**USO DE MÉTODOS BAYESIANOS EM
TESTES ACELERADOS ASSUMINDO UMA
DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA INVERSA**

Olga Lyda Anglas Rosales

Orientador : Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar

**Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
de São Carlos – USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em "Ciências de Computação e Matemática Computacional".**

USP - SÃO CARLOS

1992

*"Em tôdas estas cousas, porém,
somos mais que vencedores, por meio
daquele que nos amou."*

Rm 8:37

En memória a mi mamá

Fortunata,

con eterna gratitud y

amor.

Para mi papá Agustín

y hermanos

David, Agustín, Eddy y Fernando,

por todo su amor.

AGRADECIMENTOS:

- Ao Prof. Jorge A. Achcar, por sua orientação no decorrer do presente trabalho e incentivo à pesquisa.
- Aos Prof. Josemar Rodrigues, Maria Creusa Salles e Emanuel Barboza pelas valiosas sugestões no exame de qualificação.
- Ao Prof. Belmer Garcia Negrillo por sua participação na banca examinadora desta dissertação.
- Aos colegas e Funcionários do ICMSC – USP.
- A Rosângela, Silvana, Lucy e Marcelo por sua amizade e convivência agradável.
- A Nilda por seu apoio e amizade.
- A CAPES pelo apoio financeiro.
- Em especial, ao Mário pela amizade, pelos conselhos, compreensão, paciência e discussão de alguns pontos relativos ao trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação de mestrado, exploramos o uso do método de Laplace para aproximações de integrais numa análise Bayesiana da distribuição Gaussiana Inversa, considerando diferentes densidades a priori para os parâmetros do modelo. Além disso, consideramos testes acelerados, planejamentos de experimentos e esquemas de controle de qualidade a partir de densidades preditivas para a distribuição Gaussiana Inversa. Esses resultados podem ser de grande interesse prático, como é ilustrado em alguns exemplos de aplicação.

ABSTRACT

In this dissertation we explore the use of Laplace's method for approximation of integrals in a Bayesian analysis of the Inverse Gaussian distribution, considering different prior densities for the parameters of the model. We also consider, accelerated life tests, design of experiments and quality control criteria using predictive densities for the Inverse Gaussian distribution. These results could be of great practical interest, as it is illustrated in some applied examples.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.1 - INTRODUÇÃO	1
1.2 - DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA INVERSA NO CONTEXTO DE TESTES ACELERADOS	3
1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
 CAPÍTULO 2 - UMA ANÁLISE DO MODELO GAUSSIANO INVERSO SEM VARIÁVEL ESTRESSE	 6
2.1 - PARAMETRIZAÇÃO (θ, λ)	6
2.1.1 - UMA ANÁLISE CLÁSSICA	6
2.1.2 - UMA ANÁLISE BAYESIANA	14
2.1.2.1 DENSIDADE A PRIORI CONJUGADA NATURAL	14
2.1.2.2 DENSIDADE A PRIORI DE JEFFREYS	15
2.2 - PARAMETRIZAÇÃO (μ, λ)	21
2.2.1 - UMA ANÁLISE CLÁSSICA	21
2.2.2 - UMA ANÁLISE BAYESIANA	23
2.2.2.1 - DENSIDADE A PRIORI CONJUGADA NATURAL	23
2.2.2.2 - DENSIDADE A PRIORI DE JEFFREYS	24
2.2.2.3 - DENSIDADE A PRIORI IMPRÓPRIA	25
 CAPÍTULO 3 - UMA ANÁLISE CLÁSSICA PARA O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO	 30
3.1 - O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO	30
3.2 - O EXPERIMENTO EM TESTES ACELERADOS COM A RELAÇÃO PARÂMETRO - ESTRESSE	31
3.3 - ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	32
3.4 - INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS	37
3.5 - INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS	41

CAPÍTULO 4 - UMA ANÁLISE BAYESIANA PARA O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO	42
4.1 - UMA ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO α , β e λ DESCONHECIDOS	42
4.1.1 - FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA α , β e λ	42
4.1.2 - DENSIDADE A PRIORI PARA α , β e λ	42
4.1.3 - DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA α , β e λ	43
4.1.4 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA α , β e λ	44
4.1.5 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA O TEMPO MÉDIO DE FALHA θ_1 SOB O NÍVEL USUAL DE ESTRESSE X_1 .	46
4.2 - UMA ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO λ CONHECIDO	48
4.2.1 - DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA α e β	48
4.2.2 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA α e β	49
4.2.3 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA O TEMPO MÉDIO DE FALHA θ_1 SOB O NÍVEL USUAL DE ESTRESSE X_1 COM λ CONHECIDO	50
4.3 - INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS	51
 CAPÍTULO 5 - DENSIDADES PREDITIVAS	 57
5.1 - DENSIDADE PREDITIVA PARA UMA OBSERVAÇÃO FUTURA	57
5.2 - USO DA DENSIDADE PREDITIVA EM CONTROLE DE QUALIDADE	60
 CAPÍTULO 6 - PLANEJAMENTOS DE EXPERIMENTOS EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO	 62
6.1 - UMA ANÁLISE CLÁSSICA	62
6.1.1 - FORMULAÇÃO DO MODELO	62
6.1.2 - ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	64
6.1.3 - ESTIMADORES NÃO - VICIADOS VIA MÍNIMOS QUADRADOS	70
6.2 - UMA ANÁLISE BAYESIANA	73
6.2.1 - DENSIDADE A PRIORI NÃO-INFORMATIVA PARA Φ e σ .	73
6.2.2 - DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA Φ e σ	73
6.2.3 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA Φ	73
6.2.4 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA σ	74
6.2.5 - INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS	74

CAPÍTULO 7 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS	75
7.1 - ANÁLISE DO MODELO GAUSSIANO INVERSO SEM VARIÁVEL ESTRESSE – ANÁLISE CLÁSSICA E BAYESIANA	75
7.1.1 - PRIMEIRO EXEMPLO	75
7.1.2 - SEGUNDO EXEMPLO	75
7.2 - ANÁLISE DO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO – ANÁLISE CLÁSSICA E BAYESIANA	91
7.2.1 - TERCEIRO EXEMPLO	91
7.3 - PLANEJAMENTOS DE EXPERIMENTOS EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO – ANÁLISE CLÁSSICA E BAYESIANA	105
7.3.1 - QUARTO EXEMPLO	105
 CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FUTURAS	 112
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 113
 APÊNDICES	
A.1 - O MÉTODO DE LAPLACE	117
A.2 - O MÉTODO DE SIMPSON	118
A.3 - INFERÊNCIAS PARA OS PARÂMETROS A PARTIR DA TEORIA ASSINTÓTICA	120
A.4 - PROGRAMAS COMPUTACIONAIS	125

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 INTRODUÇÃO.

Em certos experimentos de testes de vida, é comum na prática submeter os itens em teste a condições altas de estresse. Tais procedimentos são chamados testes de vida acelerados. Estes testes são aplicados em produtos e materiais para se obter informações rápidas sobre as distribuições dos tempos de vida e são realizados expondo as unidades testadas em condições que são mais rigorosas que as normais. Estes resultados em unidades com tempos de vida pequenos poderiam ser observadas sob condições normais. Os resultados obtidos nas condições aceleradas são então extrapoladas para as condições normais para se obter uma estimativa da distribuição do tempo de vida sob as condições normais.

Os procedimentos usuais em testes acelerados são tipicamente produzidos para testar unidades em altos níveis de temperatura, voltagem, pressão, vibração, razão cíclica, peso, etc. ; ou algumas combinações delas que são encontradas sob condições normais. A escolha destas variáveis aceleradas, como são usualmente chamadas, para um produto ou material é usualmente estabelecido pela prática em engenharia.

Uma análise paramétrica de testes de vida acelerados depende muito do modelo escolhido para a distribuição do tempo de vida e da relação dos parâmetros dessa distribuição com a variável estresse. Além das considerações para o ajuste empírico, uma distribuição do tempo de vida deriva de postulados razoáveis do processo de falha, fortalecendo assim seu uso estatístico.

Para a relação parâmetro-estresse, existem alguns modelos empíricos comumente usados em engenharia tais como o modelo Arrhenius, Eyring e de Potência Inversa. Alguns procedimentos na inferência com essas formulações são discutidas em Nelson (1990), Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974).

Neste primeiro capítulo são apresentados a distribuição Gaussiana Inversa e o Modelo de Regressão Linear Inverso, e posteriormente uma breve revisão bibliográfica do modelo. No capítulo 2, apresentamos uma Análise Clássica e Bayesiana do modelo sem variável estresse, com suas densidades a posteriori marginais e os intervalos de confiança e de credibilidade aproximados, utilizando as parametrizações (θ, λ) e $(\mu = 1/\theta, \lambda)$. Consideramos a densidade a priori conjugada natural, a priori de Jeffreys e uma densidade a priori imprópria para este modelo. No capítulo 3, apresentamos uma Análise Clássica do Modelo de Regressão Linear Inverso e nos referimos à base física da distribuição Gaussiana Inversa para formular uma relação estocástica razoável entre o tempo médio de falha e a variável estresse. Além disso encontramos os estimadores de máxima verossimilhança e os intervalos de confiança correspondentes para os parâmetros. No capítulo 4 fazemos uma Análise Bayesiana para o modelo de Regressão Linear Inverso, inicialmente assumindo que os parâmetros sejam desconhecidos e posteriormente assumindo um deles conhecido. Encontramos a densidade a posteriori marginal para o tempo médio de falha θ_1 sob o nível usual de estresse x_1 e calculamos os seus intervalos de credibilidade aproximados. Encontramos ainda a densidade preditiva para uma observação futura (ver capítulo 5), onde apresentamos também alguns critérios para serem usados em controle de qualidade. No capítulo 6, consideramos uma análise clássica e Bayesiana num planejamento de experimentos em testes acelerados com o modelo de Regressão Linear Inverso. Neste capítulo são mostrados os efeitos fatoriais no contexto do processo de Wiener. Também são dados os estimadores de máxima verossimilhança e os respectivos intervalos de confiança aproximados para os parâmetros e encontramos os estimadores de mínimos quadrados usando os inversos das médias das celas amostrais. Para a análise Bayesiana é considerada uma densidade a priori não-informativa para se obter as densidades a posteriori para os parâmetros de interesse. No capítulo 7 são apresentadas algumas aplicações numéricas. Um primeiro conjunto de dados introduzido por Achcar, Bolfarine e Rodrigues (1987), e um segundo introduzido por Lieblin e Zelen (1956), são utilizados para fazer uma Análise Clássica e Bayesiana do modelo sem variável estresse. Num outro exemplo, com um conjunto de dados introduzido por Nelson (1971), é feita uma análise clássica e Bayesiana do modelo de Regressão Linear Inverso e é mostrado o uso da densidade preditiva para uma observação futura em controle de qualidade. No último exemplo, com dados introduzidos por Shuster e Miura (1972), é feita uma análise clássica e Bayesiana em planejamento de experimentos. O Método de Laplace, utilizado para aproximar integrais é usado para aproximar densidades a posteriori marginais (ver apêndice A1). O Método de Simpson, também utilizado com densidades preditivas é apresentado no apêndice A2 e alguns resultados sobre as inferências para os parâmetros a partir da teoria assintótica são dadas no apêndice A3. No apêndice A4 são apresentados alguns programas computacionais (utilizando o pacote estatístico SOC - Software Científico desenvolvido pelo NTIA/EMBRAPA) utilizados para a aplicação numérica.

1.2 DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA INVERSA NO CONTEXTO DE TESTES ACELERADOS

Assumimos uma distribuição de sobrevivência versátil mas não muito conhecida, chamada Distribuição Gaussiana Inversa $IG(\theta, \lambda)$, cuja função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada por,

$$f(y; \theta, \lambda) = (2\pi\lambda^{-1}y^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda y^{-1}(y\theta^{-1} - 1)^2\right\}$$

onde $y > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

Esta distribuição apresenta três características desejáveis: uma ampla variedade de forma da curva de densidade de probabilidade, tratabilidade analítica dos resultados de inferência, e uma motivação dada a partir do processo estocástico de falha. As propriedades básicas desta distribuição são dadas em Tweedie (1957) e um levantamento bibliográfico extensivo é dado por Folks e Chhikara (1978).

No contexto de testes acelerados, usualmente nos referimos à base física da distribuição Gaussiana Inversa para formular uma relação estocástica razoável do tempo de falha para a variável estresse. Um modelo resultante tem a forma linear inversa dada por,

$$\theta^{-1} = \alpha + \beta X,$$

onde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ e $X > 0$ (ver por exemplo, Bhattacharyya e Fries, 1981).

Uma formulação diferente foi dada por Davis (1977) que considerou o tradicional modelo de regressão linear $\theta = \alpha + \beta X$ assumindo λ constante.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

A gênese da distribuição Gaussiana Inversa data desde 1915 quando Schrödinger deduziu a distribuição de probabilidade do tempo de primeira passagem num movimento Browniano. Depois disso, encontramos um artigo de Tweedie (1945), que formulou a relação inversa da função geratriz cumulante da distribuição com aquela da distribuição normal, daí propondo o nome de distribuição Gaussiana Inversa. Wald (1947), derivou a distribuição Gaussiana Inversa numa forma limitante para a distribuição do tamanho amostral numa análise sequencial, por isso também é conhecida como a distribuição de Wald principalmente na literatura russa. Outros nomes para a distribuição são dados por distribuição do tempo de primeira passagem Gaussiano (Moran, 1968) e a distribuição do tempo de primeira passagem num movimento Browniano com direção positiva (Wasan, 1967).

Tweedie (1957a, 1957b) estudou suas características básicas estabelecendo propriedades estatísticas importantes e descreveu certas analogias com as propriedades da distribuição normal. A caracterização da distribuição Gaussiana Inversa por Khatri (1962) mostra a caracterização usual da distribuição amostral pela independência da média amostral e variância. Shuster (1968) expressa a função distribuição acumulada da distribuição Gaussiana Inversa em termos da função distribuição acumulada da distribuição normal. Wasan e Roy (1969) apresentam algumas características e propriedades analíticas desta classe de distribuição principalmente para as formas limitantes além de uma tabela dos valores das porcentagens pontuais da distribuição.

Mais recentemente, Chhikara (1975) e Chhikara e Folks (1974, 1975, 1976) provaram algumas propriedades adicionais da distribuição Gaussiana Inversa, e encontraram estimadores não-viciados de mínima variância para a função distribuição acumulada e algumas distribuições amostrais que também foram obtidas por Tweedie (1957a).

Chhikara e Folks (1977), sugerem o uso da distribuição Gaussiana Inversa como um modelo de tempo de vida, discutem os diversos fatores diferentes de confiabilidade desta distribuição e ainda apresentam as vantagens em relação ao uso da distribuição log-normal. A partir dessa sugestão, Padgett (1979) apresenta limites de confiança para a função de confiabilidade ($R(t) = P(T > t)$) considerando dois casos: no primeiro, o parâmetro de forma é conhecido e o parâmetro de escala desconhecido, e no segundo caso, o parâmetro de forma é desconhecido e o de escala é conhecido. Posteriormente, Padgett (1981) considera a estimação da função de confiabilidade sob o ponto de vista Bayesiano para a distribuição Gaussiana Inversa. No contexto de testes de sobrevivência acelerados, Bhattacharyya e Fries (1981) relacionam a base física desta distribuição para formular uma relação estocástica razoável para o tempo de falha com a intensidade da variável estresse.

Banerjee (1977) e Al-Hussaini e Abb-El-Hakim (1981) descrevem a distribuição Gaussiana Inversa no caso bivariado, assim como suas relações com a distribuição normal e qui-quadrado, e

também propõem uma generalização para o caso multivariado.

Alguns resultados Bayesianos são obtidos por Banerjee e Bhattacharyya (1979) que utilizam prioris de referência não-informativas e também a priori conjugada, utilizando uma parametrização adequada para encontrar densidades a posteriori para os parâmetros de interesse. Eles observam uma grande similaridade com os resultados correspondentes da distribuição normal. Achcar, Bolfarine e Rodrigues (1987) também apresentam uma análise Bayesiana do modelo Gaussiano Inverso considerando uma priori não-informativa de Jeffreys para os parâmetros de interesse.

Cheng e Amin (1981) sugerem uma distribuição alternativa, a distribuição Gaussiana Inversa com três parâmetros (origem desconhecida). Consideram a estimação de máxima verossimilhança e mostram que não há dificuldade em achar estas estimativas, o que não acontece com outras distribuições conhecidas tais como, lognormal, gama e Weibull.

Bhattacharyya e Fries (1982) apresentam e discutem a relação existente entre a distribuição Gaussiana Inversa e a distribuição de Birnbaum-Saunders. A primeira é obtida pela derivação exata enquanto que a segunda envolve certas aproximações. Eles mostram que ambas se ajustam muito bem aos dados contendo tempos de falha; no entanto mostram que a distribuição Gaussiana Inversa tem algumas vantagens com relação à análise e a tratabilidade das distribuições amostrais.

Bhattacharyya e Fries (1983) consideram uma análise de experimentos fatoriais utilizando a distribuição Gaussiana Inversa e um modelo Linear Inverso para os efeitos dos fatores motivado sob o contexto de um processo de Wiener.

Cheng (1984) descreve um método para a geração de uma amostra aleatória da variável Gaussiana Inversa a partir de uma média amostral e uma medida de dispersão. Este método pode ainda ser estendido para produzir amostras de outras distribuições.

Doksum e Hoyland (1992) consideram modelos para a variável estresse de testes de vida acelerados para experimentos baseados no processo de Wiener e a distribuição Gaussiana Inversa, onde cada unidade do experimento é sujeita a certos modelos específicos de estresse e intervalo de tempo, até a primeira falha. Consideram também o caso em que unidades diferentes são sujeitas a diferentes modelos de estresse por etapas onde o tempo do teste é reduzido antes que todas as unidades tenham falhado, ou seja, os dados são censurados.

Outros trabalhos recentes relacionados ao estudo de Testes Acelerados podem ser encontrados em Louzada Neto (1991) que desenvolvem o Teste de Sobrevivência Acelerados considerando o uso da análise Bayesiana para o modelo de Eyring com uma variável estresse e Dias (1992) que analisam o Modelo de Lei de Potência Inversa assumindo uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência de componentes com censuras de tipo II.

CAPÍTULO 2

UMA ANÁLISE DO MODELO GAUSSIANO INVERSO SEM VARIÁVEL ESTRESSE

2.1. PARAMETRIZAÇÃO (θ, λ).

Em geral pode ser notado que uma boa parametrização (θ, λ) ajuda muito no uso da metodologia estatística de estimação paramétrica e testes de hipótese. Então é desejável sempre que possível fixar esta parametrização.

2.1.1. UMA ANÁLISE CLÁSSICA.

Para a análise clássica será apresentada a função densidade de probabilidade (f.d.p.) da distribuição Gaussiana Inversa e suas principais propriedades. Para uma variável aleatória Y que segue essa distribuição com parâmetros θ e λ temos,

$$f(y; \theta, \lambda) = (2\pi\lambda^{-1}y^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda y^{-1}(y\theta^{-1} - 1)^2\right\} \quad (2.1)$$

onde $y > 0$, $\theta > 0$ e $\lambda > 0$. Essa densidade será denotada por $IG(\theta, \lambda)$ e escrevemos $Y \sim IG(\theta, \lambda)$.

A f.d.p (2.1) é unimodal e assimetricamente positiva, o parâmetro θ é a média da distribuição e λ é um parâmetro de forma.

A função característica da distribuição Gaussiana Inversa é dada por,

$$\phi(t) = \exp\left\{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{2it\theta^2}{\lambda}\right)^{1/2}\right]\right\} \quad (2.2)$$

Consequentemente, segue-se que todos os momentos existem e, em particular temos que,

$$E(Y) = \theta \quad \text{e} \quad V(Y) = \frac{\theta^3}{\lambda} \quad (2.3)$$

Tweedie (1957a) apresenta também outras formas equivalentes desta distribuição as quais podem ser obtidas substituindo o conjunto de parâmetros (θ, λ) por (τ, λ) , (θ, ϕ) ou (ϕ, λ) usando a seguinte relação, $\frac{1}{2}\tau^2 = \theta = \frac{\lambda}{\phi}$, onde as funções densidades para valores positivos da variável podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} f(y; \tau, \lambda) &= (2\pi\lambda^{-1}y^3)^{-1/2} \exp\left\{-\tau\lambda y + \lambda(2\tau)^{1/2} - \lambda/2y\right\} \\ f(y; \theta, \phi) &= (2\pi[\theta\phi]^{-1}y^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\phi y}{2\theta} + \phi - \frac{\theta\phi}{2y}\right\} \\ f(y; \phi, \lambda) &= (2\pi\lambda^{-1}y^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\phi^2 y}{2\lambda} + \phi - \frac{\lambda}{2y}\right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

assim a relação entre as três funções é dado por,

$$f(y; \theta, \lambda) = \theta^{-1} f\left(\frac{y}{\theta}; 1, \phi\right) = \lambda^{-1} f\left(\frac{y}{\lambda}; \phi, 1\right) \quad (2.5)$$

Cada uma dessas formas pode ser conveniente para propósitos específicos da Teoria do Movimento Browniano. A forma da distribuição depende somente de ϕ , portanto ϕ é o parâmetro de forma da distribuição. A f.d.p Gaussiana Inversa representa uma ampla classe de distribuições, abrangendo distribuições altamente assimétricas até uma distribuição quando varia ϕ de 0 a ∞ . As curvas da densidade são dadas nos seguintes gráficos:

GRÁFICO 2.1

DENSIDADE GAUSSIANA INVERSA
COM $\theta=1$ PARA SEIS VALORES DE λ

GRÁFICO 2.2

DENSIDADE GAUSSIANA INVERSA
COM $\lambda=1$ PARA QUATRO VALORES DE θ

Essas curvas são obtidas especificando $\theta = 1$ e variando λ ou ϕ no gráfico 2.1 e especificando $\lambda = 1$ e variando θ ou ϕ no gráfico 2.2.

Pode ser notado que a família da distribuição Gaussiana Inversa pertence à família exponencial de ordem 2. Fazendo $\varphi = \frac{\lambda}{\theta^2}$, a f.d.p (2.1) pode ser escrita por,

$$f(y; \lambda, \varphi) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} y^{-3/2} \exp\left\{(\lambda\varphi)^{1/2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda y^{-1} + \varphi y)\right\} \quad (2.6)$$

que é da forma da família exponencial, $a(\psi) b(y) \exp\{\psi t(y)\}$, onde $\psi = (\lambda, \varphi)$, $t(y) = (-1/2)(y^{-1}, y)$,

$$b(y) = y^{-3/2} \text{ e } a(\psi) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{(\lambda\varphi)^{1/2}\right\}.$$

Para a estimação dos parâmetros, consideramos $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uma amostra aleatória simples de uma distribuição Gaussiana Inversa com densidade (2.1). A função de verossimilhança para θ e λ em (2.1) é dada por,

$$L(\theta, \lambda) = (2\pi)^{-n/2} \lambda^{n/2} \prod_{i=1}^n y_i^{-3/2} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} \lambda \theta^{-2} \sum_{i=1}^n y_i - n \lambda \theta^{-1} + \frac{1}{2} \lambda \sum_{i=1}^n y_i^{-1}\right)\right\} \quad (2.7)$$

Definindo $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ e $R = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^{-1}$, e aplicando a função log em (2.7) temos que,

$$l(\theta, \lambda) = -\frac{n}{2} \log 2\pi + \frac{n}{2} \log \lambda - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \log y_i - \frac{1}{2} \lambda \theta^{-2} n \bar{Y} + n \lambda \theta^{-1} - \frac{1}{2} \lambda n R \quad (2.8)$$

As primeiras derivadas de $l(\theta, \lambda)$ (2.8) com respeito a θ e λ são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(\theta, \lambda)}{\partial \theta} &= \lambda \theta^{-3} n \bar{Y} - n \lambda \theta^{-2} \\ \frac{\partial \log l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{2} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \theta^{-2} n \bar{Y} + n \theta^{-1} - \frac{1}{2} n R \end{aligned} \quad (2.9)$$

Igualando a zero as primeiras derivadas (2.9), obtemos os EMV de θ e λ dados respectivamente por,

$$\hat{\theta} = \bar{Y} \quad (2.10)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{(R - \bar{Y}^{-1})} \text{ e } \hat{\lambda}^{-1} = (R - \bar{Y}^{-1})$$

Para verificar se um determinado modelo se ajusta bem a um conjunto de dados, várias estatísticas podem ser utilizadas. Em particular, a estatística de Kolmogorov-Smirnov (K-S) pode ser a indicada para testar se a distribuição Gaussiana Inversa está bem ajustada. Dada uma amostra aleatória de tamanho n , a estatística de K-S é definida por (Chhikara e Folks, 1989),

$$D_{obs}^{KS} = \max (D_{obs}^{KS+}, D_{obs}^{KS-})$$

onde $D_{obs}^{KS+} = \max_{1 \leq i \leq n} [i/n - F(y)]$ e $D_{obs}^{KS-} = \max_{1 \leq i \leq n} [F(y) - (i-1)/n]$. Para este caso, a função distribuição hipotética é dada por,

$$F(y) = \Phi \left[\sqrt{\frac{\lambda}{y}} \left(\frac{y}{\theta} - 1 \right) \right] + \exp \left(\frac{2\lambda}{\theta} \right) \Phi \left[-\sqrt{\frac{\lambda}{y}} \left(1 + \frac{y}{\theta} \right) \right] \quad (2.11)$$

onde $\Phi(y)$ é a F.D.A da distribuição normal.

Para o teste de ajuste do modelo é utilizado a equação,

$$D_{cri}^{KS} = \beta_0^{KS} + \beta_1^{KS}(n^{-1/2}) + \beta_2^{KS}(\phi^{-1/2})$$

onde $\phi = \lambda/\theta$ e os valores de β_0^{KS} , β_1^{KS} , β_2^{KS} são dados na tabela a seguir,

TABELA 2.1 - Coeficientes para o nível γ e classe ϕ

γ	$\phi \leq 1$			$\phi > 1$		
	β_0^{KS}	β_1^{KS}	β_2^{KS}	β_0^{KS}	β_1^{KS}	β_2^{KS}
0.200	-0.048	0.7381	0.0668	0.004	0.6631	0.0206
0.150	-0.052	0.7736	0.0727	0.005	0.6909	0.0218
0.100	-0.057	0.8173	0.0791	0.006	0.7254	0.0237
0.050	-0.064	0.8864	0.0907	0.008	0.7773	0.0269
0.025	-0.069	0.9498	0.0998	0.011	0.8215	0.0297
0.010	-0.070	1.0170	0.1086	0.014	0.8689	0.0355

fonte: Stark e Chhikara, 1988.

