**Otimização no Corte de Peças
Unidimensionais com Restrições de Agrupamento**

Robinson Samuel Vieira Hoto

Orientador : Marcos Nereu Arenales

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos necessários para a obtenção do Título de
*Mestre em Ciências - Área: Ciências de Computação e
Matemática Computacional*

São Carlos - SP
dezembro de 1996

*O gênio, esse poder que
deslumbra os olhos hu-
manos, não é outra
coisa senão a perseve-
rança bem disfarçada.*

Johann Wolfgang von Goethe

RESUMO

Resumo: A relevância técnica e econômica das aplicações práticas dos Problemas de Corte e Empacotamento, bem como suas dificuldades de resolução, têm motivado o desenvolvimento de algoritmos heurísticos dos diversos problemas da área. O presente trabalho apresenta uma abordagem heurística para o Problema do Corte em Bobinas de Aço, onde as bobinas do estoque são cortadas em bobinas-intermediárias que por sua vez são laminadas antes de serem recortadas em bobinas finais.

Abstract: The Technical and economic relevance of practical packing and cutting problems and the difficulty inherent to their exact resolution have stimulated the development of heuristic algorithms focusing on case studies. This work presents a heuristic approach to a one-dimensional cutting problem that arises in cutting steel rolls. The raw material rolls are cut in to intermediate rolls. Each intermediate roll is laminated before being cut in to final rolls.

Para Marcos e meus Pais
com carinho

AGRADECIMENTOS

Dizem que a vida é cheia de surpresas.

Assim é a matemática, repleta de surpresas.

- Reservo um especial agradecimento a meu orientador Professor Marcos Nereu Arenales (um magnífico amigo) pelo crédito, pela paciência e dedicação, bem como os conselhos nas horas oportunas.

- Sou muito grato a meus pais Noêmia e José pelo incentivo e cobrança

Agradecimentos para :

- UNESP-SJRio Preto onde pude iniciar minha formação crítica e construir uma personalidade matemática.

- Professoras Neuza e Tereza pelas ótimas conversas, duas magníficas pessoas pelas quais tenho grande estima.

- Professor Júlio César por ter me iniciado no trabalho de investigação matemática.

- Professor Waldomiro pela valiosa amizade, mas que infelizmente já não se encontra entre nós.

- Professor Mário Barone. Nunca esquecerei os conselhos e conversas de um amigo fiel que infelizmente perdi. Uma pena que nossas vidas sejam tão frágeis.

- USP-São Carlos onde pude tomar contato com pessoas magníficas e prosseguir com minha formação matemática.

- Os colegas do curso de pós-graduação.

- As meninas da Secretaria de Pós-graduação (Bete, Laura e Marília) que sempre se mostraram muito atenciosas.

- Professora Ires Dias pela qual tenho profundo afeto e com quem estabeleci uma amizade muito especial.
- Professor Reinaldo Morabito Neto da UFSCar, por quem cultivo grande respeito, pela amizade e pelas valiosas sugestões neste trabalho.
- Professor Adriano Carneiro do SEL-EESC-USP por ter contribuído com excelentes sugestões.
- Ao Fabiano por ter nos auxiliado nas implementações.
- Universidade Estadual de Londrina.
- Os colegas do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina pela compreensão nos momentos de ausência.
- As Professoras Sandra e Ana Lúcia, amigas do Departamento, pela atenção nos momentos em que atravessei problemas de saúde.
- Ao Professor Antônio Carlos Mastine, chefe do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, pela compreensão.
- A Odete e Marcelo da Secretaria do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, pela atenção e amizade.
- A Fabiana pela amizade fraterna e incentivo.
- Reservo especial agradecimento a Simoni pelo amor e por ter estado sempre a meu lado.
- A FAPESP, CNPq e CAPES pelos investimentos financeiros desde minha época de graduação.
- A todas as pessoas e instituições que de alguma forma indireta contribuíram neste trabalho.

CONTEÚDO

Introdução	01
1 Considerações Iniciais	01
2 Problemas Correlatos e Classificação	03
O Problema da Alocação de Tarefas	04
Carregamento de Veículos	05
Programação de Veículos	06
O Problema do Balanceamento da Linha de Montagem	06
3 Seleção de Unidades Pequenas	07
4 Seleção de Unidades Grandes	09
5 Corte em Bobinas de Aço	10
 Capítulo I DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	12
1.1 O Processo de Corte	12
1.2 A Máquina de Corte	14
1.3 Laminação, Recozimento, Encruador e Recortadeira	15
Fluxo da Produção	16
1.4 Comentários sobre os Dados do Problema	17
 Capítulo II UMA MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA	19
2.1 O Modelo do Problema na forma de um Programa Linear Inteiro	19
Dados do Estoque e Demanda	20
O Modelo Simplificado do Problema	21
O Modelo Relaxado	22
2.2 Uma Abordagem Heurística para o Problema do Corte em Bobinas de Aço	23
Dados complementares	23
Os conceitos de Padrão de Corte Quase-Factível e Factível	25
O Modelo do Problema	26
Os conceitos de Grau de Alocação, Nível e Grau de Uso	27
Fluxograma	28
 Capítulo III MODIFICAÇÃO NO PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DE PADRÕES	29
3.1 Considerações Iniciais	29
O Agrupamento das Fitas e o conceito de Classe	30
Os conceitos de Grau de Laminação e Eficiência	30
O conceito de Grau de uma Classe	31

3.2 Geração de Padrões Factíveis	31
O Modelo que seleciona as Fitas a serem alocadas na formação de um Padrão	32
Ilustração da Geração dos Padrões	34
3.3 O Tempo de Laminação	35
A expressão que majora o Tempo de Laminação	37
3.4 Seleção de Bobinas	37
O Modelo que seleciona as Binas do Estoque	38
O critério de escolha do Padrão a ser Utilizado	39
3.5 O Algoritmo Modificado	40
Fluxograma	44
 Capítulo IV CONCLUSÕES	 45
 Apêndice O PROBLEMA DA MOCHILA	 47
1 Considerações Iniciais	47
2 O Problema da Mochila 0-1	48
3 O Problema da Mochila Restrito e Irrestrito	49
 Bibliografia	 50

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	DESCRIÇÃO	
Introdução		
1	Padrão de Corte numa barra de aço	01
2	Exemplos de Contêineres	02
3	Alocação de Tarefas	05
4	Carregamento de Contêineres em navios	05
5	Programação de Veículos	06
6	Balanceamento da linha de Montagem	07
7	Exemplo de um Padrão de Corte na Seleção de Unidades Pequenas	08
Capítulo I		
1.1	Processo de Corte em Bobinas de Aço	13
1.2	Esquema das perdas de material no Processo	13
1.3	Ilustração da Máquina de Corte	15
1.4	Esquema do processo de Laminação em perfil	16
1.5	Esquema simplificado do Fluxo de Produção	16
Capítulo II		
2.1	Fluxograma de um Algoritmo baseado num Procedimento Heurístico	28
Capítulo III		
3.1	Ilustração do Processo de Geração de Padrões	34
3.2	Fluxograma do Algoritmo Modificado	44
Capítulo IV		
8	Ilustração em Grafo E/OU de um Padrão de Corte	46

LISTA DE TABELAS**TABELA DESCRIÇÃO****Capítulo II**

2.2.1	Dados de algumas Fitas de uma Encomenda	25
2.2.2	Exemplo de um Padrão Quase-Factível	26
2.2.3	Exemplo de um Padrão Factível	26

NOTAÇÕES

NOTAÇÃO	DESCRIÇÃO
$\in$	Relação de Pertinência
$\subset$	Relação de Inclusão
$\leq$	Menor ou igual a ...
$\geq$	Maior ou igual a ...
$<$	Menor que ...
$>$	Maior que ...
$=$	Relação de Igualdade
$ $	“Tal que”
$\forall$	Quantificador Universal
$\exists$	Quantificador Existencial
$\Rightarrow$	Sinal de Implicação
$\Leftrightarrow$	Sinal de Equivalência
$+, -, \dots$	Operações Aritméticas habituais
Σ	Somatório
∞	“Infinito”
$\cup$	Reunião de Conjuntos
$\cap$	Intersecção de Conjuntos
$\{ \}$	Delimitador de Conjunto
$[] , ()$	Delimitadores de Intervalo
$\lfloor \rfloor$	Função Maior Inteiro
$A, B, C, \dots, Z$	Conjuntos
$\alpha, \beta, \dots, \zeta$	Parâmetros
$a, b, c, \dots, x$	Variáveis ou Parâmetros
$i, j, k, \dots$	Índices

PREFÁCIO

Foram os trabalhos pioneiros de Gilmore & Gomore (cerca de 30 anos atrás) [Gilmore e Gomore, 1961(3)] que proporcionaram um enorme interesse por questões de Corte e Empacotamento que desde então tiveram um aumento considerável, basta tomarmos como referência trabalhos que foram desenvolvidos desde então [Haessler, 1979], [Sweeney e Paternoster, 1992], [Yanasse, Zinober e Harris, 1990], [Morabito e Arenales, 1995] e outros. Podemos citar, por exemplo, a formação de um grupo em 1987 denominado SICUP (Special Interest Group on Cutting and Packing Problems) hoje sediado na Alemanha.

