Recuperação de objetos tridimensionais utilizando características de séries temporais

Rafael Umino Nakanishi

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rafael Umino Nakanishi

Recuperação de objetos tridimensionais utilizando características de séries temporais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e
Matemática Computacional. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

USP – São Carlos
Julho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/ USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N163r Nakanishi, Rafael Umino
Recuperação de objetos tridimensionais utilizando
características de séries temporais / Rafael
Umino Nakanishi; orientador Afonso Paiva Neto. -
São Carlos - SP, 2016.
88 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática Computacional)
- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Recuperação de objetos. 2. recuperação
parcial de objetos. 3. processamento geométrico.
4. processamento de dados. 5. objetos
tridimensionais. I. Neto, Afonso Paiva, orient. II.
Título.

Rafael Umino Nakanishi

3D shape retrieval using temporal series features

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. FINAL VERSION

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

USP – São Carlos
July 2016

À minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar e à minha família por toda força e apoio ao longo dos anos. À minha mãe, meu pai, minha irmã e meus avós por estarem sempre presentes e me ajudarem e apoiarem a continuar sempre em frente. Também gostaria de agradecer aos meus amigos por estarem sempre comigo, física ou mentalmente, pelo apoio oferecido, pelos tardes do café e pelas horas de descontração.

Agradeço ao meu orientador Afonso Paiva Neto pelo auxílio e orientação durante os anos de mestrado e ao professor doutor Luis Gustavo Nonato por ter me orientado nas fases iniciais desse projeto e durante a trilha de graduação-mestrado. Agradeço também a todos os professores que contribuíram pelo meu desenvolvimento pessoal e profissional, direta e indiretamente.

Agradeço ao ICMC e toda a equipe técnica pela infra-estrutura e apoio fornecido para o desenvolvimento dessa dissertação.

E agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro oferecido.

“ Os acertos não serão muitos nessa vida,
mas é bom que treínemos com eles para nos aperfeiçoar.”
(Ton Adalclê)

RESUM O

NAKANISHI, R. U.. Recuperação de objetos tridimensionais utilizando características de séries temporais. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Com o aumento da capacidade de armazenamento de informação em bancos de dados e em computadores pessoais, surge a necessidade de algoritmos computacionais capazes de realizar o processamento automático para recuperação desses dados. Esse fato não é diferente para objetos tridimensionais armazenados em formato de arquivos. Nesta Dissertação de Mestrado foram estudadas novas técnicas para processamento desses objetos utilizando uma abordagem não comum à área: técnicas para análise de séries temporais, tais como scattering wavelets e gráficos de recorrência. No caso de recuperação total de objetos, ou seja, dado uma malha tridimensional encontrar outras malhas que são visualmente semelhantes, uma única característica é extraída – curvatura gaussiana e variação de superfície, por exemplo – e ordenada como uma série com a informação provida pelo vetor de Fiedler. Então processa-se essa série utilizando a técnica scattering wavelets, que são capazes de analisar o comportamento temporal de conjunto de dados seriais. Para esse problema, os resultados obtidos são comparáveis com outras abordagens apresentadas na literatura que utilizam várias características para se chegar ao resultado. Já no caso de recuperação parcial de objetos, em que apenas uma parte do objeto é dado como parâmetro de busca, é necessário realizar uma segmentação das malhas para se encontrar outras partes que são visualmente semelhantes. Ao utilizarmos um gráfico de recorrência para analisar os objetos, é possível encontrar não apenas a região mais semelhante dentro da mesma (ou de outra) malha, mas também se obtém todas as regiões que são similares ao parâmetro de busca.

Palavras-chave: Recuperação de objetos, recuperação parcial de objetos, processamento geométrico, processamento de dados, objetos tridimensionais.

ABSTRACT

NAKANISHI, R. U.. Recuperação de objetos tridimensionais utilizando características de séries temporais. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

With the increasing data storage capacity of databases and personal computers, arises the necessity of computer algorithms capable of performing processing for automatic recovery of data and information. This fact is no different for three-dimensional objects stored in files. In this Master's Thesis we studied new techniques for processing such data objects using an unusual approach to the geometric processing area: techniques for analyzing time series, such as scattering wavelets and recurrence plots. For shape retrieval problem, i.e., given a tridimensional mesh try finding other meshes that are visually similar, our method extract only one feature – Gaussian curvature and surface variation, for example – and organize it as a series using information given by Fiedler vector. Then, the next step is to process the resulting series using a technique called scattering wavelets, that is capable of analyzing the temporal behavior of a set of serial data. For this problem, the results are comparable with other approaches reported in the literature that use multiple characteristics to find a matching mesh. In the case of partial retrieval of objects, in which only a part of the object is given as search parameter, it is necessary to perform a segmentation of the meshes in order to find other parts that are visually similar to the query. By using Recurrence Plot to analyze the objects, our method can find not only the most similar region within the same (or other) object, but also get all the regions that are similar to the search parameter.

Key-words: shape retrieval, partial shape retrieval, geometric processing, data processing, tridimensional objects.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Uma mão sob vários graus de deformação isométrica.	26
Figura 2 – Diferença entre uma recuperação de objetos global e parcial.	28
Figura 3 – Exemplo de recuperação parcial. À esquerda estão as malhas de consulta. Ao centro, o banco de dados utilizado. À direita estão os resultados, sendo que: (a) é o resultado para uma consulta de parte no completo; e (b), completo no completo.	29
Figura 4 – Pipeline empregado para a recuperação de objetos tridimensionais.	30
Figura 5 – Exemplo dos objetos contidos na base SHREC 2011.	39
Figura 6 – Região B utilizada para cálculo das curvaturas principais.	43
Figura 7 – Variação de superfície variando o número de vizinhos. À esquerda está o modelo original; variação de superfície com 10 vizinhos ao centro; e variação com 50 vizinhos à direita. A cor azul representa menores valores.	44
Figura 8 – Ângulos utilizados para cálculo dos pesos cotangentes na matriz Laplaciana. Em cinza é a área de Voronoi do vértice i.	45
Figura 9 – Exemplo de ordenação dos vértices. À esquerda está uma ordenação arbitrária, possivelmente como é dada no arquivo da malha; à direita os vértices estão ordenados pelo vetor de Fiedler.	46
Figura 10 – Banco de filtros utilizado para dois níveis do Scattering Wavelets. No eixo das abscissas, a frequência.	48
Figura 11 – Imagem ilustrativa do funcionamento da técnica Scattering Wavelets	49
Figura 12 – Exemplo de coeficientes obtidos através da técnica Scattering wavelets. Cada linha representa uma frequência; e cada coluna, uma janela da série. A figura a representa o resultado após a aplicação dos filtros, enquanto que a figura b é a aplicação dos filtros no resíduo produzido por a.	50
Figura 13 – Esquema de alinhamento e mapeamento de deformação utilizando DTW.	52
Figura 14 – Na imagem da esquerda está a órbita gerada pelo sistema de Lorenz, em que regiões com os pontos escuros estão próximos e são considerados recorrentes, enquanto que o ponto branco não. À direita, a matriz CRP resultante da auto-recorrência, em que as regiões escuras representam pontos semelhantes no sistema original.	54
Figura 15 – Exemplo de um gráfico de precisão-revocação	56
Figura 16 – Exemplo de uma matriz de distância.	57

Figura 17 – Exemplo de uma imagem camada. Os pixels pretos representam os vizinhos mais próximos; em vermelho, a primeira camada; e em azul, a segunda camada	57
Figura 18 – Pipeline empregado para a recuperação de objetos tridimensionais.	60
Figura 19 – Comparação entre as ordenações dos vértices da malha. À esquerda, a ordenação presente no arquivo; à direita, ordenação obtida pelo vetor Fiedler. Cores mais claras representam os vértices iniciais da ordenação e cores mais escuras, os vértices finais.	61
Figura 20 – Ilustração das características utilizadas: variação de superfície (à esquerda), com cores azuis representando regiões de baixa curvatura; e curvatura gaussiana (à direita), com cores azuis representando curvaturas côncavas, e vermelhas, curvaturas convexas	62
Figura 21 – Sinal obtido ao se combinar o vetor de Fiedler com as características extraídas. Nesse caso, a característica é a curvatura gaussiana.	63
Figura 22 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um cavalo. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.	65
Figura 23 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um formiga. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.	66
Figura 24 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um humano. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.	67
Figura 25 – Gráfico obtido na competição SHREC 2015. O melhor resultado obtido com o nosso método foi utilizando a janela de 1024.	68
Figura 26 – Pipeline empregado para a recuperação parcial de objetos.	72
Figura 27 – Subdivisões de um objeto tridimensional. Comparação entre o resultado gerado pelo algoritmo de Rodola, Bulò e Cremers (2014) (à esquerda) e a modificação implementada para se adequar ao problema (à direita).	73
Figura 28 – Ilustração exemplificando as diferenças de frequências em diferentes regiões de um mesmo objeto. As janelas das frequência estão igualmente escaladas para fins de comparação. No eixo das abscissas estão os vértices ordenados de cada região; e nas ordenadas estão os valores do HKS no tempo $t = t_{\min}$.	75
Figura 29 – Dado um dos braços do centauro como entrada (em verde), a matriz do CRP resultante mostra os candidatos semelhantes. As melhores partes estão destacadas em azul escuro e correspondem à região azul destacada no centauro da direita.	76

Figura 30 – Dado um dos braços do humano como entrada (em verde), a matriz do CRP resultante mostra os candidatos semelhantes. A região mais semelhante encontrada pelo S_{max} está destacada em azul e corresponde à região em azul do centauro.	77
Figura 31 – Utilizando uma das pernas da formiga como entrada (em verde), é possível encontrar as demais pernas e as antenas (em azul).	77
Figura 32 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando uma das pernas do Armadillo como entrada (em verde). Resultados destacados em azul. Foram exigidos duas partes mais semelhantes em cada modelo, para essa consulta.	78
Figura 33 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando um do braços do modelo masculino como entrada (em verde). Resultados destacados em azul.	78
Figura 34 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando um do braços do modelo masculino como entrada (em verde). Resultados destacados em azul.	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela com resultados quantitativos utilizando variação de superfície como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é a correlação cruzada.	64
Tabela 2 – Tabela com resultados quantitativos utilizando curvatura como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é a correlação cruzada. . .	64
Tabela 3 – Tabela com resultados quantitativos utilizando variação de superfície como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é o DTW. . .	68
Tabela 4 – Tabela com resultados quantitativos utilizando curvatura como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é o DTW.	68
Tabela 5 – Resultado obtido na competição SHREC 2015 para diferentes tamanhos de janela e utilizando variação de superfície como característica.	69

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BoF		Bag of Features
CRP		Cross Recurrence Plot
DCG		Ganho Cumulativo Descontado
DTW		Dynamic Time Warping
HKS		Heat Kernel Signature
ICP		Iterative Closest Point
MDS		Multidimensional Scaling
MLA		Minimum Linear Arrangement
NIST		National Institute of Standards and Technology Shape Benchmark
PCA		Análise de Componentes Principais
PSB		Princeton Shape Benchmark
RP		Recurrence Plot
RQA		Análise Quantitativa de Recorrência
SHREC	..	Shape Retrieval Contest
SIFT		Salient Local Features

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Características e similaridades em objetos tridimensionais	26
1.2	Recuperação de objetos	27
1.2.1	Recuperação total	27
1.2.2	Recuperação parcial	28
1.2.2.1	Parte no completo	28
1.2.2.2	Completo no completo	29
1.3	Benchmarks	29
1.4	Objetivos e contribuições	30
1.5	Organização da monografia	31
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
2.1	Classificação dos métodos de recuperação de objetos	33
2.1.1	Características locais	33
2.1.2	Estruturas topológicas	34
2.1.3	Propriedades geométricas globais	34
2.1.4	Correspondência direta	35
2.1.5	Formas canônicas	35
2.2	Classificação dos métodos de recuperação parcial	36
2.2.1	Características locais	36
2.2.2	Segmentação	37
2.2.3	Visão	37
2.3	Benchmarks e bases de dados	37
3	CONCEITOS BÁSICOS	41
3.1	Descritores de objetos tridimensionais	41
3.1.1	Curvaturas	42
3.1.2	Variação de superfície	43
3.1.3	Vetor de Fiedler	44
3.1.4	Heat Kernel Signature	46
3.2	Descritores de séries temporais	47
3.2.1	Scattering Wavelets	48
3.3	Medidas de dissimilaridade	50

3.3.1	Correlação cruzada	51
3.3.2	Dynamic Time Warping	51
3.3.3	Matriz de recorrência	53
3.4	Métodos de avaliação	55
4	MÉTODO PARA RECUPERAÇÃO OBJETOS	59
4.1	Método	59
4.1.1	Ordenação dos vértices	61
4.1.2	Extração das características	61
4.1.3	Comparação com a base	62
4.2	Resultados	63
4.3	Discussão	69
5	MÉTODO PARA RECUPERAÇÃO PARCIAL DE OBJETOS	71
5.1	Método	71
5.1.1	Segmentação dos objetos	71
5.1.2	Extração das características	74
5.1.3	Comparação com a base	74
5.2	Resultados	76
5.3	Discussão	79
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
6.1	Trabalhos futuros	81
6.1.1	Recuperação total	82
6.1.2	Recuperação parcial	82
6.2	Publicações	83
	Referências	85

INTRODUÇÃO

A capacidade do cérebro humano em perceber formas e objetos à nossa volta é surpreendentemente grande e muitas vezes acaba passando despercebido por ser realizado de forma subconsciente. Ao entrarmos em contato com algum objeto, nós o compreendemos e analisamos o formato com informações anteriores, adquiridas no decorrer dos anos de nossas vidas, para criarmos novos conceitos e então essa experiência poderá ser repetir futuramente. Observando um cenário de um filme, por exemplo, rapidamente identificamos as formas básicas que compõem cada objeto pelo fato de já termos tido algum contato prévio com algum outro objeto semelhante. Entretanto, se descrevermos tal cenário de forma semântica por meio de palavras é muito provável que cada indivíduo sintetize uma imagem diferente.

Com o advento da computação, novas tecnologias e algoritmos para reconhecimento de padrões vêm sendo desenvolvidos, na tentativa de imitar o reconhecimento humano. Entretanto ensinar uma máquina a identificar um objeto tridimensional, semanticamente, não é uma tarefa simples. O desafio começa na necessidade de modelar computacionalmente os dados – processo de discretização – para então realizar uma análise sobre o objeto. Em geral, procura-se representá-los por meio de nuvem de pontos, malhas triangulares, superfícies paramétricas ou superfícies implícitas.

O interesse dessa Dissertação não está na discretização do objeto – o que já é muito conhecido na literatura –, mas sim em caracterizá-lo e ser capaz de encontrar outros objetos que sejam parecidos aos olhos humanos. Nesse processo é necessário levar em consideração as mudanças na forma do objeto, que chamaremos de deformações. Tais deformações possuem duas naturezas: rígidas e não-rígidas. As de natureza rígida não alteram o formato do objeto e são compostas de translações e rotações no espaço. Um exemplo de transformação rígida é escrever seu nome em uma folha de papel e movê-la pela mesa: as letras mantem o formato, mas estão em outro local, diferente do original. Em contrapartida, uma deformação não-rígida seria pedir aos amigos para escreverem o mesmo nome em outras folhas de papel: são o mesmo

objeto (seu nome), mas estão sob diferentes deformações (escrita pessoal de cada amigo). O que é de maior interesse da comunidade científica são as transformações não rígidas, pois são deformações que alteram o formato do objeto e, conseqüentemente, acabam dificultando seu reconhecimento por algoritmos.

