tarefa. Esses produtos competem por seis tanques multiprodutos através de suas tarefas de armazenamento (r_8 a r_{49}). Note que existem seis tarefas de armazenamento para cada produto, logo r_8 relaciona o tanque k_1 ao produto j_1 , r_9 relaciona o tanque k_2 ao produto j_1 e assim sucessivamente. O tempo de processamento de todas as tarefas produtivas é constante e equivale a uma unidade de tempo. O horizonte de planejamento foi dividido em 1, 4, 8 e 12 períodos, variando de 32 até 288 unidades de tempo.

Figura 23 – Representação da classe 1 por diagramas RTN.

Foram consideradas situações em que o armazenamento dos produtos poderia ocorrer apenas em tanques dedicados, apenas em tanques multiprodutos, ou em tanques dedicados e multiprodutos, simultaneamente. Além disso, foram consideradas situações em que não havia preparação nas unidades produtivas nem nos tanques de armazenamento e situações em que foram considerados tempo de preparação, totalizando 72 instâncias para cada classe.

3.3.4.2 Análise dos Resultados

A primeira análise comparativa entre os modelos matemáticos CSLP e RTN considera o número médio de variáveis binárias, de variáveis contínuas e de restrições, conforme exibido na Tabela 5. O modelo CSLP possui apenas cerca de 8% do número total de variáveis binárias e 49% de variáveis contínuas quando comparado ao modelo RTN para as classes 1 e 2. Por outro lado, o modelo CSLP possui aproximadamente 64% e 149% de restrições a mais do que o modelo RTN, respectivamente para as classes 1 e 2. Sendo assim, ainda não é possível obter conclusões sobre a qualidade das formulações matemáticas.

Tabela 5 – Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos CSLP e RTN.

		Variáveis Binárias	Variáveis Contínuas	Restrições
Classe 1	CSLP	9.180,5	54.510,0	34.873,0
	RTN	97.072,5	111.879,7	21.213,5
	Proporção	9,46%	48,72%	164,39%
Classe 2	CSLP	16.340,0	141.081,0	99.373,0
	RTN	261.870,0	289.497,7	39.980,0
	Proporção	6,24%	48,73%	248,56%

Ao analisar as soluções obtidas pelo pacote de otimização empregando os dois modelos, é possível classificá-las como soluções com atraso na entrega de produtos, soluções factíveis ou soluções ótimas. A Tabela 6 apresenta um resumo de todas as soluções. O modelo RTN foi capaz de proporcionar a obtenção do maior número de soluções factíveis, em que não houve atraso na entrega, assim como o maior número de soluções ótimas para ambas as classes. Consequentemente, o modelo CSLP acabou apresentando o maior número de soluções com atraso, o que pode ser considerado um indício de que o modelo RTN possui melhor desempenho.

Uma análise mais detalhada com relação às características consideradas na geração dos cenários das instâncias pode permitir conclusões mais precisas. Sendo assim, a Figura 24 apresenta gráficos que exibem a quantidade de instâncias em que cada modelo obteve a melhor solução após os experimentos computacionais. Para as instâncias em que os tanques são dedicados e não há tempo de preparação, Figura 24a, ambos modelos obtiveram as mesmas soluções para as duas classes, porém, quando há presença de tempo de preparação, Figura 24b, o modelo RTN

(a) Tanques dedicados sem preparação

(b) Tanques dedicados com preparação

(c) Tanques dedicados e multiprodutos sem preparação

(d) Tanques dedicados e multiprodutos com preparação

(e) Tanques multiprodutos sem preparação

(f) Tanques multiprodutos com preparação

Figura 24 – Quantidade de melhores soluções obtidas utilizando os modelos CSLP e RTN.

obteve melhores soluções para 41,6% das instâncias da classe 2, que é computacionalmente mais difícil de ser resolvida.

Ao ser permitido a utilização de tanques multiprodutos, a dificuldade de resolução das instâncias aumenta, devido ao número de combinações possíveis de armazenamento dos produtos

Tabela 6 – Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos CSLP e RTN para as classes 1 e 2.

	CSLP			RTN		
	Com atraso	Factível	Ótima	Com atraso	Factível	Ótima
Classe 1	20	52	46	11	61	54
Classe 2	32	40	30	22	50	43

Tabela 7 – GAPs e tempos médios dos testes para os modelos CSLP e RTN.

	GAP médio (%)		Tempo médio (s)	
	CSLP	RTN	CSLP	RTN
Classe 1	1,09%	0,07%	616,9	277,8
Classe 2	3,36%	2,35%	1196,1	632,3

nesses tanques. Assim, apesar do modelo RTN obter a melhor solução por mais vezes, o modelo CSLP foi capaz de encontrar a melhor solução em 4,2% das instâncias quando não há tempo de preparação, Figura 24c, e em 8,3% das instâncias quando há presença de tempo de preparação, Figura 24d. Por fim, quando são considerados os cenários em que existem apenas tanques de armazenamento multiprodutos, o modelo CSLP proporcionou a obtenção da melhor solução em 16,7% e 25,0% das instâncias, respectivamente para instâncias em que não há e há presença de tempo de preparação, como pode ser observado nas Figuras 24e e 24f. Portanto, é necessário análises adicionais para avaliar o desempenho de ambos modelos para esse cenário.

A partir do momento que são considerados apenas cenários em que os dois modelos proporcionaram a obtenção de soluções factíveis, nota-se a superioridade do modelo RTN tanto com relação aos GAPs² de solução, como aos tempo médios de execução, conforme apresentado pela Tabela 7. O modelo CSLP permitiu a obtenção da melhor solução em apenas 2,1% das instâncias em que o modelo RTN também havia encontrado soluções factíveis. Já a Tabela 8 apresenta o número médio de períodos necessários para finalizar todas as tarefas. Mais uma vez é possível notar que o modelo RTN proporciona os menores tempos médios de processamento para ambas as classes utilizadas nos testes. Por fim, em 9,0% de todas as instâncias consideradas nos experimentos computacionais desta seção, apenas o modelo RTN foi capaz de encontrar soluções factíveis, porém o oposto não foi observado.

Tabela 8 – Tempo médio de finalização das tarefas, considerando apenas instâncias em que o CSLP e o RTN permitiram a obtenção de soluções factíveis.

	CSLP	RTN
Classe 1	100,6	97,3
Classe 2	92,4	90,8

Dessa forma, pode-se concluir que o modelo RTN obteve melhor desempenho em termos de qualidade de solução, mesmo quando utilizado em instâncias desenvolvidas especificamente para não impossibilitar a utilização do modelo CSLP, com todas as tarefas apresentando tempo de processamento constante. Entretanto, o baixo número de variáveis binárias e contínuas necessárias para a formulação matemática do modelo CSLP, quando comparado ao modelo RTN,

² Neste trabalho assumiu-se a seguinte definição, $GAP = \frac{\text{Solução factível} - \text{Limitante inferior}}{\text{Solução factível}}$

indica uma direção promissora para que sua formulação seja estendida de forma a incorporar algumas características presentes no outro modelo.

3.4 Modelo Matemático Proposto

3.4.1 Índices, parâmetros e variáveis

O modelo de dimensionamento de lotes com preparação contínua em microperíodos (CSLP-MP) pode ser definido da seguinte forma. Um conjunto de tarefas $r \in \{1, \dots, R\}$ utilizam unidades produtivas $m \in \{1, \dots, M\}$ para produzirem produtos $j \in \{1, \dots, J\}$, os quais são posteriormente armazenados em tanques multiprodutos $k \in \{1, \dots, K\}$. O horizonte de planejamento é finito e composto por períodos $t \in \{1, \dots, T\}$, menores ou iguais à duração das tarefas. A seguir são apresentados os parâmetros e as variáveis contínuas e binárias consideradas no modelo.

3.4.1.1 Parâmetros

$a_{r,m}$	número de períodos necessários para processar a tarefa r , na unidade produtiva m ;
$b_{r',r,m}^P$	tempo de preparação da tarefa r' para a tarefa r na unidade produtiva m ;
$b_{j',j,k}^S$	tempo de preparação do produto j' para o produto j no tanque k ;
$d_{j,t}$	demanda do produto j no período t ;
$g_{r,m}$	quantidade mínima da batelada da tarefa r produzida na unidade produtiva m ;
$h_{r,m}$	quantidade máxima da batelada da tarefa r produzida na unidade produtiva m ;
$e_{j,r,m}$	quantidade produzida do produto j pela tarefa r na unidade produtiva m ;
$f_{j,r,m}$	quantidade consumida do produto j pela tarefa r na unidade produtiva m ;
l_j^{DT}	capacidade máxima dos tanques dedicados ao produto j ;
l_k^{MT}	capacidade máxima do tanque multiproduto k ;
$\mathcal{I}_j^{DT}$	estoque inicial, nos tanques dedicados, do produto j ;
$\mathcal{I}_{j,k}^{MT}$	estoque inicial do produto j no tanque multiproduto k ;
$\mathcal{Y}_{r,m}^P$	estado inicial da tarefa r na unidade produtiva m ;
$\mathcal{Y}_{j,k}^S$	estado inicial do produto j no tanque multiproduto k ;
τ_r	número de períodos para completar a tarefa r .

3.4.1.2 Variáveis contínuas

$B_{j,t}$	atraso na entrega do produto j no período t ;
$Q_{r,m,t}^P$	quantidade produzida pela tarefa r na unidade produtiva m no período t ;
$I_{j,t}$	estoque do produto j no período t ;
$I_{j,t}^{DT}$	estoque do produto j , em tanque dedicado, no período t ;
$I_{j,k,t}^{MT}$	estoque do produto j armazenado no tanque k no período t .

3.4.1.3 Variáveis binárias

$X_{r',r,m,t}^P$	preparação da tarefa r' para a tarefa r na unidade produtiva m iniciando no período t ;
$X_{j',j,k,t}^S$	preparação do produto j' para o produto j no tanque k iniciando no período t ;
$Y_{r,m,t}^P$	tarefa r designada à unidade produtiva m no início do período t ;
$Y_{j,k,t}^S$	produto j designado ao tanque k no início do período t ;
$W_{r,m,t}^P$	tarefa r está apta a produzir na unidade produtiva m no início do período t ;
$W_{j,k,t}^S$	produto j está apto a utilizar o tanque k no início do período t ;
$Z_{r,m,t}^P$	uma batelada da tarefa r iniciada na unidade produtiva m no período t .

3.4.2 Restrições do modelo CSLP-MP

O modelo de dimensionamento de lotes com preparação contínua e micro-períodos foi proposto com o objetivo de estender o modelo CSLP ao mesmo tempo que considera características das divisões de períodos do modelo RTN, visando evitar ociosidades. Sua função objetivo é dada por (3.1), assim como nos dois primeiros modelos apresentados anteriormente.

A Figura 25 ilustra como três variáveis binárias controlam o planejamento da produção. As variáveis $Y_{r,m,t}^P$ assumem valor 1 assim que a unidade produtiva inicia a troca para uma nova tarefa, ou seja, durante todos os períodos em que ela estiver valendo 1, a unidade produtiva m encontra-se designada à tarefa r . Isso acontece três vezes na figura, do período t_1 a t_6 e t_{13} a t_{16} (tarefa r_1), e do período t_7 a t_{12} (tarefa r_2). Já as variáveis $W_{r,m,t}^P$ assumem o valor 1 assim que o equipamento estiver preparado para a tarefa, logo do período t_3 ao t_6 e do t_{15} ao t_{16} o equipamento está apto a produzir a tarefa r_1 , enquanto do período t_9 ao t_{12} ele está apto a produzir a tarefa r_2 . Por fim, a variável $Z_{r,m,t}^P$ assume valor 1 no início de cada período produtivo, ou seja, nos períodos t_3 , t_5 e t_{15} para a tarefa r_1 e nos períodos t_9 e t_{11} para a tarefa r_2 .

	t_1	t_3	t_5	t_7	t_9	t_{11}	t_{13}	t_{15}	
$Y_{1,1,-}^P$	1	1	1	1	1		1	1	m_1
$W_{1,1,-}^P$		1	1	1	1			1	
$Z_{1,1,-}^P$		1	1					1	
	r_1	r_1	r_1	r_2	r_2	r_2	r_1	r_1	
$Y_{2,1,-}^P$				1	1	1	1		
$W_{2,1,-}^P$					1	1	1	1	
$Z_{2,1,-}^P$					1	1			

Figura 25 – Variáveis binárias que representam os processos produtivos.

3.4.2.1 Finalização da última tarefa

$$(t + a_{r,m} - 1) \cdot Z_{r,m,t}^P \leq \Omega_{\max}, \quad \forall r, m, t \quad (3.21)$$

As restrições (3.21) definem que a variável $\Omega_{\max}$ deve ser maior ou igual do que o tempo de finalização da última tarefa. Caso a variável $Z_{r,m,t}^P$ possua valor igual a 1, então uma batelada da tarefa r foi iniciada na unidade produtiva m no período t . Dessa forma, o tempo de finalização da tarefa r é dado por $(t + a_{r,m} - 1)$. Sendo assim, como $\Omega_{\max}$ deve ser maior ou igual ao tempo de finalização de todas as tarefas produtivas, isso também é válido para a última tarefa finalizada.

3.4.2.2 Planejamento da produção

$$a_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P \leq \sum_{\theta=t}^{t+a_{r,m}-1} W_{r,m,\theta}^P, \quad \forall r, m, t \quad (3.22)$$

$$g_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P \leq Q_{r,m,t+a_{r,m}-1}^P \leq h_{r,m} \cdot Z_{r,m,t}^P, \quad \forall r, m, t \quad (3.23)$$

$$\sum_{\theta=t}^{t+a_{r,m}-1} Z_{r,m,\theta}^P \leq 1, \quad \forall r, m, t \quad (3.24)$$

As restrições (3.22) asseguram que a ocorrência de uma tarefa r na unidade produtiva m , com início no período t , requer $a_{r,m}$ períodos consecutivos até sua finalização. Já as restrições (3.23) controlam a quantidade total produzida e disponibilizada no período $t + a_{r,m} - 1$, a partir de uma batelada da tarefa r com início de processamento no período t . Por fim, as restrições (3.24) garantem que durante todos os períodos de processamento de uma tarefa nenhuma outra pode ser alocada na mesma unidade produtiva.

3.4.2.3 Sequenciamento da produção

$$Y_{r',m,t}^P + Y_{r,m,t+1}^P - 1 \leq X_{r',r,m,t+1}^P, \quad \forall r, r' \neq r, m, t \quad (3.25)$$

$$b_{r',r,m}^P - \sum_{\theta=t}^{t+b_{r',r,m}^P-1} W_{r,m,\theta}^P \geq b_{r',r,m}^P \cdot X_{r',r,m,t}^P, \quad \forall r, r' \neq r, m, t \quad (3.26)$$

$$\sum_r Y_{r,m,t}^P = 1, \quad \forall m, t \quad (3.27)$$

$$W_{r,m,t}^P \leq Y_{r,m,t}^P, \quad \forall r, m, t \quad (3.28)$$

$$Y_{r,m,1}^P = \mathcal{Y}_{r,m}^P, \quad \forall r, m \quad (3.29)$$

As restrições (3.25) controlam a troca da alocação de uma unidade produtiva da tarefa r' para a tarefa r , do período t para o período $t + 1$. Já as restrições (3.26) controlam a disponibilidade da unidade produtiva m para produzir a tarefa r , ou seja, elas proíbem que uma tarefa produtiva

seja iniciada enquanto ela não estiver apta para ser processada ($W_{r,m,t}^P = 0$). As restrições (3.27) garantem que em cada período as unidades produtivas devem estar alocadas para uma única tarefa. Já as restrições (3.28) garantem que uma unidade produtiva está disponível para produzir uma tarefa apenas se ela estiver designada a essa tarefa. Por fim, as restrições (3.29) definem a preparação inicial para as unidades produtivas.

3.4.2.4 Planejamento de estoque

$$I_{j,t} + \sum_r \sum_m \left(e_{j,r,m} \cdot Q_{r,m,t-1}^P - f_{j,r,m} \cdot Q_{r,m,t+a_{r,m}-1}^P \right) + B_{j,t} = B_{j,t-1} + d_{j,t} + I_{j,t+1}, \quad \forall j, t \quad (3.30)$$

$$I_{j,t} = I_{j,t-1}^{DT} + \sum_r I_{j,r,t-1}^{MT}, \quad \forall j, t \quad (3.31)$$

$$I_{j,t}^{DT} \leq l_j^{DT}, \quad \forall j, t \quad (3.32)$$

$$I_{j,r,t}^{MT} \leq l_r^{MT} \cdot W_{j,r,t}^S, \quad \forall j, t \quad (3.33)$$

$$I_{j,0}^{DT} = \mathcal{I}_j^{DT}, \quad \forall j \quad (3.34)$$

$$I_{j,r,0}^{MT} = \mathcal{I}_{j,r}^{MT}, \quad \forall j, r \quad (3.35)$$

As restrições (3.30) controlam os estoques dos produtos. Portanto, a soma do estoque de j no início do período t , com a quantidade produzida no final do período $t - 1$, menos a quantidade consumida por outras tarefas produtivas durante o período t , mais o quanto não estiver disponível no período t deve ser igual à quantidade de j que não estava disponível no período $t - 1$ mais a sua demanda no período t e mais o seu estoque ao final de t . Já as restrições (3.31) garantem que todo o estoque deve estar armazenado em tanques dedicados ou tanques multiprodutos. As restrições (3.32) definem o estoque máximo permitido em tanques dedicados, enquanto as restrições (3.33) limitam o estoque máximo em tanques multiprodutos, porém apenas quando esses tanques estão disponíveis para o produto j . Por fim, as restrições (3.34) e (3.35) definem o estoque inicial em tanques dedicados e multiprodutos, respectivamente.

3.4.2.5 Sequenciamento do armazenamento

$$Y_{j',k,t-1}^S + Y_{j,k,t}^S - 1 \leq X_{j',j,k,t}^S, \quad \forall j, j' \neq j, k, t \quad (3.36)$$

$$b_{j',j}^S - \sum_{\theta=t}^{t+b_{j',j}^S-1} W_{j,k,\theta}^S \geq b_{j',j}^S \cdot X_{j',j,k,t}^S, \quad \forall j, j' \neq j, k, t \quad (3.37)$$

$$\sum_j Y_{j,k,t}^S = 1, \quad \forall k, t \quad (3.38)$$

$$W_{j,k,t}^S \leq Y_{j,k,t}^S, \quad \forall j, k, t \quad (3.39)$$

$$Y_{j,k,0}^S = \mathcal{Y}_{j,k}^S, \quad \forall j, k \quad (3.40)$$

As restrições (3.36) controlam a troca da alocação de um tanque de armazenamento multiproduto do produto j' para o produto j , do período $t - 1$ para o período t . Já as restrições (3.37)

controlam a disponibilidade do tanque de armazenamento multiproduto k para armazenar o produto j , ou seja, elas proíbem que um produto seja armazenado enquanto o tanque não estiver disponível ($W_{j,k,t}^P = 0$). As restrições (3.38) garantem que em cada período os tanques de armazenamento multiproduto devem estar alocados para um único produto. Já as restrições (3.39) garantem que um tanque de armazenamento está disponível para um produto apenas se ele estiver designado a esse produto. Por fim, as restrições (3.40) definem a preparação inicial para os tanques de armazenamento multiprodutos.