No presente trabalho nos preocupamos em estudar o Problema do Corte em bobinas de aço sujeitas a Laminação, revisando trabalhos e artigos na tentativa de melhorar algumas idéias [Ferreira, Neves e Castro, 1990], [Carvalho e Rodrigues, 1994]. Podemos destacar desde já que temos interesse numa futura utilização de uma abordagem em grafo E/OU para o referido problema [Morabito, 1992]. A idéia desta abordagem será brevemente comentada na conclusão final, quarto capítulo.

A fim de atingirmos nossos objetivos iremos fazer uma descrição dos processos de corte definindo o problema no primeiro capítulo. Veremos em seguida no segundo capítulo um Modelo de Programação Linear Inteira Misto, onde alguns comentários das dificuldades, relaxação e resultados obtidos serão discutidos. Na sequência apresentamos uma abordagem Heurística onde poderemos ter a oportunidade de compreender melhor o problema.

De posse destas informações apresentaremos no terceiro capítulo algumas modificações no Método Heurístico, utilizando algumas idéias do P.L.I. misto modelado, bem como outras que surgiram no decorrer de nossos estudos onde estaremos resolvendo Problemas de Mochila que envolvem questões de seleção.

Finalmente as conclusões que nos foram possíveis obter com o estudo deste problema são descritas no quarto capítulo. O trabalho consta ainda de um apêndice que traz uma breve abordagem sobre o Problema da Mochila [Morabito, 1992], [Martello e Toth, 1990]. A bibliografia, apesar de não ser extensa, entrelaça trabalhos de revisão e estes sim fornecem uma literatura mais forte.

INTRODUÇÃO

1 Considerações Iniciais

De uma maneira bem simplista podemos dizer que os Problemas de Corte consistem em obter a forma mais adequada de se cortar peças grandes, normalmente denominadas “objetos”, em peças menores denominadas “itens”.

Os objetos que serão cortados podem estar em estoque, serem adquiridos de fornecedores, ou produzidos na própria indústria, de maneira que, suas dimensões dependem de restrições técnicas ou de mercado. As maneiras como os itens são combinados em cada objeto, que via de regra *são inúmeras*, definem o que normalmente denominamos “Padrões de Corte”. Na figura 1 temos a ilustração de um possível padrão de corte em uma barra de aço.

Gostaríamos de salientar que quando temos que *acionar* unidades pequenas (itens) em unidades maiores (objetos) temos um problema semelhante ao de cortar objetos, de forma que, os *espaços ociosos* correspondem aos refugos no Problema de Corte.

Este é um *Problema de Empacotamento* e por este motivo denominamos o padrão de “Padrão de Empacotamento”.

Para exemplificar um problema de empacotamento podemos imaginar contêineres a serem carregados, evidentemente que nosso objetivo é aproveitar o máximo possível de seu espaço. Vale salientar que podemos nos deparar com certos inconvenientes, por exemplo, no caso de contêineres aéreos duas de suas faces laterais apresentam geometria trapezoidal, ao contrário dos convencionais que apresentam geometria retangular. A figura 2 traz uma ilustração destes contêineres [Morabito, 1992].

A importância prática, tendo em vista a econômica, vem cada vez mais se efetivando nos processos de otimização tornando-se alvo de estudo e pesquisa de muitos matemáticos. Existe na literatura um rico estudo de casos de Problemas de Corte e Empacotamento [Dowsland e Dowsland, 1992], [Dyckhoff e Finke, 1992], [Morabito, 1992] e outros, entretanto podemos nos defrontar com um problema trazendo consigo enormes dificuldades no seu tratamento.

Via de regra, as técnicas na tentativa de solucionar um Problema de Corte apoiam-se em algumas abordagens especializadas como : Programação Dinâmica, Relaxação Lagrangeana, Heurísticas, busca em grafos E/OU e outras. A dificuldade na resolução de problemas desta natureza reside no fato de cada um possuir particularidades específicas, tornando-se improvável a obtenção de Métodos Gerais e eficientes.

Os Problemas de Corte e Empacotamento pertencem a classe dos problemas NP-completos, conforme Golden e Garey-Johnson, que podemos a grosso modo dizer que são problemas improváveis de serem solúveis num tempo polinomial limitado.

O interessante é observar que existem resultados teóricos afirmando que se um problema desta classe puder ser resolvido em um tempo limitado via um polinômio no tamanho dos dados, então todos os problemas da classe terão solução em tempo polinomial, mas parece pouco provável obter tal membro. Alguns matemáticos dedicam-se a esta linha de pesquisa.

Podemos destacar as seguintes características básicas com relação aos Problemas de Corte e Empacotamento [Dyckhoff, Abel e Gal 1985] :

- (i) Existência de unidades do estoque que são os já mencionados “objetos”.
- (ii) Existência de unidades a serem produzidas que são os já mencionados “itens”.
- (iii) Uma forma combinatorial descrita por algum processo que depende da natureza do problema, onde os itens são geometricamente adequados ao objeto.

2 Problemas Correlatos e Classificação

De uma maneira geral os Problemas de Corte e Empacotamento nos faz pensar numa classificação natural segundo seu aspecto geométrico mais simples, ou seja, comprimento, largura e altura. O fato de um problema ser uni, bi ou tridimensional e às vezes multidimensionais tem sido a característica mais marcante na classificação de um problema [Dyckhoff e Finke, 1992].

O problema é dito unidimensional quando temos apenas uma dimensão relevante, como é o caso do corte de barras de aço amplamente utilizadas na construção civil.

Quando duas dimensões são relevantes o problema é dito bidimensional, por exemplo o corte de placas de madeira na indústria moveleira, estudos de problemas desta natureza podem ser vistos em [Yanasse, Zinober e Harris, 1990] e [Morabito e Arenales, 1995]. Caso as três dimensões sejam de importância o problema é dito tridimensional e este é o caso, por exemplo, do empacotamento de unidades em contêineres [Morabito, 1992].

Temos ainda problemas do tipo 1.5-dimensional, onde duas dimensões estão em jogo e uma delas é variável, um exemplo deste caso é o corte de peças de vestuário numa bobina de tecido com largura fixa e comprimento suficientemente grande. Outros problemas que aparecem são do tipo 2.5-dimensional, neste caso temos três dimensões em jogo uma das quais é variável, um exemplo deste caso é o problema de se efetuar o carregamento de unidades dentro de caixas abertas, ou seja, as bases estão definidas, mas a altura deverá ser definida.

Um fato bastante intrigante é que alguns problemas, intimamente ligados à estrutura de Problemas de Corte e Empacotamento, podem ser vistos, segundo outro ponto de vista, com características não espaciais como peso (na verdade massa, porém em todo texto será escrito peso), tempo, fator humano e assim por diante [Dyckhoff e Finke, 1992], [Morabito e Arenales, 1995]. Tais problemas são facilmente encontrados na prática, vejamos alguns deles :

2.1 O Problema da Alocação de Tarefas

Tarefas devem ser executadas lançando-se mão recursos com uma determinada disponibilidade diária de tempo. As tarefas não podem ser subdivididas, porém podem ser distribuídas em quaisquer dias de trabalho e em qualquer ordem. A questão é :

Como alocar tarefas nos dias de trabalho, de modo que, a disponibilidade diária de recursos seja respeitada minimizando o número de dias de trabalho ? [Morabito, 1992]. A figura 3 ilustra o problema.

2.2 Carregamento de Veículos

Digamos que um certo número de produtos com pesos associados a cada um deles devam ser carregados em veículos que possuam uma mesma capacidade.

Coloca-se a seguinte questão: Como efetuar o carregamento, respeitando a capacidade de cada veículo levando em conta o peso de cada produto carregado, objetivando minimizar o número de veículos ?

Na prática, este tipo de problema pode ser visto num porto onde navios devem ser carregados com "contêineres". A figura 4 ilustra de forma simples esta situação.

2.3 Programação de Veículos

Suponha que um produto perecível deva ser transportado de seu local de fabricação até determinados redistribuidores. Para tanto existirá um certo número de rotas e um tempo associado a elas constando de carregamento, entrega e retorno. Por outro lado, estas rotas deverão ser percorridas num Tempo Limite, pois o produto transportado é perecível, além disto, os veículos poderão percorrer mais de uma rota.

A questão é : Como programar tais veículos, a fim de, percorrê-las sem que haja perda de produto objetivando minimizar o número de veículos ? Na prática, podemos encontrar este tipo de problema na distribuição de jornais. A figura 5 ilustra o problema.

2.4 O Problema do Balanceamento da Linha de Montagem

Imagine estações de trabalho com mesma capacidade de tempo T .

Suponha que tenhamos n tarefas de duração t_i ($i = 1, \dots, n$) a serem alocadas nas estações. Coloca-se a seguinte questão : Como alocar as tarefas no menor número possível de estações respeitando a capacidade de tempo ? Ainda, deve-se levar em consideração uma ordem dentro de cada estação, bem como uma ordem entre as estações.

A figura 6 ilustra a situação anterior.

Cabe observar que existem muitos outros problemas que se inserem no contexto de *Corte e Empacotamento* como por exemplo, o problema de alocação de memória, orçamento de capital e assim por diante.

