Aproximação poligonal robusta de curvas implícitas

Filipe de Carvalho Nascimento

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Filipe de Carvalho Nascimento

Aproximação poligonal robusta de curvas implícitas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

USP – São Carlos
Julho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/ USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N634a Nascimento, Filipe de Carvalho
Aproximação poligonal robusta de curvas implícitas
/ Filipe de Carvalho Nascimento; orientador Afonso
Paiva Neto. – São Carlos – SP, 2016.
81 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática Computacional)
– Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Malhas. 2. Aritmética intervalar. 3. Curvas
Implícitas. 4. Poligoniização. 5. Aritmética Afim I.
Neto, Afonso Paiva, orient. II. Título.

Filipe de Carvalho Nascimento

Robust polygonal approximation of implicit curves

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. FINAL VERSION

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

USP – São Carlos
July 2016

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que sempre trabalharam duro para que eu pudesse aproveitar grandes oportunidades na vida, que ensinaram a enfrentar meus medos e nunca perder o ânimo. Também ao meu irmão que sempre me apoiou e esteve ao meu lado.

À minha namorada, que me deu forças e me fez sorrir nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, professor Afonso Paiva, que desde o início me guiou com paciência e sabedoria pelo mundo da pesquisa sendo o grande responsável por me abrir os olhos sobre a Matemática na Computação Gráfica.

Ao grupo de Visualização e Processamento Geométrico do ICMC, por ter me dado a oportunidade de compartilhar das experiências dos seus membros pesquisadores que tanto me ensinaram.

Ao Grupo de Estudos para Maratona de Programação (GEMA) por me manter sempre ativo nos estudos em computação testando ao extremo meus ânimos.

Aos funcionários e professores do ICMC-USP.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro à realização desse trabalho.

“ A vida é bela.”
(Joaquim Roque do Nascimento)

RESUM O

NASCIMENTO, F. C.. Aproximação poligonal robusta de curvas implícitas. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Modelagem geométrica envolvendo objetos implícitos é um tema de intensa pesquisa em Computação Gráfica. Portanto, obter técnicas eficientes para representar esses objetos é de extrema importância. Dois grupos de objetos implícitos relevantes para Computação Gráfica são as curvas implícitas e superfícies implícitas. As técnicas tradicionais para se aproximar curvas e superfícies implícitas envolvem dividir o domínio e buscar em suas partições partes da curva ou da superfície. Neste projeto propomos um novo métodos de poligonização robusta de curvas implícitas usando uma ferramenta numérica auto-validada chamada de Aritmética Afim. O método consiste na poligonização adaptativa de curvas implícitas em malhas triangulares tridimensionais.

Palavras-chave: Malhas, Aritmética intervalar, Curvas Implícitas, Poligonização, Aritmética Afim.

ABSTRACT

NASCIMENTO, F. C.. Aproximação poligonal robusta de curvas implícitas. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Geometric modeling involving implicit objects is a topic of intense research in Computer Graphics. Thus, obtain efficient techniques for representing these objects is of utmost importance. Two groups of relevant implicit objects for Computer Graphics are implicit curves and implicit surfaces. Traditional techniques for approximating implicit curves and surfaces involve splitting the domain and searching for parts of the curve or the surface. In this project we propose a new methods of robust polygonization of implicit curves using the self-validated numerical tool called Affine Arithmetic. The method consists in the adaptive polygonization of implicit curves in three-dimensional triangular meshes.

Key-words: Meshes, Interval Arithmetic, Implicit Curves, Polygonization, Affine Arithmetic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Esquerda: uma curva implícita representada por um conjunto de segmentos de reta. Direita: uma superfície implícita representada por uma malha triangular (Figura retirada de (PAIVA et al., 2006)).	25
Figura 2	– Curva implícita em vermelho e sua aproximação poligonal em verde. Note como algumas características da curva não estão representadas.	26
Figura 3	– Uma decomposição do domínio é definida e o objeto implícito é amostrado. Os pontos são conectados formando uma aproximação poligonal do objeto implícito.	27
Figura 4	– Dependência parcial entre duas quantidades na forma AA (região cinza escuro). (Imagem retirada de (FIGUEIREDO; STOLFI, 2003))	34
Figura 5	– Esquerda: Interpolação Linear. Direita: Método da Bissecção. Figuras retiradas de (PAIVA et al., 2012).	38
Figura 6	– Enumeração da curva dada implicitamente por $y^2 - x^3 + x = 0$ no quadrado $\Omega = [-2\sqrt{2}] \times [-2\sqrt{2}]$. Figura retirada de (LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002a).	40
Figura 7	– Faixas afins calculadas em cada envolvendo a curva em cada uma das células. Figura retirada de (PAIVA et al., 2012).	42
Figura 8	– (a) $y^2(0.75^2 - x^2) = (x^2 + 1.5y - 0.75^2)^2$ em $\Omega = [-1.1111]^2$, (b) $y^2 - x^3 + x = 0.5$ em $\Omega = [-5.2152]^2$. As imagens de cima foram geradas com o Algoritmo 1 e as outras com o Algoritmo 2. Figuras retiradas de (PAIVA et al., 2012).	43
Figura 9	– (a) $(y - x^2 + 1)^4 + (x^2 + y^2)^4 = 1$ em $\Omega = [-1.2112]^2$, (b) Curva quádrlica de (TAUBIN, 1994a) em $\Omega = [-2.19219]^2$. As imagens de cima foram geradas com o Algoritmo 1 e as outras com o Algoritmo 2. Figuras retiradas de (PAIVA et al., 2012).	44
Figura 10	– Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.	46
Figura 11	– Exemplo de união de simplexos de dimensão 2 constituindo um complexo simplicial.	46
Figura 12	– Incluindo o triângulo dentro de um paralelogramo.	48
Figura 13	– Decompondo o triângulo em paralelogramos.	48
Figura 14	– Efeitos das diferentes estratégias do uso de paralelogramos para aproximar poligonalmente uma curva implícita em triângulos.	49

Figura 15 – Exemplo de faixas afins (em cinza) calculadas para cada um dos paralelogramos que compõem o triângulo.	51
Figura 16 – Malha 4-8. Imagem retirada de (VELHO; ZORIN, 2001).	53
Figura 17 – Subdivisão MP. Triângulo é dividido em 4 novos triângulos através da conexão dos pontos médios de suas arestas.	54
Figura 18 – Janelas principais.	55
Figura 19 – Janela AA.	55
Figura 20 – Aproximação da curva por segmentos de reta em um triângulo.	56
Figura 21 – Curva implícita Taubin. Regiões de maior curvatura apresentam maior número de triângulos.	57
Figura 22 – Método aplicado em uma (b)sopa de triângulos, e em uma (c)malha.	57
Figura 23 – Curva implícita dada por $y^2(a^2 - x^2) - (x^2 + 2ay - a)^2 = 0$ com $a = 0.75$	58
Figura 24 – Curva implícita dada por $(y - x^2 + 1)^4 + (x^2 + y^2)^4 - 1 = 0$	58
Figura 25 – Curva implícita dada por $y^2 - x^3 + x - 0.5 = 0$	58
Figura 26 – Curva implícita dada por $x^2y^2 - (x^2 + y^2 - 1)^3 = 0$	59
Figura 27 – Curva implícita dada por $4y^2 - (x + 1)^3(1 - x) = 0$	59
Figura 28 – Curva implícita dada por $(xy + \cos(x + y))(xy + \sin(x + y)) = 0$	59
Figura 29 – Curva implícita dada por $(xy + \cos(x + y))(xy + \sin(x + y)) = 0$	60
Figura 30 – Logotipo Pisces (http://www.geom.umn.edu/fjw/pisces/). (a) O algoritmo de marching cubes gera uma curva com topologia errada na malha de 101 triângulos e (b) só produz um resultado satisfatório com a malha de 12928 triângulos. (c) utilizando adaptatividade obtem-se um bom resultado com 2382 triângulos.	60
Figura 31 – Curva implícita dada por $y - 3\sin x = 0$	62
Figura 32 – Curva implícita dada por $y^2(3 + 2y) - (x^2 - 1)^2 = 0$	62
Figura 33 – Curva implícita dada por $(xy - 2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$	63
Figura 34 – Curva implícita dada por $xy^2(1 - \sqrt{xy^2}) - 0.04 = 0$	63
Figura 35 – Intersecção da esfera com harmônicos esféricos reais.	64
Figura 36 – Curva implícita dada por $x^2 + y^2 + z^2 - 0.25 = 0$	64
Figura 37 – Curvas implícitas dadas pela Esfera e $(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ com diferentes valores de a	65
Figura 38 – Intersecção entre o hiperbolóide dado pela equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ e a superfície paramétrica definida por $x(u, v) = (a + \cos(u) \sin(v) - \sin(u) \sin(2v)) \cos(u)$, $y(u, v) = (a + \cos(u) \sin(v) - \sin(u) \sin(2v)) \sin(u)$, $z(u, v) = \sin(u) \sin(v) + \cos(u) \sin(2v)$, onde $a = 2.7$ e $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$	66
Figura 39 – Ponto de singularidade.	67
Figura 40 – Variação do comprimento da faixa afim para diferentes ângulos do vértice superior e diferentes funções para cada um dos paralelogramos que dividem o triângulo.	68

