SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito.....15.04.99.....

Assinatura:.....Maurício A. S. L. de.....

Uso de Métodos Bayesianos para Confiabilidade de Redes

Sandra Cristina de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do título de mestre, na área de "Ciências de Computação e
Matemática Computacional"*

São Carlos
Abril de 1999

*Aos meus pais,
Edgar e Regina
e ao meu irmão Junior.*

Agradecimentos

*M*eus sinceros agradecimentos ...

A Deus, primeiramente, por ter me dado forças em mais uma etapa.

Ao Professor Dr. Jorge Alberto Achcar pela orientação dedicada durante o desenvolvimento da pesquisa.

Ao Professor Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho e ao Professor Dr. José Galvão Leite pelas valiosas sugestões apresentadas em meu Exame de Qualificação.

À CAPES e à FAPESP pelo auxílio financeiro.

Aos professores, funcionários e colegas da USP que, de alguma maneira, contribuíram na realização deste trabalho.

Aos amigos Juan R. Cid, Viviane C. Fortulan e Josenildo S. Chaves pela dedicação e apoio constantes durante este período.

Aos professores e amigos da UNESP pelos quais tenho imenso carinho.

Aos amigos ... *de hoje e sempre* ... aqui conquistados, pela solidariedade, companheirismo e pelos momentos compartilhados.

À minha família pelo amor, paciência e incentivo.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma análise Bayesiana para confiabilidade de sistemas de redes usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Assumimos diferentes densidades a priori para as confiabilidades dos componentes individuais, com o objetivo de obtermos sumários de interesse. A metodologia é exemplificada considerando um sistema de rede com sete componentes e um caso especial de sistema complexo composto por nove componentes. Consideramos ainda confiabilidade de redes do tipo k -out-of- m com alguns exemplos numéricos.

Abstract

In this work we present a Bayesian approach for network reliability systems using Markov Chain Monte Carlo methods. We assume different prior densities for the individual component reliabilities to get the posterior summaries of interest. The methodology is exemplified considering a network system with seven components and a special case of complex system with nine components. We also consider k -out-of- m system reliability with some numerical examples.

SUMÁRIO

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Confiabilidade de sistema e confiabilidade de rede	1
1.2 Objetivos principais da pesquisa	2
Capítulo 2 - Sistemas de redes	4
2.1 Noções básicas	4
2.1.1 Sistemas em série	5
2.1.2 Sistemas em paralelo	6
2.2 Sistemas coerentes	7
2.3 Alguns exemplos	7
2.4 Decomposição pivotal	11
Capítulo 3 - Análise Bayesiana para sistemas de redes	17
3.1 Função de verossimilhança para p	17
3.2 Distribuição conjunta a priori para p	17
3.2.1 Componentes independentes	17
3.2.2 Seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis	18
3.2.3 Seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos	21
3.2.4 Componentes não muito confiáveis nem idênticos	23
Capítulo 4 - Análise Bayesiana e análise clássica para o sistema de rede da Figura 2.4	25
4.1 Análise Bayesiana	26
4.1.1 Inferências Bayesianas	26
4.1.2 Distribuições condicionais a posteriori para p	26
4.2 Análise clássica	38

Capítulo 5 - Análise Bayesiana hierárquica para o sistema de rede da Figura 2.4	42
5.1 Função de verossimilhança para p	42
5.2 Distribuição a priori para p	42
5.2.1 Sequências permutáveis e componentes altamente confiáveis	42
5.2.2 Sequências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos	46
5.2.3 Componentes não muito confiáveis nem idênticos	51
Capítulo 6 - Análise Bayesiana para o sistema de rede da Figura 2.5	58
6.1 Inferências Bayesianas	58
6.2 Distribuições condicionais a posteriori para p	59
Capítulo 7 - Análise Bayesiana hierárquica para o sistema de rede da Figura 2.5	69
7.1 Função de verossimilhança para p	69
7.2 Distribuição a priori para p	69
7.2.1 Sequências permutáveis e componentes altamente confiáveis	69
7.2.2 Sequências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos	73
7.2.3 Componentes não muito confiáveis nem idênticos	79
Capítulo 8 - Sistemas k-out-of-m	87
8.1 Introdução	87
8.2 Sistemas "one-unit"	88
8.3 Sistemas k -out-of- m	89
8.3.1 Um exemplo: Sistemas 2-out-of-3	90
8.3.2 Um caso especial: Sistemas 3-out-of-5	98
Conclusões e perspectivas futuras	110
Apêndice A - O algoritmo Gibbs Sampling	111
Apêndice B - O algoritmo Metropolis-Hastings	112
Apêndice C - Um programa desenvolvido em Matlab	114
Apêndice D - Gráficos referentes ao Capítulo 4	119
Referências Bibliográficas	121

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Confiabilidade de sistema e confiabilidade de rede

O termo "confiabilidade de sistema", para muitos estatísticos, significa encontrar estimadores por ponto e por intervalo da confiabilidade de sistemas em série e em paralelo, dado os dados de falha de seus componentes ou do sistema. Por outro lado, o termo "confiabilidade de rede" está relacionado com a representação de algoritmos combinatoriais para o cálculo da confiabilidade de qualquer configuração geral de componentes, dadas as confiabilidades dos componentes individuais.

Embora a maioria dos sistemas encontrados consista de componentes em série ou em paralelo, muitos dispositivos modernos, especialmente aqueles usados para transmitir informação, são redes.

A literatura nos tópicos "confiabilidade de sistema" e "confiabilidade de rede" tem evoluído ao longo de duas trajetórias paralelas e desconexas, cada uma fornecendo um grupo de interesse diferente. Uma consequência disso, é que não se visualizou o problema global de se obter estimativas por ponto e por intervalo da confiabilidade de uma rede, dado os dados de falha de seus componentes individuais. Uma possível razão para estas trajetórias distintas é que a análise de confiabilidade de rede tem sido de domínio dos cientistas computacionais e analistas de pesquisa operacional, ao passo que a análise de confiabilidade de sistema tem sido de interesse dos estatísticos.

Para uma fusão das atividades destes dois grupos é preciso que as ferramentas que facilitam a união sejam postas no lugar. É necessário, portanto, desenvolver estas ferramentas e chegar a um consenso, de maneira que o objetivo desejado seja alcançado.

Os analistas de confiabilidade de rede têm enfatizado o desenvolvimento de algoritmos eficientes para o cálculo da confiabilidade de uma rede, assumindo que as confiabilidades dos componentes individuais são conhecidas (ou especificadas). Estes algoritmos estão computacionalmente envolvidos e muitas vezes contêm cálculos combinatoriais engenhosos. Existem duas desvantagens principais no trabalho realizado por cientistas computacionais: as confiabilidades dos componentes individuais são assumidas conhecidas e os tempos de vida dos componentes são considerados condicionalmente independentes (dadas as confiabilidades dos componentes). Conseqüentemente, o estado da arte da análise de confiabilidade de rede enfatiza as distribuições combinatoriais e não considera o modelo estatístico e os aspectos inferenciais do problema. Por outro lado, a análise de confiabilidade de sistema tem enfatizado a modelagem e a inferência, mas concentra-se em casos simples de sistemas em série e em paralelo, considerando os tempos de vida dos componentes independentes. Além disso, o paradigma estatístico tem sido predominantemente freqüentista.

Enfoques Bayesianos (ver por exemplo Currit & Singpurwalla, 1988) na abordagem de confiabilidade de sistema têm sido propostos, mas estão restritos aos casos simples de sistemas em série e em paralelo, além disso, os aspectos computacionais têm sido grandes obstáculos na obtenção das distribuições a posteriori resultantes, devido à alta dimensão das mesmas. Porém, estes obstáculos podem ser superados com a utilização de técnicas de simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC), como o Gibbs Sampling (Gelfand & Smith, 1994; Apêndice A) e o algoritmo de Metropolis-Hastings (Chib & Greenberg, 1995; Smith & Roberts, 1993; Apêndice B).

1.2 Objetivos principais da pesquisa

Em geral, o estudo da confiabilidade de redes complexas é um problema de inferência que pode se tornar complicado utilizando os métodos clássicos usuais, devido à presença de muitos parâmetros. O uso de métodos Bayesianos é, portanto, a forma mais coerente para solucionar este problema. Além disso, a análise Bayesiana fornece um caminho para a incorporação de conhecimentos a priori no processo de estimação, através de informações de especialistas.

Neste trabalho desenvolvemos uma análise Bayesiana para sistemas de redes complexos (Barlow & Proschan, 1981) considerando diferentes classes de distribuições a priori para as funções de confiabilidade dos componentes. Estas confiabilidades podem ser consideradas como independentes, dependentes ou parcialmente dependentes. Consideramos diferentes distribuições a priori que levam em consideração a possibilidade de seqüências permutáveis e componentes idênticos (de Finetti, 1972), seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis (Chen & Singpurwalla, 1996) e componentes que não são muito confiáveis nem idênticos (Lee, 1993). Com estas escolhas de distribuição a priori utilizamos métodos de simulação MCMC com especial destaque para os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings. A metodologia é exemplificada considerando um sistema de rede com sete componentes (Martz & Waller, 1982; Achcar, 1996) e um caso especial de sistema complexo composto por nove componentes.

No Capítulo 4 desenvolvemos também uma análise clássica para o sistema de rede composto por sete componentes com o objetivo de compararmos os resultados obtidos com os da análise Bayesiana desenvolvida neste mesmo capítulo.

Consideramos ainda confiabilidade de redes do tipo k -out-of- m (Martz & Waller, 1982) onde um sistema com m componentes funciona se e somente se pelo menos k componentes operam com sucesso. Ilustramos a metodologia proposta com alguns exemplos numéricos.

Capítulo 2

SISTEMAS DE REDES

2.1 Noções básicas

Assumindo uma rede com n componentes, definimos $X_i(t)$ como uma variável indicadora para o funcionamento do i -ésimo componente, $i = 1, 2, \dots, n$, e $X(t)$ como uma variável indicadora para o funcionamento do sistema (Lynn, Singpurwalla & Smith, 1995). Assim, num dado tempo $t > 0$ temos:

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se o } i\text{-ésimo componente está funcionando,} \\ 0 & , \text{ se o } i\text{-ésimo componente não está funcionando.} \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se o sistema está funcionando,} \\ 0 & , \text{ se o sistema não está funcionando.} \end{cases}$$

Seja $p_i(t) = P\{X_i(t) = 1 | p_i(t)\}$ a confiabilidade do i -ésimo componente e $\mathcal{P}_i(t) = P\{X_i(t) = 1\}$ a confiabilidade esperada do i -ésimo componente onde $\mathcal{P}_i(t) = E(p_i(t)) = \int p_i(t) \pi(p_i(t)) dp_i(t)$. A quantidade $\pi(p_i(t))$ é uma distribuição de probabilidade no intervalo unitário e descreve a incerteza sobre $p_i(t)$. Da mesma maneira, seja $p(t) = P\{X(t) = 1 | p(t)\}$ a confiabilidade do sistema e $\mathcal{P}(t) = E(p(t)) = P\{X(t) = 1\}$ a confiabilidade esperada do sistema. Então, sob certas condições de independência condicional dos $X_i(t)$'s e também dos $p_i(t)$'s, $\mathcal{P}(t)$ depende de $h(\mathcal{P}_1(t), \dots, \mathcal{P}_n(t))$, onde h é alguma função dos $\mathcal{P}_i(t)$'s. A forma de h depende da estrutura do sistema: série, paralelo ou qualquer outra configuração geral.

2.1.1 Sistemas em série

Um sistema de componentes conectados em série (Figura 2.1) funciona, se e somente se, cada componente funciona.

Figura 2.1 - Estrutura em série.

Supondo $n = 2$, a confiabilidade esperada do sistema é dada por:

$$\mathcal{P}(t) = P\{X(t) = 1\} = P\{X_1(t) = 1, X_2(t) = 1\}. \quad (2.1)$$

onde, pela lei da probabilidade total,

$$\mathcal{P}(t) = \int_{P(t)} P\{X_1(t) = 1, X_2(t) = 1 | p_1(t), p_2(t)\} \pi(p_1(t), p_2(t)) dp_1(t) dp_2(t), \quad (2.2)$$

onde $\pi(p_1(t), p_2(t))$ é uma distribuição de probabilidade conjunta em um subconjunto do quadrado unitário e descreve a incerteza sobre as confiabilidades dos componentes $p_1(t)$ e $p_2(t)$, e $P(t)$ é um conjunto de valores que $(p_1(t), p_2(t))$ pode assumir e é um subconjunto do quadrado unitário definido pelo conjunto $\{(u_1, u_2) : 0 \leq u_1, u_2 \leq 1\}$. Em muitas aplicações é não realístico assumir que $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são independentes pois, em geral, $\pi(p_1(t), p_2(t)) \neq \pi(p_1(t))\pi(p_2(t))$. Portanto, serão propostos alguns métodos (Lynn, Singpurwalla & Smith, 1995) para a construção da distribuição conjunta $\pi(p_1(t), p_2(t))$.

Aplicando a regra de multiplicação de probabilidade temos

$$\mathcal{P}(t) = \int_{P(t)} (p_1(t) \times p_2(t)) \pi(p_1(t), p_2(t)) dp_1(t) dp_2(t) \quad (2.3)$$

sob as seguintes condições de independência condicional:

- (1) dado $p_1(t)$, $X_1(t)$ é independente de $X_2(t)$ e de $p_2(t)$;
- (2) dado $p_2(t)$, $X_2(t)$ é independente de $p_1(t)$.

Sejam $p_1(t)$ e $p_2(t)$ conhecidos. Considerando $p_i(t) = p_i^0(t)$, $i = 1, 2$, então $\pi(p_1(t), p_2(t))$ seria degenerada no ponto $(p_1^0(t), p_2^0(t))$, logo,

$$\mathcal{P}(t) = p(t) = p_1^0(t) p_2^0(t). \quad (2.4)$$

Generalizando para n componentes em série temos:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{P(t)} \pi(p_1(t), \dots, p_n(t)) \left(\prod_{i=1}^n p_i(t) dp_i(t) \right). \quad (2.5)$$

Podemos notar que $0 \leq \mathcal{P}(t) \leq 1$. Se os $p_i(t)$'s são assumidos degenerados em $p_i^0(t)$, $i = 1, \dots, n$, então (2.5) generaliza como $p(t) = \prod_{i=1}^n p_i^0(t)$.

No cálculo da confiabilidade de sistema existem dois níveis em que a independência pode ser assumida. O primeiro é a independência dos tempos de vida $X_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, dado os $p_i(t)$'s, e o segundo é a independência dos $p_i(t)$'s entre si. Como este último muitas vezes é não realístico, podem ser propostos modelos para $\pi(p_1(t), \dots, p_n(t))$, que descrevem dependência entre os $p_i(t)$'s. Maiores detalhes podem ser encontrados em Lynn, Syngpurwalla e Smith (1995).

2.1.2 Sistemas em paralelo

Um sistema de componentes conectados em paralelo (Figura 2.2) funciona, se e somente se, pelo menos um componente funciona. Neste caso, o procedimento para o cálculo da confiabilidade é o mesmo. Sendo $\mathcal{P}(t) = 1 - P\{X_1(t) = 0, \dots, X_n(t) = 0\}$ e considerando as condições de independência descritas anteriormente, temos:

$$\mathcal{P}(t) = 1 - \int_{P(t)} \pi(p_1(t), \dots, p_n(t)) \left(\prod_{i=1}^n (1 - p_i(t)) dp_i(t) \right). \quad (2.6)$$

Se os $p_i(t)$'s são assumidos conhecidos como $p_i^0(t)$, $i = 1, \dots, n$, então:

$$\mathcal{P}(t) = p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i^0(t)).$$

Figura 2.2 - Estrutura em paralelo

2.2 Sistemas coerentes

Seja $X(t) = \phi(X_1(t), \dots, X_n(t))$, onde a função ϕ é chamada de função estrutura de ordem n do sistema. Um sistema de componentes (em série, em paralelo, uma combinação de conexões em série e em paralelo ou uma rede) é coerente (Barlow & Proschan, 1981) se:

- a) Sua função estrutura ϕ é crescente;
- b) Cada componente é relevante.

Para um sistema em série a função ϕ é dada por:

$$\phi(X_1(t), \dots, X_n(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t) \quad (2.7)$$

e para um sistema em paralelo,

$$\phi(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i(t)). \quad (2.8)$$

2.3 Alguns exemplos

Supondo um sistema simples com três componentes:

Figura 2.3 - Sistema com três componentes.

A confiabilidade do sistema representado pela Figura 2.3 é dada por :

$$p(t) = P\{X(t) = 1\} = P\{X_1(t) = 1, X_S(t) = 1\}, \quad (2.9)$$

onde $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ e $X_S(t)$ é a variável indicadora para o subsistema de dois componentes (2 e 3). Então, $X_S(t) = 1$ (0) se o subsistema de componentes 2 e 3 está funcionando (ou não) no tempo t . Logo,

$$p(t) = P(X_1 \cap X_S) \quad (2.10)$$

onde X_1 representa o evento indicando que o componente 1 funciona ($X_1(t) = 1$) e X_S representa o evento indicando que o subsistema de componentes 2 e 3 funciona no tempo t ($X_S(t) = 1$).

Supondo independência entre os eventos,

$$p(t) = P(X_1) P(X_S) = p_1 p_S, \quad (2.11)$$

onde:

$$X_S = X_{S_1} + X_{S_2} \quad (2.12)$$

$$X_{S_1} = (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3^c) \quad (2.13)$$

$$X_{S_2} = (X_2^c \cap X_3) \quad (2.14)$$

ou seja, X_{S_1} e X_{S_2} são eventos disjuntos. De (2.13) temos

$$X_{S_1} = (X_2 \cap X_3) + (X_2 \cap X_3^c). \quad (2.15)$$

Portanto,

$$P(X_{S_1}) = p_2 p_3 + p_2 (1 - p_3). \quad (2.16)$$

De (2.14) temos

$$P(X_{S_2}) = (1 - p_2) p_3. \quad (2.17)$$

Logo,

$$p_S = P(X_S) = P(X_{S_1}) + P(X_{S_2}) = p_2 p_3 + p_2 (1 - p_3) + (1 - p_2) p_3. \quad (2.18)$$

Supondo agora um sistema de rede complexo (Martz & Waller, 1982; Achcar, 1996) com sete componentes representado pela Figura 2.4:

Figura 2.4 - Sistema de rede com sete componentes.