3 Seleção de Unidades Pequenas

Observando os exemplos anteriores, nos *Problemas de Corte e Empacotamento* existe a questão de se alocar unidades pequenas (itens) em unidades grandes (objetos). Podemos identificar pelo menos duas formas possíveis de se efetuar esta alocação, uma delas é a *Seleção de Unidades Pequenas* que passaremos a ver agora.

A questão de selecionar unidades pequenas está baseada no fato do número de objetos do estoque ser insuficiente para atender as demandas dos itens de uma encomenda. Por simplicidade tomaremos um exemplo unidimensional que é ilustrado na figura 7, onde os objetos são bobinas de largura L e os itens são sub-bobinas de largura ℓ_i .

Como todas as bobinas do estoque serão efetivamente cortadas, estaremos preocupados em maximizar a utilização de suas larguras.

Este problema pode ser modelado pela introdução da variável a_{ij} que indicará o número de sub-bobinas de largura l_i que aparecem numa bobina j .

Desta maneira, o modelo tem a seguinte forma :

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \ell_i a_{ij} \\
& \text{sujeito a:} \\
& \sum_{i=1}^m \ell_i a_{ij} \leq L_j \quad j=1, \dots, n \quad 3.1 \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i \quad i=1, \dots, m \\
& a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}
\end{aligned}$$

Onde m é o número total de tipos de sub-bobinas e n é o número de bobinas de largura L_j .

4 Seleção de Unidades Grandes

O caso onde temos que *selecionar unidades grandes* ocorre quando o número de objetos do estoque é suficiente para atender as demandas dos itens de uma determinada encomenda. Como anteriormente, exemplificaremos este caso com um problema unidimensional, porém com várias bobinas em estoque.

Como as bobinas do estoque são suficientes para o atendimento da encomenda, nosso objetivo será o de minimizar a quantidade de bobinas necessárias para cumprir toda a encomenda. Este problema é conhecido na literatura como o *Problema de Corte de Peças de Estoque* e para escrevermos seu modelo consideraremos :

- x_j : número de vezes que o padrão j é utilizado
- a_{ij} : número de sub-bobinas (itens) do tipo i que aparecem no padrão j
- b_i : demanda da sub-bobina (item) do tipo i
- c_j : custo de utilização do padrão j

Considerando que conhecemos o número total de padrões de corte, indicado pela variável p e que temos m tipos de sub-bobinas (itens) compondo a encomenda, podemos escrever :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \sum_{j=1}^p c_j x_j \\ &\text{sujeito a:} \\ &\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_j \geq 0 \text{ e inteiro, } j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad 4.1$$

Para maiores detalhes dos assuntos destas duas seções que acabamos de descrever, veja [Morabito, 1992].

5 Corte em Bobinas de Aço

Neste trabalho estaremos preocupados em explorar o problema de se efetuar cortes em bobinas de aço sujeitas a um processo técnico que é a Laminação do aço.

Uma peculiaridade deste problema reside no fato de que as “bobinas-mestre” (objetos) não suportam a Laminação devido a sua largura, em outras palavras, elas devem ser cortadas em “bobinas-intermediárias” cuja largura aceita a Laminação e posteriormente recortadas em “fitas” (itens) [Ferreira, Neves e Castro, 1990].

Temos, portanto, duas etapas de corte bem caracterizadas, definindo um “agrupamento” das fitas (bobinas-intermediárias deverão produzir fitas de mesma espessura e mesmo tipo de aço) após a construção de um padrão de corte. Neste momento surge um problema bastante significativo que pode ser modelado como um *Problema de Mochila 0-1* :

Como selecionar convenientemente as bobinas do estoque que deverão ser cortadas segundo aquele padrão de corte ?

A relevância dele está ligada com três aspectos importantes :

- (i) A Laminação que tem um custo elevado.
- (ii) A Troca de Padrões que introduz um número acentuado de acertos de máquina (setup).
- (iii) A perda de material que temos por simples objetivo minimizar o custo.

Os dois processos citados em (i) e (ii) encarecem consideravelmente a programação dos cortes durante a produção dos itens da encomenda, daí desprendermos uma atenção especial a eles, visando também o menor gasto possível com material.

Este problema possui suas próprias particularidades e isto o torna merecedor de uma atenção mais cuidadosa, levando-nos a um estudo à parte dos problemas clássicos já conhecidos.

CAPÍTULO I

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo descreveremos como se dá efetivamente o processo de corte em bobinas de aço procurando defini-lo com clareza. Além disto, também faremos uma descrição das características do estoque, da demanda e dos custos envolvidos no processo de produção.

Evidentemente que o que será descrito neste capítulo consiste numa idealização daquilo que na prática podemos encontrar, entretanto está bem adequado ao problema em questão. As definições a seguir são encontradas em [Ferreira, Neves e Castro, 1990] e [Pereira, 1993].

1.1 O Processo de Corte

Como já é de nosso conhecimento, as bobinas de aço necessitam ser cortadas em duas etapas por uma razão bem simples : a Laminação.

Antes de prosseguirmos vamos considerar os seguintes conceitos :

Definição 1.1.1

Bobinas-mestre são os *objetos* a serem cortados. *Bobinas-intermediárias* são as bobinas obtidas durante a primeira etapa de corte, são portanto, as *bobinas que sofrerão Laminação*. *Fitas* são os *itens* obtidos durante a segunda etapa de corte a partir das bobinas-intermediárias.

A figura 1.1 nos dá uma idéia mais clara de como se dá o processo de corte das bobinas.

Definição 1.1.2

Denomina-se "*Refugo*" todo tipo de *perda inevitável* de material durante o processo de obtenção das fitas, e "*Sobra*" todas as outras categorias de perdas de material.

Com o processo de corte se dando desta forma temos dois refugos intrínsecos, um durante a Primeira Etapa de Corte e outro durante a Segunda Etapa de Corte [Ferreira, Neves e Castro, 1990]. A figura 1.2 ilustra melhor este fato :

Considere L a largura da bobina-mestre e sejam $L_{\min}$ e $L_{\max}$, respectivamente, a largura mínima e máxima permissíveis para Laminação. O número de bobinas-intermediárias, que representaremos por m^p , é tal que $r \leq m^p \leq s$, onde :

$$r = \left\lfloor \frac{L}{L_{\max}} \right\rfloor + 1 \quad \text{e} \quad s = \left\lfloor \frac{L}{L_{\min}} \right\rfloor \quad 1.1.1$$

Na prática, segundo Ferreira, Neves e Castro, observa-se que os valores ideais para r e s são respectivamente 3 e 6.

1.2 A Cortadeira

A grosso modo, uma bobina-mestre é desenrolada de maneira uniforme e o processo de corte para obtenção das bobinas-intermediárias é feito longitudinalmente por “discos de corte” (não há cortes transversais e por isto podemos entender que o problema é unidimensional, análogo ao de se cortar barras de aço - veja figura 1 da introdução -). Posteriormente ela é enrolada formando as bobinas-intermediárias que passarão ou não para o processo de Laminação [Pereira, 1990], uma vez que, se a espessura das fitas de alguma bobina-intermediária for idêntica à da bobina-mestre ela não necessita ser Laminada, fato este que será explorado mais adiante. A figura 1.3 ilustra o processo de corte.

figura 1.3

1.3 Laminação, Recozimento, Encruador e Recortadeira.

O processo de Laminação tem por objetivo diminuir (quando necessário) a espessura do material de uma bobina-intermediária.

Cabe notar que eventualmente uma mesma bobina-intermediária poderá sofrer mais de uma Laminação; isto é necessário para que se possa obter a espessura desejada do material.

Devemos salientar ao leitor que quando submetemos uma mesma bobina-intermediária a mais de uma Laminação, o material torna-se quebradiço devido a razões físicas. Face a este inconveniente é necessário darmos um tratamento térmico ao material que é denominado Recozimento, desta forma o ideal seria Laminar o menos possível.

Após a última Laminação e Recozimento, o material da bobina adquiriu algumas imperfeições superficiais que são corrigidas num aparelho denominado Encruador.

O Encruador nada mais é que um Laminador, que ao contrário do convencional, apenas corrige suavemente as imperfeições da superfície do material da bobina.

A figura 1.4 ilustra o Processo de Laminação em perfil.

Após passar pelo Encruador a bobina-intermediária é submetida a Recortadeira que é semelhante à Cortadeira, porém ela é preparada para que se obtenha as fitas.

Basicamente o fluxo da produção pode ser resumido pelo esquema representado na figura 1.5, entretanto vale salientar que pode haver pequenas alterações.

1.4 Dados do Problema

1.4.1 Estoque

As bobinas-mestre que compõem o estoque possuem mesma largura e seus diâmetros são variáveis, portanto temos bobinas de diversos pesos, bem como espessuras. Torna-se cômodo classificá-las convenientemente como faremos no próximo capítulo.

1.4.2 Demanda

Basicamente os dados da demanda são formados pelas larguras das fitas, seus respectivos pesos, espessura e tipos de aço (o aço recebe uma classificação segundo sua dureza, detalhes disto será visto no decorrer do texto).

Ainda com relação à demanda, podemos destacar o fato de que diferentes pedidos com mesmas características, podem ser agrupadas num único pedido.