Figura 41 – Exemplo de geração de imagem confiável de uma curva implícita fornecida pelo usuário.	70
Figura 42 – Exemplos de imagens binárias usadas para construção de conjuntos de pontos.	72
Figura 43 – O processo de construção de conjuntos de pontos a partir de imagens binárias: Primeiro, o contorno da curva é extraído pixel a pixel, onde cada pixel representa um vértice da curva e depois a curva pode ser simplificada diminuindo o número de vértices. Foi utilizado o código Decimat e Polygon fornecido por (SEMECHKO, 2012).	72
Figura 44 – Circle Test: Teste utilizando pontos gerados pela equação paramétrica do círculo.	73
Figura 45 – Hand Test: Teste usando os pontos extraídos da imagem binária de uma mão.	73
Figura 46 – Arrow Test: Teste usando os pontos extraídos da imagem binária de uma mão. Células descartadas pela ausência da curva estão pintadas de cinza.	74
Figura 47 – Intersecção de um conjunto de pontos e uma malha triangular. Malha inicial (esquerda). Malha após 11 chamadas recursivas (direita). As normais dos pontos estão pintadas de vermelho e a curva aproximada de verde.	76

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Explore $X \times Y$	39
Algoritmo 2 – Explore $X \times Y$	40
Algoritmo 3 – Explore T	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Exemplos de combinações de valores extremos de ε_i .	34
Tabela 2	– Performance e estatísticas entre os resultados obtidos com os Algoritmos 1 e 2, respectivamente. A coluna AI indica a tolerância do o gradiente escolhida para o Algoritmo 1 e a coluna AA a tolerância para a largura da faixa afim para o Algoritmo 2. As colunas restantes mostram os resultados para AI / AA.	43
Tabela 3	– Diferentes performances das diferentes estratégias para o uso de paralelogramos em triângulos.	49
Tabela 4	– Resultados produzidos pelo algoritmo 2.	56
Tabela 5	– Resultados produzidos pelo Algoritmo 2 para Malhas Triangulares 3D.	61
Tabela 6	– Resultados com a região parcialmente negativa utilizando (GAY; COEUR-JOLLY; HURSTAND, 2006).	74
Tabela 7	– Resultados com a região parcialmente negativa utilizando (IMS, 2010).	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA Aritmética Afim

AI Aritmética Intervalar

MP Mid-Point

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Objetivos do Trabalho	27
1.2	Trabalhos Relacionados	28
1.3	Contribuições do Trabalho	30
1.4	Organização do Trabalho	30
2	MÉTODOS INTERVALARES	31
2.1	Aritmética Intervalar (AI)	31
2.2	Aritmética AA _m (AA)	32
2.3	Bibliotecas	35
3	APROXIMAÇÃO POLIGONAL DE CURVAS IMPLÍCITAS	37
3.1	Métodos de Aproximação	37
3.2	Aproximação de Curvas Implícitas com AI	38
3.3	Aproximação de Curvas Implícitas com AA	40
3.3.1	Estimativa de Curvatura com AA	41
3.4	Comparação entre AI e AA	42
4	CURVAS IMPLÍCITAS EM MALHAS TRIANGULARES	45
4.1	Malhas Triangulares	46
4.2	Aproximação em Malhas Triangulares	46
4.3	Detalhes de Implementação	47
4.3.1	Aritmética Afim em Triângulos	48
4.3.2	Função de Inclusão	50
4.3.3	Estimativa da Curvatura	50
4.3.4	Estimativa de Curvatura em Triângulos 3D	52
4.3.5	Subdivisão da Malha Triangular	53
4.4	Visualização dos Resultados	54
4.5	Resultados	54
4.6	Resultados em Malhas Triangulares 3D	61
4.7	Considerações Finais	63
5	TRABALHOS COMPLEMENTARES	69
5.1	Imagens Con _q áveis de Curvas Implícitas	69

5.2	Superfícies Implícitas de Conjuntos de Pontos	70
5.2.1	Implementação	71
6	CONCLUSÕES	77
	REFERÊNCIAS	79

INTRODUÇÃO

Brevemente, um objeto implícito é definido como o conjunto de soluções de uma equação $f(p) = 0$, onde $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é bem comportada, este conjunto se trata de uma superfície de dimensão $n - 1$ em $\mathbb{R}^n$. Para os casos de $n = 2$ e $n = 3$, os objetos implícitos recebem respectivamente os nomes de curvas implícitas e superfícies implícitas.

Objetos implícitos oferecem grandes vantagens na definição de modelos geométricos. Diferente de superfícies paramétricas por exemplo, superfícies implícitas conseguem representar facilmente formas geométricas complexas e lidar naturalmente com mudanças topológicas durante uma animação. Operações booleanas entre modelos geométricos - utilizadas em geometria sólida construtiva por exemplo - são triviais, dado que não necessitam de avaliações ponto a ponto.

Muitos problemas em Computação Gráfica e Engenharia são formulados a partir da manipulação e representação de objetos implícitos, tais como reconstrução de superfícies a partir de scanners 3D e superfícies livres em simulação de escoamento de fluídos. Objetos implícitos são aproximados poligonalmente e representados no computador através de modelos geométricos (conjuntos de elementos geométricos). Por exemplo, curvas implícitas podem ser aproximadas por conjuntos de segmentos de reta e superfícies implícitas por malhas triangulares (Figura 1).

Figura 1 – Esquerda: uma curva implícita representada por um conjunto de segmentos de reta. Direita: uma superfície implícita representada por uma malha triangular (Figura retirada de (PAIVA et al., 2006)).

Em contraste aos objetos paramétricos, calcular aproximações poligonais de objetos implícitos é uma tarefa complexa e desafiadora. É preciso encontrar as várias componentes do objeto implícito que se encontram no domínio e amostrá-las para que o modelo geométrico seja construído. Técnicas tradicionais baseadas em enumeração decompõem o domínio em porções menores (ex. triângulos, tetraedros, quadriláteros, etc.) e calculam a intersecção do objeto implícito com as arestas da decomposição, podendo sofrer da sub-divisão excessiva do domínio ou deixar de encontrar todas componentes. Técnicas de continuação geram a aproximação “caminhando” sobre o objeto implícito a partir de pontos pertencentes ao objeto implícito já conhecidos, exigindo portanto o conhecimento prévio da localização de cada componente, o que não é uma tarefa trivial. Portanto é importante se desenvolver técnicas robustas e eficientes de aproximação poligonal de objetos implícitos.

Uma maneira de tornar o algoritmo de aproximação poligonal mais eficiente, é decompor o domínio de maneira adaptativa. Estruturas como a quadtree (espaços 2D) e a octree (espaços 3D), permitem que o domínio seja refinado apenas em regiões que contém componentes do objeto implícito, diminuindo significativamente o número de sub-regiões que precisam ser processadas.

Entende-se por robustez do algoritmo, neste contexto, a capacidade do algoritmo de detectar as componentes do objeto implícito presentes no domínio de entrada. Um algoritmo é considerado robusto se consegue, dentro de suas limitações, detectar todas componentes do objeto implícito contidas no domínio. Por exemplo, os pontos de uma curva implícita são amostrados sobre as arestas da malha que decompõe o domínio e depois são conectados para que formem os segmentos de reta que aproximam a curva implícita (Figura 2). Note que apenas as partes da curva implícita que intersectam as arestas são representadas, características e componentes da curva menores que se encontram completamente dentro de uma célula (ex: uma folha da quadtree).

Figura 2 – Curva implícita em vermelho e sua aproximação poligonal em verde. Note como algumas características da curva não estão representadas.

O uso de métodos numéricos intervalares permite que operações sejam feitas sobre regiões do domínio, excluindo as limitações impostas por técnicas que se baseiam inteiramente em pontos amostrados. Operações intervalares garantem robustez ao algoritmo, pois conseguem detectar até mesmo componentes da curva implícita menores que a resolução das células da quadtree (Figura 3a), fazendo com que estas células sejam subdivididas para se obter uma melhor aproximação. Uma vez que a decomposição do domínio é estabelecida, pontos do objeto implícito são calculados e conectados formando a aproximação poligonal (Figura 3).

Figura 3 – Uma decomposição do domínio é definida e o objeto implícito é amostrado. Os pontos são conectados formando uma aproximação poligonal do objeto implícito.

1.1 Objetivos do Trabalho

Este trabalho se concentra no problema de aproximar poligonalmente curvas implícitas e superfícies implícitas em diferentes tipos de domínios. É assumido que o objeto implícito é previamente definido e pretende-se calcular e representar sua aproximação poligonal através de um modelo geométrico. No caso de curvas implícitas, o modelo é descrito por um conjunto de segmentos de reta.