1.1 Características e similaridades em objetos tridimensionais

Em termos computacionais, para que um algoritmo seja capaz de identificar objetos tridimensionais, é necessário que haja comparações entre outros objetos conhecidos que sejam similares ao objeto alvo, gerando uma medida de similaridade. Entretanto, para se definir uma medida de similaridade entre dois objetos, é necessário escolher quais propriedades, ou características, se estará comparando. Em particular, é de interesse encontrar propriedades que possam ser atribuídos de maneira equivalente entre as deformações. Em caso de objetos não rígidos, esse é um problema mais complexo, pois os modelos podem assumir diversas configurações possíveis devido à deformação. Tendo em mente as inúmeras possibilidades de deformações, considera-se apenas as deformações articuladas, que são chamadas de deformações isométricas, ou seja, transformações que deformam o objeto, mas preservam as distâncias entre pontos próximos. Na [Figura 1](#) é possível ver um modelo tridimensional e suas deformações isométricas. Observe que esse tipo de deformação ocorre naturalmente na vida real, em que, por exemplo, a flexão de braços e joelhos são parte de uma deformação isométrica.

Figura 1 – Uma mão sob vários graus de deformação isométrica.

Fonte: [Lian et al. \(2013\)](#).

Uma vez considerando-se apenas objetos com deformações isométricas, é necessário selecionar características que são invariantes à isometria e preservam a geometria intrínseca do objeto. Ou seja, características que não se alteram, ou que tenham pouca alteração, de um objeto para outro isométrico, tais como curvatura gaussiana, distância geodésica e o operador de núcleo de calor (do inglês, heat kernel signature). No exemplo da [Figura 1](#) procuraríamos por uma propriedade que caracteriza igualmente a mão aberta e a mão fechada.

Ao tratarmos esse problema de similaridade tridimensional, estamos querendo encontrar uma medida quantitativa capaz de descrever uma “distância” entre as características de dois objetos: se o valor for baixo, dizemos que os dois são similares. E novamente a medida a ser

escolhida é importante, pois diferentes maneiras de se medir a similaridade levam a diferentes conclusões.

1.2 Recuperação de objetos

Recuperação de objetos (do inglês, shape retrieval) é uma das áreas de pesquisa em Ciências da Computação responsável por processar e assimilar um grau de similaridade entre dois objetos diferentes e apontar, para o usuário, quais são os objetos mais semelhantes. No caso dessa Dissertação de Mestrado estaremos sempre nos referindo a objetos tridimensionais.

Podemos dividir a recuperação de objetos tridimensionais em duas principais categorias:

- Total: considerando as similaridades dos objetos como um todo;
- Parcial: considerando similaridades parciais entre objetos, ou pedaços que são similares.

Cada categoria se diferencia da outra na maneira em que trata um objeto. Entretanto os métodos desenvolvidos compartilham características que são desejáveis para esse tipo de resolução de problema:

1. Alta capacidade de adaptação aos tipos de modelos, ruídos, pequenas alterações locais e topologia degenerada;
2. Invariância às deformações rígidas – rotação, translação, escala – e não-rígidas;
3. Extração de características com alto grau discriminativo.

Vale ressaltar que alguns tópicos podem ser adicionados para o caso de recuperação parcial de objetos. Com relação ao [Item 2](#), espera-se que os métodos de recuperação parcial sejam capazes de encontrar semelhança entre objetos que foram localmente deformados. Além disso, a extração de estruturas capazes de identificar bem as regiões também é desejável.

A [Figura 3](#) ilustra bem a diferença entre as duas categorias citadas. Enquanto que a recuperação total procura encontrar objetos que são isometricamente idênticos, a recuperação parcial busca por isometrias em partes dos objetos.

1.2.1 Recuperação total

O termo recuperação total de objetos busca por objetos que são similares visualmente, mas que no ambiente computacional estão sob algum tipo de deformação. Em termos matemáticos, sejam M um objeto e K uma deformação de M . Queremos que o método desenvolvido seja capaz de encontrar uma medida de dissimilaridade $d(M; K)$ próxima de zero para essa

Figura 2 – Diferença entre uma recuperação de objetos global e parcial.

Fonte: [Liu et al. \(2013\)](#).

deformação. Esse tipo de problema é análogo ao problema de recuperação de imagens: encontrar duas imagens que representam a mesma cena, ou objeto.

Nessa dissertação, a não ser que citado, sempre trataremos recuperação total como recuperação de objetos

1.2.2 Recuperação parcial

O termo parcial remete à ideia de que algo é dividido em vários pedaços com significados próprios. Modelos tridimensionais, em especial, o objeto possui vários conjuntos de pedaços individuais, que juntos compõem o objeto final. Por exemplo, o corpo humano pode ser considerado um conjunto de partes individuais, como os braços e pernas.

A dificuldade em se trabalhar com recuperação parcial de objetos está na interpretação das partes de cada objeto. Diferentes níveis de parcialidade podem ser levados em consideração. Voltando ao exemplo do ser humano e do braço, se considerarmos cada braço como um objeto completo, podemos separá-lo novamente em vários subconjuntos que, mesmo sendo subconjuntos do braço, ainda são partes do corpo humano. Isso nos leva a ter que considerar o objetivo da aplicação para a qual se está querendo realizar a busca pelos objetos. Podemos dividir, então, os problemas de recuperação parcial em duas vertentes diferentes ([LIU et al., 2013](#)): busca por parte-no-completo; e busca por completo-no-completo.

1.2.2.1 Parte no completo

Seja M um objeto tridimensional completo formado por k conjuntos m_i , $i = 1; 2; \dots; k$, pertencentes a M . Dado um subconjunto m' , presente ou não em M , queremos encontrar m_i tal que $d(m'; m_i)$ seja o menor possível, em que $d(\cdot; \cdot)$ é uma medida de dissimilaridade. É possível observar que será necessário realizar a medida de dissimilaridade em todos os subconjuntos de M , o que acaba se tornando um problema de busca por um subconjunto ótimo.

Um exemplo desse tipo de recuperação parcial é procurar por uma roda em uma bicicleta.

Nesse caso estamos considerando m' como sendo nossa roda e o conjunto completo M sendo a bicicleta.

1.2.2.2 Completo no completo

Diferentemente da busca de partes em um objeto completo, a busca de completo no completo procura encontrar similaridades parciais entre dois objetos inteiros. Observe que é diferente da recuperação total, uma vez que não requer que os dois objetos sejam totalmente similares. Sejam M e N dois objetos tridimensionais. M possui k_m partes definidas como m_i , $i = 0; 1; 2; \dots; k_s$. E N , analogamente, possui k_n partes n_j , $j = 0; 1; 2; \dots; k_t$. Busca-se então encontrar as partes que são similares da seguinte forma: encontrando uma ou mais pares de partes m_i e n_j ; ou definindo uma medida de distância $d(m_i; n_j)$ por recuperação total entre m_i e n_j . Note que as partes de M e N podem não estar bem definidas, o que resulta em um problema de encontrar a interseção ótima entre M e N .

Tome como exemplo um centauro e um ser humano. Mesmo que, como objetos completos, os dois objetos não são similares, é possível notar a similaridade parcial do busto dos dois modelos.

Figura 3 – Exemplo de recuperação parcial. À esquerda estão as malhas de consulta. Ao centro, o banco de dados utilizado. À direita estão os resultados, sendo que: (a) é o resultado para uma consulta de parte no completo; e (b), completo no completo.

Fonte: [Liu et al. \(2013\)](#).

1.3 Benchmarks

Com o grande crescimento da área de pesquisa e o interesse de vários grupos em atacar o problema, houve um grande aumento na quantidade de métodos que buscam os melhores resultados. Tais resultados eram muitas vezes gerados em bases de dados com objetos de uso particular, dificultando a comparação entre duas técnicas sob o mesmo conjunto de modelos. Além disso, os resultados gerados são subjetivos para humanos, principalmente por se tratar de uma medida de qualidade entre técnicas. Isso acaba levando, ainda, a outro problema: a avaliação ser viesada.

Tentando diminuir a subjetividade e melhorar avaliação dos resultados de cada técnica desenvolvida, foram criados métodos e conjuntos de dados padronizados, chamados benchmarks. Os benchmarks apresentam um conjunto de modelos 3D que são abertos para a comunidade científica, além de um conjunto de métricas de avaliação que podem ser executados após a obtenção dos resultados. Por avaliarem sob uma mesma base com várias classes de objetos é possível realizar várias outras análises, tais como a efetividade do método desenvolvido sobre a base inteira e sobre classes isoladas.

1.4 Objetivos e contribuições

Com a visão geral do problema a ser estudado – recuperação de objetos e recuperação parcial de objetos –, objetivamos estudar as técnicas já presentes na literatura que abordam esse tema de diferentes maneiras. Além disso, muitos tipos de características intrínsecas podem ser encontradas. Para o desenvolvimento do nosso método buscaremos encontrar uma delas que seja simples e ao mesmo tempo altamente descritiva. Além disso, visamos estudar caracterizadores de séries temporais para serem utilizados nessa Dissertação de Mestrado. Isso é justificado pelo fato de se poder obter uma ordenação uniforme para classes de objetos. E, ainda nessa dissertação, buscaremos implementar o método proposto e avaliá-lo conforme os benchmarks utilizados por vários grupos de pesquisa dessa área.

Em resumo, a partir de um objeto tridimensional, dado como entrada para o método de recuperação, tentaremos buscar na base de objetos os correspondentes mais próximos do objeto dado. Uma ilustração do método para recuperação de objetos pode ser visto na [Figura 4](#). Para a recuperação parcial de objetos, o pipeline geral é praticamente idêntico, diferenciando apenas em um pré processamento das malhas em que são feitas segmentações das mesmas para se obter regiões de semânticas diferentes – braço separado do tronco e pernas, por exemplo.

Figura 4 – Pipeline empregado para a recuperação de objetos tridimensionais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como principais contribuições dessa Dissertação de Mestrado, podemos citar:

- Descrição de uma nova abordagem para recuperação global e parcial de objetos utilizando descritores de séries temporais através da ordenação de suas características.
- Utilização de apenas uma característica para descrição dos objetos.

Além disso, com o desenvolvimento dessa dissertação foi possível obter duas publicações: a primeira envolvendo recuperação de objetos, no Workshop of 3D Object Retrieval, realizado em Zurich em 2015 (LIAN *et al.*, 2015); e a segunda sobre recuperação parcial de objetos, no Conference on Graphics, Patterns and Images, em 2016 (NAKANISHI *et al.*, 2016).

1.5 Organização da monografia

No capítulo que se segue apresentaremos alguns trabalhos que foram desenvolvidos visando a recuperação de objetos não rígidos, tanto na área de recuperação de objetos como recuperação parcial. Nesses ramos de pesquisa várias abordagens diferentes foram utilizadas e várias técnicas desenvolvidas. Além disso discutiremos algumas medidas estatísticas que foram propostas em benchmarks, bem como um padrão para comparação das técnicas e apresentaremos algumas bases de dados utilizados pela comunidade científica.

No [Capítulo 3](#), abordaremos alguns conceitos necessários para melhor entendimento da abordagem a ser desenvolvida nessa Dissertação. Apresentaremos algumas características utilizadas em objetos tridimensionais e alguns extratores de características utilizadas em séries temporais.

A seguir, no [Capítulo 4](#) e no [Capítulo 5](#), apresentamos a metodologia dessa Dissertação de Mestrado, utilizando os conceitos apresentados no capítulo anterior. Além disso, apresentaremos os resultados obtidos para cada tipo de problema atacado, uma breve discussão dos mesmos em questões quantitativas e qualitativas, e as principais dificuldades encontradas na técnica.

Por fim, no [Capítulo 6](#), apresentaremos nossas considerações finais sobre a Dissertação de Mestrado. Apresentaremos, também, a publicação obtida com o desenvolvimento da técnica e trabalhos futuros que podem ser derivados a partir das metodologias apresentadas.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com o crescimento da capacidade de produção de objetos tridimensionais e o aumento da capacidade de armazenamento desses dados surgiu a necessidade de criação de ferramentas de buscas apropriadas. Diferentemente da busca por textos, não é possível realizar uma comparação tão precisa em objetos tridimensionais. Em sua maioria ocorre a extração e comparação de características intrínsecas de cada objeto para se encontrar outros que são semelhantes – não necessariamente apenas objetos isométricos. Na literatura é possível encontrar uma variedade de métodos desenvolvidos para recuperação de objetos. Inicialmente surgiram vários algoritmos que buscam por similaridades em objetos rígidos. A busca por semelhança em objetos não-rígidos é considerado, ainda, um ramo de interesse na pesquisa.

2.1 Classificação dos métodos de recuperação de objetos

Dentre os métodos apresentados até então, é possível classificá-los em algumas categorias (LIAN et al., 2013): métodos que utilizam características locais, estruturas topológicas, propriedades geométricas invariantes à isometria, comparação direta ou formas canônicas.

2.1.1 Características locais

Técnicas de recuperação de objetos baseados em características locais medem a dissimilaridade através de valores que são extraídos de vários conjuntos de pontos que estão próximos, em cada objeto. Esses valores são armazenados em algum tipo de estrutura a fim de se extrair a métrica de dissimilaridade. Vale ressaltar que tais características devem ser invariantes às transformações isométricas.

Operadores de difusão são um exemplo de características locais bem utilizadas na literatura. Ovsjanikov et al. (2010) utiliza o núcleo de calor (do inglês, Heat Kernel) para encontrar correspondências entre dois objetos. Essa característica utiliza noção de que o calor

se difunde mais rapidamente em regiões mais planas, e em regiões com mais detalhes ocorre uma difusão menor. Dessa forma valores ao longo do tempo são obtidos e uma análise com esses vários estados – análise multivariada – da característica pode ser realizado. Uma derivação do núcleo de calor proposto por [Sun, Ovsjanikov e Guibas \(2009\)](#) é o Heat Kernel Signature (HKS), que será descrito com mais detalhes na [subseção 3.1.4](#).

Outro tipo de característica considerada local é o Salient Local Features (SIFT) (Características locais salientes, em tradução livre), proposto por [Ohbuchi et al. \(2008\)](#). Nessa abordagem, é criado um vetor de características a partir do histograma das características extraídas do objeto. São realizadas capturas da forma do objeto em imagens sob vários ângulos do objeto e então as características extraídas são transformadas em histogramas para medida de dissimilaridade.

2.1.2 Estruturas topológicas

Recuperação de objetos tridimensionais baseados em estruturas topológicas realizam comparações entre as topologias dos objetos. Em geral, as topologias são representadas por meio de uma estrutura de grafos, fazendo com que o problema se torne encontrar a dissimilaridade de dois grafos.