1.4.3 Custos

Custos inerentes ao processo e relativos às perdas de material são típicos do problema. Dentre os custos inerentes podemos destacar o custo de Laminação, custos devido a refugos que de uma maneira geral estão intimamente ligados aos tipos de equipamentos disponíveis e a fatores tecnológicos, e custos devido aos acertos de corte (troca de padrões).

O custo de Laminação é uma preocupação fundamental e neste sentido tentamos evitar o máximo possível este tipo de operação, pois Laminar como já ressaltamos,

é um processo caro. Naturalmente o processo de Laminação nem sempre poderá ser evitado, neste caso estaremos interessados na minimização do tempo deste processo.

Do mesmo modo estaremos preocupados com os custos, ou tempos na troca de padrões (setup), visto que este processo afeta a produção. O próximo capítulo consiste no estudo de dois Modelos distintos, onde ficará evidente a necessidade da abordagem Heurística.

CAPÍTULO II

UMA MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Neste capítulo faremos uma revisão de dois modelos para o problema encontrados em [Pereira, 1993] e [Ferreira, Neves e Castro, 1990].

2.1 Um Modelo de Programa Linear Inteiro

Nesta seção veremos um P.L.I. que modela o problema segundo [Pereira, 1993].

Dependendo da finalidade do aço (uma liga de ferro-carbono) ele deverá ter uma determinada dureza, que é definida segundo seu teor de carbono. Esta dureza é diretamente proporcional ao teor de carbono da liga. Desta forma, torna-se conveniente uma classificação dos diversos tipos de aço segundo a dureza do próprio.

As aplicações do aço são as mais variadas, na construção civil, na indústria automobilística, na indústria de móveis e assim por diante. Devido à diversificação da utilização do aço, os diversos setores fazem uso de uma classificação conveniente a seus propósitos. No problema em questão temos que considerar *aço laminado*, cuja classificação segue os critérios da *SAE (Society of Automotive Engineers)*.

Para exemplificar, um aço classificado como *SAE 1008*, é um aço do tipo 10 com 8 % de carbono na liga. Alguns autores como [Ferreira, Neves e Castro, 1990], utilizam *intervalos de dureza* que definem o tipo do aço, assim cada intervalo de dureza estará associado a um aço específico. Do ponto de

vista matemático, isto não acarreta nenhum prejuízo, pois o que de fato importa nas diversas situações do problema é termos a capacidade de diferenciar precisamente os vários tipos de aço.

Para apresentarmos o modelo do problema consideraremos os seguintes conjuntos e dados :

$\mathbf{A} = \{\alpha_k \mid k \in \mathbf{H}\}$, conjunto dos diferentes tipos de aço onde $\mathbf{H}$ é um conjunto de índices.

$\mathbf{J}$, conjunto de índices que identificam as várias bobinas do estoque.

$\mathbf{I}$, conjunto de índices que identificam as fitas encomendas.

2.1.1 Dados do Estoque

L : largura de uma bobina.

LU : largura útil de uma bobina.

W_j : peso de uma bobina j , $j \in \mathbf{J}$.

E_j : espessura de uma bobina j , $j \in \mathbf{J}$.

V_j : custo associado a uma bobina j , $j \in \mathbf{J}$.

2.1.2 Dados das Fitas

ℓ_i : largura da fita i , $i \in \mathbf{I}$.

e_i : espessura do aço da fita i , $i \in \mathbf{I}$.

d_i : demanda da fita i , $i \in \mathbf{I}$.

2.1.3 Parâmetros

$L_{\min}$: largura mínima permissível para Laminação.

$L_{\max}$: largura máxima permissível para Laminação.

$Tlam_{jk}$: tempo necessário para laminar da espessura E_j até e_k , $j \in J$.

α : parâmetro associado ao tempo de Laminação.

M : um número relativamente grande.

Considere o seguinte agrupamento $C_k = \{i \in I \mid \alpha_i = \alpha_k, e_i = e_k\}$

($k \in H$) para as fitas, e ainda as seguintes variáveis :

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a bobina } j \text{ for escolhida.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se a bobina-intermediária } k, \text{ obtida da bobina } j, \text{ deve ser laminada.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a_{ij} : número de fitas i que aparecem numa bobina j , $i \in I$ e $j \in J$.

Finalmente podemos escrever um modelo simplificado do problema a partir de um modelo completo que não iremos apresentar :

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_j V_j y_j + \alpha \left(\sum_{j,k} \frac{Tlam_{jk}}{L_{\max}} \left(\sum_{i \in C_k} \ell_i a_{ij} \right) \right) \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i \in C_k} \ell_i a_{ij} \leq y_j \cdot LU \quad j \in J \\ & \sum_j \frac{W_j}{L} \ell_i a_{ij} \geq d_i \quad i \in C_k \\ & z_{jk} L_{\min} \leq \sum_{i \in C_k} \ell_i a_{ij} \leq z_{jk} M \quad j \in J \\ & y_j = 0 \text{ ou } 1 \\ & z_{jk} = 0 \text{ ou } 1 \\ & a_{ij} \geq 0, \text{ inteiro} \\ & \alpha_k = \alpha \quad k \in H \end{aligned} \quad 2.1.1$$

Introduzindo a variável m_{jk} no modelo anterior, que representará a largura da bobina-intermediária k numa bobina j ($m_{jk} = \sum_i \ell_i a_{ij}$), obteremos um modelo relaxado que será dado por :

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad \sum_j V_j y_j + \alpha \left(\sum_{j,k} T_{j,k} m_{jk} \frac{m_{jk}}{L_{\max}} \right) \\
 &\text{sujeito a:} \\
 &\quad \sum_k m_{jk} \leq y_j \cdot LU \quad j \in J \\
 &\quad \sum_j \frac{W_j}{L} m_{jk} \geq \sum_{i \in C_k} d_i \\
 &\quad z_{jk} L_{\min} \leq m_{jk} \leq z_{jk} M \quad j \in J \quad 2.1.2 \\
 &\quad y_j = 0 \text{ ou } 1 \\
 &\quad z_{jk} = 0 \text{ ou } 1 \\
 &\quad m_{jk} \geq 0 \\
 &\quad \alpha_k = \alpha \quad k \in H
 \end{aligned}$$

O modelo acima foi resolvido baseado no método *Branch-and-bound* e optou-se em usar estimativas para a solução, como critério de parada. Com o objetivo de diminuir o processo de busca, foi tentada a utilização da estimativa do limitante inferior do modelo 2.1.2, a fim de fornecer um valor inicial de solução. O emprego deste recurso gerou uma imprevisibilidade na qualidade das soluções, contribuindo para seu abandono.

Um outro problema que surgiu durante a resolução do problema foi com relação ao excesso de produção. *A priori*, a restrição $\sum_j \frac{W_j}{L} \ell_i a_{ij} \geq d_i$ poderia ser

substituída por uma equivalente dada por $(1-\varepsilon)d_i \leq \sum_j \frac{W_j}{L} \ell_i a_{ij} \leq (1+\varepsilon)d_i$, $0 < \varepsilon < 1$.

Entretanto, isto poderia tornar o problema infactível, tendo em vista suas particularidades e o Método de Resolução que optou-se. Uma forma de contornar este inconveniente seria

introduzindo um termo na função objetivo do modelo, que penalizasse o excedente da produção. Finalizando esta seção, podemos perceber que dadas as especificidades do problema é justificável a busca de um algoritmo especializado, isto será apresentado na seção seguinte onde se faz uso de uma abordagem Heurística.

2.2 Uma Abordagem Heurística para o Problema do Corte em Bobinas de Aço

Nesta seção veremos um Procedimento Heurístico que efetua a geração dos padrões de corte, segundo [Ferreira, Neves e Castro, 1990].

Buscando obter um algoritmo especializado, a idéia básica da abordagem Heurística consiste em obter padrões de corte para uma largura L , que produza baixa perda de material e que possam ser utilizados o máximo de vezes possível.

Diferente do modelo anterior onde as bobinas-mestre foram consideradas separadamente.

Apenas por questões didáticas usaremos a mesma tipologia empregada no parágrafo anterior, com respeito à classificação dos diferentes tipos de aço. Quanto aos dados e variáveis do problema considere os seguintes ajustes :

2.2.1 Dados das Bobinas-intermediárias

r : número mínimo de bobinas-intermediárias numa bobina do estoque.

s : número máximo de bobinas-intermediárias numa bobina do estoque.

$N_{\max}$: número máximo de fitas numa bobina-intermediária.

2.2.3 Parâmetros

S_1 : refugio da primeira etapa de corte.

S_2 : refugio da segunda etapa de corte.

V_1 : custo do material por unidade de peso.

V_2 : custo relativo à troca de padrões.

Considere a seguir as seguintes variáveis :

$$x_j^p = \begin{cases} 1, & \text{se o padrão } p \text{ é usado para cortar a bobina } j, \quad j \in \mathbf{J}. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a_i^p : número de fitas de largura ℓ_i ($i \in \mathbf{I}$), segundo o padrão de corte p .