A confiabilidade do sistema de rede considerado é dada por:

$$p(t) = P\{X(t) = 1\} = 1 - P\{X_6(t) = 0, X_S(t) = 0, X_7(t) = 0\} \quad (2.19)$$

onde $\underline{p} = (p_1, \dots, p_7)$ e $X_S(t)$ é a variável indicadora para o subsistema de cinco componentes (1, 2, 3, 4 e 5). Então, $X_S(t) = 1$ (0) se o subsistema de componentes está funcionando (ou não) no tempo t . Logo,

$$\begin{aligned} p(t) &= P(X_6 \cup X_S \cup X_7) = P(X_6^c \cap X_S^c \cap X_7^c)^c = \\ &= 1 - P(X_6^c \cap X_S^c \cap X_7^c). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Supondo independência entre os eventos temos

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 - [P(X_6^c)P(X_S^c)P(X_7^c)] = \\ &= 1 - [(1 - P(X_6))(1 - P(X_S))(1 - P(X_7))] = \\ &= 1 - (1 - p_6)(1 - p_S)(1 - p_7) = \\ &= p_6 + p_7 + p_S - p_6p_7 - p_6p_S - p_7p_S + p_6p_7p_S. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sejam os eventos:

$$X_S = X_{S_1} + X_{S_2} \quad (2.22)$$

$$X_{S_1} = X_3 \cap (X_1 \cup X_2) \cap (X_4 \cup X_5) \quad (2.23)$$

$$X_{S_2} = X_3^c \cap [(X_1 \cap X_4) \cup (X_2 \cap X_5)] \quad (2.24)$$

onde X_i denota o evento $\{X_i(t) = 1\}$. De (2.23) temos

$$\begin{aligned}
 P(X_{S_1}) &= P\{X_3 \cap (X_1 \cup X_2) \cap (X_4 \cup X_5)\} = P(X_3) P(X_1 \cup X_2) P(X_4 \cup X_5) = \\
 &= P(X_3) [1 - P(X_1^c) P(X_2^c)] [1 - P(X_4^c) P(X_5^c)] = \\
 &= p_3 [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)].
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(X_{S_1}) &= p_1 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_5 - p_1 p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 - \\
 &- p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = \\
 &= p_3 (p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_5 - p_1 p_4 p_5 - p_2 p_4 p_5 + \\
 &+ p_1 p_2 p_4 p_5).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

De (2.24) temos

$$\begin{aligned}
 P(X_{S_2}) &= P\{X_3^c \cap [(X_1 \cap X_4) \cup (X_2 \cap X_5)]\} = P(X_3^c) P\{(X_1 \cap X_4) \cup (X_2 \cap X_5)\} = \\
 &= P(X_3^c) \{1 - P[(X_1 \cap X_4)^c \cap (X_2 \cap X_5)^c]\} = \\
 &= P(X_3^c) \{1 - P[(X_1 \cap X_4)^c P(X_2 \cap X_5)^c]\} = \\
 &= [1 - P(X_3)] \{1 - [1 - P(X_1) P(X_4)] [1 - P(X_2) P(X_5)]\} = \\
 &= (1 - p_3) [1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5)].
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(X_{S_2}) &= (1 - p_3) p_1 p_4 + (1 - p_3) p_2 p_5 - (1 - p_3) p_1 p_2 p_4 p_5 = \\
 &= (1 - p_3) (p_1 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 p_S &= P(X_S) = P(X_{S_1}) + P(X_{S_2}) = p_3 (p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_5 - \\
 &- p_1 p_4 p_5 - p_2 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_4 p_5) + (1 - p_3) (p_1 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

2.4 Decomposição pivotal

O cálculo da confiabilidade de sistemas coerentes torna-se bastante complicado à medida que o número de componentes aumenta (isto pode ser observado quando consideramos o sistema de rede complexo com sete componentes da Figura 2.4). Este cálculo pode ser feito através do lema da decomposição pivotal (Barlow & Proschan, 1981), que facilita a decomposição de uma função estrutura de ordem n em funções estruturas de ordem menor do que n . Especificamente, pivotando o i -ésimo componente temos

$$\phi(X_1(t), \dots, X_n(t)) = X_i(t) \phi(1_i, X(t)) + (1 - X_i(t)) \phi(0_i, X(t)) \quad (2.30)$$

onde:

$$\phi(1_i, X(t)) = (X_1(t), \dots, X_{i-1}(t), 1, X_{i+1}(t), \dots, X_n(t)), \quad (2.31)$$

$$\phi(0_i, X(t)) = (X_1(t), \dots, X_{i-1}(t), 0, X_{i+1}(t), \dots, X_n(t)). \quad (2.32)$$

Aplicando a decomposição em $\phi(1_i, X(t))$ e $\phi(0_i, X(t))$ os termos obtidos são $\phi(1_i, 1_j, X(t))$, $\phi(1_i, 0_j, X(t))$, $\phi(0_i, 1_j, X(t))$ e $\phi(0_i, 0_j, X(t))$, de modo que uma aplicação repetida deste lema resulta em termos tais como $\phi(1, 1, \dots, 1)$, $\phi(1, 1, \dots, 0)$ e $\phi(0, 0, \dots, 1)$, que podem ser identificados como sendo 1 ou 0. Então, $\phi(X(t))$ pode ser expressa como a soma dos termos que envolvem produtos de $X_i(t)$ e $(1 - X_i(t))$.

Utilizando o lema da decomposição pivotal, ilustramos primeiramente o cálculo da confiabilidade do sistema com três componentes da Figura 2.3:

$$\begin{aligned} X(t) &= \phi(X_1, X_2, X_3) = X_1 \phi(1, X_2, X_3) + (1 - X_1) \phi(0, X_2, X_3) = \\ &= X_1 X_2 \phi(1, 1, X_3) + X_1 (1 - X_2) \phi(1, 0, X_3) = \\ &= X_1 X_2 X_3 \phi(1, 1, 1) + X_1 X_2 (1 - X_3) \phi(1, 1, 0) + X_1 (1 - X_2) X_3 \phi(1, 0, 1) + \\ &+ X_1 (1 - X_2) (1 - X_3) \phi(1, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $\phi(0, X_2, X_3) = 0$.

Portanto,

$$X(t) = \phi(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 (1 - X_3) + X_1 (1 - X_2) X_3, \quad (2.34)$$

onde $\phi(1, 1, 1) = \phi(1, 1, 0) = \phi(1, 0, 1) = 1$ e $\phi(1, 0, 0) = 0$.

Para o sistema de rede com sete componentes dado pela Figura 2.4, $X_S(t) = \phi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$. Aplicando, primeiramente, o lema da decomposição pivotal para o cálculo da confiabilidade do subsistema S de 5 componentes (1, 2, 3, 4 e 5) temos:

$$\begin{aligned} X_S(t) = \phi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = & X_1 X_2 X_3 X_4 + X_1 X_2 X_3 (1 - X_4) X_5 + \\ & + (1 - X_1) X_2 X_3 X_4 + (1 - X_1) X_2 X_3 (1 - X_4) X_5 + (1 - X_1) X_2 (1 - X_3) X_4 X_5 + \\ & + (1 - X_1) X_2 (1 - X_3) (1 - X_4) X_5 + X_1 (1 - X_2) X_3 X_4 + X_1 (1 - X_2) X_3 (1 - X_4) X_5 + \\ & + X_1 (1 - X_2) (1 - X_3) X_4 + X_1 X_2 (1 - X_3) X_4 + X_1 X_2 (1 - X_3) (1 - X_4) X_5. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_S = & p_3 [p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 (1 - p_4) p_5 + (1 - p_1) p_2 p_4 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_4) p_5 + \\ & + p_1 (1 - p_2) p_4 - p_1 (1 - p_2) (1 - p_4) p_5] + (1 - p_3) [(1 - p_1) p_2 p_4 p_5 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_4) p_5 + \\ & + p_1 (1 - p_2) p_4 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 (1 - p_4) p_5]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Fazendo $p_S = p_3 A + (1 - p_3) B$ temos:

$$\begin{aligned} A = & p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_5 - p_1 p_4 p_5 - p_2 p_4 p_5 + \\ & + p_1 p_2 p_4 p_5, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$B = p_1 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5. \quad (2.38)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_S = & p_3 (p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_5 - p_1 p_4 p_5 - p_2 p_4 p_5 + \\ & + p_1 p_2 p_4 p_5) + (1 - p_3) (p_1 p_4 + p_2 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Podemos observar que o resultado obtido via lema da decomposição pivotal em (2.39) é exatamente igual ao obtido em (2.29). Então, para o sistema com sete componentes da Figura 2.4, a confiabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} p(t) = & (1 - p_6)(1 - p_7) p_S + p_6(1 - p_7) p_S + (1 - p_6) p_7 p_S + p_6 p_7 p_S + \\ & + p_6(1 - p_7)(1 - p_S) + (1 - p_6) p_7(1 - p_S) + p_6 p_7(1 - p_S). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Portanto,

$$p(t) = p_6 + p_7 + p_8 - p_6 p_7 - p_6 p_8 - p_7 p_8 + p_6 p_7 p_8. \quad (2.41)$$

Vamos considerar agora, um caso especial de sistema de rede complexo composto por nove componentes dado pela Figura 2.5 a seguir.

Figura 2.5 - Sistema de rede com nove componentes.

O cálculo da confiabilidade deste sistema não pode ser considerado trivial, porém, utilizando o lema da decomposição pivotal podemos obter bons resultados. Seja $X(t) = \phi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$. Realizando todas as combinações possíveis, a confiabilidade do sistema da Figura 2.5 é dada por:

$$\begin{aligned} p(t) = & p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + \\ & + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + \\ & + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 (1 - p_9) + \\ & + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + (1 - p_1) p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + \\ & + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\ & + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + (1 - p_1) p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 (1 - p_9) + \\ & + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 (1 - p_2) p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + \\ & + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\ & + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 (1 - p_9) + \\ & + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + \\ & + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\
& + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) (1 - p_9) + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + \\
& + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\
& + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_8 p_9 + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 (1 - p_5) p_6 p_8 p_9 + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\
& + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) p_6 (1 - p_8) p_9 + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) p_6 p_8 (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) p_6 (1 - p_8) (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) (1 - p_9) + \\
& + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 p_7 p_8 (1 - p_9) + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 p_9 + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) p_6 (1 - p_8) (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) p_9 + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) (1 - p_5) (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) p_9 + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 p_6 (1 - p_8) (1 - p_9) + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) (1 - p_9) + \\
& + p_1 p_2 p_3 (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 (1 - p_8) p_9 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 (1 - p_9) + \\
& + p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6) p_7 p_8 (1 - p_9) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)p_5p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6p_7p_8(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4p_5p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + p_1p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6p_7p_8(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6p_7p_8(1-p_9) + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6p_8p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5p_6p_8(1-p_9) + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7p_8p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6p_8(1-p_9) + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)p_6p_8(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)p_6(1-p_8)p_9 + \\
& + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5p_6(1-p_8)(1-p_9) + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6p_8p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5p_6p_8(1-p_9) + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7p_8p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5p_6(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6p_8(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)p_6(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5p_6(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)p_6p_8(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8p_9 + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)p_6(1-p_8)p_9 + \\
& + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)p_6p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5(1-p_6)p_7p_8(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5p_6(1-p_8)(1-p_9) + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)(1-p_9) + \\
& + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5(1-p_6)p_7(1-p_8)p_9 + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5)(1-p_6)p_7p_8(1-p_9).
\end{aligned}$$

(2.42)

Capítulo 3

ANÁLISE BAYESIANA PARA SISTEMAS DE REDES

3.1 Função de verossimilhança para $\underline{p}$

Assumindo que, para os n componentes de um sistema de rede, temos o conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, \dots, n\}$, onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente testadas em um dado tempo t , e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste.

A função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^n \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad 0 < p_i < 1. \quad (3.1)$$

3.2 Distribuição conjunta a priori para $\underline{p}$

Consideramos a seguir quatro diferentes distribuições a priori que serão introduzidas no problema, cada qual com características distintas que podem ser enquadradas na formulação do modelo de um determinado sistema de rede.

3.2.1 Componentes independentes

Assumindo independência a priori para os parâmetros, podemos considerar uma distribuição conjunta a priori para $\underline{p}$ dada pelo produto de distribuições Beta,

$$\pi_1(\underline{p}) \propto \prod_{i=1}^n p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}, \quad (3.2)$$

onde $0 < p_i < 1$, a_i e b_i são constantes conhecidas, $i = 1, \dots, n$.

Normalmente a suposição de independência a priori para $\underline{p}$ pode não ser razoável. Neste caso, Lynn, Singpurwalla e Smith (1995) propõem algumas distribuições a priori para sistemas de redes, descritas nas seções a seguir.

3.2.2 Seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis

É razoável supor, em muitas aplicações, que as confiabilidades dos componentes p_i , $i = 1, \dots, n$, estão relacionadas umas com as outras, mas é difícil especificar a natureza desta relação. Um caminho para entender esta opinião é através da noção de permutabilidade (de Finetti, 1972). Se os componentes são considerados altamente confiáveis, de modo que cada p_i seja aproximadamente igual a 1, então, uma construção em duas etapas nos dá uma distribuição conjunta a priori para os p_i 's que descreve ambos os aspectos: permutabilidade e alta confiabilidade (Chen & Singpurwalla, 1996).

Seja $\tilde{p}_i = 1 - p_i$, a não confiabilidade do i -ésimo componente. Presumindo que cada $\tilde{p}_i$ seja pequeno, especificamos para qualquer $\tilde{p}_i$ uma distribuição a priori em forma de L com limite $\gamma_i < 1$. Nesta primeira etapa, supomos que dado os hiperparâmetros α e γ_i , os $\tilde{p}_i$'s são independentes e têm uma distribuição Beta em $(0, \gamma_i)$ com parâmetros α e $\beta = 1$. Ou seja,

$$\pi_1^*(\tilde{p}_i | \gamma_i, \alpha) = \frac{\alpha \tilde{p}_i^{\alpha-1}}{\gamma_i^\alpha}, \quad \text{para } 0 < \tilde{p}_i < \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Para refletir a opinião de que valores pequenos de $\tilde{p}_i$ são muito mais freqüentes do que valores grandes, escolhemos $\alpha \in (0, 1)$. Plotando $\pi_1^*(\tilde{p}_i | \gamma_i, \alpha)$ versus $\tilde{p}_i$, a distribuição de $\tilde{p}_i$ torna-se aproximadamente uniforme em $(0, \gamma_i)$ quando $\alpha \rightarrow 1$ (Figura 3.1). Com $\alpha \in (0, 1)$, uma das razões pela escolha de $\beta = 1$ é que, ainda que valores grandes de $\tilde{p}_i$ não sejam prováveis de ocorrer, eles na verdade poderiam ocorrer. Quando $\beta > 1$, valores de $\tilde{p}_i$ próximos de 1 não ocorreriam. Uma outra razão para a escolha de $\beta = 1$ é a de que, para qualquer valor fixo de α , a variância de $\tilde{p}_i$ é a maior, de maneira que a especificação a priori é admitida para incerteza máxima. A escolha de α é arbitrária, mas deve ser analisada com cuidado, podendo ser baseada na examinação visual gráfica ($\pi_1^*(\tilde{p}_i | \gamma_i, \alpha)$ versus $\tilde{p}_i$) e no conhecimento da confiabilidade do i -ésimo componente.

Figura 3.1 - Distribuições a priori de $\tilde{p}_i$ condicionadas em $\gamma = 0.75$.

azul: $\alpha = 1, \gamma = 0.75$;

amarelo: $\alpha = 0.8, \gamma = 0.75$;

verde: $\alpha = 0.5, \gamma = 0.75$;

vermelho: $\alpha = 0.25, \gamma = 0.75$;

preto: $\alpha = 0.05, \gamma = 0.75$;

A segunda etapa descreve a incerteza sobre o hiperparâmetro γ_i . Partindo do ponto de vista de que é pouco provável que γ_i tome valores extremamente pequenos, para refletir esta situação, tomamos uma distribuição Beta em $(0, 1)$ com parâmetros $\beta_2 = 1$ e β_1 próximo de 1. Então,

$$\pi_2^*(\gamma_i | \beta_1, \beta_2) \propto \gamma_i^{\beta_1-1} (1 - \gamma_i)^{\beta_2-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Como visto anteriormente, sendo α pequeno, podemos fazer $\beta_1 = \alpha + 1$. Como a escolha de β_1 não é fundamental, desta maneira, os cálculos tornam-se simplificados e a especificação a priori para $\tilde{p}_i$ se concentra em um único hiperparâmetro, α (Figura 3.2). Então,

$$\pi_2^*(\gamma_i | \alpha) = (\alpha + 1) \gamma_i^\alpha, \quad 0 < \gamma_i < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Com $\beta_1 = \alpha + 1$, a distribuição a priori para $\tilde{p}_i$ será uma Beta com parâmetros α e 2 (Figura 3.3), ou seja,

$$\pi_3^*(\tilde{p}_i, \gamma_i | \alpha) = \pi_1^*(\tilde{p}_i | \gamma_i, \alpha) \pi_2^*(\gamma_i | \alpha) = \frac{\alpha \tilde{p}_i^{\alpha-1}}{\gamma_i^\alpha} (\alpha + 1) \gamma_i^\alpha = \alpha(\alpha + 1) \tilde{p}_i^{\alpha-1}$$

$$\pi_4^*(\tilde{p}_i | \alpha) = \int_{\tilde{p}_i}^1 \pi_3^*(\tilde{p}_i, \gamma_i | \alpha) d\gamma_i = \int_{\tilde{p}_i}^1 \alpha(\alpha + 1) \tilde{p}_i^{\alpha-1} d\gamma_i = \alpha(\alpha + 1) \tilde{p}_i^{\alpha-1} (1 - \tilde{p}_i).$$

Portanto,

$$\pi_4^*(\tilde{p}_i | \alpha) = \alpha(\alpha + 1) \tilde{p}_i^{\alpha-1} (1 - \tilde{p}_i), \quad 0 < \tilde{p}_i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Figura 3.2 - Distribuições a priori de γ com $\beta_2 = 1$.

amarelo: $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1$;
verde: $\beta_1 = 1.1, \beta_2 = 1$;

preto: $\beta_1 = 1.05, \beta_2 = 1$;
vermelho: $\beta_1 = 1.01, \beta_2 = 1$;

Figura 3.3 - Distribuições a priori de $\tilde{p}_i$ não condicionadas em γ .

preto: $\alpha = 1, \gamma = 0.75$;
amarelo: $\alpha = 0.8, \gamma = 0.75$;
verde: $\alpha = 0.5, \gamma = 0.75$;

azul: $\alpha = 0.25, \gamma = 0.75$;
vermelho: $\alpha = 0.05, \gamma = 0.75$;

Considerando as confiabilidades dos componentes individuais independentes (uma prática comum embora questionável), uma distribuição conjunta a priori para $\tilde{\underline{p}}$ é dada por,

$$\pi_I(\tilde{\underline{p}} | \alpha) = \prod_{i=1}^n \{\alpha(\alpha + 1) \tilde{p}_i^{\alpha-1} (1 - \tilde{p}_i)\}, \quad 0 < \tilde{p}_i < 1. \quad (3.7)$$

Supondo que as confiabilidades individuais estão relacionadas, um caminho para entendermos tal dependência é via permutabilidade. Existem várias estratégias para a obtenção de uma sequência permutável para os $\tilde{p}_i$'s, uma delas é assumindo que os $\tilde{p}_i$'s têm um limite em comum, ou seja, $\gamma_i = \gamma$, e dado γ , os $\tilde{p}_i$'s são independentes. Neste caso, um modelo para $\underline{p}$ é dado por:

$$\pi_E(\underline{p} \mid \alpha, \beta_1, \beta_2) = \int_{\gamma} \left\{ \prod_{i=1}^n \pi_1^*(p_i \mid \gamma, \alpha) \right\} \pi_2^*(\gamma \mid \beta_1, \beta_2) d\gamma. \quad (3.8)$$

onde I e E associados com π denotam, respectivamente, independência e permutabilidade. Então, pode ser verificado que a distribuição conjunta dos p_i 's é uma função "piecewise" dada por:

$$\pi_2(\underline{p}) = \begin{cases} \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \ln\left(\frac{1}{1-p_{(1)}^*}\right), & \text{se } \alpha = (n-1)^{-1} \\ \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1-(1-p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1-(n-1)\alpha} \right\}, & \text{se } \alpha \neq (n-1)^{-1} \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_n)$. Maiores detalhes podem ser encontrados em Chen e Singpurwalla (1996) ou Lynn, Singpurwalla e Smith (1995).

3.2.3 Seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos

Muitas redes, especialmente aquelas embutidas em microcircuitos, são compostas de componentes idênticos ou quase idênticos, ou seja, os componentes podem ser aproximadamente os mesmos. Uma distribuição conjunta com massa concentrada na diagonal do hipercubo unitário satisfaz a exigência acima. Uma distribuição a priori proposta por de Finetti (1972), para o caso bivariado, é dada por:

$$\pi_3(p_1, p_2 \mid \theta_{12}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} [\theta_{12}(p_1 - p_2)^2]\right\}, \quad (3.10)$$

onde θ_{12} é um parâmetro cujos valores ditam (ou sugerem) a forma das distribuições marginais de p_i , $i = 1, 2$, e da correlação entre p_1 e p_2 .

Quando $\theta_{12} > 0$, (3.10) é uma densidade normal truncada em $p_1 - p_2$ (Figura 3.4) e suas marginais têm a forma de um U invertido. Para $\theta_{12} < 0$, (3.10) adquire a forma de uma xícara invertida (Figura 3.5) e as distribuições marginais a de um U invertido. Uma alta correlação positiva entre p_1 e p_2 pode ser incorporada, fazendo $\theta_{12} \rightarrow \infty$; para $\theta_{12} < 0$, a correlação entre p_1 e p_2 é negativa.