Um grafo topológico que pode ser extraído de um objeto tridimensional é o grafo de Reeb, introduzido por [Reeb \(1946\)](#). Esses grafos são definidos através de uma relação de equivalência entre os pontos. Se dois pontos estão em um mesmo componente conexo, então eles fazem parte da mesma região no grafo. [Hilaga et al. \(2001\)](#), baseiam-se nos grafos de Reeb para encontrar objetos que são similares.

Um outro tipo de estrutura topológica extraída é o esqueleto tridimensional, como o apresentado por [Sundar et al. \(2003\)](#). Segundo os autores, o esqueleto de dois modelos isométricos não se altera durante a articulação do objeto. Dessa forma é possível encontrar objetos similares utilizando os seus esqueletos. Para comparação entre os modelos, novamente são utilizadas técnicas de comparação de grafos.

2.1.3 Propriedades geométricas globais

Ao contrário das características locais, propriedades globais levam em consideração o objeto como um todo para se construir o descritor que será utilizado na recuperação não rígida. Um exemplo de característica geométrica considerada global é a distância geodésica entre os pontos, pois seu cálculo envolve todo o objeto. [Jain e Zhang \(2007\)](#) propuseram utilizar o espectro de uma matriz de distâncias geodésicas para comparação de objetos tridimensionais, dizendo que os autovalores obtidos são invariantes à isometria.

Seguindo a mesma linha pensamento, a utilização do espectro da matriz de Laplace-Beltrami foi apresentado por [Reuter, Wolter e Peinecke \(2005\)](#). Como tal operador pode ser

calculado para qualquer representação da superfície (explícita e implícita), essa técnica se torna mais genérica para calcular as características dos objetos.

Uma outra abordagem para calcular características globais é utilizado por [Mahmoudi e Sapiro \(2009\)](#), realizando comparações entre as distribuições de distâncias intrínsecas (distância geodésica, distância de difusão, etc). As distribuições geradas são armazenadas em histogramas, e as comparações entre essas assinaturas são feitas através de modelos estatísticos. Essa abordagem é semelhante à que será apresentada nessa dissertação de mestrado, em que as malhas são descritas por uma determinada distribuição e sua comparação é feita utilizando ferramentas estatísticas.

2.1.4 Correspondência direta

A correspondência direta entre objetos é baseada na comparação de dois espaços métricos, que nesse caso representam cada objeto tridimensional. [Mémoli e Sapiro \(2005\)](#) introduziram a teoria baseada na distância de Gromov-Hausdorff entre espaços métricos aplicado em conjunto de pontos, que representavam um objeto tridimensional. Utilizando desse arcabouço teórico, [Memoli \(2007\)](#) estendeu o seu uso para superfícies, sendo possível a utilização da distância de Gromov-Hausdorff para recuperação de objetos.

Várias outras variantes do uso da distância de Gromov-Hausdorff foram desenvolvidas, por ser uma métrica que demanda muito tempo de processamento. [Bronstein, Bronstein e Kimmel \(2006\)](#) formulou esse problema como um problema de otimização contínua, utilizando Multidimensional Scaling.

Apesar da comparação direta entre os objetos apresentar bons resultados, seu alto custo computacional ([LIAN et al., 2013](#)) desencoraja o uso para aplicações que necessitam de respostas próximas do imediato. Além disso, com o aumento da quantidade de objetos em um banco de dados, seu uso vem se tornando cada vez mais inviável.

2.1.5 Formas canônicas

Formas canônicas são uma forma de representação tal que todos os objetos possuem uma forma de descrição única. Dessa forma, se dois objetos são semelhantes, então sua forma canônica devem ser a mesma, ou com um valor de dissimilaridade muito baixo.

[Elad e Kimmel \(2003\)](#) introduziram a ideia de utilizar as formas canônicas em objetos tridimensionais, extraíndo as distâncias geodésicas dos pontos e então aplicando o Multidimensional Scaling (MDS), um método de projeção que procura preservar as distâncias entre os pontos da melhor maneira possível. Com isso, os autores conseguiram aproximar a distância geodésica calculada na superfície do objeto para uma distância euclidiana. Mais recentemente, [Lian et al. \(2010b\)](#) apresentaram uma abordagem utilizando a projeção MDS juntamente com descritores locais.

Uma outra abordagem semelhante, porém sem utilização das distâncias geodésicas foi apresentada por [Rustamov \(2007\)](#). Nesse trabalho, o autor apresenta uma forma de caracterizar os objetos tridimensionais utilizando uma assinatura, obtida através do espectro do operador de Laplace-Beltrami. Essa assinatura funciona como um espaço n -dimensional, e ao se projetar um objeto no espaço visual, é possível visualizar a dissimilaridade entre dois modelos.

2.2 Classificação dos métodos de recuperação parcial

Os métodos para recuperação parcial, diferentemente da recuperação de objetos, devem ser capazes de reconhecer semelhanças em cada parte dos modelos, e não apenas discriminá-los como semelhantes. Na literatura são apresentadas algumas categorias para classificação dos algoritmos ([LIU et al., 2013](#)), similar à classificação de recuperação de objetos baseados em: características locais, segmentação, e visão.

2.2.1 Características locais

Semelhante aos métodos baseados em características locais descritos na [subseção 2.1.1](#), a recuperação parcial busca extrair informações através de uma vizinhança de pontos para cálculo da dissimilaridade. Esse tipo de metodologia utilizada apresenta a vantagem de não precisar de uma segmentação avançada do modelo, ou seja, não é necessário dividir o objeto tridimensional em partes semânticas menores (por exemplo, dividir um modelo de um cão em cabeça, corpo, patas e rabo). A principal diferença com os métodos para recuperação total de objetos está no modo de comparar as características. Em geral, os métodos de recuperação parcial estão interessados em pontos-chaves da malha – regiões de um objeto que contêm mais informação, por exemplo, regiões de alta ou baixa curvatura – e realizam as comparações de regiões ou pequenos conjuntos. Por exemplo, [Zou et al. \(2008\)](#) utiliza um detector de pontos-chave no espaço de escala geodésica e então realiza a comparação das características nesses pontos para encontrar regiões similares.

Outra abordagem utilizada é a proposta por [Haar e Velkamp \(2007\)](#), em que é utilizado o algoritmo Iterative Closest Point (ICP) para encontrar o melhor alinhamento possível entre duas nuvens de pontos provenientes de escaneamentos 3D. Por outro lado, a utilização de Bag of Features (BoF) tem se tornado popular, devido aos bons resultados apresentados em processamento de textos e imagens. [Lavoué \(2011\)](#) constrói um dicionário de características visuais utilizando o operador de Laplace-Beltrami calculado sobre pontos uniformemente amostrados na superfície. Enquanto que [Ovsjanikov et al. \(2009\)](#) utiliza heat kernels para construir o seu dicionário. É possível observar pelos trabalhos da literatura, que apesar das diferentes características utilizadas, todas conseguem discriminar bem um objeto de sua isometria e as técnicas diferem no método em que processam tais informações 3D.

2.2.2 Segmentação

No caso de recuperação parcial de objetos baseando-se em segmentação, a definição explícita das partes se faz necessária. Cada parte deve conter informações que são relevantes para a caracterização do objeto e da sua parte. Em geral, utilizam-se estruturas do tipo grafo para armazenamento das informações topológicas, em conjunto com os atributos geométricos extraídos. [Agathos et al. \(2010\)](#), por exemplo, segmenta os objetos tridimensionais em grafos para compará-los entre si utilizando técnicas específicas para isso.

Uma outra abordagem explorada é a de [Berger et al. \(2010\)](#), que utiliza do vetor de Fiedler para analisar os objetos tridimensionais. Apesar de não ser uma técnica voltada para segmentação, essa ferramenta pode ser usada para tal finalidade, apresentando bons resultados. O trabalho de [Rodola, Bulò e Cremers \(2014\)](#), por sua vez, busca segmentar o objeto através de segmentação consensual de várias outras segmentações. Tal método analisa um conjunto de possíveis segmentações do modelo e então busca por uma segmentação após a análise dos candidatos.

2.2.3 Visão

Recuperação parcial baseado em visão é uma metodologia diferente a ser apresentada, pois resume-se em extrair visões, ou imagens, a partir de uma esfera que cobre o objeto por completo. Logo, a comparação entre dois objetos se torna a comparação de suas imagens geradas utilizando técnicas de processamento de imagens. Uma das maiores dificuldades dessa metodologia está na capacidade de processar várias consultas rápidas sobre imagens 2D extraídas de inúmeros objetos. A vantagem desses métodos está na quantidade de processamento sobre imagens ao invés de processar um objeto tridimensional.

Os métodos presentes na literatura propõem capturar imagens dos objetos a partir dos eixos principais ([LIU et al., 2008](#)) e ao redor de uma esfera ([CHEN et al., 2003](#)). Ao se capturar as imagens, comparações são realizadas para se chegar a uma métrica de similaridade. Seguindo uma abordagem semelhante, [Shao et al. \(2011\)](#) propõe uma busca por modelos tridimensionais baseados em rascunhos de imagens. Ao contrário de realizar uma busca através de um objeto tridimensional, a proposta oferece a possibilidade de um usuário leigo encontrar modelos realizando comparações com imagens.

2.3 Benchmarks e bases de dados

Um benchmark é um conjunto de testes realizados sobre diferentes tecnologias com a finalidade de comparar o desempenho dos mesmos. Com o crescente interesse por se encontrar objetos tridimensionais que são similares, e com o crescente aumento de algoritmos desenvolvidos, viu-se a necessidade de um padrão para comparação das técnicas. Esse padrão foi,

inicialmente, introduzido por [Shilane et al. \(2004\)](#) com Princeton Shape Benchmark (PSB)¹, utilizando-se de métricas e outros benchmarks que já eram muito utilizados em outras áreas de processamento de dados, tais como textos e imagens. Além disso, o PSB apresentou um conjunto de malhas que devem ser processadas para avaliar o desempenho do algoritmo.

Um dos problemas que pode ser apontado para a base de malhas apresentado por [Shilane et al. \(2004\)](#) é a quantidade desigual de instâncias em cada classe, o que torna a classificação do método mais parcial. Para resolver esse problema, [Fang et al. \(2008\)](#) apresentaram uma base com classes balanceadas: o National Institute of Standards and Technology Shape Benchmark (NIST).

Com essa introdução de métrica para se avaliar o desempenho dos algoritmos, vários outros bancos de dados foram surgindo com diferentes propósitos. Entre eles, podemos destacar o concurso anual de recuperação de objetos, Shape Retrieval Contest (SHREC). A cada ano, desde de 2006, são propostos diversos problemas envolvendo recuperação de objetos, que vão desde recuperação de objetos isométricos, ou seja, que sofreram algum tipo de deformação não-rígida; até recuperação de objetos parciais, que podem ser partes de objetos completos, ou mesmo objetos com falhas, tais como buracos. Os principais problemas de interesse para esse trabalho de mestrado são os de recuperação de objetos não-rígidos e podemos destacar as bases SHREC 2010 ([LIAN et al., 2010a](#)), SHREC 2011² ([LIAN et al., 2011](#)) e SHREC 2015³ ([LIAN et al., 2015](#)). Essas bases utilizadas apresentam um conjunto de classes bem diversificado e balanceado, fazendo com que os métodos sejam submetidos a diversos tipos de objetos. Além disso, elas utilizam as métricas propostas pelo PSB, garantindo uma padronização na comparação dos algoritmos. Na [Figura 5](#) apresentamos um exemplo dos objetos contidos na base SHREC 2011 retirado da página da competição.

Nessa Dissertação de Mestrado utilizamos a base SHREC 2011 para análise do método desenvolvido. Essa base apresenta uma boa diversidade de objetos e classes (30 classes com 20 objetos cada) e é utilizado para recuperação de objetos. Para a recuperação parcial de objetos utilizamos essa mesma base, devido à dificuldade de encontrar um banco de objetos que se fosse adequado para o método desenvolvido para recuperação parcial. Em 2015, surgiu mais uma competição de recuperação de objetos não rígidos, proposto por [Lian et al. \(2015\)](#). Como consequência da submissão do nosso método para a competição, tivemos acesso à base de dados. Utilizamos seus objetos apenas para processamento e submissão da matriz de distâncias. Entretanto, por possuir mais malhas (20 objetos distribuídos em 60 classes), uma maior variedade de resultados poderia ser obtido. Além disso, segundo os próprios organizadores da competição, essa base contém deformações que alteram a topologia dos objetos, ou seja, regiões antes separadas podem aparecer juntas – duas pernas abertas que se fecharam, por exemplo.

¹ <<http://shape.cs.princeton.edu/benchmark/>>, último acesso em 26/04/2016.

² <<http://www.itl.nist.gov/iad/vug/sharp/contest/2011/NonRigid/>>, último acesso em 01/05/2016.

³ <<http://www.icst.pku.edu.cn/zli/shrec15-non-rigid/>>, último acesso em 01/05/2016.

Figura 5 – Exemplo dos objetos contidos na base SHREC 2011.

Fonte: [Lian et al. \(2011\)](#).

CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos para melhor entendimento dessa dissertação de Mestrado. Entre tais conceitos estão as características estudadas e as medidas utilizadas. Cada característica a ser apresentada é invariante à isometria e possuem diferentes vantagens a serem exploradas na área de recuperação de informação. Uma analogia pode ser feita com as feições humanas que permitem diferenciar pessoas uma das outras: apesar das feições serem diferentes, ainda é possível identificá-lo.

Além do conjunto de características a serem apresentadas, as medidas escolhidas também formam a base desse trabalho. Em nosso contexto, apresentaremos diferentes medidas utilizadas em modelos estatísticos para mensurar a similaridade entre duas séries temporais distintas. Para melhor análise da efetividade dessas medidas, apresentaremos ainda meios de avaliação que servem como referência para comparação de trabalhos na área de recuperação de informação.

3.1 Descritores de objetos tridimensionais

Um dos grandes desafios na área de recuperação de informação é a escolha de bons descritores e assinaturas. Espera-se que sejam capturados propriedades capazes de distinguir objetos pertencentes a diferentes classes. Em geral espera-se que os descritores possuam as seguintes propriedades ([ABDELRAHMAN; EL-MELEGY; FARAG, 2012](#)):

1. Invariância à isometria: objetos isométricos devem possuir o mesmo descritor, independente de sua posição no espaço;
2. Invariância à escala: diferentes tamanhos não devem alterar o descritor;
3. Similaridade: objetos similares devem possuir descritores similares;
4. Eficiência: a complexidade computacional deve ser razoável;

5. Completude: um descritor deve ser capaz de descrever um objeto por completo.

Para cálculo de características de objetos tridimensionais, é necessário que sua representação computacional esteja na sua forma discretizada. Um objeto tridimensional discretizado pode assumir várias formas, tais como malha de triângulos (ou quadriláteros) para superfícies, malha de tetraedros (ou hexaedros) para volumes, nuvem de pontos, superfícies paramétricas ou superfícies implícitas. Consideraremos apenas malhas triangulares para o desenvolvimento dessa Dissertação de Mestrado. Denominamos, então, uma malha de triângulos $M = (V; E; F)$ em que V representa o conjunto vértices; E , o conjunto de arestas; e F , o conjunto de faces. Cada vértice $v_i \in V$ é representado por suas coordenadas cartesianas no espaço, $v_i = (x_i; y_i; z_i)$. As arestas representam uma ligação entre dois pontos, $e_j = (v_j; v_k)$, com $v_j, v_k \in V$. E as faces podem ser representadas pelas arestas que as compõem, $f_i = (e_j; e_k; e_l)$, com $e_j, e_k, e_l \in E$.