Portanto, aceitamos que o ajuste é bom se D_{obs}^{KS} for menor que o D_{cri}^{KS} ao nível de significância especificado (Stark e Chhikara, 1988).

As inferências para $\psi = (\theta, \lambda)'$ podem ser baseadas na aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\psi} = (\hat{\theta}, \hat{\lambda})'$ considerando a matriz de informação observada I_0 ou a matriz de informação de Fisher $I(\psi)$ (Mood, Graybill e Boes, 1974 ; Lawless, 1982).

A matriz de informação observada é dada por,

$$I_0 = \left\{ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \psi^2} \right\} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} \quad (2.12)$$

As segundas derivadas parciais com sinal negativo da função log-verossimilhança (2.8) com respeito a θ e λ são,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \theta^2} &= 3\lambda\theta^{-4}n\bar{Y} - 2n\lambda\theta^{-3} \\ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} &= \frac{n}{2\lambda^2} \\ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \theta \partial \lambda} &= n\theta^{-2} - \theta^{-3}n\bar{Y} = -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Calculando (2.13) em $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ temos,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \theta^2} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} &= \frac{n\bar{Y}^{-3}}{(R - \bar{Y}^{-1})} \\ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} &= \frac{n(R^2 - 2R\bar{Y}^{-1} + \bar{Y}^{-2})}{2} \\ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \theta \partial \lambda} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} &= 0 = -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda \partial \theta} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto, substituindo as equações de (2.14) em (2.12) temos,

$$I_0 = \begin{bmatrix} \frac{n\bar{Y}^{-3}}{(R - \bar{Y}^{-1})} & 0 \\ 0 & \frac{n(R^2 - 2R\bar{Y}^{-1} + \bar{Y}^{-2})}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Para fazer inferências para $\psi = (\theta, \lambda)'$, podemos usar o fato que para n grande,

$$\hat{\psi} = (\hat{\theta}, \hat{\lambda})' \approx N\{(\theta, \lambda)'; I_0^{-1}\} \quad (2.16)$$

Logo, as inferências para $\psi = (\theta, \lambda)'$ podem ser baseadas em (2.16).

De (2.15),

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(R - \bar{Y}^{-1})}{n\bar{Y}^{-3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n(R^2 - 2R\bar{Y}^{-1} + \bar{Y}^{-2})} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Portanto, podemos encontrar as variâncias aproximadas para $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ e construir intervalos de confiança ou testes de significância para θ e λ . As variâncias aproximadas para $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ são dadas por,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{\theta}) &= (R - \bar{Y}^{-1})(n\bar{Y}^{-3})^{-1} \\ \hat{V}(\hat{\lambda}) &= 2 \{n(R^2 - 2R\bar{Y}^{-1} + \bar{Y}^{-2})\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

A matriz de informação de Fisher para θ e λ é dada por,

$$I(\psi) = E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\theta, \lambda)}{\partial \psi^2} \right\} \quad (2.19)$$

substituindo as equações de (2.13) em (2.19) temos que,

$$I(\psi) = E \begin{bmatrix} (3\lambda\theta^{-4}n\bar{Y} - 2n\lambda\theta^{-3}) & (n\theta^{-2} - \theta^{-3}n\bar{Y}) \\ (n\theta^{-2} - \theta^{-3}n\bar{Y}) & \frac{n}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde,

$$\begin{aligned} E \{ (3\lambda\theta^{-4}n\bar{Y} - 2n\lambda\theta^{-3}) \} &= n\lambda\theta^{-3} \\ E \{ (n\theta^{-2} - \theta^{-3}n\bar{Y}) \} &= 0 \\ E \left(\frac{n}{2\lambda^2} \right) &= \frac{n}{2\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto, substituindo (2.21) em (2.20) temos que,

$$I(\psi) = \begin{bmatrix} n\lambda\theta^{-3} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Assim de (2.22),

$$I^{-1}(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n\lambda\theta^{-3}} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{n} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Portanto, desta matriz temos que as variâncias aproximadas para $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ são dadas por,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{\theta}) &= (n\lambda\theta^{-3})^{-1} \\ \hat{V}(\hat{\lambda}) &= 2n^{-1}\lambda^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Podemos construir intervalos de confiança (IC) para os parâmetros θ e λ usando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ a partir da matriz de informação observada (ou matriz de informação de Fisher) dada por,

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = (\hat{\theta}, \hat{\lambda})' &\approx N\{(\theta, \lambda)'; I_0^{-1}\} \\ \left(\text{ou } \hat{\psi} = (\hat{\theta}, \hat{\lambda})' &\approx N\{(\theta, \lambda)'; I^{-1}(\hat{\psi})\} \right) \end{aligned}$$

onde I_0^{-1} é a inversa da matriz de informação observada (e $I(\psi)^{-1}$ é a inversa da matriz de informação de Fisher). Portanto, encontramos intervalos de confiança aproximados para os parâmetros (A3.1, Apêndice A3).

Assim, os intervalos de confiança para os parâmetros θ e λ , considerando um nível de confiança $100(1 - \gamma)\%$ são dados por,

$$IC(\theta) = \left[\hat{\theta} - Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\theta})} \right] \quad (2.25)$$

e

$$IC(\lambda) = \left[\hat{\lambda} - Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})}, \hat{\lambda} + Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda})} \right]$$

De maneira análoga, encontramos intervalos de confiança aproximados para θ e λ a partir da matriz de informação de Fisher.

2.1.2 UMA ANÁLISE BAYESIANA.

Para este tipo de parametrização consideramos duas densidades a priori: Conjugada natural e Jeffreys. Palmer (1983) observa que não existe uma priori conjugada natural para esta parametrização exceto quando θ é conhecido e λ é desconhecido.

2.1.2.1 DENSIDADE A PRIORI CONJUGADA NATURAL.

De (2.1) a f.d.p pode ser escrita na forma,

$$f(y; \theta, \lambda) = (2\pi y^3)^{-1/2} \left\{ \lambda^{1/2} \exp \left[-\lambda \left(\frac{y}{2} \theta^{-2} - \theta^{-1} + \frac{1}{2y} \right) \right] \right\} \quad (2.26)$$

O termo central (Kernel da distribuição) da f.d.p é o termo entre as chaves. Assim se a priori conjugada natural existe sua Densidade a priori conjunta para θ e λ pode ser escrita como,

$$\pi(\theta, \lambda) \propto \lambda^d \exp \left[-\lambda (a\theta^{-2} - b\theta^{-1} + c) \right] \quad (2.27)$$

onde $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

Dado que $\frac{(y - \theta)^2}{2\theta^2 y} > 0$ é necessario que $a\theta^{-2} - b\theta^{-1} + c > 0$, ou seja $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$. A função gama requer também que $d > -1$ para que $\pi(\theta, \lambda)$ seja integrável em relação a λ .

De (2.26) e (2.27) a Densidade a posteriori conjunta para θ e λ pode ser escrita por,

$$\pi(\theta, \lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{d+n/2} \exp \left\{ -\lambda \left[\left(\frac{\sum y_i}{2} + a \right) \theta^{-2} - (n+b) \theta^{-1} + \frac{1}{2} \sum y_i^{-1} + c \right] \right\} \quad (2.28)$$

onde $\theta > 0$ e $\lambda > 0$; pode-se notar que (2.28) tem a mesma forma de (2.27). Para ver que (2.27) nem sempre existe, consideremos λ fixo e $\theta \rightarrow \infty$, assim observamos que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \pi(\theta, \lambda) = \text{constante}$. Portanto, $\pi(\theta, \lambda)$ não é integrável em relação a θ para algum λ .

Com λ conhecido, a Densidade a priori conjugada natural para θ , se existe, pode ser escrita como,

$$\pi(\theta) \propto \exp[-(a\theta^{-2} - b\theta^{-1})] \quad (2.29)$$

onde $\theta > 0$, $a > 0$ e $b > 0$.

Porém, como no caso de ambos os parâmetros serem desconhecidos esta densidade não é própria porque ela não é integrável.

Com θ conhecido, a Densidade a priori conjugada natural para λ é da forma,

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^d \exp[-\lambda k] \quad (2.30)$$

com $k = a\theta^{-2} - b\theta^{-1} + c$, onde $\lambda > 0$, $d > 0$ e $k > 0$.

Pode ser notado ainda que a densidade dada em (2.30) tem a forma da densidade da distribuição gama escrita como,

$$\pi(\lambda) = \frac{k^d \lambda^{d-1} \exp(-k\lambda)}{\Gamma(d)}$$

onde $d > 0$, $k > 0$ e $\lambda > 0$.

De (2.26) e (2.30) a Densidade a posteriori marginal para λ pode ser escrita como,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{d+n/2} \exp\left[-\left(k + \frac{\sum (y_i - \theta)^2}{2\theta^2 y_i}\right)\lambda\right] \quad (2.31)$$

onde $\lambda > 0$, $d > 0$ e $k > 0$.

2.1.2.2 DENSIDADE A PRIORI DE JEFFREYS.

Considerar uma densidade a priori não-informativa de Jeffreys para θ e λ obtida usando a regra de Jeffreys (Box e Tiao, 1973) que é dada por,

$$\pi(\theta, \lambda) \propto \{\det I(\psi)\}^{1/2} \quad (2.32)$$

onde $I(\psi)$ é a matriz de informação de Fisher para $\psi = (\theta, \lambda)$.

De (2.22) temos que,

$$\det I(\psi) = \begin{vmatrix} n\lambda\theta^{-3} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{vmatrix} = \frac{n^2\lambda^{-1}\theta^{-3}}{2} \quad (2.33)$$

Substituindo (2.33) em (2.32) encontramos uma **Densidade a priori não-informativa de Jeffreys para θ e λ** dada por,

$$\pi(\theta, \lambda) \propto \{\lambda\theta^3\}^{-1/2} \quad (2.34)$$

onde $\theta > 0$, $\lambda > 0$.

Combinando a densidade a priori não-informativa de Jeffreys (2.34) e a função de verossimilhança (2.7), a densidade a posteriori conjunta para θ e λ é dada por (Box e Tiao, 1973),

$$\pi(\theta, \lambda / \text{dados}) \propto \pi(\theta, \lambda) L(\theta, \lambda) \quad (2.35)$$

Substituindo (2.34) e (2.7) em (2.35) obtemos,

$$\pi(\theta, \lambda / \text{dados}) \propto \{\lambda\theta^3\}^{-1/2} (2\pi)^{-n/2} \lambda^{n/2} \prod_{i=1}^n y_i^{-3/2} \exp\{-A(\theta, \lambda)\} \quad (2.36)$$

onde $A(\theta, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda \theta^{-2} n \bar{Y} - n \lambda \theta^{-1} + \frac{1}{2} \lambda n R$.

Portanto de (2.36) temos que a **Densidade a posteriori conjunta para θ e λ** é dada por,

$$\pi(\theta, \lambda / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \lambda^{(n-1)/2} \exp\{-A(\theta, \lambda)\} \quad (2.37)$$

onde $\theta > 0$ e $\lambda > 0$.

Palmer (1973) mostra que a expressão (2.37) pode ser normalizada e portanto a densidade a posteriori é própria.

Integrando (2.37) em relação a λ , obtemos a densidade a posteriori marginal para θ , que é dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \int_0^\infty \lambda^{(n-1)/2} \exp\{-A(\theta, \lambda)\} d\lambda \quad (2.38)$$

Para resolver (2.38) usamos alguns resultados de integrais conhecidas (Box e Tiao, 1973, pág. 144) .

Para $a > 0$, $p > 0$ temos que,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \exp \{ -ax \} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \quad (2.39)$$

Então escrevendo adequadamente (2.38) temos,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \int_0^{\infty} \lambda^{(n-1)/2} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} n \bar{Y} - n \theta^{-1} + \frac{1}{2} n R \right) \lambda \right\} d\lambda \quad (2.40)$$

Para resolver essa expressão definimos,

$$x = \lambda$$

$$p - 1 = \frac{n-1}{2}, \text{ i.e., } p = \frac{n+1}{2}$$

$$a = \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} n \bar{Y} - n \theta^{-1} + \frac{1}{2} n R \right)$$

Assim, fazendo uso de (2.39) em (2.40) obtemos,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2} \theta^{-2} n \bar{Y} - n \theta^{-1} + \frac{1}{2} n R \right]^{(n+1)/2}}$$

Portanto, a Densidade a posteriori marginal para θ é dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \left[\theta^{-2} n \bar{Y} - 2n \theta^{-1} + n R \right]^{-(n+1)/2} \quad (2.41)$$

onde $\theta > 0$.

Analogamente, integrando (2.37) em relação a θ , obtemos a densidade a posteriori marginal para λ , que é dada por,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\infty} \theta^{-3/2} \exp \{ -A(\theta, \lambda) \} d\theta \quad (2.42)$$

Para resolver a integral em (2.42) usamos o método de Laplace com

$$f(\theta) = \theta^{-3/2} \quad \text{e} \quad h_{\lambda}(\theta) = \frac{1}{2} \lambda \theta^{-2} \bar{Y} - \lambda \theta^{-1} + \frac{1}{2} \lambda R, \text{ (ver A.1.1 no apêndice A1).}$$

Assim, obtemos a Densidade a posteriori marginal para λ aproximada pelo método de Laplace,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{(n-1)/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \frac{1}{(\lambda \bar{Y} - 3)^{1/2}} \bar{Y}^{-3/2} \exp\left\{-n\left(\frac{1}{2}\lambda R - \frac{1}{2}\lambda \bar{Y}^{-1}\right)\right\},$$

isto é,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{(n-2)/2} \exp\left\{-n\left(\frac{1}{2}\lambda R - \frac{1}{2}\lambda \bar{Y}^{-1}\right)\right\} \quad (2.43)$$

onde $\lambda > 0$.

Considerando λ conhecido, em (2.34) a Densidade a priori não-informativa de Jeffreys para θ é dada por,

$$\pi(\theta) \propto \theta^{-3/2} \quad (2.44)$$

onde $\theta > 0$.

A função de verossimilhança para θ , obtida a partir de (2.7) é dada por,

$$L(\theta) \propto \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\lambda\theta^{-2} n\bar{Y} - n\lambda\theta^{-1}\right)\right\} \quad (2.45)$$

onde $\theta > 0$.

A densidade a posteriori para θ é dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \pi(\theta) L(\theta) \quad (2.46)$$

Substituindo (2.44) e (2.45) em (2.46) obtemos a Densidade a posteriori para θ dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\lambda\theta^{-2} n\bar{Y} - n\lambda\theta^{-1}\right)\right\} \quad (2.47)$$

onde $\theta > 0$ e λ conhecido.

De forma genérica, a expressão (2.47) pode ser escrita como,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \propto \theta^{-3/2} \exp(-a\theta^{-2} + b\theta^{-1})$$

onde $\theta > 0$, $a > 0$ e $b > 0$.

INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS.

Frequentemente usamos a noção de **Highest posterior density (HPD)** para determinar um intervalo de credibilidade apropriado (ICR) (Box e Tiao, 1973; Zellner, 1981; Press, 1989). Assim construímos ICR para os parâmetros θ e λ em torno da moda a partir das densidades a posteriori dos parâmetros.

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA θ .

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para θ é dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \approx N \left[\hat{\theta}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\theta / \text{dados})$ é dada em (2.41), e $\hat{\theta}$ é a moda da posteriori para θ .

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para θ é dado por,

$$\hat{\theta} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1/2} < \theta < \hat{\theta} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1/2} \quad (2.48)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada (A3.2, Apêndice A3) e

$$\frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} = \frac{3}{2\theta^2} - \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{A''(\theta)A(\theta) - (A'(\theta))^2}{A^2(\theta)} \right).$$

onde,

$$A(\theta) = \theta^{-2} n \bar{Y} - 2n\theta^{-1} + nR,$$

$$A'(\theta) = -2n\bar{Y}\theta^{-3} + 2n\theta^{-2},$$

$$A''(\theta) = 6n\bar{Y}\theta^{-4} - 4n\theta^{-3}.$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA λ

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para λ é dada por,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \approx N \left[\hat{\lambda}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\lambda / \text{dados})$ é dada em (2.43), e $\hat{\lambda}$ é a moda da posteriori para λ .

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para λ é dado por,

$$\hat{\lambda} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1/2} < \lambda < \hat{\lambda} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1/2} \quad (2.49)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada, e

$$\frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} = - \left(\frac{n-2}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda^2} \right).$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA θ COM λ CONHECIDO.

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para θ com λ conhecido é dada por,

$$\pi(\theta / \text{dados}) \approx N \left[\hat{\theta}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\theta / \text{dados})$ é dada em (2.47) e $\hat{\theta}$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para θ é dado por,

$$\hat{\theta} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1/2} < \theta < \hat{\theta} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \right)^{-1/2} \quad (2.50)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada, e

$$\frac{\partial^2 \log \pi(\theta / \text{dados})}{\partial \theta^2} = \frac{3}{2\theta^2} - A^*(\theta), \text{ onde } A^*(\theta) = 3\lambda\theta^{-4} n\bar{Y} - 2n\lambda\theta^{-3}.$$

2.2. PARAMETRIZAÇÃO ($\mu = 1/\theta$, λ).

Como foi observado na parametrização utilizada na seção anterior, nem sempre existe uma densidade a priori própria. Portanto, consideramos a parametrização ($\mu = 1/\theta$, λ) que é conveniente para determinar uma priori própria.

2.2.1. UMA ANÁLISE CLÁSSICA.

Na maioria dos casos, é mais fácil trabalhar considerando o inverso da média (ver, Tweedie, 1957). Assim utilizando termos da f.d.p. (2.1) em função de θ e λ temos,

$$\frac{\lambda}{2\theta^2} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2}{y_i} = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{Y}} \right) + \frac{n\lambda(\bar{Y} - \theta)^2}{2\theta^2 \bar{Y}} \quad (2.51)$$

Se substituirmos (2.51) em (2.1) a f.d.p. pode ser escrita por,

$$\prod_{i=1}^n f(y_i; \theta, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{n/2} \prod_{i=1}^n y_i^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{Y}} \right) - \frac{n\lambda \bar{Y}}{2} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2 \right\} \quad (2.52)$$

Assim, como $\mu = 1/\theta$ e definindo $v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{Y}} \right)$ a expressão (2.52) é dada por,

$$\prod_{i=1}^n f(y_i; \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{n/2} \prod_{i=1}^n y_i^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} v - \frac{n\lambda \bar{Y}}{2} \left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2 \right\} \quad (2.53)$$

Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança é expressa por,

$$l(\mu, \lambda) = \frac{n}{2} \log \lambda - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \log y_i - \frac{\lambda}{2} v - \frac{n\lambda \bar{Y}}{2} \left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2 \quad (2.54)$$

Os EMV de μ e λ podem ser obtidos através das primeiras derivadas de $l(\mu, \lambda)$ com relação aos seus parâmetros e igualadas a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu, \lambda)}{\partial \mu} &= -n\lambda \bar{Y} \mu + n\lambda \\ \frac{\partial l(\mu, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{v}{2} - \frac{n\bar{Y}}{2} \left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

portanto,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{Y}} \quad e \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{v}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{Y}} \right) \text{ ou } \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{Y}} \right)}$$

As inferências para $\psi = (\mu, \lambda)'$ podem ser baseadas na aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\psi = (\hat{\mu}, \hat{\lambda})'$ considerando a matriz de informação observada ou a matriz de informação de Fisher $I(\xi)$ (ver por exemplo, Mood, Graybill e Boes (1974) ou Lawless (1982)), como foi visto na seção 2.1.1.

De (2.12) temos que a matriz de informação observada é dada por,

$$I_0 = \begin{bmatrix} \frac{n^2 \bar{Y}}{v} & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{2n} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

portanto,

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{v}{n^2 \bar{Y}} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{v^2} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

As variâncias aproximadas para $\hat{\mu}$ e $\hat{\lambda}$ são dadas por,

$$\hat{V}(\hat{\mu}) = vn^{-2} \bar{Y}^{-1} \quad (2.59)$$

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) = 2nv^{-2}$$

Analogamente de (2.19) a matriz de informação de Fisher é dada por,

$$I(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{n\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

portanto,

$$I^{-1}(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{n\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{n} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

e as variâncias aproximadas para $\hat{\mu}$ e $\hat{\lambda}$ são dadas por,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{\mu}) &= \mu n^{-1} \lambda^{-1} \\ \hat{V}(\hat{\lambda}) &= 2n^{-1} \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Similarmente à análise feita na seção 2.1.1. podemos construir os intervalos de confiança para os parâmetros μ e λ (A3.1, Apêndice A3).

2.2.2 UMA ANÁLISE BAYESIANA.

Para esta parametrização consideramos as seguintes densidades a priori: Conjugada natural, Jeffreys e imprópria.

2.2.2.1 DENSIDADE A PRIORI CONJUGADA NATURAL.

A Densidade a priori conjugada natural para μ e λ tem a forma,

$$\pi(\mu, \lambda) \propto \lambda^a \exp \left\{ -\frac{a}{b} \lambda (\mu - b)^2 - c\lambda \right\} \quad (2.63)$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Portanto, esta densidade a priori é conhecida como sendo o produto de uma distribuição normal truncada e uma distribuição gama.

Logo de (2.53) e (2.63) a Densidade a posteriori conjunta para μ e λ pode ser escrita por,

$$\pi(\mu, \lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{a+n/2} \exp \left\{ -n\bar{Y}\lambda \left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2 - v\lambda \right\} \quad (2.64)$$

onde $\mu > 0$ e $\lambda > 0$, e tem a mesma forma de (2.63) com parâmetros modificados. O desenvolvimento completo é encontrado em Banerjee e Bhattacharyya (1979).

Quando λ é conhecido, a Densidade a priori conjugada natural para μ é dada por,

$$\pi(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{(\mu - c)^2}{2d}\right\} \quad (2.65)$$

onde $\mu > 0$. Pode ser notado que esta expressão é uma distribuição normal truncada com média c e variância d . A Densidade a posteriori marginal para μ tem a mesma forma e admite estimativas baseadas na posteriori da distribuição normal, ou seja,

$$\pi(\mu / \text{dados}) \propto \exp\left\{-\frac{n}{Y}(\mu\bar{Y} - 1)^2\right\} \quad (2.66)$$

onde $\mu > 0$.

Quando μ é conhecido, a Densidade a priori conjugada natural para λ é dada por uma distribuição Gama, e a posteriori tem a mesma forma.

2.2.2.2 DENSIDADE A PRIORI DE JEFFREYS.

Com a parametrização (μ, λ) obtemos a densidade a priori de Jeffreys. A partir da matriz de informação de Fisher (2.60) temos,

$$\det I(\psi) = \begin{vmatrix} \frac{n\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{vmatrix} = \frac{n^2}{2\mu\lambda} \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) em (2.32) temos que a Densidade a priori de Jeffreys para μ e λ é dada por,

$$\pi(\mu, \lambda) \propto \frac{n}{\sqrt{\mu\lambda}} \quad (2.68)$$

onde $\mu > 0$ e $\lambda > 0$.

2.2.2.3 DENSIDADE A PRIORI IMPRÓPRIA.

Banerjee e Bhattacharyya (1979) consideram a priori imprópria localmente uniforme dada por,

$$\pi(\mu / \lambda) \propto \text{constante}, \pi(\lambda) \propto \lambda^{-1} \quad (2.69)$$

Então de (2.53) e (2.69) temos que a Densidade a posteriori conjunta para μ e λ é dada por,

$$\pi(\mu, \lambda / \text{dados}) \propto k \lambda^{n/2-1} \exp \left\{ -\frac{n\lambda}{2\bar{Y}} \left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}} (\mu\bar{Y} - 1)^2 \right] \right\} \quad (2.70)$$

com $\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - \frac{n}{\bar{Y}} \right]$, $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ e K é a constante normalizadora.

Um contorno de valor constante para $\pi(\mu, \lambda / \text{dados})$ pode ser determinado por, $\pi(\mu, \lambda / \text{dados}) = c$, $c > 0$.

Assim,

$$\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \log \lambda - \frac{n\lambda}{2\bar{Y}} \left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}} (\mu\bar{Y} - 1)^2 \right] = d, \text{ d é uma função de c.}$$

As modas de $\pi(\mu, \lambda / \text{dados})$ são dadas por,

$$\frac{\partial \log \pi(\mu, \lambda / \text{dados})}{\partial \mu} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \log \pi(\mu, \lambda / \text{dados})}{\partial \lambda} = 0,$$

portanto,

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\bar{Y}} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} = \frac{(n-2)\hat{\lambda}}{n} \quad (2.71)$$

Assim, $-\infty < d < d_0$, onde: $d_0 = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \log \bar{\lambda} - \frac{n\bar{\lambda}}{2\bar{Y}} \left[1 + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{Y}} (\mu\bar{Y} - 1)^2 \right]$. Substituindo $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ temos,

$$d_0 = \left(\frac{n-2}{2} \right) \left[\log \frac{(n-2)\hat{\lambda}}{n} - 1 \right].$$

Quando n é grande, a distribuição de $-2 \log \frac{\pi(\mu, \lambda / \text{dados})}{\pi(\bar{\mu}, \bar{\lambda} / \text{dados})}$, onde $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ são as modas de $\pi(\mu, \lambda / \text{dados})$, é aproximadamente Qui-quadrado com dois graus de liberdade. Baseado nesta distribuição, o contorno contendo aproximadamente a probabilidade a posteriori $(1 - \gamma)$ é o conjunto de pontos dados por,

$$(n-2) \log \lambda - \frac{n\lambda}{\bar{Y}} \left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}} (\mu\bar{Y} - 1)^2 \right] = 2d_0 - \chi_{2, \gamma}^2 \quad (2.72)$$

onde $\chi^2_{2,\gamma}$ é a distribuição Qui-quadrado com dois graus de liberdade e γ é o nível de significância.