Figura 3.4 - Densidade de de Finetti Bivariada com $\theta_{12} > 0$.

Figura 3.5 - Densidade de de Finetti Bivariada com $\theta_{12} < 0$.

O caso trivariado é dado por:

$$\pi_3(p_1, p_2, p_3 | \bullet) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2] \right\} \quad (3.11)$$

com θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} positivos e grandes. Para o caso multivariado,

$$\pi_3(p_1, \dots, p_n | \bullet) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q \right\}, \quad (3.12)$$

onde Q é um polinômio de grau dois em $p_1, \dots, p_n$. Para $\pi_3(p_1, \dots, p_n | \bullet)$ estar concentrado na diagonal, Q deve desaparecer na diagonal. Além disso, para valores altos de N , a distribuição a posteriori é dada por:

$$\pi_3(p_1, \dots, p_n | \bullet, D) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Q + NR) \right\}, \quad (3.13)$$

onde $N = (n_1 + \dots + n_n)$ e

$$R = \left(\frac{p_1 - \hat{p}_1}{a_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{p_n - \hat{p}_n}{a_n} \right)^2,$$

com $\hat{p}_i = \frac{x_i}{n_i}$ e $a_i = \left(\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{(n_i/N)} \right)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, n$.

A normalidade multivariada aproximada de (3.10) faz a tarefa de gerar amostras desta distribuição relativamente simples. Uma desvantagem é a de que ela não é aplicável se quaisquer $\hat{p}_i$ s é 0 ou 1, pois R ficaria indefinido. Portanto, o uso da distribuição de de Finetti não é viável se os componentes de um determinado sistema de rede são altamente confiáveis ou não confiáveis.

3.2.4 Componentes não muito confiáveis nem idênticos

Para componentes que são nem muito confiáveis nem idênticos, uma outra distribuição a priori é proposta por Lee (1993). Esta distribuição tem marginais Beta e a propriedade de que, sob amostragem binomial, sua distribuição a posteriori é uma combinação linear dos produtos de densidades Beta univariadas. Porém, no caso bivariado, seu coeficiente de correlação pode tomar valores entre -1 e 1 .

No caso bivariado, dado $\underline{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, w_{12})$, a distribuição conjunta a priori para p_1 e p_2 é dada por:

$$\pi_4(p_1, p_2 | \underline{\theta}) = \pi(p_1 | \underline{\theta}) \pi(p_2 | \underline{\theta}) \{1 + w_{12} \phi(p_1) \phi(p_2)\}, \quad (3.14)$$

onde $\phi(p_i) = p_i - \mu_i$, $\mu_i = E(p_i)$ e $\pi(p_i | \underline{\theta})$ é a distribuição marginal Beta de p_i , com parâmetros α_i e β_i , $i = 1, 2$. O parâmetro w_{12} determina a intensidade da relação entre p_1 e p_2 , com $w_{12} = 0$ denotando independência.

O limite para w_{12} está restrito a:

$$\frac{-(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{\max(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)} \leq w_{12} \leq \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{\max(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)}.$$

Portanto, correlações positivas e negativas, com valores próximos de 1, podem ser incorporadas via (3.14). A especificação do parâmetro de dependência w_{12} é facilitada pelo fato de que $w_{12} = \rho_{12} / \sigma_1 \sigma_2$, onde ρ_{12} é a correlação linear de Pearson entre p_1 e p_2 , e σ_i^2 é a variância de p_i , $i = 1, 2$. Alternativamente, se $\psi_{1|2} = (E(p_1 | p_2) - \mu_1) / \sigma_1^2$, então, pode ser mostrado que $w_{12} = \psi_{1|2} / (p_2 - \mu_2)$. Para encontrarmos $E(p_1 | p_2)$ damos atenção simplesmente para o caso $p_2 = 1$. Ou seja, deduzimos uma opinião sobre o valor esperado de p_1 , quando sabemos que o componente 2 nunca falha.

A extensão para o caso trivariado, envolve um alargamento de $\underline{\theta}$. Isto é, se

$$\underline{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, w_{12}, w_{13}, w_{23}, w_{123}),$$

$$R_{123}(\bullet) = \{w_{12} \phi(p_1) \phi(p_2) + w_{13} \phi(p_1) \phi(p_3) + w_{23} \phi(p_2) \phi(p_3) + w_{123} \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3)\},$$

então,

$$\pi_4(p_1, p_2, p_3 | \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^3 \pi(p_i | \underline{\theta}) \{1 + R_{123}(p_1, p_2, p_3)\}. \quad (3.15)$$

Os parâmetros w_{ij} determinam a intensidade da relação entre p_i e p_j e o parâmetro w_{123} mostra a dependência entre p_1 , p_2 e p_3 . Então,

$$w_{123} = \frac{E[(p_1 - \mu_1)(p_2 - \mu_2)(p_3 - \mu_3)]}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}. \quad (3.16)$$

A relação acima implica que, se qualquer componente é independente dos outros dois, então, todos os parâmetros dependentes $w_{\bullet}$ que contêm este componente em seu índice são zero. Por exemplo, se p_1 é independente de p_2 e p_3 , então, o único parâmetro dependente diferente de zero é w_{23} . Para $\psi_{1|23}$ temos,

$$\psi_{1|23} = \frac{E(p_1 | p_2, p_3) - \mu_1}{\phi_1^2}, \quad (3.17)$$

e, depois de algumas manipulações algébricas,

$$w_{123} = \frac{(1 + R_{23}(\cdot)) \psi_{1|23} + \psi_{1|2} + \psi_{1|3}}{(p_2 - \mu_2)(p_3 - \mu_3)}, \quad (3.18)$$

onde $R_{23}(\bullet) = w_{23}\psi(p_2)\psi(p_3)$.

A distribuição de Lee para dimensão n envolve um alargamento apropriado de $\underline{\theta}$ no sentido de abranger todas as dependências possíveis. Maiores detalhes podem ser encontrados em Lee (1993) ou em Lynn, Singpurwalla e Smith (1995). A distribuição é dada por:

$$\pi_4(p_1, \dots, p_n | \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n \pi(p_i | \underline{\theta}) \{1 + R_{12\dots n}(p_1, \dots, p_n)\}, \quad (3.19)$$

sendo que, $R_{12\dots n}(\bullet)$ segue o modelo de $R_{123}(\bullet)$ dado anteriormente.

Capítulo 4

ANÁLISE BAYESIANA E ANÁLISE CLÁSSICA PARA O SISTEMA DE REDE DA FIGURA 2.4

Após a introdução nos capítulos anteriores de algumas técnicas que auxiliam a análise da confiabilidade de sistemas de redes, ilustraremos um exemplo, onde realizamos primeiramente uma análise Bayesiana considerando as diferentes distribuições a priori apresentadas no Capítulo 3, e posteriormente uma análise clássica com o objetivo de compararmos os resultados obtidos.

Consideremos o sistema de rede complexo com sete componentes (Figura 2.4) e o conjunto de dados D a seguir:

Tabela 4.1 - Conjunto de dados.

n_i	12	10	7	14	18	20	18
x_i	11	8	5	12	12	18	17

onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t , e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste, sendo, $i = 1, \dots, 7$.

4.1 Análise Bayesiana

4.1.1 Inferências Bayesianas

Considerando os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, geramos amostras para obtermos inferências para as confiabilidades dos componentes individuais $p_i(t)$ e para a confiabilidade do sistema de rede $p(t)$. Um estimador de Bayes de p_i com respeito à função de perda quadrática é dado por:

$$E(p_i | D) = \int p_i \pi(\underline{p} | D) d\underline{p} . \quad (4.1)$$

Seja $p_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 7$, os valores obtidos para p_i na r -ésima replicação e s -ésima iteração, onde R e S são, respectivamente, o número total de simulações (ou cadeias) e o número de iterações do algoritmo. Então, (4.1) pode ser dado pela estimativa de Monte Carlo

$$\hat{p}_i = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S p_i^{(r,s)} . \quad (4.2)$$

Uma estimativa de Monte Carlo para a confiabilidade do sistema de rede $h(\underline{p})$ com respeito à função de perda quadrática, é dada por:

$$\hat{h}(\underline{p}) = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S h(p_1^{(r,s)}, \dots, p_n^{(r,s)}) . \quad (4.3)$$

4.1.2 Distribuições condicionais a posteriori para $\underline{p}$

Através de uma programação realizada no software Matlab versão 4.2b, com o objetivo de obtermos amostras representativas das distribuições de interesse e de realizarmos inferências via simulação, geramos 5 cadeias com 2000 iterações em cada. Em seguida, desprezamos as 500 primeiras iterações e com as restantes, de cada cadeia, construímos uma amostra tomando valores espaçados de 15 em 15, totalizando 500 dados. Para alguns casos particulares, que serão citados posteriormente, foi necessário um número maior de iterações até a convergência. O critério de convergência para verificarmos se os valores gerados são mesmo pontos amostrais da distribuição desejada, é o proposto por Gelman e Rubin (1992), baseado em técnicas de análise de variância, onde a convergência é aceita quando a variância entre as cadeias é bem menor que a variância dentro de cada cadeia.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i|D)$, são apresentados na Tabela 4.2 abaixo.

Tabela 4.2 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D)$, $i = 1, \dots, 7$.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9160	0.9142	0.8318	0.8632
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8105	0.8145	0.7980	0.7612
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7471	0.7327	0.7112	0.6783
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8653	0.8625	0.7687	0.8164
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6867	0.6859	0.6927	0.6566
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8946	0.8995	0.8812	0.8640
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9411	0.9376	0.9034	0.9089

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 7$, são dados pela Tabela 4.3 a seguir.

Tabela 4.3 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 7$.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.7409;0.9959	0.7201;0.9971	0.6393;0.9724	0.6590;0.9823;
p_2	0.5743;0.9791	0.5566;0.9741	0.6210;0.9385	0.4976;0.9351
p_3	0.4071;0.9602	0.4047;0.9576	0.4532;0.9102	0.3715;0.9119
p_4	0.6652;0.9797	0.6631;0.9872	0.5492;0.9219	0.6055;0.9565
p_5	0.4806;0.8649	0.4679;0.8630	0.5201;0.8445	0.4633;0.8409
p_6	0.7408;0.9827	0.7459;0.9811	0.7465;0.9743	0.6958;0.9698
p_7	0.7993;0.9981	0.8037;0.9978	0.7576;0.9871	0.7546;0.9876

A Tabela 4.4 mostra as estimativas de Monte Carlo para $E(p(t)|D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4 e os intervalos de credibilidade (95%) para $p(t)$.

Tabela 4.4 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{E}(p(t) D)$	0.9996	0.9996	0.9983	0.9986
$IC(95\%)p(t)$	0.9980;1.0000	0.9985;1.0000	0.9921;0.9999	0.9950;0.9999

Para o caso de independência a priori entre os parâmetros, considerando a distribuição dada em (3.2), $a_i = 1.125$ e $b_i = 0.125$, as distribuições marginais a posteriori para p_i são dadas por:

$$\pi_1(p_i | D) \propto p_i^{1.125+x_i-1} (1-p_i)^{n_i-x_i-0.125-1}, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.4)$$

ou seja,

$$p_i | D \sim \text{Beta}[1.125 + x_i, n_i - x_i - 0.125], \quad i = 1, \dots, 7.$$

A figura a seguir mostra os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$, considerando a distribuição a priori $\pi_1(\underline{p})$.

Figura 4.1 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$.

Para seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, de acordo com a distribuição a priori dada em (3.9), a distribuição conjunta a posteriori para $\underline{p}$ é dada por:

$$\pi_2(\underline{p} | D) = [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-6\alpha}] \prod_{i=1}^7 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \quad (4.5)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_7)$, $i = 1, \dots, 7$. Assumindo $\alpha = 0.1$ em (4.5), garantimos que os valores de p_i tendam a ser grandes. As distribuições condicionais usadas para gerarmos amostras de (4.5) via algoritmos de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings são dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \phi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 7, \quad (4.6)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}]\}$ e $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_7)$. Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e dos valores gerados para a avaliação da convergência do algoritmo, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$, são ilustrados pelas figuras a seguir.

Figura 4.2 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$.

Figura 4.3 - Valores gerados para p_i , $i = 1, \dots, 7$.

Com o objetivo de realizarmos comparações, assumimos também $\alpha = 0.5$. Para este caso, foi necessário um número maior de iterações até a convergência. Então, geramos 5 cadeias com 10000 iterações em cada e desprezamos as 2500 primeiras iterações e com as restantes, de cada cadeia, construímos uma amostra tomando valores espaçados de 15 em 15, totalizando 2500 dados. Os resultados comparativos para $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.5$ estão nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 a seguir, e os gráficos das distribuições marginais e dos valores gerados referentes a $\alpha = 0.5$ estão no Apêndice D.

Tabela 4.5 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 7$, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.1$	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.5$
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9142	0.8870
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8145	0.7615
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7327	0.6316
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8625	0.8337
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6859	0.6447
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8995	0.8826
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9376	0.9219

Tabela 4.6 - Intervalos de credibilidade (95%) para $p_i, i = 1, \dots, 7$, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.1$	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.5$
p_1	0.7201;0.9971	0.6731;0.9912
p_2	0.5566;0.9741	0.4513;0.9546
p_3	0.4047;0.9576	0.2478;0.9333
p_4	0.6631;0.9872	0.5947;0.9701
p_5	0.4679;0.8630	0.3970;0.8460
p_6	0.7459;0.9811	0.7174;0.9786
p_7	0.8037;0.9978	0.7701;0.9930

Tabela 4.7 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.1$	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.5$
$\hat{E}(p(t) D)$	0.9996	0.9991
$I.C. (95\%) p(t)$	0.9985;1.0000	0.9955;1.0000

Outros valores foram atribuídos a α . Verificamos que para valores maiores que 0.5, a convergência não é obtida rapidamente para alguns parâmetros, necessitando de um tempo computacional maior até a obtenção da mesma.

Assumindo a situação onde p_1 é semelhante a p_2 , p_4 semelhante a p_5 e p_6 semelhante a p_7 , com valores representando correlações altamente positivas entre os parâmetros dados por $\theta_{12} = \theta_{67} = 100$, $\theta_{45} = 50$ e todos os restantes próximos de zero, exceto $\theta_{23} = \theta_{34} = 10$. As distribuições a priori e a posteriori são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_3(\underline{p}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right] \right\} \quad (4.7)$$

$$\pi_3(p | D) \propto \left[\prod_{i=1}^7 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right] \right\} \quad (4.8)$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings por:

$$\begin{aligned} p_1 | p_{(1)}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 \right\} \\ p_2 | p_{(2)}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 \right] \right\} \\ p_3 | p_{(3)}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 \right] \right\} \\ p_4 | p_{(4)}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_5 | p_{(5)}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right\} \\ p_6 | p_{(6)}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right\} \\ p_7 | p_{(7)}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

As figuras a seguir mostram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e dos valores gerados para a avaliação da convergência do algoritmo, considerando a distribuição a priori $\pi_3(p)$.

Figura 4.4 - Distribuição marginal a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

Figura 4.5 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

Assumindo ainda uma outra situação na qual p_1 é semelhante a p_4 , p_2 semelhante a p_5 e p_6 semelhante a p_7 , onde $\theta_{14} = \theta_{25} = 100$ e $\theta_{67} = 50$ e os demais próximos de zero, exceto $\theta_{13} = \theta_{35} = 10$. Então, as distribuições a priori e a posteriori são dadas por:

$$\pi_3(\underline{p}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{14}(p_1 - p_4)^2 + \theta_{25}(p_2 - p_5)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2\right]\right\} \quad (4.10)$$

$$\pi_3(\underline{p} | D) \propto \left[\prod_{i=1}^7 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{14}(p_1 - p_4)^2 + \theta_{25}(p_2 - p_5)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2\right]\right\} \quad (4.11)$$

e as distribuições condicionais por:

$$\begin{aligned} p_1 | p_{(1)}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{14}(p_1 - p_4)^2\right]\right\} \\ p_2 | p_{(2)}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_{25}(p_2 - p_5)^2\right\} \\ p_3 | p_{(3)}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2\right]\right\} \\ p_4 | p_{(4)}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_{14}(p_1 - p_4)^2\right\} \\ p_5 | p_{(5)}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{25}(p_2 - p_5)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2\right]\right\} \\ p_6 | p_{(6)}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_{67}(p_6 - p_7)^2\right\} \\ p_7 | p_{(7)}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_{67}(p_6 - p_7)^2\right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os resultados comparativos para as situações descritas anteriormente e indicadas por $\pi_{3_1}(\underline{p})$ e $\pi_{3_2}(\underline{p})$, respectivamente, estão nas Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 a seguir, e os gráficos das distribuições marginais e dos valores gerados referentes a $\pi_{3_2}(\underline{p})$ estão no Apêndice D.

Tabela 4.8 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D)$, $i = 1, \dots, 7$, considerando a distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_{3_1}(\underline{p})$	$\pi_{3_2}(\underline{p})$
$\widehat{E}(p_1 D)$	0.8318	0.8463
$\widehat{E}(p_2 D)$	0.7980	0.7198
$\widehat{E}(p_3 D)$	0.7112	0.6815
$\widehat{E}(p_4 D)$	0.7687	0.8306
$\widehat{E}(p_5 D)$	0.6927	0.6886
$\widehat{E}(p_6 D)$	0.8812	0.8762
$\widehat{E}(p_7 D)$	0.9034	0.9052

Tabela 4.9 - Intervalos de credibilidade (95%) para p_i , $i = 1, \dots, 7$, considerando a distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_{3_1}(\underline{p})$	$\pi_{3_2}(\underline{p})$
p_1	0.6393;0.9724	0.6688;0.9731
p_2	0.6210;0.9385	0.5069;0.8874
p_3	0.4532;0.9102	0.3911;0.9072
p_4	0.5492;0.9219	0.6513;0.9612
p_5	0.5201;0.8445	0.5278;0.8438
p_6	0.7465;0.9743	0.7443;0.9672
p_7	0.7576;0.9871	0.7622;0.9861

Tabela 4.10 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4, considerando a distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Distribuição a priori		
	$\pi_{3_1}(\underline{p})$	$\pi_{3_2}(\underline{p})$
$\widehat{E}(p(t) D)$	0.9983	0.9986
$I.C. (95\%) p(t)$	0.9921;0.9999	0.9941;0.9999

Para componentes não muito confiáveis nem idênticos, assumimos distribuições marginais uniformes $(0, 1)$ para p_i dado $\underline{\theta}$ e $w_{12} = w_{45} = w_{67} = 2$, que correspondem às correlações positivas entre p_1 e p_2 , entre p_4 e p_5 e entre p_6 e p_7 . Assumimos, também, $w_{23} = w_{34} = 1$ e todas as outras dependências como zero. Então, as distribuições a priori e a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(\underline{p}) \propto \psi(\underline{p}) \quad (4.13)$$

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^7 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 7, \quad (4.14)$$

onde $\psi(\underline{p}) = 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{23} \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) +$
 $+ w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right).$

As distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 7. \quad (4.15)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_7)$. De acordo com as condicionais obtidas, observamos que p_i pode ser gerado utilizando o algoritmo Metropolis-Hastings, onde o núcleo é uma distribuição Beta com parâmetros $x_i + 1$ e $n_i - x_i + 1$. As figuras a seguir mostram a forma das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e dos valores gerados para a avaliação da convergência do algoritmo, considerando distribuição a priori $\pi_4(\underline{p})$.

Figura 4.6 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$.

Figura 4.7 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

De acordo com o critério de Gelman e Rubin, os indicadores de convergência obtidos para $p_i, i = 1, \dots, 7$, são dados pela Tabela 4.11.