3.4.3 Experimentos Computacionais

Vários experimentos computacionais foram realizados para comparar o modelo proposto nesta seção com os modelos apresentados na seção anterior. Os experimentos computacionais foram realizados no pacote de otimização CPLEX 12.6, em um servidor cujos nós eram compostos por dois processadores Intel Xeon E5-2680 v2 2.8 GHz, cada um com 10 núcleos e 128 GB de memória RAM. Portanto, dez instâncias foram executadas simultaneamente por processador com os seguintes parâmetros: 3600 segundos de tempo limite, 8 *threads* e 24GB de memória para a árvore *branch and cut*.

3.4.3.1 Conjunto de Instâncias

Os experimentos computacionais desta etapa são compostos por cinco classes de instâncias, das quais as classes 1 e 2 são as descritas na seção anterior. A classe 3 é baseada no trabalho de Barbosa-Póvoa e Macchietto (1994), enquanto a classe 4 representa o trabalho de Pinto, Barbosa-Póvoa e Novais (2008) e a classe 5 é baseada em Kallrath (2002). A representação dessas classes, de acordo com os diagramas RTN explicados anteriormente, são apresentadas no Apêndice B.

A Tabela 9 reúne as características da estrutura dos processos produtivos presentes nas cinco classes de instâncias consideradas nos experimentos computacionais. As classes 1 e 2 são baseadas em problemas da comunidade de pesquisa operacional. A classe 2 possui mais tarefas e produtos do que a classe 1, o que torna aquela mais difícil de ser resolvida. As classes 3, 4 e

Tabela 9 – Características de acordo com as classes de instâncias.

Características	Classe				
	1	2	3	4	5
Tarefas	7	10	4	6	17
Produtos	7	10	4	8	18
Unidades produtivas	3	3	3	6	9
Produtos de consumo imediato	0	0	0	2	4
Número total de instâncias	72	72	24	24	24

5 são baseadas em problemas da comunidade de engenharia de sistemas de processos e estão em ordem crescente de dificuldade, como pode ser visto pelo aumento da quantidade de tarefas, produtos, unidades produtivas e produtos de consumo imediato.

A Tabela 10 apresenta as características utilizadas para a geração dos diversos cenários das cinco classes. Sendo assim, o conjunto de instâncias é formado pela combinação dessas características. Apenas com relação aos tanques de armazenamento não foi considerada a combinação com nenhum tanque dedicado e nenhum tanque multiproduto. Sendo assim, a classe 1 possui algumas instâncias com apenas sete tanques dedicados, outras com sete tanques dedicados e sete tanques multiprodutos, além de instâncias com apenas sete tanques multiprodutos. Para esses 3 cenários foram considerados presença e ausência de tempo de preparação. Com relação à demanda dos produtos, alguns cenários apresentavam demanda *make-to-order* e outros *make-to-stock*. No primeiro caso as demandas estão distribuídas ao longo dos períodos, por isso foram consideradas instâncias com 4, 8 ou 12 períodos, cada um desses com 8 ou 24 unidades de tempo. Já para as demandas *make-to-stock*, foi considerado apenas um único período que poderia apresentar duração de 32, 64, 96, 192 ou 288 unidades de tempo. Por fim, a classe 5 possui apenas um único comprimento total do horizonte de planejamento, porém foram consideradas as duas variações de demanda propostas em Kallrath (2002).

3.4.3.2 Análise dos Resultados: CSLP vs CSLP-MP

Inicialmente, o modelo matemático CSLP-MP, proposto nesta seção, foi comparado ao modelo CSLP considerando o número médio de variáveis binárias, de variáveis contínuas e de restrições, conforme exibido pela Tabela 11. O modelo CSLP possui cerca de 68% do número total de variáveis binárias, 96% do número total de variáveis contínuas e 53% do total de restrições quando comparado ao modelo CSLP-MP. Dessa forma, é possível concluir que o modelo CSLP é mais conciso do que a nova formulação tanto em número de variáveis como no número de restrições.

Entretanto, ao analisar as soluções obtidas pelo pacote de otimização empregando os

Tabela 10 – Características que definiram os cenários das classes de instâncias.

Características		Classe				
		1	2	3	4	5
Tanques	Dedicados	0,7	0,10	0,4	0,6	0,14
	Multiprodutos	0,7	0,10	0,4	0,6	0,14
	Tempo de preparação	s,n	s,n	s,n	s,n	s,n
Demanda (<i>make-to-order</i>)	Número de períodos	4,8,12	4,8,12	4,8	4,8	5
	Tamanho dos períodos	8,24	8,24	12	12	30
Demanda (<i>make-to-stock</i>)	Número de períodos	1	1	1	1	1
	Tamanho dos períodos	32,64,96,192,288	32,64,96,192,288	48,96	48,96	150

Tabela 11 – Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos CSLP e CSLP-MP.

		Variáveis Binárias	Variáveis Contínuas	Restrições
Classe 1	CSLP	9.180,5	54.510,0	34.873,0
	CSLP-MP	12.943,0	57.198,0	64.300,0
	Proporção	70,93%	95,30%	54,23%
Classe 2	CSLP	16.340,0	141.081,0	99.373,0
	CSLP-MP	24.940,0	144.921,0	189.904,0
	Proporção	68,22%	96,33%	53,28%

dois modelos, nota-se que o modelo CSLP-MP foi capaz de proporcionar a obtenção do maior número de soluções factíveis, em que não houve atraso na entrega, assim como o maior número de soluções ótimas para ambas as classes, como exibido pela Tabela 12. Consequentemente, o modelo CSLP apresentou maior número de soluções infactíveis, o que pode indicar um melhor desempenho do modelo proposto.

Tabela 12 – Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos CSLP e CSLP-MP para as classes 1 e 2.

	CSLP			CSLP-MP		
	Com atraso	Factível	Ótima	Com atraso	Factível	Ótima
Classe 1	20	52	46	6	66	58
Classe 2	32	40	30	14	58	52

Essa hipótese de superioridade do modelo CSLP-MP pode ser corroborada pela Figura 26. O novo modelo permite a obtenção de soluções melhores ou iguais às do modelo CSLP para todas instâncias de todos os cenários considerados. Além disso, conforme as instâncias tornaram-se mais difíceis de serem resolvidas, o modelo CSLP-MP apresentou desempenho ainda melhor do que o modelo CSLP. Para as instâncias em que há presença apenas de tanques multiprodutos, Figuras 26e e 26f, o modelo proposto permitiu a obtenção da melhor solução em 89,3% das instâncias.

Quando são considerados apenas cenários em que ambos modelos proporcionaram a obtenção de soluções factíveis, a superioridade do modelo CSLP-MP é mantida tanto em

Tabela 13 – GAPs e tempos médios dos testes para os modelos CSLP e CSLP-MP.

	GAP médio (%)		Tempo médio (s)	
	CSLP	CSLP-MP	CSLP	CSLP-MP
Classe 1	1,90%	0,09%	616,9	277,8
Classe 2	3,36%	0,62%	1196,1	486,0

Figura 26 – Quantidade de melhores soluções obtidas utilizando os modelos CSLP e CSLP-MP.

relação aos GAPs como em relação aos tempos médios de execução, conforme apresentado pela Tabela 13. O modelo CSLP não foi capaz de proporcionar a obtenção da melhor solução em nenhuma das instâncias. Além disso, em 20,14% das instâncias apenas o modelo CSLP-MP permitiu a obtenção de soluções factíveis, porém o oposto não foi observado.

A Tabela 14 apresenta o número médio de períodos necessários para finalizar todas as

Tabela 14 – Tempo médio de finalização das tarefas, considerando apenas instâncias em que o CSLP e o CSLP-MP permitiram a obtenção de soluções factíveis.

	CSLP	CSLP-MP
Classe 1	100,6	97,4
Classe 2	92,4	86,0

Tabela 15 – Comparação entre o número médio de variáveis binárias, contínuas e restrições entre os modelos RTN e CSLP-MP, para as classes 1 a 5.

		Variáveis Binárias	Variáveis Contínuas	Restrições
Classe 1	RTN	97.072,5	111.879,7	21.213,5
	CSLP-MP	12.943,0	57.198,0	64.300,0
	Proporção	13,33%	51,12%	303,11%
Classe 2	RTN	261.870,0	289.497,7	39.980,0
	CSLP-MP	24.940,0	144.921,0	189.904,0
	Proporção	9,52%	50,06%	475,00%
Classe 3	RTN	14.016,0	17.741,0	5.250,0
	CSLP-MP	3.114,7	9.543,7	10.067,0
	Proporção	22,22%	53,79%	191,75%
Classe 4	RTN	73.876,0	85.049,0	14.008,0
	CSLP-MP	9.928,0	43.809,0	29.274,0
	Proporção	13,44%	51,51%	208,98%
Classe 5	RTN	1.579.611,0	1.673.239,0	120.373,3
	CSLP-MP	87.882,0	843.052,0	803.978,3
	Proporção	55,64%	50,38%	667,90%

tarefas. Mais uma vez é possível notar que o modelo CSLP-MP proporciona os menores tempos médios de processamento para ambas as classes utilizadas nos testes.

Dessa forma, pode-se concluir que o modelo CSLP-MP obteve melhor desempenho em termos de qualidade de solução do que o modelo CSLP. Portanto, ainda é necessário comparar a qualidade das soluções obtidas pelo modelo proposto nesta subseção com as do modelo RTN, para validar se o modelo proposto de fato possui desempenho superior ao dos demais modelos analisados.

3.4.3.3 Análise dos Resultados: RTN vs CSLP-MP

O modelo CSLP-MP incorporou características do modelo RTN, portanto é possível avaliá-los em instâncias cujas tarefas possuem durações distintas entre si, como nas classes 3 a 5. Assim como nas análises anteriores, primeiramente foi comparado o número médio de variáveis binárias, variáveis contínuas e restrições dos dois modelos. De acordo com a Tabela 15, o modelo CSLP-MP requer menos variáveis binárias e contínuas, porém o modelo RTN possui um número menor de restrições. Com relação às variáveis binárias, o modelo CSLP-MP utilizou menos de 10% do total empregado pelo modelo RTN para classe 2 e, no pior caso, utilizou menos 56% do total necessário para o RTN representar a classe 5. Já para o número de variáveis contínuas, o modelo CSLP-MP utilizou aproximadamente metade da quantidade dessas variáveis em relação ao modelo RTN. Por fim, o CSLP-MP precisou de quase o dobro do número total de restrições

Tabela 16 – Número total de soluções com atraso, factíveis e ótimas obtidas pelos modelos RTN e CSLP-MP para as classes 1 a 5.

	RTN			CSLP-MP		
	Com atraso	Factível	Ótimo	Com atraso	Factível	Ótimo
Classe 1	11	61	54	6	66	58
Classe 2	22	50	43	14	58	52
Classe 3	0	24	22	0	24	22
Classe 4	0	24	18	1	23	20
Classe 5	13	11	0	9	15	0

utilizadas pelo modelo RTN para a classe 3, e de quase 6,7 vezes para a classe 5.

A Tabela 16 apresenta o total de soluções com atraso, factíveis e ótimas encontradas pelos modelos RTN e CSLP-MP. O modelo CSLP-MP foi capaz de encontrar mais soluções ótimas e factíveis para as classes 1 e 2. Para a classe 3 ambos modelos tiveram desempenho similar. Já para a classe 4, o modelo RTN permitiu a obtenção de mais soluções factíveis e o CSLP-MP, de mais soluções ótimas. Por fim, nenhum modelo proporcionou a obtenção de soluções ótimas para a classe 5, porém o CSLP-MP permitiu a obtenção de mais soluções factíveis.

A Figura 27 mostra uma comparação entre as melhores soluções obtidas nos experimentos computacionais utilizando ambos modelos. O modelo CSLP-MP encontrou soluções melhores ou iguais às obtidas pelo modelo RTN para todas instâncias em que não havia tempo de preparação dos equipamentos, como pode ser observado nas Figuras 27a, 27c e 27e. Já para instâncias que apresentavam exclusivamente tanques dedicados e não consideravam tempo de preparação, Figura 27b, houve um empate em todas as classes com relação ao número de melhores soluções obtidas. Por fim, para as instâncias que possuem tanques multiprodutos e consideram tempo de preparação, Figuras 27f e 27d, o modelo CSLP-MP obteve o maior número de melhores soluções, ainda que para as classes 3, 4 e 5 das instâncias em que haviam apenas tanques multiprodutos houve um empate entre os modelos, como visto na Figura 27f.

Quando são considerados apenas cenários em que ambos modelos proporcionaram a obtenção de soluções factíveis, o modelo CSLP-MP foi capaz de encontrar soluções com

Tabela 17 – GAPs e tempos médios dos testes para os modelos RTN e CSLP-MP.

	Factível			
	GAP Médio (%)		Tempo Médio (s)	
	RTN	CSLP-MP	RTN	CSLP-MP
Classe 1	1,86	0,83	553,9	322,4
Classe 2	3,14	1,22	1015,4	542,5
Classe 3	4,93	4,94	345,3	616,9
Classe 4	8,71	6,65	1038,9	770,0
Classe 5	68,98	68,12	3600,0	3600,0

(a) Tanques dedicados sem preparação

(b) Tanques dedicados com preparação

(c) Tanques dedicados e multiprodutos sem preparação

(d) Tanques dedicados e multiprodutos com preparação

(e) Tanques multiprodutos sem preparação

(f) Tanques multiprodutos com preparação

Figura 27 – Comparação das melhores soluções obtidas para os modelos RTN e CSLP-MP.

GAPs médios menores do que o modelo RTN para todas as classes de instâncias, como exibido pela Tabela 17. Porém, a classe 3 apresenta uma situação distinta das demais, a diferença do GAP médio obtido por ambos modelos foi de apenas 0,02%, enquanto o tempo médio de processamento do modelo CSLP-MP foi aproximadamente 78% maior. Para as classes 1, 2 e 4 o modelo CSLP-MP apresentou os menores GAPs médios e utilizou tempos médios de processamento significativamente menores. Já para a classe 5, considerada a mais difícil dos conjuntos das instâncias, o pacote de otimização não obteve bons limitantes inferiores, o que resultou em GAPs elevados para ambos modelos.

A Tabela 18 apresenta o número médio de períodos necessários para finalizar todas as tarefas. Mais uma vez é possível notar que o modelo CSLP-MP permite a obtenção de soluções com tempos médios de processamento menores ou iguais aos do modelo RTN. Deve-se destacar

Tabela 18 – Tempo médio de finalização das tarefas, apenas quando ambos modelos obtiveram solução factível.

	RTN	CSLP-MP
Classe 1	97,6	96,1
Classe 2	91,3	86,3
Classe 3	51,4	51,4
Classe 4	50,6	49,4
Classe 5	121,8	114,3

o desempenho do modelo CSLP-MP com relação às classes 2 e 5, que são as mais difíceis das comunidades OR e PSE, respectivamente, utilizadas nos experimentos computacionais.

Sendo assim, pode-se concluir que para problemas práticos, como os presentes na classe 5, o desempenho do modelo CSLP-MP é evidentemente superior ao do RTN quando tempos de preparação não estão envolvidos. Para as instâncias em que havia tempo de preparação, o modelo CSLP-MP também apresentou resultados médios melhores do que os obtidos pelo modelo RTN.

3.5 Considerações Finais

Nesta seção foi proposto um modelo matemático, denominado CSLP-MP, que estende o modelo CSLP para incorporar características de micropériosodos semelhantes aos utilizados pela comunidade PSE, nos quais apenas frações das tarefas são processadas. A modelagem matemática considera as seguintes características: tempo de finalização da última tarefa produtiva; planejamento do tamanho das bateladas; sequenciamento da produção; controle do estoque dos produtos; alocação dos tanques multiprodutos; e sequenciamento do armazenamento dos produtos nos tanques. A função objetivo visa minimizar o tempo de finalização da última tarefa produtiva e eliminar o atraso na entrega dos produtos (*backlog*).

Os experimentos computacionais utilizaram cinco classes de instâncias. As classes 1 e 2 foram baseadas no trabalho de [Tempelmeier e Buschkühl \(2009\)](#) para representar instâncias da comunidade de pesquisa operacional. Já as classes 3, 4 e 5 foram baseadas nos trabalhos de [Barbosa-Póvoa e Macchietto \(1994\)](#), [Pinto, Barbosa-Póvoa e Novais \(2008\)](#) e [Kallrath \(2002\)](#), respectivamente, para representar instâncias da comunidade de engenharia de sistemas de processo. Para todas as classes foram considerados tanques de armazenamento dedicados e/ou multiprodutos. A partir dessa estrutura produtiva, foram elaborados 72 cenários para as classes 1 e 2, além de 24 cenários para as classes 3, 4 e 5. Esses cenários variavam na disponibilidade de armazenamento dos produtos (apenas tanques dedicados, apenas tanques multiprodutos ou ambos), na presença ou ausência da preparação entre a realização de tarefas e armazenamento de produtos, nas demandas, além do número e da duração dos períodos.

O modelo baseado em CSLP requer períodos maiores ou iguais à duração das tarefas

enquanto o modelo RTN requer tempos menores ou iguais. Portanto, as classes 1 e 2 resolvem essa questão ao considerar tarefas cujo tempo de processamento é constante e igual a uma unidade de tempo. Para essas duas classes observou-se que o modelo CSLP utiliza menos variáveis contínuas e binárias que o modelo RTN, porém requer maior número de restrições. O modelo RTN permitiu que o pacote de otimização CPLEX 12.6 obtivesse mais soluções ótimas e factíveis, necessitando menos tempo de processamento, além de permitir a obtenção das melhores soluções com mais frequência do que o modelo CSLP.

A nova formulação proposta neste capítulo (CSLP-MP) possui mais variáveis contínuas e binárias, além de um maior número de restrições do que o modelo CSLP. Entretanto, o novo modelo permitiu a obtenção de soluções factíveis melhores ou iguais às da formulação CSLP para todas as instâncias das classes 1 e 2, o que resulta em tempos médios menores para a finalização das tarefas. Para os cenários em que haviam apenas tanques de armazenamento multiprodutos, o CSLP-MP obteve soluções melhores em 89,3% das instâncias. Sendo assim, além de apresentar GAPs médios melhores do que o CSLP, o CSLP-MP também necessitou de tempos médios de processamento menores.