LU^p : largura útil de uma bobina segundo o padrão de corte p .

m^p : número de bobinas-intermediárias segundo o padrão de corte p .

m_k^p : largura de uma bobina-intermediária k segundo o padrão de corte p .

Seja ainda a função δ e o seguinte conjunto :

$$\delta : \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}, \text{ tal que } \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_k^p = \{i, j \in \mathbf{I} \mid e_i = e_j, \alpha_i = \alpha_j\}, \text{ indicando as fitas do padrão de corte } p \text{ que podem ser}$$

agrupadas numa bobina-intermediária k ($k = 1, \dots, m^p$).

Considere as seguintes definições :

Definição 2.2.1

Um padrão de corte é *quase-factível* se para cada fita que o compõe, não há excesso de produção e se as seguintes restrições são verificadas :

$$LU^p = L - (m^p S_2 + S_1) \quad 2.2.1$$

$$\sum_{i \in I} \ell_i a_i^p \leq LU^p \quad 2.2.2$$

$$a_i^p \geq 0, \quad i \in I \text{ e inteiro} \quad 2.2.3$$

$$r \leq m^p \leq s \text{ e inteiro} \quad 2.2.4$$

Definição 2.2.2

Um padrão de corte é *factível* se ele é um padrão *quase-factível* e se as seguintes restrições são verificadas :

$$m_k^p = \left(\sum_{i \in C_k^p} a_i^p \ell_i \right) + S_2 \quad 2.2.5$$

$$L_{\min} \leq m_k^p \leq L_{\max} \quad 2.2.6$$

$$\sum_{i \in C_k^p} a_i^p \leq N_{\max} \quad 2.2.7$$

Vamos ilustrar dois padrões de corte, um quase-factível e outro factível, para isto iremos considerar bobinas-mestre com 1040 mm de largura, $S_1 = 5 \text{ mm}$, $S_2 = 6 \text{ mm}$, $L_{\min} = 100 \text{ mm}$ e $L_{\max} = 530 \text{ mm}$.

Largura (mm)	Dureza (Kg / mm ²)	Espessura
130	55 a 75	4.5
174	65 a 75	4.5
129	32 a 40	3.5
75	30 a 40	3.5
205	30 a 39	2.5
20	34 a 45	2.5

Tabela 2.2.1 (Características de algumas Fitas de uma Encomenda)

Largura Fitas (mm)	Número de Fitas	Largura Total (mm)
174	1	174
129	2	258
75	5	375
205	1	205

Tabela 2.2.2 (Padrão *Quase-Factível*)

Largura Fitas (mm)	Número de Fitas	Largura Total (mm)
174	1	174
75	6	450
205	1	205
20	9	180

Tabela 2.2.3 (Padrão *Factível*)

Observe que pela Tabela 2.2.2 as fitas de largura 129 mm e 75mm podem ser agrupadas, entretanto este agrupamento fornecerá uma bobina-intermediária de largura 633 mm violando a restrição 2.2.6 . Por outro lado na Tabela 2.2.3 as fitas de largura 205 mm e 20 mm podem ser agrupadas sem que aquela restrição seja violada.

Com estas informações vamos admitir que de alguma forma um padrão factível p tenha sido obtido, daí podemos formular o seguinte P.L.I. para o problema :

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && V_1 \left(\sum_{p,j} W_j x_j^p - \sum_i d_i \right) + V_2 \left(\sum_p \delta \left(\sum_j x_j^p \right) \right) \\
 &\text{sujeito a :} && \\
 &&& (1 - \varepsilon) d_i \leq \sum_{p,i} \ell_i a_i^p \left(\frac{W_j}{L} \right) x_j^p \leq (1 + \varepsilon) d_i \\
 &&& x_j^p = 0 \text{ ou } 1 \\
 &&& i \in I \\
 &&& j \in J \\
 &&& p = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

O leitor pode perceber que o P.L.I. anterior irá gerar um número muito grande de padrões o que inviabiliza a resolução do modelo. Neste sentido parece-nos bastante justificável o uso de Heurísticas.

Considere os seguintes conceitos :

Definição 2.2.3 Denomina-se *Grau de Alocação* de uma fita i , anota-se $Galoc_i$, o produto entre sua demanda atual e sua respectiva largura.

Definição 2.2.4 Denomina-se *Nível de Uso* de um padrão de corte p , o seguinte número : $NU^p = \sum_j x_j^p$.

Definição 2.2.5 Seja um padrão de corte p . Anotando por RS^p as perdas (refugos e sobras) de material segundo este padrão, denominamos *Grau de Uso* do padrão p o seguinte número : $GU^p = \frac{L \cdot NU^p}{RS^p}$

Devido à grande dimensão do problema é impraticável gerar padrões considerando todas as fitas, assim sendo seleciona-se algumas delas segundo o Grau de Alocação, e uma vez gerados os padrões é feita uma escolha segundo o Grau de Uso.

A figura 2.1 apresenta um fluxograma que condensa todos os procedimentos envolvidos nesta seção, proporcionando ao leitor uma visão global de como são gerados os padrões.

figura 2.1

CAPITULO III**MODIFICAÇÃO NO PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DE PADRÕES**

O processo Heurístico, segundo Ferreira, Neves e Castro, buscava num primeiro momento, gerar padrões que não produzissem excesso de produção além de satisfazerem as restrições da definição 2.2.1.

Em seguida era feito um teste quanto ao agrupamento das fitas, podendo aceitar ou rejeitar os padrões gerados. Propomos neste capítulo uma modificação no processo de geração de padrões, de modo que apenas padrões factíveis sejam gerados.

A dificuldade neste processo decorre da existência de demandas baixas, de maneira que a utilização de uma bobina-mestre com peso considerável poderá proporcionar excesso de produção, mesmo que apenas uma fita de um determinado tipo apareça no padrão.

3.1 Considerações Iniciais

Primeiramente geraremos um padrão de referência e a partir deste os demais padrões. Para tanto, daremos prioridade de alocação àquelas fitas que possuem maior largura combinada com maior demanda, segundo a definição 2.2.3. Vale observar que segundo Ferreira, Neves e Castro, padrões quase-factíveis são gerados para posteriormente serem testados quanto a factibilidade segundo a definição 2.2.2. Note que naquele processo existe a possibilidade dos padrões gerados não serem utilizados.

Aqui estaremos interessados em obter um número reduzido de padrões, no momento da geração, de modo que um deles seja efetivamente usado, em outras palavras nós não iremos gerar padrões *quase-factíveis*.

Por outro lado estaremos interessados também no problema da Laminação, visto que se a espessura de uma certa fita i for próxima da espessura da bobina-mestre em questão teremos que efetuar um número menor de laminações na bobina para obter a espessura da fita, e mais, se a espessura da fita for igual à espessura da bobina não teremos que laminar.

Desta forma, iremos agrupar as fitas em classes como foi feito no primeiro parágrafo do capítulo anterior, ou seja, segundo os conjuntos $C_k = \{i \in I \mid \alpha_i = \alpha_k, e_i = e_k\}$ constituídos de fitas que podem pertencer a uma mesma bobina-intermediária.

Como temos interesse direto no processo de Laminação vamos considerar a seguinte definição :

Definição 3.1.1

Seja e_k a espessura das fitas de uma classe C_k . Denomina-se

Grau de Laminação da classe o seguinte número :
$$Glam_k = \max_j \left\{ \frac{e_k}{E_j} \right\} \text{ com } e_k \leq E_j.$$

Para obtermos uma escolha razoável das fitas a serem alocadas iremos associar as idéias da definição 2.2.3 com as da definição acima. Desta forma, iremos introduzir mais uma definição :

Definição 3.1.2

Considere uma classe C_k . Eficiência de uma fita $i \in C_k$ é o produto do seu *Grau de Alocação* pelo *Grau de Laminação* da classe, ou seja :

$$EF(k,i) = Galoc_i \cdot Glam_k$$

Agora surge a seguinte pergunta :

Qual classe será escolhida em relação às demais para construirmos os padrões ?

Este problema pode ser contornado associando um valor a cada classe, conforme a seguinte definição :

Definição 3.1.3

Denomina-se grau de uma classe C_k a soma das eficiências das fitas que a compõe, ou seja : $GR_k = \sum_{i \in C_k} EF(k,i)$

Com a definição 3.1.3 em mente daremos prioridade para classe de maior grau no momento de gerarmos os padrões. Na próxima seção ilustraremos como isto será feito.

3.2 Geração de Padrões Factíveis

Para iniciarmos a formação do primeiro padrão tomamos a classe de maior grau e alocamos as fitas desta classe segundo as eficiências, respeitando a largura útil

da bobina-mestre, a largura máxima de Laminação, o número máximo de fitas que podem aparecer numa bobina-intermediária bem como o fato de não exceder a demanda da fita.