Tabela 4.11 - Indicadores de convergência para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

Distribuição a priori						
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.1$	$\pi_2(\underline{p}), \alpha = 0.5$	$\pi_{3_1}(\underline{p})$	$\pi_{3_2}(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{R}_1$	0.9963	0.9979	1.0018	1.0076	0.9987	1.0016
$\hat{R}_2$	1.0015	1.0035	1.0013	0.9967	1.0068	0.9977
$\hat{R}_3$	1.0008	1.0062	1.0030	0.9984	1.0027	1.0109
$\hat{R}_4$	1.0011	1.0060	1.0008	0.9998	1.0009	1.0044
$\hat{R}_5$	0.9986	1.0014	1.0001	1.0008	1.0031	1.0036
$\hat{R}_6$	1.0008	0.9996	1.0013	0.9985	1.0028	1.0015
$\hat{R}_7$	1.0026	1.0048	1.0056	0.9988	1.0115	1.0041

onde $\hat{R}_i$ indica o valor da convergência para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

4.2 Análise Clássica

De acordo com os dados referentes à Figura 2.4, a função de verossimilhança para $\underline{p}$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^7 \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (4.16)$$

Então, temos

$$l(\underline{p}) = \ln L(\underline{p}) = \sum_{i=1}^7 \left(\ln n_i! - \ln x_i! - \ln (n_i - x_i)! + x_i \ln p_i + (n_i - x_i) \ln (1 - p_i) \right). \quad (4.17)$$

Derivando (4.17) em relação a p_i , $i = 1, \dots, 7$, obtemos as seguintes equações de verossimilhança:

$$\frac{\partial l(\underline{p})}{\partial p_i} = \frac{x_i}{p_i} - \frac{(n_i - x_i)}{(1 - p_i)}, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (4.18)$$

Igualando as equações de verossimilhança de (4.18) a zero, obtemos os Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) para p_i dados por:

$$\hat{p}_i = \frac{x_i}{n_i}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (4.19)$$

onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste.

Utilizando normalidade assintótica (Bickel & Doksum, 1977), as distribuições assintóticas para $\hat{p}_i$ são expressas por:

$$\hat{p}_i \stackrel{a}{\sim} N\left(p_i, I_{ii}^{-1}(\underline{p})\right), \quad i = 1, \dots, 7, \quad (4.20)$$

onde $I(\underline{p})$ é a Matriz de Informação de Fisher dada por:

$$I(\underline{p}) = \begin{pmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_1 p_2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_1 p_3}\right) & \dots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_1 p_7}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_2 p_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_2^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_2 p_3}\right) & \dots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_2 p_7}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_7 p_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_7 p_2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_7 p_3}\right) & \dots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_7^2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Os Intervalos de Confiança $100(1 - \alpha)\%$ para p_i , $i = 1, \dots, 7$, são dados por:

$$\left(\hat{p}_i - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_{ii}^{-1}(\underline{p})} ; \hat{p}_i + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_{ii}^{-1}(\underline{p})} \right), i = 1, \dots, 7, \quad (4.22)$$

onde $(1 - \alpha)$ é o nível de confiança e o ponto $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ é determinado de uma distribuição normal padronizada.

Então, derivando novamente as equações de (4.18) em relação a p_i , obtemos as derivadas de segunda ordem que correspondem às diagonais da matriz expressa por (4.21) dadas por:

$$\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_i^2} = -\frac{x_i}{p_i^2} - \frac{(n_i - x_i)}{(1 - p_i)^2}, \quad (4.23)$$

Podemos observar, ainda, que as derivadas de segunda ordem $\frac{\partial^2 l(\underline{p})}{\partial p_i p_j}$, $i \neq j$, $i = 1, \dots, 7$ e $j = 1, \dots, 7$ são iguais a zero.

Utilizando os dados da Tabela 4.1, a inversa da Matriz de Informação de Fisher é dada por:

$$I^{-1}(\underline{p}) = \begin{pmatrix} 157.091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34.300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 114.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 222.222 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 343.059 \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.24)$$

ou seja,

$$I^{-1}(\underline{p}) = \begin{pmatrix} 0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0160 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0292 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0087 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0123 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0029 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Portanto, de acordo com os dados, os EMV e os intervalos de confiança (95%) obtidos para $p_i, i = 1, \dots, 7$, estão na Tabela 4.12 a seguir.

Tabela 4.12 - Estimadores de Máxima Verossimilhança e Intervalos de Confiança (95%) para $p_i, i = 1, \dots, 7$.

	EMV	I.C.(95 %)
p_1	0.9167	0.7603 ; 1.0000
p_2	0.8000	0.5521 ; 1.0000
p_3	0.7143	0.3796 ; 1.0000
p_4	0.8571	0.6738 ; 1.0000
p_5	0.6667	0.4489 ; 0.8844
p_6	0.9000	0.7685 ; 1.0000
p_7	0.9444	0.8386 ; 1.0000

Como vimos anteriormente no Capítulo 2, a expressão (2.41) descrita abaixo nos dá $p(t)$, a confiabilidade para o sistema da Figura 2.4. Então, através da substituição dos EMV obtidos para $p_i, i = 1, \dots, 7$, em (4.19), obtemos também, de um modo simples, o EMV da confiabilidade do sistema.

$$p(t) = p_6 + p_7 + p_S - p_6 p_7 - p_6 p_S - p_7 p_S + p_6 p_7 p_S.$$

Para o cálculo do intervalo de confiança da confiabilidade do sistema da Figura 2.4 utilizamos o Método Delta (ver por exemplo Leite & Singer, 1990) que inclui o Teorema enunciado a seguir.

Teorema: Sejam $\{T_n\}_{n \geq 1} = \{(T_{n_1}, T_{n_2}, \dots, T_{n_r})\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de vetores r -dimensionais, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{R}^r$ e $g(\underline{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_r)$ uma função com valores reais tal que $g_j^*(\underline{x}) = \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_j}$ existe em uma vizinhança de $\underline{p}$ e é contínua no ponto $\underline{p}$ para $j = 1, \dots, r$. Seja

$$g^*(\underline{x}) = \left(g_j^*(\underline{x}) \right)_{1 \leq j \leq r} = \left(\frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_j} \Big|_{\underline{x} = \underline{p}} \right)_{1 \leq j \leq r}. \text{ Se } \sqrt{n} (T_n - \underline{p}) \rightarrow N(0, \Sigma), \text{ então, } \sqrt{n} \left((g(T_n) - g(\underline{p})) \right) \rightarrow N(0, g^*(\underline{p}) \Sigma g^*(\underline{p})').$$

Consideremos $r = 7$ e T_n convergindo diretamente para o EMV de $\underline{p}$. Consideremos ainda $g^*(\underline{p})$ uma matriz 1×7 expressa por:

$$g^*(\underline{p}) = \left(\frac{\partial p(t)}{\partial p_1} \quad \frac{\partial p(t)}{\partial p_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial p(t)}{\partial p_7} \right). \quad (4.26)$$

Seja $\Sigma = I^{-1}(\underline{p})$, a inversa da Matriz de Informação de Fisher, dada em (4.25). Então, de acordo com os dados, o EMV e o intervalo de confiança (95%) obtidos para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4 estão na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 - Estimador de Máxima Verossimilhança
e Intervalo de confiança (95%) para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4

	EMV	I.C.(95%)
$p(t)$	0.9996	0.9985;1.0000

Algumas Conclusões

Para o sistema de rede considerado neste capítulo (Figura 2.4), observamos que os resultados obtidos considerando as distribuições a priori $\pi_1(\underline{p})$ (componentes independentes) e $\pi_2(\underline{p})$ (componentes permutáveis e altamente confiáveis) estão próximos. Para as distribuições a priori $\pi_3(\underline{p})$ (componentes permutáveis e idênticos ou quase idênticos), em ambas as situações consideradas, e para $\pi_4(\underline{p})$ (componentes não muito confiáveis nem idênticos) também obtivemos resultados bastante próximos. Notamos ainda que existe uma certa diferença nos sumários obtidos considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$. Os valores para $\alpha = 0.5$ são menores do que os valores para $\alpha = 0.1$.

Através da análise clássica observamos que os EMV para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e os seus respectivos intervalos de confiança foram obtidos de maneira simples, porém, para a confiabilidade do sistema a obtenção do intervalo de confiança não é uma tarefa simples, devido à dimensão das derivadas envolvidas. Conseqüentemente, quanto maior o número de parâmetros envolvidos, maior será a dificuldade em se obter este intervalo.

Podemos observar também que os resultados obtidos via análise clássica estão próximos aos obtidos via análise Bayesiana.

Capítulo 5

ANÁLISE BAYESIANA HIERÁRQUICA PARA O SISTEMA DE REDE DA FIGURA 2.4

Na análise Bayesiana hierárquica, os hiperparâmetros, ou seja, os parâmetros das distribuições dos parâmetros, são desconhecidos mas têm uma distribuição conhecida. Muitas vezes, um problema é estruturado de forma que existem relações probabilísticas a respeito dos parâmetros e hiperparâmetros que podem ser incorporadas ao modelo através de distribuições a priori hierárquicas.

Neste capítulo realizamos uma análise Bayesiana hierárquica para o sistema de rede da Figura 2.4, considerando as distribuições a priori e seus respectivos parâmetros introduzidos no Capítulo 3.

5.1 Função de verossimilhança para $\underline{p}$

Consideremos o sistema de rede complexo com sete componentes (Figura 2.4) e o conjunto de dados da Tabela 4.1. A função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, \dots, p_7)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^7 \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (5.1)$$

5.2 Distribuição a priori para $\underline{p}$

5.2.1 Sequências permutáveis e componentes altamente confiáveis

Para o caso de sequências permutáveis e componentes altamente confiáveis, a distribuição conjunta de $\underline{p}$ (ver (3.9)) é dada por:

$$\pi_2(\underline{p} | \alpha) = \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\}$$

onde $i = 1, \dots, 7$ e $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_7)$.

Seja

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) = \pi_2(\underline{p} | \alpha) \pi_0(\alpha) \quad (5.2)$$

onde $\pi_0(\alpha) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha}$, $\alpha > 0$ e a, b são conhecidos, ou seja, $\alpha \sim Gama(a, b)$.

Logo,

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) \propto \alpha^{n+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\}, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (5.3)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_7)$. A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha | D) \propto \alpha^{n+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \right\} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\} \quad (5.4)$$

e as distribuições condicionais dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, \alpha, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \phi_1(\underline{p})$$

$$\pi_2(\alpha | \underline{p}, D) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} \phi_2(\underline{p}) \quad (5.5)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_7)$, $i = 1, \dots, 7$ e

$$\phi_1(\underline{p}) = \exp \left\{ \log [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}] \right\}$$

$$\phi_2(\underline{p}) = \exp \left\{ n \log \alpha + \left[\sum_{i=1}^n (n_i - x_i + \alpha - 1) \log(1 - p_i) \right] + \right.$$

$$\left. + \log [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}] - \log(1 - (n-1)\alpha) \right\}.$$

Assumindo $a = 100$ e $b = 1000$, de maneira que continuemos a garantir que os valores de p_i tendem a ser grandes, e considerando os algoritmos de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings nas mesmas condições de programação descritas na seção (4.2.1), construímos uma amostra para obtermos os sumários de interesse.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i|D)$ e $E(\alpha|D)$, são apresentados na Tabela 5.1 a seguir.

Tabela 5.1 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D)$ e $E(\alpha|D)$, $i = 1, \dots, 7$.

$\pi_2(\underline{p})$		
	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9142	0.9167
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8145	0.8166
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7327	0.7461
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8625	0.8632
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6859	0.6743
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8995	0.8972
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9376	0.9436
$\hat{E}(\alpha D)$	—	0.1002

Os intervalos de credibilidade de 95% para α e p_i , $i = 1, \dots, 7$, são dados pela Tabela 5.2 abaixo.

Tabela 5.2 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i e α , $i = 1, \dots, 7$.

$\pi_2(\underline{p})$		
	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
p_1	0.7201;0.9971	0.7253;0.9964
p_2	0.5566;0.9741	0.5501;0.9688
p_3	0.4047;0.9576	0.4306;0.9567
p_4	0.6631;0.9872	0.6659;0.9749
p_5	0.4679;0.8630	0.4563;0.8665
p_6	0.7459;0.9811	0.7271;0.9844
p_7	0.8037;0.9978	0.8224;0.9985
α	—	0.0813;0.1200

De acordo com as distribuições condicionais obtidas geramos α e os p_i 's. Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para α e p_i , $i = 1, \dots, 7$, e dos valores gerados para a verificação da convergência, considerando uma análise Bayesiana hierárquica e utilizando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$, são ilustrados pelas figuras a seguir.

Figura 5.1 - Distribuição marginal a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 7$ e para α .

Figura 5.2 - Valores gerados para $p_i, i = 1, 2, 3$.

Figura 5.3 - Valores gerados para $p_i, i = 4, \dots, 7$ e para α .

5.2.2 Sequências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos

Para sequências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos, assumindo p_1 semelhante a p_2 , p_4 semelhante a p_5 e p_6 semelhante a p_7 , temos:

$$\theta_{12} \sim \text{Normal}(100, 16)$$

$$\theta_{67} \sim \text{Normal}(100, 16)$$

$$\theta_{45} \sim \text{Normal}(50, 9)$$

$$\theta_{23} \sim \text{Normal}(10, 4)$$

$$\theta_{34} \sim \text{Normal}(10, 4)$$

e os demais iguais a zero.

De (4.6) temos

$$\pi_3(p | \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 \right] \right\}.$$

Seja,

$$\pi_3(\underset{\sim}{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}) = \pi_3(\underset{\sim}{p} \mid \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}) \pi_0(\theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}). \quad (5.6)$$

Assumindo independência a priori entre $\theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}$ e θ_{34} temos

$$\begin{aligned} \pi_0(\theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{45} - 50)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8}(\theta_{23} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{34} - 10)^2\right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi_3(\underset{\sim}{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \right. \right. \\ &\left. + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2\right]\} \times \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{45} - 50)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{23} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{34} - 10)^2\right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_3(\underset{\sim}{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34} \mid D) &\propto \left[\prod_{i=1}^7 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}\right] \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2\right]\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{45} - 50)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{23} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{34} - 10)^2\right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings dadas por:

$$\begin{aligned}
p_1 | p_{(1)}, \underline{\theta}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 \right\} \\
p_2 | p_{(2)}, \underline{\theta}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12} (p_1 - p_2)^2 + \theta_{23} (p_2 - p_3)^2 \right] \right\} \\
p_3 | p_{(3)}, \underline{\theta}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{23} (p_2 - p_3)^2 + \theta_{34} (p_3 - p_4)^2 \right] \right\} \\
p_4 | p_{(4)}, \underline{\theta}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34} (p_3 - p_4)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_5 | p_{(5)}, \underline{\theta}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right\} \\
p_6 | p_{(6)}, \underline{\theta}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\
p_7 | p_{(7)}, \underline{\theta}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\
\theta_{12} | \underline{p}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{12} - 100)^2 \right\} \\
\theta_{67} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{67} - 100)^2 \right\} \\
\theta_{45} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{23}, \theta_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{45} - 50)^2 \right\} \\
\theta_{23} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{23} (p_2 - p_3)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{23} - 10)^2 \right\} \\
\theta_{34} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{34} (p_3 - p_4)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{34} - 10)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\underline{\theta} = (\theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{45}, \theta_{23}, \theta_{34})$.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 7$, $E(\theta_{12} | D)$, $E(\theta_{67} | D)$, $E(\theta_{45} | D)$, $E(\theta_{23} | D)$ e $E(\theta_{34} | D)$ são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 7$, e $E(\theta_{12} | D)$, $E(\theta_{67} | D)$, $E(\theta_{45} | D)$, $E(\theta_{23} | D)$ e $E(\theta_{34} | D)$.

$\pi_3(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.8318	0.8430
$\hat{E}(p_2 D)$	0.7980	0.8036
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7112	0.7285
$\hat{E}(p_4 D)$	0.7687	0.7760
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6927	0.7064
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8812	0.8816
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9034	0.9011
$\hat{E}(\theta_{12} D)$	—	100.2148
$\hat{E}(\theta_{67} D)$	—	100.0198
$\hat{E}(\theta_{45} D)$	—	49.9507
$\hat{E}(\theta_{23} D)$	—	9.9863
$\hat{E}(\theta_{34} D)$	—	10.0291

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e para $\underline{\theta}$ são dados pela Tabela 5.4 a seguir.

Tabela 5.4 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e para $\underline{\theta}$.

$\pi_3(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6393;0.9724	0.6647;0.9696
p_2	0.6210;0.9385	0.6368;0.9291
p_3	0.4532;0.9102	0.4899;0.9324
p_4	0.5492;0.9219	0.6009;0.9294
p_5	0.5201;0.8445	0.5322;0.8396
p_6	0.7465;0.9743	0.7485;0.9672
p_7	0.7576;0.9871	0.7689;0.9860
θ_{12}	—	94.7434;106.0046
θ_{67}	—	95.0093;105.5001
θ_{45}	—	45.9245;53.7926
θ_{23}	—	7.5067;12.6334
θ_{34}	—	7.3788;12.6218

As figuras a seguir mostram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para θ e p_i , $i = 1, \dots, 7$ e dos valores gerados para a verificação da convergência, considerando distribuição a priori $\pi_3(p)$.

Figura 5.4 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e para θ .

Figura 5.5 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 7$, e para θ .

5.2.3 Componentes não muito confiáveis nem idênticos

Para componentes não muito confiáveis nem idênticos assumimos:

$$\begin{aligned}
w_{12} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{67} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{45} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{23} &\sim \text{Normal}(1, 1) \\
w_{34} &\sim \text{Normal}(1, 1)
\end{aligned}$$

e as demais dependências iguais a zero.

De (4.12) temos

$$\pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}) \propto \psi(\underline{p}, \underline{w}),$$

onde $\underline{w} = (w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34})$ e

$$\begin{aligned}
\psi(\underline{p}, \underline{w}) &= 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{23} \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) + \\
&+ w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Seja,

$$\pi_4(\underline{p}, \underline{w}) = \pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}) \pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}). \quad (5.11)$$

Assumindo independência a priori entre $w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}$ e w_{34} temos:

$$\begin{aligned}
\pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{45} - 2)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (w_{23} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 1)^2 \right\}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\pi_4(\underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}) &\propto \psi(\underline{p}, \underline{w}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (w_{45} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{23} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 1)^2 \right\}. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Portanto, a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_4(\underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34} | D) &\propto \left[\prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \psi(\underline{p}, \underline{w}) \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{45} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{23} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 1)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings dadas por:

$$\begin{aligned}
p_i | p_{(i)}, \underline{w}, D &\propto \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}, \underline{w}), \quad i = 1, \dots, 7 \\
w_{12} | \underline{p}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, w_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\
w_{67} | \underline{p}, w_{12}, w_{45}, w_{23}, w_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\
w_{45} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{23}, w_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{45} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\
w_{23} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{34}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{23} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\
w_{34} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{45}, w_{23}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{34} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w})
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_7)$.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 7$, $E(w_{12} | D)$, $E(w_{67} | D)$, $E(w_{45} | D)$, $E(w_{23} | D)$ e $E(w_{34} | D)$ são apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 7$, e $E(w_{12} | D)$, $E(w_{67} | D)$, $E(w_{45} | D)$, $E(w_{23} | D)$ e $E(w_{34} | D)$.

$\pi_4(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.8632	0.8574
$\hat{E}(p_2 D)$	0.7612	0.7570
$\hat{E}(p_3 D)$	0.6783	0.6721
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8164	0.8137
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6566	0.6463
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8640	0.8663
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9089	0.8997
$\hat{E}(w_{12} D)$	—	2.0333
$\hat{E}(w_{67} D)$	—	2.0270
$\hat{E}(w_{45} D)$	—	2.0093
$\hat{E}(w_{23} D)$	—	0.9991
$\hat{E}(w_{34} D)$	—	1.0120

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 7$, e para w são dados pela Tabela 5.6 a seguir.

Tabela 5.6 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e para w .

$\pi_4(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6590;0.9823	0.6410;0.9830
p_2	0.4976;0.9351	0.5012;0.9430
p_3	0.3715;0.9119	0.3781;0.9099
p_4	0.6055;0.9565	0.5964;0.9539
p_5	0.4633;0.8409	0.4255;0.8394
p_6	0.6958;0.9698	0.7060;0.9710
p_7	0.7546;0.9876	0.7493;0.9869
w_{12}	—	0.7036;3.4241
w_{67}	—	0.6546;3.3535
w_{45}	—	0.4190;3.3099
w_{23}	—	-0.4313;2.2835
w_{34}	—	-0.2500;2.2770

As figuras a seguir mostram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e w e os valores gerados para a verificação da convergência, considerando distribuição a priori $\pi_A(p)$.