Ao comparar os modelos RTN e CSLP-MP, observa-se que o primeiro utiliza mais variáveis contínuas e binárias, enquanto o segundo requer maior número de restrições. O modelo CSLP-MP permitiu ao pacote de otimização encontrar um número maior ou igual de soluções ótimas, quando comparado ao modelo RTN. Já com relação à quantidade de soluções factíveis, o modelo RTN foi superior para a classe 4, encontrando uma solução factível a mais do que o modelo CSLP-MP. Com relação à qualidade das soluções, o modelo CSLP-MP encontrou soluções melhores ou igual ao modelo RTN para todas as instâncias que desconsideravam tempo de preparação. Já para instâncias em que o tempo de preparação foi considerado, o modelo RTN obteve a melhor solução em 8,3% das situações, enquanto o modelo CSLP-MP apresentou melhor desempenho em 39,8% das situações. De forma geral, considerando apenas quando ambos modelos encontraram soluções factíveis, os GAPs médios do modelo CSLP-MP foram sistematicamente menores do que os do modelo RTN, enquanto o tempo médio de processamento para do CSLP-MP foi superior apenas para a classe 3. Dessa forma, pode-se concluir que o modelo proposto neste capítulo apresentou resultados que superam tanto o modelo CSLP como o modelo RTN.

Pesquisas futuras podem investigar a inclusão de novas características no modelo CSLP-MP como o envase dos produtos, consumo de matérias-primas e a perecibilidade de produtos e matérias-primas. Por outro lado, o desenvolvimento de abordagens de solução é muito importante, visto que considerando apenas as características de sequenciamento da produção e armazenamento, em 30 das 216 instâncias o pacote de otimização não foi capaz de eliminar completamente o atraso nas entregas após uma hora de processamento. Já com relação à classe 5, em 37,5% das instâncias não foi possível encontrar soluções factíveis.

INTEGRAÇÃO DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO E PLANEJAMENTO DE AQUISIÇÃO

Atualmente, um dos principais desafios das companhias é o aumento no número de concorrentes disputando os mercados consumidores. Diversas empresas oferecem os mesmos produtos e serviços, o que aumenta a competitividade entre elas. Essa diversidade de opções estimula os consumidores a procurarem por produtos de alta qualidade, com prazos de entrega curtos, serviços customizados e baixo custo final (MONCZKA *et al.*, 2009). Portanto, as companhias precisam estar atentas a esses requisitos desafiadores, o que as levam a buscar melhoras contínuas em seus produtos e serviços, sem perder a eficiência em sua cadeia de suprimentos.

Chan *et al.* (2015) relatam que melhorias no planejamento da produção são consideradas uma das principais atividades para o sucesso de uma empresa. O planejamento da produção considera decisões de aquisição de recursos e de matérias-primas, além de definir operações produtivas para converter matérias-primas em produtos finais para que as demandas dos consumidores sejam atendidas eficientemente no decorrer do horizonte de planejamento (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003). Além disso, o planejamento da produção visa minimizar custos de produção enquanto considera as capacidades produtivas e restrições de armazenamento (CHAN *et al.*, 2015).

Nos ambientes de produção tradicionais, grandes pedidos usualmente proporcionam reduções nos custos produtivos das empresas, especialmente quando o custo de preparação dos equipamentos é elevado. Por outro lado, quanto maior for o pedido, maior será o custo de estocagem dos clientes. Por esse motivo, fornecedores geralmente recompensam os compradores oferecendo descontos atrativos para induzi-los a aumentar o tamanho de seus pedidos (SADRIAN; YOON, 1992).

Dessa forma, a eficiência na aquisição de mercadorias dos fornecedores também tornou-se

um processo indispensável para aumentar a competitividade de uma companhia. Uma indicação desse reconhecimento é o alto salário pago aos profissionais do departamento de compras (MONCZKA *et al.*, 2009). De acordo com Weber, Current e Benton (1991), um grande percentual dos gastos das empresas provêm da aquisição de materiais ou componentes e essa tendência ainda é uma realidade (GAITHER; FRAZIER, 2005). Para a maioria das empresas dos EUA, o custo de aquisição de componentes varia entre 40 e 70% do custo final dos produtos (WEBER; CURRENT; BENTON, 1991; GAITHER; FRAZIER, 2005).

Entretanto, em situações do dia-a-dia as decisões de aquisição e de produção podem não ser eficientes, visto que o planejamento da produção e o planejamento da aquisição de matérias-primas geralmente são tomadas em momentos distintos. Apesar da importância dessas decisões serem tomadas em conjunto, ainda não houve uma abordagem adequada pela comunidade científica, como observado pela carência de trabalhos integrando essas duas atividades. Em geral, decisões de planejamento da produção precedem decisões de aquisição de matérias-primas em uma abordagem sequencial, restringindo a capacidade de explorar descontos dos fornecedores.

Por outro lado, se o problema fosse abordado de forma integrada, o planejamento da produção poderia ser induzido pela disponibilidade de descontos na aquisição de matérias-primas, reduzindo os custos globais de produção. Com relação à indústria de processos, esse problema pode ser explorado simultaneamente à utilização de tanque de armazenamento multipropósito, os quais podem ser utilizados por diversos produtos desde que não simultaneamente. Esse cenário aumenta a flexibilidade do planejamento permitindo que as indústrias reorganizem seus estoques de acordo com as oportunidades mais vantajosas.

Esta seção aborda e explora a integração de um problema de planejamento da produção com um problema de aquisição de matérias-primas baseado em uma indústria de processos em que são considerados tanques de armazenamento multipropósito. Esse novo problema abordado ainda pode ser estendido para outros tipos de indústria.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 4.1 apresenta uma breve revisão da literatura, seguida pela definição do problema na Seção 4.2. A Seção 4.3 descreve duas formulações matemáticas que são confrontadas, uma que propõe a integração das decisões de planejamento de produção e aquisição de matérias-primas, e a outra que considera essas decisões de forma sequencial. Em seguida, são analisados os experimentos computacionais na Seção 4.4 e, por fim, a Seção 4.5 apresenta as considerações finais.

4.1 Revisão da Literatura

O gerenciamento de cadeias produtivas compreende diversas atividades como aquisição de matérias-primas, planejamento de produção e gerenciamento de estoque. Geralmente, esses problemas são tratados de forma independente e nenhuma integração entre eles é explorada. Isso não é apenas uma realidade no meio acadêmico, mas também na prática das indústrias

([HARJUNKOSKI et al., 2014](#)). O objetivo desta seção é abordar a integração entre aquisição de matérias-primas e planejamento da produção para que possa ser obtida uma solução otimizada, a qual espera-se que seja melhor do que a solução obtida quando ambas atividades são consideradas de forma independente.

O restante desta seção é composta por quatro subseções. Na primeira, são analisados trabalhos explorando a aquisição de matérias-primas. Em seguida, são tratados trabalhos relacionados ao dimensionamento de lotes que consideram tempo de preparação e estoques. A terceira subseção analisa trabalhos que incluem aplicações específicas para a indústria de processos, com ênfase para indústrias químicas, já que esta foi abordada no estudo descrito neste capítulo. Por fim, a revisão da literatura é finalizada com algumas conclusões.

4.1.1 Aquisição de Matérias-Primas

Segundo [Tempelmeier \(2002\)](#), pesquisas em dimensionamento de pedidos para aquisição remetem ao início do século 20. Desde então, um grande número de estudos sobre dimensionamento de pedidos para aquisição foram publicados, mas apenas alguns consideraram descontos por quantidade adquirida. Além disso, muitos desses trabalhos abordam apenas situações com demanda estacionária, ao invés de demanda dinâmica, como ocorre na prática.

Existem duas estratégias principais para descontos: volume de negócios e quantidade adquirida. De acordo com [Crama, Pascual e Torres \(2004\)](#), a estratégia de descontos por volume de negócio é baseada no valor monetário total dos materiais adquiridos, envolvendo quebras de preço distintas relativas à quantidade monetária total do pedido. Por outro lado, a estratégia de desconto por quantidade adquirida é baseada na quantidade total (em números absolutos) de materiais adquiridos. Essa última é abordada na literatura considerando descontos incrementais por quantidade ou descontos para todos itens ([TEMPELMEIER, 2002](#)). Descontos incrementais aplicam diferentes níveis de desconto para uma única compra, enquanto descontos para todos itens aplicam um único nível de descontos para todas as unidades adquiridas.

[Ghodsypour e O'Brien \(1998\)](#) exploram fatores quantitativos e qualitativos na escolha dos fornecedores, tais como custos, qualidade e serviço. [Xu, Lu e Glover \(2000\)](#) restringiram o problema de seleção de fornecedor ao problema de aquisição de matérias-primas, com um modelo dinâmico de dimensionamento de lotes (de compra) multi-itens dinâmico, em que descontos por volume de negócio era oferecidos a todos os itens. [Tempelmeier \(2002\)](#) restringiu o problema de seleção de fornecedores a um único material, além de considerar descontos para todas unidades e/ou incremental para a quantidade adquirida. [Crama, Pascual e Torres \(2004\)](#) estudaram o problema de aquisição com desconto por quantidade total adquirida e mais de uma tarefa produtiva por produto. [Lee et al. \(2013\)](#) abordaram o problema de aquisição com descontos por quantidade para um único item e [Choudhary e Shankar \(2014\)](#) consideraram itens rejeitados, atrasos na entrega e aquisição, assim como capacidade de armazenamento limitada. Mais recentemente, [Amorim et al. \(2016\)](#) modelaram a aquisição de matérias-primas

perecíveis em que a produção e o transporte aos varejistas foram considerados, mas nenhum tipo de desconto foi incluído. Além disso, [Rezaei et al. \(2016\)](#) estudaram o planejamento da produção considerando taxas de desconto e a capacidade total de armazenamento para atender a demanda em linhas de montagem.

A partir dos trabalhos descritos anteriormente, nota-se que o planejamento de compra tem sido o foco de diversos estudos, porém, eles ainda não incorporaram decisões de produção. Esse fato foi identificado em revisões abrangentes providas por [Aissaoui, Haouari e Hassini \(2007\)](#), sobre seleção de fornecedores e dimensionamento de lotes de aquisição, e [Ho, Xu e Dey \(2010\)](#), sobre seleção e avaliação de fornecedores. Mais recentemente, [Chai, Liu e Ngai \(2013\)](#) revisaram o problema de seleção de fornecedores e afirmaram que há falta de estudos abordando a integração de problemas de aquisição com problemas de planejamento da produção.

4.1.2 Dimensionamento de lotes produtivos

Pesquisas sobre o dimensionamento de lotes datam o início do século 20 e, desde então, diversos problemas foram tratados e um grande número de modelos matemáticos e algoritmos foram propostos ([BUSCHKÜHL et al., 2010](#)). Os modelos de dimensionamento de lotes essencialmente buscam uma “relação de compromissos” (*trade-off*) entre custos de estoque e de preparação de máquina, visto que quanto maiores bateladas forem produzidas menos preparações serão necessárias, permitindo uma melhor exploração das economias de escala, porém implicando maiores estoques ([SÜRAL; DENIZEL; WASSENHOVE, 2009](#)). A maioria dos modelos de dimensionamento de lotes consideram um horizonte de planejamento finito, dividido em um conjunto de períodos discretos de tempo ([KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003](#)). O problema de dimensionamento de lotes multi-estágio (*Multi-Level Capacitated Lot Sizing Problem* ou MLCLSP), ocorre quando diversos estágios produtivos precisam ser planejados em um ambiente com recursos produtivos limitados.

O MLCLSP foi estudado por diversos autores que exploraram diferentes características encontradas nas indústrias. [Sahling et al. \(2009\)](#) estenderam o trabalho proposto por [Tempelmeier e Buschkühl \(2009\)](#) e trataram um problema MLCLSP com propagação de preparação (*setup carry-over*) por no máximo um período, podendo manter a propagação da preparação por mais de um período subsequente. [Caserta, Ramirez e Voß \(2010\)](#) também trataram um MLCLSP com propagação de preparação e tempo de preparação, enquanto [Mohammadi et al. \(2010\)](#) trabalharam em um MLCLSP com preparação dependente da sequência. [Almeder \(2010\)](#) e [Furlan e Santos \(2015\)](#) estudaram o MLCLSP com tempo de preparação e horas extras, enquanto que [Wu et al. \(2013\)](#) abordaram um MLCSLP com tempo de preparação, propagação da preparação, horas extras e atraso nas entregas.

Revisões relevantes sobre dimensionamento de lotes foram realizadas por [Jans e Degraeve \(2007\)](#) e [Buschkühl et al. \(2010\)](#). Além disso, [Díaz-Madroño, Mula e Peidro \(2014\)](#) trabalharam em uma revisão de modelos de planejamento da produção de nível tático e salientaram diversas

características dos artigos citados, enquanto Copil *et al.* (2016) revisaram problemas que tratam dimensionamento de lotes e programação da produção simultaneamente. Essas revisões também indicam a necessidade de extensão e integração de decisões de planejamento da produção para aprimorar as cadeias de suprimentos.

4.1.3 Indústria de Processos

Na indústria de processos existem processos contínuos e de bateladas, porém, este capítulo foca apenas nos processos de bateladas, os quais são baseados na definição de lotes e o principal objetivo é otimizar a sequência produtiva desses lotes para atender as demandas e ao mesmo tempo minimizar custos. Esse modo operacional envolve instalações multipropósito que proporcionam mais flexibilidade na utilização dos recursos, o que é necessário devido à natureza dos processos de produção, segundo os quais múltiplas receitas devem ser consideradas na produção de vários produtos (MÉNDEZ *et al.*, 2006b; MONIZ *et al.*, 2014). As características desses processos requerem métodos sofisticados de planejamento de produção, pois o compartilhamento de recursos entre os processos deve ser eficiente para garantir a produção dos vários produtos dentro de um tempo mínimo (VELEZ; MARAVELIAS, 2014). Para tratar esse desafio, as abordagens de programação matemática provaram ser mais flexíveis do que as heurísticas desenvolvidas especificamente para resolver problemas com diferentes características que mudam de indústria para indústria e de tempos em tempos (MÉNDEZ *et al.*, 2006b; BARBOSA-PÓVOA, 2007). O trabalho seminal de Kondili, Pantelides e Sargent (1993) propôs uma representação de rede, a *State-Task-Network* (STN), que tem sido amplamente explorada pela comunidade de sistemas de processo pois permite uma representação muito flexível do processo de produção, que é facilmente traduzida em formulações matemáticas. Usando os mesmos princípios do STN, uma representação de rede ainda mais flexível e eficiente foi proposta por Pantelides (1994), a *Resource-Task-Network* (RTN). Ambas representações têm sido amplamente utilizadas para tratar problemas práticos que surgem na programação da produção industrial (AMORIM *et al.*, 2013; HARJUNKOSKI *et al.*, 2014). Velez e Maravelias (2013a) desenvolveram algoritmos baseados em STN para grades de tempo em modelos com tempo discreto reduzindo substancialmente o tamanho da formulação. Além disso, Velez e Maravelias (2013b) exploraram reformulações do STN para modelos de tempo discreto para programação de produção de produtos químicos. Merchan e Maravelias (2014) estenderam essas reformulações para o modelo de tempo contínuo. Moniz *et al.* (2014) exploraram a representação RTN para tratar o processo de tomada de decisão dos problemas de programação dentro de um caso real farmacêutico.

Todos os modelos mencionados focam no problema de planejamento de produção considerando a gestão de estoques, mas nenhum desses estudos aborda o problema de aquisição de matérias-primas. As matérias-primas foram consideradas apenas disponíveis. No entanto, várias revisões sobre programação de produção, dentro das indústrias de processos, mencionam claramente a necessidade de abordagens de planejamento de produção com uma visão estendida,

indicando a necessidade de tratar diversos problemas relacionados às atividades de produção. Estes são os casos das revisões de Méndez *et al.* (2006b), sobre a programação da produção de processos em bateladas, e de Velez e Maravelias (2014), sobre os avanços de técnicas de solução na programação da produção de bateladas em indústrias químicas nas últimas três décadas. Além disso, Harjunkski *et al.* (2014), que revisam metodologias desenvolvidas para indústrias de processo focando nos aspectos industriais de programação, afirmam que um verdadeiro sistema de gerenciamento de produção deve incluir a programação da produção como parte natural de um ambiente bem orquestrado, em que diferentes atividades são integradas. Isso está de acordo com as revisões da cadeia de suprimentos de processos (SHAH, 2005; PAPAGEORGIOU, 2009; BARBOSA-POVÓA, 2014), em que uma visão integrada das diversas atividades da cadeia de suprimentos é fomentada e definida como um ponto crucial de pesquisas futuras.

4.1.4 Considerações Finais

De acordo com a revisão de literatura apresentada, pode-se concluir que a integração do planejamento de produção e das aquisições, embora seja um problema importante no cotidiano das indústrias, ainda não é abordado de forma abrangente na literatura. Os modelos de aquisição são restritos aos revendedores e ainda precisam de integração com os estágios subsequentes da cadeia de produção. Por outro lado, os modelos de dimensionamento de lotes consideram várias características produtivas, mas o consumo e a aquisição de matérias-primas não estão entre elas. Esse é o caso das indústrias de processo, onde é fundamental ter uma gestão adequada de estoque de materiais, considerando a disponibilidade de matéria-prima e sua taxa de consumo baseados durante o planejamento da produção. Portanto, este estudo visa explorar essas lacunas propondo um modelo integrado de dimensionamento de lotes com aquisição de matérias-primas para indústrias de processo, que também pode ser aplicado a qualquer outro setor industrial.

4.2 Definição do Problema

Esta capítulo baseou-se no estudo de caso apresentado no Capítulo 2. Entretanto, considerou-se uma abordagem mais de médio a curto prazo, ou seja, não foi retratado o sequenciamento da produção. Como as decisões representadas neste capítulo podem ser consideradas de natureza mais tática do que operacional, foram acrescentadas características pertencentes às decisões de aquisição de matérias-primas.

O problema representado neste estudo é composto por um conjunto de fornecedores que oferecem diferentes matérias-primas, as quais podem ser armazenadas em tanques dedicados ou tanques multipropósitos com capacidade de armazenamento limitada. Cada fornecedor possui seus próprios custos de pedido, assim como suas taxas de desconto, as quais são condicionadas às suas próprias faixas de valores para conceder os descontos. A estrutura de produção é caracterizada por produtos que podem ser produzidos por mais de uma tarefa, em que cada

uma delas pode consumir diferentes matérias-primas e podem ser alocadas em equipamentos produtivos distintos. Tempo de preparação dos equipamentos produtivos pode ser necessário entre a ocorrência de duas tarefas distintas em um mesmo equipamento produtivo, geralmente dependendo da sequência entre as tarefas. Os produtos podem ser armazenados em tanques dedicados ou em tanques multipropósitos, com capacidade de armazenamento limitada e, então, eles podem ser vendidos a granel ou consumidos por outras tarefas. Os produtos ainda podem ser enviados para linhas de envase e, após serem envasados, eles podem ser armazenados em um depósito com capacidade ilimitada. Assim como a linha produtiva, a linha de envase também requer preparação entre o envase de dois produtos distintos. O armazenamento de matérias-primas e produtos envasados ocorrem durante os períodos, enquanto as tarefas e o armazenamento dos produtos a granel são definidos de acordo com os sub-períodos do horizonte de planejamento. A divisão entre períodos e sub-períodos deve-se aos tanques de armazenamento multipropósito, visto que no problema real esses tanques geralmente são utilizados por períodos maiores do que os das tarefas produtivas, por exemplo, os tanques de armazenamento são utilizados pelo menos três dias antes de estarem novamente disponíveis para os demais produtos.