Banerjee e Bhattacharyya obtêm outras densidades a posteriori marginais para μ e λ .

Integrando (2.70) em relação a λ obtemos a densidade a posteriori marginal para μ dada por,

$$\pi(\mu / \text{dados}) = \int_0^\infty k \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{n\lambda}{2\hat{\lambda}}\left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}}(\mu\bar{Y}-1)^2\right]\right\} d\lambda \quad (2.73)$$

Para resolver esta integral fazemos,

$p-1 = \frac{n}{2}-1$, $a = \frac{n}{2\hat{\lambda}}\left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}}(\mu\bar{Y}-1)^2\right]$ em (2.39), e portanto, a Densidade a posteriori marginal para μ é dada por,

$$\pi(\mu / \text{dados}) = k \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2\hat{\lambda}}\right)^{-n/2} \left[1 + \frac{\hat{\lambda}}{\bar{Y}}\left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}}\right)^2\right]^{-n/2} \quad (2.74)$$

onde $\mu > 0$ e $k = \frac{(\bar{Y}\hat{\lambda})^{1/2} (n/2\hat{\lambda})^{n/2}}{S_{n-1}(\zeta) B\left[\frac{(n-1)}{2}, \frac{1}{2}\right] \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

com $S_{n-1}(\zeta)$ sendo a F.D.A da distribuição t de student com $(n-1)$ graus de liberdade, e

$$\zeta = \left[\frac{(n-1)\hat{\lambda}}{\bar{Y}}\right]^{1/2}$$

$B(\dots)$ e $\Gamma(\dots)$ são as funções beta e gama respectivamente.

A densidade em (2.74) é uma distribuição t de Student truncada à esquerda com $(n-1)$ graus de liberdade, com parâmetro de locação $1/\bar{Y}$, parâmetro de escala $[\bar{Y}\hat{\lambda}]^{1/2}$ e truncada em zero, com $v = (n-1)$.

Integrando (2.70) em relação a μ , obtemos a Densidade a posteriori marginal para λ dada por,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) = \frac{\Phi([n\lambda/\bar{Y}]^{1/2})}{S_{n-1}(\zeta)} \frac{(n\lambda/2\hat{\lambda})^{(n-1)/2}}{\lambda \Gamma((n-1)/2)} \exp\left(-\frac{n\lambda}{2\hat{\lambda}}\right) \quad (2.75)$$

onde $\lambda > 0$ e Φ é a F.D.A da distribuição normal.

A densidade em (2.75) é uma distribuição gama multiplicada por um fator envolvendo as F.D.As normal e t de Student, e pode ser definida como uma distribuição gama ponderada. O fator ponderado é dado por,

$$\frac{\Phi((n\lambda/\bar{Y})^{1/2})}{S_{n-1}((n-1)\hat{\lambda}/\bar{Y})^{1/2}}$$

o qual é aproximadamente 1 quando $n \rightarrow \infty$. Assim, em amostras grandes a densidade a posteriori marginal de λ tende a uma distribuição Qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade.

INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS.

Os intervalos de credibilidade para os parâmetros μ e λ podem ser determinados das densidades a posteriori marginais dadas em (2.74) e (2.75) respectivamente. Estes resultados foram encontrados por Banerjee e Bhattacharyya, 1979.

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA μ .

Em particular, o ICR para μ de (2.74) pode ser determinado notando que no intervalo $(0, 2/\bar{Y})$, a densidade é simétrica e sua moda é $1/\bar{Y}$.

Portanto, se $P[\mu \in (1/\bar{Y} - a, 1/\bar{Y} + a) / \text{dados}] = 1 - \gamma$, temos,

$$a = (\bar{Y}\hat{\lambda}_v)^{-1/2} S_{n-1}^{-1} \left([1 + (1 - \gamma) S_{n-1}(\zeta)] / 2 \right).$$

Dai, o ICR $(1 - \gamma)$ para μ é dado por,

$$\frac{1}{\bar{Y}} \pm (\bar{Y}\hat{\lambda}_v)^{-1/2} S_{n-1}^{-1} \left([1 + (1 - \gamma) S_{n-1}(\zeta)] / 2 \right) \quad (2.76)$$

com a condição $1/\bar{Y} \geq a$. Caso contrario, o ICR $(1 - \gamma)$ pode ser obtido considerando $P[\mu \in (0, 1/\bar{Y} + b)] = 1 - \gamma$. Assim novamente de (2.74) temos,

$$b = (\bar{Y}\hat{\lambda}_v)^{-1/2} S_{n-1}^{-1} (1 - \gamma S_{n-1}(\zeta)).$$

Logo, o ICR $(1 - \gamma)$ para μ é dado por,

$$\left(0, \frac{1}{\bar{Y}} + (\bar{Y}\hat{\lambda}_v)^{-1/2} S_{n-1}^{-1} (1 - \gamma S_{n-1}(\zeta)) \right) \quad (2.77)$$

Os intervalos de credibilidade obtidos em (2.76) e (2.77) são similares em forma aos intervalos de confiança obtidos na análise clássica (Chhikara e Folks, 1976). Isto é esperado já que usamos uma densidade a priori imprópria para obter a densidade a posteriori conjunta para μ e λ (2.70) e suas respectivas densidades marginais (2.74) e (2.75).

Uma outra forma de encontrar intervalos de credibilidade para μ é através da utilização da aproximação normal. Essa aproximação para a densidade a posteriori para μ é dada por,

$$\pi(\mu / \text{dados}) \approx N \left[\hat{\mu}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\mu / \text{dados})}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu = \hat{\mu}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\mu / \text{dados})$ é dada em (2.74), e $\hat{\mu}$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para μ é dado por,

$$\hat{\mu} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\mu / \text{dados})}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu = \hat{\mu}} \right)^{-1/2} < \mu < \hat{\mu} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\mu / \text{dados})}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu = \hat{\mu}} \right)^{-1/2} \quad (2.78)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada (ver Apêndice A3), e

$$\frac{\partial^2 \log \pi(\mu / \text{dados})}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{2} \left(\frac{A''(\mu)A(\mu) - (A'(\mu))^2}{A^2(\mu)} \right).$$

onde,

$$A(\mu) = 1 + \hat{\lambda} \bar{Y} \left(\mu - \frac{1}{\bar{Y}} \right)^2,$$

$$A'(\mu) = 2\mu \hat{\lambda} \bar{Y} - 2\hat{\lambda},$$

$$A''(\mu) = 2\hat{\lambda} \bar{Y}.$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA λ .

Observamos que a densidade (2.75) não é integrável em uma forma exata, portanto não é possível obter uma expressão explícita para o ICR. Uma solução numérica pode ser obtida para o ICR $(1 - \gamma)$, assim determinamos λ_I e λ_L , onde λ_I e λ_L são determinados tal que,

$$P[\lambda \in (\lambda_I, \lambda_L) / \text{dados}] = 1 - \gamma \text{ e } P(\lambda_I / \text{dados}) = P(\lambda_S / \text{dados}).$$

Essa densidade é unimodal e a solução é única. De fato, em amostras grandes, a densidade de λ é aproximadamente $(\hat{\lambda}/n)\chi_{n-1}^2$ e o ICR $(1 - \gamma)$ de λ é dado por,

$$\left[\left(\frac{\hat{\lambda}}{n} \right) \chi_{n-1, (\gamma/2)}^2, \left(\frac{\hat{\lambda}}{n} \right) \chi_{n-1, ((1-\gamma)/2)}^2 \right] \quad (2.79)$$

onde χ_{n-1}^2 , $\gamma/2$ e χ_{n-1}^2 , $(1-\gamma)/2$ são os pontos percentuais da distribuição Qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade. O ICR $(1 - \gamma)$ aproximado em (2.79) é o mesmo ao intervalo de confiança obtido na análise clássica (Chhikara e Folks, 1976).

CAPÍTULO 3

UMA ANÁLISE CLÁSSICA PARA O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO

3.1 O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO.

A derivação da distribuição Gaussiana Inversa pode ser expressa no contexto do aumento de fadiga do material. Seguindo as idéias desenvolvidas no modelo de falhas com a distribuição de Birnbaum-Saunders (1969), consideramos que um material falha quando acumula fadiga, ou ultrapassa um valor crítico $\omega > 0$. O tempo de falha (y) também chamado tempo de primeira passagem através de ω , tem distribuição Gaussiana Inversa $IG(\theta, \lambda)$ com $\theta = \omega\mu^{-1}$ e $\lambda = \omega^2\delta^{-2}$ (ver, Cox e Miller, 1965).

Para uma relação estocástica entre y e a intensidade do estresse x , notamos que o parâmetro μ é o mais óbvio candidato para ter uma relação direta com x porque mede o aumento da fadiga média por unidade de tempo. Uma forma linear $\mu = \alpha' + \beta'x$ com a restrição natural $\beta > 0$, é uma escolha simples desta relação. De outro lado, as quantidades δ e ω correspondem à variabilidade interna do material e o dano crítico que identifica a falha. É razoável supor que essas constantes não sejam relacionadas com x . Referindo à (2.1) e absorvendo ω através dos parâmetros α e β , temos a estrutura da regressão linear inversa,

$$\theta^{-1} = \alpha + \beta x, \tag{3.1}$$

onde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $x > 0$.

As restrições positivas em (3.1) são devidas ao fato que (2.1) é definida para $\theta > 0$.

3.2 O EXPERIMENTO EM TESTES ACELERADOS COM A RELAÇÃO PARÂMETRO – ESTRESSE.

Consideramos inicialmente dados sem censuras (dados completos) e k níveis de uma variável estresse. Colocamos n_i unidades em teste sob condições aceleradas em cada um desses níveis aleatorizados de estresse x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Assim, temos as observações (x_i, y_{ij}) , $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = 1, 2, \dots, n_i$, onde y_{ij} denota o tempo de vida da j -ésima observação correspondente a uma variável estresse x_i . As v.a's $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$ são independentes com distribuição $IG(\theta_i, \lambda)$ com θ_i dado em (3.1). O experimento pode ser esquematizado na seguinte tabela:

TABELA 3.1**ESQUEMA DO EXPERIMENTO EM TESTES ACELERADOS**

Níveis(k)	Estresses(x)	Tempos de Vida(y)
1	x_1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}$
2	x_2	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}$
.	.	...
.	.	...
.	.	...
k	x_k	$y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_k}$

onde $n = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número total de observações.

3.3 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.

Seja $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$ uma a.a. de tamanho n_i de uma distribuição Gaussiana Inversa (2.1) com parâmetros θ_i e λ correspondente a um nível de estresse X_i de um modelo de regressão linear inverso (3.1), $i = 1, 2, \dots, k$. Considerando os dados de k níveis distintos de estresse tomados aleatoriamente, a função de verossimilhança para α, β e λ é dada por,

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \beta, \lambda) &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(2\pi \lambda^{-1} y_{ij}^3 \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda y_{ij}^{-1} [y_{ij}(\alpha + \beta x_i) - 1]^2 \right\} \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \lambda^{n/2} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-3/2} \right) \times \\
 &\times \exp \left\{ -\left(\frac{\lambda \alpha^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} + \lambda \alpha \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i + \frac{\lambda \beta^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - n \lambda \alpha - \lambda \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

O logaritmo da função de verossimilhança (3.2) é dada por,

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta, \lambda) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi + \frac{n}{2} \log \lambda - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log y_{ij} - \frac{\lambda \alpha^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \lambda \alpha \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i - \\
 &\quad - \frac{\lambda \beta^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 + n \lambda \alpha + \lambda \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} = \\
 &= c(\alpha, \beta, \lambda) - \left\{ \frac{\lambda \alpha^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} + \lambda \alpha \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i + \frac{\lambda \beta^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} \right\} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log y_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

a qual é definido sobre o espaço paramétrico com as seguintes restrições:

$$\Omega = \left\{ (\alpha, \beta, \lambda) / \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0, \lambda > 0 \right\}$$

A segunda forma de (3.3) mostra que temos uma família exponencial de distribuições com quatro estatísticas suficientes dadas por,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1}.$$

Seja $\psi = (\alpha, \beta, \lambda)'$ o vetor de estimativas e consideremos a maximização de $l(\psi)$ com respeito a ψ . As primeiras derivadas de $l(\psi)$ (3.3) em relação a α, β e λ são dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\psi)}{\partial \alpha} &= -\lambda \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \lambda \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i + n\lambda = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [1 - (\alpha + \beta x_i) y_{ij}] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\psi)}{\partial \beta} &= -\lambda \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i - \lambda \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i [1 - (\alpha + \beta x_i) y_{ij}] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\psi)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \alpha \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i - \frac{\beta^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 + n\alpha + \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} = \\ &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} [1 - (\alpha + \beta x_i) y_{ij}]^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

A seguir definimos as seguintes estatísticas básicas:

$$V_l = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^l, \quad l = 0, 1, 2.$$

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i$$

$$\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

$$R = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1}$$

(3.7)

Da equação (3.4) e (3.5) temos respectivamente,

$$\lambda(1 - \alpha V_0 - \beta V_1) = 0,$$

$$\lambda(\bar{X} - \alpha V_1 - \beta V_2) = 0,$$

Assim, como $\lambda > 0$ obtemos,

$$\begin{aligned} \alpha V_0 + \beta V_1 &= 1 \\ \alpha V_1 + \beta V_2 &= \bar{X} \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde as equações (3.8) são lineares nos parâmetros.

Para obtermos as estimativas dos parâmetros necessitamos utilizar as informações das equações anteriores, para isso pela equação (3.4), como $\lambda > 0$ temos,

$$n - \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i = 0,$$

portanto,

$$\alpha = \frac{n - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}} \quad (3.9)$$

e da equação (3.5), como $\lambda > 0$ temos,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 = 0,$$

portanto,

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i}, \quad (3.10)$$

Assim, a estimativa de β pode ser obtida igualando as expressões (3.9) e (3.10) da seguinte forma,

$$\frac{n - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i},$$

portanto,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i - n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i \right)^2}. \quad (3.11)$$

A estimativa de α é dada substituindo a expressão (3.11) em (3.10) ou (3.9), ou seja,

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i \right)^2}. \quad (3.12)$$

A estimativa de λ pode ser obtida diretamente da equação (3.6), ou seja,

$$\hat{\lambda}^{-1} = \hat{\alpha}^2 n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} + 2\hat{\alpha}\hat{\beta} n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i + \hat{\beta}^2 n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - 2\hat{\alpha} - 2\hat{\beta} n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i + n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{-1} \quad (3.13)$$

Logo, o vetor de estimativas $\hat{\psi}_L = (\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L, \hat{\lambda}_L)'$ é dado por (3.11), (3.12) e (3.13), que podem ser escritos em termos das estatísticas básicas (3.7). Definindo $D \equiv V_0 V_2 - V_1^2 > 0$ com probabilidade um (pela desigualdade de Cauchy-Schwarz) temos,

$$D \equiv V_0 V_2 - V_1^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \left[n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i \right]^2$$

$$\text{Isto é, } D = \frac{\left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i \right]^2 \right]}{n^2},$$

$$\text{e } D^{-1} = \frac{n^2}{\left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i \right]^2 \right]}.$$

Portanto, temos,

$$\hat{\alpha}_L = \frac{V_2 - \bar{X} V_1}{V_0 V_2 - V_1^2} = (V_2 - \bar{X} V_1) D^{-1} = \bar{Y}^{-1} (1 - V_1 \hat{\beta}_L) \quad (3.14)$$

$$\hat{\beta}_L = \frac{\bar{X} V_0 - V_1}{V_0 V_2 - V_1^2} = (\bar{X} V_0 - V_1) D^{-1} = -(nD)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_i - \bar{X})(y_{ij} - \bar{Y}) \quad (3.15)$$

$$\hat{\lambda}_L^{-1} = \hat{\alpha}_L^2 V_0 + 2\hat{\alpha}_L \hat{\beta}_L V_1 + \hat{\beta}_L^2 V_2 - 2\hat{\alpha}_L - 2\hat{\beta}_L \bar{X} + R,$$

De (3.8) e da equação anterior, escrevendo a expressão em forma adequada temos,

$$\hat{\lambda}_L^{-1} = R - \hat{\alpha}_L - \hat{\beta}_L \bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij}^{-1} - \hat{\alpha}_L - \hat{\beta}_L x_i) \quad (3.16)$$

Observamos que $\hat{\beta}_L$ envolve o termo da covariância usual no numerador mas o seu denominador é quadrático em y . Podemos chamar $\hat{\psi}_L = (\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L, \hat{\lambda}_L)$ como as raízes das equações de máxima verossimilhança (REMV).

Para a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) é necessário examinar se as REMV se encontram ou não no espaço paramétrico. Battacharyya e Fries (1981) estabelecem uma caracterização formal dos EMV $\hat{\psi}$ dados por,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{cases} (\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L) & \text{se } V_1 < \min(\bar{X} V_0, \bar{X}^{-1} V_2) \\ (0, \bar{X} V_2^{-1}) & \text{se } \bar{X}^{-1} V_2 \leq V_1 < \bar{X} V_0 \\ (V_0^{-1}, 0) & \text{se } \bar{X} V_0 \leq V_1 < \bar{X}^{-1} V_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

e $\hat{\lambda}^{-1} = R - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{X}$, onde $\hat{\alpha}_L$ e $\hat{\beta}_L$ são dados em (3.14) e (3.15).

3.4 INFERÊNCIAS SOBRE OS PARÂMETROS.

Como foi visto no capítulo 2, as inferências sobre os parâmetros são usualmente baseadas na distribuição normal limite dos EMV considerando a matriz de informação observada ou a matriz de informação de Fisher (ver por exemplo, Mood, Graybill e Boes, 1974; Lawless, 1982).

As segundas derivadas parciais com sinal negativo da função log-verossimilhança (3.3) com respeito à α , β , λ são dadas por,

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \alpha^2} = \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = n\lambda V_0 \quad (3.18)$$

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \beta^2} = \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 = n\lambda V_2 \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \lambda^2} = \frac{n}{2\lambda^2} \quad (3.20)$$

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i = n\lambda V_1 \quad (3.21)$$

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} + \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i - n = \alpha n V_0 + n\beta V_1 - n \quad (3.22)$$

$$-\frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \beta \partial \lambda} = \alpha \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i + \beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^2 - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_i = n\alpha V_1 + n\beta V_2 - n\bar{X} \quad (3.23)$$

Assim, a matriz de informação observada I_0 (de 2.12) é dada por,

$$I_0 = \begin{bmatrix} n\hat{\lambda}V_0 & n\hat{\lambda}V_1 & n\hat{\alpha}V_0 + n\hat{\beta}V_1 - n \\ n\hat{\lambda}V_1 & n\hat{\lambda}V_2 & n\hat{\alpha}V_1 + n\hat{\beta}V_2 - n\bar{X} \\ n\hat{\alpha}V_0 + n\hat{\beta}V_1 - n & n\hat{\alpha}V_1 + n\hat{\beta}V_2 - n\bar{X} & \frac{n}{2\hat{\lambda}^2} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Usando (3.8) a matriz de informação observada I_0 pode ser escrita na forma,

$$I_0 = \begin{bmatrix} n\hat{\lambda}V_0 & n\hat{\lambda}V_1 & 0 \\ n\hat{\lambda}V_1 & n\hat{\lambda}V_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2\hat{\lambda}^2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Para fazer inferências para $\psi = (\alpha, \beta, \lambda)'$, usamos o fato que para n grande,

$$\hat{\psi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})' \approx N\{(\alpha, \beta, \lambda)', I_0^{-1}\} \quad (3.26)$$

A estrutura bloco diagonal de (3.25) nos leva à,

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{V_2}{n\hat{\lambda}D} & -\frac{V_1}{n\hat{\lambda}D} & 0 \\ -\frac{V_1}{n\hat{\lambda}D} & \frac{V_0}{n\hat{\lambda}D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\hat{\lambda}^2}{n} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Assim as variâncias aproximadas para $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$ e $\hat{\lambda}^{-1}$ são dadas por,

$$\hat{V}(\hat{\alpha}) \approx (n\hat{\lambda}D)^{-1} V_2 \quad (3.28)$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) \approx (n\hat{\lambda}D)^{-1} V_0 \quad (3.29)$$

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) \approx 2n^{-1} \hat{\lambda}^2 \quad (3.30)$$

e para calcular $\hat{V}(\hat{\lambda}^{-1})$ usamos o método Delta (Miller, 1981). Assim,

$$\hat{\lambda} \approx N\{\lambda, \hat{V}(\hat{\lambda})\} \text{ ou } \hat{\lambda}^{-1} \approx N\{\lambda^{-1}, 2n^{-1} \hat{\lambda}^{-2}\}$$

Definindo $g(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\hat{\lambda}}$, temos $g(\hat{\lambda}) \approx N\{g(\lambda), \hat{V}(\hat{\lambda})(g'(\hat{\lambda}))^2\}$

Dai, $g'(\hat{\lambda}) = -\frac{1}{\hat{\lambda}^2}$, isto é, $\hat{\lambda}^{-1} \approx N\{\lambda^{-1}, 2n^{-1} \hat{\lambda}^{-2}\}$

Portanto,

$$\hat{V}(\hat{\lambda}^{-1}) \approx 2n^{-1} \hat{\lambda}^{-2} \quad (3.31)$$

A matriz de informação de Fisher (de (2.19)) é dada por,

$$I(\psi) = E \begin{bmatrix} n\lambda V_0 & n\lambda V_1 & 0 \\ n\lambda V_1 & n\lambda V_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

onde, $V_l = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} x_i^l$, $l = 0, 1, 2$ (3.7).

Como, $E(V_l) = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i^l E(y_{ij})$, onde $E(y_{ij}) = \theta_i = (\alpha + \beta x_i)^{-1}$,

temos $E(V_l) = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i^l (\alpha + \beta x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$.

Definindo, $W_l(\alpha, \beta) = E(v_l) = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i^l (\alpha + \beta x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$ e $E \equiv W_0 W_2 - W_1^2 > 0$, temos,

$$I(\psi) = \begin{bmatrix} n\lambda W_0(\alpha, \beta) & n\lambda W_1(\alpha, \beta) & 0 \\ n\lambda W_1(\alpha, \beta) & n\lambda W_2(\alpha, \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

De (3.33), $I^{-1}(\psi)$ é dada por,

$$I^{-1}(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{W_2(\alpha, \beta)}{n\lambda E} & -\frac{W_1(\alpha, \beta)}{n\lambda E} & 0 \\ -\frac{W_1(\alpha, \beta)}{n\lambda E} & \frac{W_0(\alpha, \beta)}{n\lambda E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda^2}{n} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e as variâncias aproximadas para $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$ e $\hat{\lambda}^{-1}$ são dadas por,

$$\hat{V}(\hat{\alpha}) \approx (n \lambda E)^{-1} W_2(\alpha, \beta) \quad (3.35)$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) \approx (n \lambda E)^{-1} W_0(\alpha, \beta) \quad (3.36)$$

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) \approx 2n^{-1} \lambda^2 \quad (3.37)$$

$$\hat{V}(\hat{\lambda}^{-1}) \approx 2n^{-1} \lambda^{-2} \quad (\text{pelo Método Delta}) \quad (3.38)$$

O inverso do tempo médio de falha $\theta^{-1} = \alpha + \beta x^*$, num nível de estresse especificado x^* , é estimado por, $\hat{\theta}^{-1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x^*$, cuja variância estimada aproximada é dada por,

$$\hat{V}(\hat{\theta}^{-1}) \approx (n \hat{\lambda})^{-1} (V_2 - 2x^* V_1 + x^{*2} V_0), \quad D \equiv V_0 V_2 - V_1^2 > 0 \quad (\text{pelo Método Delta})$$

Isto é verificado como segue: observar que,

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \approx N \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{V}(\hat{\alpha}) & \text{côv}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{côv}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \hat{V}(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \right\}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \approx N \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} (n \hat{\lambda} D)^{-1} V_2 & -(n \hat{\lambda} D)^{-1} V_1 \\ -(n \hat{\lambda} D)^{-1} V_1 & (n \hat{\lambda} D)^{-1} V_0 \end{bmatrix} \right\}$$

Definindo $g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \hat{\theta}^{-1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x^*$, temos

$$g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \approx N \left\{ g(\alpha, \beta); \left(\hat{V}(\hat{\alpha}) \left(\frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} \right)^2 + 2 \text{côv}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} \frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} + \hat{V}(\hat{\beta}) \left(\frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} \right)^2 \right) \right\}.$$

Como, $\frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} = 1$, $\frac{\partial g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = x^*$, então,

$$\hat{\theta}^{-1} \approx N \left\{ g(\alpha, \beta); \left(\frac{V_2}{n \hat{\lambda} D} + 2 \left(-\frac{V_1}{n \hat{\lambda} D} \right) x^* + \frac{V_0}{n \hat{\lambda} D} (x^*)^2 \right) \right\}$$

isto é,

$$\hat{\theta}^{-1} \approx N \left\{ g(\alpha, \beta); \left[(n\hat{\lambda}D)^{-1} (V_2 - 2V_1x^* + V_0x^{*2}) \right] \right\}$$

Portanto,

$$\hat{V}(\hat{\theta}^{-1}) \approx (n\hat{\lambda}D)^{-1} (V_2 - 2V_1x^* + V_0x^{*2}) \quad (3.39)$$

3.5 INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS.

Nosso interesse é construir intervalos de confiança para os parâmetros α , β , λ , e λ^{-1} . Para isso usamos a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$, e $\hat{\lambda}^{-1}$ a partir da matriz de informação observada (ou matriz de informação de Fisher) dado por,

$$\hat{\psi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})' \approx N \left\{ (\alpha, \beta, \lambda)'; I_0^{-1}(\psi) \right\}$$

$$(\text{ ou } \hat{\psi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})' \approx N \left\{ (\alpha, \beta, \lambda)'; I^{-1}(\psi) \right\})$$

onde, I_0^{-1} é a inversa da matriz de informação observada (e $I^{-1}(\psi)$ é a inversa da matriz de informação de Fisher).