O erro de precisão numérica cometido na representação de números em ponto-flutuante no computador deve ser levado em conta para que o modelo discreto respeite o modelo real do problema. Os mesmos métodos numéricos auto-validados utilizados para garantir a robustez do algoritmo, também garantem que o modelo discreto (computador) cuide dos erros de precisão das quantidades envolvendo a correção no processo dos cálculos.

Várias maneiras de se encontrar aproximações de curvas implícitas em quadrees e malhas triangulares foram propostas através dos anos (DOBKIN et al., 1990), (SUFFERN, 1990), (LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002a). Muitas destas técnicas utilizam métodos numéricos robustos a fim de tornar seus algoritmos mais eficientes e confiáveis.

Este trabalho utiliza o mesmo espírito do trabalho apresentado por (LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002a), que executa aproximação poligonal de curvas implícitas decompondo o

domínio através de quadrees retangulares utilizando o método numérico auto-validado chamado Aritmética Intervalar (FIGUEIREDO; STOLFI, 1997). Entretanto, este trabalho tem por objetivo propor um método para aproximar poligonalmente curvas em malhas triangulares substituindo Aritmética Intervalar pela Aritmética Afim (FIGUEIREDO; STOLFI, 2003). Da mesma maneira, este trabalho estende o método de aproximação de superfícies implícitas apresentado por (PAIVA et al., 2006).

Diferente da Aritmética Intervalar, a Aritmética Afim consegue cobrir, dentro de certas limitações, regiões não retangulares do domínio cometendo erros de menor magnitude. Isto significa que é capaz de concentrar os cálculos do algoritmo de maneira mais precisa e se adapta melhor a domínios formados por triângulos.

Assim, este trabalho também propõe um método robusto para aproximação de curvas implícitas sobre malhas triangulares e apresenta uma discussão sobre as diferenças entre o uso da Aritmética Intervalar e a Aritmética Afim.

1.2 Trabalhos Relacionados

Provavelmente, um dos métodos mais influentes na área de aproximação poligonal de superfícies implícitas é o algoritmo Marching Cubes (LORENSEN; CLINE, 1987). Neste método, valores da superfície implícita são amostrados em cada vértice de uma malha cúbica e as células que apresentam pelo menos uma aresta com vértices de valores com sinais opostos são classificadas como células que intersectam a superfície. As combinações dos 8 sinais de cada cubo formam os índices de uma tabela que armazena as configurações de triângulos que devem ser geradas dentro de cada cubo. Assim, em cada uma das células que intersectam a superfície, triângulos são gerados formando uma aproximação poligonal da superfície implícita.

O algoritmo de Marching Tetrahedra (GUÉZIEC; HUMMEL, 1995) é baseado no algoritmo de Marching Cubes com a diferença nas subdivisões do domínio. Ao invés de cubos, o domínio é subdividido em tetraedros. A grande vantagem é que a tabela de configurações de triângulos para as combinações de sinais em um tetraedro, além de menor, não apresenta ambiguidades, diferente da tabela do Marching Cubes.

Analogamente, os algoritmos de Marching Cubes e Marching Tetrahedra são aplicados na aproximação poligonal de curvas implícitas. No lugar de cubos, quadrados são utilizados e no lugar de tetraedros o domínio é subdividido em triângulos.

A qualidade e confiabilidade das aproximações poligonais geradas pelos métodos descritos acima está diretamente ligada à resolução da malha utilizada. Detalhes ou componentes da superfície implícita que tem tamanho menor que as células não são representados no resultado final. Para obter aproximações mais confiáveis é preciso utilizar malhas com maior resolução, significando um aumento no número de células, exigindo mais tempo de processamento do

algoritmo.

Algoritmos como os descritos acima caracterizam técnicas de enumeração. A técnica de continuação por sua vez, apresenta uma abordagem diferente. Conhecido um ponto do objeto implícito, métodos numéricos são utilizados para que novos pontos sejam descobertos. Desta forma, o algoritmo “caminha” sobre o objeto implícito armazenando todos pontos encontrados e gera uma aproximação poligonal do objeto implícito a partir destes pontos. A vantagem é que a descoberta de novos pontos não depende mais de uma subdivisão do espaço e sim do método numérico utilizado. Por outro lado, não é trivial o conhecimento prévio de pontos do objeto implícito. O trabalho de (DOBKIN et al., 1990) apresenta um método de continuação para aproximação de curvas implícitas em malhas triangulares regulares. A malha é utilizada para a determinação de pontos iniciais do algoritmo, mas sendo uma malha regular, o método não é adaptativo e fica limitado à resolução da malha.

O trabalho de (PERSIANO; COMBA; BARBALHO, 1993) apresenta uma técnica adaptativa para refinamento de triangulações aplicada em aproximação de curvas implícitas em malhas triangulares. Porém, não é um algoritmo robusto já que a técnica é baseada em amostragem de pontos.

Técnicas robustas são apresentadas nos trabalhos de (SUFFERN; FACKERELL, 1991) e (MITCHELL, 1991), que se baseiam no uso de métodos intervalares para aproximar curvas implícitas adaptativamente através de quadrees. O método descrito em (SNYDER, 1992b; SNYDER, 1992a) define estimativas intervalares para o gradiente da função que define a curva implícita e as incorpora no critério de adaptabilidade do algoritmo, porém a aproximação final não é explicitamente adaptada à curvatura da curva.

O trabalho de (LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002b) apresenta uma estimativa intervalar do gradiente para desenvolver um método intervalar adaptativo para aproximação poligonal de curvas implícitas com quadrees retangulares no plano. O método é espacial e geometricamente adaptativo, gerando células maiores onde a variação da curvatura da curva implícita é baixa. O trabalho faz os cálculos limitando-se a diferenciação automática, que pode ser evitado com o uso da Aritmética Afim.

Comba e Stolfi (COMBA; STOLFI, 1993) introduziram Aritmética Afim e mostraram como pode ser utilizada para se obter melhores resultados do que a Aritmética Intervalar clássica na aproximação de curvas implícitas. Outros exemplos foram dados por (FIGUEIREDO; STOLFI, 1996), (FIGUEIREDO; STOLFI, 1996). Martin em (MARTIN et al., 2002) compara as performances de vários métodos intervalares para o desenho de curvas algébricas utilizando quadrees, incluindo métodos baseados em Aritmética Afim.

Técnicas equivalentes às descritas anteriormente podem ser aplicadas na aproximação de superfícies implícitas. O trabalho de (JR.; FIGUEIREDO; GATTASS, 1999) desenha superfícies implícitas através de técnicas de traçamento de raios enquanto (PAIVA et al., 2006) aproxima

superfícies implícitas de forma robusta utilizando Aritmética Intervalar e octrees.

1.3 Contribuições do Trabalho

Os estudos do tema se iniciaram no ano de 2012 dentro das disciplinas de graduação Projeto Supervisionado ou de Graduação I e II. Por fim, os projetos desenvolvidos nestas disciplinas se deram na mesma linha de pesquisa, este trabalho se tornou uma extensão natural dos resultados obtidos até então.

Ao decorrer do tempo, o trabalho rendeu duas publicações:

- Publicação no SIBGRAPI 2012¹ com o artigo “Approximating implicit curves on triangulations with affine arithmetic” (PAIVA et al., 2012).
- Uma extensão da publicação anterior foi publicada no Computer Graphics Journal 2014 com o artigo “Approximating implicit curves on plane and surface triangulations with affine arithmetic” (NASCIMENTO et al., 2014).

A combinação destas publicações e do restante do trabalho compõem um estudo detalhado sobre o uso da Aritmética Afim em métodos de aproximação de objetos implícitos. Os algoritmos desenvolvidos são adaptativos e robustos, características fundamentais para eficiência e confiabilidade dos resultados.

Também foi criado um website para aproximação em tempo real de curvas implícitas diretamente do browser. O website <http://filipecn.github.io/WebGL-Tools/2Dcurves.html> (NASCIMENTO, 2015) permite que o usuário escreva uma equação algébrica qualquer (seguindo um conjunto regras) e visualize o desenho da curva aproximada. Detalhes sobre este projeto em específico são encontrados no [Capítulo 5](#).

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: O [Capítulo 2](#) faz uma introdução aos dois métodos intervalares, Aritmética Intervalar e Aritmética Afim. O [Capítulo 3](#) trata do método de aproximação poligonal de curvas implícitas no plano e o [Capítulo 4](#) descreve os detalhes do método proposto para aproximação poligonal de curvas implícitas em malhas triangulares. O [Capítulo 5](#) apresenta a aplicação desenvolvida para aproximação de curvas implícitas em tempo real. O [Capítulo 6](#) discute trabalhos futuros e conclusões.

¹ Qualis B1 em eventos no comitê de Ciências da Computação.