3.1.1 Curvaturas

O tensor de curvatura é bem conhecido da geometria diferencial para cálculo de curvaturas em variedades. Entretanto, pode possuir várias interpretações, por ser linear por partes. O que Alliez et al. (2003) propõem é construir um campo tensorial de curvatura que é linear por partes, estimando o valor da curvatura em cada vértice. Para isso se calcula a curvatura em cada aresta do objeto e em seguida é possível definir os valores em cada ponto. Dada uma região B arbitrária, podemos realizar a soma de cada parte de B afim de obter o tensor $T(v)$:

$$T(v) = \frac{1}{|B(v)|} \sum_{e \in B(v)} \hat{A} \cdot b(e) w(B(v); e) \tilde{e} \otimes \tilde{e}; \quad (3.1)$$

em que temos v representando um vértice arbitrário; $B(v)$ uma região definida por v ; e uma aresta em $B(v)$; $|B(v)|$ sendo a área de $B(v)$; $b(e)$ sendo o ângulo com sinal formado pelas normais dos triângulos incidentes à aresta e (como mostrado na Figura 6); $w(B; e)$ é uma ponderação feita entre e e $B(v)$ para aliviar o efeito das aresta que não estão totalmente contidas em $B(v)$; $\tilde{e}$ é o vetor unitário com mesma direção de e ; e o operador $\otimes$ é o produto tensorial entre dois vetores.

As curvaturas principais podem ser obtidas através do espectro do tensor $T(v)$. A normal no vértice corresponde ao autovetor associado ao autovalor de menor magnitude, enquanto que os demais autovalores são correspondem às curvaturas mínima e máxima, denominados $k_{\min}$ e $k_{\max}$, respectivamente. Vale ressaltar que a magnitude dos autovalores é invertida: o menor autovalor corresponde à direção da curvatura máxima, e o maior autovalor está associado à direção da curvatura mínima. As curvaturas gaussianas e médias são obtidas multiplicando e somando-se as curvaturas máximas e mínimas, respectivamente. A implementação foi feita em MATLAB e está presente no pacote Graph Toolbox¹.

¹ <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/5355-toolbox-graph>>, acesso em 27/07/2015

Figura 6 – Região B utilizada para cálculo das curvaturas principais.

Fonte: Alliez et al. (2003).

3.1.2 Variação de superfície

Variação de superfície (do inglês, surface variation) é uma ferramenta utilizada para estimação da curvatura média em nuvem de pontos. Nesses casos não há informação de vizinhança e muitas vezes o ruído presente no objeto impede a medição precisa da curvatura. Pauly, Gross e Kobbelt (2002) e Pauly, Keiser e Gross (2003) foram os introdutores desse conceito. Estendemos o conceito apresentado pelos autores originais do trabalho para malhas de triângulos por ser um estrutura com menos vértices e ainda contém a informação de conectividade.

Nessa técnica é utilizada Análise de Componentes Principais (PCA) da vizinhança de um determinado ponto para determinar as características da superfície. Dado um conjunto de pontos V pertencentes a uma malha M , define-se uma vizinhança N_p do ponto $p \in V$ utilizando as informações de vizinhanças inerentes de M . Seja $\bar{p}$ o centroide e calcula-se a matriz de covariância C de N_p :

$$C = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k (p_{i1} - \bar{p}_1)^2 & \sum_{i=1}^k (p_{i1} - \bar{p}_1)(p_{i2} - \bar{p}_2) & \sum_{i=1}^k (p_{i1} - \bar{p}_1)(p_{i3} - \bar{p}_3) \\ \sum_{i=1}^k (p_{i2} - \bar{p}_2)(p_{i1} - \bar{p}_1) & \sum_{i=1}^k (p_{i2} - \bar{p}_2)^2 & \sum_{i=1}^k (p_{i2} - \bar{p}_2)(p_{i3} - \bar{p}_3) \\ \sum_{i=1}^k (p_{i3} - \bar{p}_3)(p_{i1} - \bar{p}_1) & \sum_{i=1}^k (p_{i3} - \bar{p}_3)(p_{i2} - \bar{p}_2) & \sum_{i=1}^k (p_{i3} - \bar{p}_3)^2 \end{pmatrix}; \quad \text{com } i_j \in N_p. \quad (3.2)$$

Segundo Pauly, Keiser e Gross (2003), a aproximação para curvatura média no ponto p , $s(p)$ corresponde ao quociente do menor autovalor de C dividido pela soma de todos os autovalores:

$$s_n(p) = \frac{l_0}{l_0 + l_1 + l_2}; \quad (3.3)$$

em que os valores de l_i são ordenados tais que $l_0 \leq l_1 \leq l_2$.

Observe que a variação de superfície é dependente do número de vizinhos escolhidos. Dessa forma, quanto mais vizinhos, menor vai ser a interferência de ruídos. A Figura 7 ilustra a variação dos valores para diferentes valores de vizinhança.

Figura 7 – Variação de superfície variando o número de vizinhos. À esquerda está o modelo original; variação de superfície com 10 vizinhos ao centro; e variação com 50 vizinhos à direita. A cor azul representa menores valores.

Fonte: [Pauly, Keiser e Gross \(2003\)](#).

3.1.3 Vetor de Fiedler

O vetor de Fiedler é uma característica que define a conectividade da malha, ou seja, como os vértices estão conectados entre si. É possível utilizar essa informação como uma forma de ordenação dos vértices, organizando os dados como uma série. Além de ser invariante à isometria, ele aplica uma transformação na ordem das características, permitindo assim a utilização de medidas semelhantes às utilizadas em métricas temporais.

Dada uma variedade M com métrica Riemanniana e seja uma função de valores reais e classe C^2 definida sobre M . O operador de Laplace-Beltrami D é definido como:

$$Df = \text{div}(\text{grad}(f)):$$

E o problema de autofunções do Laplaciano se torna $Df = -\lambda f$:

Para calcularmos os autovalores, definiremos uma matriz Laplaciana discreta. Dado uma malha M como definido no começo deste capítulo, considere $N(i)$ o conjunto de vizinhos do vértice i . Definiremos uma matriz de adjacência ponderada A como sendo:

$$W_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}; \quad (3.4)$$

e a matriz diagonal V tal que $V_{ii} = v_i$, com $v_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij}$. Define-se então uma matriz de rigidez $A = V - W$ e uma matriz diagonal de massas $D = \text{diag}(d_1; \dots; d_n)$, com cada d_i representando uma massa associada ao vértice i . A matriz Laplaciana, então, é definida como sendo $L = D^{-1}A$.

Uma escolha simples para os pesos w_{ij} e para as massas d_i são valores unitários: $w_{ij} = 1$ se existe ligação de i para j e 0 caso contrário; e $d_i = 1$. Nesse caso, a matriz L se torna a matriz Laplaciana topológica e provê informações de conectividade, mas não de geometria da malha. Essa matriz é muito estudada em teoria dos grafos ([CHUNG, 1997](#)) por apresentar propriedades

Figura 8 – Ângulos utilizados para cálculo dos pesos cotangentes na matriz Laplaciana. Em cinza é a área de Voronoi do vértice i .

Fonte: Adaptada de [Sorkine \(2006\)](#).

algébricas relacionadas às propriedades combinatoriais do grafo. Uma abordagem para inserir a informação de geometria ao operador é utilizando pesos cotangentes ([PINKALL; POLTHIER, 1993](#)):

$$w_{ij} = \frac{\cot(a_{ij}) + \cot(b_{ij})}{2}; \quad (3.5)$$

em que a_{ij} e b_{ij} são os ângulos opostos da aresta $(v_i; v_j)$, como mostra a [Figura 8](#). [Desbrun et al. \(1999\)](#) refinaram essa definição modificando, também, a matriz de massas:

$$d_i = |W_i|; \quad (3.6)$$

em que $|W_i|$ representa a área de Voronoi do vértice i , aproximada como sendo um terço da soma das áreas dos triângulos adjacentes a v_i .

Com a extração do espectro das matrizes Laplacianas é possível encontrar as informações de conectividade da malha. Uma vez que a matriz L é simétrica, positiva e semi-definida, ela possui uma base ortonormal. Sejam os autovalores denotados por λ tal que

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n;$$

Nota-se então que os primeiros autovetores, associados aos menores autovalores, são suaves. Dessa forma, dizemos que o autovetor associado ao primeiro autovalor não nulo λ_1 é o vetor de Fiedler. Esse vetor é dito ser solução para um problema NP-difícil de Arranjo Linear Mínimo (do inglês, Minimum Linear Arrangement (MLA)), proposto por ([HARPER, 1964](#)), em que o objetivo é procurar por permutações $p: V \rightarrow \{1; 2; \dots; n\}$ dos vértices de M tal que $\sum_{(i,j) \in E} |p(i) - p(j)|$ seja mínimo.

Tal vetor apresenta a menor variação possível na malha – depois do vetor nulo – e consequentemente podemos associá-lo a uma ordenação possível dos vértices V . Observe na

Figura 9 – Exemplo de ordenação dos vértices. À esquerda está uma ordenação arbitrária, possivelmente como é dada no arquivo da malha; à direita os vértices estão ordenados pelo vetor de Fiedler.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 um exemplo simples dessa ordenação: inicialmente a malha é lida e apresentada conforme os vértices são lidos do arquivo; em seguida, aplicam-se o a ordenação de Fiedler.

Essa informação provida pelo vetor de Fiedler, extraído da matriz Laplaciana geométrica, permite simular uma ordenação dos vértices e, assim, aplicar medidas de séries em objetos que naturalmente não apresentam essas características. Um ponto a ser destacado que a ordenação em malhas isométricas pode aparecer com o sentido invertido.

3.1.4 Heat Kernel Signature

Para definirmos o HKS, é necessário introduzir noções básicas de difusão de calor em superfícies tridimensionais. O núcleo de calor (do inglês, heat kernel) calcula o fluxo de calor ao longo da superfície M e é definido para cada ponto sobre M :

$$D_M u(x;t) = - \frac{\partial}{\partial t} u(x;t); \quad (3.7)$$

Observe que D_M denota o operador de Laplace-Beltrami. A função $u(x;t)$ representa a solução da equação de calor com condições iniciais $u(x;0) = u_0(x)$. Sendo x e y dois pontos da superfície, para $u_0(x) = d(x-y)$ em que

$$d(x-y) = \begin{cases} 8 & \\ < 0 & \text{se } x \neq y \\ \vdots & \bullet \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é a função delta de Dirac, que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(x-y) dx = 1;$$

dizemos que a solução da Equação 3.7 é chamada núcleo de calor e é denotado por $k_t(x;y)$. Para uma superfície M , definimos:

$$k_t(x;y) = \sum_{i=0}^n e^{-\lambda_i t} f_i(x) f_i(y) \quad (3.8)$$

em que l_i e f_i correspondem ao i -ésimo autovalor correspondente ao i -ésimo autovetor do operador de Laplace-Beltrami que satisfazem $D_M l_i = f_i l_i$.

Com a definição de núcleo de calor, passamos a definir uma assinatura do núcleo de calor (Heat Kernel Signature). Dado um ponto x na malha tridimensional M , definimos o $HKS: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo uma função do domínio temporal:

$$HKS(x; t) = k_t(x; x) \quad (3.9)$$

Dessa forma, o HKS passa a ser uma função apenas do tempo e do ponto de interesse. Com isso é possível eliminar problemas de redundância provenientes do núcleo de calor e evitar comparações desnecessárias entre assinaturas de malhas e pontos. Além disso, [Sun, Ovsjanikov e Guibas \(2009\)](#) apresentaram uma prova de que essa característica é tão informativa quanto o núcleo de calor, apesar de ser bem menos complexa. E por se tratar de uma derivação deste, o HKS é capaz de herdar as propriedades do heat kernel, tais como ser intrínseco, robusto e de multi-escala.

O cálculo numérico do núcleo de calor é feito através do operador discreto geométrico de Laplace-Beltrami apresentado anteriormente. Cada objeto tridimensional é avaliado no intervalo logarítmico de tempo $t = [t_{min}; t_{max}]$.

3.2 Descritores de séries temporais

Uma descrição para séries temporais pode ser dada como: observações capturadas em sequência ao longo do tempo, geralmente ocorrendo em intervalos regulares. Vale ressaltar que, para essas observações, a ordem é essencial, ao contrário do que acontece com dados de regressões lineares, por exemplo. O principal interesse nesse tipo de observação temporal é a análise da dependência dos dados e como isso influencia a série como um todo.

Ao se observar dados ao longo do tempo, muitas vezes não é visível a relação que está agregada. Devido a essa dificuldade tem se utilizado de ferramental estatístico para se descrever o comportamento das séries temporais. Várias medidas são simples, tais como média, mediana e frequência. Entretanto, para séries mais complexas, tais como séries financeiras e áudio, a utilização de ferramentas mais sofisticadas se faz necessário.

Nessa seção apresentaremos a principal ferramenta utilizada nesse trabalho de mestrado, denominada Scattering wavelets. Por se tratar de uma ferramenta nova e seu uso ser inédito na área de processamento geométrico, sua escolha pode não parecer intuitivo a princípio, mas ao se simular a ordenação das características dos objetos tridimensionais, é possível encontrar bons resultados. A principal vantagem apresentada por essa técnica é manter a relação temporal das amostras, ao contrário do que acontece com a transformada de Fourier, por exemplo.

3.2.1 Scattering Wavelets

Como principais extratores de características de séries temporais pretendemos analisar e utilizar a técnica de scattering wavelets (ANDÉN; MALLAT, 2011; ANDÉN; MALLAT, 2012; CHEN; RAMADGE, 2013). Tal técnica é bem recente e possui propriedades importantes, tais como análise de altas frequências sem muita perda de informação e a capacidade de manter a informação temporal. Dessa forma será possível analisar a sequência ordenada obtida anteriormente de uma maneira mais precisa.

Essa técnica consegue caracterizar o sinal através de várias frequências definidas por um banco de filtros wavelet (como apresentado na Figura 10), através de repetidas aplicações do filtro. Na Figura 11 é possível se ter uma ideia de como a técnica funciona: o sinal x é submetido ao banco de filtros e gera um resultado. O sinal que seria descartado é então processado novamente para que se obtenha um segundo conjunto filtrado e assim sucessivamente. O resultado é capaz de recuperar informações de altas frequências ao mesmo tempo que é estável a deformações do sinal. Em termos matemáticos, dado um banco de filtros wavelets definidos por $\{\psi_l\}_{l \in L}$, em que l é o centro do filtro, a transformada wavelet é definida convoluindo x com os filtros $W_x(t)$, definidos na Equação 3.10, em que f representa o filtro passa baixa cobrindo intervalos de baixa frequência não coberto pelas demais wavelets.