Por exemplo, o IC 100(1- γ)% aproximado para α é dado por,

$$IC(\alpha) = \left[\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} \right] \quad (3.40)$$

De forma análoga encontramos os intervalos de confiança para β , λ e λ^{-1} . O procedimento é similar usando a matriz de informação de Fisher (ver A3.1, Apêndice A3).

CAPÍTULO 4

UMA ANÁLISE BAYESIANA PARA O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO

4.1 UMA ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO α , β e λ DESCONHECIDOS.

4.1.1 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA α , β e λ .

Da equação (3.2) e com a definição das estatísticas básicas dadas em (3.7), a função de verossimilhança para os parâmetros α, β e λ pode ser escrita por,

$$L(\alpha, \beta, \lambda) \propto \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (4.1)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\lambda > 0$, e $A(\alpha, \beta) = n\alpha^2 V_0 + 2n\alpha\beta V_1 + n\beta^2 V_2 - 2n\alpha - 2n\beta\bar{X} + nR$.

4.1.2 DENSIDADE A PRIORI PARA α , β e λ .

Uma densidade a priori não-informativa para os parâmetros pode ser obtida usando a regra de Jeffreys (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) dada a partir de,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda) = \pi(\alpha, \beta / \lambda) \pi_0(\lambda),$$

isto é,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda) \propto \{\det I(\alpha, \beta / \lambda)\}^{1/2} \pi_0(\lambda) \quad (4.2)$$

onde $I(\alpha, \beta / \lambda)$ é a matriz de informação de Fisher dado λ .

De (3.33) temos,

$$I(\alpha, \beta / \lambda) = \begin{bmatrix} n\lambda W_0(\alpha, \beta) & n\lambda W_1(\alpha, \beta) \\ n\lambda W_1(\alpha, \beta) & n\lambda W_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

com $W_l(\alpha, \beta) = n^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_i^l (\alpha + \beta x_i)^{-1} = n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^l (\alpha + \beta x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$, conforme vimos na seção 3.4.

Assim,

$$\det I(\alpha, \beta / \lambda) = n^2 \lambda^2 \{W_0(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\} \quad (4.4)$$

Para obtermos a densidade a priori, substituindo (4.4) em (4.2) temos,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda) \propto n\lambda \sqrt{W_0(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)} \pi_0(\lambda) \quad (4.5)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\lambda > 0$.

Assumindo $\pi_0(\lambda) \propto \lambda^{-1}$, com $\lambda > 0$, encontramos uma Densidade a priori não-informativa para α , β e λ dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda) \propto \{W_0(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \quad (4.6)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$, e $W_l(\alpha, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é definida em (4.3).

4.1.3 DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA α , β e λ .

Considerando a função de verossimilhança (4.1) e a densidade a priori não-informativa (4.6), a densidade a posteriori conjunta para α , β e λ é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda / \text{dados}) \propto \pi(\alpha, \beta, \lambda) L(\alpha, \beta, \lambda)$$

isto é,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (4.7)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$, e $W_l(\alpha, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é dada em (4.3) e $A(\alpha, \beta)$ é dada em (4.1).

4.1 Uma análise bayesiana assumindo α , β e λ conhecidos - pág. 44

Integrando (4.7) em relação a λ , obtemos a densidade a posteriori conjunta marginal para α e β , dada por,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \int_0^\infty \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} d\lambda \quad (4.8)$$

Para resolver (4.8) usamos alguns resultados de integrais conhecidas (ver, Box e Tiao, 1973, pag. 144), (ver (2.39)); e obtemos a Densidade a posteriori conjunta marginal para α e β dada por,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} A(\alpha, \beta)^{-(n/2+1)} \quad (4.9)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, com $A(\alpha, \beta)$ definidos em (4.1) e $W_i(\alpha, \beta)$ definidos em (4.3).

4.1.4 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAIS PARA α , β e λ .

Integrando (4.9) em relação a β , obtemos a densidade a posteriori marginal para α dada por,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} A(\alpha, \beta)^{-(n/2+1)} d\beta \quad (4.10)$$

Essa integral pode ser resolvida utilizando o método de Laplace (ver Apêndice A1), para isso reescrevendo (4.10) adequadamente temos,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} A(\alpha, \beta)^{-1} \exp\left\{-n\left(\frac{\log A(\alpha, \beta)}{2}\right)\right\} d\beta \quad (4.11)$$

e definimos,

$$f_\alpha(\beta) = \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} A(\alpha, \beta)^{-1}, \text{ e}$$

$$h_\alpha(\beta) = \frac{\log A(\alpha, \beta)}{2}.$$

Dai, obtemos a Densidade a posteriori marginal para α aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) - W_1^2(\alpha, \hat{\beta})\}^{1/2} \left[\alpha^2 D - 2\alpha(V_2 - \bar{X}V_1) - \bar{X}^2 + RV_2 \right]^{-(n+1)/2} \quad (4.12)$$

onde $\alpha > 0$, e $W_i(\alpha, \hat{\beta})$, $i = 0, 1, 2$ (4.3) com $\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \alpha V_1}{V_2}$.

Analogamente, integrando (4.9) em relação a α obtemos a Densidade a posteriori marginal para β aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \{W_0(\hat{\alpha}, \beta)W_2(\hat{\alpha}, \beta) - W_1^2(\hat{\alpha}, \beta)\}^{1/2} [\beta^2 D + 2\beta(V_1 - \bar{X}V_0) + RV_0 - 1]^{-(n+1)/2} \quad (4.13)$$

onde $\alpha > 0$, e $W_l(\hat{\alpha}, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ em (4.3) com $\hat{\alpha} = \frac{1 - \beta V_1}{V_0}$.

Integrando (4.7) em relação a α e β , obtemos a densidade a posteriori marginal para λ , dada por,

$$\pi(\lambda/\text{dados}) \propto \int_0^\infty \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}A(\alpha, \beta)\right\} d\alpha d\beta \quad (4.14)$$

Reescrevendo a integral em (4.14) temos,

$$\begin{aligned} \pi(\lambda/\text{dados}) &\propto \lambda^{n/2} \int_0^\infty \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \times \\ &\times \exp\left\{-n \frac{\lambda}{2} (\alpha^2 V_0 + 2\alpha\beta V_1 + \beta^2 V_2 - 2\alpha - 2\beta\bar{X} + R)\right\} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Usando o método de Laplace no caso multiparamétrico (ver Apêndice A1) para aproximar a integral (4.15), com,

$$f(\alpha, \beta) = \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2}$$

$$e \quad h(\alpha, \beta) = \frac{\lambda}{2} (\alpha^2 V_0 + 2\alpha\beta V_1 + \beta^2 V_2 - 2\alpha - 2\beta\bar{X} + R),$$

obtemos a Densidade a posteriori marginal para λ aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\lambda/\text{dados}) \propto \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{n\lambda}{2} \left[R - \frac{(V_2 - 2\bar{X}V_1 + \bar{X}^2 V_0)}{D}\right]\right\} \quad (4.16)$$

onde $\lambda > 0$.

4.1.5 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA O TEMPO MÉDIO DE FALHA θ_1 SOB O NÍVEL USUAL DE ESTRESSE x_1 .

Usualmente, as indústrias tem interesse em fazer inferências a respeito de $\theta_1 = (\alpha + \beta x_1)^{-1}$, onde x_1 é o nível usual de estresse. Considere a seguinte transformação de variáveis,

$$\theta_1 = (\alpha + \beta x_1)^{-1} \quad (4.17)$$

$$\alpha = \alpha$$

de (4.17) obtemos a seguinte relação, $\beta = \frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} = \beta(\theta_1)$.

Para encontrar $\pi(\theta_1/\text{dados})$ determinamos $\pi(\alpha, \theta_1/\text{dados})$ pois conhecemos $\pi(\alpha, \beta/\text{dados})$ dada em (4.9) (usando transformação de variáveis) e depois integramos em relação a α encontrando a densidade a posteriori marginal de θ_1 .

De (4.9) temos,

$$\pi(\alpha, \theta_1 / \text{dados}) \propto \pi(\alpha, \beta(\theta_1) / \text{dados}) \times |J| \quad (4.18)$$

com,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{x_1} & -\frac{1}{x_1 \theta_1^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1 \theta_1^2}.$$

Assim substituindo estes valores em (4.18) temos,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \theta_1 / \text{dados}) &\propto \{ W_0(\alpha, \beta(\theta_1)) W_2(\alpha, \beta(\theta_1)) - W_1^2(\alpha, \beta(\theta_1)) \}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ n\alpha^2 V_0 + 2n\alpha \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right) V_1 + n \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right)^2 V_2 - 2n\alpha - 2n \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right) \bar{X} + nR \right\}^{-(n/2+1)} \times \frac{1}{x_1 \theta_1^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Observar que,

$$\left\{ n\alpha^2 V_0 + 2n\alpha \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right) V_1 + n \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right)^2 V_2 - 2n\alpha - 2n \left(\frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} \right) \bar{X} + nR \right\} =$$

$$= n\alpha^2 V_0 + \frac{2n\alpha V_1}{\theta_1 x_1} - \frac{2n\alpha^2 V_1}{x_1} + \frac{nV_2}{\theta_1^2 x_1^2} - \frac{2n\alpha V_2}{\theta_1 x_1^2} + \frac{n\alpha^2 V_2}{x_1^2} - 2n\alpha - \frac{2n\bar{X}}{\theta_1 x_1} + \frac{2n\alpha\bar{X}}{x_1} + nR.$$

Podemos definir as seguintes relações,

$$a_1 \alpha^2 = \left(nV_0 - \frac{2nV_1}{x_1} + \frac{nV_2}{x_1^2} \right) \alpha^2, \text{ isto é, } a_1 = nV_0 - \frac{2nV_1}{x_1} + \frac{nV_2}{x_1^2};$$

$$a_2(\theta_1) \alpha = \left(\frac{2nV_1}{\theta_1 x_1} - \frac{2nV_2}{\theta_1 x_1^2} - 2n + \frac{2n\bar{X}}{x_1} \right) \alpha, \text{ isto é, } a_2(\theta_1) = \frac{2nV_1}{\theta_1 x_1} - \frac{2nV_2}{\theta_1 x_1^2} - 2n + \frac{2n\bar{X}}{x_1}; \text{ e}$$

$$a_3(\theta_1) = \frac{nV_2}{\theta_1^2 x_1^2} - \frac{2n\bar{X}}{\theta_1 x_1} + nR.$$

$$\text{Também, } W_l(\alpha, \theta_1) = n^{-1} \left\{ n_1 x_1^l \theta_1 + \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \left[\alpha \left(1 - \frac{x_i}{x_1} \right) + \frac{x_i}{\theta_1 x_1} \right]^{-1} \right\}, l = 0, 1, 2.$$

Substituindo estes valores em (4.19) obtemos a Densidade a posteriori conjunta para α e θ_1 dada por,

$$\pi(\alpha, \theta_1 / \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^2} \{ W_0(\alpha, \theta_1) W_2(\alpha, \theta_1) - W_1^2(\alpha, \theta_1) \}^{1/2} \{ a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1) \}^{-(n/2+1)} \quad (4.20)$$

onde $\alpha > 0$ e $\theta_1 > 0$.

De (4.20) podemos integrar em relação a α e encontrar a densidade a posteriori marginal para θ_1 dada por,

$$\pi(\theta_1 / \text{dados}) \propto$$

$$\propto \frac{1}{\theta_1^2} \int_0^\infty \{ W_0(\alpha, \theta_1) W_2(\alpha, \theta_1) - W_1^2(\alpha, \theta_1) \}^{1/2} \{ a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1) \}^{-(n/2+1)} d\alpha \quad (4.21)$$

Reescrevendo a integral em (4.21) temos,

$$\pi(\theta_1 / \text{dados}) \propto$$

$$\propto \frac{1}{\theta_1^2} \int_0^\infty \frac{ \{ W_0(\alpha, \theta_1) W_2(\alpha, \theta_1) - W_1^2(\alpha, \theta_1) \}^{1/2} }{ \{ a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1) \} } \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \{ a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1) \} \right\} d\alpha \quad (4.22)$$

Usando o método de Laplace (ver Apêndice A1) para aproximar a integral em (4.21) com,

$$f_{\theta_1}(\alpha) = \frac{\{W_0(\alpha, \theta_1) W_2(\alpha, \theta_1) - W_1^2(\alpha, \theta_1)\}^{1/2}}{\{a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1)\}},$$

$$h_{\theta_1}(\alpha) = \frac{1}{2} \log\{a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1)\},$$

obtemos a Densidade a posteriori marginal para θ_1 aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\theta_1/\text{dados}) \propto \theta_1^{-2} \{W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - W_1^2(\hat{\alpha}, \theta_1)\}^{1/2} \{4a_1 a_3(\theta_1) - a_2^2(\theta_1)\}^{-(n+1)/2} \quad (4.23)$$

onde $\theta_1 > 0$.

4.2 UMA ANÁLISE BAYESIANA ASSUMINDO λ CONHECIDO.

A função de verossimilhança para α e β com λ conhecido de (4.1) é dada por,

$$L(\alpha, \beta) \propto \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (4.24)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $A(\alpha, \beta)$ é dada em (4.1).

Considere uma priori não-informativa de Jeffreys para α e β de (4.6) dada por,

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \{W_0(\alpha, \beta) W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \quad (4.25)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $W_l(\alpha, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é dada em (4.3).

4.2.1 DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA α e β .

Considerando a função de verossimilhança (4.24) e a densidade a priori não-informativa de Jeffreys (4.25) para α e β , a densidade a posteriori conjunta para α e β é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \pi(\alpha, \beta) L(\alpha, \beta)$$

Portanto,

$$\pi(\alpha, \beta / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (4.26)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e λ é conhecido, e $W_l(\alpha, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é dada em (4.3) e $A(\alpha, \beta)$ é dada em (4.1).

4.2.2 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA α e β .

Integrando (4.26) em relação a β , obtemos a densidade a posteriori marginal para α dada por,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} d\beta \quad (4.27)$$

Reescrevendo a integral em (4.27), temos,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha / \text{dados}) &\propto \\ &\propto \int_0^\infty \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \exp\left\{-n\frac{\lambda}{2}(\alpha^2 V_0 + 2\alpha\beta V_1 + \beta^2 V_2 - 2\alpha - 2\beta\bar{X} + R)\right\} d\beta \end{aligned} \quad (4.28)$$

Usando a método de Laplace (ver Apêndice A1) com,

$$f_\alpha(\beta) = \{W_0(\alpha, \beta)W_2(\alpha, \beta) - W_1^2(\alpha, \beta)\}^{1/2} \text{ e}$$

$$h_\alpha(\beta) = \frac{\lambda}{2} (\alpha^2 V_0 + 2\alpha\beta V_1 + \beta^2 V_2 - 2\alpha - 2\beta\bar{X} + R),$$

obtemos a Densidade a posteriori marginal para α aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \hat{\beta}) W_2(\alpha, \hat{\beta}) - W_1^2(\alpha, \hat{\beta})\}^{1/2} \exp\left\{-n \frac{\lambda}{2V_2} (\alpha^2 D - 2\alpha(\bar{V}_2 - \bar{X}V_1) + R\bar{V}_2 - \bar{X}^2)\right\} \quad (4.29)$$

onde $\alpha > 0$, λ conhecido, e $W_l(\alpha, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é dada em (4.3) com $\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \alpha V_1}{V_2}$.

Analogamente, integrando (4.26) em relação a α , obtemos a Densidade a posteriori marginal para β aproximada pelo Método de Laplace dada por,

$$\pi(\beta / \text{dados}) \propto \{W_0(\hat{\alpha}, \beta) W_2(\hat{\alpha}, \beta) - W_1^2(\hat{\alpha}, \beta)\}^{1/2} \exp\left\{-n \frac{\lambda}{2V_0}(\beta^2 D + 2\beta(V_1 - \bar{X}V_0) + RV_0 - 1)\right\} \quad (4.30)$$

onde $\beta > 0$, λ conhecido, e $W_l(\hat{\alpha}, \beta)$, $l = 0, 1, 2$ é dada em (4.3) com $\hat{\alpha} = \frac{1 - \beta V_1}{V_0}$.

4.2.3 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA O TEMPO MÉDIO DE FALHA θ_1 SOB O NÍVEL USUAL DE ESTRESSE X_1 COM λ CONHECIDO.

De (4.26) e das transformações (4.17) e da relação encontrada $\beta = \frac{1}{\theta_1 x_1} - \frac{\alpha}{x_1} = \beta(\theta_1)$, determinamos $\pi(\theta_1 / \text{dados})$. Para isto calculamos $\pi(\alpha, \theta_1 / \text{dados})$ a partir de $\pi(\alpha, \beta / \text{dados})$ (usando transformações de variáveis) e integramos em relação a α , para encontrar a densidade a posteriori marginal para θ_1 . Analogamente ao desenvolvimento feito na seção 4.1.5 obtemos a Densidade a posteriori conjunta para α e θ_1 dada por,

$$\pi(\alpha, \theta_1 / \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^2} \{W_0(\alpha, \theta_1) W_2(\alpha, \theta_1) - W_1^2(\alpha, \theta_1)\}^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} [a_1 \alpha^2 + a_2(\theta_1) \alpha + a_3(\theta_1)]\right\} \quad (4.31)$$

onde $\alpha > 0$ e $\theta_1 > 0$.

A Densidade a posteriori marginal para θ_1 aproximada pelo Método de Laplace é dada por,

$$\pi(\theta_1 / \text{dados}) \propto \theta_1^{-2} \{W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - W_1^2(\hat{\alpha}, \theta_1)\}^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{8a_1} [4a_1 a_3(\theta_1) - a_2^2(\theta_1)]\right\} \quad (4.32)$$

onde $\theta_1 > 0$ e λ conhecido.

4.3 INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS.

Após ter obtido as densidades a posteriori para os parâmetros de interesse, é geralmente possível calcular a probabilidade de que o parâmetro se encontre numa determinada região em particular. Esta probabilidade mede o grau de credibilidade que o(s) parâmetro(s) pertença a esta região dado a amostra dos dados e a informação a priori. Frequentemente, é usada a noção de **Highest posterior density (HPD)** (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973) para determinar um **Intervalo de Credibilidade (ICR)** apropriado.

Construiremos intervalos de credibilidade para os parâmetros α , β , λ e θ_1 em torno das modas a partir das densidades a posteriori obtidas nas seções anteriores.

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA α .

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para α é dada por,

$$\alpha \sim N \left[\hat{\alpha} , \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi (\alpha / \text{dados})$ é dada em (4.12), e $\hat{\alpha}$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α é dado por,

$$\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} < \alpha < \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} \quad (4.33)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada (ver Apêndice A3), e

$$\frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^{*''}(\alpha) A^*(\alpha) - (A^{*'}(\alpha))^2}{A^*(\alpha)^2} \right\} - \left(\frac{n+1}{2} \right) \left\{ \frac{B^{*''}(\alpha) B^*(\alpha) - (B^{*'}(\alpha))^2}{B^*(\alpha)^2} \right\}.$$

onde,

$$A^*(\alpha) = \{W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) - W_1^2(\alpha, \hat{\beta})\},$$

$$A^{*'}(\alpha) = W_0'(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) + W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2'(\alpha, \hat{\beta}) - 2W_1(\alpha, \hat{\beta})W_1'(\alpha, \hat{\beta}),$$

$$A'''(\alpha) = W_0''(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) + 2W_0'(\alpha, \hat{\beta})W_2'(\alpha, \hat{\beta}) + W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2''(\alpha, \hat{\beta}) - \\ - 2[W_1'(\alpha, \hat{\beta})]^2 - 2W_1(\alpha, \hat{\beta})W_1''(\alpha, \hat{\beta}),$$

$$B^*(\alpha) = \{D\alpha^2 - 2(V_2 - \bar{X}V_1)\alpha + RV_2 - \bar{X}^2\},$$

$$B^{*'}(\alpha) = 2D\alpha - 2(V_2 - \bar{X}V_1),$$

$$B^{*''}(\alpha) = 2D.$$

Com $\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \alpha V_1}{V_2}$, temos $W_1(\alpha, \hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^1 \frac{V_2}{[\alpha V_2 + \bar{X} x_i - \alpha V_1 x_i]}$,

$$W_1'(\alpha, \hat{\beta}) = -n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^1 * \frac{V_2(V_2 - V_1 x_i)}{[(V_2 - V_1 x_i)\alpha + \bar{X} x_i]^2}, \text{ e}$$

$$W_1''(\alpha, \hat{\beta}) = 2n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^1 * \frac{V_2(V_2 - V_1 x_i)^2}{[(V_2 - V_1 x_i)\alpha + \bar{X} x_i]^3}.$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA β .

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para β é dado por,

$$\beta \approx N \left[\hat{\beta}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\beta / \text{dados})}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta = \hat{\beta}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\beta / \text{dados})$ é dado em (4.13), e $\hat{\beta}$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para β é dado por,

$$\hat{\beta} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\beta / \text{dados})}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta = \hat{\beta}} \right)^{-1/2} < \beta < \hat{\beta} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\beta / \text{dados})}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta = \hat{\beta}} \right)^{-1/2} \quad (4.34)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil da distribuição normal padronizada, e

$$\frac{\partial^2 \log \pi (\beta / \text{dados})}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^{***}(\beta) A^*(\beta) - (A^{**}(\beta))^2}{A^*(\beta)^2} \right\} - \left(\frac{n+1}{2} \right) \left\{ \frac{B^{***}(\beta) B^*(\beta) - (B^{**}(\beta))^2}{B^*(\beta)^2} \right\},$$

onde,

$$A^*(\beta) = \{ W_0(\hat{\alpha}, \beta) W_2(\hat{\alpha}, \beta) - W_1^2(\hat{\alpha}, \beta) \},$$

$$A^{**}(\beta) = W'_0(\hat{\alpha}, \beta) W_2(\hat{\alpha}, \beta) + W_0(\hat{\alpha}, \beta) W'_2(\hat{\alpha}, \beta) - 2W_1(\hat{\alpha}, \beta) W'_1(\hat{\alpha}, \beta),$$

$$A^{***}(\beta) = W''_0(\hat{\alpha}, \beta) W_2(\hat{\alpha}, \beta) + 2W'_0(\hat{\alpha}, \beta) W'_2(\hat{\alpha}, \beta) + W_0(\hat{\alpha}, \beta) W''_2(\hat{\alpha}, \beta) - \\ - 2[W'_1(\hat{\alpha}, \beta)]^2 - 2W_1(\hat{\alpha}, \beta) W''_1(\hat{\alpha}, \beta),$$

$$B^*(\beta) = \{ D\beta^2 + 2(V_1 - \bar{X}V_0)\beta + RV_0 - 1 \},$$

$$B^{**}(\beta) = 2D\beta + 2(V_1 - \bar{X}V_0),$$

$$B^{***}(\beta) = 2D.$$

Com $\hat{\alpha} = \frac{1 - \beta V_1}{V_0}$, temos $W_i(\hat{\alpha}, \beta) = n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^i \frac{V_0}{[(V_0 x_i - V_1)\beta + 1]}$,

$$W'_i(\hat{\alpha}, \beta) = -n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^i * \frac{V_0 (V_0 x_i - V_1)}{[(V_0 x_i - V_1)\beta + 1]^2}, e$$

$$W''_i(\hat{\alpha}, \beta) = 2n^{-1} \sum_{i=1}^k n_i x_i^i * \frac{V_0(V_0 x_i - V_1)^2}{[(V_0 x_i - V_1)\beta + 1]^3}.$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA λ .

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para λ é dada por,

$$\lambda \sim N \left[\hat{\lambda}, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi (\lambda / \text{dados})$ é dado em (4.16), e $\hat{\lambda}$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para λ é dado por,

$$\hat{\lambda} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1/2} < \lambda < \hat{\lambda} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} \right)^{-1/2} \quad (4.35)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil da distribuição normal padronizada, e

$$\frac{\partial^2 \log \pi(\lambda / \text{dados})}{\partial \lambda^2} = - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{1}{\lambda^2}.$$

Portanto,

$$\lambda \approx N \left[\hat{\lambda}, \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{1}{\hat{\lambda}^2} \right].$$

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA θ_1 .

Uma aproximação normal para a densidade a posteriori para θ_1 é dada por,

$$\theta_1 \approx N \left[\hat{\theta}_1, \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta_1 / \text{dados})}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} \right)^{-1} \right]$$

onde $\pi(\theta_1 / \text{dados})$ é dado em (4.23), e $\hat{\theta}_1$ é sua moda.