MÉTODOS INTERVALARES

Devida a natureza discreta da computação digital existe uma diferença entre o valor real de uma quantidade e o seu valor representado em um sistema computacional. Esta diferença representa o erro cometido ao se armazenar e processar uma quantidade dentro de um sistema computacional. No computador, números reais são armazenados em uma estrutura de números de ponto flutuante e dispõem apenas de um número finito de bits para sua representação. A medida que operações são feitas envolvendo números de ponto flutuante os resultados precisam ser arredondados para que possam ser armazenados nesta estrutura.

As soluções de um problema encontradas por meio de algoritmos numéricos são aproximações da solução real do problema pois não fornecem os valores reais das quantidades das soluções reais, e sim valores próximos aos valores reais. Esta proximidade da aproximação para a solução real, conhecida como erro da aproximação, é definida não só pelo algoritmo mas justamente pelas limitações do sistema computacional.

Métodos Numéricos auto-validados surgem para contornar os problemas causados pelo erro numérico. O uso de intervalos para representar quantidades permite que o erro cometido pelo armazenamento e por operações aritméticas seja levado em conta e o algoritmo passe a ter garantias sobre a faixa de valores da qual o valor real pertence. Uma discussão detalhada sobre estes métodos pode ser encontrada em ([FIGUEIREDO; STOLFI, 1997](#)).

2.1 Aritmética Intervalar (AI)

A Aritmética Intervalar (AI) é o modelo mais eficiente e simples de todos modelos numéricos auto-validados. Criada na década de 1960 por Ramon E. Moore, na Universidade de Stanford, AI se baseia em intervalos para cálculo numérico onde cada quantidade $x \in \mathbb{R}$ é representada por um intervalo $\bar{x}$ de números com pontos flutuantes proporcionando cálculos confiáveis através de controles automáticos de erro. Em outras palavras, cada quantidade x é

representada pelo intervalo $\bar{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ de números reais (no restante do texto, um intervalo real de a a b , inclusive, será representada pela notação $[a, b]$), significando que o verdadeiro valor de x é conhecido por satisfazer $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$.

Além disso, AI proporciona versões intervalares de todas as operações básicas aritméticas e funções científicas elementares, tais como:

- Adição: $\bar{x} + \bar{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
- Subtração: $\bar{x} - \bar{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$

Pode-se pensar que $\bar{x} + \bar{y}$ e $\bar{x} - \bar{y}$ representam os intervalos que contém $x + y$ e $x - y$, respectivamente, para todos possíveis pares $x \in \bar{x}$ e $y \in \bar{y}$. De maneiras análogas, outras operações como multiplicação e divisão podem ser definidas assim como todas outras operações matemáticas comuns. Portanto, AI se torna uma ferramenta natural para implementar funções de inclusão, pois consegue tratar de maneira robusta extensões intervalares de funções reais. Uma descrição mais detalhada de AI pode ser encontrada em (FIGUEIREDO; STOLFI, 1997).

2.2 Aritmética Afim (AA)

A Aritmética Afim (AA) é similar à aritmética intervalar no sentido de tratar erros de arredondamento e truncagem de forma automática. Em adição, AA mantém correlações entre as quantidades computadas. Utilizando esta informação extra, a AA consegue obter intervalos menores em seus cálculos mostrando-se mais precisa que AI.

Na aritmética afim, as operações são feitas utilizando-se formas afins, que compõem um polinômio de primeiro grau:

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

Os coeficientes x_i são números de pontos flutuantes finitos enquanto ε_i são variáveis reais simbólicas cujos valores são desconhecidos, no intervalo $U = [-1, 1]$. O número x_0 recebe o nome de valor central da forma afim $\hat{x}$, os coeficientes x_i são as desvios parciais e ε_i são os símbolos de ruído.

Cada símbolo de ruído ε_i representa uma componente da incerteza da quantidade x , o coeficiente x_i correspondente à magnitude desta componente. O mesmo ruído pode contribuir para a incerteza de duas ou mais quantidades que compõem uma expressão. Este compartilhamento de um ruído entre duas formas afins $\hat{x}$ e $\hat{y}$, indica uma dependência parcial entre as duas quantidades. A magnitude e o sinal desta dependência é determinada através dos coeficientes correspondentes x_i e y_i .

Dado um intervalo $\bar{x} = [a, b]$ representando alguma quantidade x em AI, a forma AA equivalente para a mesma quantidade é dada por $\hat{x} = x_0 + x_k \varepsilon_k$, onde x_0 é o ponto médio do

intervalo e x_k a metade de seu comprimento:

$$x_0 = \frac{b+a}{2} \quad x_k = \frac{b-a}{2} \varepsilon_k$$

O símbolo de ruído ε_k representa a incerteza no valor de x que é implícita em seu intervalo representado por $\bar{x}$. Como o intervalo não indica nenhuma correlação entre o valor de x e outras variáveis, ε_k deve ser diferente de todos os outros símbolos de ruído utilizados no mesmo cálculo.

Para que seja possível efetuar operações com AA, devem-se substituir as operações de valor real $z \leftarrow f(x, y)$ pelas operações $\hat{z} \leftarrow f(\hat{x}, \hat{y})$ correspondentes, onde $\hat{f}$ é um procedimento que calcula uma forma afim para $z \leftarrow f(x, y)$ sendo consistente com $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Por definição, x e y são definidos como:

$$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$$

$$y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n$$

para valores desconhecidos de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in U$. Portanto, a quantidade z é uma função de ε_i , definida

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ &= f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n) \\ &= f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \end{aligned}$$

onde $f^*(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ é substituída pela forma afim $\hat{z} = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \dots + z_n\varepsilon_n$ e preserva todas possíveis restrições entre x , y e z . Se f é uma função afim de seus argumentos x e y , então pode ser rearranjada em uma combinação afim dos símbolos de ruído ε_i . Neste caso, trata-se de uma operação afim e esta combinação afim descreve toda a informação sobre as quantidades x , y e z que pode ser deduzida das formas afins $\hat{x}$, $\hat{y}$ e da operação f . Em particular, para qualquer $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{x} \pm \hat{y} &= (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 + \dots + (x_n \pm y_n)\varepsilon_n \\ \alpha \hat{x} &= (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \dots + (\alpha x_n)\varepsilon_n \\ \hat{x} \pm \zeta &= (x_0 \pm \zeta) + x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n \end{aligned}$$

Note que, de acordo com as fórmulas acima, a diferença $\hat{x} - \hat{x}$ é zero. Este fato ocorre pois neste caso os dois operandos da subtração compartilham os mesmos símbolos de ruído caracterizando a mesma quantidade e não duas quantidades que por acaso apresentam a mesma faixa de valores possíveis. O estudo do caso de f não ser uma operação afim pode ser encontrado em (FIGUEIREDO; STOLFI, 1997).

Por exemplo, suponhamos as quantidades x e y representadas pelas formas afins

$$\hat{x} = 20 - 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 \quad \hat{y} = 10 - 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 - 1\varepsilon_4$$

Estas formas AA $\hat{x}$ e $\hat{y}$ separadas, representam os intervalos $[11, 29]$ e $[6, 14]$ respectivamente, definindo a região cinza claro na Figura 4. Porém, como ambas contém ε_1 e ε_4 com coeficientes

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	$\hat{x}$	$\hat{y}$
-	-	-	-	19	12
+	-	-	-	11	8
-	+	-	-	19	14
-	-	+	-	23	12
-	-	-	+	25	10
+	+	-	-	11	10

Tabela 1 – Exemplos de combinações de valores extremos de ε_i .

não nulos, elas não são inteiramente independentes entre si. Desta forma, analisadas em conjunto, formam a faixa cinza escuro da [Figura 4](#).

A faixa AA formada pelas formas $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em conjunto é calculada montando-se o fecho convexo de todos pontos formados por todas combinações de valores extremos de ε_i . Como $U = [-1, 1]$, estas combinações podem ser representadas pelas combinações de sinais dos coeficientes x_i e y_i . O zonotopo da [Figura 4](#) pode ser obtido calculando o fecho convexo dos pontos $(\hat{x}, \hat{y})$ da [Tabela 1](#). Note que como temos $1 \leq i \leq 4$, existem 2^4 combinações.

Figura 4 – Dependência parcial entre duas quantidades na forma AA (região cinza escuro). (Imagem retirada de ([FIGUEIREDO; STOLFI, 2003](#)))

Para se converter uma forma AA $\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$ em um intervalo IA, a seguinte operação deve ser feita:

$$[\hat{x}] = [x_0 - \text{rad}(\hat{x}), x_0 + \text{rad}(\hat{x})]$$

onde $\text{rad}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Note que esta conversão remove a informação sobre os ruídos, não sendo mais possível calcular algum tipo de correlação entre quantidades. Em outras palavras, podemos pensar como a forma AI sendo representada pelo retângulo cinza claro na [Figura 4](#) caso $\hat{x}$ e $\hat{y}$ fossem convertidos para forma AI. Deste modo, podemos notar visualmente que a faixa que a Aritmética Afim produz é de fato mais estreita que a produzida pela AI. Uma comparação entre AI e AA também pode ser encontrada em ([MOCHIZUKI, 2004](#)).