Tal processo é feito baseado no seguinte Problema de Mochila

Restrito :

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \sum_{i \in C_k} EF(k,i) \cdot a_i \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad \sum_{i \in C_k} \ell_i \cdot a_i \leq \theta = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\max}\} \quad 3.2.1 \\ &\quad 0 \leq a_i \leq \frac{L}{W} \cdot \frac{d_i}{\ell_i} \\ &\quad a_i, \text{ inteiro} \end{aligned}$$

Se escrevermos $\bar{\ell} = \min_{i \in C_k} \{\ell_i\}$ e nf_k como sendo o número de fitas na

classe C_k , ao definirmos $\gamma = \frac{\bar{\ell}}{nf_k}$ a restrição $\sum_{i \in C_k} \ell_i \cdot a_i \leq \theta = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\max}\}$ nos fornece

as seguintes informações :

(i) Por um lado,

$$\sum_{i \in C_k} \ell_i \cdot a_i \leq \frac{\bar{\ell}}{nf_k} N_{\max} \Rightarrow \sum_{i \in C_k} nf_k \cdot \ell_i \cdot a_i \leq \bar{\ell} \cdot N_{\max} \Rightarrow nf_k \cdot \ell_i \cdot a_i \leq \bar{\ell} \cdot N_{\max}, \forall i \in C_k \Rightarrow$$

$$nf_k \cdot \ell_i \cdot a_i \leq \ell_i \cdot N_{\max}, \forall i \in C_k \Rightarrow nf_k \cdot a_i \leq N_{\max}, \forall i \in C_k \Rightarrow \sum_{i \in C_k} nf_k \cdot a_i \leq nf_k \cdot N_{\max} \Rightarrow$$

$\sum_{i \in C_k} a_i \leq N_{\max}$ (3.2.2), ou seja, a capacidade máxima de fitas a serem alocadas é respeitada.

(ii) De outro lado, $\sum_{i \in C_k} \ell_i \cdot a_i \leq L_{\max}$ (3.2.3), ou seja, o comprimento máximo permissível para

a Laminação é respeitado.

Com isto acabamos de provar a seguinte propriedade :

Propriedade 3.2.1

Para que as restrições de capacidade máxima de corte de fitas e largura máxima permissível de Laminação sejam respeitadas, basta que :

$$\sum_{i \in C_k} \ell_i \cdot a_i \leq \theta = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\max}\}, \text{ onde } \gamma = \frac{\bar{\ell}}{nf_k}.$$

$$\text{Quanto a canalização } 0 \leq a_i \leq \frac{L}{\bar{W}} \cdot \frac{d_i}{\ell_i}, \text{ onde } \bar{W} = \frac{\sum_{j \in J} W_j}{\sum_{j \in J} 1}$$

representa o peso de uma “bobina-mestre imaginária” (peso médio das bobinas em estoque), temos a seguinte informação :

$$0 \leq a_i \leq \frac{L}{\bar{W}} \cdot \frac{d_i}{\ell_i} \Rightarrow 0 \leq \frac{\bar{W}}{L} \cdot \ell_i \cdot a_i \leq d_i \quad (3.2.4), \text{ ou seja, a demanda da fita do tipo } i \text{ não é excedida.}$$

Uma vez obtido o primeiro padrão de corte tomamos a primeira bobina-intermediária, dela retiramos a maior quantidade possível de fitas de mais baixa eficiência, respeitando o comprimento mínimo permissível para Laminação. Em seguida tomamos o comprimento útil disponível e alocamos fitas segundo o Problema de Mochila 3.2.1.

Desta forma, iremos obter o segundo padrão de corte. Para obtermos o terceiro padrão tomamos a primeira e segunda bobinas-intermediárias do segundo padrão e procedemos com o mesmo raciocínio até que não seja mais possível tomarmos bobinas-intermediárias. A figura 3.1 ilustra este processo que ficará mais claro no momento em que apresentarmos o algoritmo.

figura 3.1

Na figura anterior temos cinco padrões de corte de modo que :

- (i) a primeira bobina-intermediária do segundo padrão é obtida do primeiro.
- (ii) a primeira e segunda bobinas-intermediárias do terceiro padrão são obtidas do segundo.
- (iii) a primeira, segunda e terceira bobinas-intermediárias do quarto padrão são obtidas do terceiro.
- (iv) a primeira, segunda, terceira e quarta bobinas-intermediárias do quinto padrão são obtidas do quarto.

Vale frisar que neste processo já temos em mãos padrões onde as fitas de cada bobina-intermediária pertencem a uma mesma classe, sua demanda não é excedida e o número de fitas em cada bobina-intermediária não ultrapassa o valor máximo permitido, além do mais cada bobina-intermediária não ultrapassa os comprimentos mínimo e máximo de Laminação.

O próximo passo é utilizar a idéia da definição 2.2.4 que diz respeito à utilidade de um padrão p , dando prioridade aos que combinem alto nível de uso e baixa perda.

Como já sabemos cada bobina-intermediária está associada a uma classe onde as fitas possuem mesma espessura. A situação ideal é que as espessuras das fitas que compõe uma bobina-intermediária, que doravante iremos nos referir por espessura da classe, tenha valor igual ou o mais próximo possível da espessura da bobina do estoque. Na próxima seção faremos um estudo do tempo de Laminação com a ajuda de uma Equação Diferencial bastante simples.

3.3 O Tempo de Laminação

Seja um padrão “ p ” e considere uma bobina j arbitrária do estoque, tal que :

C_j : comprimento

μ_j : peso específico linear ($\mu_j = \frac{W_j}{L}$)

ρ_j : peso específico volumétrico ($\rho_j = \frac{W_j}{L \cdot C_j \cdot E_j}$)

Seja e_{k_s} a espessura da classe C_{k_s} , onde $k_1, k_2, \dots$ são as classes que compõem o padrão p . Nosso propósito é trazer a espessura E_j da bobina j para a espessura e_{k_s} no menor tempo possível. Considere a função $C(t)$ que mede o comprimento de aço laminado no tempo. Admita que o Laminador trabalhe numa aceleração constante α , ou seja, $C''(t) = \alpha$, cuja solução é dada por $C(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + V_0t + C_0$, onde V_0 e C_0 são

respectivamente a velocidade inicial do Laminador e o comprimento inicial de aço laminado, que iremos admitir como nulos, logo :

$$C'(t) = \alpha t + K \Rightarrow C'(0) = K \Rightarrow v_0 = K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow C(t) = \frac{\alpha}{2} t^2$$

Vamos simbolizar por t_{k_s} o tempo final de Laminação da bobina-intermediária correspondente à classe C_{k_s} , isto posto temos :

$$C(t_{k_s}) = \frac{\alpha}{2} t_{k_s}^2 \Rightarrow C_j = \frac{\alpha}{2} t_{k_s}^2 \Rightarrow t_{k_s}^2 = \frac{2}{\alpha} C_j$$

Representando por $Tlam_j^p$ o tempo total de Laminação da bobina j segundo o padrão "p", temos : $Tlam_j^p = \sum_s t_{k_s}$

Sem perda de generalidade podemos escrever :

$$Tlam_j^p \leq \sum_s t_{k_s}^2 \quad 3.3.1$$

Faremos a seguinte aproximação para a aceleração :

$$\alpha = \lambda_{j,k_s} \frac{1}{\rho_j(E_j - e_{k_s})}, \text{ onde } \lambda_{j,k_s} \text{ é a constante local de Laminação.}$$

Desta forma, temos :

$$\alpha = \lambda_{j,k_s} \frac{1}{\rho_j(E_j - e_{k_s})} \Rightarrow \alpha = \lambda_{j,k_s} \frac{LC_j E_j}{W_j(E_j - e_{k_s})} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{j,k_s}} \frac{W_j(E_j - e_{k_s})}{LC_j E_j} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} C_j = \frac{2}{\lambda_{j,k_s}} \frac{W_j(E_j - e_{k_s})}{LE_j} \Rightarrow$$

$$t_{k_s}^2 = \frac{2}{\lambda_{j,k_s}} \frac{W_j(E_j - e_{k_s})}{LE_j} \quad 3.3.2$$

Considerando $\lambda_j = \max_j \left\{ \frac{2}{\lambda_{j,k_s}} \right\}$ como constante global de

Laminação podemos escrever :

$$Tlam_j^p \leq \sum_s t_{k_s}^2 \leq \sum_s \lambda_j \frac{W_j(E_j - e_{k_s})}{L E_j} = \sum_s \lambda_j \mu_j \frac{(E_j - e_{k_s})}{E_j} \Rightarrow$$

$$Tlam_j^p \leq \lambda_j \mu_j m^p - \frac{\lambda_j \mu_j}{E_j} \sum_s e_{k_s} \quad 3.2.3$$

Observe que se $e_k \rightarrow E_j$, $\alpha \rightarrow +\infty$ e $t_{k_s} \rightarrow 0$ correspondendo com a situação prática, além disto conseguimos obter uma expressão que majora o tempo de Laminação da bobina j segundo o padrão "p".