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para θ_1 é dado por,

$$\hat{\theta}_1 - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta_1 / \text{dados})}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} \right)^{-1/2} < \theta_1 < \hat{\theta}_1 + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\theta_1 / \text{dados})}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} \right)^{-1/2} \quad (4.36)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \pi(\theta_1 / \text{dados})}{\partial \theta_1^2} = & \frac{2}{\theta_1^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A'''(\theta_1) A''(\theta_1) - (A''(\theta_1))^2}{A^*(\theta_1)^2} \right\} - \\ & - \left(\frac{n+1}{2} \right) \left\{ \frac{B'''(\theta_1) B''(\theta_1) - (B''(\theta_1))^2}{B^*(\theta_1)^2} \right\}, \end{aligned}$$

onde,

$$A^*(\theta_1) = \{ W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - W_1^2(\hat{\alpha}, \theta_1) \},$$

$$A^{**}(\theta_1) = W'_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) + W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W'_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - 2 W_1(\hat{\alpha}, \theta_1) W'_1(\hat{\alpha}, \theta_1),$$

$$A^{***}(\theta_1) = W''_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) + 2 W'_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W'_2(\hat{\alpha}, \theta_1) + W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W''_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - \\ - 2 [W'_1(\hat{\alpha}, \theta_1)]^2 - 2 W_1(\hat{\alpha}, \theta_1) W''_1(\hat{\alpha}, \theta_1),$$

$$B^*(\theta_1) = \{ 4 a_1 a_3(\theta_1) - a_2^2(\theta_1) \},$$

$$B^{**}(\theta_1) = 4 (a'_1 a_3(\theta_1) + a_1 a'_3(\theta_1)) - 2 a_2(\theta_1) a'_2(\theta_1) = 4 a_1 a'_3(\theta_1) - 2 a_2(\theta_1) a'_2(\theta_1),$$

$$B^{***}(\theta_1) = 4 (a'_1 a'_3(\theta_1) + a_1 a''_3(\theta_1)) - 2 (a'_2(\theta_1) a'_2(\theta_1) + a_2(\theta_1) a''_2(\theta_1)), \\ = 4 a_1 a''_3(\theta_1) - 2 [a'_2(\theta_1)]^2 - 2 a_2(\theta_1) a''_2(\theta_1).$$

Com $\hat{\alpha} = -\frac{a_2(\theta_1)}{2a_1}$, temos $W(\hat{\alpha}, \theta_1) = n^{-1} n_1 x_1^l \theta_1 + n^{-1} \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \frac{1}{\left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a_2(\theta_1) + \frac{x_i}{\theta_1 x_1} \right]}$,

$$W'_1(\hat{\alpha}, \theta_1) = n^{-1} n_1 x_1^l \theta_1 + n^{-1} \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \frac{\left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a'_2(\theta_1) - \frac{x_i}{\theta_1^2 x_1} \right]}{\left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a_2(\theta_1) + \frac{x_i}{\theta_1 x_1} \right]}, \text{ e}$$

$$W''_1(\hat{\alpha}, \theta_1) = \frac{\partial(W'_1(\hat{\alpha}, \theta_1))}{\partial \theta_1^2} =$$

$$= -n^{-1} \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \frac{\left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a''_2(\theta_1) + \frac{2x_i}{\theta_1^3 x_1} \right] \left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a_2(\theta_1) + \frac{x_i}{\theta_1 x_1} \right] - \left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a'_2(\theta_1) - \frac{x_i}{\theta_1^2 x_1} \right]^2}{\left[\left(\frac{x_i}{2a_1 x_1} - \frac{1}{2a_1} \right) a_2(\theta_1) + \frac{x_i}{\theta_1 x_1} \right]^2}$$

Também observar que,

$$a'_1 = 0, \text{ e } a''_1 = 0;$$

$$a'_2(\theta_1) = \frac{\partial a_2(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{2nV_2}{\theta_1^2 x_1^2} - \frac{2nV_1}{\theta_1^2 x_1}, \text{ e } a''_2(\theta_1) = \frac{\partial(a'_2(\theta_1))}{\partial \theta_1} = \frac{4nV_1}{\theta_1^3 x_1} - \frac{4nV_2}{\theta_1^3 x_1^2};$$

$$a'_3(\theta_1) = \frac{2n\bar{X}}{\theta_1^2 x_1} - \frac{2nV_2}{\theta_1^3 x_1^2}, \text{ e } a''_3(\theta_1) = \frac{\partial(a'_3(\theta_1))}{\partial \theta_1} = \frac{6nV_2}{\theta_1^4 x_1^2} - \frac{4n\bar{X}}{\theta_1^3 x_1}.$$

INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA α , β e θ_1 COM λ CONHECIDO.

De (4.29), (4.30) e (4.32) um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α , β e θ_1 tem a forma análoga ao dado em (4.33), (4.34) e (4.35) respectivamente onde,

$$\frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^{*'''}(\alpha) A^*(\alpha) - (A^{*''}(\alpha))^2}{A^*(\alpha)^2} \right\} - \frac{n\lambda D}{V_2},$$

$$\frac{\partial^2 \log \pi (\beta / \text{dados})}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^{*'''}(\beta) A^*(\beta) - (A^{*''}(\beta))^2}{A^*(\beta)^2} \right\} - \frac{n\lambda D}{V_0} \quad e$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \pi (\theta_1 / \text{dados})}{\partial \theta_1^2} &= \frac{2}{\theta_1^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^{*'''}(\theta_1) A^*(\theta_1) - (A^{*''}(\theta_1))^2}{A^*(\theta_1)^2} \right\} - \frac{\lambda}{8 a_1} \{ 4 a_1 a_3''(\theta_1) - \\ &\quad - 2 [a_2'(\theta_1)]^2 - 2 a_2(\theta_1) a_2''(\theta_1) \}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

DENSIDADES PREDITIVAS

5.1 DENSIDADE PREDITIVA PARA UMA OBSERVAÇÃO FUTURA.

Para encontrar a densidade preditiva para uma observação futura, assumimos inicialmente os parâmetros α e β conhecidos e uma densidade a priori não-informativa para λ dada por,

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{-1} \quad (5.1)$$

onde $\lambda > 0$.

A função de verossimilhança para λ é dada por,

$$L(\lambda) \propto \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (5.2)$$

com $A(\alpha, \beta) = n(\alpha^2 V_0 + 2\alpha\beta V_1 + \beta^2 V_2 - 2\alpha - 2\beta\bar{X} + R)$, e α, β conhecidos.

A densidade a posteriori para λ é dada por,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) = c \pi(\lambda) L(\lambda) \quad (5.3)$$

onde c é a constante normalizadora.

Assim, substituindo (5.1) e (5.2) em (5.3) temos,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) = c \lambda^{-1} \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\}$$

$$= c \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (5.4)$$

onde $\lambda > 0$ e α, β são conhecidos.

Para determinar o valor de c em (5.4) temos,

$$c^{-1} = \int_0^{\infty} \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} d\lambda \quad (5.5)$$

Esta integral (5.5) tem forma conhecida (ver, Box e Tiao, 1973, pag. 144).

Assim,

$$c^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{A(\alpha, \beta)}{2}\right)^{n/2}}, \text{ isto é, } c = \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2}}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Portanto,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) = \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2}}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} \quad (5.6)$$

onde $\lambda > 0$ e $n = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número total de observações nos k níveis da variável estresse.

A densidade preditiva para uma observação futura $Y_{(n+1)i}$ é dada por,

$$\begin{aligned} f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados}) &= \int_0^{\infty} f^i(y_{(n+1)i} / \lambda) \pi(\lambda / \text{dados}) d\lambda \\ &= E_{\lambda / \text{dados}} \left\{ f^i(y_{(n+1)i} / \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Observar que $f^i(y_{(n+1)i} / \lambda)$ é dado por,

$$f^i(y_{(n+1)i} / \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{(2\pi y_{(n+1)i}^3)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2y_{(n+1)i}} [(\alpha + \beta x_i)y_{(n+1)i} - 1]^2\right\} \quad (5.8)$$

onde $y_{(n+1)i} > 0$ e $\lambda > 0$.

Substituindo (5.8) em (5.7) temos,

$$f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados}) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^{1/2}}{(2\pi y_{(n+1)i}^3)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2y_{(n+1)i}}[(\alpha + \beta x_i)y_{(n+1)i} - 1]^2\right\} \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \lambda^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} A(\alpha, \beta)\right\} d\lambda$$

Definindo $B = \frac{1}{y_{(n+1)i}} [(\alpha + \beta x_i)y_{(n+1)i} - 1]^2$, temos:

$$f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados}) = \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{2\pi} y_{(n+1)i}^{3/2}} \int_0^\infty \lambda^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(A(\alpha, \beta) + B)\right\} d\lambda$$

(5.9)

observar que a integral em (5.9) também pode ser resolvida com resultados conhecidos (ver Box e Tiao, 1973, pag.144).

Assim, a densidade preditiva para uma observação futura $Y_{(n+1)i}$ num nível de estresse i , é dada por,

$$\begin{aligned} f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados}) &= \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{2\pi} y_{(n+1)i}^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\left(\frac{A(\alpha, \beta) + B}{2}\right)^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) A(\alpha, \beta)^{n/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}) y_{(n+1)i}^{3/2} (A(\alpha, \beta) + B)^{(n+1)/2}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados}) = \frac{A(\alpha, \beta)^{n/2} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}) y_{(n+1)i}^{3/2} \left\{ A(\alpha, \beta) - 2(\alpha + \beta x_i) + (\alpha + \beta x_i)^2 y_{(n+1)i} + y_{(n+1)i}^{-1} \right\}^{(n+1)/2}}$$

(5.10)

pois,

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) + B &= A(\alpha, \beta) + \frac{1}{y_{(n+1)i}} [(\alpha + \beta x_i)y_{(n+1)i} - 1]^2 \\ &= A(\alpha, \beta) + \frac{1}{y_{(n+1)i}} [(\alpha + \beta x_i)^2 y_{(n+1)i}^2 - 2(\alpha + \beta x_i)y_{(n+1)i} + 1] \\ &= A(\alpha, \beta) + (\alpha + \beta x_i)^2 y_{(n+1)i} - 2(\alpha + \beta x_i) + \frac{1}{y_{(n+1)i}} \end{aligned}$$

onde $y_{(n+1)i} > 0$.

Observamos que n é conhecido (dos dados usados no teste acelerado), $A(\alpha, \beta)$ é conhecido, α e β são conhecidos e x_i é o nível fixo da variável estresse.

5.2 USO DA DENSIDADE PREDITIVA EM CONTROLE DE QUALIDADE.

Podemos usar a densidade preditiva $f^i(y_{(n+1)i} / \text{dados})$ para formular procedimentos em controle de qualidade em testes de vida. Usualmente, engenheiros de qualidade selecionam amostras aleatórias de cada lote de componentes manufaturados para verificar se o processo em linha está sob controle. Para minimizar o custo e o tempo do teste, eles consideram unidades em testes de vida com altos níveis de estresse X_i e um período fixo de tempo L_i .

Usando a densidade preditiva (5.10) com α e β conhecidos, e considerando uma probabilidade fixa $1 - \gamma$, podemos encontrar os valores requeridos de X_i e L_i para ter,

$$P^i(Y_{(n+1)i} > L_i / \text{dados}) = 1 - \gamma \quad (5.11)$$

De (5.10), temos,

$$P^i(y_{(n+1)i} > L_i / \text{dados}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) A(\alpha, \beta)^{n/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{L_i}^{\infty} \frac{dy_{(n+1)i}}{y_{(n+1)i}^{3/2} \left\{c_i + d_i y_{(n+1)i} + y_{(n+1)i}^{-1}\right\}^{(n+1)/2}} \quad (5.12)$$

onde $c_i = A(\alpha, \beta) - 2(\alpha + \beta x_i)$ e $d_i = (\alpha + \beta x_i)^2$.

De (5.11) e (5.12) obtemos,

$$\int_{L_i}^{\infty} \frac{dy_{(n+1)i}}{y_{(n+1)i}^{3/2} \left\{c_i + d_i y_{(n+1)i} + y_{(n+1)i}^{-1}\right\}^{(n+1)/2}} = \frac{(1 - \gamma) \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{A(\alpha, \beta)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (5.13)$$

De (5.13), podemos encontrar os valores requeridos de X_i e L_i para serem usados em testes de controle de qualidade, e consideramos o seguinte procedimento:

a) Colocamos m unidades em teste com um nível de estresse X_i e durante um período de tempo L_i . Definimos $p^i = P^i(Y_{(n+1)i} \leq L_i / \text{dados})$ e consideramos a hipótese $H_0: p^i \leq \gamma$ (a linha de produção está sob controle) contra $H_1: p^i > \gamma$ (a linha de produção está fora de controle).

b) Seja X o número de unidades que falham na amostra de tamanho m , isto é, as unidades tais que $Y \leq L_i$. Assumimos $X \sim b(m, p^i)$. Com m grande (digamos $m \geq 30$), temos $X \approx N\{mp^i, mp^i(1 - p^i)\}$.

5.2 - uso da densidade preditiva em controle de qualidade - pág. 61

c) Um critério para controle de qualidade pode ser baseado num teste de hipóteses usual (com m grande): a produção em linha está fora de controle se $Z \geq z_\gamma$, onde γ é o nível de significância,

$$Z = \frac{(X - m\gamma)}{\sqrt{m\gamma(1-\gamma)}} \approx N\{0, 1\}$$

e z_γ é tal que $P\{ Z \geq z_\gamma \} = \gamma$.

Observar que para encontrarmos os valores de X_i e L_i , devemos usar um método numérico (por exemplo, o método de Simpson, ver apêndice A2).

CAPÍTULO 6

PLANEJAMENTOS DE EXPERIMENTOS EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO

6.1 UMA ANÁLISE CLÁSSICA.

6.1.1 FORMULAÇÃO DO MODELO.

Considerar um teste de vida acelerado com dois fatores, o fator linha (A) com I níveis e o fator coluna (B) com J níveis. Em cada cela (i,j) , n itens são testados e seus tempos de falha y_{ijk} , $k = 1, 2, \dots, n$ são registrados. O experimento pode ser esquematizado na seguinte tabela:

TABELA 6.1

EXPERIMENTO FATORIAL COM DOIS FATORES

B	1	2		J	
A					
1	y_{11}	y_{12}	y_{1j}	y_{1J}	$y_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	y_{2j}	y_{2J}	$y_{2.}$
.					
.	y_{i1}	y_{i2}	y_{ij}	y_{iJ}	$y_{i.}$
.			y_{ij1}		
.			y_{ij2}		
.			$\vdots$		
.			y_{ijn}		
I	y_{I1}	y_{I2}	y_{IJ}	y_{IJ}	$y_{I.}$
	$y_{.1}$	$y_{.2}$	$y_{.j}$	$y_{.J}$	$y_{..}$

As observações são assumidas independentes com y_{ijk} distribuídas como $IG(\theta_{ij}, \sigma)$ com $\sigma = \lambda^{-1}$ com f.d.p. (2.1). Vamos considerar principalmente ao modelo aditivo ou de não-interação a qual assume que os tempos de primeira passagem do processo de Wiener correspondente para cada cela é a soma dos efeitos dos fatores. Como a média é inversamente proporcional para a passagem, a parametrização usual dos efeitos dos fatores sugere o modelo,

$$\theta_{ij}^{-1} = \mu + \alpha_i + \beta_j, \quad (6.1)$$

onde $\sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = 0$, e μ , α_i e β_j representam o efeito geral, o efeito linha e o efeito coluna respectivamente.

Para esta distribuição $IG(\theta_{ij}, \sigma)$ temos $\theta_{ij} > 0$ para todo (i, j) e $\sigma > 0$. Assim os parâmetros μ , $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I)$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_J)$, e σ estão no espaço paramétrico,

$$\Omega = \left\{ (\mu, \alpha', \beta', \sigma): \sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = 0, \mu + \alpha_i + \beta_j > 0 \forall i, j; \sigma > 0 \right\} \quad (6.2)$$

Definimos as seguintes estatísticas básicas,

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \sum_k y_{ijk} = n \bar{y}_{ij} \\ y_{i.} &= \sum_j y_{ij} = nJ \bar{y}_{i.} \\ y_{.j} &= \sum_i y_{ij} = nI \bar{y}_{.j} \\ y_{..} &= \sum_i \sum_j y_{ij} = nIJ \bar{y}_{..} \\ R^* &= \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^{-1} \\ D^* &= \text{diag}(\bar{y}_{11}, \bar{y}_{12}, \dots, \bar{y}_{IJ}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Usamos também algumas propriedades amostrais da distribuição Gaussiana Inversa (ver Tweedie, 1957) dadas por: as estatísticas $\bar{y}_{ij}$ e $\sum_k (y_{ijk}^{-1} - \bar{y}_{ij}^{-1})$ são independentes; a primeira é distribuída como $IG(\theta_{ij}, \sigma/n)$ e a segunda dividida por σ é distribuída como $\chi^2(n-1)$. Além disso,

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_{ij}^{-1}) &= \theta_{ij}^{-1} + \frac{\sigma}{n} \\ V(\bar{y}_{ij}^{-1}) &= \theta_{ij}^{-1} \frac{\sigma}{n} + 2 \left(\frac{\sigma}{n} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.1.2 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.

De (2.1) e (6.1) a função de verossimilhança para θ e λ é dada por,

$$\begin{aligned} L(\theta_{ij}, \sigma) &= \prod_i^I \prod_j^J \prod_k^n (2\pi\sigma y^3)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^{-1} y_{ijk}^{-1} (y_{ijk}\theta_{ij}^{-1} - 1)^2\right] = \\ &= (2\pi)^{-IJn/2} \sigma^{-IJn/2} \prod_i^I \prod_j^J \prod_k^n y_{ijk}^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk}^{-1} (y_{ijk}\theta_{ij}^{-1} - 1)^2\right\}. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por,

$$l(\theta_{ij}, \lambda) \propto -\frac{IJn}{2} \log \sigma - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk}^{-1} (y_{ijk}\theta_{ij}^{-1} - 1)^2,$$

com $\theta_{ij}^{-1} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ em (6.1).

Assim,

$$l(\mu, \alpha_i, \beta_j, \sigma) \propto -\frac{IJn}{2} \log \sigma - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk}^{-1} [y_{ijk}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - 1]^2 \quad (6.5)$$

onde $[y_{ijk}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - 1]^2 = y_{ijk}^2(\mu + \alpha_i + \beta_j)^2 - 2y_{ijk}(\mu + \alpha_i + \beta_j) + 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} l(\mu, \alpha_i, \beta_j, \sigma) &\propto -\frac{IJn}{2} \log \sigma - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \mu^2 \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} - \sigma^{-1} \mu \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i y_{ijk} - \sigma^{-1} \mu \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \beta_j y_{ijk} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i^2 y_{ijk} - \sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i \beta_j y_{ijk} - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \beta_j^2 y_{ijk} + \sigma^{-1} \mu IJn + \\ &\quad + \sigma^{-1} Jn \sum_i^I \alpha_i + \sigma^{-1} IJn \sum_j^J \beta_j - \frac{1}{2}\sigma^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk}^{-1} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Observar que temos uma família exponencial de distribuições com as estatísticas suficientes (D^*, R^*) de dimensão $(IJ + 1)$ onde o espaço paramétrico Ω é de dimensão $(I + J)$.

As primeiras derivadas de $l(\mu, \alpha_i, \beta_j, \sigma)$ (6.6) em relação a μ, α_i, β_j e σ e igualadas a zero, são dadas por,

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \mu \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \beta_j y_{ijk} - IJn = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} = \mu \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \beta_j y_{ijk} - Jn = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \mu \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \alpha_i y_{ijk} + \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n \beta_j y_{ijk} - In = 0 \quad (6.9)$$

e a primeira derivada com respeito a σ de (6.5) é dada por,

isto é,

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{IJn}{2} \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2} \sigma^{-2} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} [y_{ijk}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - 1]^2 = 0,$$

$$\hat{\sigma} = (IJn)^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} [y_{ijk}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - 1]^2 \quad (6.10)$$

Portanto, as equações de máxima verossimilhança para μ , α_i , β_j e σ de (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) podem ser escritas a partir de (6.3) como,

$$\hat{\mu} y_{..} + \sum_i^I \hat{\alpha}_i y_{i.} + \sum_j^J \hat{\beta}_j y_{.j} = IJn$$

$$\hat{\mu} y_{i.} + \hat{\alpha}_i y_{i.} + \sum_j^J \hat{\beta}_j y_{ij} = Jn, \quad 1 \leq i \leq I \quad (6.11a)$$

$$\hat{\mu} y_{.j} + \sum_i^I \hat{\alpha}_i y_{ij} + \hat{\beta}_j y_{.j} = In, \quad 1 \leq j \leq J$$

e para σ como,

$$\hat{\sigma} = (IJn)^{-1} \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} [\hat{\mu} y_{ijk} + \hat{\alpha}_i y_{ijk} + \hat{\beta}_j y_{ijk} - 1]^2 \quad (6.11b)$$

onde as equações em (6.11a) são lineares nos parâmetros.

Para resolver (6.11) podemos obter uma representação alternativa dessas equações e usar esses resultados para mostrar que a raiz é única e que maximiza a função de verossimilhança. Para isso usamos as condições $\sum_i^I \alpha_i = \sum_j^J \beta_j = 0$ para eliminar as últimas componentes de α e β , assim podemos definir os novos parâmetros como,

$$\Phi = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1})',$$

$$\psi = (\Phi', \sigma)' \quad (6.12)$$

Para qualquer (i, j) , podemos identificar o $(I+J-1)$ -vetor $\mathbf{x}_{ij}$ consistindo de -1 's, 0 's e 1 's tais que $\mu + \alpha_i + \beta_j = \Phi' \mathbf{x}_{ij}$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$; i.é.,

$$\mu + \alpha_i + \beta_j = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1}) (1, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)'.$$

Então,

$$\mathbf{x}_{ij} = (1, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)'$$

Portanto,

$$\mu + \alpha_i + \beta_j = \Phi' \mathbf{x}_{ij}.$$

Observar que, $\mathbf{x}_{IJ}$ tem seu primeiro elemento igual a 1 e todos os outros iguais a -1's, i.é.,

$$\mu + \alpha_I + \beta_J = \Phi' \mathbf{x}_{IJ},$$

com $\alpha_I = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{I-1}$, e $\beta_J = -\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{J-1}$. Então,

$$\mathbf{x}_{IJ} = (1, -1, -1, \dots, -1, -1, -1, \dots, -1)'$$

Dai,

$$\mathbf{x}_{11} = (1, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$$

$$\mathbf{x}_{12} = (1, 0, 1, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0)'$$

$\vdots$

$$\mathbf{x}_{ij} = (1, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)'$$

$\vdots$

$$\mathbf{x}_{IJ} = (1, -1, -1, \dots, -1, -1, -1, \dots, -1)'$$

Assim, definimos as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}$ de ordem $IJ \times (I+J-1)$ e $(I+J-1) \times (I+J-1)$ respetivamente como,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= (\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{IJ}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{X}' \mathbf{D}^* \mathbf{X} \end{aligned} \tag{6.13}$$

onde $\mathbf{D}^*$ é dado em (6.3). Logo, temos que,

$$\mathbf{X}' \mathbf{1} = IJ(1, 0, 0, \dots, 0)' = IJ\mathbf{e} = \delta \tag{6.14}$$

onde $\mathbf{e}' = (1, 0, 0, \dots, 0)$ é o vetor unitario.

De (6.6) temos,

$$\sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} (\mu + \alpha_i + \beta_j)^2 = n \sum_i^I \sum_j^J \bar{y}_{ij} (\mu + \alpha_i + \beta_j)^2 = n \sum_i^I \sum_j^J \bar{y}_{ij} (\Phi' \mathbf{x}_{ij})^2,$$

pois, $y_{ij} = \sum_k^n y_{ijk} = n \bar{y}_{ij}$ e $\mu + \alpha_i + \beta_j = \Phi' \mathbf{x}_{ij}$.

Então,

$$\sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} (\mu + \alpha_i + \beta_j)^2 = n \Phi' \mathbf{X}' \mathbf{D}^* \mathbf{X} \Phi = n \Phi' \mathbf{M} \Phi,$$

onde de (6.4) $\mathbf{M}$ é dado por,

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}' \mathbf{D}^* \mathbf{X} = (\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{IJ}) \begin{bmatrix} \bar{y}_{11} & & 0 \\ & \bar{y}_{12} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \bar{y}_{IJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{11} \\ \mathbf{x}'_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{IJ} \end{bmatrix}$$

assim,

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}'_{11} \bar{y}_{11} + \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}'_{12} \bar{y}_{12} + \dots + \mathbf{x}_{IJ} \mathbf{x}'_{IJ} \bar{y}_{IJ},$$

logo,

$$\mathbf{M} = \sum_i^I \sum_j^J \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}'_{ij} \bar{y}_{ij} = \mathbf{X}' \mathbf{D}^* \mathbf{X}.$$

Também,

$$\begin{aligned} \Phi' \mathbf{M} \Phi &= \Phi' \left[\sum_i^I \sum_j^J (\mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}'_{ij}) \bar{y}_{ij} \right] \Phi \\ &= \sum_i^I \sum_j^J (\Phi' \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}'_{ij} \Phi) \bar{y}_{ij} \\ &= \sum_i^I \sum_j^J (\Phi' \mathbf{x}_{ij})^2 \bar{y}_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n y_{ijk} (\mu + \alpha_i + \beta_j)^2 = n \Phi' \mathbf{M} \Phi.$$

Agora,

$$-2 \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n (\mu + \alpha_i + \beta_j) = -2n \sum_i^I \sum_j^J (\mu + \alpha_i + \beta_j) = -2n \left\{ IJ\mu + \sum_j^J \left(\sum_i^I \alpha_i \right) + \sum_i^I \left(\sum_j^J \beta_j \right) \right\},$$

com $\sum_i^I \alpha_i = \sum_j^J \beta_j = 0$. Então,

$$-2n \sum_i^I \sum_j^J (\mu + \alpha_i + \beta_j) = -2nIJ\mu,$$

isto é,

$$-2nIJ\mu = -2n\Phi'\delta,$$

com $\Phi = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1})'$ e $\delta = (IJ, 0, \dots, 0)'$.

Portanto,

$$-2 \sum_i^I \sum_j^J \sum_k^n (\mu + \alpha_i + \beta_j) = -2n\Phi'\delta.$$

Assim (6.6) pode ser escrita por,

$$l(\Phi, \sigma) = -\frac{1}{2} IJn \log \sigma - \frac{1}{2} \sigma^{-1} \{R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi\} \quad (6.15)$$

De (6.15) podemos obter os EMV que são dados por (os resultados da diferenciação de matrizes podem ser encontrados em Morrison (1967), pág. 68),

$$\frac{\partial l}{\partial \Phi} = \frac{n}{\sigma} [\delta - M\Phi] \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{IJn}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \{R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi\} \quad (6.17)$$

onde M é definida positiva pois a matriz diagonal D^* é positiva definida, logo os y'_{ij} são positivos. Assim os resultados padrões para o experimento com dois fatores exigem que o $\text{posto}(X') = \text{posto}(X'X) = I + J - 1$. Deste modo, somente o vetor ω satisfazendo $X\omega = 0$ é o vetor nulo. Consequentemente, para um $\omega \neq 0$ arbitrário, temos $\omega'M\omega = (X\omega)'D^*(X\omega) > 0$, isto é, M é positiva definida.