Figura 5.6 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e para w .

Figura 5.7 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 7$ e para w .

A Tabela 5.7 a seguir mostra as estimativas de Monte Carlo para $E(p(t) | D)$ e os intervalos de credibilidade (95%) para $p(t)$, considerando um modelo hierárquico Bayesiano.

Tabela 5.7 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.4.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p(t) D)$	0.9996	0.9985	0.9986
$IC(95\%) p(t)$	0.9981; 1.0000	0.9947; 0.9999	0.9931; 0.9999

De acordo com o critério de Gelman e Rubin, os indicadores de convergência obtidos para p_i , $i = 1, \dots, 7$ e para os demais parâmetros, considerando o modelo hierárquico, são dados pela Tabela 5.8 a seguir.

Tabela 5.8 - Indicadores de convergência

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{R}_{p_1}$	1.0009	1.0133	0.9991
$\hat{R}_{p_2}$	1.0015	0.9988	1.0000
$\hat{R}_{p_3}$	1.0044	0.9965	1.0072
$\hat{R}_{p_4}$	1.0110	0.9995	0.9982
$\hat{R}_{p_5}$	1.0031	0.9983	1.0002
$\hat{R}_{p_6}$	1.0123	1.0002	0.9992
$\hat{R}_{p_7}$	1.0018	1.0019	1.0104
$\hat{R}_\alpha$	1.0046	—	—
$\hat{R}_{\theta_{12}}$	—	0.9986	—
$\hat{R}_{\theta_{67}}$	—	1.0019	—
$\hat{R}_{\theta_{45}}$	—	1.0033	—
$\hat{R}_{\theta_{23}}$	—	1.0079	—
$\hat{R}_{\theta_{34}}$	—	0.9988	—
$\hat{R}_{w_{12}}$	—	—	0.9994
$\hat{R}_{w_{67}}$	—	—	0.9965
$\hat{R}_{w_{45}}$	—	—	1.0084
$\hat{R}_{w_{23}}$	—	—	0.9997
$\hat{R}_{w_{34}}$	—	—	1.0051

onde $\hat{R}_\bullet$ indica o valor de convergência para os parâmetros considerados.

Algumas conclusões

Através da análise realizada neste capítulo para o sistema de rede da Figura 2.4 e das quantidades a posteriori obtidas, podemos concluir que o Modelo Bayesiano hierárquico e o modelo Bayesiano não hierárquico (desenvolvido no Capítulo 4) produziram resultados similares, ou seja, a escolha dos valores para os parâmetros do modelo Bayesiano não hierárquico foi razoável.

Capítulo 6

ANÁLISE BAYESIANA PARA O SISTEMA DE REDE DA FIGURA 2.5

Neste capítulo apresentamos uma análise Bayesiana para a confiabilidade de um caso especial de sistema complexo composto por nove componentes (Figura 2.5), com o objetivo de compararmos os resultados obtidos considerando as distribuições a priori descritas no Capítulo 3.

Consideremos, então, o seguinte conjunto de dados D :

Tabela 6.1 - Conjunto de dados.

n_i	12	10	7	14	18	20	18	9	15
x_i	11	8	5	12	12	18	17	6	12

onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t , e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste, sendo, $i = 1, \dots, 9$.

6.1 Inferências Bayesianas

Considerando novamente os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, geramos amostras para obtermos inferências para as confiabilidades dos componentes individuais $p_i(t)$ e para a confiabilidade do sistema de rede $p(t)$, onde um estimador de Bayes de p_i com respeito à função de perda quadrática é dado por:

$$\hat{E}(p_i | D) = \int p_i \pi(p_i | D) dp_i, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (6.1)$$

Seja $p_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 9$, os valores obtidos para p_i na r -ésima replicação e s -ésima iteração, onde R e S são, respectivamente, o número total de simulações (ou cadeias) e o número de iterações do algoritmo. Então, (6.1) pode ser dado pela estimativa de Monte Carlo

$$\hat{p}_i = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S p_i^{(r,s)}, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (6.2)$$

Uma estimativa de Monte Carlo para a confiabilidade do sistema de rede $h(\underline{p})$ com respeito à função de perda quadrática, é dada por:

$$\hat{h}(\underline{p}) = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S h(p_1^{(r,s)}, \dots, p_n^{(r,s)}). \quad (6.3)$$

6.2 Distribuições condicionais a posteriori para $\underline{p}$

Para este caso utilizamos as mesmas condições de programação descritas no Capítulo 4 onde, com o objetivo de obtermos amostras representativas das distribuições de interesse e de realizarmos inferências via simulação, geramos 5 cadeias com 2000 iterações em cada. Desprezamos, em seguida, as 500 primeiras iterações e com as restantes, de cada cadeia, construímos uma amostra tomando valores espaçados de 15 em 15, totalizando 500 dados. Utilizamos ainda o critério de convergência de Gelman e Rubin (1992) citado anteriormente.

Os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$ são apresentados na Tabela 6.2 a seguir.

Tabela 6.2 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9152	0.9182	0.8350	0.8520
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8104	0.8058	0.8090	0.7511
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7432	0.7499	0.7224	0.6949
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8607	0.8594	0.7818	0.8137
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6829	0.6776	0.6737	0.6594
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8990	0.8996	0.8794	0.8630
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9415	0.9381	0.9014	0.9077
$\hat{E}(p_8 D)$	0.6955	0.6959	0.6964	0.6325
$\hat{E}(p_9 D)$	0.8068	0.8137	0.7462	0.7648

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 7$, são dados pela Tabela 6.3 abaixo.

Tabela 6.3 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 9$.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.7213;0.9969	0.7465;0.9965	0.6364;0.9778	0.6701;0.9760
p_2	0.5450;0.9702	0.5356;0.9737	0.6221;0.9393	0.4828;0.9350
p_3	0.4238;0.9579	0.4372;0.9567	0.4925;0.9040	0.3815;0.9207
p_4	0.6548;0.9795	0.6526;0.9795	0.5833;0.9355	0.5746;0.9524
p_5	0.4656;0.8669	0.4294;0.8558	0.4801;0.8362	0.4413;0.8464
p_6	0.7436;0.9861	0.7540;0.9828	0.7592;0.9725	0.6851;0.9700
p_7	0.8047;0.9978	0.7881;0.9984	0.7724;0.9857	0.7690;0.9899
p_8	0.4024;0.9173	0.4189;0.9377	0.4829;0.8760	0.3206;0.8763
p_9	0.5888;0.9532	0.6022;0.9576	0.5405;0.9003	0.5593;0.9237

A Tabela 6.4 mostra as estimativas de Monte Carlo para $E(p(t) | D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema da Figura 2.5 (ver (2.42)) e os intervalos de credibilidade (95%) para $p(t)$.

Tabela 6.4 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.5.

Distribuição a priori				
	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p(t) D)$	0.9571	0.9567	0.9130	0.9110
$IC(95\%) p(t)$	0.8861;0.9912	0.8809;0.9927	0.8239;0.9744	0.8040;0.9698

Para o caso de independência a priori entre os parâmetros consideramos $a_i = 1.125$ e $b_i = 0.125$. As distribuições marginais a posteriori para p_i são dadas por:

$$\pi_1(p_i | D) \propto p_i^{1.125+x_i-1} (1-p_i)^{n_i-x_i-0.125-1}, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (6.4)$$

ou seja,

$$p_i | D \sim \text{Beta}[1.125 + x_i, n_i - x_i - 0.125], \quad i = 1, \dots, 9.$$

A figura a seguir mostra a forma da distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 9$, considerando a distribuição a priori $\pi_1(\underline{p})$.

Figura 6.1 - Distribuição marginal a posteriori e convergência para p_i , $i = 1, \dots, 9$.

Para seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, as distribuições condicionais para $\underline{p}$ são dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \phi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 9 \quad (6.5)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)})^{1 - (n-1)\alpha}]\}$, $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$ e assumimos $\alpha = 0.1$. Podemos observar que os p_i 's são gerados via algoritmos de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings, onde o núcleo é dado por uma distribuição Beta com parâmetros $x_i + 1$ e

$n_i + \alpha - x_i$. Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 9$, e dos valores gerados, considerando a distribuição a priori $\pi_2(p)$, são ilustrados pelas figuras a seguir.

Figura 6.2 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 9$.

Figura 6.3 - Valores gerados para p_i , $i = 1, 2, 3$.

Figura 6.4 - Valores gerados para $p_i, i = 4, \dots, 9$.

Para o caso de seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos, assumimos a situação onde p_1 é semelhante a p_2 , p_3 semelhante a p_4 , p_6 semelhante a p_7 e p_8 semelhante a p_9 , onde $\theta_{12} = \theta_{67} = 100$, $\theta_{34} = \theta_{89} = 50$, $\theta_{35} = \theta_{45} = 10$ e os restantes próximos de zero. A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\pi_3(p | D) \propto \left[\prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 \right] \right\} \quad (6.6)$$

e as distribuições condicionais por:

$$p_1 | p_{(1)}, D \propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 \right\}$$

$$p_2 | p_{(2)}, D \propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 \right\}$$

$$p_3 | p_{(3)}, D \propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 \right] \right\}$$

$$p_4 | p_{(4)}, D \propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
p_5 | p_{(5)}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35} (p_3 - p_5)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_6 | p_{(6)}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\
p_7 | p_{(7)}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\
p_8 | p_{(8)}, D &\propto p_8^{x_8} (1 - p_8)^{n_8 - x_8} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\} \\
p_9 | p_{(9)}, D &\propto p_9^{x_9} (1 - p_9)^{n_9 - x_9} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

As figuras a seguir ilustram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 9$ e dos valores gerados, considerando distribuição a priori $\pi_3(p)$.

Figura 6.5 - Distribuição marginal a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 6$.

Figura 6.6 - Distribuição marginal a posteriori para $p_i, i = 7, 8, 9$.

Figura 6.7 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 9$.

Para componentes não muito confiáveis nem idênticos, assumimos distribuições marginais uniformes $(0, 1)$ para p_i dado $\underline{\theta}$, $w_{12} = w_{34} = w_{67} = w_{89} = 2$, que correspondem às correlações positivas entre p_1 e p_2 , entre p_3 e p_4 , entre p_6 e p_7 e entre p_8 e p_9 . Assumimos, também, $w_{34} = w_{35} = w_{45} = 1$ e todas as outras dependências como zero. Então, a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \psi(\underline{p}) = & 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + \\ & + w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right) + \\ & + w_{89} \left(p_8 - \frac{1}{2}\right) \left(p_9 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo, as distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 9, \quad (6.9)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$. Podemos observar que os p_i 's também podem ser gerados utilizando o algoritmo Metropolis-Hastings, onde o núcleo é uma distribuição Beta com parâmetros $x_i + 1$ e $n_i - x_i + 1$. As figuras a seguir mostram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 9$ e dos valores gerados, considerando distribuição a priori $\pi_4(\underline{p})$.

Figura 6.8 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, 2, 3$.

Figura 6.9 - Distribuição marginal a posteriori para $p_i, i = 4, \dots, 9$.

Figura 6.10 - Valores gerados para $p_i, i = 1, \dots, 9$.

Os indicadores de convergência obtidos para p_i , $i = 1, \dots, 9$, através do método de Gelman e Rubin, são dados pela Tabela 6.5.

Tabela 6.5 - Indicadores de convergência para p_i , $i = 1, \dots, 9$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{R}_1$	1.0062	1.0017	0.9970
$\widehat{R}_2$	1.0052	1.0083	1.0081
$\widehat{R}_3$	1.0055	1.0043	1.0031
$\widehat{R}_4$	1.0007	1.0029	1.0158
$\widehat{R}_5$	0.9976	1.0155	1.0084
$\widehat{R}_6$	0.9966	1.0043	0.9960
$\widehat{R}_7$	1.0123	1.0053	1.0081
$\widehat{R}_8$	1.0081	1.0071	0.9967
$\widehat{R}_9$	0.9979	1.0180	1.0068

onde $\widehat{R}_i$ indica o valor de convergência para p_i , $i = 1, \dots, 9$.

Algumas conclusões

Através dos resultados obtidos para o sistema da Figura 2.5, podemos observar que as distribuições a priori $\pi_1(\underline{p})$ (componentes independentes) e $\pi_2(\underline{p})$ (componentes permutáveis e altamente confiáveis) produziram resultados próximos, enquanto que, as distribuições a priori $\pi_3(\underline{p})$ (componentes permutáveis e idênticos ou quase idênticos) e $\pi_4(\underline{p})$ (componentes não muito confiáveis nem idênticos) produziram resultados um pouco inferiores aos de $\pi_1(\underline{p})$ e $\pi_2(\underline{p})$.

Capítulo 7

ANÁLISE BAYESIANA HIERÁRQUICA PARA O SISTEMA DE REDE DA FIGURA 2.5

7.1 Função de verossimilhança para $\underline{p}$

Considerando o sistema da Figura 2.5 e o conjunto de dados da Tabela 6.1, a função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, \dots, p_9)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^9 \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (7.1)$$

7.2 Distribuição a priori para $\underline{p}$

7.2.1 Seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis

Para o caso de seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, a distribuição conjunta a priori de $\underline{p}$ (ver (3.9)) é dada por:

$$\pi_2(\underline{p} | \alpha) = \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1 - (n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\}$$

onde $i = 1, \dots, 9$ e $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_9)$.

Seja

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) = \pi_2(\underline{p} | \alpha) \pi_0(\alpha) \quad (7.2)$$

onde $\pi_0(\alpha) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha}$, $\alpha > 0$ e a, b são conhecidos, ou seja, $\alpha \sim Gama(a, b)$.

Logo,

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) \propto \alpha^{n+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\}, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (7.3)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_9)$. A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha | D) \propto \alpha^{n+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \right\} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1 - (n-1)\alpha} \right\}. \quad (7.4)$$

A partir da (7.4) obtemos as distribuições condicionais dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, \alpha, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \phi_1(\underline{p})$$

$$\pi_2(\alpha | \underline{p}, D) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} \phi_2(\underline{p}) \quad (7.5)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$, $i = 1, \dots, 9$ e

$$\phi_1(\underline{p}) = \exp \left\{ \log \left[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\underline{p}) = \exp \left\{ n \log \alpha + \left[\sum_{i=1}^n (n_i - x_i + \alpha - 1) \log(1 - p_i) \right] + \right. \\ \left. + \log \left[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha} \right] - \log(1 - (n-1)\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Assumindo $a = 100$ e $b = 1000$ e utilizando as mesmas condições de programação descritas no Capítulo 4, construímos uma amostra, com o objetivo de obtermos os sumários a posteriori de interesse.

Os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$ e $E(\alpha | D)$, são apresentados na Tabela 7.1 a seguir.

Tabela 7.1 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$ e $E(\alpha | D)$, $i = 1, \dots, 9$.

$\pi_2(\underline{p})$		
	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9182	0.9237
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8058	0.8106
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7499	0.7438
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8594	0.8692
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6776	0.6863
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8996	0.9029
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9381	0.9439
$\hat{E}(p_8 D)$	0.6959	0.7001
$\hat{E}(p_9 D)$	0.8137	0.8073
$\hat{E}(\alpha D)$	—	0.0998

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i e α , $i = 1, \dots, 9$, são dados pela Tabela 7.2.

Tabela 7.2 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i e α , $i = 1, \dots, 9$.

$\pi_2(\underline{p})$		
	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
p_1	0.7465;0.9965	0.7249;0.9975
p_2	0.5356;0.9737	0.5442;0.9706
p_3	0.4372;0.9567	0.3996;0.9616
p_4	0.6526;0.9795	0.6692;0.9789
p_5	0.4294;0.8558	0.4474;0.8644
p_6	0.7540;0.9828	0.7560;0.9865
p_7	0.7881;0.9984	0.8262;0.9972
p_8	0.4189;0.9377	0.3925;0.9323
p_9	0.6022;0.9576	0.5986;0.9536
α	—	0.0818;0.1202

De acordo com as distribuições condicionais obtidas, usando o algoritmo de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings geramos os p_i 's e α . Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para α e p_i , $i = 1, \dots, 9$, e os valores gerados, considerando uma análise Bayesiana hierárquica e utilizando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$, são apresentados pelas figuras a seguir.

Figura 7.1 - Distribuição marginal posteriori para α e $p_i, i = 1, \dots, 9$.

Figura 7.2 - Valores gerados para α e $p_i, i = 1, \dots, 9$.

7.2.2 Seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos

Para seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos assumimos a situação na qual p_1 é semelhante a p_2 , p_3 semelhante a p_4 , p_5 semelhante a p_6 e p_7 semelhante a p_8 , onde:

$$\begin{aligned}
\theta_{12} &\sim \text{Normal}(100, 16) \\
\theta_{67} &\sim \text{Normal}(100, 16) \\
\theta_{34} &\sim \text{Normal}(50, 9) \\
\theta_{89} &\sim \text{Normal}(50, 9) \\
\theta_{35} &\sim \text{Normal}(10, 4) \\
\theta_{45} &\sim \text{Normal}(10, 4)
\end{aligned}$$

e os demais iguais a zero.

A distribuição conjunta a priori para $\underline{p}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_3(\underline{p} \mid \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \right.\right. \\
&\left. + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2\right]\bigg\}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Seja,

$$\begin{aligned}
\pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &= \pi_3(\underline{p} \mid \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) \times \\
&\times \pi_0(\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Assumindo independência a priori entre $\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}$ e θ_{89} , temos:

$$\begin{aligned}
\pi_0(\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{18}(\theta_{34} - 50)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{89} - 50)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{45} - 10)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \right.\right. \\
&\left. + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2\right]\bigg\} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{34} - 50)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{89} - 50)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{8}(\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{45} - 10)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

A distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89} | D) &\propto \left[\prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \Big\} \exp \left\{ -\frac{1}{32} (\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{34} - 50)^2 - \right. \\
&- \left. \frac{1}{18} (\theta_{89} - 50)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{45} - 10)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings dadas por:

$$\begin{aligned}
p_1 | p_{(1)}, \underline{\theta}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 \right\} \\
p_2 | p_{(2)}, \underline{\theta}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 \right\} \\
p_3 | p_{(3)}, \underline{\theta}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_4 | p_{(4)}, \underline{\theta}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_5 | p_{(5)}, \underline{\theta}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_6 | p_{(6)}, \underline{\theta}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right\} \\
p_7 | p_{(7)}, \underline{\theta}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 \right\} \\
p_8 | p_{(8)}, \underline{\theta}, D &\propto p_8^{x_8} (1 - p_8)^{n_8 - x_8} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 \right\} \\
p_9 | p_{(9)}, \underline{\theta}, D &\propto p_9^{x_9} (1 - p_9)^{n_9 - x_9} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 \right\} \\
\theta_{12} | \underline{p}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12}(p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{12} - 100)^2 \right\} \\
\theta_{67} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{67} - 100)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{34} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{34} (p_3 - p_4)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{34} - 50)^2 \right\} \\
\theta_{89} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{89} - 50)^2 \right\} \\
\theta_{35} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{35} (p_3 - p_5)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{35} - 10)^2 \right\} \\
\theta_{45} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{45} - 10)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

onde $\underline{\theta} = (\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89})$.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$, $E(\theta_{12} | D)$, $E(\theta_{67} | D)$, $E(\theta_{45} | D)$, $E(\theta_{23} | D)$ e $E(\theta_{34} | D)$ são apresentados na Tabela 7.3 abaixo.

Tabela 7.3 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$, e $E(\theta_{12} | D)$, $E(\theta_{67} | D)$, $E(\theta_{34} | D)$, $E(\theta_{89} | D)$, $E(\theta_{35} | D)$ e $E(\theta_{45} | D)$.