Figura 28 – Fluxograma de processos da cadeia produtiva.

Esse fluxo de processo é ilustrado pela Figura 28, em que tanques podem armazenar matérias-primas, produtos ou ambos. O problema descrito apresenta três características que usualmente não são consideradas em problemas de planejamento e programação da produção: consumo de diferentes matérias-primas para produzir um mesmo produto utilizando diferentes tarefas, planejamento da aquisição para atingir maiores descontos e tanques de armazenamento multipropósito que podem ser compartilhados entre matérias-primas e produtos.

Figura 29 – Exemplo de uma estrutura produtiva do problema abordado.

Figura 29 representa duas tarefas que produzem o mesmo produto, j_1 . A tarefa r_1 consome as matérias-primas f_1 e f_2 , enquanto a tarefa r_2 consome f_2 e f_3 . Ambas tarefas podem ser alocadas nos equipamentos produtivos m_1 e m_2 . Essa flexibilidade no planejamento das soluções torna a seleção das matérias-primas, necessárias para anteder a demanda, um novo problema de otimização.

O problema de aquisição das matérias-primas, interferido diretamente pela flexibilidade produtiva, ainda pode ser estendido a situações em que o fornecedor oferece descontos de acordo com a quantidade adquirida. A Tabela 19 apresenta um exemplo de desconto para todas unidades (*all-unit discount*). O fornecedor s_1 não oferece desconto para pedidos menores ou iguais a 98 unidades, enquanto entre 99 e 258 unidades a taxa de desconto é de 3,6%. Já para pedidos maiores ou iguais a 259 unidades, o desconto é 6,5%. Por outro lado, o fornecedor s_2 oferece taxas percentuais de descontos maiores, porém as faixas de quantidade a serem adquiridas das matérias-primas também são maiores.

Tabela 19 – Faixas e taxas de desconto dos fornecedores.

Fornecedor	Faixa de Quantidade		Taxa de desconto
	de	até	
s_1	0	98	0%
	99	258	3,6%
	259	∞	6,5%
s_2	0	127	0%
	128	343	3,8%
	344	∞	8,4%

Além dessas características, outra situação comum enfrentada em indústrias de processos é o armazenamento de matérias-primas e produtos. Empresas desse segmento geralmente possuem tanques de armazenamento multipropósito que podem ser compartilhados entre matérias-primas e produtos, como ilustrado na Figura 30. O tanque k_1 pode ser utilizado pelas matérias-primas f_1 e f_2 , enquanto o tanque k_3 pode ser utilizado pelos produtos j_1 e j_2 . Finalmente, o tanque k_2 pode ser utilizado por todas matérias-primas e produtos representados. Ainda assim, diversos modelos e a maioria das instâncias propostas na literatura levam em consideração apenas tanques dedicados.

Figura 30 – Exemplo de uma estrutura de armazenamento do problema abordado.

Por fim, é importante salientar que tanques de armazenamento possuem importância fundamental para a indústria de processos, visto que esse segmento usualmente lida com produtos de estrutura multi-estágio, logo a disponibilidade de matérias-primas, produtos intermediários e finais está diretamente relacionada à disponibilidade de tanques de armazenamento, o que pode restringir as decisões do planejamento da produção.

4.3 Modelo Matemático

Esta seção descreve as duas formulações matemáticas desenvolvidas neste capítulo. O primeiro modelo integra simultaneamente as decisões de aquisição de matérias-primas e de dimensionamento de lotes (Subseção 4.3.2), enquanto a segunda estratégia é sequencial, de forma que as decisões de dimensionamento de lotes precedem as decisões de aquisição de matérias-primas (Subseção 4.3.3), assemelhando-se às práticas industriais comumente observadas no planejamento da produção em indústrias de processos. Sendo assim, a função objetivo do modelo integrado não é equivalente a da abordagem sequencial, visto que nessa última a função objetivo está particionada em dois modelos. Portanto, o valor da função objetivo da solução ótima do modelo integrado é melhor ou igual à solução ótima da estratégia sequencial, caso a solução ótima desse último modelo seja utilizada para calcular o valor da função objetivo do modelo integrado.

O modelo descrito nesta seção pode ser definido da forma a seguir. Um conjunto de fornecedores s ($s \in \{1, \dots, S\}$) oferece matérias-primas f ($f \in \{1, \dots, F\}$), as quais podem

ser adquiridas com níveis de desconto d ($d \in \{1, \dots, D\}$), de acordo com a quantidade total requisitada. As matérias-primas, assim como os produtos intermediários, são consumidos por tarefas, r ($r \in \{1, \dots, R\}$), que são alocadas em equipamentos produtivos, m ($m \in \{1, \dots, M\}$), e originam produtos, j ($j \in \{1, \dots, J\}$). Um equipamento produtivo m pode ser destinado a produção de um conjunto de tarefas, desde que não simultaneamente. Um subconjunto de tarefas pode consumir diferentes ingredientes e ainda assim pode produzir o mesmo produto. As tarefas podem ser precedidas de um tempo de preparação que ainda pode incorrer em um custo de preparação. As matérias-primas e os produtos podem ser armazenados em tanques dedicados ou em tanques multipropósitos, k ($k \in \{1, \dots, K\}$). A entrega e o armazenamento de matérias-primas ocorrem nos períodos (t), enquanto as tarefas e o armazenamento de produtos ocorrem nos sub-períodos (ϕ) de cada período t . O horizonte de planejamento é finito e composto por períodos, t ($t \in \{1, \dots, T\}$), os quais são divididos em sub-períodos ϕ ($\phi \in \{1, \dots, \mathbb{O}(t)\}$). Ainda são considerados equipamentos de envase, n ($n \in \{1, \dots, N\}$).

Com relação às decisões, o modelo proposto define a quantidade de matérias-primas a serem adquiridas, o número de bateladas a serem produzidas, assim como o estoque de matérias-primas e de produtos por período. Além disso, encontra os tempos e custos de preparação dos equipamentos produtivos, o custo de estoque das matérias-primas e dos produtos, custos de pedido por aquisição, custos de produção, níveis de desconto, bem como a utilização de tanques multipropósitos pelas matérias-primas e produtos. Custos de estoque estão relacionados apenas à quantidade de matérias-primas e de produtos armazenados. Custos de matérias-primas e seus respectivos descontos não foram incorporados aos custos de estoque e, consequentemente, nenhuma atualização no custo de estoque foi considerada.

Os dois modelos assumem algumas simplificações com relação à definição do problema. Com relação ao planejamento da produção, considerou-se uma abordagem de médio prazo. Logo, a programação da produção não foi abordada, o que não garante que as tarefas produtivas serão completadas antes de suas correspondentes tarefas de envase. Além disso, a preparação dependente da sequência também não foi considerada. Tanques de armazenamento multipropósito são controlados apenas no final de cada período, portanto, durante os períodos é possível que seja necessário armazenar mais matérias-primas e produtos do que o número de tanques disponíveis. Por fim, não foi assumida nenhuma formulação explícita sobre a política de consumo de matérias-primas e produtos intermediários, pois considerou-se que, de acordo com os planos produtivos, os elementos que estivessem disponíveis a mais tempo fossem consumidos, ou seja, implicitamente seria considerada a política *first in first out* (FIFO).

4.3.1 Funções, subconjuntos, parâmetros e variáveis

4.3.1.1 Funções

$\tau(\phi)$ retorna o período t no qual o sub-período ϕ está contido.

4.3.1.2 Subconjuntos

$\mathbb{K}^F(f)$	tanques que podem ser utilizados pela matéria-prima f ;
$\mathbb{K}^J(j)$	tanques que podem ser utilizados pelo produto j ;
$\mathbb{M}(r)$	equipamentos produtivos que podem ser utilizados pela tarefa r ;
$\mathbb{R}^M(m)$	tarefas que podem ocorrer no equipamento produtivo m ;
$\mathbb{R}^{F^-}(f)$	tarefas que consomem a matéria-prima f ;
$\mathbb{R}^{J^+}(j)$	tarefas que produzem o produto j ;
$\mathbb{R}^{J^-}(j)$	tarefas que consomem o produto j ;
$\mathbb{O}(t)$	sub-períodos do período t .

4.3.1.3 Parâmetros

$a_{r,m}^M$	tempo para produzir uma batelada da tarefa r no equipamento produtivo m ;
$a_{j,n}^N$	tempo para envasar uma unidade do produto j no equipamento de envase n ;
$b_{r,m}^M$	tempo de preparação da tarefa produtiva r no equipamento produtivo m ;
$b_{j,n}^N$	tempo de preparação para iniciar o envasamento do produto j no equipamento de envase n ;
$bc_{f,s}$	custo de aquisição da matéria-prima f pelo fornecedor s ;
$d_{j,\phi}^{JB}$	demanda de produto a granel j no sub-período ϕ ;
$d_{j,t}^{JP}$	demanda de produto envasado j no período t ;
$e_{f,r,m}^{F^-}$	percentual de matéria-prima f consumida para produzir uma batelada da tarefa r no equipamento produtivo m ;
$e_{j,r,m}^{P^+}$	percentual de produto j produzido por uma batelada da tarefa r no equipamento produtivo m ;
$e_{j,r,m}^{P^-}$	percentual de produto j consumido por uma batelada da tarefa r no equipamento produtivo m ;
$g_{r,m}$	quantidade mínima da batelada da tarefa r produzida no equipamento produtivo m ;
$h_{r,m}$	quantidade máxima da batelada da tarefa r produzida no equipamento produtivo m ;
hc_f^F	custo de estoque da matéria-prima f ;
hc_j^J	custo de estoque do produto j ;
l_f^F	capacidade de armazenamento da matéria-prima f em tanque dedicado;
l_j^{JB}	capacidade de armazenamento de produto j , a granel, em tanque dedicado;
l_k^K	capacidade de armazenamento do tanque k ;
oc_s	custos de pedido por aquisição do fornecedor s ;
pc_r	custo de produção da tarefa r ;
sc_r	custo de preparação da tarefa r ;
$u_{s,d}$	limite superior do tamanho do pedido para o fornecedor s no nível de desconto d ;
α	número suficientemente grande;
Δ_t	tempo de espera da entrega de matéria-prima;
$CAP_{m,\phi}$	tempo de processamento disponível no equipamento produtivo m no sub-período ϕ ;

- $CAP_{n,\phi}$ tempo de processamento disponível no equipamento de envase n no sub-período ϕ ;
 $DIS_{s,d}$ taxa de desconto do fornecedor s associada ao nível de desconto d .

4.3.1.4 Variáveis contínuas

- $Q_{f,s,d,t}^F$ quantidade adquirida da matéria-prima f , do fornecedor s no nível de desconto d no período t ;
 $Q_{r,m,\phi}^{JB}$ tamanho da batelada da tarefa r produzida no equipamento produtivo m no sub-período ϕ ;
 $Q_{j,n,\phi}^{JP}$ quantidade envasada do produto j no equipamento de envase n no sub-período ϕ ;
 $I_{f,t}^F$ estoque da matéria-prima f no período t ;
 $I_{j,\phi}^{JB}$ estoque do produto j , a granel, no sub-período ϕ ;
 $I_{j,t}^{JP}$ estoque do produto j , envasado, no período t .

4.3.1.5 Variáveis binárias

- $Y_{s,t}^F$ 1, se alguma matéria-prima é adquirida do fornecedor s no período t ,
0, caso contrário.
 $Y_{r,m,\phi}^{JB}$ 1, se houver preparação para a tarefa r no equipamento produtivo m no sub-período ϕ ,
0, caso contrário.
 $Y_{j,n,\phi}^{JP}$ 1, se houver preparação para o produto j no equipamento de envase n no sub-período ϕ ;
0, caso contrário.
 $Z_{s,d,t}$ 1, se houver aquisição do fornecedor s no nível de desconto d no período t ,
0, caso contrário.
 $W_{k,f,t}^F$ 1, se o tanque k armazena matéria-prima f no período t ,
0, caso contrário.
 $W_{k,j,\phi}^{JB}$ 1, se o tanque k armazena produto j no sub-período ϕ ,
0, caso contrário.

4.3.1.6 Variáveis inteiras

- $X_{r,m,\phi}^{JB}$ número de bateladas produzidas pela tarefa r no equipamento produtivo m no sub-período ϕ .

4.3.2 Modelo Matemático Integrado (MMI)

O modelo integrado considera simultaneamente decisões relacionadas ao dimensionamento de lotes e à aquisição de matérias-primas. Sendo assim, o objetivo desse modelo é proporcionar uma integração efetiva dessas duas áreas de planejamento, o que pode permitir a obtenção de soluções economicamente mais vantajosas.

4.3.2.1 Função Objetivo

$$\begin{aligned}
\min \quad & \underbrace{\sum_s \sum_d \sum_t \left((1 - DIS_{s,d}) \cdot \sum_f (bc_{f,s} \cdot Q_{f,s,d,t}^F) \right)}_{(i)} + \underbrace{\sum_s \sum_t (oc_s \cdot Y_{s,t}^F)}_{(ii)} + \\
& \underbrace{\sum_f \sum_t (hc_f^F \cdot I_{f,t}^F) + \sum_j \sum_t \sum_{\phi \in \mathbb{O}(t)} \left(\frac{hc_j^J}{|\mathbb{O}(t)|} \cdot I_{j,\phi}^{JB} \right) + \sum_j \sum_t (hc_j^J \cdot I_{j,t}^{JP})}_{(iii)} + \\
& \underbrace{\sum_r \sum_m \sum_{\phi} (sc_{r,m} \cdot Y_{r,m,\phi}^R)}_{(iv)} + \underbrace{\sum_r \sum_m \sum_{\phi} (pc_{r,m} \cdot X_{r,m,\phi}^R)}_{(v)}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

A função objetivo, dada por (4.1), visa minimizar os custos de produção considerando: (i) custos de matéria-prima permitindo descontos de acordo com a quantidade total adquirida; (ii) custos de pedido representando um gasto fixo para entrega; (iii) custos de armazenamento proporcionais à quantidade estocada de matérias-primas e produtos nos períodos t e sub-períodos $\phi \in \mathbb{O}(t)$, em que a somatória dos custos de todos os sub-períodos de $\mathbb{O}(t)$ equivalem a hc_j^J ; (iv) custo de preparação associados aos equipamentos que são utilizados pelas tarefas; e (v) custos de produção representando custos operacionais distintos entre os equipamentos produtivos, os quais estão relacionados aos custos de produção por batelada para cada tarefa.

4.3.2.2 Restrições

4.3.2.2.1 Aquisição

$$u_{s,d-1} \cdot Z_{s,d,t} \leq \sum_f Q_{f,s,d,t}^F < u_{s,d} \cdot Z_{s,d,t}, \quad \forall s, d, t \tag{4.2}$$

$$\sum_d Z_{s,d,t} \leq Y_{s,t}^F, \quad \forall s, t \tag{4.3}$$

$$\sum_f \sum_d Q_{f,s,d,t}^F \leq \alpha \cdot Y_{s,t}^F, \quad \forall s, t \tag{4.4}$$

As restrições (4.2) são responsáveis por determinar os níveis de desconto d oferecidos pelos fornecedores s na aquisição das matérias-primas no período t , considerando apenas a quantidade total adquirida. As restrições (4.3) garantem que não há mais de um nível de desconto d ativo para o fornecedor s no período t , enquanto as restrições (4.4) representam a ocorrência de um pedido para o fornecedor s no período t .

4.3.2.3 Tarefas produtivas

$$\sum_{r \in \mathbb{M}(m)} \left[(a_{r,m}^M \cdot X_{r,m,\phi}^{J_B}) + (b_{r,m}^M \cdot Y_{r,m,\phi}^{J_B}) \right] \leq CAP_{m,\phi}^M, \quad \forall m, \phi \quad (4.5)$$

$$X_{r,m,\phi}^{J_B} \leq \alpha \cdot Y_{r,m,\phi}^{J_B}, \quad \forall r, m, \phi \quad (4.6)$$

$$h_{r,m} \cdot X_{r,m,\phi}^{J_B} \leq Q_{r,m,\phi}^{J_B} \leq g_{r,m} \cdot X_{r,m,\phi}^{J_B}, \quad \forall r, m, \phi \quad (4.7)$$

O conjunto de restrições (4.5) garante a utilização dos equipamentos produtivos de acordo com o tempo total disponível nos sub-períodos, considerando o tempo de processamento das tarefas e seus respectivos tempos de preparação. As restrições (4.6) definem a ocorrência de preparação da tarefa r no sub-período ϕ . Finalmente, as restrições (4.7) determinam a quantidade total produzida pela tarefa r no equipamento produtivo m durante o sub-período ϕ .

4.3.2.4 Tarefas de envase

$$\sum_j \left[(a_{j,n}^N \cdot Q_{j,n,\phi}^{J_P}) + (b_{j,n}^N \cdot Y_{j,n,\phi}^{J_P}) \right] \leq CAP_{n,\phi}^N, \quad \forall n, \phi \quad (4.8)$$

$$Q_{j,n,\phi}^{J_P} \leq \alpha \cdot Y_{j,n,\phi}^{J_P}, \quad \forall j, n, \phi \quad (4.9)$$

As restrições (4.8) garantem a utilização dos equipamentos de envase de acordo com o tempo total disponível nos sub-períodos, considerando o tempo gasto para envasar os produtos e o tempo necessário para preparação. Já as restrições (4.9) definem a ocorrência de preparação nas tarefas de envase do produto j no sub-período ϕ .

4.3.2.5 Controle de estoque

$$I_{f,t-1}^F + \sum_s \sum_d Q_{f,s,d,t-\Delta_t}^F = \sum_{r \in \mathbb{R}^{F-}(f)} \sum_{m \in \mathbb{M}(r)} \sum_{\phi \in \mathbb{O}(t)} (e_{f,r,m}^{F-} \cdot Q_{r,m,\phi}^{J_B}) + I_{f,t}^F, \quad \forall f, t \quad (4.10)$$

$$I_{j,\phi-1}^{J_B} + \sum_{r \in \mathbb{R}^{J+}(j)} \sum_{m \in \mathbb{M}(r)} e_{j,r,m}^{J+} \cdot Q_{r,m,\phi}^{J_B} = d_{j,\phi}^{J_B} + \sum_{r \in \mathbb{R}^{J-}(j)} \sum_{m \in \mathbb{M}(r)} e_{j,r,m}^{J-} \cdot Q_{r,m,\phi}^{J_B} + \sum_n Q_{j,n,\phi}^{J_P} + I_{j,\phi}^{J_B}, \quad \forall j, \phi \quad (4.11)$$

$$I_{j,t-1}^{J_P} + \sum_n \sum_{\phi \in \mathbb{O}(t)} Q_{j,n,\phi}^{J_P} = d_{j,t}^{J_P} + I_{j,t}^{J_P}, \quad \forall j, t \quad (4.12)$$

As restrições (4.10) controlam o estoque de matérias-primas, ou seja, a quantidade total de uma matéria-prima adquirida em períodos anteriores ($t - \Delta_t$) e recebida no período t

mais o estoque ao final do período anterior ($t - 1$) tem que ser igual à soma do consumo dessa matéria-prima em todos os sub-períodos $\phi \in \mathbb{O}(t)$ com o estoque no final do período t . Essas restrições são responsáveis por relacionar os problemas de aquisição de matérias-primas e de dimensionamento de lotes.