2.3 Bibliotecas

Existem muitos pacotes que implementam aritmética afim disponíveis na internet, para este projeto foi escolhida a biblioteca *libaffa* (GAY; COEURJOLLY; HURSTAND, 2006). Esta biblioteca oferece todas operações elementares e suficientes para o desenvolvimento do projeto, assim como o tratamento de erros de arredondamento e outras características para lidar com a imprecisão computacional.

APROXIMAÇÃO POLIGONAL DE CURVAS IMPLÍCITAS

3.1 Métodos de Aproximação

Pode-se definir o problema de se encontrar uma curva implícita como o problema de calcular uma aproximação poligonal de uma curva C dada implicitamente pela função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$C = \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\}$$

Testar todos valores de pares (x, y) em Ω é impraticável. Como introduzido anteriormente no texto, existem formas mais eficientes de se encontrar pontos pertencentes a C como por exemplo, métodos de enumeração adaptativa. Enquanto a técnica de enumeração divide Ω igualmente em porções menores, a enumeração adaptativa propõe dividir o domínio iterativamente de maneira que regiões sem presença de C sejam descartadas antecipadamente e o algoritmo se concentre apenas em regiões de interesse. A precisão da aproximação está diretamente ligada ao refinamento do domínio, quanto menores as células mais características e componentes de C serão captadas.

Após decompor Ω em regiões menores, o próximo passo é calcular as intersecções de C com as arestas das células que compõe a decomposição. Toda aresta que apresenta valores de f de sinais opostos contém um ponto pertencente a C que pode ser calculado facilmente via interpolação linear. Os pontos então, são conectados por segmentos de reta que por fim formam a aproximação poligonal da curva implícita.

Na enumeração adaptativa, a decomposição final do domínio apresenta arestas de diversos tamanhos sendo possível porções de uma mesma aresta fazerem parte de várias células. O uso da interpolação linear neste caso pode causar descontinuidades na aproximação de C , dado que o cálculo de um mesmo ponto de C pode ser feito a partir de arestas de tamanhos diferentes. O uso

do método da bisseção resolve este problema, como pode ser visto na [Figura 5](#).

Figura 5 – Esquerda: Interpolação Linear. Direita: Método da Bisseção. Figuras retiradas de ([PAIVA et al., 2012](#)).

3.2 Aproximação de Curvas Implícitas com AI

O trabalho apresentado em ([LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002a](#)) propõe um método eficiente e robusto que executa enumeração adaptativa, de forma que se obtenham células menores em regiões próximas à curva. A AI é utilizada para apontar a ausência de C dentro de uma célula de maneira confiável, possibilitando uma adaptatividade espacial (em relação à localização de C em Ω). Além disso, o método propõe uma adaptatividade geométrica, com base na variação da curvatura de C dentro de cada célula.

A ausência de C em cada célula é verificada através de uma função de inclusão para f . Essa função de inclusão é simplesmente a extensão intervalar F da função f definida nos subconjuntos (células) $X \times Y$ de Ω , onde X e Y são intervalos reais. Além disso, a função intervalar F possui a seguinte propriedade teórica:

$$F(X \times Y) \supseteq f(X \times Y) = \{ f(x, y) : (x, y) \in X \times Y \}$$

Note que $F(X \times Y)$ é uma estimativa para o conjunto formado por todos os valores de f em $X \times Y$, podendo ser estritamente maior do que $f(X \times Y)$. Desta maneira, é possível afirmar que se $0 \notin F(X \times Y)$ então $0 \notin f(X \times Y)$, o que significa que a curva C não intersecta $X \times Y$.

A característica da adaptatividade espacial é adquirida acrescentando-se ao critério de parada o teste da função de inclusão e uma tolerância $\varepsilon \geq 0$ dada pelo usuário. Essa tolerância define o tamanho mínimo que uma célula pode atingir.

A adaptatividade geométrica vem do uso da informação sobre a variação da curvatura de C dentro de cada célula. Esta adaptatividade permite que regiões onde a curva apresenta baixa variação em sua curvatura apresentem células maiores do que regiões com alta variação na curvatura, isto significa que porções da curva podem ser aproximadas por segmentos de reta mais rapidamente sem que o algoritmo precise subdividir o domínio mais vezes.

A estimativa da curvatura, ao invés de utilizar derivadas de segunda ordem de f , utiliza a extensão intervalar G do gradiente normalizado de f , isto é, da normal no ponto (X, Y) . A extensão intervalar do gradiente G satisfaz a seguinte propriedade:

$$G(X \times Y) \supseteq \hat{\nabla} f(X \times Y) = \{ \hat{\nabla} f(x \times y) : (x \times y) \in X \times Y \}$$

onde $\hat{\nabla} f$ é o gradiente normalizado. Geometricamente, o gradiente intervalar G representa uma caixa (retângulo) determinada pela extensão intervalar das derivadas parciais de f , isto é, $G(X \times Y) = \partial_x F(X \times Y) \times \partial_y F(X \times Y)$. Dessa forma, quando $G(X \times Y)$ é pequeno, significa que a normal de C não está sofrendo muita variação em $X \times Y$, e por isso C está numa região de baixa curvatura, logo pode ser aproximada por um segmento de reta em $X \times Y$. A magnitude máxima de $G(X \times Y)$ é definida pelo usuário por uma tolerância δ .

Da união das adaptatividades espacial e geométrica, tem-se um algoritmo recursivo ([Algoritmo 1](#)) para se obter uma aproximação poligonal de C . Para cada célula processada pelo algoritmo, primeiramente é feito o teste da ausência da curva pela função de inclusão. Quando a função de inclusão acusa ausência da curva, a célula é descartada e o algoritmo termina. Quando o teste falha, as dimensões da célula são verificadas para que não se gerem células menores do que o tamanho definido pelo usuário. Também é aplicado o teste sobre a variação de curvatura para garantir a adaptatividade geométrica. Para ambas verificações, a função $\text{diam}()$ é utilizada. Esta função tem como entrada dois intervalos e retorna a extensão do maior intervalo. Se todos os testes falham, então a célula é subdividida e o algoritmo é chamado recursivamente para cada subdivisão.

Algoritmo 1: Explore $X \times Y$

```

Input: Região  $X \times Y$ .
Output:  $X \times Y$  inteiro ou refinado.
1 if  $0 \in F(X \times Y)$  then                                     // Função de Inclusão
2   | descarte  $X \times Y$ .
3 else if  $\text{diam}(X \times Y) < \varepsilon$  ou  $\text{diam}(G(X \times Y)) < \delta$  then // Adaptatividade geométrica.
4   | return  $X \times Y$ .
5 else
6   | divida  $X \times Y$  em pedaços menores  $X_i \times Y_i$ 
7   | e para cada  $i$ , Explore( $X_i \times Y_i$ )

```

Todas as células não descartadas pelo [Algoritmo 1](#) são células onde a curva pode ser aproximada por segmentos de reta como descrito na [seção 3.1](#). A [Figura 6](#) mostra um exemplo de resultado obtido através das células resultantes da execução do [Algoritmo 1](#) e a aproximação da curva implícita desenhada através dos segmentos de reta calculados. Note como o tamanho das células diminui ao se aproximar da curva e como regiões de baixa variação de curvatura apresentam células maiores do que células presentes em regiões de alta variação de curvatura.

Figura 6 – Enumeração da curva dada implicitamente por $y^2 - x^3 + x = 0$ no quadrado $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Figura retirada de (LOPES; OLIVEIRA; FIGUEIREDO, 2002a).

3.3 Aproximação de Curvas Implícitas com AA

O Algoritmo 1 pode ser adaptado para o uso da AA de forma a aumentar sua eficiência. Ao invés do teste da variação de curvatura ser feito através da aproximação do gradiente normalizado da função f usando AI, é utilizada a informação geométrica (região cinza escuro na Figura 4) criada pela AA como critério de parada do algoritmo.

A cada célula a ser testada, a extensão afim da função que define C é calculada. Obtém-se com a extensão $\hat{z}$ o resultado da função calculada a partir das extensões afins $\hat{x}$ e $\hat{y}$, referentes às duas dimensões da célula. A região resultante que define $\hat{z}$, chamada de faixa afim, é limitada por duas retas principais (pode-se pensar como a caixa limitante da faixa afim). A distância entre estas retas está relacionada à curvatura de C (este processo é explicado em detalhes na subseção 3.3.1). Desta maneira, chega-se a uma variação para o Algoritmo 1, representada pelo Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Explore $X \times Y$

Input: Região $X \times Y$.

Output: $X \times Y$ inteiro ou refinado.