Figura 10 – Banco de filtros utilizado para dois níveis do Scattering Wavelets. No eixo das abscissas, a frequência.

$$W_x(t) = \begin{matrix} x \circ f(t) \\ x \circ \psi_l(t) \end{matrix}_{l \in L} \quad (3.10)$$

Então calcula-se o módulo e toma-se a média no tempo, como na Equação 3.11

$$|x \circ \psi_l| \circ f(t) \quad (3.11)$$

Entretanto, com essa representação, ocorre perda de informações espectrais não estacionárias, tais como transientes, ou seja, picos na frequência. Para recuperar a parte da informação

Figura 11 – Imagem ilustrativa do funcionamento da técnica Scattering Wavelets

Fonte: Elaborada pelo autor.

perdida, realiza-se decomposições adicionais cascadeando o mesmo operador, ou seja, aplicando-se o filtro novamente, como mostrado na [Equação 3.12](#).

$$W_{|x * \psi_{j_1}|}(t) = \begin{matrix} |x * \psi_{j_1}| * f(t) \\ |x * \psi_{j_1}| * \psi_{j_1}(t) \end{matrix} \quad \forall j_1 \in L \quad (3.12)$$

Dessa forma, a informação perdida na convolução de x com f está contida nos coeficientes $|x * \psi_{j_1}| * \psi_{j_2}(t) * f(t)$. Analogamente, é possível aplicar recorrentemente o operador nos demais coeficientes, obtendo um cascadeamento de wavelets.

Além disso, pela técnica oferecer o resultado por meio de coeficientes obtidos através de janelas temporais, é possível criar grupos de vértices para serem analisados, diminuindo assim, o processamento de grande quantidade de dados. Na [Figura 12](#) são apresentados os coeficientes de primeira e segunda ordem obtidos, em forma de imagem. Observe que no eixo vertical encontram-se os coeficientes e o eixo horizontal é o eixo do tempo. Cada célula na figura corresponde a uma janela temporal.

Como medida entre os coeficientes obtidos pretendemos utilizar o técnica de correlação cruzada, vinda da estatística. Essa medida permite mensurar a similaridade entre duas séries temporais. Utilizaremos os coeficientes obtidos com a técnica scattering wavelets como uma série temporal. É possível observar que a correlação cruzada independe do tamanho das séries, podendo ambas serem de tamanhos diferentes. Então será possível analisar malhas que possuam números de vértices também distintos. Dessa forma será possível obter uma medida de dissimilaridade entre duas malhas triangulares distintas.

Figura 12 – Exemplo de coeficientes obtidos através da técnica Scattering wavelets. Cada linha representa uma frequência; e cada coluna, uma janela da série. A figura a representa o resultado após a aplicação dos filtros, enquanto que a figura b é a aplicação dos filtros no resíduo produzido por a.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Medidas de dissimilaridade

A comparação de dois objetos – tridimensionais, imagens, sinais temporais - é um passo importante para recuperação de informação. Na maioria dos casos, uma comparação direta não é possível. Na perspectiva de objetos tridimensionais, isso ocorre por vários motivos: pelo tamanho dos dados; falta de correspondência entre os pontos; semânticas diferentes, entre outros. Para amenizar e facilitar os passos de comparação, são extraídas características (como as apresentadas anteriormente nesse capítulo) capazes de descrever unicamente o objeto. Como foi apresentado, as características dos objetos tridimensionais são transformadas com o intuito de simular uma dependência temporal nos dados. Ao longo dessa seção apresentaremos algumas medidas utilizadas em análise estatística de séries temporais para se comparar esses vetores ordenados.

3.3.1 Correlação cruzada

Correlação cruzada é uma ferramenta estatística utilizada para medir a similaridade entre duas séries temporais distintas em função de um atraso aplicado a uma das séries (CHATFIELD, 2003, Capítulo 8). Ou seja, uma das séries é deslocada para que se faça as comparações dos valores. Para caracterizarmos a correlação cruzada é necessário definirmos alguns conceitos.

Suponha N observações sob um mesmo período, ditas $(x_1; y_1); \dots; (x_N; y_N)$, de um processo estocástico bivariado $(X_t; Y_t)$. O primeiro e segundo momento desse processo – média e função de auto-covariância, respectivamente – são apresentados como

- Média: $E(X_t) = m_x$ e $E(Y_t) = m_y$;
- Auto-covariância: $\text{cov}(X_t; X_{t+k}) = g_x(k)$ e $\text{cov}(Y_t; Y_{t+k}) = g_y(k)$;
- Covariância cruzada: $\text{cov}(X_t; Y_t) = E[(X_t - m_x)(Y_{t+k} - m_y)] = g_{xy}(k)$.

Em geral, a dimensão dos coeficientes é afetada pelas grandezas dos processos X_t e Y_t . Então para questões de interpretação do resultado é apropriado normalizar a função de covariância cruzada, gerando desse modo a função de correlação cruzada:

$$r_{xy}(k) = \rho \frac{g_{xy}(k)}{g_x(0)g_y(0)} = \frac{g_{xy}(k)}{s_x s_y}; \quad (3.13)$$

em que s_x é corresponde ao desvio padrão do processo X .

Uma propriedade importante da correlação cruzada é o fato de seu módulo ser sempre menor ou igual a 1. Nesse caso, correlacionando uma função com ela mesma gerará o valor unitário e quanto mais similares as séries temporais, mais próximos desse valor a correlação cruzada será apresentada. É importante observar que essa medida não é de distância, porém é facilmente convertível:

$$d_r(x; y) = 1 - r_{xy}(k); \quad (3.14)$$

3.3.2 Dynamic Time Warping

Para comparação da séries temporais e seus respectivos coeficientes, uma das possíveis técnicas a ser utilizada Dynamic Time Warping (DTW) (KEOGH; RATANAMAHATANA, 2005). Tal técnica é baseada em programação dinâmica e possibilita encontrar similaridades em dados variantes no tempo que possuem deslocamentos temporais. No contexto dos coeficientes de um modelo tridimensional e suas propriedades, é possível encontrar o melhor casamento dos coeficientes.

Suponha duas séries temporais Q e C , de comprimentos n e m respectivamente, amostradas arbitrariamente sobre intervalos de tempo, possivelmente distintos, em que:

$$\begin{aligned} Q &= q_1; q_2; \dots; q_i; \dots; q_n; \\ C &= c_1; c_2; \dots; c_j; \dots; c_m \end{aligned} \quad (3.15)$$

O alinhamento das sequências usando o DTW é realizado construindo-se a matriz $n \times m$ em que o $(i; j)$ -ésimo elemento da matriz contém a distância $d(q_i; c_j)$ entre dois pontos q_i e c_j . Cada elemento da matriz corresponde ao alinhamento entre os pontos. Observe na Figura 13 um esquema da técnica.

Figura 13 – Esquema de alinhamento e mapeamento de deformação utilizando DTW.

Fonte: Keogh e Ratanamahatana (2005).

O caminho da matriz que corresponde ao mapeamento de Q para C é dito caminho de deformação W , em que o k -ésimo elemento de W é definido como $w_k = (i; j)_k$. Além disso,

$$W = w_1; w_2; \dots; w_k; \dots; w_K; \quad \text{com} \quad \max(m; n) \leq K < m + n - 1; \quad (3.16)$$

O caminho de deformação ainda possui algumas restrições:

- Condições de bordo: O caminho inicia em $w_1 = (q_1; c_1)$ e termina em $w_K = (q_m; c_n)$, que são as pontas da matriz de distância.
- Continuidade: O caminho deve percorrer células adjacentes, inclusive as diagonais. Dado $w_k = (a; b)$, então $w_{k-1} = (a'; b')$, em que $a - a' \leq 1$ e $b - b' \leq 1$.
- Monotonicidade: Isso faz com que os pontos de W sejam igualmente espaçados. Dado $w_k = (a; b)$, então $w_{k-1} = (a'; b')$, em que $a - a' \geq 0$ e $b - b' \geq 0$.

Observe que vários caminhos satisfazem as condições acima, entretanto se está interessado apenas no caminho cujo custo de deformação seja mínimo:

$$DTW(Q; C) = \min_{\substack{u \\ t}} \sum_{k=1}^K w_k : \quad (3.17)$$

Tal caminho é obtido através de programação dinâmica, avaliando-se a recorrência definida pela distância cumulativa $g(i; j)$:

$$g(i; j) = \min(g(i-1; j-1); g(i-1; j); g(i; j-1)): \quad (3.18)$$

3.3.3 Matriz de recorrência

As medidas de dissimilaridade apresentadas anteriormente são boas para um série temporal contínua e que não apresenta quebras. Entretanto, em nosso trabalho para encontrar similaridades parciais entre dois modelos tridimensionais, são realizadas várias segmentações do modelo e consequentemente segmentação da série temporal. Isso acarreta em vários problemas para medição da dissimilaridade através do DTW, ou da correlação cruzada. A técnica apresentada nessa seção, no entanto, é capaz de superar essas dificuldades, por encontrar regiões de equivalência entre duas séries.

O Recurrence Plot (RP) é uma técnica que possibilita a análise de dados não lineares e não estacionários em um sistema dinâmico, ou no nosso caso séries temporais. A extensão para Cross Recurrence Plot (CRP) (MARWAN; KURTHS, 2004) foi feita com a finalidade de comparar estruturas, tais como similaridades, alinhamentos, entre dois sistemas dinâmicos diferentes. Em outras palavras, o CRP calcula um matriz capaz de mostrar todos os estados equivalentes de duas séries temporais diferentes.

Considere um sistema dinâmico modelado por d variáveis no instante de tempo t . Se o conjunto de variáveis for suficiente para descrever uma configuração futura do sistema, então

elas são chamadas variáveis de estado. O vetor formado através do pareamento dessas variáveis pertence a um espaço d-dimensional chamado espaço de fase, que contém todas os possíveis estados do sistema. A evolução das variáveis de estado no tempo forma uma órbita no espaço de fase que caracteriza o sistema e pode ser apresentado para análise. A [Figura 14](#) mostra um exemplo da órbita gerado no espaço e sua respectiva matriz de recorrência. Note que as regiões que possuem o mesmo estado estão bem representados na matriz pelas linhas diagonais.

Figura 14 – Na imagem da esquerda está a órbita gerada pelo sistema de Lorenz, em que regiões com os pontos escuros estão próximos e são considerados recorrentes, enquanto que o ponto branco não. À direita, a matriz CRP resultante da auto-recorrência, em que as regiões escuras representam pontos semelhantes no sistema original.

Fonte: [Marwan e Kurths \(2004\)](#).

Em aplicações reais, nem todas as variáveis de estado são conhecidas ou não podem ser mensuradas. Portanto, de acordo com os estudos realizados na área, o espaço de fase de uma série temporal multidimensional $x = \{x_{h,i}\}$ pode ser reconstruído utilizando a dimensão de projeção m e um atraso temporal t :

$$x = \{x_i\}; \quad \text{com } i = 1; 2; \dots; W - (m-1)t;$$

em que W representa o número de amostras e

$$\begin{aligned} x_i = & (x_{1,i}; x_{1,i+t}; \dots; x_{1,i+(m-1)t}; \dots; \\ & x_{2,i}; x_{2,i+t}; \dots; x_{2,i+(m-1)t}; \dots; \\ & x_{H,i}; x_{H,i+t}; \dots; x_{H,i+(m-1)t}); \end{aligned}$$

com H sendo o número de dimensões da série temporal multidimensional.

Mais ainda, o espaço de fases reconstruído a partir de um espaço de fase desconhecido, projetado no $\mathbb{R}^d$ preserva estruturas topológicas do espaço de fases original se $m \geq 2d + 1$.

A escolha dos parâmetros m e t são feitos utilizando estimadores tais como False Nearest Neighbors, e Mutual Information (KANTZ; SCHREIBER, 2004). Nesse trabalho, os parâmetros utilizados foram $m = 5$ e $t = 1$.

Um espaço de fase reconstruído, em geral, possui uma dimensão maior que três, não sendo possível a visualização dos estados e trechos em que a série é recorrente. O CRP, no entanto, resolve esse problema cruzando uma matriz binarizada R a partir do espaço de fase m -dimensional. Cada entrada r_{ij} possui valor 1 se o estado i está próximo do estado j . A Equação 3.19 apresenta em termos matemáticos a intuição apresentada anteriormente. Na equação, q representa uma função degrau (função Heaviside), e_i^x e e_j^y são limiares e a é uma medida de dissimilaridade.

$$r_{ij} = q(e_i^x - \|x_i - y_i\|_a) q(e_j^y - \|x_j - y_j\|_a) \quad (3.19)$$

Para avaliar a qualidade das matrizes geradas pelo CRP, várias técnicas foram desenvolvidas na literatura para avaliação automática, chamadas Análise Quantitativa de Recorrência (RQA) (do inglês, Recurrence Quantitative Analysis). Essas técnicas calculam o comprimento das diagonais que são formadas nas matrizes. Nesse trabalho utilizamos a medida $S_{\max}$, que mede o comprimento máximo do CRP, levando em consideração possíveis variações temporais. O $S_{\max}$ pode ser calculado como maior valor da matriz S , definida como $S_{1;j} = S_{2;j} = S_{;1} = S_{;2} = 1$ e mostrado na Equação 3.20.

$$s_{ij} = \begin{cases} \max\{s_{i-1;j-1}; s_{i-2;j-1}; s_{i-1;j-2}\} + 1 & R_{ij} = 1 \\ 0 & R_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

3.4 Métodos de avaliação

Apesar da grande variedade de técnicas propostas e bases de objetos disponibilizados, poucos métodos de avaliação são apresentados na literatura. Um meio de avaliação que recebeu muita atenção dos pesquisadores é o Benchmark de Princeton (SHILANE et al., 2004). Além de disponibilizar uma base de objetos com cerca de 1800 modelos representados por malhas de triângulos, ainda apresenta uma série de ferramentas estatísticas para efetuar a validação e avaliação das técnicas propostas.

A análise realizada pelo benchmark é padronizada em relação aos resultados dos experimentos, gerando medidas de avaliação qualitativas e quantitativas para cada base em que o método a ser avaliado foi executado. Esse método de avaliação leva em consideração que a base possui N classes distintas. Denotamos por C_n cada classe, com $n = 1; 2; \dots; N$, e $|C_n|$ corresponde ao número de elementos em cada uma.

Dentre as medidas qualitativas são apresentados as seguintes:

- Gráficos de precisão-revoação: um gráfico apresentando a relação entre a precisão e a revocação. Para cada modelo de pesquisa na classe C_n , revocação (eixo das abscissas) corresponde à razão dos modelos da classe C_n que foram recuperados nas primeiras K correspondências; e precisão (eixo das ordenadas) indica a razão das primeiras K correspondências que são da classe C_n . Exemplo de um gráfico de precisão-revoação na Figura 15.

Figura 15 – Exemplo de um gráfico de precisão-revoação

Fonte: Lian et al. (2015).