O conjunto de restrições (4.11) controla o estoque de produtos a granel, segundo o qual a quantidade produzida de um produto j em um sub-período ϕ , dado como um percentual da quantidade total produzida pela tarefa r no equipamento produtivo m , mais seu estoque no final do sub-período anterior $\phi - 1$ tem que ser igual à soma das demandas externa ($d_{j,\phi}^{JB}$) e interna (percentual da quantidade produzida pela tarefa r no equipamento produtivo m que consome o produto j) com a quantidade envasada por todos equipamentos de envase mais o estoque ao final do sub-período ϕ . O estoque a granel é considerado nos sub-períodos devido à necessidade de controle dos tanques de armazenamento, que ocorre apenas no final de cada sub-período. Ao dividir os períodos em sub-períodos, o aumento do número de vezes que os tanque de armazenamento são controlados torna a solução mais próxima da realidade.

Por fim, as restrições (4.12) controlam o estoque de produtos envasados. Portanto, o estoque dos produtos j proveniente do período $t - 1$ mais a soma da quantidade envasada de todos os sub-períodos ϕ que compõem o período t tem que ser igual à demanda externa ($d_{j,\phi}^{JP}$) e ao estoque no final do sub-período ϕ .

4.3.2.6 Controle dos tanques de armazenamento multipropósito

$$I_{f,t}^F \leq l_f^F + \sum_{k \in \mathbb{K}^F(f)} l_k^K \cdot W_{k,f,t}^F, \quad \forall f, t \quad (4.13)$$

$$I_{j,\phi}^{JB} \leq l_j^{JB} + \sum_{k \in \mathbb{K}^J(j)} l_k^K \cdot W_{k,j,\phi}^{JB}, \quad \forall j, \phi \quad (4.14)$$

$$\sum_j W_{k,j,\phi}^{JB} + \sum_f W_{k,f,\tau(\phi)}^F \leq 1, \quad \forall k, \phi \quad (4.15)$$

As restrições (4.13) definem o limite máximo do estoque de uma matéria-prima como sendo a soma das capacidades de seus tanques dedicados e dos tanques multipropósitos que foram utilizados durante o período t . Por outro lado, as restrições (4.14) definem o limite máximo do estoque de um produto como sendo a soma das capacidades de seus tanques dedicados e dos tanques multipropósitos que foram utilizados durante o sub-período ϕ . Já as restrições (4.15) garantem que cada tanque multipropósito será utilizado por no máximo uma matéria-prima ou um produto durante cada sub-período ϕ . Note que se uma matéria-prima f utilizar o tanque k no período t , a variável $W_{k,f,\tau(\phi)}^F$ será igual a um para todos os sub-períodos ϕ pertencentes ao período t .

4.3.3 Estratégia Matemática Sequencial (EMS)

Esta subseção apresenta dois modelos matemáticos que após serem resolvidos sequencialmente fornecem soluções para o problema descrito neste capítulo. O primeiro modelo encarrega-se do dimensionamento de lotes, buscando soluções de boa qualidade para atender as demandas externas, em que $Q_{f,t}^F$ representa a quantidade de matéria-prima f requisitada no período t . A solução desse modelo é utilizada como parâmetro de entrada para o modelo seguinte, que trata da aquisição de matérias-primas. Para isso, a demanda ($d_{f,t}^F$) da matéria-prima f no período t é obtida da variável $Q_{f,t}^F$, por outro lado, o parâmetro $I_{k,t}^K$, que indica a disponibilidade do tanque multipropósito k no período t é obtido da variável $W_{k,j,\phi}^J$. Essa é uma abordagem comumente utilizada na prática por empresas para definir a quantidade de matéria-prima necessária a ser adquirida para que o planejamento da produção seja plenamente satisfeito.

Modelo de Dimensionamento de Lotes (EMS-DL)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_f \sum_t (hc_f^F \cdot I_{f,t}^F) + \sum_j \sum_t \sum_{\phi \in \mathbb{O}(t)} \left(\frac{hc_j^J}{|\phi|} \cdot I_{j,\phi}^{J_B} \right) + \sum_j \sum_t (hc_j^J \cdot I_{j,t}^{J_P}) + \\ & \sum_r \sum_m \sum_{\phi} (sc_{r,m} \cdot Y_{r,m,\phi}^R) + \sum_r \sum_m \sum_{\phi} (pc_{r,m} \cdot X_{r,m,\phi}^R) \end{aligned} \quad (4.16)$$

sujeito a:

(4.5) a (4.9), (4.11), (4.12) e 4.14

$$I_{f,t-1}^F + Q_{f,t-\Delta_t}^F = \sum_{r \in \mathbb{R}^{F^-}(f)} \sum_{m \in \mathbb{M}(r)} \sum_{\phi \in \mathbb{O}(t)} (e_{f,r,m}^{F^-} \cdot Q_{r,m,\phi}^{J_B}) + I_{f,t}^F, \quad \forall f, t \quad (4.17)$$

$$\sum_j W_{k,j,\phi}^{J_B} \leq 1, \quad \forall k, \phi \quad (4.18)$$

A função objetivo (4.16) considera custos de estoque de matérias-primas e produtos, assim como custos de preparação e produção. As restrições (4.17) garantem o controle do estoque de matérias-primas, enquanto as restrições (4.18) asseguram que cada tanque multipropósito será utilizado no máximo por um produto durante cada sub-período ϕ .

Modelo de Aquisição de Matérias-Primas (EMS-AMP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_s \sum_d \sum_t \left((1 - DIS_{s,d}) \cdot \sum_f (bc_{f,s} \cdot Q_{f,s,d,t}^F) \right) + \\ & \sum_s \sum_t (oc_s \cdot Y_{s,t}^F) + \sum_j \sum_t (hc_j^J \cdot I_{j,t}^{J_P}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

sujeito a:

(4.2) a (4.4)

$$I_{f,t-1}^F + \sum_s \sum_d Q_{f,s,d,t-\Delta_t}^F = d_{f,t}^F + I_{f,t}^F, \quad \forall f, t \quad (4.20)$$

$$I_{f,t}^F \leq l_f^F + \sum_{k \in \mathbb{K}^F(f)} l_{k,t}^K \cdot W_{k,f,t}^F, \quad \forall f, t \quad (4.21)$$

$$\sum_f W_{k,f,t}^J \leq l_{k,t}^K, \quad \forall k, t \quad (4.22)$$

A função objetivo (4.19) considera descontos nos custos das matérias-primas e custos por pedidos realizados aos fornecedores. As restrições (4.20) garantem que as matérias-primas adquiridas dos fornecedores serão suficientes para atender as necessidades do dimensionamento de lotes. As restrições (4.20) definem o limite máximo de estoque de matérias-primas considerando as capacidades dos tanques dedicados e a disponibilidade dos tanques de armazenamento multipropósito usadas no período t , enquanto as restrições (4.22) asseguram que no máximo uma matéria-prima pode utilizar o tanque k no período t .

4.4 Experimentos Computacionais

A fim de avaliar os modelos matemáticos propostos, foram realizados experimentos computacionais baseados na indústria que motivou o desenvolvimento desta tese e na modificação de um conjunto de instâncias clássicas da literatura. Esta seção inicia descrevendo os dados utilizados nos experimentos computacionais e conclui com uma análise dos resultados obtidos nos experimentos.

4.4.1 Descrição dos Dados

Os experimentos computacionais utilizaram dois conjuntos de instâncias: o primeiro baseou-se na estrutura de produtos da indústria que motivou esse trabalho, enquanto o segundo foi baseado na estrutura de produtos proposta por (TEMPELMEIER; BUSCHKÜHL, 2009). Ambos conjuntos consideram a estrutura de desconto de todas unidades (*all-unit discount*) para a aquisição das matérias-primas. As instâncias ainda apresentam características adicionais, como custo de pedido aos fornecedores, tarefas produtivas e de envase, consumo de matérias-primas e restrições no armazenamento de matérias-primas e produtos, as quais são comuns em indústria de processos.

A estrutura de descontos considerada apresenta múltiplos fornecedores oferecendo diferentes níveis de desconto para pedidos com diversas matérias-primas, como descrito em Crama, Pascual e Torres (2004). A política de descontos adotada (*all-unit discount*) é similar à apresentada em Tempelmeier (2002). Dessa forma, a Subseção 4.4.1.1 leva em consideração 4

Figura 31 – Representação de recursos e tarefas.

fornecedores oferecendo 5 níveis de desconto diferentes, com até 30% de desconto, de acordo com a quantidade total do pedido. Por outro lado, o conjunto de instâncias descrito na Subseção 4.4.1.2 considera 3 fornecedores, também com 5 níveis de desconto, mas com descontos máximos de até 20%.

Adicionalmente, as instâncias apresentadas neste capítulo também consideram custos de armazenamento de matérias-primas e produtos, custos e tempos de preparação, demanda de produtos a granel e envasados, custos produtivos associados aos equipamentos produtivos e custos de pedidos aos fornecedores. Além disso, ainda são considerados limitações nas capacidades produtivas e de armazenamento, assim como tanques dedicados e multipropósitos para o armazenamento de matérias-primas e produtos.

A estrutura de produtos de ambos os conjuntos é representada pelos nós de recursos e tarefa, cujas características são ilustradas pela Figura 31. Estados podem representar matérias-primas e produtos a granel e envasados. Os atributos dos estados representam as condições de armazenamento dos tanques dedicados, indicando mínimo e máximo estoques permitidos nos tanques. Por outro lado, tarefas podem representar atividades produtivas e de envase. Os atributos das tarefas são os equipamentos, os tempos de preparação, os tempos de processamento e as bateladas máximas e mínimas. Os arcos ligando estados e tarefas indicam o percentual produzido / consumido dos estados pelas tarefas.

4.4.1.1 Conjunto de instâncias reais

A Figura 32 ilustra a estrutura produtiva de um subconjunto de produtos da indústria química em estudo. As matérias-primas representadas na figura apresentam consumo mínimo de 10% da quantidade total dos insumos utilizados pelas receitas, de forma que as demais matérias-primas foram desconsideradas.

O produto J1 pode ser produzido pela tarefa R1, consumindo as matérias-primas F1 e F2, e pela tarefa R2, consumindo F1 e F3. Ambas tarefas podem ser alocadas nos equipamentos produtivos M1 e M2, entretanto, a primeira produz aproximadamente 3.5 vezes a quantidade da segunda. Após o final da tarefa produtiva, o produto J1 deve ser mantido a granel em tanques de armazenamento ou deve ser envasado pela tarefa R20, no equipamento de envase N1, para produzir o produto envasado J[E]1. O processo produtivo consiste em 3 equipamentos produtivos e 1 equipamento de envase), 29 tarefas de processamento (19 de produção e 10 de envase) e 34 estados (14 matérias-primas, 10 produtos a granel e 10 produtos envasados).

Figura 32 – Estrutura de produtos do problema considerado.

O problema descrito possui apenas produtos que podem ser armazenados temporariamente nos tanques, ou seja, não há produtos usualmente denominados *zero-wait*. A Figura 33 complementa a estrutura de produção, representando os tanques de armazenamento, assim como

Figura 33 – Estrutura de armazenamento do problema considerado.

as matérias-primas e produtos que podem utilizá-los. Analisando a estrutura desse conjunto, a matéria-prima F1 pode ser armazenada apenas em tanques dedicados, enquanto as outras matérias-primas podem ser armazenadas apenas em tanques multipropósitos, K1 a K7. Os produtos podem ser armazenados em tanques multipropósitos, K5 a K11. Sendo assim, tanques K5, K6 e K7 podem ser compartilhados entre matérias-primas e produtos. Além disso, os produtos J2 e J4 também podem ser armazenados em tanques dedicados.

Esse conjunto de instâncias possui três equipamentos produtivos, um equipamento de envase, onze tanques de armazenamento multipropósito, quatorze matérias-primas, dez produtos, quatro fornecedores, cinco níveis de desconto, quatro períodos e oito sub-períodos. Os períodos representam semanas e os sub-períodos representam meia semana, visto que essa aproximação foi considerada satisfatória pela empresa para o controle dos tanques de armazenamento multipropósito. Características adicionais como estoque inicial de matérias-primas, demanda, custo

Figura 34 – Estrutura produtiva baseada na classe 2AC de (TEMPELMEIER; BUSCHKÜHL, 2009).

de matérias-primas, custo de pedido, níveis de desconto e taxas de desconto foram geradas para compor as 128 variações do problema.

4.4.1.2 Conjunto de instâncias de Tempelmeier

A estrutura de produtos proposta por Tempelmeier e Buschkühl (2009) foi estendida de forma a representar duas tarefas produtivas para cada produto. Essa extensão replica o consumo de produtos intermediários, logo, o consumo de diferentes matérias-primas foi incorporado para que as tarefas fossem de fato distintas entre si. As Figuras 34 e 35 ilustram as duas estruturas produtivas utilizadas nesse conjunto de instâncias.

Cada tarefa dessas duas estruturas consome uma unidade de cada ingrediente e produz uma unidade de apenas um produto. De acordo com a Figura 34, o produto J1 pode ser produzido

Figura 35 – Estrutura produtiva baseada na classe 2GC de (TEMPELMEIER; BUSCHKÜHL, 2009).

por duas tarefas que utilizam o equipamento M1. Ambas consomem os produtos intermediários J2, J3 e J4. Entretanto, a tarefa R1 consome as matérias-primas F1, F4 e F5, enquanto a tarefa R2 consome F1, F3 e F6. Note que as matérias-primas foram representadas mais de uma vez com a intenção de reduzir o comprimento e cruzamento das arestas.

Quando uma tarefa é finalizada, o produto resultante deve ser envasado ou armazenado em algum tanque. A Figura 36 representa as relações entre produtos a granel, tarefas de envase e produtos envasados. Há apenas um equipamento de envase e suas tarefas não requerem tempo de preparação. Os produtos envasados não possuem restrições de armazenamento, ou seja, o depósito é capaz de acomodar todos os produtos envasados.

Figura 36 – Estrutura de envase do problema considerado.

O problema descrito não apresenta produtos *zero-wait*, portanto os produtos intermediários e os finais podem ser armazenados em tanques. A Figura 37 simplifica a representação das tarefas de armazenamento, então os produtos possuem tarefas de envase associadas a todos os tanques de armazenamento multipropósito, mesmo que nenhuma matéria-prima possa utilizá-los. Além disso, os produtos J2, J5 e J7 possuem seus próprios tanques de armazenamento dedicado.

Figura 37 – Estrutura de armazenamento do problema considerado.

Esse conjunto de instâncias possui três equipamentos produtivos, um equipamento de envase, seis tanques de armazenamento multipropósito, seis matérias-primas, dez produtos, três fornecedores, cinco níveis de desconto, oito períodos e 32 sub-períodos. Características adicionais como estoque inicial de matéria-prima, demanda, custo de matérias-primas, custo de pedido, níveis de desconto e taxas de desconto foram geradas computacionalmente para criar 64 variações desse problema.

4.4.2 Análise dos resultados

Os experimentos computacionais foram realizados no pacote de otimização CPLEX 12.6 em um *cluster* cujos nós eram compostos por dois processadores Intel Xeon E5-2680 v2 2.8 GHz, cada um com 10 núcleos e 128 GB de memória RAM. Dessa forma, as instâncias foram executadas cinco a cinco em cada processador com os seguintes parâmetros: 3600 segundos de tempo limite, 8 *threads* e 24 GB de memória.

O modelo apresentado na Seção 4.3 não foi capaz de prover soluções factíveis após uma hora de processamento no CPLEX 12.6. Para contornar essa dificuldade, utilizou-se uma estratégia de solução de duas fases. A primeira considerava variáveis de atraso (*backlog*) e modificava a função objetivo para apenas minimizar as penalizações de atraso. Portanto, caso a solução ótima apresentasse função objetivo igual a zero, o atraso seria completamente eliminado. Então, a solução ótima dessa primeira fase corresponde a uma solução factível do modelo original. Por outro lado, se a solução ótima fosse maior do que zero, a instância não apresentaria solução factível no modelo original. Já para a segunda fase, as variáveis de atraso eram removidas e a função objetivo assumia novamente os valores originais. Em seguida, a solução encontrada na primeira fase era utilizada como ponto de partida (*warm start*).

Para a análise dos resultados, primeiro é apresentado um exemplo ilustrativo para comparar as diferenças nas melhores soluções obtidas pelos dois modelos. Após isso, a qualidade média das soluções obtidas pelos modelos é analisada para avaliar se as diferenças são consequências da modelagem ou de deficiências no pacote de otimização. A qualidade é medida em relação aos GAPs fornecidos pelo CPLEX 12.6, os quais expressam a diferença percentual entre a melhor solução factível conhecida e o melhor limitante inferior encontrado. Finalmente, as soluções são comparadas de acordo com a função objetivo definida pela equação 4.1 a fim de avaliar qual modelo proporciona a obtenção das melhores soluções para serem utilizadas na prática.

4.4.2.1 Exemplo Ilustrativo

O objetivo desta subseção é explorar uma instância pequena e analisar as soluções (quase) ótimas obtidas pelas duas formulações descritas na Seção 4.3. Para encontrar essas soluções, foram utilizadas apenas 14 tarefas de uma instância e 6 produtos.

A Tabela 20 compara as diferenças entre os componentes da função objetivo de ambos modelos. A solução obtida pela estratégia sequencial apresenta melhores resultados para o dimensionamento de lotes, exceto para o custo de armazenamento dos produtos envasados. Por outro lado, o modelo integrado atingiu resultados melhores para o problema de aquisição. Visto que os custos de aquisição representam a maior parte dos custos finais de um produto, maiores reduções nos custos de aquisição resultam em maiores reduções nos custos finais. Essa afirmação é de fato confirmada com este exemplo ilustrativo, uma vez que o valor da função objetivo do modelo integrado foi 32,4% menor do que o da estratégia sequencial.

Tabela 20 – Comparação dos componentes da função objetivo dos estratégia sequencial e integrado.