$\pi_3(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.8350	0.8407
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8090	0.8024
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7224	0.7302
$\hat{E}(p_4 D)$	0.7818	0.7809
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6737	0.6787
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8794	0.8777
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9014	0.8978
$\hat{E}(p_8 D)$	0.6964	0.6967
$\hat{E}(p_9 D)$	0.7462	0.7348
$\hat{E}(\theta_{12} D)$	—	99.8235
$\hat{E}(\theta_{67} D)$	—	100.1540
$\hat{E}(\theta_{34} D)$	—	50.2937
$\hat{E}(\theta_{89} D)$	—	50.0278
$\hat{E}(\theta_{35} D)$	—	9.9338
$\hat{E}(\theta_{45} D)$	—	9.8978

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 9$, e para θ são dados pela Tabela 7.4 a seguir.

Tabela 7.4 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 9$ e para θ .

$\pi_3(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6364;0.9778	0.6723;0.9670
p_2	0.6221;0.9393	0.6259;0.9388
p_3	0.4925;0.9040	0.4984;0.9111
p_4	0.5833;0.9355	0.5932;0.9385
p_5	0.4801;0.8362	0.5109;0.8429
p_6	0.7592;0.9725	0.7442;0.9702
p_7	0.7724;0.9857	0.7657;0.9853
p_8	0.4829;0.8760	0.4774;0.8844
p_9	0.5405;0.9003	0.5339;0.8973
θ_{12}	—	94.3003;105.8196
θ_{67}	—	94.5564;105.6539
θ_{34}	—	46.2810;54.8787
θ_{89}	—	46.9800;52.9151
θ_{35}	—	7.0471;13.1389
θ_{45}	—	6.9554;12.6342

As figuras a seguir mostram a forma das distribuições marginais a posteriori para p_i e θ , $i = 1, \dots, 9$ e os valores gerados, considerando a distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Figura 7.3 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, 2, 3$.

Figura 7.4 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 4, \dots, 9$ e para θ_j .

Figura 7.5 - Valores gerados para p_i , $i = 1, 2, 3$.

Figura 7.6 - Valores gerados para p_i , $i = 4, \dots, 9$ e para θ .

7.2.3 Componentes não muito confiáveis nem idênticos

Para o caso de componentes não muito confiáveis nem idênticos, assumimos:

$$\begin{aligned}
w_{12} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{67} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{34} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{89} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\
w_{35} &\sim \text{Normal}(1, 1) \\
w_{45} &\sim \text{Normal}(1, 1)
\end{aligned}$$

e as demais dependências iguais a zero.

A distribuição conjunta a priori para $\underline{p}$ é dada por:

$$\pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) \propto \psi(\underline{p}, \underline{w}), \quad (7.12)$$

onde $\underline{w} = (w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45})$ e

$$\begin{aligned}
\psi(\underline{p}, \underline{w}) &= 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right) + \\
&+ w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + w_{89} \left(p_8 - \frac{1}{2}\right) \left(p_9 - \frac{1}{2}\right) + w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + \\
&+ w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned} \quad (7.13)$$

Seja,

$$\begin{aligned}
\pi_4(\underline{p}, \underline{w}) &= \pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) \times \\
&\times \pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}).
\end{aligned} \quad (7.14)$$

Assumindo independência a priori entre $w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}$, temos:

$$\begin{aligned}
\pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 2)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (w_{89} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{45} - 1)^2 \right\}.
\end{aligned} \quad (7.15)$$

logo,

$$\begin{aligned}
\pi_4(\underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) &\propto \psi(\underline{p}, \underline{w}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{89} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{45} - 1)^2 \right\}.
\end{aligned} \quad (7.16)$$

Portanto, de (7.16) obtemos a distribuição conjunta a posteriori dada por:

$$\begin{aligned} \pi_4(\underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45} | D) &\propto \left[\prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{34} - 2)^2 - \frac{1}{2} (w_{89} - 2)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2} (w_{45} - 1)^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

e as distribuições condicionais dadas por:

$$\begin{aligned} p_i | p_{(i)}, \underset{\sim}{w}, D &\propto \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}), \quad i = 1, \dots, 9. \\ w_{12} | \underset{\sim}{p}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{12} - 2)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \\ w_{67} | \underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{67} - 2)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \\ w_{34} | \underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{67}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{34} - 2)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \\ w_{89} | \underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{89} - 2)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \\ w_{35} | \underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{35} - 1)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \\ w_{45} | \underset{\sim}{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w_{45} - 1)^2 \right\} \psi(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{w}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$, $i = 1, \dots, 9$.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$, $E(w_{12} | D)$, $E(w_{67} | D)$, $E(w_{34} | D)$, $E(w_{89} | D)$, $E(w_{35} | D)$ e $E(w_{45} | D)$ são apresentados na Tabela 7.5 a seguir.

Tabela 7.5 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$, e $E(w_{12} | D)$, $E(w_{67} | D)$, $E(w_{34} | D)$, $E(w_{89} | D)$, $E(w_{35} | D)$ e $E(w_{45} | D)$.

$\pi_4(\underline{p})$		
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.8520	0.8580
$\hat{E}(p_2 D)$	0.7511	0.7600
$\hat{E}(p_3 D)$	0.6949	0.6742
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8137	0.8173
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6594	0.6527
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8630	0.8666
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9077	0.8996
$\hat{E}(p_8 D)$	0.6325	0.6502
$\hat{E}(p_9 D)$	0.7648	0.7699
$\hat{E}(w_{12} D)$	—	2.0183
$\hat{E}(w_{67} D)$	—	2.0481
$\hat{E}(w_{34} D)$	—	2.0496
$\hat{E}(w_{89} D)$	—	2.0139
$\hat{E}(w_{35} D)$	—	0.9911
$\hat{E}(w_{45} D)$	—	1.0424

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 9$, e para w são dados pela Tabela 7.6 a seguir.

Tabela 7.6 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 9$ e para w .

	$\pi_4(\underline{p})$	
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6701;0.9760	0.6330;0.9791
p_2	0.4828;0.9350	0.4899;0.9386
p_3	0.3815;0.9207	0.3419;0.9137
p_4	0.5746;0.9524	0.5988;0.9635
p_5	0.4413;0.8464	0.4164;0.8369
p_6	0.6851;0.9700	0.7176;0.9689
p_7	0.7690;0.9899	0.7372;0.9851
p_8	0.3206;0.8763	0.3419;0.8946
p_9	0.5593;0.9237	0.5497;0.9314
w_{12}	—	0.5979;3.3118
w_{67}	—	0.4707;3.5877
w_{34}	—	0.7549;3.3921
w_{89}	—	0.6294;3.3422
w_{35}	—	-0.2844;2.2728
w_{45}	—	-0.4141;2.2449

As figuras a seguir mostram os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i e w , $i = 1, \dots, 9$ e os valores gerados, respectivamente, considerando distribuição a priori $\pi_4(\underline{p})$.

Figura 7.7 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 6$.

Figura 7.8 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 7, 8, 9$ e para w .

Figura 7.9 - Valores gerados para p_i , $i = 1, \dots, 6$.

Figura 7.10 - Valores gerados para p_i , $i = 7, 8, 9$ e para w .

A Tabela 7.7 mostra as estimativas de Monte Carlo obtidas para $E(p(t) | D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema da Figura 2.5 e os intervalos de credibilidade (95%) para $p(t)$, considerando a análise Bayesiana hierárquica.

Tabela 7.7 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 2.5.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p(t) D)$	0.9613	0.9129	0.9130
$IC(95\%) p(t)$	0.9083;0.9920	0.8122;0.9750	0.8158;0.9750

De acordo com o critério de Gelman e Rubin, os indicadores de convergência obtidos para p_i , $i = 1, \dots, 9$, e para os demais parâmetros, através da análise hierárquica, são dados pela tabela a seguir.

Tabela 7.8 - Indicadores de convergência

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{R}_{p_1}$	1.0053	1.0054	1.0001
$\widehat{R}_{p_2}$	1.0017	0.9995	1.0007
$\widehat{R}_{p_3}$	0.9973	1.0058	1.0000
$\widehat{R}_{p_4}$	1.0036	1.0136	1.0012
$\widehat{R}_{p_5}$	1.0010	1.0086	0.9986
$\widehat{R}_{p_6}$	1.0034	1.0002	1.0153
$\widehat{R}_{p_7}$	1.0098	1.0003	1.0037
$\widehat{R}_{p_8}$	1.0071	0.9995	1.0073
$\widehat{R}_{p_9}$	1.0047	0.9972	0.9986
$\widehat{R}_\alpha$	1.0021	—	—
$\widehat{R}_{\theta_{12}}$	—	1.0041	—
$\widehat{R}_{\theta_{67}}$	—	1.0050	—
$\widehat{R}_{\theta_{34}}$	—	1.0007	—
$\widehat{R}_{\theta_{89}}$	—	1.0055	—
$\widehat{R}_{\theta_{35}}$	—	0.9985	—
$\widehat{R}_{\theta_{45}}$	—	1.0031	—
$\widehat{R}_{w_{12}}$	—	—	1.0061
$\widehat{R}_{w_{67}}$	—	—	1.0032
$\widehat{R}_{w_{34}}$	—	—	0.9987
$\widehat{R}_{w_{89}}$	—	—	1.0038
$\widehat{R}_{w_{35}}$	—	—	0.9987
$\widehat{R}_{w_{45}}$	—	—	1.0027

onde $\widehat{R}_\bullet$ indica o valor de convergência para os parâmetros considerados.

Algumas conclusões

Através do modelo Bayesiano hierárquico desenvolvido neste capítulo, para o sistema da Figura 2.5, podemos observar que os resultados obtidos são similares aos do modelo Bayesiano não hierárquico (desenvolvido no Capítulo 6). Portanto, podemos concluir novamente que a escolha dos valores para os parâmetros do modelo não hierárquico foi razoável.

Capítulo 8

SISTEMAS K -OUT-OF- M

8.1 Introdução

Supor que S é um sistema com m componentes, de modo que, o sistema funciona se e somente se pelo menos k componentes operam com sucesso. Este sistema é conhecido como um sistema k -out-of- m . Podemos observar que se $k = m$ obtemos sistemas em série e se $k = 1$ obtemos sistemas em paralelo. Portanto, sistemas em série e em paralelo são casos especiais de um sistema k -out-of- m .

Assumir que os tempos de vida dos componentes são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade exponencial

$$f(t, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (8.1)$$

onde $0 < \theta < \infty$, $0 < t < \infty$.

Considerar um sistema com n_i réplicas para o i -ésimo componente, $i = 1, 2, \dots, m$, sendo testadas separadamente, onde $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Se $k = m = 1$, temos um sistema com somente uma unidade, e o sistema é conhecido como um sistema "one-unit".

Seja $X_i(t)$ uma variável indicadora para o funcionamento do i -ésimo componente, $i = 1, \dots, m$, num dado tempo $t > 0$. Então:

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se o } i\text{-ésimo componente está funcionando,} \\ 0 & , \text{ se o } i\text{-ésimo componente não está funcionando.} \end{cases}$$

A confiabilidade do i -ésimo componente é dada por $p_i(t) = P\{X_i(t) = 1\}$ e $\{X_i(t) = 1\} \Leftrightarrow \{T_i \geq t\}$, $i = 1, \dots, m$. Assim,

$$p_i(t) = P\{X_i(t) = 1\} = P\{T_i \geq t\} = R_i(t) \quad , i = 1, \dots, m ,$$

onde $R_i(t)$ é a confiabilidade em t para o i -ésimo componente.

Supondo que todos os componentes são idênticos, ou seja, $p_i(t) = p(t) = R_i(t)$, a função de confiabilidade para o sistema k -out-of- m é dada por:

$$R(t) = P(T > t) = \sum_{j=k}^m \binom{m}{j} (1 - F(t))^j F(t)^{m-j} \quad (8.2)$$

onde $F(t) = P(T \leq t)$ é a função de distribuição para a variável aleatória T (Martz & Waller, 1982). Com o modelo exponencial $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$, $R(t)$ dado em (8.2) pode ser escrito na forma

$$R(t) = \sum_{j=k}^m \sum_{\beta=0}^{m-j} (-1)^\beta \binom{m}{j} \binom{m-j}{\beta} \exp\{-t(j+\beta)/\theta\} \quad (8.3)$$

Métodos Bayesianos para a estimação da função de confiabilidade para sistemas k -out-of- m têm sido apresentados na literatura (Martz & Waller, 1982) visto que, normalmente, em aplicações na engenharia, temos informações a priori. Considerando a distribuição do tempo de vida exponencial, apresentamos alguns aspectos de parametrização para melhorarmos as inferências para a confiabilidade do sistema no tempo t , baseado na normalidade assintótica da função de verossimilhança, especialmente para tamanhos de amostras pequenos ou médios.

8.2 Sistemas "one-unit"

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória dos tempos de vida de n réplicas de um sistema de um componente, com uma distribuição exponencial com densidade (8.1). A função de verossimilhança para θ é dada por:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{T}{\theta}\right\} \quad (8.4)$$

onde $T = \sum_{i=1}^n T_i$.

O Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) da confiabilidade do sistema no tempo t é dado por:

$$\hat{R}(t) = \exp \left\{ - \frac{nt}{T} \right\} . \quad (8.5)$$

O EMV do tempo de vida médio dado por $\hat{\theta} = \frac{T}{n}$ tem distribuição normal assintótica $\hat{\theta} \mathcal{L} N(\theta, I_0^{-1})$ onde I_0 é a informação observada (Lawless, 1982). Visto que, $I_0 = \frac{n^3}{T^2}$, podemos encontrar inferências para θ baseado na distribuição normal limitante $N\left(\theta, \frac{T^2}{n^3}\right)$. Usando o método Delta, o EMV para a confiabilidade do sistema de um componente no tempo t tem uma distribuição normal assintótica dada por:

$$\hat{R}(t) \mathcal{L} N\left(e^{-\frac{t}{\theta}}, \frac{nt^2 e^{-\frac{2nt}{T}}}{T^2}\right) \quad (8.6)$$

que poderia ser usada na construção de testes de hipóteses ou de intervalos de confiança para $R(t)$. Na prática, a aproximação normal para $\hat{R}(t)$ pode não ser muito boa para tamanhos de amostra pequenos ou médios. Uma solução para melhorarmos esta "normalidade" seria considerarmos parametrizações ou transformações de $R = R(t)$. Podemos explorar, por exemplo, a transformação *logito* usual $\phi_L = \ln \left[\frac{R}{1-R} \right]$, onde R é a confiabilidade do sistema no tempo t . Maiores detalhes podem ser encontrados em (Achcar, 1992).

8.3 Sistemas k -out-of- m

Seja $T_1, \dots, T_{n_i}$ uma amostra aleatória de tamanho n_i , $i = 1, \dots, m$, de tempos de vida para o i -ésimo componente em um sistema k -out-of- m . Assumindo que os tempos de vida dos componentes são idênticos e exponencialmente distribuídos com distribuição (8.1), e considerando uma distribuição a priori não informativa para θ usando a regra de Jeffreys (Box & Tiao, 1973), onde $g(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$, $\theta > 0$, a distribuição a posteriori para θ é dada por:

$$g(\theta | \text{dados}) = \frac{T^n}{\Gamma(n)} \theta^{-(n+1)} \exp \left\{ - \frac{T}{\theta} \right\} , \quad \theta > 0 . \quad (8.7)$$

onde $n = \sum_{i=1}^m n_i$ e m é o número de componentes no sistema.

Sob uma função de perda do erro quadrático, o estimador de Bayes por ponto da confiabilidade do sistema no tempo t (ver (8.3)) é dado por:

$$\widehat{E}(R|dados) = \sum_{j=k}^m \sum_{\beta=0}^{m-j} (-1)^\beta \binom{m}{j} \binom{m-j}{\beta} / \left[1 + \frac{t}{T}(j+\beta) \right]^n . \quad (8.8)$$

O EMV para a confiabilidade do sistema no tempo t é dado por:

$$\widehat{R}(t) = \sum_{j=k}^m \sum_{\beta=0}^{m-j} (-1)^\beta \binom{m}{j} \binom{m-j}{\beta} \exp \left\{ -\frac{nt(j+\beta)}{T} \right\} . \quad (8.9)$$

8.3.1 Um exemplo: Sistemas 2-out-of-3

Sendo $k = 2$ e $m = 3$, a confiabilidade de um sistema 2-out-of-3 no tempo t (ver (8.2)), com distribuição exponencial, é dada por:

$$R(t) = \sum_{j=2}^3 \binom{3}{j} [p(t)]^j [1 - p(t)]^{3-j} = \binom{3}{2} [p(t)]^2 [1 - p(t)] + \binom{3}{3} [p(t)]^3 .$$

Portanto,

$$R(t) = [p(t)]^2 \{ 3 - 2p(t) \} . \quad (8.10)$$

Caso 1: Assumindo T_i o tempo de vida do i -ésimo componente, $i = 1, 2, 3$, com distribuição exponencial $f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t \geq 0$, então, a confiabilidade do i -ésimo componente em t é dada por $p(t) = p_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$. Portanto,

$$R(t) = \sum_{j=2}^3 \binom{3}{j} \left[e^{-\frac{t}{\theta}} \right]^j [1 - e^{-\frac{t}{\theta}}]^{3-j} = 3e^{-\frac{2t}{\theta}} - 2e^{-\frac{3t}{\theta}} . \quad (8.11)$$

Considerando $e^{-\frac{2t}{\theta}} \approx 1 - \frac{2t}{\theta} + \frac{\left(\frac{2t}{\theta}\right)^2}{2}$ e $e^{-\frac{3t}{\theta}} \approx 1 - \frac{3t}{\theta} + \frac{\left(\frac{3t}{\theta}\right)^2}{2}$, encontramos $R(t) \approx 1 - \frac{3t^2}{\theta^2}$.

Fazendo $R = R(t)$, com a transformação $\theta = \frac{\sqrt{3} t}{\sqrt{1-R}}$, a partir de (8.7), encontramos uma distribuição a posteriori aproximada para a confiabilidade do sistema no tempo t dada por:

$$g(R|dados) = \frac{T^n (1-R)^{\frac{n}{2}-1}}{2 \Gamma(n) 3^{\frac{n}{2}} t^n} \times \exp \left\{ - \frac{\sqrt{1-R} T}{\sqrt{3} t} \right\} , \quad (8.12)$$

onde $0 \leq R \leq 1$.

A moda de (8.12) é dada por:

$$\hat{R} = 1 - \frac{3(n-2)^2 t^2}{T^2} . \quad (8.13)$$

Para melhorarmos a "normalidade" da distribuição a posteriori, especialmente para tamanhos amostrais pequenos, podemos considerar parametrizações. Neste caso, considerando a transformação $\logito \phi_L = \ln \left[\frac{R}{1-R} \right]$, a partir de (8.12), encontramos:

$$g(\phi_L|dados) = \frac{T^n e^{\phi_L}}{2 \Gamma(n) 3^{\frac{n}{2}} t^n (1+e^{\phi_L})^{\frac{n}{2}+1}} \times \exp \left\{ - \frac{T}{\sqrt{3} t \sqrt{1+e^{\phi_L}}} \right\} \quad (8.14)$$

onde $-\infty < \phi_L < \infty$.

Ilustração Numérica

Um sistema 2-out-of-3 que consiste de componentes independentes e exponencialmente idênticos tem um tempo de vida de $t = 20$ horas. Um teste de vida (comum) no componente consistiu em testar 5 unidades (réplicas) até que todas falhassem. Os tempos de vida observados (em horas) foram 37, 62, 79, 93 e 104. O tempo total sob teste é $T = 375$. O EMV da confiabilidade do sistema 2-out-of-3 no tempo $t = 20$ (ver (8.9)) é dado por:

$$\hat{R}(t) = \sum_{j=2}^3 \sum_{\beta=0}^{3-j} (-1)^\beta \binom{3}{j} \binom{3-j}{\beta} \exp \left\{ - \frac{5(20)(j+\beta)}{375} \right\} = 0.8613 . \quad (8.15)$$

O estimador Bayesiano da confiabilidade do sistema no tempo $t = 20$ (ver (8.8)) é dado por:

$$E(R|dados) = \sum_{j=2}^3 \sum_{\beta=0}^{3-j} (-1)^\beta \binom{3}{j} \binom{3-j}{\beta} / \left[1 + \frac{20}{375} (j+\beta) \right]^5 = 0.8551 . \quad (8.16)$$

Com a transformação $\theta = \frac{\sqrt{3} t}{\sqrt{1-R}}$, de acordo com os dados, obtemos uma distribuição a posteriori para a confiabilidade do sistema dada por:

$$g(R|dados) \propto (1 - R)^{1.5} \times \exp \left\{ -10.8253 \sqrt{1 - R} \right\} \quad , \quad 0 \leq R \leq 1, \quad (8.17)$$

A moda de (8.17) é dada por $\hat{R} = 0.9232$ (ver (8.13)). A Figura 8.1 mostra a forma da distribuição a posteriori (8.17) para a confiabilidade do sistema no tempo $t = 20$ horas.