- Imagens-distância: representado como uma imagem em forma de matriz, em que a magnitude da distância de dois objetos corresponde à intensidade do brilho do pixel. Exemplo de uma imagem distância na Figura 16, onde blocos de classes são facilmente distinguíveis pixels mais claros representam instâncias mais semelhantes.
- Imagem-camada: representa uma imagem visualizando os vizinhos mais próximos, primeira e segunda camadas de cada objeto. Cada camada contém $|C|$ correspondências, sendo $|C|$ o tamanho da classe em questão. Exemplo de uma imagem-camada pode ser visto na Figura 17, onde os pixels pretos da diagonal são os vizinhos mais próximos; os vermelhos representam a primeira camada e o azuis, a segunda camada.

Observe que tais medidas são apresentados como forma de imagem e sua visualização é capaz de auxiliar na avaliação das técnicas. Outras medidas capazes de confirmar a intuição obtida nas medidas qualitativas são as medidas quantitativas. Em geral os valores apresentados são uma média de todos os modelos testados, média por classe e uma média de todos os modelos avaliados.

Figura 16 – Exemplo de uma matriz de distância.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Exemplo de uma imagem camada. Os pixels pretos representam os vizinhos mais próximos; em vermelho, a primeira camada; e em azul, a segunda camada

Fonte: Shilane et al. (2004).

- Vizinho mais próximo: porcentagem do modelo mais similar recuperado que pertence à mesma classe do modelo de entrada.
- Primeira e segunda camada: corresponde à porcentagem dos modelos da classe de consulta que aparecem nas primeiras K correspondências e esse valor varia de acordo com o tamanho da classe. Para uma classe com $|C|$ objetos, $K = |C| - 1$ para a primeira camada e $K = 2 * (|C| - 1)$ para a segunda camada.
- Medida E: apresenta uma medida composta de precisão P e revocação R para um número fixo de resultados recuperados, levando em consideração que os resultados mais relevantes são os que são mais semelhantes. Essa medida é definida como apresentado por [Rijsbergen \(1975\)](#), [Leifman et al. \(2003\)](#):

$$E = \frac{2}{\frac{1}{P} + \frac{1}{R}} :$$

- Ganho Cumulativo Descontado (DCG): os resultados corretos mais próximos do modelo de entrada recebem pesos maiores do que os que são retornados como menos similares. Para cada modelo de entrada é criada uma lista ordenada R que é convertida para uma lista G. Cada elemento i da lista G, G_i , possui valor 1 se o elemento R_i está na classe correta e 0 caso contrário. O DCG_i é definido como

$$DCG_i = G_1 + \sum_{j=2}^i \frac{G_j}{\log_2(j)} :$$

O fator $\log_2(i)$ serve para atribuir maior pesos aos elementos mais similares. Esse resultado, então, é dividido pelo valor que seria alcançado caso todos os primeiros $|C|$ elementos estivessem na classe correta - resultado ideal. O valor final obtido com essa medida é portanto dado por

$$DCG = \frac{DCG_k}{1 + \sum_{j=2}^{|C|} \frac{1}{\log_2(j)}} ;$$

em que k é o número de modelos no banco de dados.

Dessa forma é possível analisar a técnica desenvolvida através de várias medidas de avaliação. Além disso, por ser considerado um modelo de referência, essas medidas são utilizadas em vários outros trabalhos, facilitando a comparação de técnicas diferentes. Entretanto, vale ressaltar que por serem medidas que avaliam apenas através da medida de dissimilaridade, ou seja, o resultado final da técnica, não é possível, por exemplo, efetuar comparações de performance. A complexidade e tempo de execução das técnicas não é levado em consideração nas medidas apresentadas.

MÉTODO PARA RECUPERAÇÃO OBJETOS

A recuperação de objetos visa encontrar objetos que são visualmente semelhantes. Para isso busca-se por características que são invariantes a diversas transformações, sejam elas rígidas ou não-rígidas.

Nesse capítulo apresentaremos a metodologia utilizada nessa dissertação de mestrado para a comparação e recuperação de objetos similares. Também serão apresentados a forma como são ordenados os vértices e suas características. Também apresentamos as diferenças obtidas por diferentes características e como isso afeta o método desenvolvido nesse projeto.

4.1 Método

O desenvolvimento do método utiliza de quase todo o ferramental apresentado no [Capítulo 3](#). Na [Figura 18](#) apresentamos uma ilustração dos passos a serem seguidos para a recuperação de objetos: escolha de um objeto de entrada; ordenação dos vértices; extração das características; e comparação com toda a base. A seguir estão apresentados os detalhes de cada passo do método.

A partir de um objeto chamado de busca – ou, do inglês, query – procura-se por objetos que sejam visualmente semelhantes na base que foi escolhida. No caso desse trabalho, utilizaremos a base SHREC 2011¹ de objetos não rígidos. Esse banco de objetos foi escolhido por possuir várias classes (30 classes) com uma quantidade suficiente de modelos em cada classe (20 modelos por classe). Além disso as classes apresentadas são bem distintas entre si. Para o nosso problema, um elemento da base foi escolhido para que fosse tomado com query, entretanto, o processamento poderia ter sido realizado com um objeto externo à base.

¹ <<http://www.itl.nist.gov/iad/vug/sharp/contest/2011/NonRigid/>>, último acesso em 30/04/2016

Figura 18 – Pipeline empregado para a recuperação de objetos tridimensionais.

Figura 19 – Comparação entre as ordenações dos vértices da malha. À esquerda, a ordenação presente no arquivo; à direita, ordenação obtida pelo vetor Fiedler. Cores mais claras representam os vértices iniciais da ordenação e cores mais escuras, os vértices finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.1 Ordenação dos vértices

A ordenação dos vértices é uma parte importante do método desenvolvido, uma vez que utilizaremos de ferramentas de análise de séries temporais para a comparação das características. Na [Figura 19](#), é possível visualizar o efeito da ordenação dos vértices. A leitura dos vértices é feita de forma linear e a ordenação dos mesmos está sujeita à essa ordem, a princípio, aleatória. Para que todas as malhas possuam uma ordenação uniforme e comparável, optou-se por utilizar o vetor de Fiedler como função de ordenação.

O vetor de Fiedler é obtido através da análise espectral do operador discreto de Laplace-Beltrami, sendo o autovetor associado ao primeiro autovalor não nulo. A vantagem dessa função de ordenação é a de ser invariante à isometrias do objeto, ou seja, deformações isométricas preservam o vetor de Fiedler. Um ponto a ser levantado é sobre o sentido da ordenação, ou seja, apesar da ordenação ser a mesma, o sentido dos vértices pode estar invertido. Para contornar esse problema, são criadas duas séries com as duas ordenações possíveis.

Vale ressaltar que outros algoritmos de ordenação podem ser utilizados desde que mantenham a característica entre objetos da mesma classe.

4.1.2 Extração das características

As características escolhidas foram a curvatura gaussiana e a variação de superfície, como explicado anteriormente no [Capítulo 3](#). Ambas as características são de cálculo rápido e, por serem intrínsecas, são boas candidatas à recuperação de objetos utilizando o método proposto.

Figura 20 – Ilustração das características utilizadas: variação de superfície (à esquerda), com cores azuis representando regiões de baixa curvatura; e curvatura gaussiana (à direita), com cores azuis representando curvaturas côncavas, e vermelhas, curvaturas convexas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 20 é possível visualizar a diferença entre as duas características.

Para a curvatura gaussiana, a implementação utilizada foi a implementada por Gabriel Peyre, disponível no pacote computacional Graph Toolbox² para MATLAB. Nessa implementação, a área $B(v)$ (como descrito na subseção 3.1.1) corresponde à área dos triângulos incidentes no vértice em que se está calculando a curvatura.

A variação de superfície é originalmente oferecida para cálculo da curvatura média sobre nuvem de pontos. No nosso caso, a implementação foi feita adaptando-se o conceito para uma malha triangular. Em nuvem de pontos, a informação de vizinhança é extraída a partir das distâncias entre os pontos, o que não é necessário no caso de uma malha que já contém essa informação. Então, utilizamos a 3-estrela de cada ponto.

Com as características extraídas, aplicamos a ordenação de tais características utilizando o vetor de Fiedler. Um exemplo da ordenação obtida pode ser visualizado na Figura 21.

4.1.3 Comparação com a base

Após sua extração é montado um vetor para a fase de comparação. Nesse estágio são utilizadas as técnicas de correlação cruzada e DTW. Como o DTW se trata de uma técnica de programação dinâmica, seu tempo de processamento é um pouco maior que a correlação

² <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/5355-tool-box-graph>>, último acesso em 25/04/2016

Figura 21 – Sinal obtido ao se combinar o vetor de Fiedler com as características extraídas. Nesse caso, a característica é a curvatura gaussiana.

Fonte: Elaborada pelo autor.

cruzada. Nessa última, a translação das séries é de 25% o tamanho do sinal, diminuindo o custo de processamento.

A implementação do DTW utilizada foi a apresentada por Dan Ellis³. As modificações efetuadas foram feitas para que as séries pudessem ser tratadas nos dois sentidos, uma vez que a ordenação de Fiedler pode resultar em sentidos contrários.

Para a correlação cruzada, a implementação utilizada é a presente no próprio MATLAB⁴. Novamente, para esse descritor foi necessário avaliar as séries duas vezes, sendo uma delas com a série invertida. O valor obtido com esse método é maior conforme as séries são mais similares, então é necessário adaptar esse valor para que se torne um valor de distância, (Equação 3.14).

4.2 Resultados

Uma visão geral dos resultados pode ser visto nas Figuras 22, 23 e 24. Para obtenção de tais resultados os objetos foram comparados com a base completa e os modelos mais semelhantes foram ranqueados através da métrica escolhida – nesse caso foi a correlação cruzada – e estão dispostos em ordem de maior similaridade da esquerda para a direita. Nas figuras também estão apresentados os resultados para tamanhos de janela escolhidos para o scattering wavelets, de cima para baixo.

Observe que diferentemente do modelo do cavalo, que possui uma série de características capaz de separar bem a própria classe das demais, os modelos da formiga e do homem apresentam

³ Disponível em <<http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/resources/matlab/dtw/>>, último acesso: 25/04/2016.

⁴ função `xcorr(.)`.

Tabela 1 – Tabela com resultados quantitativos utilizando variação de superfície como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é a correlação cruzada.

Tamanho da janela	Vizinho mais próximo	Camada 1	Camada 2	Medida e	DCG
256	0.8900	0.6004	0.6854	0.4976	0.8332
512	0.9367	0.6036	0.6846	0.4956	0.8437
1024	0.9433	0.6511	0.7163	0.5253	0.8627
2048	0.9517	0.6467	0.7170	0.5247	0.8633

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Tabela com resultados quantitativos utilizando curvatura como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é a correlação cruzada.

Tamanho da janela	Vizinho mais próximo	Camada 1	Camada 2	Medida e	DCG
256	0.8167	0.4523	0.5191	0.3767	0.7411
512	0.8883	0.5121	0.5808	0.4201	0.7844
1024	0.9167	0.5802	0.6499	0.4727	0.8258
2048	0.9217	0.5605	0.6502	0.4722	0.8221

Fonte: Elaborada pelo autor.

outros objetos em seus resultados de busca. Analisando os resultados retornados pela busca da formiga, entretanto é possível observar que o modelo dos halteres apresenta certa similaridade, se considerar que o corpo do inseto é formado por partes esféricas e partes cilíndricas. No caso do modelo do homem, todos os modelos retornados são humanoides, apesar de estarem categorizados como “homem” e “mulher” dentro da base escolhida.

Nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 podemos verificar os valores numéricos para uma consulta realizada entre os modelos da base. Para obter esses resultados, utilizamos cada modelo da base como um modelo de busca e então os resultados foram computados de acordo com o ranqueamento dos modelos. Pelos valores numéricos é possível se ver que a correlação cruzada apresenta maior precisão na recuperação dos objetos. Isso pode ser explicado pelo fato dessa métrica realizar uma comparação das séries com um deslocamento temporal, permitindo um melhor possível alinhamento. Outra possível explicação está nos tipos de filtros utilizados para o scattering wavelets. Por serem adaptados diretamente de processamento de áudios, tais filtros foram escolhidos para essa aplicação específica. Entretanto o uso de outro banco de filtros para processamento geométrico poderia ser mais eficaz.

Em 2015 surgiu uma nova versão da competição para recuperação de objetos não rígidos. Nessa versão, submetemos nosso método para avaliação. Uma visão geral do gráfico de precisão-revoação pode ser visto na Figura 25. Apesar no nosso método estar apresentado em décima colocação, por utilizar apenas uma característica simples para recuperação dos objetos, acreditamos que são bons resultados. Na Tabela 5, apresentamos os resultados quantitativos apresentados no artigo final da competição (LIAN et al., 2015). Para as submissões, utilizamos janelas do scattering wavelets de tamanhos 256, 512 e 1024 com a característica variação de superfície.

Figura 22 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um cavalo. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um formiga. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Exemplo de consulta realizada para o modelo de um humano. O elemento mais à esquerda é o modelo de consulta. Cada linha representa uma tamanho de janela utilizado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Tabela com resultados quantitativos utilizando variação de superfície como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é o DTW.

Tamanho da janela	Vizinho mais próximo	Camada 1	Camada 2	Medida e	DCG
512	0.7950	0.6040	0.7537	0.5370	0.8357
1024	0.8533	0.6195	0.7625	0.5456	0.8464
2048	0.8467	0.5741	0.7146	0.5103	0.8245

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Tabela com resultados quantitativos utilizando curvatura como característica na base SHREC 2011. O método de comparação é o DTW.

Tamanho da janela	Vizinho mais próximo	Camada 1	Camada 2	Medida e	DCG
256	0.2650	0.2797	0.4464	0.3003	0.5718
512	0.7700	0.5339	0.6837	0.4827	0.7934
1024	0.8700	0.5929	0.7307	0.5239	0.8410
2048	0.8700	0.5728	0.7023	0.5020	0.8310

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Gráfico obtido na competição SHREC 2015. O melhor resultado obtido com o nosso método foi utilizando a janela de 1024.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Resultado obtido na competição SHREC 2015 para diferentes tamanhos de janela e utilizando variação de superfície como característica.

Tamanho da janela	Vizinho mais próximo	Camada 1	Camada 2	Medida e	DCG
265	0.8133	0.4638	0.5445	0.4203	0.7498
512	0.8608	0.7458	0.5498	0.4292	0.7673
1024	0.8958	0.5316	0.5960	0.4722	0.7975

Fonte: Adaptada de [Lian et al. \(2015\)](#).

4.3 Discussão

Nossa abordagem para recuperação de objetos inova no sentido de apresentar uma nova ferramenta de comparação entre os objetos. Ao se ordenar as características dos vértices através do vetor de Fiedler, é possível simular uma série temporal, criando assim, uma dependência na ordem das características. E, com isso, é possível utilizar ferramentas de processamento de sinais para se analisar as séries, com apenas uma característica, e então realizar as comparações entre elas.