3.4 Seleção das Bobinas

Nosso problema agora consiste em minimizar alguns custos sem que a produção de fitas seja excedida. Para tanto devemos selecionar as bobinas do estoque que deverão ser cortadas segundo um padrão de corte. Considere uma bobina-mestre j , fixado um padrão de corte "p" a produção das fitas i será :

$$prod_p(i, j) = \mu_j \cdot \ell_i \cdot a_i^p \quad 3.3.4$$

Como restrição para o problema temos :

$$\sum_j prod_p(i, j) \cdot x_j^p \leq d_i, \text{ onde } x_j^p = \begin{cases} 1, & \text{se a bobina } j \text{ é escolhida para corte.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desenvolvendo a expressão anterior :

$$\sum_j \text{prod}_p(i, j) \cdot x_j^p \leq d_i \Leftrightarrow \sum_j \mu_j \cdot \ell_i \cdot a_i^p \cdot x_j^p \leq d_i \Leftrightarrow \sum_j \frac{W_j}{L} \ell_i \cdot a_i^p \cdot x_j^p \leq d_i \Leftrightarrow \sum_j W_j \cdot x_j \leq \frac{d_i \cdot L}{\ell_i \cdot a_i^p}, \forall i$$

Desta forma :

$$\sum_j W_j \cdot x_j^p \leq \varphi = L \cdot \min_i \left\{ \frac{d_i}{\ell_i \cdot a_i^p} \right\} \quad 3.3.5$$

Como nossos objetivos principais são minimizar :

- (i) O custo de produção.
- (ii) O custo de Laminação.
- (iii) O custo associado às perdas de material.

Podemos finalmente escrever :

$$\text{maximizar } U^p(x_j^p) = \sum_{j,i} V_i^1 \text{prod}_p(i, j) \cdot x_j^p + \sum_j V^2 (L - \sum_i \ell_i \cdot a_i^p) \mu_j \cdot x_j^p - \sum_j V_j^3 \text{Tlam}_j^p \cdot x_j^p - \sum_j V_j^4 x_j^p$$

sujeito a:

$$\sum_j W_j \cdot x_j^p \leq \varphi$$

$$x_j^p = 0 \text{ ou } 1$$

3.3.6

A função objetivo U^p do Problema de Mochila 3.3.6 avalia uma espécie de “lucro” ao utilizar um padrão de corte, onde V_i^1 , V^2 , V_j^3 , e V_j^4 são respectivamente valor de venda da fita i , valor de venda de material perdido em unidade monetária por “Kilograma”, custo de Laminação por unidade de tempo e custo da bobina j .

O tempo de Laminação $Tlam_j^p$ será dado pela expressão

$$\lambda_j \mu_j m^p - \frac{\lambda_j \mu_j}{E_j} \sum_s e_{k_s}, \text{ omitindo-se a constante global de Laminação que deverá estar}$$

incorporada ao custo V_j^3 . Desta forma, a função objetivo pode ser reescrita como :

$$U^p(x_j^p) = \sum_j \mu_j (\sum_i V_i^1 \cdot \ell_i \cdot a_i^p) x_j^p + \sum_j V^2 \mu_j (L - \sum_i \ell_i \cdot a_i^p) x_j^p - \sum_j V_j^3 \mu_j (m^p - \frac{\sum_s e_{k_s}}{E_j}) x_j^p - \sum_j V_j^4 x_j^p \quad 3.3.7$$

O padrão escolhido deverá ser aquele cujo índice forneça $\max_p \{NU^p \cdot U^p\}$. Na próxima seção apresentamos o *Algoritmo Modificado* onde aparecem todos os processos que acabamos de descrever.

3.5 O Algoritmo Modificado

Nesta seção iremos apresentar um algoritmo onde sugerimos uma modificação no procedimento de Geração de Padrões. A idéia é bastante simples consistindo no objetivo de gerar, num certo sentido, apenas padrões factíveis. Além do mais, gostaríamos de reduzir sensivelmente o número de padrões em cada iteração.

O Algoritmo consiste de três procedimentos básicos :

- (i) Um procedimento, denominado “Gera Padrão”, que se encarregará de gerar um padrão.
- (ii) Um procedimento, denominado “Retira Fitas”, que efetuará o processo de retirada de fitas.
- (iii) Um procedimento, denominado “Múltiplos Padrões”, onde todos os padrões serão gerados.

Algoritmo

1. Entrada e Processamento dos Dados (definição das classes)
2. Geração dos Padrões
3. $\text{daux}_i = d_i$ com $i \in I$ “ daux_i é uma variável auxiliar que guarda valores atualizados da demanda para cálculos internos”
4. Procedimento Múltiplos Padrões
 5. $p = 1$ “ p guarda o número do padrão que está sendo gerado”
 6. $m = 1$ “ m guarda o número da bobina-intermediária que está sendo gerada no padrão p ”
 7. $\bar{L}_{\min} = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\min}\}$
 8. $LU = L - S_1$
 9. Enquanto $LU \geq \bar{L}_{\min}$ faça
 10. Procedimento Gera Padrão
 11. $LU^p = LU$
 12. Cálculo das Eficiências e Graus :
 13. $\text{Glam}_k = \max_j \left\{ \frac{e_k}{E_j} \right\}, e_k \leq E_j$ com $j \in J$ e $k = 1, \dots, r$
 14. $\text{Galoc}_i = \text{daux}_i \ell_i$ com $i \in I$
 15. $\text{EF}_{k,i} = \text{Glam}_k \text{Galoc}_i$ com $i \in I$ e $k = 1, \dots, r$
 16. $\text{GR}_k = \sum_{i \in C_k} \text{EF}_{k,i}$ com $k = 1, \dots, r$
 17. Geração do Padrão
 18. $\text{pare} = \text{falso}$
 19. Enquanto não pare faça
 20. Selecione s , tal que $\text{GR}_s = \max_k \{\text{GR}_k\}$ com $k = 1, \dots, r$
 21. Resolva o seguinte Problema de Mochila :

$$\text{maximizar } \sum_{i \in C_s} EF_{s,i} a_i$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in C_s} \ell_i a_i \leq \theta - S_2$$

$$0 \leq a_i \leq \frac{L}{\bar{W}} \frac{daux_i}{\ell_i}$$

$$a_i, \text{ int eiro}$$

$$\theta = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\max}\} \quad \text{e} \quad \bar{W} = \frac{\sum_j W_j}{\sum_j 1}$$

22. Criar linha m na matriz Y_p "a linha m da matriz Y_p guarda a bobina-intermediária m "

23. Se $m = p$ então

24. Selecione t , tal que $EF_{s,t} = \min_i \{EF_{s,i}\}$ e $y_{m,i} > 0$

" t guarda a fita de menor eficiência que será retirada na formação do padrão $p+1$ "

25. fim se 23

26. Atualizar demanda interna : $daux_i = daux_i - \frac{\bar{W}}{L} \ell_i a_i$, $i \in I$

27. Atualizar Eficiências e Grau :

$$28. EF_{s,i} = G_{lam_s} \cdot (daux_i \ell_i), \quad i \in C_s$$

$$29. GR_s = \sum_{i \in C_s} EF_{s,i}$$

30. Atualizar Comprimento Útil : $LU^p = LU^p - S_2 - \sum_{i \in C_s} \ell_i a_i$

$$31. \bar{L}_{\min} = \min\{\gamma N_{\max}, L_{\min}\}$$

32. Caso

$$33. \bar{L}_{\min} \leq LU^p \leq \theta - S_2 \text{ faça } \theta = LU^p$$

$$34. LU^p < \bar{L}_{\min} \text{ faça}$$

$$35. \text{perda}_p = LU^p$$

$$36. \text{pare} = \text{verdade}$$

37. fim caso 32

38. Se $\text{pare} = \text{falso}$ então $m = m + 1$

39. fim enquanto 19

40. fim do Procedimento Gera Padrão 10

$$41. m^p = m$$

42. Procedimento Retira Fitas “início da geração de um novo padrão”

43. Zerar matriz Y_{p+1}

44. Se $p > 1$ então

45. Para $i = 1$ até $p - 1$ faça

46. $y_{i,j}^{p+1} = y_{i,j}^p$ com $j = 1, \dots, nf$ “nf representa o número de fitas”

47. fim para 45

senão

48. $y_{p,j}^{p+1} = y_{p,j}^p$ com $j = 1, \dots, nf$ ($j \neq t$)

49. fim se 44

50. $comp = \sum_{i=1}^{nf} y_{p,i}^{p+1} \cdot \ell_i$

51. Se $comp < \bar{L}_{min}$ então

$$52. y_{p,t}^{p+1} = \left\lfloor \frac{\bar{L}_{min} - comp}{\ell_t} \right\rfloor + 1$$

53. fim se 51

54. fim do Procedimento Retira Fitas 42

55. $p = p + 1$

56. $daux_i = d_i$ com $i \in I$

57. Para $i = 1$ até $p - 1$ faça

58. Para $j = 1$ até nf faça

59. $daux_j = daux_j - \frac{\bar{W}}{L} \ell_j y_{i,j}^p$ “as demandas das fitas são atualizadas tendo em vista as bobinas-intermediárias já existentes”

60. fim para 58

61. fim para 57

62. $LU = LU - S_2 - \sum_{i=1}^{nf} y_{p-1,i}^p \cdot \ell_i$

63. $m = p$

64. fim enquanto 9

65. fim do Procedimento Múltiplos Padrões 4

66. Resolva o seguinte Problema de Mochila para cada Padrão de Corte "p" :

$$\text{maximizar } U^p(x_j^p) = \sum_j \mu_j (\sum_i V_i^1 \cdot \ell_i \cdot a_i^p) x_j^p + \sum_j V^2 \mu_j (L - \sum_i \ell_i \cdot a_i^p) x_j^p - \sum_j V_j^3 \mu_j (m^p - \frac{\sum e_{k_s}}{E_j}) x_j^p - \sum_j V_j^4 x_j^p$$

sujeito a:

$$\sum_j W_j \cdot x_j^p \leq \varphi$$

$$x_j^p = 0 \text{ ou } 1$$

67. Calcule $NU^p = \sum_j x_j^p$ para cada padrão p

68. Encontre o índice do padrão que forneça o $\max_p \{NU^p \cdot U^p\}$

69. Atualize o Estoque e as Demandas segundo o Padrão encontrado no passo 66.

70. Se todas as demandas tiverem sido atendidas finalize o processo.

Caso contrário retorne ao passo 2, até que toda encomenda seja atendida.