Figura 8.1 - Distribuição a posteriori para $R(20)$ considerando uma distribuição a priori não informativa para $R(20)$.

Considerando a transformação *logito* $\phi_L = \ln \left[\frac{R}{1-R} \right]$, obtemos:

$$g(\phi_L|dados) \propto \frac{e^{\phi_L}}{(1+e^{\phi_L})^{3.5}} \times \exp \left\{ -\frac{10.8253}{\sqrt{1+e^{\phi_L}}} \right\} \quad , \quad -\infty < \phi_L < \infty \quad (8.18)$$

A moda de (8.18) é dada por $\tilde{\phi}_L = 1.5790$ que corresponde a $\tilde{R}(20) = 0.8291$. Na figura a seguir podemos observar uma forma razoável para a distribuição a posteriori (8.18). Considerando uma aproximação normal para (8.18), encontramos um intervalo HPD (*Highest Posterior Density Interval* (Box & Tiao, 1973)) de 95% para ϕ_L dado por $(-0.4634; 3.3780)$, que corresponde ao intervalo HPD (95%) para $R(20)$ dado por $(0.3862; 0.9670)$.

Figura 8.2 - Distribuição a posteriori para ϕ_L considerando uma distribuição a priori não informativa para $R = e^{\phi_L} / (1 + e^{\phi_L})$.

Caso 2: Assumindo que a confiabilidade do i -ésimo componente em t é dada por $p_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t = 20$, então, $\hat{p}_i(20) = e^{-\frac{20}{\hat{\theta}}}$, onde $\hat{\theta} = \frac{T}{n}$ (EMV do tempo de vida médio). Logo,

$$\hat{p}_i(20) = \exp \left\{ -\frac{20(5)}{375} \right\} = 0.7659 \quad , \quad (8.19)$$

e a confiabilidade de um sistema 2-out-of-3 é dada por:

$$R(t) = p_1(t) p_2(t) [1 - p_3(t)] + p_1(t) p_3(t) [1 - p_2(t)] + p_2(t) p_3(t) [1 - p_1(t)] + p_1(t) p_2(t) p_3(t) \quad . \quad (8.20)$$

Assumindo ainda que para os m componentes de um sistema temos o conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, \dots, m\}$, onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t , e x_i o número de réplicas que sobrevivem ao teste.

A função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^3 \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \quad , \quad 0 < p_i < 1. \quad (8.21)$$

Neste caso, considerando as três diferentes distribuições a priori introduzidas no Capítulo 3 e utilizando os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, geramos amostras para obtermos inferências para as confiabilidades dos componentes individuais $p_i(t)$ e para a confiabilidade do sistema que denotamos por $R(t)$. As estimativas de Monte Carlo para as confiabilidades são obtidas de acordo com o procedimento computacional descrito no Capítulo 4 em (4.2) e (4.3).

Consideremos, primeiramente, que cada componente $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, seja permutável e altamente confiável (Chen & Singpurwalla, 1986). Então, as distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_2(\underline{p}) = \alpha^3 \left\{ \prod_{i=1}^3 (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right\} \quad (8.22)$$

$$\pi_2(\underline{p} \mid D) \propto \prod_{i=1}^3 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \left[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-2\alpha} \right] \quad (8.23)$$

e as distribuições condicionais dadas por:

$$\pi_2(p_i \mid p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \phi(\underline{p}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.24)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-2\alpha}]\}$, $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_3)$ e α é conhecido.

Assumindo, agora, que cada componente $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, seja permutável e idêntico ou quase idêntico (de Finetti, 1972c), as distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_3(\underline{p}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2\right]\right\} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \pi_3(\underline{p} | D) \propto & \left[\prod_{i=1}^3 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2\right]\right\} \end{aligned} \quad (8.26)$$

e as distribuições condicionais requeridas:

$$\begin{aligned} p_1 | p_{(1)}, D & \propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2\right]\right\} \\ p_2 | p_{(2)}, D & \propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2\right]\right\} \\ p_3 | p_{(3)}, D & \propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2\right]\right\} \end{aligned} \quad (8.27)$$

onde os θ_{ij}' s correspondem à correlações altamente positivas entre os parâmetros.

Assumindo ainda um outro caso onde os componentes $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, não são muito confiáveis nem idênticos (Lee, 1993), as distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_4(\underline{p}) \propto \psi(\underline{p}), \quad (8.28)$$

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^3 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.29)$$

onde $\psi(\underline{p}) = 1 + w_{12}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{13}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(p_3 - \frac{1}{2}\right) + w_{23}\left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\left(p_3 - \frac{1}{2}\right)$.

As distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto \prod_{i=1}^3 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(p), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.30)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_3)$ e os w_{ij} 's correspondem à correlações positivas entre os parâmetros.

Ilustração Numérica

Para uma ilustração numérica, geramos 3 conjuntos de dados para os quais consideramos $n_i = 30$ (número de réplicas do i -ésimo componente testadas em $t=20$) e $p_i(20) = 0.7660$ (ver (8.19)), $i = 1, 2, 3$. Assim, a partir da geração de "binomiais" obtemos x_i (número de réplicas que sobrevivem ao teste). O conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, 2, 3\}$ estão na Tabela 8.1 a seguir.

Tabela 8.1 - Conjunto de dados.

n_i	30	30	30
x_i	23	23	25

Para a distribuição a priori onde consideramos seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis assumimos $\alpha = 0.45$, para seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos $\theta_{12} = 100$, $\theta_{13} = 50$, $\theta_{23} = 10$ e para componentes não muito confiáveis nem idênticos, $w_{12} = 5$, $w_{13} = w_{23} = 2$.

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i | D)$, são apresentados na Tabela 8.2 a seguir.

Tabela 8.2 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, 2, 3$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p_1 D)$	0.7667	0.7667	0.7585
$\hat{E}(p_2 D)$	0.7617	0.7622	0.7540
$\hat{E}(p_3 D)$	0.8256	0.8054	0.8136

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, 2, 3$, são dados pela Tabela 8.3, a seguir.

Tabela 8.3 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, 2, 3$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.6223;0.8939	0.6440;0.8778	0.6022;0.8864
p_2	0.6120;0.8886	0.6399;0.8793	0.5987;0.8808
p_3	0.6694;0.9379	0.6708;0.9129	0.6667;0.9258

A Tabela 8.4 abaixo mostra as estimativas de Monte Carlo para $E(R(t)|D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema 2-out-of-3 e os intervalos de credibilidade (95%) para $R(t)$.

Tabela 8.4 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema 2-out-of-3.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(R(t) D)$	0.8815	0.8728	0.8721
$IC(95\%)R(t)$	0.7922;0.9503	0.7669;0.9468	0.7691;0.9397

Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, 2, 3$, e dos valores gerados para a verificação da convergência do algoritmo, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$ - seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, $\pi_3(\underline{p})$ - seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos e $\pi_4(\underline{p})$ - componentes não muito confiáveis nem idênticos são ilustrados pelas figuras a seguir.

Figura 8.3 - Distribuição marginal a posteriori e valores gerados para p_i , $i = 1, 2, 3$, respectivamente, considerando distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

Figura 8.4 - Distribuição marginal a posteriori e valores gerados para p_i , $i = 1, 2, 3$, respectivamente, considerando distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Figura 8.5 - Distribuição marginal a posteriori e valores gerados para p_i , $i = 1, 2, 3$, respectivamente, considerando distribuição a priori $\pi_4(p)$.

8.3.2 Um caso especial: Sistemas 3-out-of-5

Consideremos agora um caso especial onde $k = 3$ e $m = 5$. Utilizando o mesmo procedimento realizado anteriormente em (8.3.1), a confiabilidade de um sistema 3-out-of-5 no tempo t , com distribuição exponencial, é dada por:

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{j=3}^5 \binom{5}{j} [p(t)]^j [1 - p(t)]^{5-j} = \\ &= \binom{5}{3} [p(t)]^3 [1 - p(t)]^2 + \binom{5}{4} [p(t)]^4 [1 - p(t)] + \binom{5}{5} [p(t)]^5. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(t) = [p(t)]^3 \left\{ 6 [p(t)]^2 - 15 p(t) + 10 \right\}. \quad (8.31)$$

Caso 1: Assumindo T_i o tempo de vida do i -ésimo componente, $i = 1, \dots, m$, com distribuição exponencial $f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t \geq 0$, a confiabilidade do i -ésimo componente em t é dada por $p(t) = p_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$. Portanto,

$$R(t) = \sum_{j=3}^5 \binom{5}{j} [e^{-\frac{t}{\theta}}]^j [1 - e^{-\frac{t}{\theta}}]^{5-j} = 6e^{-\frac{5t}{\theta}} - 15e^{-\frac{4t}{\theta}} + 10e^{-\frac{3t}{\theta}}. \quad (8.32)$$

Considerando

$$e^{-\frac{5t}{\theta}} \approx 1 - \frac{5t}{\theta} + \frac{\left(\frac{5t}{\theta}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{5t}{\theta}\right)^3}{6}$$

$$e^{-\frac{4t}{\theta}} \approx 1 - \frac{4t}{\theta} + \frac{\left(\frac{4t}{\theta}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{4t}{\theta}\right)^3}{6}$$

$$e^{-\frac{3t}{\theta}} \approx 1 - \frac{3t}{\theta} + \frac{\left(\frac{3t}{\theta}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{3t}{\theta}\right)^3}{6}$$

encontramos $R(t) \approx 1 - \frac{10t^3}{\theta^3}$.

Fazendo $R = R(t)$, com a transformação $\theta = \frac{10^{\frac{1}{3}} t}{(1-R)^{\frac{1}{3}}}$ encontramos uma distribuição a posteriori aproximada para a confiabilidade do sistema no tempo t dada por:

$$g(R|dados) = \frac{T^n (1-R)^{\frac{n}{3}-1}}{3 \Gamma(n) 10^{\frac{n}{3}} t^n} \times \exp \left\{ -\frac{(1-R)^{\frac{1}{3}} T}{10^{\frac{1}{3}} t} \right\} \quad (8.33)$$

onde $0 \leq R \leq 1$.

A moda de (8.33) é dada por:

$$\hat{R} = 1 - \frac{10(n-3)^3 t^3}{T^3}. \quad (8.34)$$

Considerando a transformação *logito* $\phi_L = \ln \left[\frac{R}{1-R} \right]$, obtemos:

$$g(\phi_L|dados) = \frac{T^n e^{\phi_L}}{3 \Gamma(n) 10^{\frac{n}{3}} t^n (1+e^{\phi_L})^{\frac{n}{3}+1}} \times \exp \left\{ -\frac{T}{10^{\frac{1}{3}} t (1+e^{\phi_L})^{\frac{1}{3}}} \right\} \quad (8.35)$$

onde $-\infty < \phi_L < \infty$.

Ilustração Numérica

Um sistema 3-out-of-5 que consiste de componentes independentes e exponencialmente idênticos tem um tempo de vida de $t = 45$ horas. Um teste de vida no componente consistiu em testar 10 unidades (réplicas) até que todas falhassem. Os tempos de vida observados (em horas)

foram 80, 96, 99, 111, 121, 126, 140, 149, 175 e 203 .O tempo total sob teste é $T = 1300$. O EMV da confiabilidade do sistema considerado é dado por:

$$\widehat{R}(t) = \sum_{j=2}^5 \sum_{\beta=0}^{5-j} (-1)^\beta \binom{5}{j} \binom{5-j}{\beta} \exp \left\{ - \frac{10(45)(j+\beta)}{1300} \right\} = 0.9721 . \quad (8.36)$$

O estimador Bayesiano da confiabilidade do sistema no tempo $t = 45$ (ver (8.8)) é dado por:

$$E(R|dados) = \sum_{j=2}^5 \sum_{\beta=0}^{5-j} (-1)^\beta \binom{5}{j} \binom{5-j}{\beta} / \left[1 + \frac{45}{1300} (j + \beta) \right]^{10} = 0.9644 . \quad (8.37)$$

Com a transformação $\theta = \frac{10^{\frac{1}{3}} t}{(1-R)^{\frac{1}{3}}}$, obtemos (ver (8.33)) uma distribuição a posteriori para a confiabilidade do sistema dada por:

$$g(R|dados) \propto (1-R)^{2.3333} \times \exp \left\{ - 13.4090 (1-R)^{\frac{1}{3}} \right\}, \quad 0 \leq R \leq 1, \quad (8.38)$$

A moda de (8.38) é dada por $\widehat{R} = 0.8577$ (ver (8.34)). A figura a seguir mostra a forma da distribuição a posteriori (8.39) para a confiabilidade do sistema no tempo $t = 45$ horas.

Figura 8.6 - Distribuição a posteriori para $R(45)$ considerando uma distribuição a priori não informativa para $R(45)$.

Considerando a transformação *logito* $\phi_L = \ln \left[\frac{R}{1-R} \right]$, encontramos:

$$g(\phi_L|dados) \propto \frac{e^{\phi_L}}{(1+e^{\phi_L})^{4.3333}} \times \exp \left\{ - \frac{13.4090}{(1+e^{\phi_L})^{\frac{1}{3}}} \right\}, \quad -\infty < \phi_L < \infty \quad (8.39)$$

A moda de (8.39) é dada por $\widetilde{\phi}_L = 0.8963$ que corresponde a $\widetilde{R}(45) = 0.7102$. Na figura a seguir podemos observar uma forma razoável para a distribuição a posteriori (8.39). Considerando

uma aproximação normal para (8.39), encontramos um intervalo HPD (95%) para ϕ_L dado por $(-1.8120; 3.0760)$, que corresponde ao intervalo HPD (95%) para $R(45)$ dado por $(0.1404; 0.9559)$.

Figura 8.7 - Distribuição a posteriori para ϕ_L considerando uma distribuição a priori não informativa para $R = e^{\phi_L} / (1 + e^{\phi_L})$.

Caso 2: Assumindo que a confiabilidade do i -ésimo componente em t é dada por $p_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t = 45$, então, $\hat{p}_i(45) = e^{-\frac{45}{\hat{\theta}}}$, onde $\hat{\theta} = \frac{T}{n}$ (EMV do tempo de vida médio). Logo,

$$\hat{p}_i(20) = \exp \left\{ - \frac{45 (10)}{1300} \right\} = 0.7074 \quad , \quad (8.40)$$

e a confiabilidade de um sistema 3-out-of-5 é dada por:

$$\begin{aligned} R(t) = & p_1(t) p_2(t) p_3(t) [1 - p_4(t)] [1 - p_5(t)] + p_1(t) p_2(t) p_4(t) [1 - p_3(t)] [1 - p_5(t)] + \\ & + p_1(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_5(t)] + p_2(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_5(t)] + \\ & + p_1(t) p_2(t) p_5(t) [1 - p_3(t)] [1 - p_4(t)] + p_1(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_4(t)] + \\ & + p_2(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_4(t)] + p_1(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_3(t)] + \\ & + p_2(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_3(t)] + p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_2(t)] \\ & + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_5(t)] + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_4(t)] + \\ & + p_1(t) p_2(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_3(t)] + p_1(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] + \\ & + p_2(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) . \end{aligned} \quad (8.41)$$

Assumindo ainda o conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, \dots, 5\}$, onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t , e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste. A função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^5 \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad 0 < p_i < 1. \quad (8.42)$$

Consideremos, primeiramente, que cada componente $p_i(t), i = 1, \dots, 5$, seja permutável e altamente confiável. Então, as distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_2(\underline{p}) = \alpha^5 \left\{ \prod_{i=1}^5 (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha}}{1-4\alpha} \right\} \quad (8.43)$$

$$\pi_2(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \left[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha} \right] \quad (8.44)$$

e as distribuições condicionais dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \phi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 5, \quad (8.45)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha}]\}$, $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_5)$ e α é conhecido.

Assumindo agora que cada componente $p_i(t), i = 1, \dots, 5$ seja permutável e idêntico ou quase idêntico na situação onde p_1 é semelhante a p_3 , p_2 semelhante a p_4 e p_3 semelhante a p_5 , com $\theta_{13} = \theta_{24} = 100$ e $\theta_{35} = 50$, e os restantes próximos de zero, exceto $\theta_{12} = \theta_{45} = 10$. As distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_3(\underline{p}) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \quad (8.46)$$

$$\pi_3(\underline{p} | D) \propto \left[\prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \quad (8.47)$$

e as distribuições condicionais requeridas:

$$\begin{aligned}
p_1 | p_{(1)}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 \right] \right\} \\
p_2 | p_{(2)}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 \right] \right\} \\
p_3 | p_{(3)}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_4 | p_{(4)}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{24}(p_2 - p_4)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\
p_5 | p_{(5)}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{8.48}$$

Assumindo ainda um outro caso onde os componentes $p_i(t), i = 1, \dots, 5$, não são muito confiáveis nem idênticos (Lee, 1993), consideramos distribuições marginais uniformes $(0, 1)$ para p_i dado $\underline{\theta}$, $w_{13} = w_{24} = w_{35} = 2$, que correspondem às correlações positivas entre p_1 e p_3 , entre p_2 e p_4 e entre p_3 e p_5 . Assumimos, também, $w_{12} = w_{45} = 1$ e os restantes como zero. Portanto, as distribuições a priori e a posteriori para $\underline{p}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_4(\underline{p}) \propto \psi(\underline{p}), \tag{8.49}$$

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 5, \tag{8.50}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } \psi(\underline{p}) &= 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{13} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) + w_{24} \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \\
&+ w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

As distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto \prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 5. \tag{8.51}$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_5)$.

Ilustração Numérica

Para uma ilustração numérica, geramos 5 conjuntos de dados para os quais consideramos $n_i = 50$ (número de réplicas do i -ésimo componente testadas em $t = 45$) e $p_i(45) = 0.7660$ (ver (8.19)), $i = 1, \dots, 5$. Assim, a partir de gerações de "binomiais" obtemos x_i (número de réplicas que sobrevivem ao teste). O conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, \dots, 5\}$ estão na Tabela 8.5 a seguir.

Tabela 8.5 - Conjunto de dados.

n_i	50	50	50	50	50
x_i	40	36	41	38	37

De acordo com os dados, os estimadores aproximados obtidos para $E(p_i|D)$, são apresentados na Tabela 8.6.

Tabela 8.6 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D)$, $i = 1, \dots, 5$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(p_1 D)$	0.7981	0.7957	0.7905
$\hat{E}(p_2 D)$	0.7237	0.7225	0.7134
$\hat{E}(p_3 D)$	0.8239	0.8041	0.8120
$\hat{E}(p_4 D)$	0.7608	0.7472	0.7540
$\hat{E}(p_5 D)$	0.7450	0.7933	0.7336

Os intervalos de credibilidade de 95% para p_i , $i = 1, \dots, 5$, são dados pela Tabela 8.7, a seguir.

Tabela 8.7 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 5$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.6767;0.8976	0.7033;0.8838	0.6700;0.8906
p_2	0.5808;0.8314	0.6108;0.8186	0.5890;0.8136
p_3	0.7229;0.9128	0.7115;0.9016	0.6970;0.9014
p_4	0.6431;0.8683	0.6376;0.8391	0.6319;0.8563
p_5	0.6078;0.8507	0.6794;0.8844	0.6101;0.8392

A Tabela 8.8 abaixo mostra as estimativas de Monte Carlo para $E(R(t)|D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema 3-out-of-5 e os intervalos de credibilidade (95%) para $R(t)$.