Podemos notar, pelos resultados apresentados, que o método é capaz de recuperar bem os objetos da mesma classe. O principal problema está nos detalhes que cada classe apresenta. Apesar de visivelmente serem semelhantes, algumas sutilezas nas malhas fazem com que elas pertençam a outra classe, como foi visto na [Figura 24](#), em que a consulta foi feita com um exemplar da classe homem, porém, vários objetos retornados pertenciam à classe mulher. O que, entretanto, não diminui a qualidade do método, uma vez que ambas as classes fazem parte da semântica ser humano.

Além disso, vale ressaltar que a principal característica do método – ordenação dos vértices – pode ser alterada, uma vez que se escolha outra ordenação invariante à isometria. Por se tratar de um método que depende da ordenação das características de cada malha, é necessário apresentá-los de maneira a simular uma série temporal. E, analogamente, a característica utilizada também precisa ser bem discriminativa entre malhas de classes diferentes, para que o método seja capaz de realizar uma recuperação boa.

MÉTODO PARA RECUPERAÇÃO PARCIAL DE OBJETOS

Diferentemente da recuperação de objetos, a recuperação parcial de objetos visa encontrar apenas partes que são semelhantes em dois modelos diferentes. Apesar dos objetivos serem diferentes, muitos métodos de recuperação de objetos são modificados para que se adequem à recuperação parcial de objetos.

Nesse capítulo apresentamos como isso pode ser feito através de técnicas que utilizam processamento de sinais temporais.

5.1 Método

O método empregado nesse capítulo se assemelha ao apresentado na [seção 4.1](#), que pode ser visto pela [Figura 26](#). Para que o método seja capaz de encontrar partes semelhantes através da análise de sinais diferentes, se fez necessário dividir o objeto em pequenas partes com algum significado. Além disso, alteramos a métrica utilizada para medir a similaridade entre as partes do objeto, introduzindo o CRP para comparação entre dois objetos tridimensionais representados como séries temporais. A característica utilizada para descrever as malhas foi o Heat Kernel Signature, por apresentar bons resultados reportados na literatura. A seguir apresentamos detalhadamente os passos do algoritmo construído.

5.1.1 Segmentação dos objetos

A segmentação dos objetos é um passo essencial para o método desenvolvido para a recuperação parcial de objetos. A opção de segmentar a malha foi influenciada pelo descritor escolhido: CRP, que será explicado com detalhes mais adiante. Ao segmentarmos os objetos, consequentemente estamos isolando regiões de interesse. Na montagem da série completa, os

Figura 26 – Pipeline empregado para a recuperação parcial de objetos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

vértices são primeiramente organizados por região e depois pela ordem dentro da região.

Para o método de recuperação parcial, utilizamos o algoritmo consensus, desenvolvido

Figura 27 – Subdivisões de um objeto tridimensional. Comparação entre o resultado gerado pelo algoritmo de Rodola, Bulò e Cremers (2014) (à esquerda) e a modificação implementada para se adequar ao problema (à direita).

Fonte: Elaborada pelo autor.

por Rodola, Bulò e Cremers (2014) para realizar as segmentações¹. Esse algoritmo busca por regiões estáveis a deformações, elegendo regiões candidatas, ou seja, através de possíveis segmentações, regiões que são mais propensas a estarem corretas são escolhidas para fazerem parte da segmentação final. A partir da segmentação obtida pelo algoritmo consensus, realizamos algumas modificações na segmentação final, após observar a maneira como as malhas eram segmentadas. A segmentação final divide as extremidades de algumas malhas em várias partes, o que não é interessante para o CRP, pois a ordenação dos vértices pode ficar comprometida. Por serem parte de um mesmo segmento, é interessante construir-se a série de vértices dentro desse mesmo segmento.

Esse problema é identificado principalmente em malhas que possuem regiões que não apresentam ramificações, como é o caso do pescoço e das pernas do flamingo (vide Figura 27). Constatado isso, modificamos o algoritmo para que regiões de extremidade permaneçam em um único segmento.

A modificação acrescentada ao algoritmo é a de verificação dos segmentos. Para cada segmento é realizado uma contagem de segmentos vizinhos. Caso o segmento só possua apenas um vizinho, ele é um segmento de extremidade. Então realiza-se uma nova verificação: se ao juntarmos os dois segmentos, o resultado obtido também possuir apenas um vizinho, então

¹ Código disponível em <<http://vision.in.tum.de/members/rodola/code>>, último acesso em 01/02/2016

teremos que são, de fato, extremidade que foram separados pelo algoritmo consensus e eles são combinados.

5.1.2 Extração das características

As características escolhidas para o nosso problema foi o HKS, apresentado na [subseção 3.1.4](#). Por ser uma característica multidimensional, possui mais informações. Além disso, é muito utilizada na literatura para caracterização de objetos tridimensionais. Nas fases iniciais de desenvolvimento, a utilização de curvatura não apresentava resultados satisfatórios, deixando a desejar em alguns aspectos. Como o HKS consegue representar a evolução da característica no tempo (difusão do calor), optou-se por ele. Em nossas implementações, os núcleos de calor foram calculados em intervalos logaritmicamente espaçados com tempo inicial $t_{\min} = 0.03$ e tempo final $t_{\max} = 1.5$. [Sun, Ovsjanikov e Guibas \(2009\)](#) sugeriram a utilização de $t_{\min} = 4\ln(10) \approx 1$ e $t_{\max} = \ln(10) \approx 300$, entretanto, por estarmos realizando uma comparação entre várias malhas diferentes, esses valores variavam de objeto para objeto. Para evitar que essa variação afetasse a comparação das características, optamos por escolher um valor fixo.

Analogamente ao método para recuperação de objetos, cada parte possui seu próprio sinal ordenado pelo vetor de Fiedler que é extraído da malha completa. É possível observar que cada segmento diferente de uma mesma malha possui diferentes frequências, como mostra a [Figura 28](#), em que mostramos as frequências para o tempo inicial da difusão do calor. Utilizando essa intuição é possível, a partir de um segmento de entrada, encontrar outras malhas que possuem regiões com frequências semelhantes.

No caso em que o segmento de entrada é desconhecido, ou seja, não faz parte do banco de dados, os cálculos do HKS são feitos utilizando-se a condição de fronteira de Dirichlet: $u(x; t) = 0$ para todo $x \in \partial M$. A ordenação dos vértices nesse caso também é feito pelo vetor de Fiedler obtido do segmento avulso.

5.1.3 Comparação com a base

O método utilizado para encontrar os segmentos semelhantes entre as malhas é o Gráfico de Recorrência Cruzada (do inglês, Cross Recurrence Plot) (apresentado na [subseção 3.3.3](#)). Pela [Figura 29](#) é possível verificar que a matriz de recorrência é capaz de encontrar regiões, em uma mesma malha, que são semelhantes. A região destacada em verde, na malha, é a região que se deseja buscar (query), enquanto que a região destacada em azul é a região mais semelhante encontrada. Utilizando dessa lógica, é também possível encontrar regiões que são semelhantes em malhas que são diferentes.

Entretanto o CRP é apenas um resultado qualitativo da semelhança entre duas regiões semelhantes. Para que uma métrica $m(\cdot)$ possa ser extraída, utilizamos o algoritmo $S_{\max}$, que mede a maior região de recorrência na matriz CRP. Com esse valor numérico é possível estimar

Figura 28 – Ilustração exemplificando as diferenças de frequências em diferentes regiões de um mesmo objeto. As janelas das frequência estão igualmente escaladas para fins de comparação. No eixo das abscissas estão os vértices ordenados de cada região; e nas ordenadas estão os valores do HKS no tempo $t = t_{\min}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

as regiões que mais se parecem com o segmento inicial dado:

$$m(M_1; M_2) = \frac{1}{S_{\max}}; \quad (5.1)$$

em que M_i representam as malhas tridimensionais. Observe que não se trata de uma medida de distância, uma vez que para segmentos idênticos não possuem medida $S_{\max}$ infinita. Apesar disso, é possível se ter uma ideia de semelhança das malhas, já que as malhas mais próximas possuem maior $S_{\max}$.

Figura 29 – Dado um dos braços do centauro como entrada (em verde), a matriz do CRP resultante mostra os candidatos semelhantes. As melhores partes estão destacadas em azul escuro e correspondem à região azul destacada no centauro da direita.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma observação importante a ser feita está no pré-processamento das imagens CRP. A matriz obtida pelo algoritmo é limiarizada em $\text{threshold} = 0.0045$, que foi obtido através de testes com algumas malhas. Além disso, por se tratarem de regiões em uma imagem, foi necessário realizar um processamento dessas regiões para que vértices desconexos correspondessem a regiões desconexas. Caso as áreas da imagem não pertencessem a vértices conexos da malha original, as regiões são separadas desconectando as áreas da imagem.

Por se tratar de uma métrica simples, que não leva em consideração o contexto dos objetos, nem a semântica de cada um, nem sempre o melhor valor do $S_{\max}$ corresponde a uma região de interesse. Observe um exemplo na Figura 30. Apesar de possuírem uma região em comum – tórax –, as regiões destacadas na matriz CRP não correspondem à essa intersecção em comum. Isso ocorre porque o algoritmo considera que a região do centauro que possui maior $S_{\max}$ é a região de uma das patas.

5.2 Resultados

Nessa seção apresentaremos os resultados obtidos para a recuperação parcial de objetos a partir de fragmentos dados como entrada. Vale a pena observar que tais fragmentos podem ser extraídos a partir de uma malha de interesse, afim de encontrar outros objetos que contenham uma parte similar; ou encontrar, na mesma malha de entrada, partes similares. Podemos observar um exemplo do segundo caso na Figura 31, em que o fragmento de busca utilizado é uma das patas da formiga, destacado em verde. O algoritmo desenvolvido busca por fragmentos semelhantes na mesma malha e os resultados encontrados estão destacados em azul.

Para se encontrar a partir de um segmento de uma malha outras regiões de interesse em

Figura 30 – Dado um dos braços do humano como entrada (em verde), a matriz do CRP resultante mostra os candidatos semelhantes. A região mais semelhante encontrada pelo $S_{\max}$ está destacada em azul e corresponde à região em azul do centauro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Utilizando uma das pernas da formiga como entrada (em verde), é possível encontrar as demais pernas e as antenas (em azul).

Fonte: Elaborada pelo autor.

um banco de objetos, utilizamos o SHREC 2011. Apesar de não ser um banco de dados dedicado à recuperação parcial de objetos, é possível realizar a seleção de segmentos em uma das malhas e então realizar a busca. Nas Figuras 32, 33 e 34, é possível observar alguns exemplos que foram executados. Para uma malha escolhida e segmentada manualmente, o método processa o segmento e então faz comparações com todos os objetos do banco a fim de encontrar as regiões que são mais semelhantes à região desejada.

Para os resultados de recuperação parcial não foram realizadas medidas quantitativas, pois não há um meio preciso de dizer que o método de recuperação parcial é mais eficiente do que outro ao se avaliar partes de objetos. Entretanto, uma possível medida de avaliação seriam testes com usuários, nos quais a similaridade visual seria usada. Nesse tipo de avaliação não se

Figura 32 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando uma das pernas do Armadillo como entrada (em verde). Resultados destacados em azul. Foram exigidos duas partes mais semelhantes em cada modelo, para essa consulta.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando um do braços do modelo masculino como entrada (em verde). Resultados destacados em azul.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Resultado gerado pra uma busca completa no banco de dados utilizando um do braços do modelo masculino como entrada (em verde). Resultados destacados em azul.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Levaria em conta a classe dos objetos, mas sim a semântica da parte e o do objeto recuperado, como o que acontece na [Figura 33](#). Nesse exemplo, existem outras classes que não apenas a principal (figura feminina e rabo do gato), mas o segmento semelhante obtido é visualmente satisfatório.

5.3 Discussão

A proposta apresentada nesse capítulo é a utilização do CRP como ferramenta para comparação entre segmentos de malhas, visando encontrar regiões semelhantes no próprio objeto, como também em outros objetos-alvo. Essa abordagem se fez possível por estarmos descrevendo uma malha tridimensional como um sinal temporal para cada segmento. Em segmentos semelhantes é possível encontrar a recorrências do sinal, e com isso, identificar as regiões semelhantes que são de interesse.

Pelos resultados apresentados, o método se mostrou bastante eficiente em encontrar regiões da mesma malha e regiões de outras malhas que são idênticas à região dada como entrada. Como o método utiliza uma janela de comparação, é possível notar que nas regiões mais críticas, ou seja, nas pontas das características, o método apresenta algumas falhas para a identificação. Entretanto isso não afeta bruscamente os resultados, como apresentado na seção anterior.

Como apresentamos no início do capítulo, é necessário que as malhas passem por um pré-processamento que é o de segmentação. Esse processo é necessário para que as regiões sejam analisadas e sua comparação seja feita de forma adequada. Isso é uma das limitações do método apresentado, uma vez que, no caso das segmentações não serem as mesmas, o comportamento dos resultados pode não ser o esperado. Além disso, a característica utilizada para a descrever a malha como um sinal temporal também precisa ser discriminativa, como o utilizado no método apresentado (Heat Kernel Signature).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi apresentado nessa dissertação de mestrado, uma nova ferramenta já muito utilizada nas áreas estatísticas para análise e comparação de séries temporais foi introduzida no âmbito do processamento geométrico. Ao se utilizar o vetor de Fiedler para ordenação dos vértices do objeto tridimensional, é possível simular uma série temporal e então se obter uma comparação dos objetos. Com os resultados apresentados, apesar de não superarem os resultados encontrados na literatura, pode-se observar que a simplicidade da característica utilizada torna o método desenvolvido atrativo. Além disso, por se utilizar de ferramentas já desenvolvidas e presentes em pacotes matemáticos, sua implementação também é bastante facilitada.

Algumas das principais dificuldades encontradas no algoritmo desenvolvido está na distinção de classes semelhantes. Como apresentado nos resultados de recuperação de objetos, [Capítulo 4](#), a distinção entre classes de humanos não se mostrou bem sucedida. Entretanto, vale ressaltar que a semelhança das classes é visível e só há a distinção semântica de gênero. Além disso, na recuperação parcial de objetos, é possível observar que a segmentação da malha também é um fator restritivo para o método. Uma vez que, para segmentos semelhantes, a similaridade é visível mesmo que a classe não seja.

6.1 Trabalhos futuros

Por se tratar de uma técnica nova, o método apresentado ainda precisa passar por alguns estudos mais aprofundados para que, possivelmente, haja uma melhora no desempenho para recuperação de objetos total e parcial. O objetivo desse trabalho de mestrado foi de estudar a viabilidade do método para recuperação de objetos e, tendo apresentado bons resultados, é válido o estudo de tópicos específicos que circundam nossa técnica baseada em séries temporais com foco na recuperação de objetos e na recuperação parcial de objetos.