	Sequencial	Integrado	Diferença
Custo de aquisição - matéria-prima	348.906,01	227.556,34	-121.349,67
Custo de pedido	3.373,84	3.062,37	-311,47
Custo de estoque - matéria-prima	11.327,58	6.971,22	-4.356,36
Custo de estoque - produto a granel	2.919,06	3.366,07	447,01
Custo de estoque - produto envasado	121,04	109,98	-11,06
Custo de preparação	5.918,00	6.336,00	418,00
Custo de produção	12.596,00	12.866,00	270,00
TOTAL	385.161,53	260.267,98	-124.893,55

Uma redução como essa foi possível devido às escolhas das tarefas enquanto custos de matérias-primas e descontos foram considerados simultaneamente. As diferenças entre as soluções podem ser observadas na Figura 38. A estratégia sequencial optou por tarefas que levaram à aquisição de todas as matérias-primas disponíveis (Figura 38a), enquanto o modelo integrado escolheu tarefas que resultaram na compra de apenas 5 matérias-primas (Figura 38b), garantindo custos menores na aquisição de insumos e na realização dos pedidos.

Figura 38 – Quantidade adquirida por produto por período.

4.4.2.2 Qualidade da Solução

Nesta subseção, são analisadas as qualidades das soluções obtidas pelo modelo EMS (4.3.3) e pelo MMI (4.3.2). Os GAPs fornecidos pelo pacote de otimização foram utilizados para avaliar as soluções. A Tabela 21 apresenta os GAPs médios, seus desvios padrão e o tempo médio utilizado nos testes. Pode-se observar que apenas o modelo de aquisição (EMS-AMP) da abordagem sequencial foi capaz de encontrar soluções ótimas para todas as instâncias. O modelo de dimensionamento de lotes (EMS-DL), da abordagem sequencial, foi capaz de encontrar soluções ótimas para 32 instâncias, enquanto o modelo integrado (MMI) encontrou para 11 instâncias. Todas as soluções ótimas encontradas por esses dois últimos modelos restringem-se às instâncias com apenas uma tarefa produtiva por produto do conjunto de Tempelmeier.

Tabela 21 – GAPs das soluções fornecidos pelo pacote de otimização.

	Conjunto de instâncias reais			Conjunto de instâncias de Tempelmeier		
	Sequencial		Integrado	Sequencial		Integrado
	Dimens. de lotes	Aquisição		Dimens. de Lotes	Aquisição	
GAP Médio	6,23%	0,00%	2,16%	1,46%	0,00%	1,41%
Desvio padrão do GAP	3,89%	-	0,78%	1,50%	-	1,59%
Tempo médio	3.354,9 s	2,6 s	3.517,1 s	1.934,7 s	2,3 s	3.287,1 s

Os GAPs das instâncias baseadas no problema real são significativamente menores (4,07%) para o modelo MMI quando comparados ao modelo EMS-DL, assim como os desvios padrão (3,11%). Por outro lado, os GAPs das soluções dos modelos EMS-DL e MMI foram similares para o conjunto de instâncias baseados no trabalho de [Tempelmeier e Buschkühl \(2009\)](#), embora o MMI obteve soluções médias ligeiramente melhores (0,05%) e o EMS-DL obteve desvios padrão levemente menores (0,09%).

Sendo assim, é possível concluir que o CPLEX é capaz de obter soluções de qualidade razoáveis para ambos modelos (EMS e MMI) considerando os dois conjuntos de instâncias empregados neste trabalho. Logo, é possível analisar o valor das funções objetivo entre as instâncias para avaliar as soluções obtidas por cada uma das abordagens e concluir qual delas é mais apropriada para serem utilizadas por indústrias, na prática.

4.4.2.3 Análise das Soluções

Para realizar a análise das soluções de ambos modelos foi considerada a função objetivo do modelo integrado, dada por (4.1). Dessa forma é possível comparar diretamente o valor da função objetivo entre as duas abordagens (EMS e MMI). A Figura 39 ilustra a redução obtida na função objetivo pelo modelo integrado quando comparado à estratégia sequencial, para todas as instâncias. A redução mínima obtida para o conjunto de instâncias baseadas no problema real foi de 3,61%, já para o conjunto baseados em Tempelmeier, de 3,30%. Sendo assim, o modelo

Figura 39 – Percentual de redução dos valores da função objetivo quando as soluções do MMI são comparadas com as do EMS para todas instâncias.

Tabela 22 – Análise da redução atingida pelo MMI na função objetivo.

	Redução média	Redução mínima	Redução máxima	Desvio padrão
Conjunto de instâncias reais	10,26%	3,61%	20,44%	4,19%
Conjunto de instâncias de Tempelmeier	15,17%	3,30%	27,86%	7,35%

integrado foi capaz de encontrar soluções melhores do que as obtidas pela estratégia sequencial para todas as instâncias consideradas nessa subseção.

A Tabela 22 resume as reduções nos valores das funções objetivo obtidas pelo modelo integrado e apresenta seus respectivos desvios padrão. O MMI proporcionou uma redução média do valor da função objetivo maior do que 10% para o conjunto de instâncias reais e maior do que 15% para o conjunto baseado na proposta de Tempelmeier.

Conjunto de instâncias reais

A Figura 40 representa as características mais significativas que reforçam o desempenho superior do modelo integrado com relação à estratégia sequencial: número de períodos e custo das matérias-primas. De acordo com a Figura 40a, a diferença percentual entre as soluções de ambos modelos parece não apresentar nenhum comportamento padrão quando o número de períodos aumenta de 4 para 8. Entretanto, a diferença média dos valores da função objetivo entre os dois modelos foi alterada de 9,71% (4 períodos) para 10,80% (8 períodos), o que indica que o modelo integrado tende a apresentar melhor desempenho que a estratégia sequencial para maiores horizontes de planejamento.

Por outro lado, a Figura 40b mostra que a diferença percentual entre as soluções de ambos modelos aumenta para praticamente todas as instâncias quando a média e variância dos custos das matérias-primas são incrementadas. A diferença média dos valores da função objetivo entre os dois modelos foi alterada de 7,20% (custo médio igual a 21,3 e variância igual a 38,2) para 13,31% (custo médio igual a 53,0 e variância igual a 73,0).

Figura 40 – Percentual médio de redução da função objetivo atingido pelo MMI, em relação ao EMS, para as instâncias baseadas no problema real.

Em suma, o modelo integrado mostrou-se mais adequado para indústrias que consideram maiores horizontes de planejamento e ainda mais indicado quando essas indústrias apresentam grandes variâncias nos custos de matérias-primas.

Conjunto de instâncias de Tempelmeier

A característica mais significativa que destaca a diferença de desempenho entre o modelo integrado e a estratégia sequencial, para o conjunto de instâncias de Tempelmeier, foi o número de tarefas por produto. A Figura 41 compara o valor da função objetivo das instâncias com uma tarefa por produto e com duas tarefas por produto. De acordo com a Figura 41a, é importante salientar que o valor das soluções da estratégia sequencial aumentaram quando uma segunda tarefa por produto foi introduzida. Analisando detalhadamente os valores da função objetivo, nota-se que houve um aumento de 5,84%. Esse incremento é uma consequência da falta de informações relacionadas ao custo das matérias-primas. Dessa forma, o modelo inevitavelmente escolhe tarefas que consomem matérias-primas com custos mais elevados ou que não permitem a obtenção de maiores níveis de descontos em alguns pedidos.

Em contrapartida, a Figura 41b mostra que as soluções obtidas pelo modelo integrado tenderam a reduzir quando uma segunda tarefa por produto foi considerada. Uma análise detalhada nos valores das funções objetivo mostra que houve redução média de 6,81%. Essa redução é consequência da utilização de informações sobre os custos das matérias-primas. Dessa forma, o modelo tende a escolher tarefas que consomem produtos de menor custo ou permitem que maiores níveis de desconto sejam atingidos nas compras.

A Figura 42 ilustra essa situação em uma perspectiva diferente, apresentando a diferença percentual dos valores da função objetivo para ambos modelos. É importante mencionar que o modelo integrado provê os menores valores de função objetivo. Sendo assim, essa diferença corresponde à redução dos valores das funções objetivo quando comparadas as soluções do modelo MMI e EMS. Após a inclusão de uma segunda tarefa por produto, a diferença percentual entre as soluções dos dois modelos cresce para todas as instâncias, como pode ser visto pelo

Figura 41 – Comparação dos valores da função objetivo para as instâncias de Tempelmeier com 1 e 2 tarefas por produto.

Figura 42 – Número de tarefas para as instâncias de Tempelmeier.

tamanho das barras vermelhas comparadas às barras azuis. A diferença média nos valores da função objetivo dos dois modelos aumenta de 10,14% (1 tarefa por produto) para 20,21% (2 tarefas por produto).

Essa é uma consequência da falta de informação sobre matérias-primas, com relação à estratégia sequencial, o que pode resultar em decisões de dimensionamento de lotes que consumam matérias-primas de custos mais elevados. Por outro lado, o modelo integrado considera os custos de matérias-primas e de desconto durante as decisões de dimensionamento de lotes, o que induz a escolha de tarefas mais vantajosas. Dessa forma, o modelo integrado é capaz de aproveitar a flexibilidade proporcionada pelas múltiplas tarefas produtivas, enquanto a estratégia sequencial toma decisões menos orientadas. Portanto, o modelo integrado é mais indicado para indústrias onde encontra-se múltiplas tarefas produtivas para a obtenção de um mesmo produto.

A Figura 43 reforça uma característica relevante com relação ao desempenho do modelo integrado sobre a estratégia sequencial: custo de matérias-primas. De acordo com a Figura 43a, a diferença percentual entre as soluções de ambos modelos aumenta para algumas instâncias quando a média e a variância do custo das matérias-primas aumentam, porém decresce para outras instâncias. A diferença média dos valores das funções objetivo entre os modelos é alterada de 10,51% (custo médio igual a 3,5 e variância igual a 1,8) para 9,76% (custo médio igual a 5,3 e variância igual a 9,3). Sendo assim, essa característica não apresenta tendências para instâncias com apenas uma tarefa produtiva por produto.

(a) 1 tarefa

(b) 2 tarefas

Figura 43 – Custo das matérias-primas para as instâncias de Tempelmeier.

Por outro lado, a Figura 43b mostra que a diferença percentual entre as soluções dos modelos aumenta para todas as instâncias que apresentam duas tarefas por produto quando a média e a variância dos custos de matérias-primas aumentam. A diferença média entre os valores das funções objetivo de ambos modelos cresce de 15,28% (custo médio igual a 3,5 e variância igual a 1,8) para 25,15% (custo médio igual a 5,3 e variância igual a 9,3). Portanto, o modelo integrado é capaz de aproveitar as variações nos custos de matérias-primas para selecionar tarefas que reduzem o custo produtivo total.

Logo, é possível concluir que o modelo integrado é indicado para indústrias que possuem múltiplas tarefas para produção de um mesmo produto. Além disso, ele é ainda mais indicado quando essas indústrias apresentam maiores variações de custo de matérias-primas.

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposto um modelo matemático que integra decisões de dimensionamento de lotes e aquisição de matérias-primas. Na abordagem tradicional, as empresas tomam essas decisões independentemente. Primeiro é definido o dimensionamento de lotes e, a partir dessa informação, define-se quando e o quanto deve ser adquirido de cada matéria-prima. Na formulação matemática proposta, as seguintes características foram consideradas: níveis de desconto oferecido por fornecedores de acordo com a quantidade adquirida; ocorrência de pedidos aos fornecedores; produtos com estrutura produtiva multi-estágio; múltiplas tarefas para produção de um produto, as quais podem consumir diferentes matérias-primas entre si; restrições nas capacidades de produção e de envase; tempo de preparação para produção e envase independentes da sequência; controle de estoque de matérias-primas e produtos; e presença de tanques de armazenamento dedicados e multipropósito. As seguintes características foram consideradas na função objetivo: desconto *all-unit*; custos de pedido; custos de armazenamento de matérias-primas, produtos a granel e produtos envasados; e custos de preparação e produção.

Dois conjuntos de instâncias foram considerados nos experimentos computacionais para comparar a abordagem tradicional, em que as decisões de dimensionamento de lotes e aquisição de matérias-primas são tomadas sequencialmente, com a nova abordagem proposta, cujas decisões são tomadas simultaneamente. Os resultados mostram que o modelo integrado encontrou a melhor solução para todas as instâncias dos dois conjuntos, quando comparadas às soluções da estratégia sequencial. No conjunto de instâncias baseadas em uma indústria química brasileira, o modelo integrado proporcionou a obtenção de soluções, em média, 10,26% melhores do que as da estratégia sequencial, enquanto para o conjunto baseado na estrutura de produtos propostos por Tempelmeier e Buschkühl (2009) foi observada uma melhora média de 15,75%.

Com relação ao conjunto de instâncias baseadas na indústria química, o modelo integrado pode atingir resultados melhores para instâncias cujas matérias-primas apresentam maior variâncias entre os fornecedores. Considerando o conjunto de instâncias baseados em Tempelmeier e

Buschkühl (2009), o valor médio da função objetivo da estratégia sequencial aumentou após a inclusão de uma segunda tarefa produtiva para os produtos. Além disso, o modelo integrado foi capaz de aproveitar essa tarefa adicional para explorar possibilidades mais eficientes de aquisição de matérias-primas. Sendo assim, o modelo integrado que encontrou soluções, em média, 10,14% melhores do que as obtidas pela estratégia sequencial para instâncias que apresentavam apenas uma tarefa por produto, passou a encontrar soluções, em média, 20,21% melhores que a estratégia sequencial quando consideradas instâncias que apresentavam duas tarefas produtivas por produto.

O modelo integrado superou a estratégia sequencial em todas as instâncias dos experimentos computacionais. Adicionalmente, o modelo integrado apresentou um desempenho mais notável quando havia mais de uma tarefa por produto. Além disso, esse modelo também apresentou bons desempenhos quando matérias-primas apresentaram alta variação entre os fornecedores. Finalmente, o modelo integrado mostrou evidências que também pode ser mais eficiente que a estratégia sequencial conforme o horizonte de planejamento aumenta.

Analisando os experimentos realizados neste capítulo, pode-se concluir que a integração do problema de dimensionamento de lotes e do problema de aquisição de matérias-primas de fato contribui para a redução dos custos de produção. Além disso, o modelo integrado é fortemente recomendado para indústrias de processo que apresentam múltiplas tarefas por produto, como nas indústrias químicas. Adicionalmente, os resultados obtidos confirmam a necessidade de integração das decisões de ambos problemas para indústrias cujas matérias-primas são oferecidas por múltiplos fornecedores. Dessa forma, os descontos oferecidos pelos fornecedores podem ser explorados de forma mais eficiente.

De acordo com o conhecimento dos autores, esse trabalho foi o primeiro a considerar a integração do planejamento da produção com a aquisição de matérias-primas. O principal objetivo desse capítulo foi enfatizar os benefícios dessa nova abordagem quando comparada à abordagem tradicional sequencial e definir alguns cenários nos quais ela é mais indicada.

Pesquisas futuras podem investigar diferentes aspectos: outras formas de desconto, como incremental, por pacotes (*bundled*) ou ainda a combinações delas; perecibilidade de matérias-primas ou idade dos estoques; e investigação de decisões do médio ao curto prazo. Além disso, seria muito interessante estender esse trabalho para considerar o impacto dos custos de matérias-primas nos custos de estoque. Custos maiores ou menores poderiam em alguns casos aumentar ou reduzir o valor correspondente dos custos de estoque das matérias-primas e, dessa forma, o *capital lockup* que representa uma parcela considerável de custos de manutenção de estoque. Finalmente, como foi possível resolver as instâncias apenas com um procedimento em duas fases, primeiro minimizando o *backlog* para então minimizar, de fato, a função objetivo, seria muito importante o desenvolvimento de novas abordagens de solução como heurísticas ou *matheuristics* (combinando heurísticas com subproblemas MIP).

CONCLUSÃO

Esta tese apresenta inicialmente um estudo de caso sobre planejamento da produção realizado em uma indústria química brasileira. A partir desse estudo de caso foram identificadas novas oportunidade de estudo que originaram outros dois trabalhos apresentados no decorrer desta tese. O primeiro trabalhos explorou formulações matemáticas para o problema de programação da produção, visto a dificuldade do pacote de otimização em encontrar soluções factíveis para o estudo de caso. Já o segundo trabalho focou em integrar os problemas de aquisição de matérias-primas e de planejamento da produção, visto que esses dois problemas foram bem estudados na literatura, porém, na maioria das vezes de forma isolada.

5.1 Considerações Finais

O Capítulo 2 abordou um estudo de caso realizado em uma indústria química brasileira, visando propor um modelo de planejamento da produção que considerasse suas principais características e permitisse a obtenção de soluções compatíveis com a prática da empresa e em tempo de processamento viável. Dentre essas características, algumas não são usualmente tratadas pelos modelos de pesquisa operacional, como o controle de estoque de matérias-primas e produtos, considerando alocação de tanques dedicados e multiproduto, o condicionamento do consumo das matérias-primas pelos contratos com fornecedores e a presença de múltiplas receitas produtivas para um mesmo produto. A formulação matemática desenvolvida permite controlar os níveis de estoque, determinar a ordem de produção das tarefas e a alocação explícita dos produtos nos tanques de armazenamento, além de identificar demandas excedentes às capacidades produtivas, não atendendo-as, ou programar uma produção superior às demandas requisitadas. Essa versatilidade na programação da produção permite que o nível de estoque de matérias-primas seja mantido mais próximo ao valor desejado pela empresa. Por outro lado, a abordagem de solução apresentada foi capaz de encontrar soluções factíveis em menos de uma hora, enquanto colaboradores especializados nessa função requerem pelo menos quatro horas.

O Capítulo 3 apresentou duas formulações matemáticas clássicas utilizadas para o problema de programação da produção, uma baseada na comunidade científica de pesquisa operacional (CSLP) e outra baseada na comunidade científica de engenharia de sistemas de processo (RTN). A primeira assume que as tarefas produtivas devem ser menores ou iguais a um período, enquanto a segunda assume que as tarefas produtivas devem ser maiores ou iguais a um período. Sendo assim, foram realizados experimentos computacionais em que todas as tarefas produtivas tinham duração uniforme e igual a um período. Nesse cenário, o modelo RTN mostrou-se superior ao modelo CSLP. Em seguida foi proposto um modelo que agregava características dessas duas formulações, o qual foi denominado CSLP-MP. O novo modelo permitiu que o pacote de otimização encontrasse soluções melhores ou iguais às obtidas pelo modelo CSLP para todas as instâncias com tarefas produtivas de tempo constante. Quando comparado ao RTN, o CSLP-MP permitiu a obtenção de soluções melhores ou iguais para todas as instâncias que não consideravam tempo de preparação. Já para as instâncias que consideravam tempo de preparação, o RTN encontrou a melhor solução em 8,3% das instâncias e o CSLP-MP, 39,8%. Por outro lado, o modelo CSLP-MP proporcionou os menores GAPs médios para todas as classes de instâncias, quando considerado apenas as soluções em que ambos modelos permitiram a obtenção de soluções factíveis. Desse forma, o modelo CSLP-MP apresentou desempenho superior ao dos modelos CSLP e RTN para as classes de instâncias consideradas nos experimentos computacionais.