As soluções correspondentes das equações de verossimilhança de (6.16) e (6.17) são,

$$\hat{\Phi} = M^{-1}\delta \quad (6.18)$$

$$\hat{\sigma} = (IJn)^{-1} [R^* - n\delta'M^{-1}\delta].$$

A matriz de informação observada I_0 é dada por,

$$I_0 = -\frac{\partial^2 l}{\partial \psi \partial \psi'} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} \quad (6.19)$$

Assim as segundas derivadas parciais com sinal negativo da função log-verossimilhança (6.16) são dadas por,

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \Phi^2} = nM\sigma^{-1} \quad (6.20)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^3} [R^* - 2n\Phi' + n\Phi'M\Phi] - \frac{IJn}{2\sigma^2} \quad (6.21)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \Phi \partial \sigma} = \frac{n}{\sigma^2} [\delta - M\Phi] = -\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \Phi} \quad (6.22)$$

Calculando (6.20), (6.21) e (6.22) em $\hat{\Phi}$ e $\hat{\sigma}$ temos,

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \Phi^2} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} = nM\hat{\sigma}^{-1} \quad (6.23)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} = \frac{IJn}{2\hat{\sigma}^2} \quad (6.24)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \Phi \partial \sigma} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} = 0 = -\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \Phi} \Big|_{\psi = \hat{\psi}} \quad (6.25)$$

Assim, substituindo (6.23), (6.24) e (6.25) em (6.19) temos que a matriz de informação observada I_0 é dada como,

$$I_0 = n \begin{bmatrix} M\hat{\sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} IJ\hat{\sigma}^{-2} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Esta matriz é positiva definida se M for positiva definida e $\hat{\sigma} > 0$, como pode ser vista na expressão (6.13). Portanto, $\hat{\psi}$ maximiza a função de verossimilhança.

Para exigir que $\hat{\psi}$ seja o estimador de máxima verossimilhança precisamos mostrar que as raízes se encontram dentro do espaço paramétrico Ω , isto é $\theta_{ij}^{-1} = \hat{\Phi}'x_{ij} > 0$ para todo i, j . Estes resultados são válidos para o caso especial $I = J = 2$ (Fries, 1982), mas não é possível provar a generalização. No entanto, $\hat{\psi}$ fornece um estimador eficiente de máxima verossimilhança (Lehmann, 1980). Além disso, $\hat{\psi}$ é único e podemos dizer que quando n é grande, o EMV $\hat{\psi}$ converge para ψ com probabilidade 1.

As propriedades assintóticas ($n \rightarrow \infty$ com I e J fixos) de $\hat{\psi}$ são dadas no teorema 1.

TEOREMA 1. Os estimadores $\hat{\Phi}$ e $\hat{\sigma}$ são fortemente consistentes, e as distribuições limites de $n^{1/2}(\hat{\Phi} - \Phi)$ e $n^{1/2}(\hat{\sigma} - \sigma)$ são $N_{I+J-1}(0, \sigma\Gamma^{-1})$ e $N_1(0, 2\sigma^2(IJ)^{-1})$, respectivamente, onde

$$\Gamma = X' \Theta X, \quad \Theta = \text{diag}(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{IJ}). \quad (6.27)$$

Além disso, $\hat{\Phi}$ e $\hat{\sigma}$ são assintoticamente independentes (Fries e Bhattacharyya, 1983).

6.1.3 ESTIMADORES NÃO-VICIADOS VÍA MÍNIMOS QUADRADOS.

Ainda que na seção 6.2 encontramos expressões fechadas para os estimadores de máxima verossimilhança, uma análise de seus vícios e variâncias exatas são difíceis porque esses estimadores envolvem a inversa de uma matriz aleatória. Nesta seção apresentamos uma aproximação via mínimos quadrados baseados sobre uma redução inicial dos dados por suficiência, fornecendo assim estimadores não-viciados como também expressões exatas para suas variâncias e covariâncias ao contrário dos resultados assintóticos obtidos para $\hat{\Phi}$ e $\hat{\sigma}$.

Definimos $r_{ij} = \bar{y}_{ij}^{-1}$ como o inverso da média amostral em cada cela, os momentos resultantes são dados a partir de (6.4) i. é.,

$$E(r_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \frac{\sigma}{n} \quad (6.28)$$

$$V(r_{ij}) = (\mu + \alpha_i + \beta_j) \frac{\sigma}{n} + 2\left(\frac{\sigma}{n}\right)^2.$$

Escrevendo,

$$\mu^* = \mu + \frac{\sigma}{n},$$

$$\psi^* = (\mu^*, \alpha', \beta')',$$

com $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I)$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_J)$.

Temos o modelo linear dado por,

$$r = X\psi^* + \epsilon, \text{ com } E(\epsilon) = 0, \quad (6.29)$$

onde $r = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{IJ})'$.

Isto é similar ao modelo linear usual para um experimento com dois fatores exceto que os inversos da media amostral em cada cela são utilizadas, e as variâncias dos r'_{ij} são funções do vetor de parâmetros ψ^* . Também, os parâmetros originais μ e σ são confundidos através de μ^* .

Assim temos a seguinte reparametrização,

$$r_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \frac{\sigma}{n} + \epsilon_{ij}$$

$$= \mu^* + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij},$$

com $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$ e $\alpha_I = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{I-1}, \beta_J = -\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{J-1}$.

Isto é,

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ \vdots \\ r_{1J} \\ \dots \\ r_{21} \\ r_{22} \\ \vdots \\ r_{2J} \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{I1} \\ r_{I2} \\ \vdots \\ r_{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu^* \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{I-1} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{J-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \vdots \\ \epsilon_{1J} \\ \dots \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \vdots \\ \epsilon_{2J} \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{I1} \\ \epsilon_{I2} \\ \vdots \\ \epsilon_{IJ} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$r = X\psi^* + \epsilon.$$

Os resultados padrões para o experimento de dois fatores fornecem estimadores não viciados lineares numa forma simples dados por,

$$\bar{\mu}^* = \bar{r}_{..}, \bar{\alpha}_i = \bar{r}_{i.} - \bar{r}_{..}, \bar{\beta}_j = \bar{r}_{.j} \quad (6.30)$$

com

$$\bar{r}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j r_{ij}}{nIJ}, \bar{r}_{i.} = \frac{\sum_j r_{ij}}{nJ}, \bar{r}_{.j} = \frac{\sum_i r_{ij}}{nI}.$$

Além disso, os parâmetros σ e μ são estimados pelos estimadores não viciados de $\bar{\sigma}$ e $\bar{\mu}$ respetivamente,

dados por,

$$\hat{\sigma} = MR_E, \quad \hat{\mu} = \bar{r}_{..} - \left(\frac{\hat{\sigma}}{\bar{n}} \right) \quad (6.31)$$

O estimador de $\hat{\psi}^*$ é dada por, $\tilde{\psi}^* = (X'X)^{-1}X'r$, desde que $(X'X)'$ existe.

Sua variância é dada por,

$$V(\tilde{\psi}^*) = (X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2,$$

onde σ^2 é estimado por $\hat{\sigma}^2 = \frac{r'r - \tilde{\psi}^*X'r}{n-p}$.

Este método de estimação não fornece necessariamente estimadores positivos para as médias em cada cela θ_{ij} , como é requerido pela definição do espaço paramétrico da distribuição IG. No entanto, esses estimadores são altamente consistentes e assintoticamente normais. As distribuições limites são dadas no teorema 2.

TEOREMA 2. As distribuições limites de $n^{1/2}(\hat{\Phi} - \Phi)$ e $n^{1/2}(\hat{\sigma} - \sigma)$ são $N_{I+J-1}(0, \sigma\Gamma_1)$ e $N_1(0, 2\sigma^2(IJ)^{-1})$, respectivamente, onde

$$\Gamma_1 = V'\Theta^{-1}V, \quad V' = (X'X)'X \quad (6.32)$$

onde $\Theta = \text{diag}(\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{IJ})$.

Além disso, $\hat{\Phi}$ e $\hat{\sigma}$ são assintoticamente independentes (Fries e Bhattacharyya, 1983).

6.2 UMA ANÁLISE BAYESIANA.**6.2.1 DENSIDADE A PRIORI NÃO-INFORMATIVA PARA Φ E σ .**

Assumindo independência entre Φ e σ , consideremos uma densidade a priori não informativa conjunta (Box e Tiao, 1973) dada por,

$$\pi(\Phi, \sigma) \propto \sigma^{-1} \quad (6.33)$$

com $\Phi = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1})'$, onde $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \alpha_i < \infty$, $-\infty < \beta_j < \infty$ e $\sigma > 0$.

6.2.2 DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA Φ E σ .

A função de verossimilhança para Φ e σ é dada por,

$$L(\Phi, \sigma) \propto \sigma^{-\frac{1}{2} IJn} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^{-1} [R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi]\right\} \quad (6.34)$$

Considerando (6.33) e (6.34), a densidade a posteriori conjunta para Φ e σ é dada por,

$$\pi(\Phi, \sigma) \propto \sigma^{-(\frac{IJn}{2} + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^{-1} [R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi]\right\} \quad (6.35)$$

onde $\Phi = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1})'$, com $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \alpha_i < \infty$, $-\infty < \beta_j < \infty$ e $\sigma > 0$.

6.2.3 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA Φ .

A densidade a posteriori marginal conjunta para Φ de (6.36) é dada por,

$$\pi(\Phi / \text{dados}) \propto \int_0^\infty \sigma^{-(\frac{IJn}{2} + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^{-1} [R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi]\right\} d\sigma$$

Para resolver esta integral, usamos resultados conhecidos (ver, Box e Tiao, 1973, pág. 144). Portanto, a densidade a posteriori marginal para Φ é dada por,

$$\pi(\Phi / \text{dados}) \propto [R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi]^{-\frac{IJn}{2}} \quad (6.36)$$

onde $\Phi = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{I-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{J-1})'$, com $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \alpha_i < \infty$, $-\infty < \beta_j < \infty$.

6.2.4 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA σ .

A densidade a posteriori marginal para σ de (6.35) é dada por,

$$\pi(\sigma / \text{dados}) \propto \int_0^\infty \sigma^{-(\frac{IJn}{2}+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^{-1}[R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi]\right\} d\Phi$$

Para resolver esta integral, usamos o método de Laplace (caso multiparamétrico, Apêndice A1), com,

$$-nh(\Phi) = -\frac{1}{2}\sigma^{-1} [R^* - 2n\Phi'\delta + n\Phi'M\Phi], \text{ e } f(\Phi) = 1 \text{ (ver A1.1 no apêndice A1).}$$

Portanto,

$$\pi(\sigma / \text{dados}) \propto \sigma^{-(\frac{IJn+1}{2})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^{-1}[R^* - n\delta'M^{-1}\delta]\right\} \quad (6.37)$$

onde $\sigma > 0$.

6.2.5 INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS.

Para a construção de ICR para os parâmetros μ, α_i, β_j e σ fazemos uso das distribuições assintóticas normais para os estimadores obtidos. Assim para os EMV $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$ e $\hat{\sigma}$ usamos a aproximação normal dos EMV com matriz de variância-covariância assintótica dada pela inversa da matriz de informação observada (6.26). Da mesma forma, consideramos aproximações normais para as densidades a posteriori (ver A3.2 , Apêndice A3) de interesse.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

7.1 ANÁLISE DO MODELO GAUSSIANO INVERSO SEM VARIÁVEL ESTRESSE

7.1.1 PRIMEIRO EXEMPLO.

Na tabela 7.1, apresentamos um conjunto de dados introduzido por Achcar, Bolfarine e Rodrigues (1987) os quais foram simulados a partir de uma distribuição Gaussiana inversa com parâmetros $\theta = 1$ e $\lambda = 5$.

TABELA 7.1

DADOS GERADOS DE UMA IG(θ, λ) COM $\theta = 1$ e $\lambda = 5$ (n = 30)

0.26	0.41	0.22	0.69	0.53	0.66
0.56	0.52	0.80	1.00	1.03	0.81
0.79	0.87	0.95	0.97	0.79	0.83
0.83	1.29	1.11	1.43	1.23	1.81
1.73	1.67	1.63	1.23	2.36	2.10

7.1.2 SEGUNDO EXEMPLO.

A tabela 7.2 se refere a um conjunto de dados apresentados por Lieblin e Zelen (1956), que representa a resistência de encaixe de rolamentos dados em milhões de rotações até falhar para cada um dos 23 rolamentos usados no teste de vida.

TABELA 7.2

RESISTÊNCIA DE ENCAIXE DE ROLAMENTOS (milhões de rotações)

17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60
48.48	51.84	51.96	54.12	55.56	67.80
68.64	68.64	68.88	84.12	93.12	98.64
105.12	105.84	127.92	128.04	173.40	

Estes dados foram analisados previamente assumindo uma distribuição Weibull ou Log-normal.

ANÁLISE CLÁSSICA - PARAMETRIZAÇÃO (θ , λ).

Para os conjuntos de dados dos exemplos 1 e 2, temos os seguintes resultados:

	EXEMPLO 1	EXEMPLO 2
Dados	$n = 30$ $\bar{Y} = 1.037$ $R = 1.308817$	$n = 23$ $\bar{Y} = 72.224348$ $R = 0.018162$
EMV	$\hat{\theta} = 1.037$ $\hat{\lambda} = 2.902786$	$\hat{\theta} = 72.224348$ $\hat{\lambda} = 231.674094$
matrizes de informação observadas	$I_0 = \begin{bmatrix} 78.090813 & 0 \\ 0 & 1.780169 \end{bmatrix}$ $I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.012806 & 0 \\ 0 & 0.561744 \end{bmatrix}$	$I_0 = \begin{bmatrix} 0.014143 & 0 \\ 0 & 0.000214 \end{bmatrix}$ $I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 70.704259 & 0 \\ 0 & 4667.20747 \end{bmatrix}$

variâncias	$\hat{V}(\hat{\theta}) = 0.012806$	$\hat{V}(\hat{\theta}) = 70.704259$
estimadas	$\hat{V}(\hat{\lambda}) = 0.561744$	$\hat{V}(\hat{\lambda}) = 4667.20747$

resultados análogos foram encontrados usando a matriz de informação de Fisher

Um teste do ajuste do modelo foi feito separadamente para cada um dos exemplos, utilizando a estatística de Kolmogorov-Smirnov (seção 2.1.1). Os resultados encontrados foram,

EXEMPLO1.

TABELA 7.3
DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIA EMPÍRICA E OBSERVADA

i	F(x)	S(x)	i/n	(i - 1)/n
1	0.003547	0.016667	0.033333	0.000000
2	0.010098	0.050000	0.066667	0.033333
3	0.081497	0.083333	0.100000	0.066667
4	0.171926	0.116667	0.133333	0.100000
5	0.181033	0.150000	0.166667	0.133333
6	0.208849	0.183333	0.200000	0.166667
7	0.303808	0.216667	0.233333	0.200000
8	0.332095	0.250000	0.266667	0.233333
9	0.422854	0.283333	0.300000	0.266667
10	0.422854	0.316667	0.333333	0.300000
11	0.431536	0.350000	0.366667	0.333333
12	0.440134	0.383333	0.400000	0.366667
13	0.457076	0.416667	0.433333	0.400000
14	0.457076	0.450000	0.466667	0.433333
15	0.489892	0.483333	0.500000	0.466667
16	0.551043	0.516667	0.533333	0.500000
17	0.565375	0.550000	0.566667	0.533333
18	0.586157	0.583333	0.600000	0.566667
19	0.606086	0.616667	0.633333	0.600000

7.1 - análise do modelo Gaussiano Inverso sem variável estresse - pág. 78

20	0.655162	0.650000	0.666667	0.633333
21	0.718376	0.683333	0.700000	0.666667
22	0.718376	0.716667	0.733333	0.700000
23	0.745723	0.750000	0.766667	0.733333
24	0.799928	0.783333	0.800000	0.766667
25	0.858163	0.816667	0.833333	0.800000
26	0.867598	0.850000	0.866667	0.833333
27	0.880583	0.883333	0.900000	0.866667
28	0.895924	0.916667	0.933333	0.900000
29	0.936654	0.950000	0.966667	0.933333
30	0.959271	0.983333	1.000000	0.966667

As estatísticas de K-S obtidas (ver seção 2.1.1) foram ,

$$D_{obs}^{KS+} = 0.0566 \text{ e } D_{obs}^{KS-} = 0.1562, \text{ portanto}$$

$$D_{obs}^{KS} = 0.1562 \text{ e } \phi = 2.7992.$$

Assim, fixando $\gamma = 0.05$ temos, $D_{cri}^{KS} = 0.1660$, portanto $D_{obs}^{KS} < D_{cri}^{KS}$, indicando um bom ajuste do modelo Gaussiano inverso (ver gráfico 7.1).

GRÁFICO 7.1

EXEMPLO 2

TABELA 7.4
DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIA EMPÍRICA E OBSERVADA

i	F(x)	S(x)	i/n	(i - 1)/n
1	0.005554	0.021739	0.043478	0.000000
2	0.067433	0.065217	0.086957	0.043478
3	0.109737	0.108696	0.130435	0.086957
4	0.218549	0.152174	0.173913	0.130435
5	0.226795	0.195652	0.217391	0.173913
6	0.275159	0.239130	0.260870	0.217391
7	0.315318	0.282609	0.304348	0.260870
8	0.361589	0.326087	0.347826	0.304348
9	0.363222	0.369565	0.391304	0.347826
10	0.392322	0.413043	0.434783	0.391304
11	0.411371	0.456522	0.478261	0.434783
12	0.558458	0.500000	0.521739	0.478261
13	0.567462	0.543478	0.565217	0.521739
14	0.567462	0.586957	0.608696	0.565217
15	0.570008	0.630435	0.652174	0.608696
16	0.707857	0.673913	0.695652	0.652174
17	0.769183	0.717391	0.739130	0.695652
18	0.800562	0.760870	0.782609	0.739130
19	0.832180	0.804348	0.826087	0.782609
20	0.835377	0.847826	0.869565	0.826087
21	0.908999	0.891304	0.913043	0.869565
22	0.909293	0.934783	0.956522	0.913043
23	0.973155	0.978261	1.000000	0.956522

As estatísticas de K-S obtidas foram,

$$D_{obs}^{KS+} = 0.0822 \text{ e } D_{obs}^{KS-} = 0.0881, \text{ portanto}$$

$$D_{obs}^{KS} = 0.0822 \text{ e } \phi = 3.2073.$$

Assim, fixando $\gamma = 0.05$ temos, $D_{cri}^{KS} = 0.1851$, portanto $D_{obs}^{KS} < D_{cri}^{KS}$, indicando um bom ajuste do modelo Gaussiano inverso (ver gráfico 7.2).

GRÁFICO 7.2**GRÁFICO PROBABILÍSTICO - EMPÍRICO VS. OBSERVADO**

(exemplo 2)

ANÁLISE BAYESIANA – PARAMETRIZAÇÃO (θ, λ) .

Agora apresentamos uma análise Bayesiana para os 2 exemplos considerados:

EXEMPLO 1	
Densidades a Priori	Densidades a Posteriori
Priori de Jeffreys (θ e λ desconhecidos)	$\pi(\theta/\text{dados}) \propto \theta^{-1.5} (31.11 \theta^{-2} - 60 \theta^{-1} + 39.26451)^{-15.5}$, onde $\theta > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\theta} = 1.02$ (gráfico 7.3). $\pi(\lambda/\text{dados}) \propto \lambda^{14} \exp\{-5.167455 \lambda\}$, onde $\lambda > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\lambda} = 2.701$ (gráfico 7.4).
Priori de Jeffreys (com $\lambda = 2.701$)	$\pi(\theta/\text{dados}) \propto \theta^{-1.5} \exp\{-(42.014055 \theta^{-2} - 81.03 \theta^{-1})\}$, onde $\theta > 0$ e a sua moda é dada por $\hat{\theta} = 1.02$ (gráfico 7.5).

EXEMPLO 2	
Densidade a Priori	Densidade a Posteriori
Priori de Jeffreys (θ e λ desconhecidos)	$\pi(\theta/\text{dados}) \propto \theta^{-1.5} (1661.16 \theta^{-2} - 46 \theta^{-1} + 0.417726)^{-12}$, onde $\theta > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\theta} = 70.4$ (gráfico 7.6). $\pi(\lambda/\text{dados}) \propto \lambda^{10.5} \exp\{-0.049634 \lambda\}$, onde $\lambda > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\lambda} = 212.00$ (gráfico 7.7).
Priori de Jeffreys (com $\lambda = 212$)	$\pi(\theta/\text{dados}) \propto \theta^{-1.5} \exp\{-(176082.9604 \theta^{-2} - 4876.0 \theta^{-1})\}$, onde $\theta > 0$ e a sua moda é dada por $\hat{\theta} = 70.4$ (gráfico 7.8).

INTERVALOS DE CONFIANÇA E DE CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS

Nas tabelas 7.5 e 7.6 temos os intervalos aproximados com 95% de confiança e de credibilidade para os parâmetros θ e λ nos exemplos 1 e 2.

EXEMPLO 1

TABELA 7.5

Parâmetro	IC (I_0)	ICR
θ	(0.815207, 1.258793)	(0.810341, 1.229659)
λ	(1.433800, 4.371771)	(1.286156, 4.115844)

Da tabela 7.5, verificamos resultados similares quanto a θ considerando o método Clássico e o método Bayesiano com uma densidade a priori não-informativa. Entretanto, com respeito a λ observamos uma amplitude menor para o caso Bayesiano, indicando uma precisão melhor.

EXEMPLO 2**TABELA 7.6**

Parâmetro	IC (I_0)	ICR
θ	(55.743829, 88.704867)	(55.262984, 85.537016)
λ	(97.775306, 365.572883)	(83.770099, 340.229901)

Da tabela 7.6, verificamos resultados similares considerando o método Clássico e o método Bayesiano com uma densidade a priori não-informativa.

Nos gráficos 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8, temos as várias densidades a posteriori para os parâmetros do modelo.

GRÁFICO 7.3

GRÁFICO 7.4

GRÁFICO 7.5

GRÁFICO 7.6

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA THETA
(exemplo 2)

GRÁFICO 7.7

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA LAMBDA
(exemplo 2)

GRÁFICO 7.8

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA THETA COM LAMBDA CONHECIDO
(exemplo 2)

ANÁLISE CLÁSSICA - PARAMETRIZAÇÃO ($\mu = 1/\theta$, λ).

Agora, refazemos a análise estatística considerando a parametrização $\mu = 1/\theta$ e λ .

	EXEMPLO 1	EXEMPLO 2
Dados	$n = 30$ $\bar{Y} = 1.037$ $R = 1.308817$	$n = 23$ $\bar{Y} = 72.224348$ $R = 0.018162$
EMV	$\hat{\mu} = 0.96432$ $\hat{\lambda} = 2.902786$	$\hat{\mu} = 0.013846$ $\hat{\lambda} = 231.674094$

matrizes de
informação
observadas

$$I_0 = \begin{bmatrix} 90.30566 & 0 \\ 0 & 1.780169 \end{bmatrix}$$

$$I_0 = \begin{bmatrix} 384847.738255 & 0 \\ 0 & 0.000214 \end{bmatrix}$$

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.011074 & 0 \\ 0 & 0.561744 \end{bmatrix}$$

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5984e-006 & 0 \\ 0 & 4667.20747 \end{bmatrix}$$

variâncias $\hat{V}(\hat{\theta}) = 0.011074$ $\hat{V}(\hat{\theta}) = 2.5984e-006$ estimadas $\hat{V}(\hat{\lambda}) = 0.561744$ $\hat{V}(\hat{\lambda}) = 4667.20747$

resultados análogos foram encontrados usando a matriz de informação de Fisher

ANÁLISE BAYESIANA – PARAMETRIZAÇÃO ($\mu = 1/\theta$, λ).

Uma análise Bayesiana nesta parametrização é dada abaixo:

EXEMPLO 1	
Densidade a Priori	Densidade a Posteriori
Priori Não Informativa (μ e λ desconhecidos)	<p>$\pi(\mu, \lambda / \text{dados}) = k \lambda^{14} \exp\{-5.167449 \lambda [1 + 2.799215(1.037\mu - 1)^2]\}$ onde $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ e k é a constante normalizadora. As modas desta densidade são, $\hat{\mu} = 0.96432$ e $\hat{\lambda} = 2.709267$. (gráfico 7.9).</p> <p>$\pi(\mu / \text{dados}) = (2.1203) \Gamma(15) (5.167449)^{-15} [1 + 3.010189(\mu - 0.96432)^2]$ onde $\mu > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\mu} = 0.961$ (gráfico 7.10).</p> <p>$\pi(\lambda / \text{dados}) = \Phi([28.929605\lambda]^{1/2}) \frac{(5.167449\lambda)^{14.5}}{\lambda \Gamma(14.5)} \exp\{-5.167449\lambda\}$ onde $\lambda > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\lambda} = 2.601$ (gráfico 7.11).</p>

EXEMPLO 2	
Densidade a Priori	Densidade a Posteriori
Priori Não Informativa (μ e λ desconhecidos)	<p> $\pi(\mu, \lambda / \text{dados}) = k \lambda^{10.5} \exp\left\{-0.049639 \lambda \left[1 + 3.207701(72.224348\mu - 1)^2\right]\right\}$ onde $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ e k é a constante normalizadora. As modas desta densidade são, $\tilde{\mu} = 0.013846$ e $\tilde{\lambda} = 211.528521$ (gráfico 7.12). </p> <p> $\pi(\mu / \text{dados}) = k \Gamma(11.5)(0.049639)^{-11.5} \left[1 + 16732.5138(\mu - 0.013846)^2\right]$ onde $\mu > 0$ e k é valor próximo de zero. A sua moda é dada por $\hat{\mu} = 0.0141$. (gráfico 7.13). </p> <p> $\pi(\lambda / \text{dados}) = \Phi([0.318452\lambda]^{1/2}) \frac{(0.049639\lambda)^{11}}{\lambda \Gamma(11)} \exp\{-0.049639\lambda\}$ onde $\lambda > 0$. A sua moda é dada por $\hat{\lambda} = 201.2$ (gráfico 7.14). </p>

INTERVALOS DE CONFIANÇA E CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS

Nas tabelas 7.7 e 7.8 temos intervalos aproximados com 95% de confiança e credibilidade para μ e λ .

EXEMPLO 1

TABELA 7.7

Parâmetro	IC (I_0)	ICR
μ	(0.758072, 1.170569)	(0.835553, 1.093087)
λ	(1.433800, 4.371771)	(1.552707, 4.424067)

Utilizando a aproximação normal, o ICR de 95% (ver 2.78) para μ é dado por, (0.754741, 1.167259).