- 1 if $0 \in f(\hat{x}, \hat{y})$ then
 - 2 descarte $X \times Y$.
 - 3 else if $\text{diam}(X \times Y) < \varepsilon$ ou $\text{largura}(\hat{z}) < \gamma$ then
 - 4 return $X \times Y$.
 - 5 else
 - 6 divida $X \times Y$ em pedaços menores $X_i \times Y_i$
 - 7 e para cada i , Explore($X_i \times Y_i$)
-

Note que, agora, não é feito mais o teste $\text{diam}(G(X|Y))$. Em seu lugar, a largura da faixa de $\hat{z}$ (largura($\hat{z}$), definida na subseção 3.3.1) é medida, e a recursão termina quando seu valor é pequeno suficiente. Uma outra observação muito importante é que, com esta estratégia, não é mais preciso calcular as derivadas da função f , já que AA oferece uma estimativa da curvatura tornando o processo mais rápido e simples.

3.3.1 Estimativa de Curvatura com AA

Os objetos que AA representa naturalmente são zonotos: polítopos convexos simétricos centralizados. No caso mais simples temos o domínio retangular $\Omega = [a_- - b] \times [c_- - d]$ e assumimos que f é dada por uma expressão matemática em x e y . Para se calcular f em AA é preciso representar x e y com as formas afins apropriadas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x_0 + x_1 \varepsilon_1 & x_0 &= \frac{a+b}{2} & x_1 &= \frac{b-a}{2} \\ \hat{y} &= y_0 + y_2 \varepsilon_2 & y_0 &= \frac{c+d}{2} & y_2 &= \frac{d-c}{2}\end{aligned}$$

Note que $\hat{x}$ e $\hat{y}$ dispõem de diferentes símbolos de ruídos porque variam independentemente em Ω . Calculando $\hat{z} = \hat{f}(\hat{x}|\hat{y})$ temos:

$$\hat{z} = z_0 + z_1 \varepsilon_1 + z_2 \varepsilon_2 + \sum_{i=3}^n z_i$$

z_1 e z_2 representam os termos principais que relacionam diretamente $f(x|y)$ com x e y . Os demais termos z_i , com $3 \leq i \leq n$, são termos de segunda ordem e pode ser condensados em um único termo:

$$z_3 = |z_3| + \sum_{i=4}^n |z_i|$$

Desta maneira, a forma AA $\hat{z}$ se encontra entre os dois planos paralelos

$$\hat{z} = z_0 + z_1 \varepsilon_1 + z_2 \varepsilon_2 \pm z_3$$

Com $\varepsilon_1 = \frac{x-x_0}{x_1}$ e $\varepsilon_2 = \frac{y-y_0}{y_2}$ a equação de $\hat{z}$ pode ser reescrita como

$$\hat{z} = z_0 + \frac{z_1}{x_1}(x-x_0) + \frac{z_2}{y_2}(y-y_0) \pm z_3$$

A região onde f é zero está contida na faixa definida pelas duas retas paralelas

$$0 = z_0 + \frac{z_1}{x_1}(x-x_0) + \frac{z_2}{y_2}(y-y_0) \pm z_3$$

A largura da faixa produzida por $\hat{f}$ é dada pela distância entre as retas como segue:

$$\text{largura}(\hat{z}) = \frac{2z_3}{\left(\frac{z_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{y_2}\right)^2}$$

Este teste sobre a curvatura é válido, pois a AA tem como característica apresentar retas mais distantes diante de curvaturas mais altas. Assim, quando o valor de $largura(\hat{z})$ é pequeno, podemos garantir que a curvatura da curva é pequena, pois a curva na região da célula se encontra dentro da faixa afim (Figura 7). Portanto, comparamos com uma tolerância γ para decidir se a curva dentro da região da célula pode ser aproximada por um segmento de reta. O valor de γ é um limiar definido pelo usuário.

Figura 7 – Faixas afins calculadas em cada envolvendo a curva em cada uma das células. Figura retirada de (PAIVA et al., 2012).

3.4 Comparação entre AI e AA

A Tabela 2 compara os resultados obtidos nas aproximações de curvas implícitas utilizando AI e AA. As aproximações podem ser visualizadas nas Figuras 8 e 9. O primeiro número de cada coluna é referente à execução do Algoritmo 1 e o segundo número é referente ao Algoritmo 2. O erro foi definido como o maior erro algébrico cometido em qualquer nó folha do refinamento.

Note que com o mesmo erro, o Algoritmo 2 apresenta um número menor de células visitadas e nós folhas em sua árvore de recursão mostrando que mesmo que AA apresente contas mais pesadas que AI, sua precisão maior faz com que mais células sejam descartadas e geradas. Outra vantagem, é que o Algoritmo 2 não precisa calcular derivadas já que a AA oferece aproximações de segunda ordem.

Fig.	curva	erro	nível	AI	AA	#células vis.	#folhas	tempo (ms)
8a	Bicorn	10^{-3}	8	0.80	0.03	605 / 461	124 / 98	11 / 9
8b	Cubic	10^{-2}	8	0.35	0.05	805 / 317	144 / 100	7 / 5
9a	Clown smile	10^{-2}	8	0.50	0.05	677 / 373	162 / 114	15 / 12
9b	Taubin	10^{-2}	9	0.99	0.05	6937 / 1697	341 / 221	394 / 139

Tabela 2 – Performance e estatísticas entre os resultados obtidos com os Algoritmos 1 e 2, respectivamente. A coluna AI indica a tolerância do o gradiente escolhida para o Algoritmo 1 e a coluna AA a tolerância para a largura da faixa afim para o Algoritmo 2. As colunas restantes mostram os resultados para AI / AA.

Figura 8 – (a) $y^2(0.75^2 - x^2) = (x^2 + 1.5y - 0.75^2)^2$ em $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, (b) $y^2 - x^3 + x = 0.5$ em $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$. As imagens de cima foram geradas com o Algoritmo 1 e as outras com o Algoritmo 2. Figuras retiradas de (PAIVA et al., 2012).

Figura 9 – (a) $(y - x^2 + 1)^4 + (x^2 + y^2)^4 = 1$ em $\Omega = [-1, 2] \times [-1, 2]$, (b) Curva quádrlica de (TAUBIN, 1994a) em $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$. As imagens de cima foram geradas com o Algoritmo 1 e as outras com o Algoritmo 2. Figuras retiradas de (PAIVA et al., 2012).

CURVAS IMPLÍCITAS EM MALHAS TRIANGULARES

Uma curva implícita em uma malha triangular é a intersecção de uma superfície implícita dada por uma equação $f(x, y, z) = 0$ com a malha triangular. Na aproximação da curva implícita, ao invés de calcular a intersecção da malha triangular e a aproximação poligonal da superfície implícita, pode-se adaptar a subdivisão da malha triangular a fim de concentrar o esforço computacional nos elementos de interesse.

Como resultado, regiões próximas à curva terão triângulos menores enquanto regiões distantes apresentarão triângulos maiores. Quando a curva intersecta o triângulo, e sua variação de curvatura é suficientemente pequena, podemos aproximá-la por um segmento de reta. A aproximação final de toda curva implícita será o conjunto destes segmentos de reta.

Enquanto os métodos intervalares conseguem calcular estimativas intervalares em células retangulares, a aritmética de intervalos clássica não consegue lidar com triângulos naturalmente. Por esta razão, quando o domínio passa a ser uma malha de triângulos, o critério de subdivisão da recursão deve ser adaptado. Desta maneira, um processo similar ao [Algoritmo 2](#) pode ser aplicado para o caso das malhas triangulares.

4.1 Malhas Triangulares

Sejam $a_0, a_1, \dots, a_r$ pontos independentes em $\mathbb{R}^n$. O simplexo r -dimensional que tem estes pontos como vértices é o conjunto $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ de todas combinações convexas $p = \sum_{i=0}^r \alpha_i a_i$ com $\alpha_i \geq 0$, ou seja, é a envoltória convexa do conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$. Em outras palavras, um simplexo é o polígono mais simples de sua dimensão, por exemplo, o tetraedro (em $\mathbb{R}^3$) é o polígono que possui o menor número vértices e arestas. A Figura 10 mostra alguns exemplos de simplexos.

Figura 10 – Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.

Uma malha triangular é um complexo simplicial. O complexo simplicial consiste basicamente de uma união de simplexos. Os simplexos estão conectados de tal maneira que cada aresta é compartilhada por no máximo dois triângulos. Neste projeto, foram escolhidas malhas triangulares de simplexos de dimensão 2 (triângulos), como pode ser no exemplo da Figura 11.

Figura 11 – Exemplo de união de simplexos de dimensão 2 constituindo um complexo simplicial.

4.2 Aproximação em Malhas Triangulares

O Algoritmo 2 pode ser adaptado para aproximação de curvas implícitas em malhas triangulares através de simples modificações. Os elementos da malha são processados e refinados

à medida que os testes acusam a presença da curva. Os triângulos que não são intersectados pela curva logo são descartados e não precisam ser processados nos próximos passos do algoritmo.

O teste sobre cada triângulo faz uso da função de inclusão e do valor das distâncias entre as retas geradas pela representação afim calculada. Desta forma, triângulos que intersectam a curva são refinados até que a curva possa ser aproximada por segmentos de reta. Por fim, a malha se adapta à curva apresentando triângulos menores em regiões próximas a C . Este processo pode ser representado pelo [Algoritmo 3](#), onde

- $\text{zeroAusente}(T)$: função de inclusão para curva em T .
- $\text{distFaixaAfim}(T)$: função que testa o critério da curvatura.
- $\text{aproxime}(T)$: aproxima a curva por segmentos de reta dentro de T .