O Capítulo 4 analisou a influência de tratar o problema de aquisição de matérias-primas com o problema de dimensionamento de lotes simultaneamente para a tomada de decisões. Essa abordagem contrasta com a abordagem tradicional das empresas, em que primeiro define-se o dimensionamento de lotes para utilizar suas informações na aquisição das matérias-primas. Para isso foi proposto um modelo matemático que integra esses dois problemas (MMI) e uma segunda abordagem que consiste em dois modelos sequenciais, um para cada problema (MMS). Em ambos os casos foram considerados descontos oferecidos pelos fornecedores de acordo com a quantidade adquirida, tanques de armazenamento dedicados e multipropósitos, produtos com estrutura produtiva multiestágio e múltiplas tarefas para produção de um produto, as quais podem consumir diferentes matérias-primas entre si. Os experimentos computacionais foram realizados com um conjunto de instâncias baseado na estrutura de produtos proposta por Tempelmeier e Buschkühl (2009) e outro baseado na indústria química estudada nesta tese. O modelo integrado permitiu uma redução média no valor da função objetivo de 15,75% e 10,26%, respectivamente, quando comparado ao modelo sequencial. Por fim, o modelo integrado mostrou-se mais indicado para indústrias de processo que apresentam múltiplas tarefas por produto, como nas indústrias químicas, principalmente quando as matérias-primas são oferecidas por diversos fornecedores que concedem descontos de acordo com a quantidade adquirida.

5.2 Perspectivas Futuras

Pesquisas futuras podem agregar os estudos realizados de forma independente nos capítulos desta tese. Logo, o modelo matemático proposto no Capítulo 2 pode ser estendido com a inclusão do problema de aquisição de matérias-primas, com o sequenciamento explícito do armazenamento dos produtos ou ainda pode ser reformulado baseado em outros modelos como o CSLP-MP, proposto no Capítulo 3. Modelos de planejamento da produção que consideram a aquisição de matérias-primas, como no Capítulo 4, podem ser estendidos para incorporar características como a perecibilidade das matérias-primas e produtos. Além disso, ainda é possível investigar outras formas de desconto concedidas pelos fornecedores, como incremental, por pacotes (*bundled*) ou ainda a combinações delas.

Por outro lado, o pacote de otimização considerado nos experimentos computacionais apresentou dificuldade para obtenção de soluções factíveis para todos os modelos propostos nesta tese. Sendo assim, ainda é necessário o desenvolvimento de novas abordagens de solução para encontrar soluções factíveis em tempo de processamento computacional viável. Essas abordagens podem ser:

- Heurísticas especialistas: desenvolvidas especificamente para um problema;
- Meta-heurísticas: associando otimização combinatória com conceitos de evolução biológica, ciências matemáticas e físicas, sistemas nervoso, entre outros (OSMAN; KELLY, 1996); ou
- *Matheuristics*: algoritmos em que ocorre iteração entre meta-heurísticas e técnicas de programação matemática (BOSCHETTI *et al.*, 2009).

REFERÊNCIAS

- AISSAOUI, N.; HAOUARI, M.; HASSINI, E. Supplier selection and order lot sizing modeling: A review. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 12, p. 3516 – 3540, 2007. Citado na página 92.
- AKARTUNALI, K.; MILLER, A. J. A heuristic approach for big bucket multi-level production planning problems. **European Journal of Operational Research**, v. 193, n. 2, p. 396 – 411, 2009. Citado nas páginas 45 e 47.
- ALMADA-LOBO, B.; KLABJAN, D.; CARRAVILLA, M. A.; OLIVEIRA, J. F. Multiple machine continuous setup lot sizing with sequence-dependent setups. **Computational Optimization and Applications**, v. 47, n. 3, p. 529–552, Nov 2010. Citado na página 61.
- ALMEDER, C. A hybrid optimization approach for multi-level capacitated lot-sizing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 200, n. 2, p. 599 – 606, 2010. Citado na página 92.
- ALVARES, S. T. Um problema de planejamento da produção em uma indústria química: Proposta de um modelo matemático. **Trabalho de Conclusão de Curso, ICMC/USP**, 2010. Citado nas páginas 23 e 28.
- AMORIM, P.; CURCIO, E.; ALMADA-LOBO, B.; BARBOSA-PÓVOA, A. P.; GROSSMANN, I. E. Supplier selection in the processed food industry under uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v. 252, n. 3, p. 801 – 814, 2016. Citado na página 91.
- AMORIM, P.; PINTO-VARELA, T.; ALMADA-LOBO, B.; BARBOSA-PÓVOA, A. Comparing models for lot-sizing and scheduling of single-stage continuous processes: Operations research and process systems engineering approaches. **Computers & Chemical Engineering**, v. 52, p. 177 – 192, 2013. Citado nas páginas 62 e 93.
- BALDO, T. A.; SANTOS, M. O.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. **Computers & Industrial Engineering**, v. 72, p. 58 – 71, 2014. Citado na página 35.
- BARBOSA-PÓVOA, A.; MACCHIETTO, S. Detailed design of multipurpose batch plants. **Computers & Chemical Engineering**, v. 18, n. 11, p. 1013 – 1042, 1994. European Symposium on Computer Aided Process Engineering 3-2. Citado nas páginas 80, 87 e 140.
- BARBOSA-PÓVOA, A. P. A critical review on the design and retrofit of batch plants. **Computers & Chemical Engineering**, v. 31, n. 7, p. 833 – 855, 2007. Citado na página 93.
- BARBOSA-POVÓA, A. P. Process supply chains management – Where are we? Where to go next? **Frontiers in Energy Research**, v. 2, p. 23, 2014. Citado na página 94.
- BERALDI, P.; GHIANI, G.; GRIECO, A.; GUERRIERO, E. Rolling-horizon and fix-and-relax heuristics for the parallel machine lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent set-up costs. **Computers & Operations Research**, v. 35, n. 11, p. 3644 – 3656, 2008. ISSN

0305-0548. Part Special Issue: Topics in Real-time Supply Chain Management. Citado na página 47.

BOSCHETTI, M. A.; MANIEZZO, V.; ROFFILLI, M.; RÖHLER, A. B. Matheuristics: Optimization, simulation and control. In: BLESÁ, M. J.; BLUM, C.; GASPERO, L. D.; ROLI, A.; SAMPELS, M.; SCHAERF, A. (Ed.). **Hybrid Metaheuristics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 171–177. Citado na página 121.

BUSCHKÜHL, L.; SAHLING, F.; HELBER, S.; TEMPELMEIER, H. Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. **OR Spectrum**, v. 32, n. 2, p. 231–261, 2010. Citado nas páginas 61 e 92.

CASERTA, M.; RAMIREZ, A.; VOSS, S. A math-heuristic for the multi-level capacitated lot sizing problem with carryover. In: CHIO, C. D.; BRABAZON, A.; CARO, G. D.; EBNER, M.; FAROOQ, M.; FINK, A.; GRAHL, J.; GREENFIELD, G.; MACHADO, P.; O'NEILL, M.; TARANTINO, E.; URQUHART, N. (Ed.). **Applications of Evolutionary Computation**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010, (Lecture Notes in Computer Science, v. 6025). p. 462–471. ISBN 978-3-642-12241-5. Citado na página 92.

CASTRO, P. M.; RODRIGUES, D.; MATOS, H. A. Cyclic scheduling of pulp digesters with integrated heating tasks. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 53, n. 44, p. 17098–17111, 2014. Citado na página 62.

CHAI, J.; LIU, J. N.; NGAI, E. W. Application of decision-making techniques in supplier selection: A systematic review of literature. **Expert Systems with Applications**, v. 40, n. 10, p. 3872 – 3885, 2013. Citado na página 92.

CHAN, F.; TIBREWAL, R. K.; PRAKASH, A.; TIWARI, M. A biased random key genetic algorithm approach for inventory-based multi-item lot-sizing problem. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture**, v. 229, n. 1, p. 157–171, 2015. Citado na página 89.

CHEN, G.; YAN, L.; SHI, B. Modeling and optimization for short-term scheduling of multipurpose batch plants. **Chinese Journal of Chemical Engineering**, v. 22, n. 6, p. 682 – 689, 2014. Citado na página 62.

CHOUDHARY, D.; SHANKAR, R. A goal programming model for joint decision making of inventory lot-size, supplier selection and carrier selection. **Computers & Industrial Engineering**, v. 71, p. 1 – 9, 2014. Citado na página 91.

CONSTANTINO, M. A polyhedral approach to a production planning problem. **Annals of Operations Research**, v. 96, n. 1, p. 75–95, Nov 2000. Citado na página 61.

COPIL, K.; WÖRBELAUER, M.; MEYER, H.; TEMPELMEIER, H. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. **OR Spectrum**, p. 1–64, 2016. Citado nas páginas 61 e 93.

CRAMA, Y.; PASCUAL, R.; TORRES, A. Optimal procurement decisions in the presence of total quantity discounts and alternative product recipes. **European Journal of Operational Research**, v. 159, n. 2, p. 364 – 378, 2004. Citado nas páginas 21, 23, 33, 91 e 105.

CUNHA, A. L.; SANTOS, M. O. Mathematical modelling and solution approaches for production planning in a chemical industry. **Pesquisa Operacional**, scielo, v. 37, p. 311 – 331, 08 2017. Citado nas páginas 23 e 28.

DÍAZ-MADROÑERO, M.; MULA, J.; PEIDRO, D. A review of discrete-time optimization models for tactical production planning. **International Journal of Production Research**, v. 52, n. 17, p. 5171–5205, 2014. Citado na página 92.

DILLENBERGER, C.; ESCUDERO, L. F.; WOLLENSAK, A.; ZHANG, W. On practical resource allocation for production planning and scheduling with period overlapping setups. **European Journal of Operational Research**, v. 75, n. 2, p. 275 – 286, 1994. Lotsizing models for production planning. Citado na página 47.

DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. **European Journal of Operational Research**, v. 99, p. 221 – 235, 1997. Citado nas páginas 30, 60 e 61.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, v. 196, n. 2, p. 697 – 706, 2009. Citado na página 35.

FLEISCHMANN, B. The discrete lot-sizing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 3, p. 337 – 348, 1990. Citado na página 61.

FLOUDAS, C. A.; LIN, X. Continuous-time versus discrete-time approaches for scheduling of chemical processes: a review. **Computers & Chemical Engineering**, v. 28, n. 11, p. 2109 – 2129, 2004. Citado na página 60.

FURLAN, M.; ALMADA-LOBO, B.; SANTOS, M.; MORABITO, R. Unequal individual genetic algorithm with intelligent diversification for the lot-scheduling problem in integrated mills using multiple-paper machines. **Computers & Operations Research**, v. 59, p. 33 – 50, 2015. Citado na página 65.

FURLAN, M.; SANTOS, M. BFO: a hybrid bees algorithm for the multi-level capacitated lot-sizing problem. **Journal of Intelligent Manufacturing**, p. 1–16, 2015. Citado na página 92.

GAGLIOPPA, F.; MILLER, L. A.; BENJAAFAR, S. Multitask and multistage production planning and scheduling for process industries. **Operations Research**, v. 56, n. 4, p. 1010–1025, 2008. Citado na página 62.

GAITHER, N.; FRAZIER, G. **Administração da produção e operações**. 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005. Citado na página 90.

GHODSYPOUR, S.; O'BRIEN, C. A decision support system for supplier selection using an integrated analytic hierarchy process and linear programming. **International Journal of Production Economics**, v. 56–57, n. 0, p. 199 – 212, 1998. Production Economics: The Link Between Technology And Management. Citado na página 91.

HARJUNKOSKI, I.; MARAVELIAS, C. T.; BONGERS, P.; CASTRO, P. M.; ENGELL, S.; GROSSMANN, I. E.; HOOKER, J.; MÉNDEZ, C.; SAND, G.; WASSICK, J. Scope for industrial applications of production scheduling models and solution methods. **Computers & Chemical Engineering**, v. 62, p. 161 – 193, 2014. Citado nas páginas 91, 93 e 94.

HELBER, S.; SAHLING, F. A fix-and-optimize approach for the multi-level capacitated lot sizing problem. **International Journal of Production Economics**, v. 123, n. 2, p. 247 – 256, 2010. Citado na página 48.

- HO, W.; XU, X.; DEY, P. K. Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review. **European Journal of Operational Research**, v. 202, n. 1, p. 16 – 24, 2010. Citado na página [92](#).
- JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches. **European Journal of Operational Research**, v. 177, n. 3, p. 1855 – 1875, 2007. Citado na página [92](#).
- _____. Modeling industrial lot sizing problems: a review. **International Journal of Production Research**, v. 46, n. 6, p. 1619–1643, 2008. Citado nas páginas [30](#), [32](#), [33](#) e [35](#).
- KALLRATH, J. Planning and scheduling in the process industry. **OR Spectrum**, v. 24, n. 3, p. 219–250, Aug 2002. Citado nas páginas [22](#), [34](#), [80](#), [81](#), [87](#) e [142](#).
- KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Omega**, v. 31, n. 5, p. 365 – 378, 2003. Citado nas páginas [30](#), [32](#), [34](#), [59](#), [61](#), [89](#) e [92](#).
- KARMARKAR, U. S.; KEKRE, S.; KEKRE, S. The dynamic lot-sizing problem with startup and reservation costs. **Operations Research**, v. 35, n. 3, p. 389–398, 1987. Citado na página [61](#).
- KARMARKAR, U. S.; SCHRAGE, L. The deterministic dynamic product cycling problem. **Operations Research**, v. 33, n. 2, p. 326–345, 1985. Citado na página [61](#).
- KONDILI, E.; PANTELIDES, C.; SARGENT, R. A general algorithm for short-term scheduling of batch operations—I. MILP formulation. **Computers & Chemical Engineering**, v. 17, n. 2, p. 211 – 227, 1993. Citado nas páginas [60](#) e [93](#).
- KOPANOS, G. M.; PUIGJANER, L.; MARAVELIAS, C. T. Production planning and scheduling of parallel continuous processes with product families. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 50, n. 3, p. 1369–1378, 2011. Citado na página [22](#).
- LANZENAUER, C. Haehling von. A production scheduling model by bivalent linear programming. **Management Science**, v. 17, n. 1, p. 105–111, 1970. Citado na página [61](#).
- LEE, A. H.; KANG, H.-Y.; LAI, C.-M.; HONG, W.-Y. An integrated model for lot sizing with supplier selection and quantity discounts. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 7, p. 4733 – 4746, 2013. Citado na página [91](#).
- LEE, H.; MARAVELIAS, C. T. Discrete-time mixed-integer programming models for short-term scheduling in multipurpose environments. **Computers & Chemical Engineering**, v. 107, p. 171 – 183, 2017. In honor of Professor Rafiqul Gani. Citado na página [62](#).
- LUCHE, J. R. D.; MORABITO, R.; PUREZA, V. Combining process selection and lot sizing models for production scheduling of electrofused grains. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 26, n. 03, p. 421–443, 2009. Citado na página [65](#).
- MATTA, R. de; GUIGNARD, M. The performance of rolling production schedules in a process industry. **IIE Transactions**, Taylor & Francis, v. 27, n. 5, p. 564–573, 1995. Citado na página [61](#).

MAUDERLI, A.; RIPPIN, D. Production planning and scheduling for multi-purpose batch chemical plants. **Computers & Chemical Engineering**, v. 3, n. 1-4, p. 199 – 206, 1979. Citado na página 22.

MÉNDEZ, C. A.; CERDÁ, J.; GROSSMANN, I. E.; HARJUNKOSKI, I.; FAHL, M. State-of-the-art review of optimization methods for short-term scheduling of batch processes. **Computers & Chemical Engineering**, v. 30, n. 6, p. 913 – 946, 2006. Citado nas páginas 60 e 61.

_____. State-of-the-art review of optimization methods for short-term scheduling of batch processes. **Computers & Chemical Engineering**, v. 30, n. 6-7, p. 913 – 946, 2006. Citado nas páginas 93 e 94.

MERCHAN, A. F.; MARAVELIAS, C. T. Reformulations of mixed-integer programming continuous-time models for chemical production scheduling. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 53, n. 24, p. 10155–10165, 2014. Citado na página 93.

MOHAMMADI, M.; GHOMI, S. F.; KARIMI, B.; TORABI, S. Rolling-horizon and fix-and-relax heuristics for the multi-product multi-level capacitated lotsizing problem with sequence-dependent setups. **Journal of Intelligent Manufacturing**, v. 21, n. 4, p. 501–510, 2010. Citado na página 92.

MONCZKA, R.; HANDFIELD, R.; GIUNIPERO, L.; PATTERSON, J. **Purchasing and supply chain management**. Fourth. [S.l.]: Cengage Learning, 2009. Citado nas páginas 21, 22, 89 e 90.

MONIZ, S.; BARBOSA-PÓVOA, A. P.; SOUSA, J. P. de. Simultaneous regular and non-regular production scheduling of multipurpose batch plants: A real chemical–pharmaceutical case study. **Computers & Chemical Engineering**, v. 67, p. 83 – 102, 2014. Citado na página 62.

MONIZ, S.; BARBOSA-PÓVOA, A. P.; SOUSA, J. P. de; DUARTE, P. Solution methodology for scheduling problems in batch plants. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 53, n. 49, p. 19265–19281, 2014. Citado na página 93.

MOURA, L. R. **Gestão do relacionamento com fornecedores: análise da eficácia de programa para desenvolvimento e qualificação de fornecedores para grandes empresas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009. Acesso em: 2015-04-09. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3136/tde-01092009-153815>>. Citado na página 22.

OSMAN, I. H.; KELLY, J. P. Meta-heuristics: An overview. In: _____. **Meta-Heuristics: Theory and Applications**. Boston, MA: Springer US, 1996. p. 1–21. ISBN 978-1-4613-1361-8. Citado na página 121.

PANTELIDES, C. C. Unified frameworks for optimal process planning and scheduling. In: **Proc. 2nd FOCAPO; Cache Publications: New York**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 253. Citado nas páginas 60, 62, 68 e 93.

PAPAGEORGIOU, L. G. Supply chain optimisation for the process industries: Advances and opportunities. **Computers & Chemical Engineering**, v. 33, n. 12, p. 1931 – 1938, 2009. FOCAPO 2008 – Selected Papers from the Fifth International Conference on Foundations of Computer-Aided Process Operations. Citado na página 94.