EXEMPLO 2**TABELA 7.8**

Parâmetro	IC (I_0)	ICR
μ	(0.010686, 0.017005)	(0.012119, 0.015573)
λ	(97.775306, 365.572883)	(161.638730, 460.550832)

Utilizando a aproximação normal, o ICR de 95% (ver 2.78) para μ é dado por, (0.010935, 0.017265).

Nos gráficos 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13 e 7.14 temos as várias densidades a posteriori obtidas para os 2 exemplos.

GRÁFICO 7.9

GRÁFICO 7.10

GRÁFICO 7.11

GRÁFICO 7.12

GRÁFICO 7.13

GRÁFICO 7.14

Concluimos, que os resultados Bayesianos são análogos aos resultados clássicos, quando usamos densidades a priori não-informativa, mas são de grande simplicidade, e pode ser uma grande vantagem quando utilizamos com dados. Além disso, poderíamos ter melhores inferências quando os pesquisadores tem opiniões a priori sobre os parâmetros, pois os resultados aproximados seriam utilizados da mesma forma.

7.2 ANÁLISE DO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO – ANÁLISE CLÁSSICA E BAYESIANA.

7.2.1 TERCEIRO EXEMPLO

A seguir apresentamos um conjunto de dados introduzidos por Nelson (1971). Este conjunto de dados é dado na tabela 7.9 e consiste dos tempos de falha de uma nova classe H de um material de isolamento em prova num teste de motores em temperaturas elevadas de 190, 220, 240, e 260 °C. O tempo para a primeira falha é dado para cada unidade testada. Para cada temperatura, 10 unidades foram colocadas em teste e periodicamente examinadas para falha de isolamento. O tempo de falha dada na tabela é o tempo medio entre o tempo de inspeção quando a primeira falha foi encontrada no motor e o tempo de inspeção previa.

7.2 análise do modelo de regressão linear inverso – análise clássica e bayesiana - pág. 92

O objetivo original do experimento é determinar se o tempo médio de falha numa temperatura, designada de 180 °C excede um tempo mínimo específico. Os dados a 260 °C foram tomados de um lote de isolamento diferente do lote usado nas outras temperaturas. Portanto, é importante investigar se os dados dos dois lotes foram consistentes. Nelson (1971), estabelece a inconsistência dos dados a 260 °C empregando técnicas gráficas e analíticas.

TABELA 7.9
TEMPOS DE FALHA EM UM TESTE DE VIDA ACELERADO
DE UMA NOVA CLASSE H DE ISOLAÇÃO EM MOTORES

Tempos de Falha (em horas)			
190 °C	220 °C	240 °C	260 °C
7228	1764	1175	600
7228	2436	1521	744
7228	2436	1521	744
8448	2436	1569	744
9167	2436	1617	912
9167	2436	1665	1128
9167	3108	1665	1320
9167	3108	1713	1464
10511	3108	1761	1608
10511	3108	1953	1896

Para nosso propósito, consideramos um modelo de regressão IG para esses dados excluindo a temperatura de 260 °C. A suposição de uma constante λ é válida desde que os materiais nos primeiros três níveis sejam conhecidas como tendo uma origem comum. Na ausência de um modelo que relaciona a vida media de falha (θ) e a temperatura (T), baseamos nosso modelo a partir das seguintes considerações:

- i) a regressão de $\bar{Y}_i^{-1}$ em T_i^3 leva a um valor $R_r^2 = 99.9\%$, onde R_r^2 mede o ajuste do modelo,
- ii) a variância amostral elevada a uma potência de $-\frac{1}{3}$ é aproximadamente linear em T_i^3 ,
- e
- iii) a transformação $T_i^3 - (180^3)$ é conveniente e produz EMV positivos. Sem uma translação de T_i^3 , a restrição $\alpha \geq 0$ imposta na definição de Ω não poderia ser verificada.

7.2 análise do modelo de regressão linear inverso – análise clássica e bayesiana - pág. 99

Com essas considerações, temos a distribuição do tempo de falha como uma densidade $IG(\theta, \lambda)$ com $\theta^{-1} = \alpha + \beta x$ onde $x = 10^{-8} [T^3 - 180^3]$.

Os dados a serem analisados foram transformados e são dados na tabela 7.10, onde a primeira coluna é denotada por $Y = \text{horas de falha}/1000$, e a segunda coluna denotada por $X = 10^{-8} [T^3 - 180^3]$.

TABELA 7.10
DADOS TRANSFORMADOS

obs.	Y	X
1	7.2280	0.0103
2	7.2280	0.0103
3	7.2280	0.0103
4	8.4480	0.0103
5	9.1670	0.0103
6	9.1670	0.0103
7	9.1670	0.0103
8	9.1670	0.0103
9	10.511	0.0103
10	10.511	0.0103
11	1.7640	0.0482
12	2.4360	0.0482
13	2.4360	0.0482
14	2.4360	0.0482
15	2.4360	0.0482
16	2.4360	0.0482
17	3.1080	0.0482
18	3.1080	0.0482
19	3.1080	0.0482
20	3.1080	0.0482
21	1.1750	0.0799
22	1.1750	0.0799
23	1.5210	0.0799
24	1.5690	0.0799
25	1.6170	0.0799
26	1.6650	0.0799

continuação da tabela 7.10

obs.	Y	X
27	1.6650	0.0799
28	1.7130	0.0799
29	1.7610	0.0799
30	1.9530	0.0799
31	0.6000	0.1174
32	0.7440	0.1174
33	0.7440	0.1174
34	0.7440	0.1174
35	0.9120	0.1174
36	1.1228	0.1174
37	1.3200	0.1174
38	1.4640	0.1174
39	1.6080	0.1174
40	1.8960	0.1174

ANÁLISE CLASSICA.

Da tabela 7.10 e excluindo os dados a 260 °C, temos $n = 30$ e as seguintes estatísticas básicas (usando a matriz de informação observada) dadas por,

$$V_0 = 4.333733$$

$$V_1 = 0.114535$$

$$V_2 = 0.005715$$

$$\bar{X} = 0.046117$$

$$R = 0.384891$$

$$D = 0.011648$$

e as seguintes estatísticas básicas (usando a matriz de informação de Fisher) dadas por,

$$W_0 = 4.356187$$

$$W_1 = 0.114421$$

$$W_2 = 0.005715$$

$$\bar{X} = 0.046117$$

$$R = 0.384891$$

$$E = 0.0011805.$$

Assim, a matriz de informação observada de (3.25) é,

$$I_0 = \begin{bmatrix} 13088.583972 & 345.914947 & 0 \\ 345.914947 & 17.259857 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00148 \end{bmatrix},$$

e a inversa da matriz de informação observada I_0^{-1} de (3.27) é,

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000162 & -0.003256 & 0 \\ -0.003256 & 0.123187 & 0 \\ 0 & 0 & 675.658415 \end{bmatrix}.$$

A matriz de informação de Fisher $I(\psi)$ de (3.33) é,

$$I(\psi) = \begin{bmatrix} 13156.398635 & 345.57088 & 0 \\ 345.57088 & 17.261602 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00148 \end{bmatrix},$$

e a inversa da matriz de informação de Fisher $I^{-1}(\psi)$ de (3.34) é,

$$I^{-1}(\psi) = \begin{bmatrix} 0.00016 & -0.003209 & 0 \\ -0.003209 & 0.122179 & 0 \\ 0 & 0 & 675.658415 \end{bmatrix}.$$

Assumindo o modelo (3.1) onde $x = 10^{-8} [T^3 - 180^3]$ e uma distribuição Gaussiana Inversa para $Y = \text{Horas de falha}/1000$, os EMV para α , β , λ , λ^{-1} e θ_1 , e seus erros padrões (EP) obtidos pelas distribuições limitantes dos EMV são dados na seguinte tabela:

TABELA 7.11

EMV PARA OS PARÂMETROS E SEUS RESPECTIVOS ERROS PADRÕES

Parâmetro	EMV	EP (I_0)	EP ($I(\psi)$)
α	0.0371	0.0127	0.0127
β	7.3248	0.3510	0.3495
λ	100.6721	25.9934	25.9934
λ^{-1}	0.0099	0.0026	0.0026

Os EMV dos tempos medios de falha θ e seus inversos θ^{-1} (em milhares de horas) em 190°C, 220 °C, e 240 °C com seus erros padrões associados (EP) são dados na tabela a seguir:

TABELA 7.12

**EMV PARA OS TEMPOS MÉDIOS DE FALHA E SEUS INVERSOS
EM TRÊS NÍVEIS DE ESTRESSE ESPECIFICADO COM
SEUS RESPETIVOS ERROS PADRÕES**

Níveis Estresse	EMV		Erros Padrões	
	θ	θ^{-1}	EP(I_0)	EP($I(\psi)$)
190	8.897689	0.112389	0.01042	0.010357
220	2.5646	0.389924	0.011601	0.011601
240	1.606273	0.622559	0.020709	0.020682

ANÁLISE BAYESIANA.

Nas seções 4.1 e 4.2 encontramos expressões para as densidades a posteriores marginais para os parâmetros de interesse. Os dados utilizados fornecem os valores:

$$n = 30$$

$$n_i = 10$$

$$V_0 = 4.333733$$

$$V_1 = 0.114535$$

$$V_2 = 0.005715$$

$$R = 0.38489$$

7.2 análise do modelo de regressão linear inverso – análise clássica e bayesiana - pág. 97

$$D = 0.011648$$

$$\bar{X} = 0.046117$$

$$x_1 = 0.0103$$

$$x_2 = 0.0482$$

$$x_3 = 0.0799$$

e $\lambda = 94$ para a análise quando assumimos que o parâmetro é conhecido.

A densidade a posteriori para α de (4.12) é dada por,

$$\pi(\alpha/\text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) - W_1^2(\alpha, \hat{\beta})\}^{1/2} \{0.011648\alpha^2 - 0.000866\alpha + 0.000073\}^{-15.5}$$

onde $\alpha > 0$ e $\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \alpha V_1}{V_2}$, com $W_l(\alpha, \hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^3 n_i x_i^l (\alpha + \hat{\beta} x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$.

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\alpha} = 0.0371$. No gráfico 7.15 mostramos a densidade a posteriori marginal para α .

GRÁFICO 7.15

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA ALFA

A densidade a posteriori para β de (4.13) é dada por,

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \{W_0(\hat{\alpha}, \beta)W_2(\hat{\alpha}, \beta) - W_1^2(\hat{\alpha}, \beta)\}^{1/2} \{0.011648\beta^2 - 0.170648\alpha + 0.668015\}^{-15.5}$$

onde $\beta > 0$ e $\hat{\alpha} = \frac{1 - \beta V_1}{V_0}$, com $W_l(\hat{\alpha}, \beta) = n^{-1} \sum_{i=1}^3 n_i x_i^l (\hat{\alpha} + \beta x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$.

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\beta} = 7.35$. No gráfico 7.16 mostramos a densidade a posteriori marginal para β .

GRÁFICO 7.16

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA BETA

A densidade a posteriori marginal para λ de (4.16) é dada por,

$$\pi(\lambda / \text{dados}) \propto \lambda^{14} \exp \{-0.148538 \lambda\}$$

onde $\lambda > 0$.

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\lambda} = 94$. No gráfico 7.17 mostramos a densidade a posteriori marginal para λ .

GRÁFICO 7.17**DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA LAMBDA**

A densidade a posteriori marginal para θ_1 de (4.23) é dada por,

$$\pi(\theta_1/\text{dados}) \propto \theta_1^{-2} \{W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - W_1^2(\hat{\alpha}, \theta_1)\}^{1/2} \{4315.594004 a_3(\theta_1) - a_2^2(\theta_1)\}^{-15.5}$$

onde $\theta_1 > 0$ e $\hat{\alpha} = -\frac{a_2(\theta_1)}{2a_1}$, com $W_l(\hat{\alpha}, \theta_1) = n^{-1} \left\{ n_1 x_1^l \theta_1 + \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \left[\hat{\alpha} \left(1 - \frac{x_j}{x_1} \right) + \frac{x_j}{\theta_1 x_1} \right]^{-1} \right\}$, $l = 0, 1, 2$

e $a_1 = 1078.898501$, isto é, $4a_1 = 4315.594004$ e $2a_1 = 2157.797002$,

$$a_2(\theta_1) = -2564.967197 \theta_1^{-1} + 208.642718,$$

$$a_3(\theta_1) = 1616.080686 \theta_1^{-2} - 268.642718 \theta_1^{-1} + 11.54673.$$

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\theta}_1 = 8.75$. No gráfico 7.18 mostramos a densidade a posteriori marginal para θ_1 .

GRÁFICO 7.18

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA THETA1

Com $\lambda = 94$ conhecido, encontramos também as densidades a posteriores marginais para α , β e θ_1 . A densidade a posteriori marginal para α de (4.29) é dada por,

$$\pi(\alpha/\text{dados}) \propto \{W_0(\alpha, \hat{\beta})W_2(\alpha, \hat{\beta}) - W_1^2(\alpha, \hat{\beta})\}^{1/2} \exp\{-(2873.784777\alpha^2 - 213.658793\alpha + 18.010499)\}$$

onde $\alpha > 0$, λ conhecido e $\hat{\beta} = \frac{\bar{X} - \alpha V_1}{V_2}$, com $W_l(\alpha, \hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^3 n_i x_i^l (\alpha + \hat{\beta}x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$.

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\alpha} = 0.0371$. No gráfico 7.19 mostramos a densidade a posteriori marginal para α .

GRÁFICO 7.19

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA ALFA COM LAMBDA CONHECIDO

A densidade a posteriori marginal para β de (4.30) é dada por,

$$\pi(\beta/\text{dados}) \propto \{W_0(\hat{\alpha}, \beta)W_2(\hat{\alpha}, \beta) - W_1^2(\hat{\alpha}, \beta)\}^{1/2} \exp\{- (3.7897\alpha^2 - 55.521113\alpha + 217.341758)\}$$

onde $\beta > 0$, λ conhecido e $\hat{\alpha} = \frac{1 - \beta V_1}{V_0}$, com $W_l(\hat{\alpha}, \beta) = n^{-1} \sum_{i=1}^3 n_i x_i^l (\hat{\alpha} + \beta x_i)^{-1}$, $l = 0, 1, 2$.

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\beta} = 7.35$. No gráfico 7.20 mostramos a densidade a posteriori marginal para β .

GRÁFICO 7.20

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA BETA COM LAMBDA CONHECIDO

A densidade a posteriori marginal para θ_1 de (4.32) é dada por,

$$\pi(\theta_1/\text{dados}) \propto \theta_1^{-2} \{W_0(\hat{\alpha}, \theta_1) W_2(\hat{\alpha}, \theta_1) - W_1^2(\hat{\alpha}, \theta_1)\}^{1/2} \exp\{-(47 a_3(\theta_1) - 0.010891 a_2^2(\theta_1))\}$$

onde $\theta_1 > 0$, λ conhecido,

$$\text{e } \hat{\alpha} = -\frac{a_2(\theta_1)}{2a_1}, \text{ com } W_l(\hat{\alpha}, \theta_1) = n^{-1} \left\{ n_1 x_1^l \theta_1 + \sum_{i=2}^k n_i x_i^l \left[\hat{\alpha} \left(1 - \frac{x_j}{x_1} \right) + \frac{x_j}{\theta_1 x_1} \right]^{-1} \right\}, l = 0, 1, 2$$

e $a_1 = 1078.898501$, isto é, $4a_1 = 4315.594004$ e $2a_1 = 2157.797002$,

$$a_2(\theta_1) = -2564.967197 \theta_1^{-1} + 208.642718,$$

$$a_3(\theta_1) = 1616.080686 \theta_1^{-2} - 268.642718 \theta_1^{-1} + 11.54673;$$

$$\text{e } \frac{\lambda}{8a_1} = 0.010891.$$

A moda desta densidade a posteriori é $\hat{\theta}_1 = 8.75$. No gráfico 7.21 mostramos a densidade a posteriori marginal para θ_1 .

GRÁFICO 7.21

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA THETA1 COM LAMBDA CONHECIDO

Na tabela 7.13, temos intervalos aproximados ao 95% de confiança e credibilidade para os parâmetros considerando as distribuições limites para as EMV e as densidades a posteriores marginais de interesse.

TABELA 7.13

INTERVALOS DE CONFIANÇA E CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS

parâmetro	IC (I_0)	IC ($I(\psi)$)	ICR
α	(0.0122;0.0621)	(0.0123;0.0620)	(0.0125;0.0617)
β	(6.6368;8.0127)	(6.6397;8.0098)	(6.6729;8.0271)
λ	(49.7260;151.6183)	(49.725;151.618)	(44.760;143.239)
θ_1	(7.5290;10.872)	(7.5358;10.857)	(7.2234;10.276)

Da tabela 7.13 verificamos resultados similares considerando o método clássico assintótico e o método Bayesiano baseados sobre uma densidade a priori não-informativa para os parâmetros. Uma das grandes vantagens do método Bayesiano é relacionado à simplicidade das densidades a posteriori aproximadas, que são facilmente implementadas num computador e pode facilitar a análise estatística. Além disso, poderíamos de forma similar, considerar prioris informativas e obter resultados aproximados de forma simples, o que é outra grande vantagem do uso do método Bayesiano.

7.2.3 USO DA DENSIDADE PREDITIVA EM CONTRÔLE DE QUALIDADE.

Aplicando os procedimentos obtidos no capítulo 5, mostramos no gráfico 7.22 as densidades preditivas para uma observação futura $Y_{(31)i}$ = Horas de Falha/1000 considerando cada nível de estresse X_i , $i = 1, 2, 3$.

GRÁFICO 7.22

Usamos a densidade preditiva de (5.10) com α e β conhecidos para achar X_i e L_i necessários para um problema de controle de qualidade. Neste caso, fixamos $X_1 = 10^{-8} [T_1^3 - 180^3]$, $X_2 = 10^{-8} [T_2^3 - 180^3]$ e $X_3 = 10^{-8} [T_3^3 - 180^3]$; e achamos L_1 , L_2 , e L_3 , tal que (5.13) ocorra com uma probabilidade fixa de $1 - \gamma = 0.95$. Valores obtidos usando o método de Simpson (ver apêndice A2) são dados por:

X_i	L_i
0.0103	4.99898
0.0482	1.96393
0.0799	1.32093

Estes resultados podem ser de grande interesse para engenheiros de qualidade.

Ressaltamos que os resultados destas aplicações numéricas podem ser encontradas em Achcar e Rosales (1991).

7.3 PLANEJAMENTOS DE EXPERIMENTOS EM TESTES ACELERADOS COM O MODELO DE REGRESSÃO LINEAR INVERSO – UMA ANÁLISE CLÁSSICA E BAYESIANA.

7.3.1 QUARTO EXEMPLO.

Neste exemplo apresentamos um conjunto de dados que foi analisado por Shuster e Miura (1972) e introduzidos por Ostle (1963), e que se referem a um experimento fatorial aleatório 2×5 com 10 replicações por cela. O experimento consiste de um lote de material de isolamento, sendo que 10 unidades são cortados longitudinalmente e outros 10 transversalmente. A tabela 7.14 fornece os impactos fortes em libras por pés de teste por unidade.

O uso da distribuição Gaussiana inversa é adequado, assim o impacto forte é determinado por construção em níveis acima das falhas ocorridas. A suposição de um nível crítico constante e um parâmetro de difusão constante são válidas neste experimento desde que o mesmo tipo de material de isolamento seja testado sobre um especificado critério de falha fixo, visto que a suposição de Shuster e Miura de uma constante $\theta^2\sigma$ não tem uma interpretação significativa.

Assumindo o modelo (6.1) para os dados da tabela (7.14), fazemos uma análise clássica e uma análise Bayesiana do modelo.

TABELA 7.14

Tipo de Corte	Número de Lote				
	I	II	III	IV	V
Longitudinal	1.15	1.16	0.79	0.96	0.49
	0.84	0.85	0.68	0.82	0.61
	0.88	1.00	0.64	0.98	0.59
	0.91	1.08	0.72	0.93	0.51
	0.86	0.80	0.63	0.81	0.53
	0.88	1.01	0.59	0.79	0.72
	0.92	1.14	0.81	0.79	0.67
	0.87	0.87	0.65	0.86	0.47
	0.93	0.97	0.64	0.84	0.44
	0.95	1.09	0.75	0.92	0.48
Transversal	0.89	0.86	0.52	0.86	0.52
	0.69	1.17	0.52	1.06	0.53
	0.46	1.18	0.80	0.81	0.47
	0.85	1.32	0.64	0.97	0.47
	0.73	1.03	0.63	0.90	0.57
	0.67	0.84	0.58	0.93	0.54
	0.78	0.89	0.65	0.87	0.56
	0.77	0.84	0.60	0.88	0.55
	0.80	1.03	0.71	0.89	0.45
	0.79	1.06	0.59	0.82	0.60

ANÁLISE CLÁSSICA.

Os EMV $\hat{\Phi} = (\mu, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$ e $\hat{\sigma}$, são calculadas de (6.18) utilizando os seguintes resultados,

$$n = 10,$$

$$R^* = 136.452461,$$

$$D^* = \text{diag}(0.919, 0.997, 0.690, 0.870, 0.551, 0.743, 1.022, 0.624, 0.899, 0.526)',$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 7.841 & 0.213 & 0.585 & 0.942 & 0.237 & 0.692 \\ 0.213 & 7.841 & 0.151 & -0.050 & 0.041 & -0.054 \\ 0.585 & 0.151 & 2.739 & 1.077 & 1.077 & 1.077 \\ 0.942 & -0.050 & 1.077 & 3.096 & 1.077 & 1.077 \\ 0.237 & 0.041 & 1.077 & 1.077 & 2.391 & 1.077 \\ 0.692 & -0.054 & 1.077 & 1.077 & 1.077 & 2.846 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.134188 & -0.003852 & -0.013444 & -0.035177 & 0.018212 & -0.021193 \\ -0.003852 & 0.127915 & -0.009694 & 0.005436 & -0.002573 & 0.005949 \\ -0.013444 & -0.009694 & 0.495818 & -0.085735 & -0.138277 & -0.099774 \\ -0.035177 & 0.005436 & -0.085735 & 0.43148 & -0.117303 & -0.07792 \\ 0.018212 & -0.002573 & -0.138277 & -0.117303 & 0.590745 & -0.131312 \\ -0.021193 & 0.005949 & -0.099774 & -0.077792 & -0.131312 & 0.473524 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta' = [10, 0, 0, 0, 0]$$

Assim os EMV são dados por,

$$\hat{\Phi} = (1.341884, -0.038518, -0.134436, -0.351772, 0.182121, -0.211933)$$

$$\hat{\sigma} = 0.02264.$$

Os EMQ são calculados de (6.30) e (6.31) utilizando os seguintes resultados,

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.4 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0.4 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 1.088139 \\ 1.003009 \\ 1.449277 \\ 1.149425 \\ 1.814882 \\ 1.345895 \\ 0.978474 \\ 1.602564 \\ 1.112347 \\ 1.901141 \end{bmatrix}$$

Assim os EMQ são dados por,

$$\hat{\phi} = (1.344515, -0.043569, -0.127498, -0.353774, 0.181405, -0.213629),$$

$$\hat{\sigma} = 0.02224.$$

As estimativas correspondentes as médias das celas são calculadas usando a relação $X\Phi = \theta^{-1}1$. Essas estimativas e as médias das celas amostrais são dadas na tabela 7.15.

TABELA 7.15
EMV e EMQ DOS IMPACTOS FORTES MEDIOS
(10 replicações por cela)

Tipo de Corte		Número de Lote				
		I	II	III	IV	V
Longitudinal	$\bar{y}$	0.919	0.997	0.690	0.870	0.551
	EMV	0.855483	1.050868	0.673180	0.916227	0.549636
	EMQ	0.852189	1.055774	0.674604	0.919695	0.551134
Transversal	$\bar{y}$	0.743	1.022	0.624	0.899	0.526
	EMV	0.802590	0.972166	0.639991	0.855821	0.527309
	EMQ	0.793282	0.966828	0.637150	0.851459	0.525878

ANÁLISE BAYESIANA.

A densidade posteriori marginal conjunta para $\Phi = (\mu, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$ de (6.36) considerando uma priori não-informativa é dada por,

$$\pi(\Phi/\text{dados}) \propto \{136.4525 - 200\mu + 10 g(\mu, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\}^{-50}$$

onde $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \alpha_1 < \infty$, $-\infty < \beta_j < \infty$, $j = 1, 2, 3 \text{ e } 4$, e

$$\begin{aligned} g(\mu, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = & 7.841\mu^2 + 0.426 \mu\alpha_1 + 1.17 \mu\beta_1 + 1.884 \mu\beta_2 + 0.474 \mu\beta_3 + \\ & + 1.384 \mu\beta_4 + 7.841 \alpha_1^2 + 0.302 \alpha_1\beta_1 - 0.10 \alpha_1\beta_2 + 0.082\alpha_1\beta_3 - \\ & - 0.108 \alpha_1\beta_4 + 2.739 \beta_1^2 + 2.154 \beta_1\beta_2 + 2.154 \beta_1\beta_3 + 2.154\beta_1\beta_4 + \\ & + 3.096 \beta_2^2 + 2.154 \beta_2\beta_3 + 2.154 \beta_2\beta_4 + 2.391 \beta_3^2 + 2.154 \beta_3\beta_4 + \\ & + 2.846 \beta_4^2. \end{aligned}$$

A moda dessa densidade a posteriori $(\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4)$ é obtida através da resolução do seguinte sistema de equações,

$$15.682\tilde{\mu} + 0.426\tilde{\alpha}_1 + 1.17\tilde{\beta}_1 + 1.884\tilde{\beta}_2 + 1.474\tilde{\beta}_3 + 1.384\tilde{\beta}_4 = 20$$

$$0.426\tilde{\mu} + 15.682\tilde{\alpha}_1 + 0.312\tilde{\beta}_1 - 0.100\tilde{\beta}_2 + 0.082\tilde{\beta}_3 - 0.0108\tilde{\beta}_4 = 0$$

$$1.1700\tilde{\mu} + 0.302\tilde{\alpha}_1 + 5.478\tilde{\beta}_1 + 2.154\tilde{\beta}_2 + 2.154\tilde{\beta}_3 + 2.154\tilde{\beta}_4 = 0$$

$$1.884\tilde{\mu} - 0.100\tilde{\alpha}_1 + 2.154\tilde{\beta}_1 + 6.192\tilde{\beta}_2 + 2.154\tilde{\beta}_3 + 2.154\tilde{\beta}_4 = 0$$

$$0.474\tilde{\mu} + 0.082\tilde{\alpha}_1 + 2.154\tilde{\beta}_1 + 2.154\tilde{\beta}_2 + 4.782\tilde{\beta}_3 + 2.154\tilde{\beta}_4 = 0$$

$$1.384\tilde{\mu} - 0.108\tilde{\alpha}_1 + 2.154\tilde{\beta}_1 + 2.154\tilde{\beta}_2 + 2.154\tilde{\beta}_3 + 5.692\tilde{\beta}_4 = 0$$

Assim, a moda é dada por $\tilde{\Phi} = (1.341884, -0.038518, -0.134436, -0.351772, 0.182121, -0.211933)'$

A densidade a posteriori marginal para σ de (6.37) é dada por,

$$\pi(\sigma/\text{dados}) \propto \sigma^{-50.0} \exp\{-1.13225 \sigma^{-1}\}$$

onde $\sigma > 0$. A moda é dada por $\tilde{\sigma} = 0.02242$. No gráfico 7.23 mostramos a densidade posteriori marginal para σ .