Algoritmo 3: Explore T

Input: Triângulo T .

Output: T inteiro ou refinado.

```

1 if zeroAusente( $T$ ) then
2   | descarte  $T$ .
3 else if distFaixaAfim( $T$ ) then
4   | return aproxime( $T$ ).
5 else
6   | divida  $T$  em triângulos menores  $T_i$ 
7   | e para cada  $i$ , Explore( $T_i$ ).
```

O teste AA não consegue representar diretamente triângulos, por isso é preciso trabalhar com objetos que sejam naturais à AA, no caso paralelogramos, para que seja possível determinar as funções $\text{zeroAusente}(T)$ e $\text{distFaixaAfim}(T)$. As soluções para $\text{zeroAusente}(T)$, $\text{distFaixaAfim}(T)$ e $\text{aproxime}(T)$ serão detalhadas na próxima seção.

Triangulações oferecem muitos métodos de subdivisão. É importante lembrar que o método proposto neste trabalho não depende da maneira em que a malha é refinada, qualquer método de refinamento pode ser utilizado. Para os resultados, foram utilizadas malhas com refinamento 4-8 ([VELHO; ZORIN, 2001](#)), que é discutido com mais detalhes na próxima seção.

4.3 Detalhes de Implementação

Com respeito à implementação, além do algoritmo proposto, foi implementada uma interface gráfica para poder acompanhar os passos do algoritmo, assim como uma tela própria para visualização das faixas produzidas pela AA em cada triângulo da malha.

4.3.1 Aritmética Afim em Triângulos

Diferente da aritmética de intervalos clássica, a AA se mostra mais eficiente quando o domínio deixa de ser retangular. Com dois símbolos de ruído AA compartilhados por duas formas afins é possível definir um domínio no formato de um paralelogramo qualquer. Com as formas afins:

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 \quad \text{e} \quad \hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$$

temos representado um paralelogramo centralizado em (x_0, y_0) com lados paralelos aos vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ e o dobro de suas magnitudes, respectivamente. As quantidades x e y não são completamente independentes, a menos que $x_2 = 0$ e $y_1 = 0$, quando o paralelogramo se torna um retângulo com lados paralelos aos eixos ordenados.

Triângulos não são zonotos e por isso não podem ser representados diretamente pela AA. Sabemos representar paralelogramos em AA, logo, a solução mais simples seria incluir o triângulo em um paralelogramo. A Figura 12 mostra 3 maneiras diferentes de se fazer isto: calculando o menor retângulo que contem o triângulo, calculando um retângulo alinhado com alguma das arestas do triângulo ou calculando um retângulo a partir da reflexão do triângulo com respeito a uma de suas arestas.

Figura 12 – Incluindo o triângulo dentro de um paralelogramo.

Outra alternativa é decompor o triângulo em três paralelogramos sobrepostos, como mostra a Figura 13. Estes paralelogramos podem ser construídos através dos pontos médios das arestas do triângulo e f pode ser calculada com AA para cada um. Se a curva estiver dentro de uma faixa em cada um dos paralelogramos dentro do triângulo, então a curva está em um “tubo” dentro do triângulo.

Figura 13 – Decompondo o triângulo em paralelogramos.

Embora a estratégia da decomposição do triângulo exija três verificações por triângulo, ela apresenta uma aproximação poligonal mais precisa da curva implícita dentro do triângulo pois

gera até 3 segmentos de reta. As outras estratégias, apesar de exigirem apenas uma verificação por triângulo, utilizam um paralelogramo maior que o triângulo fazendo com que f seja calculada fora do triângulo. A [Tabela 3](#) e a [Figura 14](#) mostram as diferentes performances entre as estratégias discutidas acima para a aproximação poligonal da mesma curva implícita dada pela equação da [Figura 9b](#). Como esperado, a estratégia da decomposição leva mais tempo para ser executada porém visita menos triângulos e gera uma aproximação poligonal melhor com mais segmentos de reta. Esta estratégia foi a escolhida para a implementação deste projeto.

Estratégia	tempo (ms)	malha final	#visitados	#folhas	AA	seg.
Decomposição	33	1445	1805	250	4604	502
Reflexão	25	2909	3878	298	3878	298
Menor retângulo	28	3392	4522	318	4522	318
Retângulo Alinhado	25	2882	3842	316	3842	316

Tabela 3 – Diferentes performances das diferentes estratégias para o uso de paralelogramos em triângulos.

(a) Decomposição

(b) Reflexão

(c) Menor retângulo.

(d) Retângulo alinhado

Figura 14 – Efeitos das diferentes estratégias do uso de paralelogramos para aproximar poligonalmente uma curva implícita em triângulos.

4.3.2 Função de Inclusão

Com o paralelogramo representado pelas duas formas afins $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em mãos, a função de inclusão deve ser verificada em todos paralelogramos. Se a estratégia escolhida é a da inclusão de T em um paralelogramo então apenas uma verificação é necessária. Caso exista ocorrência de zero na forma afim final, passa-se ao teste da curvatura.

Apesar de exigir apenas uma verificação por triângulo, a forma afim que representa o paralelogramo que envolve o triângulo cobre um domínio maior que o triângulo. Isto significa que f estará sendo processada fora do domínio levando a um resultado menos preciso da função de inclusão. Na prática, o algoritmo subdividirá e processará mais triângulos que o necessário.

Se a estratégia da decomposição do triângulo é escolhida, então $\hat{f}$ deve ser calculada para cada um dos três paralelogramos. Neste caso, T será descartado por este teste se e somente se a $\hat{f}$ calculada de todos paralelogramos não conter o zero.

É importante observar que a possível presença do zero dentro de T não quer dizer que C intersecta suas arestas. O teste AA detectará componentes de C que se encontram dentro dos limites de T . Este fato garante a robustez do algoritmo, no sentido de que todas as partes da curva que intersectam a malha serão encontradas.

4.3.3 Estimativa da Curvatura

O teste $\text{distFaixaAfim}(T)$ representa o teste da curvatura. Triângulos em que a variação da curvatura da curva que se encontra em seu interior é alta devem ser refinados. A curva será aproximada por um segmento de reta quando a variação de sua curvatura é suficientemente pequena. Para primeira estratégia (triângulo incluído em um paralelogramo), basta calcular $\hat{f}$ e verificar a distância entre as faixas.

Para a estratégia da decomposição do triângulo, existirá uma distância entre as faixas calculada para cada um dos paralelogramos. A curva será aproximada para o segmento de reta apenas quando a distância é suficientemente pequena em todos os paralelogramos de T .

Assim como descrito na [subseção 3.3.1](#), a forma AA $\hat{z} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$ condensada se encontra entre os dois planos paralelos

$$\hat{z} = z_0 + z_1 \varepsilon_1 + z_2 \varepsilon_2 \pm z_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo as equações das formas afins que definem o paralelogramo em forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Separando ε_i ,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

podemos reescrever $\hat{z}$ da seguinte forma:

$$\hat{z} = a\hat{x} + b\hat{y} + c \pm z_3 \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

com $a = z_1 b_{11} + z_2 b_{21}$ (b e c calculados de maneira análoga). Observe que a intersecção dos planos paralelos no plano $x \times y$ resulta em duas retas,

- $r : a\hat{x} + b\hat{y} + c + z_3 = 0$, e
- $s : a\hat{x} + b\hat{y} + c - z_3 = 0$

A largura da faixa produzida por $\hat{f}$ é dada pela distância entre as retas r e s como segue:

$$\text{largura}(\hat{z}) = \sqrt{\frac{2z_3}{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Quando o valor de $\text{largura}(\hat{z})$ é pequeno, podemos garantir que a curvatura da curva é pequena, pois a curva na região do paralelogramo se encontra entre as retas r e s . Portanto, comparamos com uma tolerância γ para decidir que a curva dentro da região do paralelogramo possa ser aproximada por um segmento de reta. O valor de γ é um limiar definido pelo usuário.

Na [Figura 15](#) estão representadas as regiões (em cinza) entre as retas r e s em cada paralelogramo, deste modo pode-se ter uma visão melhor sobre este teste. Note que a curva se encontra dentro da porção da faixa que intersecta o paralelogramo. A curva será aproximada por um segmento de reta quando as faixas forem suficientemente estreitas.

Para paralelogramos degenerados não é possível calcular a matriz inversa B . Porém, testes com triângulos extremamente finos foram feitos a fim de reproduzir esta limitação e o algoritmo não apresentou problemas. Na prática, as malhas dificilmente possuem triângulos de tão baixa qualidade.

Figura 15 – Exemplo de faixas afins (em cinza) calculadas para cada um dos paralelogramos que compõem o triângulo.