6.1.1 Recuperação total

Para a recuperação de objetos, podemos destacar alguns pontos a serem investigados no futuro:

- Suavização do sinal. Como os sinais apresentados apresentam característica muito ruidosa, os descritores temporais podem estar apresentando resultados não ótimos. Com uma suavização das séries é possível que haja uma melhora na recuperação de objetos semelhantes.
- Relação da ordenação dos vértices. Nessa dissertação de mestrado utilizamos a ordenação dada pelo vetor de Fiedler, por ser uma ordenação isométrica, ou seja, é equivalente para objetos que pertencem à mesma classe e não possuem alteração na topologia.
- Combinação de características. Para a comparação de objetos tridimensionais, utilizamos apenas uma característica para montagem da série temporal. Entretanto, ao utilizar um conjunto de características que se complementam e possibilitem uma melhor descrição do objeto, é possível que se obtenha melhores resultados.
- Banco de filtros utilizados. Para que os coeficientes de wavelets fossem extraídos, foram utilizados bancos de filtros baseados em wavelets e que são comuns para a análise de áudio e derivados. Como foi visto no [Capítulo 4](#), os resultados apresentados foram bons. Entretanto a possível utilização de filtros capazes de extrair coeficientes ótimos para o contexto de processamento geométrico pode apresentar melhora nos resultados.

6.1.2 Recuperação parcial

Em se tratando de recuperação parcial de objetos, os mesmos tópicos apresentados para a recuperação de objetos podem ser reestudados aqui. Além disso, ainda existem outros tópicos que necessitam de investigação mais profunda:

- Analisar o efeito de recuperação utilizando mais partes ao mesmo tempo. Nos testes realizados que foram apresentados, os segmentos de consulta são sempre de uma mesma região da malha segmentada, ou em sua maioria, apenas de uma região. Para se buscar por mais regiões ao mesmo tempo, é necessário se tomar cuidado com a ordenação das regiões e como isso pode afetar a ferramenta de comparação CRP.
- Comparação com diferentes segmentações em um mesmo objeto. Ao apresentarmos as regiões segmentadas, limitamo-nos apenas a um algoritmo de segmentação utilizado para dividir os objetos em regiões de interesse. Entretanto, por se tratar de um método de comparação de segmentos, é intuitivo pensar que mesmo que a segmentação não seja a mesma – o que ocorre em objetos isométricos – é possível que haja bons resultados caso as próprias segmentações sejam semelhantes.

- Paralelização do código.

6.2 Publicações

O desenvolvimento desse método estudado durante o mestrado resultou em uma colaboração para o Workshop of 3D Object Retrieval, um evento especializado em recuperação de objetos e que hospeda o concurso SHREC. No ano de 2015, uma das propostas submetidas ao concurso era a recuperação de objetos dentro de uma base de dados. Nesse concurso, 11 grupos se inscreveram para processar 1200 malhas presentes no banco de dados oferecido. Nosso método participou dessa versão do concurso com o algoritmo apresentado no [Capítulo 4](#), mostrando resultados satisfatórios, mesmo sendo uma técnica ainda em desenvolvimento. O artigo publicado encontra-se na biblioteca da Eurographics ([LIAN et al., 2015](#)).

Ao final da Dissertação de Mestrado, outra publicação foi realizada no Conference on Graphics, Patterns and Images, realizado em 2016, na cidade de São José dos Campos, e intitulada Partial Similarity of 3D Shapes Using Cross Recurrence Plot ([NAKANISHI et al., 2016](#)). Essa publicação é referente ao método desenvolvido para recuperação parcial de objetos.

REFERÊNCIAS

ABDELRAHMAN, M.; EL-MELEGY, M.; FARAG, A. Heat kernels for non-rigid shape retrieval: Sparse representation and efficient classification. In: IEEE. Computer and Robot Vision (CRV), 2012 Ninth Conference on. [S.l.], 2012. p. 153–160. Citado na página [41](#).

AGATHOS, A.; PRATIKAKIS, I.; PAPADAKIS, P.; PERANTONIS, S.; AZARIADIS, P.; SAPIDIS, N. S. 3d articulated object retrieval using a graph-based representation. The Visual Computer, Springer, v. 26, n. 10, p. 1301–1319, 2010. Citado na página [37](#).

ALLIEZ, P.; COHEN-STEINER, D.; DEVILLERS, O.; LÉVY, B.; DESBRUN, M. Anisotropic polygonal remeshing. In: ACM. ACM Transactions on Graphics (TOG). [S.l.], 2003. v. 22, n. 3, p. 485–493. Citado 2 vezes nas páginas [42](#) e [43](#).

ANDÉN, J.; MALLAT, S. Multiscale scattering for audio classification. In: ISMIR. [S.l.: s.n.], 2011. p. 657–662. Citado na página [48](#).

_____. Scattering representation of modulated sounds. In: Proc. of the 15th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-12). [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página [48](#).

BERGER, M.; NONATO, L. G.; PASCUCCI, V.; SILVA, C. T. Fiedler trees for multiscale surface analysis. Computers & Graphics, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 272–281, 2010. Citado na página [37](#).

BRONSTEIN, A. M.; BRONSTEIN, M. M.; KIMMEL, R. Efficient computation of isometry-invariant distances between surfaces. SIAM Journal on Scientific Computing, SIAM, v. 28, n. 5, p. 1812–1836, 2006. Citado na página [35](#).

CHATFIELD, C. The analysis of time series: an introduction. [S.l.]: CRC press, 2003. Citado na página [51](#).

CHEN, D.-Y.; TIAN, X.-P.; SHEN, Y.-T.; OUHYOUNG, M. On visual similarity based 3d model retrieval. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer graphics forum. [S.l.], 2003. v. 22, n. 3, p. 223–232. Citado na página [37](#).

CHEN, X.; RAMADGE, P. J. Music genre classification using multiscale scattering and sparse representations. In: IEEE. Information Sciences and Systems (CISS), 2013 47th Annual Conference on. [S.l.], 2013. p. 1–6. Citado na página [48](#).

CHUNG, F. R. Spectral graph theory. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997. Citado na página [44](#).

DESBRUN, M.; MEYER, M.; SCHRÖDER, P.; BARR, A. H. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In: ACM PRESS/ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO. Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. [S.l.], 1999. p. 317–324. Citado na página [45](#).

ELAD, A.; KIMMEL, R. On bending invariant signatures for surfaces. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 25, n. 10, p. 1285–1295, 2003. Citado na página 35.

FANG, R.; GODIL, A.; LI, X.; WAGAN, A. A new shape benchmark for 3d object retrieval. In: *Advances in Visual Computing*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 381–392. Citado na página 38.

HAAR, F. B. T.; VELTKAMP, R. C. Automatic multiview quadruple alignment of unordered range scans. In: *IEEE. Shape Modeling and Applications, 2007. SMI'07. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2007. p. 137–146. Citado na página 36.

HARPER, L. H. Optimal assignments of numbers to vertices. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM*, v. 12, n. 1, p. 131–135, 1964. Citado na página 45.

HILAGA, M.; SHINAGAWA, Y.; KOHMURA, T.; KUNII, T. L. Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3d shapes. In: *ACM. Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. [S.l.], 2001. p. 203–212. Citado na página 34.

JAIN, V.; ZHANG, H. A spectral approach to shape-based retrieval of articulated 3d models. *Computer-Aided Design, Elsevier*, v. 39, n. 5, p. 398–407, 2007. Citado na página 34.

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 55.

KEOGH, E.; RATANAMAHATANA, C. A. Exact indexing of dynamic time warping. *Knowledge and Information Systems, Springer-Verlag*, v. 7, n. 3, p. 358–386, 2005. ISSN 0219-1377. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10115-004-0154-9>>. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.

LAVOUÉ, G. Bag of words and local spectral descriptor for 3d partial shape retrieval. *The Eurographics Association*, 2011. Citado na página 36.

LEIFMAN, G.; KATZ, S.; TAL, A.; MEIR, R. *Signatures of 3D Models for Retrieval*. 2003. Citado na página 58.

LIAN, Z.; GODIL, A.; BUSTOS, B.; DAOUDI, M.; HERMANS, J.; KAWAMURA, S.; KURITA, Y.; LAVOUÉ, G.; NGUYEN, H. V.; OHBUCHI, R. et al. Shrec' 11 track: Shape retrieval on non-rigid 3d watertight meshes. *3DOR*, v. 11, p. 79–88, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

_____. A comparison of methods for non-rigid 3d shape retrieval. *Pattern Recognition, Elsevier*, v. 46, n. 1, p. 449–461, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 26, 33 e 35.

LIAN, Z.; GODIL, A.; FABRY, T.; FURUYA, T.; HERMANS, J.; OHBUCHI, R.; SHU, C.; SMEETS, D.; SUETENS, P.; VANDERMEULEN, D. et al. Shrec' 10 track: non-rigid 3d shape retrieval. 2010. Citado na página 38.

LIAN, Z.; GODIL, A.; SUN, X.; ZHANG, H. Non-rigid 3d shape retrieval using multidimensional scaling and bag-of-features. In: *IEEE. Image Processing (ICIP), 2010 17th IEEE International Conference on*. [S.l.], 2010. p. 3181–3184. Citado na página 35.

LIAN, Z.; ZHANG, J.; CHOI, S.; ELNAGHY, H.; EL-SANA, J.; FURUYA, T.; GIACHETTI, A.; GULER, R. A.; LAI, L.; LI, C.; LI, H.; LIMBERGER, F. A.; MARTIN, R.; NAKANISHI, R. U.; NETO, A. P.; NONATO, L. G.; OHBUCHI, R.; PEVZNER, K.; PICKUP, D.; ROSIN, P.; SHARF, A.; SUN, L.; SUN, X.; TARI, S.; UNAL, G.; WILSON, R. C. Non-rigid 3D Shape Retrieval. In: PRATIKAKIS, I.; SPAGNUOLO, M.; THEOHARIS, T.; GOOL, L. V.; VELTKAMP, R. (Ed.). Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval. [S.l.]: The Eurographics Association, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 31, 38, 56, 64, 69 e 83.

LIU, Z.; MITANI, J.; FUKUI, Y.; NISHIHARA, S. Multiresolution wavelet analysis of shape orientation for 3d shape retrieval. In: ACM. Proceedings of the 1st ACM international conference on Multimedia information retrieval. [S.l.], 2008. p. 403–410. Citado na página 37.

LIU, Z.-B.; BU, S.-H.; ZHOU, K.; GAO, S.-M.; HAN, J.-W.; WU, J. A survey on partial retrieval of 3d shapes. Journal of Computer Science and Technology, Springer, v. 28, n. 5, p. 836–851, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 36.

MAHMOUDI, M.; SAPIRO, G. Three-dimensional point cloud recognition via distributions of geometric distances. Graphical Models, Elsevier, v. 71, n. 1, p. 22–31, 2009. Citado na página 35.

MARWAN, N.; KURTHS, J. Cross recurrence plots and their applications. Mathematical Physics Research at the Cutting Edge, CV Benton Editor, p. 101–139, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

MEMOLI, F. On the use of gromov-hausdorff distances for shape comparison. In: THE EUROGRAPHICS ASSOCIATION. Eurographics symposium on point-based graphics. [S.l.], 2007. p. 81–90. Citado na página 35.

MÉMOLI, F.; SAPIRO, G. A theoretical and computational framework for isometry invariant recognition of point cloud data. Foundations of Computational Mathematics, Springer, v. 5, n. 3, p. 313–347, 2005. Citado na página 35.

NAKANISHI, R. U.; ONO, J. P.; PAGLIOSA, P.; NONATO, L. G.; PAIVA, A. Partial similarity of 3d shapes using cross recurrence plot. In: Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI). [S.l.: s.n.], 2016. v. 29. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 83.

OHBUCHI, R.; OSADA, K.; FURUYA, T.; BANNO, T. Salient local visual features for shape-based 3d model retrieval. In: IEEE. Shape Modeling and Applications, 2008. SMI 2008. IEEE International Conference on. [S.l.], 2008. p. 93–102. Citado na página 34.

OVSJANIKOV, M.; BRONSTEIN, A. M.; BRONSTEIN, M. M.; GUIBAS, L. J. Shape google: a computer vision approach to invariant shape retrieval. Proc. NORDIA, v. 1, n. 2, 2009. Citado na página 36.

OVSJANIKOV, M.; MÉRIGOT, Q.; MÉMOLI, F.; GUIBAS, L. One point isometric matching with the heat kernel. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer Graphics Forum. [S.l.], 2010. v. 29, n. 5, p. 1555–1564. Citado na página 33.

PAULY, M.; GROSS, M.; KOBELT, L. P. Efficient simplification of point-sampled surfaces. In: IEEE COMPUTER SOCIETY. Proceedings of the conference on Visualization'02. [S.l.], 2002. p. 163–170. Citado na página 43.

- PAULY, M.; KEISER, R.; GROSS, M. Multi-scale feature extraction on point-sampled surfaces. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer graphics forum. [S.l.], 2003. v. 22, n. 3, p. 281–289. Citado 2 vezes nas páginas [43](#) e [44](#).
- PINKALL, U.; POLTHIER, K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. Experimental mathematics, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 15–36, 1993. Citado na página [45](#).
- REEB, G. Sur les points singuliers d’une forme de pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. CR Acad. Sci. Paris, v. 222, p. 847–849, 1946. Citado na página [34](#).
- REUTER, M.; WOLTER, F.-E.; PEINECKE, N. Laplace-spectra as fingerprints for shape matching. In: ACM. Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling. [S.l.], 2005. p. 101–106. Citado na página [34](#).
- RIJSBERGEN, C. K. van. Information Retrieval. 1975. Citado na página [58](#).
- RODOLA, E.; BULÒ, S. R.; CREMERS, D. Robust region detection via consensus segmentation of deformable shapes. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer Graphics Forum. [S.l.], 2014. v. 33, n. 5, p. 97–106. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [37](#) e [73](#).
- RUSTAMOV, R. M. Laplace-beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation. In: EUROGRAPHICS ASSOCIATION. Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing. [S.l.], 2007. p. 225–233. Citado na página [36](#).
- SHAO, T.; XU, W.; YIN, K.; WANG, J.; ZHOU, K.; GUO, B. Discriminative sketch-based 3d model retrieval via robust shape matching. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer Graphics Forum. [S.l.], 2011. v. 30, n. 7. Citado na página [37](#).
- SHILANE, P.; MIN, P.; KAZHDAN, M.; FUNKHOUSER, T. The princeton shape benchmark. In: IEEE. Shape Modeling Applications, 2004. Proceedings. [S.l.], 2004. p. 167–178. Citado 3 vezes nas páginas [38](#), [55](#) e [57](#).
- SORKINE, O. Laplacian mesh processing. Tese (Doutorado) — Tel Aviv University, 2006. Citado na página [45](#).
- SUN, J.; OVSJANIKOV, M.; GUIBAS, L. A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion. In: WILEY ONLINE LIBRARY. Computer graphics forum. [S.l.], 2009. v. 28, n. 5, p. 1383–1392. Citado 3 vezes nas páginas [34](#), [47](#) e [74](#).
- SUNDAR, H.; SILVER, D.; GAGVANI, N.; DICKINSON, S. Skeleton based shape matching and retrieval. In: IEEE. Shape Modeling International, 2003. [S.l.], 2003. p. 130–139. Citado na página [34](#).
- ZOU, G.; HUA, J.; DONG, M.; QIN, H. Surface matching with salient keypoints in geodesic scale space. Computer Animation and Virtual Worlds, Wiley Online Library, v. 19, n. 3-4, p. 399–410, 2008. Citado na página [36](#).