- PHANDEN, R. K.; JAIN, A.; VERMA, R. Integration of process planning and scheduling: a state-of-the-art review. **International Journal of Computer Integrated Manufacturing**, v. 24, n. 6, p. 517–534, 2011. Citado na página [23](#).
- PINTO, T.; BARBOSA-PÓVOA, A. P. F. D.; NOVAIS, A. Q. Design of multipurpose batch plants: A comparative analysis between the STN, m-STN, and RTN representations and formulations. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 47, n. 16, p. 6025–6044, 2008. Citado nas páginas [80](#), [87](#) e [141](#).
- PINTO-VARELA, T.; BARBOSA-PÓVOA, A. P. F.; NOVAIS, A. Q. Bi-objective optimization approach to the design and planning of supply chains: Economic versus environmental performances. **Computers & Chemical Engineering**, v. 35, n. 8, p. 1454 – 1468, 2011. Citado na página [60](#).
- REZAEI, J.; DAVOODI, M.; TAVASSZY, L.; DAVARYNEJAD, M. A multi-objective model for lot-sizing with supplier selection for an assembly system. **International Journal of Logistics Research and Applications**, v. 19, n. 2, p. 125–142, 2016. Citado na página [92](#).
- SADRIAN, A. A.; YOON, Y. S. Business volume discount: A new perspective on discount pricing strategy. **International Journal of Purchasing and Materials Management**, National Association of Purchasing Management, Inc., v. 28, n. 2, p. 43, 1992. Citado na página [89](#).
- SAHLING, F.; BUSCHKÜHL, L.; TEMPELMEIER, H.; HELBER, S. Solving a multi-level capacitated lot sizing problem with multi-period setup carry-over via a fix-and-optimize heuristic. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 9, p. 2546 – 2553, 2009. Citado nas páginas [48](#) e [92](#).
- SANDBOTHE, R. A. A user interactive heuristic procedure for solving the multiple product cycling problem. **Computers & Operations Research**, v. 23, n. 9, p. 897 – 907, 1996. Citado na página [61](#).
- SHAH, N. Process industry supply chains: Advances and challenges. **Computers & Chemical Engineering**, v. 29, n. 6, p. 1225 – 1235, 2005. Selected Papers Presented at the 14th European Symposium on Computer Aided Process Engineering. Citado na página [94](#).
- SUNG, C.; MARAVELIAS, C. T. A mixed-integer programming formulation for the general capacitated lot-sizing problem. **Computers & Chemical Engineering**, v. 32, n. 1, p. 244 – 259, 2008. Process Systems Engineering: Contributions on the State-of-the-Art. Citado na página [40](#).
- SÜRAL, H.; DENIZEL, M.; WASSENHOVE, L. N. V. Lagrangean relaxation based heuristics for lot sizing with setup times. **European Journal of Operational Research**, v. 194, n. 1, p. 51 – 63, 2009. Citado na página [92](#).
- TEMPELMEIER, H. A simple heuristic for dynamic order sizing and supplier selection with time-varying data. **Production and Operations Management**, Blackwell Publishing Ltd, v. 11, n. 4, p. 499–515, 2002. Citado nas páginas [91](#) e [105](#).
- TEMPELMEIER, H.; BUSCHKÜHL, L. A heuristic for the dynamic multi-level capacitated lotsizing problem with linked lotsizes for general product structures. **OR Spectrum**, Springer-Verlag, v. 31, n. 2, p. 385–404, 2009. Citado nas páginas [14](#), [72](#), [87](#), [92](#), [105](#), [108](#), [109](#), [113](#), [117](#), [118](#), [120](#) e [139](#).

VELEZ, S.; MARAVELIAS, C. T. Multiple and nonuniform time grids in discrete-time MIP models for chemical production scheduling. **Computers & Chemical Engineering**, v. 53, p. 70 – 85, 2013. Citado na página [93](#).

_____. Reformulations and branching methods for mixed-integer programming chemical production scheduling models. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 52, n. 10, p. 3832–3841, 2013. Citado na página [93](#).

_____. Advances in mixed-integer programming methods for chemical production scheduling. **Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering**, Annual Reviews, v. 5, p. 97–121, 2014. Citado nas páginas [93](#) e [94](#).

VIEIRA, M.; PINTO-VARELA, T.; BARBOSA-PÓVOA, A. P. Periodic versus non-periodic multipurpose batch plant scheduling: A paint industry case study. In: ALMEIDA, J. P.; OLIVEIRA, J. F.; PINTO, A. A. (Ed.). **Operational Research**. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 445–465. ISBN 978-3-319-20328-7. Citado na página [62](#).

WEBER, C. A.; CURRENT, J. R.; BENTON, W. Vendor selection criteria and methods. **European Journal of Operational Research**, v. 50, n. 1, p. 2 – 18, 1991. Citado nas páginas [22](#) e [90](#).

WOLSEY, L. A. MIP modelling of changeovers in production planning and scheduling problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier Science, v. 99, n. 1, p. 154–165, 1997. Citado na página [61](#).

WU, T.; AKARTUNALI, K.; SONG, J.; SHI, L. Mixed integer programming in production planning with backlogging and setup carryover: modeling and algorithms. **Discrete Event Dynamic Systems**, v. 23, n. 2, p. 211–239, 2013. Citado na página [92](#).

XU, J.; LU, L.; GLOVER, F. The deterministic multi-item dynamic lot size problem with joint business volume discount. **Annals of Operations Research**, Kluwer Academic Publishers, v. 96, n. 1-4, p. 317–337, 2000. Citado na página [91](#).

YANG, Y.-N.; PARSAEI, H.; LEEP, H. A prototype of a feature-based multiple-alternative process planning system with scheduling verification. **Computers & Industrial Engineering**, v. 39, n. 1–2, p. 109 – 124, 2001. Citado na página [22](#).

Apêndices

DADOS COMPLEMENTARES DO ESTUDO DE CASO

Neste apêndice são apresentados dos dados que compõem a estrutura do problema abordado no estudo de caso do Capítulo 2, em seguida são apresentados os dados operacionais, ou seja, aqueles que sofrem alterações com o passar do tempo e, por fim, os diagramas de Gantt e as tabelas de campanhas produtivas adicionais.

A.1 Dados Estruturais do Estudo de Caso

As Tabelas 23 e 24 apresentam os tempos de preparação das receitas, em horas, das unidades produtivas m_2 e m_3 , respectivamente. Esses tempos são dependentes da sequência dessas receitas.

Tabela 23 – Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_2 .

	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}
r_8	0	6	6	-	3	6	6	-	6	-
r_9	6	0	9	6	6	3	-	6	-	6
r_{10}	6	6	0	6	6	6	6	-	-	6
r_{11}	-	6	6	0	-	-	6	-	-	-
r_{12}	-	3	3	-	0	3	3	-	-	-
r_{13}	-	-	6	-	-	0	-	6	6	6
r_{14}	6	-	6	6	6	3	0	6	6	-
r_{15}	-	6	-	-	-	6	6	0	-	-
r_{16}	6	-	-	-	-	6	6	-	0	-
r_{17}	-	6	6	-	-	6	-	-	-	0

Tabela 24 – Tempo de preparação, em horas, para unidade produtiva m_3 .

	r_{11}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}
r_{11}	0	16	16	16	16	16	8	16
r_{18}	16	0	-	-	-	-	8	16
r_{19}	16	-	0	-	-	-	8	16
r_{20}	16	-	-	0	-	-	8	16
r_{21}	16	-	-	-	0	-	8	16
r_{22}	40	-	-	-	-	0	40	16
r_{23}	8	16	16	16	16	16	0	16
r_{24}	8	8	8	8	8	8	8	0

A.2 Dados Operacionais do Estudo de Caso

A Tabela 25 apresenta o tempo, em minutos, que cada unidade produtiva tem disponível durante o horizonte de planejamento. As unidades m_2 e m_3 possuem paradas técnicas programadas, por isso devem ficar 9 e 13 dias sem produção, respectivamente. Essas paradas coincidem com a interrupção de fornecimento da matéria-prima f_1 , como pode ser visto na Tabela 26, e foram previamente acordadas entre a indústria e seu fornecedor.

Tabela 25 – Tempo disponível, em minutos, para as unidades produtivas em cada período.

	Períodos									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	4320	4320	4320	4320	4320	4320	0	0	0	4320
m_2	4320	4320	4320	4320	4320	4320	4320	4320	4320	4320
m_3	4320	4320	4320	4320	1440	0	0	0	0	4320

Tabela 26 – Estoque inicial e fornecimento de matéria-prima durante o horizonte de planejamento.

Estoque	Períodos										
	Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_1	538000	278900	310000	263700	217200	0	0	0	0	0	188800

A Tabela 27 apresenta a demanda dos produtos no decorrer do horizonte de planejamento de um mês. Alguns produtos possuem demanda a granel enquanto a maior parte apresenta demanda envasada. Dentre essas demandas, algumas são constantes durante o horizonte de planejamento, ou seja, elas são iguais em todos os períodos. Dessa forma, o produto j_{11} possui demanda a granel de 17,28 toneladas em cada um dos 10 períodos, além de uma demanda envasada de 110,7 toneladas apenas ao final do horizonte de planejamento. Por fim, a Tabela 28 indica quais os produtos que estavam inicialmente preparados para cada um dos equipamentos considerados nesse problema.

Tabela 27 – Demanda a granel e envasada dos produtos.

	Demanda a Granel		Demanda Envasada	
	Constante	Final do Horizonte	Constante	Final do Horizonte
j_1	0	0	0	2175
j_2	0	0	0	2274
j_3	0	0	0	12960
j_4	0	0	0	6423
j_5	0	0	0	5658
j_6	0	0	0	12150
j_7	0	0	0	13230
j_8	0	0	0	36630
j_9	0	0	0	64080
j_{10}	0	0	0	14700
j_{11}	17280	0	0	110700
j_{12}	5404	0	0	7720
j_{13}	0	30964	0	0
j_{14}	0	0	0	43920
j_{15}	0	0	0	73000
j_{16}	0	0	0	21600
j_{17}	0	0	0	45600
j_{18}	0	0	0	56500
j_{19}	0	0	0	58000
j_{20}	47184	0	0	29490
j_{21}	23600	0	0	118000
j_{22}	43057.5	0	0	28705
j_{23}	0	0	0	27515
j_{24}	0	0	0	85920

A Tabela 28 apresenta o estado inicial de todos os equipamentos no início do horizonte de planejamento, divididos por unidades produtivas, tanques de armazenamento multiproduto e equipamentos de envase.

Tabela 28 – Estado inicial da preparação dos equipamentos.

Equipamento	Elemento Inicial
m_1	r_3
m_2	r_8
m_3	r_{11}
k_1	j_9
k_2	j_{13}
k_3	j_{14}
k_4	j_{15}
k_5	j_1
k_6	j_2
k_7	j_{18}
k_8	j_{19}
k_9	j_{24}
k_{10}	j_8
k_{11}	j_{10}
n_1	j_{11}
n_2	j_8

A.3 Solução do Estudo de Caso

A Figura 44 utiliza o diagrama de Gantt para representar a programação da produção da unidade produtiva m_2 , após a resolução do modelo matemático apresentado na Subseção 2.2.2. Enquanto a A Tabela 29 apresenta a programação da produção da solução final de forma mais detalhada.

Figura 44 – Programação da produção da unidade produtiva m_2 .Tabela 29 – Sequência produtiva da unidade m_2 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

Receita	Número de bateladas	Início		Fim	
		Dia	Hora	Dia	Hora
r_{12}	3	01	03:00	01	19:48
r_{14}	1	01	22:48	02	05:06
r_{11}	4	02	11:06	03	20:42
r_9	7	04	02:42	05	22:06
r_{13}	3	06	01:06	06	19:06
r_{15}	2	07	06:00	09	17:48
r_9	3	10	00:24	10	19:00
r_{14}	2	10	19:00	11	07:36
r_{16}	3	11	14:30	12	18:24
r_8	2	13	00:24	14	17:00
r_{12}	5	14	20:00	16	00:00
r_{10}	2	16	03:00	18	03:00
r_{13}	1	18	09:00	18	15:00
r_{17}	1	19	00:24	21	23:12
r_{17}	1	21	23:12	24	22:00
r_{10}	1	25	04:00	26	04:00
r_{14}	4	26	10:00	27	11:12
r_9	2	27	11:12	27	23:36
r_{14}	1	27	23:54	28	06:12
r_{15}	2	28	12:12	31	00:00

A Figura 45 utiliza o diagrama de Gantt para representar a programação da produção da unidade produtiva m_3 , após a resolução do modelo matemático apresentado na Subseção 2.2.2. Enquanto a A Tabela 30 apresenta a programação da produção da solução final de forma mais detalhada.

Figura 45 – Programação da produção da unidade produtiva m_3 .

Tabela 30 – Sequência produtiva da unidade m_3 , referente à solução obtida pelas heurísticas construtiva e de melhoria.

Receita	Número de bateladas	Início		Fim	
		Dia	Hora	Dia	Hora
r_{20}	2	01	16:00	01	22:36
r_{21}	9	01	22:36	03	06:06
r_{22}	5	03	06:48	03	21:18
r_{20}	14	03	21:18	05	19:30
r_{21}	2	05	19:30	06	02:30
r_{11}	1	06	18:30	07	00:00
r_{11}	7	07	00:00	08	14:30
r_{24}	1	10	13:06	10	17:06
r_{22}	10	11	01:06	12	06:06
r_{21}	1	12	06:06	12	09:36
r_{20}	1	12	09:36	12	12:54
r_{18}	2	12	16:36	13	00:00
r_{22}	1	13	00:00	13	02:54
r_{19}	2	28	00:00	28	07:24
r_{24}	2	28	23:24	29	07:24
r_{11}	1	29	15:24	29	20:54
r_{23}	1	30	13:12	31	00:00

INSTÂNCIAS COMPLEMENTARES DE INDÚSTRIAS DE PROCESSOS

Neste apêndice são apresentados os dados estruturais das outras quatro classes de instâncias que compõem o estudo realizado no Capítulo 3.

B.1 Classe 2

A classe 2, baseada no trabalho de Tempelmeier e Buschkühl (2009) e representada pela Figura 46, possui três unidades produtivas (m_1 a m_3), as quais são utilizadas por dez tarefas de

Figura 46 – Representação da classe 2 por diagramas RTN.

produção (r_1 a r_{10}) para produzir dez produtos distintos (j_1 a j_{10}), apenas um por tarefa. Esses produtos competem por dez tanques multiprodutos através de suas tarefas de armazenamento (r_{11} a r_{80}). Note que existem dez tarefas de armazenamento para cada produto, logo r_{11} relaciona o tanque k_1 ao produto j_1 , r_{12} relaciona o tanque k_2 ao produto j_1 e assim sucessivamente. O tempo de processamento de todas as tarefas produtivas é constante e equivale a uma unidade de tempo. O horizonte de planejamento foi dividido em 1, 4, 8 e 12 períodos, variando de 32 até 288 unidades de tempo.

B.2 Classe 3

A classe 3, baseada no trabalho de [Barbosa-Póvoa e Macchietto \(1994\)](#) e representada pela Figura 47, possui três unidades produtivas (m_1 a m_3), que são utilizadas por quatro tarefas produtivas (r_1 a r_4) para produzirem quatro produtos distintos (j_1 a j_4), apenas um por tarefa. As tarefas r_1 e r_2 podem ser processadas tanto na unidade produtiva m_1 como na m_2 . A tarefa r_3 consome os produtos j_1 e j_2 em proporções iguais, assim como a tarefa r_4 consome os produtos j_1 e j_3 . Os produtos competem por quatro tanques multiprodutos através de suas tarefas de armazenamento (r_5 a r_{20}). Note que existem quatro tarefas de armazenamento para cada produto, logo r_5 relaciona o tanque k_1 ao produto j_1 , r_6 relaciona o tanque k_2 ao produto j_1 e assim sucessivamente. O tempo de processamento das tarefas produtivas está contido na Tabela 31. O horizonte de planejamento foi dividido em 1, 4 e 8 períodos, com 48 ou 96 unidades de tempo.

Figura 47 – Representação da classe 3 por diagramas RTN.

Tabela 31 – Tempo de processamento das tarefas da classe 3.

Tarefa	Unidade produtiva	Tempo de processamento
r_1	m_1	2
r_1	m_2	2
r_2	m_1	1
r_2	m_2	2
r_3	m_3	3
r_4	m_3	2

B.3 Classe 4

A classe 4, baseada no trabalho de [Pinto, Barbosa-Póvoa e Novais \(2008\)](#) e representada pela Figura 48, possui seis unidades produtivas (m_1 a m_6), as quais são utilizadas por seis tarefas de produção (r_1 a r_6) para produzirem oito produtos distintos (j_1 a j_8). As tarefas r_1 e r_2 podem ser processadas tanto na unidade produtiva m_1 como na m_2 . A tarefa r_4 consome 60% do

Figura 48 – Representação da classe 4 por diagramas RTN.

produto j_1 e 40% do produto j_3 , enquanto a tarefa r_5 consome 50% do produto j_4 e o restante de uma matéria-prima que não foi representada. A tarefa r_5 produz 70% de produto j_5 e 30% de j_8 , enquanto a tarefa r_6 produz j_6 e j_7 em proporções iguais. Os produtos j_1 e j_5 devem ser consumidos imediatamente, não podendo ser armazenados, já os demais produtos competem por seis tanques multiprodutos através de suas tarefas de armazenamento (r_7 a r_{36}). O tempo de processamento das tarefas produtivas está contido na Tabela 32. O horizonte de planejamento foi dividido em 1, 4 e 8 períodos, com 48 ou 96 unidades de tempo.

Tabela 32 – Tempo de processamento das tarefas da classe 4.

Tarefa	Unidade produtiva	Tempo de processamento
r_1	m_1	2
r_1	m_2	2
r_2	m_1	2
r_2	m_2	2
r_3	m_3	4
r_4	m_4	2
r_5	m_5	1
r_6	m_6	1

B.4 Classe 5

A classe 5, baseada em Kallrath (2002) e representada pela Figura 49, possui nove unidades produtivas (m_1 a m_9), as quais são utilizadas por dezessete tarefas de produção (r_1 a r_{17}) para produzirem dezoito produtos distintos (j_1 a j_{18}). As tarefas r_{10} a r_{14} , r_{16} e r_{17} podem

Tabela 33 – Tempo de processamento das tarefas da classe 5.

Tarefa	Unidade produtiva	Tempo de processamento
r_1	m_1	2
r_2	m_2	4
r_3	m_3	2
r_4	m_4	4
r_5	m_4	4
r_6	m_4	4
r_7	m_4	4
r_8	m_5	6
r_9	m_5	6
r_{10}	m_6	4
r_{10}	m_7	5
r_{11}	m_6	5
r_{11}	m_7	6
r_{12}	m_6	6
r_{12}	m_7	6
r_{13}	m_8	4
r_{13}	m_9	6
r_{14}	m_8	4
r_{14}	m_9	6
r_{15}	m_8	4
r_{16}	m_8	6
r_{16}	m_9	6
r_{17}	m_8	6
r_{17}	m_9	6

ser processadas por duas unidade produtiva distintas. A tarefa r_2 produz dois produtos, j_2 e j_3 , enquanto r_3 produz j_1 e j_4 . A tarefa r_{15} consome os produtos j_5 e j_{11} em proporções iguais. Os produtos j_5 , j_9 , j_{10} e j_{11} devem ser consumidos imediatamente, não podendo ser armazenados, já os demais produtos competem por quatorze tanques multiprodutos. As tarefas de armazenamento não estão representadas na Figura 49. O tempo de processamento das tarefas produtivas está contido na Tabela 33. O horizonte de planejamento é de 150 unidades de tempo.

Figura 49 – Representação da Classe 5 por diagramas RTN.