Tabela 8.8 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema 3-out-of-5.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\hat{E}(R(t) D)$	0.9175	0.9191	0.9086
$IC(95\%) R(t)$	0.8605;0.9587	0.8632;0.9580	0.8540;0.9511

Os gráficos das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$, e dos valores gerados, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$ - componentes permutáveis e altamente confiáveis, $\pi_3(\underline{p})$ - componentes permutáveis e idênticos ou quase idênticos e $\pi_4(\underline{p})$ - componentes não muito confiáveis nem idênticos, respectivamente, são representados pelas figuras a seguir.

Figura 8.4 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

Figura 8.5 - Valores gerados para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_2(p)$.

Figura 8.6 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_3(p)$.

Figura 8.7 - Valores gerados para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Figura 8.8 - Distribuição marginal a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

Figura 8.9 - Valores gerados para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando distribuição a priori $\pi_4(\underline{p})$.

De acordo com o critério de Gelman e Rubin, os indicadores de convergência obtidos para p_i , $i = 1, \dots, 5$, são dados pela Tabela 8.9.

Tabela 8.9 - Indicadores de convergência para p_i , $i = 1, \dots, 5$.

Distribuição a priori			
	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{R}_1$	1.0013	1.0044	1.0071
$\widehat{R}_2$	0.9981	1.0021	0.9982
$\widehat{R}_3$	1.0029	1.0027	1.0055
$\widehat{R}_4$	0.9994	1.0039	0.9998
$\widehat{R}_5$	0.9989	0.9983	1.0046

onde $\widehat{R}_i$, indica o valor da convergência para p_i , $i = 1, \dots, 5$.

Algumas conclusões

A escolha de uma parametrização adequada pode ser muito útil na obtenção de inferências precisas para a confiabilidade do sistema no tempo t , considerando sistemas k -out-of- m , no caso de exponencial independente. Através dos exemplos numéricos ilustrados, podemos observar uma boa "normalidade" para a função de verossimilhança ou para a distribuição a posteriori da confiabilidade do sistema no tempo t , considerando tamanhos amostrais pequenos ou moderados.

Podemos observar ainda que, a análise Bayesiana para sistemas k -out-of- m considerando diferentes classes de distribuições a priori para as funções de confiabilidade dos componentes, fornece um caminho para a incorporação de informações a priori (normalmente em aplicações de engenharia) no processo de estimação. Além disso, o cálculo da confiabilidade de sistemas k -out-of- m através de métodos de simulação MCMC como os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings proporciona a obtenção, de uma maneira fácil, de inferências para as confiabilidades dos componentes individuais $p_i(t)$ e para a confiabilidade do sistema $R(t)$.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

A análise estatística de modelos usados para avaliar a confiabilidade de redes, em geral, pode ser complicada quando a rede tem muitos componentes ou não é muito precisa usando métodos de inferência clássica. Além disso, geralmente, existem as informações de especialistas que podem ser incorporadas em distribuições a priori envolvendo vários parâmetros. Este fato motiva o uso de métodos Bayesianos para analisar a confiabilidade de redes.

O uso de métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) como os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, que são de fácil implementação e não exigem muito esforço computacional, torna viável e relativamente simples a obtenção de quantidades a posteriori de interesse. Podemos considerar ainda diferentes classes de distribuições a priori para os parâmetros e considerarmos uma análise Bayesiana hierárquica. Os exemplos desta dissertação ilustram a viabilidade da metodologia proposta.

Outros sistemas mais complexos de redes podem ser considerados sob o mesmo enfoque.

Apêndice A

O ALGORITMO GIBBS SAMPLING

O Gibbs Sampling é um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas.

Supor que a densidade de probabilidade conjunta de interesse é $\pi(\theta)$ onde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ e que as densidades condicionais completas a posteriori $\pi_i(\theta_i) = \pi_i(\theta_i | \theta_{-i})$, $i = 1, \dots, m$, estão disponíveis. O algoritmo fornece uma alternativa de geração baseada em sucessivas gerações das distribuições condicionais completas, e é dado por:

(1) Inicializar o contador de iterações da cadeia em $j = 1$ e escolher valores iniciais $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$ de forma arbitrária.

(2) Obter um novo valor $\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_m^{(j)})$ a partir de $\theta^{(j-1)}$ através de sucessivas gerações de valores,

$$\begin{aligned}\theta_1^{(j)} &\sim (\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_m^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim (\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_m^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ \theta_m^{(j)} &\sim (\theta_m | \theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{m-1}^{(j)}).\end{aligned}$$

(3) Atualizar o contador j para $j + 1$ e repetir (2) até a convergência.

À medida que o número de iterações aumenta, a cadeia se aproxima de sua condição de equilíbrio. Assim, assumir que a convergência é atingida em uma iteração cuja distribuição esteja arbitrariamente próxima da distribuição de equilíbrio $\pi(\theta)$.

Apêndice B

O ALGORITMO METROPOLIS - HASTINGS

O Metropolis - Hastings é um esquema iterativo usado para gerar amostra de uma densidade de forma indireta, quando não se sabe gerar diretamente dessa densidade. O algoritmo consiste em escolher um núcleo $q(\cdot)$, e gerar deste núcleo, usando um critério de aceitação do valor gerado para garantir que a amostra obtida é representativa da amostra gerada.

Supor que a densidade de probabilidade conjunta de interesse é $\pi(\theta)$ onde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ e que as densidades condicionais completas a posteriori $\pi_i(\theta_i) = \pi_i(\theta_i | \theta_{-i})$, $i = 1, \dots, m$, estão disponíveis. O algoritmo é dado por:

(1) Inicializar o contador de iterações da cadeia em $j = 1$ e escolher valores iniciais $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$ de forma arbitrária.

(2) Obter um novo valor $\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_m^{(j)})$ a partir dos núcleos q_i , $i = 1, \dots, m$, através de sucessivas gerações de valores,

$$\begin{aligned} y_1^{(j)} &\sim (\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_m^{(j-1)}) \\ y_2^{(j)} &\sim (\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_m^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ y_m^{(j)} &\sim (\theta_m | \theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{m-1}^{(j)}). \end{aligned}$$

(3) Usar um critério para aceitar $\theta_1^j = y_1^{(j)}, \dots, \theta_m^j = y_m^{(j)}$. Caso o critério não seja atendido fazer:

$$\theta_i^j = y_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

(4) Atualizar o contador j para $j + 1$ e repetir (2) e (3) até a convergência.

Gelman e Rubin propõem um método de verificação da convergência baseado em técnicas de análise de variância, onde a convergência é aceita quando a variância entre as cadeias é bem menor que a variância dentro de cada cadeia. Maiores detalhes sobre este critério são fornecidos em Gelman & Rubin (1992).

Critério de aceitação e de rejeição do Metropolis - Hastings

Quando não se sabe gerar diretamente de $f(x|y)$ e escolhe-se um núcleo $q(x, y)$, é provável que se tenha um desequilíbrio da condição de reversibilidade, ou seja,

$$\pi(x) q(x, y) \geq \pi(y) q(y, x).$$

Neste caso, o processo move-se de $x \rightarrow y$ com mais frequência do que de $y \rightarrow x$. Uma forma de corrigir esta distorção é reduzir o número de movimentos de $x \rightarrow y$. Isto pode ser feito introduzindo uma probabilidade $\alpha(x, y) < 1$ do movimento $x \rightarrow y$ se realizar. Então, a equação de reversibilidade torna-se:

$$\pi(x) q(x, y) \alpha(x, y) = \pi(y) q(y, x) \alpha(x, y).$$

Sendo o movimento $x \rightarrow y$ mais freqüente, considerar $\alpha(x, y)$ o maior possível para resolver este problema, ou seja, $\alpha(x, y) = 1$ quando $q(x, y) < 1$. Assim,

$$\alpha(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y) q(y, x)}{\pi(x) q(x, y)} \right\}.$$

Apêndice C

UM PROGRAMA DESENVOLVIDO EM MATLAB

Apresentamos a seguir, um dos programas desenvolvidos no software Matlab versão 4.2b utilizado para a obtenção das amostras da distribuição de interesse, através do algoritmo de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings. Neste, em especial, utilizamos a distribuição a priori considerando seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos para o sistema de rede com sete componentes.

```
% dados
n=[12 10 7 14 18 20 18];    % ni
x=[11 8 5 12 12 18 17];    % xi
teta12=100; teta23=10; teta34=10;
teta45=50; teta67=100; nint=10001;
% condições iniciais (M-H) para pi, i=1,...,7
v=[0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90
    0.50 0.60 0.70 0.80 0.90];
cont1=0; cont2=0; cont3=0; cont4=0;
cont5=0; cont6=0; cont7=0;
for k=2:nint
    if rem(k-2,2000)==0
        p1(k-1)=v(1,1+(k-2)/2000);
        p2(k-1)=v(2,1+(k-2)/2000);
        p3(k-1)=v(3,1+(k-2)/2000);
        p4(k-1)=v(4,1+(k-2)/2000);
        p5(k-1)=v(5,1+(k-2)/2000);
        p6(k-1)=v(6,1+(k-2)/2000);
        p7(k-1)=v(7,1+(k-2)/2000);
    end
end
```

```

psiv1=exp(-1/2*(teta12*((p1(k-1)-p2(k-1))^2)));
nuc1=betarnd(x(1)+1,n(1)-x(1)+1);
psin1=exp(-1/2*(teta12*((nuc1-p2(k-1))^2)));
psi1=log(psin1);           % numerador
psi2=log(psiv1);           % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p1(k)=nuc1;
    cont1=cont1+1;
else
    p1(k)=p1(k-1);
end
psiv2=exp(-1/2*((teta12*((p1(k)-p2(k-1))^2))+(teta23*((p2(k-1)-p3(k-1))^2))));
nuc2=betarnd(x(2)+1,n(2)-x(2)+1);
psin2=exp(-1/2*((teta12*((p1(k)-nuc2)^2))+(teta23*((nuc2-p3(k-1))^2))));
psi1=log(psin2);           % numerador
psi2=log(psiv2);           % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p2(k)=nuc2;
    cont2=cont2+1;
else
    p2(k)=p2(k-1);
end
psiv3=exp(-1/2*((teta23*((p2(k)-p3(k-1))^2))+(teta34*((p3(k-1)-p4(k-1))^2))));
nuc3=betarnd(x(3)+1,n(3)-x(3)+1);
psin3=exp(-1/2*((teta23*((p2(k)-nuc3)^2))+(teta34*((nuc3-p4(k-1))^2))));
psi1=log(psin3);           % numerador
psi2=log(psiv3);           % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p3(k)=nuc3;
    cont3=cont3+1;
else
    p3(k)=p3(k-1);
end
psiv4=exp(-1/2*((teta34*((p3(k)-p4(k-1))^2))+(teta45*((p4(k-1)-p5(k-1))^2))));
nuc4=betarnd(x(4)+1,n(4)-x(4)+1);
psin4=exp(-1/2*((teta34*((p3(k)-nuc4)^2))+(teta45*((nuc4-p5(k-1))^2))));

```

```

psi1=log(psin4);           % numerador
psi2=log(psi4);            % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p4(k)=nuc4;
    cont4=cont4+1;
else
    p4(k)=p4(k-1);
end
psiv5=exp(-1/2*(teta45*((p4(k)-p5(k-1))^2)));
nuc5=betarnd(x(5)+1,n(5)-x(5)+1);
psin5=exp(-1/2*(teta45*((p4(k)-nuc5)^2)));
psi1=log(psin5);           % numerador
psi2=log(psi5);            % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p5(k)=nuc5;
    cont5=cont5+1;
else
    p5(k)=p5(k-1);
end
psiv6=exp(-1/2*(teta67*((p6(k-1)-p7(k-1))^2)));
nuc6=betarnd(x(6)+1,n(6)-x(6)+1);
psin6=exp(-1/2*(teta67*((nuc6-p7(k-1))^2)));
psi1=log(psin6);           % numerador
psi2=log(psi6);            % denominador
psi=exp(psi1-psi2);
u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p6(k)=nuc6;
    cont6=cont6+1;
else
    p6(k)=p6(k-1);
end
psiv7=exp(-1/2*(teta67*((p6(k)-p7(k-1))^2)));
nuc7=betarnd(x(7)+1,n(7)-x(7)+1);
psin7=exp(-1/2*(teta67*((p6(k)-nuc7)^2)));
psi1=log(psin7);           % numerador
psi2=log(psi7);            % denominador
psi=exp(psi1-psi2);

```

```

u=rand;
M=min(1,psi);
if u<=M
    p7(k)=nuc7;
    cont7=cont7+1;
else
    p7(k)=p7(k-1);
end
ps(k)=(p3(k)*(1-(1-p1(k))*(1-p2(k)))*(1-(1-p4(k))*(1-p5(k))))+((1-p3(k))*
*(1-(1-p1(k)*p4(k))*(1-p2(k)*p5(k))));
conf(k)=1-(1-p6(k))*(1-ps(k))*(1-p7(k));
end
% seleção das amostras finais
g=1;
for j=501:2000:10000
    for i=j:j+1499
        if rem(i-j+1,15)==0
            p1s(g)=p1(i);
            p2s(g)=p2(i);
            p3s(g)=p3(i);
            p4s(g)=p4(i);
            p5s(g)=p5(i);
            p6s(g)=p6(i);
            p7s(g)=p7(i);
            confs(g)=conf(i);
            g=g+1;
        end
    end
end
% inferências
confiab=[ mean(confs) std(confs) median(confs) ]
result1=[ mean(p1s) std(p1s) median(p1s) ]
result2=[ mean(p2s) std(p2s) median(p2s) ]
result3=[ mean(p3s) std(p3s) median(p3s) ]
result4=[ mean(p4s) std(p4s) median(p4s) ]
result5=[ mean(p5s) std(p5s) median(p5s) ]
result6=[ mean(p6s) std(p6s) median(p6s) ]
result7=[ mean(p7s) std(p7s) median(p7s) ]
bs1=sort(p1s); bs2=sort(p2s); bs3=sort(p3s); bs4=sort(p4s);
bs5=sort(p5s); bs6=sort(p6s); bs7=sort(p7s); bsconf=sort(confs);
ICconf=[bsconf(0.025*length(confs)) bsconf(0.975*length(confs))]
ICp1=[bs1(0.025*length(p1s)) bs1(0.975*length(p1s))]
ICp2=[bs2(0.025*length(p2s)) bs2(0.975*length(p2s))]
ICp3=[bs3(0.025*length(p3s)) bs3(0.975*length(p3s))]
ICp4=[bs4(0.025*length(p4s)) bs4(0.975*length(p4s))]

```



```

ICp5=[bs5(0.025*length(p5s)) bs5(0.975*length(p5s))]
ICp6=[bs6(0.025*length(p6s)) bs6(0.975*length(p6s))]
ICp7=[bs7(0.025*length(p7s)) bs7(0.975*length(p7s))]
% gráficos
x1=mean(p1s); y1=var(p1s);
a1=((x1^2)*(1-x1))/y1-x1; b1=((x1*((1-x1)^2))/y1)-(1-x1);
histfit2('beta',10,p1s,a1,b1), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p1)
figure
x2=mean(p2s); y2=var(p2s);
a2=((x2^2)*(1-x2))/y2-x2; b2=((x2*((1-x2)^2))/y2)-(1-x2);
histfit2('beta',10,p2s,a2,b2), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p2)
figure
x3=mean(p3s); y3=var(p3s);
a3=((x3^2)*(1-x3))/y3-x3; b3=((x3*((1-x3)^2))/y3)-(1-x3);
histfit2('beta',10,p3s,a3,b3), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p3)
figure
x4=mean(p4s); y4=var(p4s);
a4=((x4^2)*(1-x4))/y4-x4; b4=((x4*((1-x4)^2))/y4)-(1-x4);
histfit2('beta',10,p4s,a4,b4), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p4)
figure
x5=mean(p5s); y5=var(p5s);
a5=((x5^2)*(1-x5))/y5-x5; b5=((x5*((1-x5)^2))/y5)-(1-x5);
histfit2('beta',10,p5s,a5,b5), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p5)
figure
x6=mean(p6s); y6=var(p6s);
a6=((x6^2)*(1-x6))/y6-x6; b6=((x6*((1-x6)^2))/y6)-(1-x6);
histfit2('beta',10,p6s,a6,b6), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p6)
figure
x7=mean(p7s); y7=var(p7s);
a7=((x7^2)*(1-x7))/y7-x7; b7=((x7*((1-x7)^2))/y7)-(1-x7);
histfit2('beta',10,p7s,a7,b7), axis([0 1 0 10])
figure
plot(p7)

```

Apêndice D

GRÁFICOS REFERENTES AO CAPÍTULO 4

Gráficos das distribuições marginais e dos valores gerados para $\alpha = 0.5$ considerando seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis.

Gráficos das distribuições marginais e dos valores gerados para $\pi_{3_2}(\underline{p})$ considerando seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHCAR, J.A. (1992). "Some aspects of reparametrization for inferences of k -out-of- m system reliability in the independent exponential case", Notas do ICMSC - Série Estatística, n° 121.
- ACHCAR, J.A. (1996). "Use of Gibbs-with-Metropolis-Hastings Algorithms for a Bayesian Analysis of Complex Network Reliability Systems ", Notas do ICMSC - Série Estatística, n° 33.
- BARLOW, R.E . ; PROSCHAN, F. (1981) . "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", New York : Holt, Rinehart and Winston.
- BOX, G. E. ; TIAO, G. C. (1973) . "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Reading , New York: Addison - Wesley.
- CASELLA, G. ; GEORGE, E.I. (1992). "Explaining the Gibbs Sampler" . American Statistician, 46, 167-174.
- CHEN, J. ; SINGPURWALLA, N. D. (1996) . "Composite Reliability and its Hierarchical Bayes Estimation", Journal of the American Statistical Association, 91, 436 : 1474 - 1484.
- CHIB, S.; GREENBERG, E. (1995). "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm", American Statistician, 49, 4: 327 - 335.
- CROWDER, M. J. ; KIMBER, A. C.; SMITH, R. L. and SWEETING, T. J. (1991). "Statistical Analysis of Reliability Data". London: Chapman and Hall.

- CURRIT, A. ; SINGPURWALLA, N. D. (1988). "On the Reliability Function of a System of Components Sharing a Common Environment", *Journal of Applied Probability*, 26, 763-771.
- DE FINETTI, B. (1972) . "Probability, Induction and Statistics" , New York : John Wiley.
- GAMERMAN, D. (1996). "Simulação Estocástica via Cadeias de Markov", 12^o Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística, UFRJ.
- GELFAND, A.E. ; SMITH, A.F. (1990) . "Sampling - Based Approaches to Calculating Marginal Densities", *Journal of the American Statistical Association*, 85, 410 : 398 - 409.
- GELMAN, A. ; RUBIN, D. (1992) . "Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences", *Statistical Science*, 7, 457 - 472.
- GELMAN, A. ; CARLIN, J. ; STERN, H. and RUBIN, D. (1995). "Bayesian Data Analysis" London: Chapman and Hall.
- LAWLESS, J.F. (1982) . "Statistical Models and Methods for Lifetime Data", John Wiley & Sons.
- LEE, M-L. , T. (1993) . "Pseudo - Conjugate Multivariate Prior Densities", Technical Report, Harvard Medical School, Channing Laboratory.
- LEITE, J. G. ; SINGER, J. M. (1990). "Métodos Assintóticos em Estatística - Fundamentos e Aplicações", 9^o Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística, IME - USP.
- LYNN, N. ; SINGPURWALLA, N. ; SMITH, A. (1995) . "Bayesian Assessment of Network Reliability", Manuscript.
- MARSHALL, A. B. ; OLKIN, I. (1967). "A Multivariate Exponential Distribution", *American Statistical Association Journal*, 62, 30 - 44.
- MARTZ, H.F. ; WALLER, R.A. (1982) . "Bayesian Reliability Analysis" , New York : John Wiley.
- ROBERTS, G.O. ; SMITH, A.F. (1993) . "Bayesian Methods Via the Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo Methods", *Journal of the Royal Statistical Society. B*, 55, 1 : 3 - 23.