A seguir apresentamos na figura 3.2 o fluxograma de nosso algoritmo.

figura 3.2

CONCLUSÕES

O Problema do Corte em Bobinas de Aço, abordado neste trabalho, consiste na obtenção de padrões de corte satisfazendo restrições peculiares, dentre as quais destacamos o processo de Laminação, trazendo consigo a necessidade de se agrupar convenientemente as fitas.

A dificuldade da resolução exata do problema enfatizado em [Pereira, 1993], [Ferreira, Neves e Castro, 1990] e [Carvalho e Rodrigues, 1994], justifica o desenvolvimento de procedimentos Heurísticos via decomposição do problema.

Neste trabalho, geramos inicialmente um conjunto de padrões factíveis (a partir de uma sequência de problemas de mochila restrito) e em seguida num problema de seleção (problema de mochila 0-1) determinamos as bobinas no estoque a serem cortadas objetivando o máximo lucro (o custo de Laminação é considerado). Um padrão é escolhido para as bobinas selecionadas, o estoque e as demandas são atualizadas, e o processo é repetido.

Um outro ponto relevante ao qual dedicamos atenção foi o Tempo relativo à Laminação, pois este processo é sensivelmente caro. A partir de uma idéia simples, conseguimos obter uma expressão de fácil manipulação majorando o referido tempo. Observamos que essa expressão necessita de validação prática, a ser investigada em fase complementar.

Para continuação deste trabalho destacamos :

- (i) Implementação e validação da Heurística proposta (a implementação está em fase final)
- (ii) Desenvolvimento de abordagens alternativas :

(a) Procedimento de Geração de Colunas :

Considere o modelo 2.2.1 com o objetivo 3.3.7, e as restrições $\sum_j x_j^p \leq 1, j \in J$. A relaxação da integralidade proposta por Gilmore & Gomory produzirá resultados pobres devido à baixa demanda, porém um conjunto de padrões de corte (variáveis básicas) serão gerados. A idéia consiste em desenvolver uma Heurística a partir destes padrões.

(b) Abordagem em Grafo E/OU :

Nesta abordagem um padrão de corte é visto como um caminho completo num Grafo E/OU, onde os nós representam sub-bobinas e os arcos as decisões de corte [Arenales, 1993] e [Morabito, 1992]. Dois tipos de cortes devem ser considerados :

Um corte que divide uma sub-bobina em duas e outro que recorta uma sub-bobina nas fitas de uma determinada classe.

O esquema a seguir ilustra o processo :

figura 8

APÊNDICE

O PROBLEMA DA MOCHILA

1 Considerações Iniciais

O objetivo deste apêndice é de fornecer uma idéia rudimentar do que seja um Problema da Mochila. Não pretendemos abordar as técnicas de resolução para o problema, mas deixar claro a simplicidade e força do modelo.

Imagine a seguinte situação, um alpinista precisa selecionar alguns objetos com utilidades específicas que deverão ser colocados numa *mochila*. A mochila comporta uma capacidade máxima de objetos e a meta do alpinista é selecionar objetos que forneça o máximo de utilidade ao escalar uma montanha.

O problema que acabamos de ilustrar é conhecido na literatura como *Problema da Mochila* surgindo das formas mais variadas na prática.

2 O Problema da Mochila 0-1

Para descrevermos matematicamente o problema do parágrafo anterior, vamos indexar os objetos $j \in N = \{1, \dots, n\}$. Considere a seguinte variável :

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } j \text{ for selecionado.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que a variável em questão assume apenas dois possíveis valores que são 0 ou 1, portanto x_j é denominada uma variável de decisão de modo que, o problema ilustrado é conhecido na literatura como *Problema da Mochila 0-1*.

Digamos que w_j seja o peso do objeto j e que p_j seja um número que indique a sua utilidade. Vamos admitir ainda que c seja o peso máximo que a mochila suporta, ou seja, sua capacidade. Nestas condições a restrição do problema ilustrado pode ser descrita pela inequação $\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c$, e a meta do alpinista é maximizar a seguinte expressão

$\sum_{j=1}^n p_j x_j$. Isto pode ser resumido da seguinte maneira :

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c \\ &\quad x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{com} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Em Problemas de Corte e Empacotamento é comum nos depararmos com este tipo de situação, no presente trabalho o leitor pode verificar que em momentos de grande importância modelamos problemas desta mesma natureza.

O Problema da Mochila 0-1 tem sido alvo de estudos extensivos durante anos. Pesquisadores como Dantzig, Gilmore e Gomore, Kolesar e outros desenvolveram técnicas de solução para o problema. Ainda hoje existem estudos de grande importância dentro deste contexto, veja [Martello e Toth, 1990].

3 Os Problemas da Mochila Restrito e Irrestrito

Se no problema (2.1) a variável x_j for tal que, $0 \leq x_j \leq b_j$ passamos a ter um Problema da Mochila Restrito.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{sujeito a:} & \\ & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c \\ & 0 \leq x_j \leq b_j \end{array} \quad 3.1$$

Quando $b_j \rightarrow +\infty$, o problema é conhecido como Problema da Mochila Irrestrito. Várias instâncias do Problema da Mochila podem ser exploradas, para maiores detalhes veja [Martello e Toth, 1990], [Morabito, 1992].

BIBLIOGRAFIA

- [Arenales, 1993]** Arenales, M.N. (1993) Uma Teoria para o problema de Corte. *Tese de Livre-Docência, ICMSC-USP, São Carlos, São Paulo.*
- [Carvalho e Rodrigues, 1994]** Carvalho, J.M. and Rodrigues, A.J.G. (1994) A Computer Based Interactive Approach to a Two-stage Cutting Stock Problem, *INFOR*, 32(4):243-252.
- [Chvátal, 1980]** Chvátal, V. (1980) *Linear Programming*, W.H.Freeman and Company, New York.
- [Dowsland e Dowsland, 1992]** Dowsland, K.A. and Dowsland, W.B. (1992) Packing Problems, *European Journal of Operational Research*, 56:02-14.
- [Dyckhoff, Abel e Gal, 1985]** Dyckhoff, H.; Abel, D. and Gal, T. (1985) Trim Loss and Related Problems, *Omega*, 13:59-72.
- [Dyckhoff e Finke, 1992]** Dyckhoff, H. and Finke, U. (1992) *Cutting and Packing in Production and Distribution*. Springer-Verlag Co., Heidelberg.
- [Ferreira, Neves e Castro, 1990]** Ferreira, J.S.; Neves, M.A. and Castro, P.F. (1990) A Two-phase Roll Cutting Problem, *European Journal of Operational Research*, 44:185-196.
- [Gilmore e Gomore, 1961]** Gilmore, P. and Gomory, R. (1961) A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, *Operations Research*, 9:849-859.

- [**Gilmore e Gomory, 1963**] Gilmore, P. and Gomory, R. (1963) A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, parth II, *Operations Research*, 14:94-120.
- [**Haessler, 1974**] Haessler, R. W. (1974) Controlling Cutting Patetern Changes in One-dimensional Trim Problems. *Operations Research*, 23(3):483-493.
- [**Haessler, 1979**] Haessler, R. W. (1979) A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. *Operations Research*, 28(4):1001-1005.
- [**Martello e Toth, 1990**] Martello, S. and Toth, P. (1990) *Knapsack Problems Algorithms and Computer Implementations*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [**Morabito, 1992**] Morabito, R. (1992) Uma abordagem em grafo E/OU para o problema de empacotamento : Aplicações ao Carregamento de Paletes e Contêineres. *Tese de Doutorado, EESC-USP, São Carlos, São Paulo*.
- [**Morabito e Arenales, 1995**] Morabito, R. and Arenales, M.N. (1995) Performance of Two Heuristics for Solving Large Scale Two-dimensional Guillotine Cutting Problems, *INFOR*, 33(2):145-155.
- [**Pereira, 1993**] Pereira, M.A. (1993) Uma Abordagem Matemática para o Problema de Corte e Laminação de Fitas de Aço, *Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, São Paulo*.
- [**Sweeney e Paternoster, 1992**] Sweeney, P. and Paternoster, E. (1992) Cutting and Packing Problems : A Categorized, Aplication-Oriented Research Bibliography, *Journa of the Operational Research Society*, 43:691-706
- [**Yanasse, Zinober e Harris, 1990**] Yanasse, H.H.; Zinober, A.S.I. and Harris, R.G. (1990) A Heuristic Procedure for a Two-dimensional Guillotine Cutting Stock Problem, *Paper presented at INFOR, Athens, Grece*.