GRÁFICO 7.23

DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA SIGMA

Na tabela 7.16 apresentamos um resumo das diferentes estimativas, observamos que as estimativas Bayesianas considerando uma priori não-informativa de Jeffreys está muito próxima da estimativa de máxima verossimilhança.

TABELA 7.16
DIFERENTES ESTIMATIVAS PARA OS PARÂMETROS

	α_1	β_1	β_2	β_3	β_4	σ
EMV	-0.038518	-0.134436	-0.351772	0.182121	-0.211933	0.02264
EMQ	-0.043569	-0.127498	-0.353774	0.181405	-0.213629	0.02224
MODA	-0.038518	-0.134436	-0.351772	0.182121	-0.211933	0.02242
(estim. Bayes.)						

Podem ser obtidos Intervalos de Confiança e Credibilidade para cada um dos parâmetros utilizando a aproximação normal dos Estimadores de Máxima Verossimilhança. Os resultados são dados na tabela 7.17.

TABELA 7.17
INTERVALOS DE CONFIANÇA E CREDIBILIDADE PARA OS PARÂMETROS

Parâmetro	IC (95%)	ICR (95%)
μ	(1.307722; 1.376046)	(1.308579; 1.375189)
α_1	(-0.071872; -0.005164)	(-0.071823; -0.005213)
β_1	(-0.200103; -0.068769)	(-0.190786; -0.078086)
β_2	(-0.413031; -0.290513)	(-0.404774; -0.29877)
β_3	(0.110443; 0.253799)	(0.121809; 0.242433)
β_4	(-0.276107; -0.147759)	(-0.267214; -0.156652)
σ	(0.016365; 0.028915)	(0.016235; 0.028605)

Ressaltamos que os resultados destas aplicações numéricas podem ser encontradas em Achcar e Rosales (1992).

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FUTURAS

O uso do método de Laplace para aproximações de integrais torna viável uma análise Bayesiana do modelo Gaussiano Inverso aplicado a dados de sobrevivência como vimos nos exemplos do capítulo 7. Observamos que as densidades a posteriori de interesse aproximadas pelo método de Laplace são de simples implementação num computador e não exigem grande conhecimento computacional especializado, e podem ser obtidos de forma similar para diferentes densidades a priori, que normalmente incorporam opiniões dos engenheiros de confiabilidade. É evidente que muitos resultados obtidos nos exemplos coincidem com os resultados clássicos pois as prioris consideradas foram não-informativas.

É importante salientar que num trabalho futuro, poderiam e deveriam ser feitas comparações usando outros métodos de resolução de integrais para avaliar as precisões dos resultados obtidos neste trabalho. Por exemplo, poderíamos usar o método de Simpson para calcular as densidades a posteriori de interesse ou o método de Monte Carlo. Além disso, seria importante um estudo detalhado sobre o erro das aproximações obtidas.

Também, poderíamos sob o enfoque de testes acelerados, usar o método de Laplace para aproximar momentos a posteriori de interesse. Assim, poderíamos estimar funções dos parâmetros sob o nível usual de estresse, que é o objetivo principal de um experimento de testes acelerados.

Em síntese, as aproximações obtidas podem ser de grande interesse prático para a área de confiabilidade incorporando opiniões de especialistas e mesmo com a presença de dados censurados, pois os resultados aproximados poderiam ser implementados nessas situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achcar, J. A. (1990). Use of Predictive Densities in Quality Control With Accelerated Life Tests Assuming a Power Rule Model and an Exponential Distributions, Relatório Técnico, nº 76/90, ICMS - USP, São Carlos.
- Achcar, J. A., Bolfarine, H. Rodrigues, J. (1987). Inverse Gaussian Distribution: a Bayesian Approach. Thechnical Report nº 8709, IME-USP, São Paulo, S. P.
- Achcar, J. A., Bolfarine, H. and Rodrigues, J. (1991). *Análise de Sobrevida*. 2ª Escola de Modelos de Regressão, IM - UFRJ.
- Achcar, J. A. and Rosales, O.L.A. (1991). A Bayesian Approach for Accelerated Life Tests Assuming an Inverse Gaussian Distribution. Relatório Técnico, nº 94/91, ICMS - USP, São Carlos.
- Achcar, J. A. and Rosales, O.L.A. (1992). Use of Bayesian Methods in the Analysis of Two-Factor experiments under Inverse Gaussian Distribution. Relatório Técnico, nº 119/92, ICMS - USP, São Carlos.
- Al Hussaini, E. K. and ABD-El-Hakin, N. S. (1981). Bivariate Inverse Gaussian Distributions. *Annals Mathematical Statistics*, vol. 33, part A, 57 – 66.
- Banerjee, A. K. and Bhattacharyya, G. K. (1979). Bayesian Results for the Inverse Gaussian Distribution with an Applications. *Technometrics*, vol. 21, nº 2, 247 – 251.
- Bhattacharyya, G. K., Fries, A. (1981). Inverse Gaussian Regression and Accelerated Life Tests. In *Proceedings of the Special Topics Meeting on Survival Analysis*, 138th Meeting of the Institute of Mathematical Statistics, Columbus, Ohio, oct. 1981, 101 – 117.
- Bhattacharyya, G. K. and Fries, A. (1982). Fatigue Failure Models – Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. R-31, nº 5.

- Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison - Wesley, New York.
- Cheng, R.C.H. and Amin, N.A.K. (1981). Maximum Likelihood Estimation of Parameters in the Inverse Gaussian Distribution, With Unknown Origin. *Technometrics*, vol. 23, nº 3.
- Cheng, R.C.H. (1984). Generation of Inverse Gaussian Variates with Given Sample Mean and Dispersion. *Appl. Statist.*, 33, nº 3, 309-316.
- Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1974). Estimation of the Inverse Gaussian Distribution Function. *JASA*, vol. 69, nº 345, 250 – 254.
- Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1975). Statistical Distributions Related to the Inverse Gaussian. *Communications in Statistics*, 4(12), 1081-1091.
- Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1976). Optimum Test Procedures for the Mean of First Passage Time Distribution in Brownian Motion with Positive Drift (Inverse Gaussian Distribution). *Technometrics*, vol. 18, nº 2, 189 – 193.
- Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1977). The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model. *Technometrics*, vol. 19, nº 4, 461 – 468.
- Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution - Theory, Methodology and Applications*. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel.
- Cox, D. R. and Miller, H. D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman and Hall.
- Dias, T. C. M. (1992). Testes Acelerados Assumindo um Modelo de Lei de Pôtença Inversa e Dados com Censuras do Tipo II. Tese de Mestrado, ICMSC - USP, São Carlos.
- Doksum, K. A. and Høyland, A. (1992). Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution. *Technometrics*, vol. 34, nº 1.

- Folks, J. L. and Chhikara, R. S. (1978). The inverse Gaussian Distribution and its Statistical Application - A Review. J. R. Statistical Soc. B, 40, nº 3, 263 – 289.
- Fries, A. and Bhattacharyya, G. K. (1983). Analysis of Two Factor Experiments Under an Inverse Gaussian Model. JASA, vol. 78, nº 384, 820 – 826.
- Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions I*. Houghton - Mifflin, Boston.
- Khatri, C. G. (1961). A Characterization of the Inverse Gaussian Distribution. Annals Mathematical Statistics, 33, 800 – 803.
- Kass, R. E., Tierney, L. and Kadane, J. B. (1990). The Validity of Posterior Expansions Based on Laplace's Method. in Essays in Honor of George A. Barnard, ed. Hodges, Amsterdam: North – Holland.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, New York.
- Louzada Neto, F. (1991). Testes de Sobrevivência Acelerados: Uma Análise Bayesiana do Modelo de Eyring. Tese de Mestrado, ICMSC - USP, São Carlos.
- Mann, N. R., Schafer, R. E. and Singpurwalla, N. A. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley & Sons, New York.
- Martz, H.F. and Waller, R. A. (1982). *Bayesian Reability Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Miller Jr., R. G. (1981). *Survival Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York.
- Nelson, W. (1971). Analysis of Accelerated Life Test Data - Part I: The Arrhenius Model and Graphical Methods. IEEE, Transactions on Electrical Insulation, Vol. EI-6, 4, dez./1971.

- Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing - Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*. John Wiley, New York.
- Padgett, W.J. (1979). Confidence Bounds on Reliability for the Inverse Gaussian Model. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. R-28, nº 2.
- Padgett, W.J. (1981). Bayes Estimation of Reliability for the Inverse Gaussian Model. *IEEE Transaction on Reliability*, vol. R-30, nº 4.
- Press, S. J. (1989). *Bayesian Statistics: Principles, Models and Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Shuster, J. (1968). On the Inverse Gaussian Distribution Function. *JASA*, 63, 1514 – 1516.
- Shuster, J. J. and Miura, C. (1972). Two-Way Analysis of Reciprocals. *Biometrika*, vol. 59, 478 – 481.
- Tierney, L. and Kadane, J. B. (1986). Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities. *JASA*, 81, 82 – 86.
- Tierney, L. and Kadane, J. B. (1989). Fully Exponential Laplace Approximations to Expectations and Variances of Nonpositive Functions. *JASA*, 84, 710 – 716.
- Tweedie, M. C. K. (1957a). Statistical Properties of Inverse Gaussian Distributions I. *Annals Mathematical Statistics*, 28, 362 – 377.
- Tweedie, M. C. K. (1957b). Statistical Properties of Inverse Gaussian Distributions II. *Annals Mathematical Statistics*, 28, 696 – 705.
- Zellen, M. (1959). Factorial Experiments in Life Testing. *Technometrics*, vol. 1, nº 3, 269 – 288.
- Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. John Wiley & Sons, New York.
- Wasan, M. T. and Roy, L. K. (1969). Tables of Inverse Gaussian Percentage Points. *Technometrics*, vol. 11, nº 3, 591 – 604.

APÊNDICE A1

O MÉTODO DE LAPLACE

A1 O MÉTODO DE LAPLACE.

Assumindo h uma função bem comportada de um parâmetro m -dimensional com $-h$ tendo um máximo em $\hat{\theta}$, o método de Laplace aproxima uma integral da forma,

$$I = \int f(\theta) \exp[-nh(\theta)] d\theta \quad (\text{A1.1})$$

expandindo h e f em uma serie de Taylor em torno de $\hat{\theta}$ (ver por exemplo, Kass, Tierney e Kadane, 1990).

Considerando primeiro o caso uni-dimensional, o método de Laplace fornece a seguinte aproximação,

$$\hat{I} \simeq \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{1/2} \sigma f(\hat{\theta}) \exp[-nh(\hat{\theta})] \quad (\text{A1.2})$$

onde $\sigma = \{h''(\hat{\theta})\}^{-1/2}$.

No caso multiparamétrico, com $\theta \in \mathbb{R}^m$, temos,

$$\hat{I} \simeq (2\pi)^{m/2} \{\det(n D^2 h(\hat{\theta}))\}^{-1/2} f(\hat{\theta}) \exp[-nh(\hat{\theta})] \quad (\text{A1.3})$$

onde $\hat{\theta}$ maximiza $-h(\theta)$ e $D^2 h(\theta)$ é a matriz hessiana de h avaliada em $\hat{\theta}$.

Os erros dessas aproximações são pesquisados por Kass, Tierney e Kadane (1990). Um caso especial das aproximações de Laplace é dado por integrais da forma $\int \exp\{-nh(\theta)\} d\theta$ (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986; Tierney, Kass e Kadane, 1989).

APÊNDICE A2

O MÉTODO DE SIMPSON

A2.1 O MÉTODO DE SIMPSON.

Uma boa aproximação para o cálculo da integral de uma função é dada pela fórmula de Simpson. É conhecido como o Método de Newton-Cotes e é um método de quadratura. Ele surge da idéia de calcular a integral de $f(x)$ em um certo número finito de pontos, faz uma interpolação polinomial e integra o polinômio, ao invés de $f(x)$.

O valor da integral de $f(x)$ no intervalo $(x_0; x_n)$ é dada por:

$$J_s = \frac{h}{3} (f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + \dots + 2 f_{n-2} + 4 f_{n-1} + f_n) \quad (\text{A2.1})$$

onde h é o incremento entre os pontos x_0 e x_n . É dada por $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, n é o número de intervalos,

$$f_0 = f(x_0)$$

$$f_1 = f(x_0 + h) = f(x_1)$$

$$f_2 = f(x_1 + h) = f(x_2)$$

.

.

.

$$f_n = f(x_{n-1} + h) = f(x_n)$$

A função (A2.1) é conhecida como a fórmula de 1/3 de Simpson.

A2.2 CÁLCULO DO ERRO.

Como em qualquer método numérico que apresenta uma solução aproximada, o erro para o método de Simpson pode ser determinado. Considere ϵ como o erro cometido em cada $f(x)$. Assim o erro total no cálculo da integral é dado por,

$$E_t = \left(\frac{h^4}{180} f^{iv}(\xi) + \epsilon \right) (x_n - x_0) \quad (A2.2)$$

onde : $f^{iv}(\xi)$ é a quarta derivada de $f(x)$,
 ξ é um ponto entre $x + h$ e $x - h$,
 x_n é o limite superior da integral e
 x_0 é o limite inferior da integral.

APÊNDICE A3

INFERÊNCIAS PARA OS PARÂMETROS A PARTIR DA TEORIA ASSINTÓTICA

A3.1 ANÁLISE CLÁSSICA.

As inferências para o vetor de parâmetros $\psi = (\alpha, \beta, \lambda)'$ serão baseados nas propriedades assintóticas (grandes amostras) dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) cujo vetor de estimativas é dado por $\hat{\psi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})'$ (Mood, Graybill e Boes (1974), Lawless (1982)). A teoria assintótica dos EMV sobre a qual a aproximação normal é baseada requer de certas condições de regularidade baseadas no ajustamento da função de verossimilhança.

Assim, para obter intervalos de confiança ou testes de hipóteses para ψ usamos a aproximação assintótica normal dada por,

$$\frac{\hat{\psi} - \psi}{I(\hat{\psi})^{-1/2}} \sim N(0, 1) \quad (\text{A3.1})$$

onde $I(\hat{\psi})$ é a matriz de informação de Fisher, definida como,

$$I(\psi) = E \left\{ - \frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \psi^2} \right\}.$$

Como uma alternativa para (A3.1) podemos utilizar a aproximação assintótica normal equivalente dada por,

$$\frac{\hat{\psi} - \psi}{I_0^{-1/2}} \sim N(0, 1) \quad (\text{A3.2})$$

onde I_0 é a matriz de informação observada, definida como,

$$I_0 = \left\{ - \frac{\partial^2 l(\psi)}{\partial \psi^2} \right\} \Big|_{\psi = \hat{\psi}}.$$

Muitas vezes essas aproximações não são muitas boas para amostras pequenas ou moderadas. Quando não temos amostras grandes existem procedimentos alternativos que podem ser utilizados para pequenas amostras (Lawless, 1982).

Da normalidade assintótica dos EMV encontramos intervalos de confiança (IC) aproximados para os parâmetros.

Um intervalo de confiança aproximado para ψ é dado a partir de,

$$\hat{\psi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})' \approx N \left\{ (\alpha, \beta, \lambda) ; I_0^{-1}(\psi) \right\} .$$

Por exemplo, um IC $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α pode ser construído a partir de,

$$\hat{\alpha} \approx N \{ \alpha , \hat{V}(\hat{\alpha}) \}$$

isto é,

$$P (- Z_{\gamma/2} < Z < Z_{\gamma/2}) = 1 - \gamma ,$$

onde,

$$Z = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}} \sim N(0, 1) .$$

Assim,

$$- Z_{\gamma/2} < \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}} < Z_{\gamma/2}$$

ou,

$$- Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} < \hat{\alpha} - \alpha < Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}$$

e,

$$\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} < \alpha < \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} \quad (A3.3)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada.

Portanto, os limites para um intervalo de confiança $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α , são dados por,

$$IC(\alpha) = \left[\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\alpha})} \right]$$

De maneira análoga obtemos intervalos de confiança para os outros parâmetros de interesse. O procedimento é similar usando a matriz de informação de Fisher.

A3.2 ANÁLISE BAYESIANA.

Usando algumas propriedades da teoria assintótica para as densidades a posteriori marginais dos parâmetros, podemos considerar,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \pi(\alpha) L(\alpha)$$

isto é,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \pi(\alpha) \exp \{ \log L(\alpha) \} \quad (\text{A3.4})$$

onde $\pi(\alpha)$ é a densidade a priori não-informativa e $L(\alpha)$ é a função de verossimilhança.

Assim, assumindo que ambos $\pi(\alpha)$ e $L(\alpha)$ sejam diferentes de zero no espaço paramétrico, as derivadas sejam contínuas e que $\pi(\alpha / \text{dados})$ tenha um ponto de máximo em $\hat{\alpha}$, então expandido $\log \pi(\alpha / \text{dados})$ em (A3.4) por uma série de Taylor em torno de $\hat{\alpha}$, temos,

$$\begin{aligned} \log \pi(\alpha / \text{dados}) &\propto \\ &\propto \log \pi(\hat{\alpha} / \text{dados}) + \frac{\partial \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} (\alpha - \hat{\alpha}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} (\alpha - \hat{\alpha})^2 + R_n \end{aligned}$$

Como $\alpha = \hat{\alpha}$ é a moda da densidade posteriori, então o 2º termo é igual a zero. Portanto,

$$\log \pi(\alpha / \text{dados}) \propto \log \pi(\hat{\alpha} / \text{dados}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} (\alpha - \hat{\alpha})^2$$

$$\propto \log \pi(\hat{\alpha} / \text{dados}) - \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right) (\alpha - \hat{\alpha})^2$$

Isto é,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \pi(\hat{\alpha} / \text{dados}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right) (\alpha - \hat{\alpha})^2 \right\}.$$

daí,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1} (\alpha - \hat{\alpha})^2 \right\},$$

Portanto,

$$\pi(\alpha / \text{dados}) \approx N \left[\hat{\alpha}, \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1} \right].$$

Logo um ICR $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α é dado por,

$$P(-Z_{\gamma/2} < Z < Z_{\gamma/2}) = 1 - \gamma,$$

onde,

$$Z = \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2}} \sim N(0, 1)$$

Assim,

$$-Z_{\gamma/2} < \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2}} < Z_{\gamma/2},$$

ou,

$$-Z_{\gamma/2} \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} < \alpha - \hat{\alpha} < Z_{\gamma/2} \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2}$$

e,

$$\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} < \alpha < \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} \quad (\text{A3.5})$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é o percentil de uma distribuição normal padronizada.

Portanto, os limites para um intervalo de credibilidade $100(1 - \gamma)\%$ aproximado para α , são dados por,

$$\text{ICR}(\alpha) = \left[\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2}, \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \left(- \frac{\partial^2 \log \pi (\alpha / \text{dados})}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha = \hat{\alpha}} \right)^{-1/2} \right]$$

De maneira análoga obtemos intervalos de credibilidade para os outros parâmetros de interesse. Logo, o procedimento é similar usando a matriz de informação de Fisher.

APÊNDICE A4

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Neste apêndice apresentamos alguns programas computacionais utilizados nesta dissertação. Eles foram desenvolvidos utilizando o pacote estatístico SOC - Software Científico (desenvolvido e distribuído pela NTIA/EMBRAPA). Foram utilizados alguns módulos principais do pacote, como por exemplo o GENESE, CM, IMPRIME e GRÁFICO. O programa apresentado em A.4.1 foi utilizado para encontrar a densidade a posteriori marginal para μ considerando uma priori de referência. O segundo programa, A.4.2 foi utilizado para encontrar um contorno da densidade a posteriori conjunta para μ e λ . O programa A.4.3 foi utilizado para encontrar a densidade preditiva para uma observação futura para todos os níveis de estresse.

A.4.1 - DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA μ .

PROGRAMA PARA GERAR OS PONTOS DA DENSIDADE.

```

genese $1funcmur1
num mu l1 n yb lambe g b xi s k;
{ n=30;
  yb=1.037;
  lambe=2.902786;
  g=8.717829e+010;
  b=0.469498;
  xi=sqrt(((n-1)*lambe)/yb);
  s=1-tprob(xi,(n-1));
  k=(sqrt(yb*lambe)*(n/(2*lambe))^(n/2))/(s*b*g);
  mu=0.001;
  enquanto ( mu <= 2 ) {
    l1=k*g*(n/(2*lambe))^(n/2)*(1+(yb*lambe*(mu-yb*(-1))^2))^(n/2);
    grave;
    mu=mu+0.01; } }

```

PROGRAMA PARA CONSTRUIR GRÁFICOS DA DENSIDADE.

```
grafico $1funcmur1
graf mu+l1=(l1);
tl1 DENSIDADE A POSTERIORI MARGINAL PARA MU;
tl2 (exemplo 1);
rot1 MU;
rot2 POSTERIORI;
eixo ver=0 ate 0 0;
}
```

A.4.2 - CONTORNO DA DENSIDADE A POSTERIORI CONJUNTA PARA μ e λ .

PROGRAMA PARA GERAR OS PONTOS DO CONTORNO DA DENSIDADE.

```
genese $1cont1
num la a b c1 c2 c3 mu11 mu12 mu21 mu22 mu31 mu32;
{ la=0.001;
  enquanto (la <= 6 ) {
    a=-15.56*la;
    b=30.04*la;
    c1=(14*log(la))-(19.65*la)+0.745;
    c2=(14*log(la))-(19.65*la)+1.345;
    c3=(14*log(la))-(19.65*la)+3.045;
    mu11=(-b+sqrt(b^2-4*a*c1))/(2*a);
    mu12=(-b-sqrt(b^2-4*a*c1))/(2*a);
    mu21=(-b+sqrt(b^2-4*a*c2))/(2*a);
    mu22=(-b-sqrt(b^2-4*a*c2))/(2*a);
    mu31=(-b+sqrt(b^2-4*a*c3))/(2*a);
    mu32=(-b-sqrt(b^2-4*a*c3))/(2*a);
    grave;
    la=la+0.05; }}
```

PROGRAMA PARA CONSTRUIR GRÁFICOS DE CONTORNOS DA DENSIDADE

```
grafico $1cont1
graf mu1*la=(11) mu12*la=(11) mu21*la=(11) mu22*la=(11)
    mu31*la=(11) mu32*la=(11);
tl1 CONTORNOS DA POSTERIORI CONJUNTA MU E LAMBDA;
tl2 (exemplo 1);
rot1 MU;
rot2 LAMBDA;
}
```

A.4.3 - DENSIDADE PREDITIVA PARA UMA OBSERVAÇÃO FUTURA

PROGRAMA PARA GERAR OS PONTOS DA DENSIDADE

```
cm
exec "gamai.fun";
exec "gamaf.fun";
alf = 0.0371;
bet = 7.35;
n = 30;
V0 = 4.333733;
V1 = 0.114535;
V2 = 0.005715;
R = 0.384891;
d = 0.011648;
xb = 0.046117;
x1 = 0.0103;
x2 = 0.0482;
x3 = 0.0799;
a = n*(v0*alf^2 + 2*alf*bet*v1 + v2*bet^2 - 2*alf - 2*bet*xb + r);
n1 = (n+1)/2;
n2 = n/2;
gm1=gmf(n1);
gm2=gmi(n2);
ini=0.001;
y=ini;
```



```

fni=20;
inc=0.05;
x=(fni - ini)/inc;
fn=criamat((x+1),4,0);
i=1;
enquanto (y <= fni) {
    aux1=a - 2*(alf + bet*x1) + y*(alf + bet*x1)^2 + y^(-1);
    aux2=a - 2*(alf + bet*x2) + y*(alf + bet*x2)^2 + y^(-1);
    aux3=a - 2*(alf + bet*x3) + y*(alf + bet*x3)^2 + y^(-1);
    fn[i,2]=(gm1*a^(n/2))/(sqrt(3.141592654)*gm2*(y^(3/2))*(aux1)^((n+1)/2));
    fn[i,3]=(gm1*a^(n/2))/(sqrt(3.141592654)*gm2*(y^(3/2))*(aux2)^((n+1)/2));
    fn[i,4]=(gm1*a^(n/2))/(sqrt(3.141592654)*gm2*(y^(3/2))*(aux3)^((n+1)/2));
    fn[i,1]=y;
    y=y+inc;
    i=i+1;
}
grave fn ("y,fn1,fn2,fn3");
fn1=fn[1:80,1 4];
fn2=fn[1:130,1 3];
grave fn1 ("y,fn");
grave fn2 ("y,fn");
fim;

```

PROGRAMA PARA CONSTRUIR GRÁFICOS DA DENSIDADE

```

grafico -q $lfn
graf y*fn1=(l1) y*fn2=(l2) y*fn3=(l3);
tl1 DENSIDADE PREDITIVA PARA UMA OBSERVACAO FUTURA;
tl2 PARA TODOS OS NIVEIS DE ESTRESSE;
rot1 Y(n+1);
rot2 PRED.DENS.;
eixo ver=0 ate 0 0;
}

```