4.3.4 Estimativa de Curvatura em Triângulos 3D

A subseção 4.3.3 define a estimativa de curvatura em triângulos definidos em $\mathbb{R}^2$, mas não pode ser aplicada para triângulos em $\mathbb{R}^3$. Para isto, a estimativa de curvatura deve sofrer algumas modificações para que se calcule $\hat{w} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ao invés de $\hat{z} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$. Em $\mathbb{R}^3$ temos as seguintes formas afins:

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 \quad \hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 \quad \hat{z} = z_0 + z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2$$

Para $\hat{w} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, calculamos $\hat{w} = w_0 + w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + w_3$ e, assim como na seção anterior, condensamos os termos de segunda ordem:

$$w_3 = |w_3| + w_n$$

Desta maneira, a forma AA $\hat{w}$ se encontra entre os dois planos paralelos

$$\hat{w} = w_0 + w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 \pm w_3$$

Escrevendo as equações em forma matricial encontramos:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Separando ε_i

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = B^+ \begin{pmatrix} \hat{x} - x_0 \\ \hat{y} - y_0 \\ \hat{z} - z_0 \end{pmatrix}$$

onde

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

podemos reescrever da seguinte forma:

$$\hat{w} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d \pm w_3$$

com $a = w_1b_{11} + w_2b_{21}$, e b, c e d calculados de maneira análoga. A matriz B^+ é chamada pseudo-inversa de B . Portanto, os planos paralelos pelos quais a curva está limitada são:

- $p: a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d + w_3 = 0$, e
- $q: a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d - w_3 = 0$

A largura da faixa produzida por $\hat{f}$ no caso de triângulos em $\mathbb{R}^3$ é então:

$$\text{largura}(\hat{w}) = \sqrt{\frac{2w_3}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

O teste com $\text{largura}(\hat{w})$ é utilizado da mesma maneira que $\text{largura}(\hat{z})$ na subseção 4.3.3, e possui as mesmas propriedades de $\text{largura}(\hat{z})$ necessárias para o algoritmo.

4.3.5 Subdivisão da Malha Triangular

Uma regra de refinamento é um algoritmo que produz uma malha mais fina a partir da malha de entrada. A regra utiliza a informação de conectividade da malha e não utiliza a informação geométrica (ex: posição dos vértices). Normalmente os métodos de refinamento estão relacionados a ladrilhos regulares, ou seja, divisões do plano compostas por polígonos idênticos regulares de n lados.

Existem três tipos de ladrilhamento regulares no plano: o polígono deve ser um quadrado, um triângulo equilátero ou um hexágono regular. Porém, quando se considera uma classe maior de ladrilhamento é possível obter novas classes de regras de refinamento.

A subdivisão 4-8 é uma técnica introduzida por Luiz Velho e Denis Zorin ([VELHO; ZORIN, 2001](#)) que utiliza ladrilhamento 4-8. Seus vértices alternam a valência entre 4 e 8. A estrutura básica neste ladrilhamento é o par de triângulos que formam um bloco quadrado dividido por uma de suas diagonais, como mostra a [Figura 16a](#).

Uma malha 4-8 regular tem a mesma estrutura de blocos do ladrilhamento 4-8, e suas arestas podem ser classificadas como interiores ou exteriores a cada bloco. Cada triângulo tem uma única aresta interior e duas exteriores. Isto permite o uso da bissecção como operação de refinamento primitiva: para cada triângulo, a única aresta interior é bisseccionada e os vértices opostos ao ponto de divisão são conectados. Um exemplo do refinamento por bissecção é visto na [Figura 16b](#). Para o uso do refinamento 4-8 na implementação do trabalho, foi utilizada a biblioteca ([VELHO, 2004](#)).

Figura 16 – Malha 4-8. Imagem retirada de ([VELHO; ZORIN, 2001](#)).

Outra técnica de refinamento de triângulos utilizada na implementação é a subdivisão Mid-Point (MP). A subdivisão MP é obtida conectando-se os pontos médios das arestas a fim de formar 4 triângulos menores ([Figura 17a](#)). Desta forma, obtém-se um novo triângulo com as novas arestas e mais 3 triângulos com o restante das sub-arestas ([Figura 17b](#)). A subdivisão MP não gera malhas conformes ([Figura 17c](#)). Malhas conformes são malhas onde a intersecção entre dois elementos é um vértice ou uma aresta. No caso da subdivisão MP, vértices são criados em cima de arestas e uma aresta pode ser formada por arestas dos triângulos vizinhos. Esta

subdivisão não considera triângulos vizinhos, por isto a malha pode ser representada por uma sopa de triângulos.

Figura 17 – Subdivisão MP. Triângulo é dividido em 4 novos triângulos através da conexão dos pontos médios de suas arestas.

4.4 Visualização dos Resultados

Para visualização dos resultados foi utilizada a biblioteca gráfica OpenGL. Para facilitar, uma interface gráfica utilizando a biblioteca GLUT foi desenvolvida. Desta maneira, é possível escolher facilmente as malhas, curvas e ajustar os parâmetros. A interface é composta de duas telas principais, como pode ser visto na [Figura 18](#). A primeira tela é onde a malha e a curva são mostradas de fato, nesta tela o usuário tem alguns controles sobre a imagem.

A tela de controles é responsável por todas as ações sobre o experimento a ser executado. Neste painel, a curva e a malha são escolhidas, assim como a tolerância γ para o teste de curvatura afim γ . Cada passo do algoritmo é comandado por esta tela, pelo botão Refine. É neste painel também que o usuário pode gerar a curva, através do botão Compute Curve.

Existe uma tela extra para auxiliar na visualização da faixa afim em cada paralelogramo do triângulo. Desta forma o usuário pode selecionar um triângulo na malha e observar como a AA se comporta. Esta tela pode ser vista na [Figura 19](#). A faixa afim aparece em verde claro, e é referente ao paralelogramo selecionado (arestas coloridas). Na [Figura 19b](#) encontra-se um ponto de singularidade, note como a faixa afim é mais grossa.

4.5 Resultados

Para se gerar o conjunto de segmentos de reta ($\text{aproxima}(T)$), que representam a aproximação da curva a seguinte estratégia é utilizada: quando um triângulo passou por todos os testes e podemos afirmar que a curva pode ser bem aproximada em seu interior, o segmento é calculado a partir das intersecções da curva com suas arestas. Porém, afim de se produzir mais um nível de refinamento na precisão, o triângulo é dividido em quatro triângulos menores via MP e cada um tem seu segmento calculado. Esta estratégia está representada na [Figura 20](#).

(a) Tela de controle.

(b) Tela de visualização.

Figura 18 – Janelas principais.

(a) Faixa afim do paralelogramo selecionado.

(b) Faixa afim próxima ao ponto de singularidade.

Figura 19 – Janela AA.

A Tabela 4 lista as estatísticas de vários exemplos de aproximações de diferentes curvas em diferentes malhas. Nesta tabela é possível verificar para cada par de curva e malha, qual profundidade de recursão o algoritmo alcançou, qual o valor de γ , a quantidade de triângulos na malha inicial e final e por fim o tempo(ms) que todo processo de refinamento levou. Os resultados

Figura 20 – Aproximação da curva por segmentos de reta em um triângulo.

foram gerados em uma máquina 1.83GHz Intel Core 2 Duo com 3GB de RAM. Através das figuras com os resultados é possível notar que o método permite aproximar curvas tanto em malhas convexas como não-convexas. A [Figura 28b](#) mostra que o algoritmo também aproxima curvas não-algébricas.

Fig.	Curva	Malha	Prof.	γ	Δ iniciais	Δ finais	tempo
21a	Taubin	Square	5	1×10^0	8	389	109
21b	Taubin	Square	6	1×10^{-1}	8	1466	401
21c	Taubin	Square	6	1×10^{-2}	8	2736	537
22b	Circle	Africa	3	1×10^{-3}	193	922	33
22c	Circle	Africa	5	1×10^{-3}	193	1106	42
23b	Bicorn	Octagon	5	5×10^{-3}	126	1168	54
24b	ClownSmile	K7	4	5×10^{-3}	1006	2134	214
25b	Cubic	Aircraft	3	5×10^{-3}	3530	4142	244
26b	Heart	Gear	3	3×10^{-3}	1424	3289	189
27b	Pear	Beetle	4	1×10^{-2}	940	1771	115
28b	Irrational	Eight	4	1×10^{-3}	1032	3897	247
30c	Pisces	Circle	6	5×10^{-3}	101	2382	641
29b	Capricorn	Tree	22	1×10^{-3}	1015	11678	4324

Tabela 4 – Resultados produzidos pelo algoritmo [2](#).

O método se adapta à topologia da curva, como pode ser visto na [Figura 30c](#), onde a malha inicial apresenta poucos triângulos. Este nível de adaptação não é adquirido com o algoritmo de marching triangles ([Figura 30a](#)), a não ser que seja utilizado após um grande refinamento da malha ([Figura 30b](#)).

As Figuras [23b](#), [25b](#), [27b](#) e [29b](#) apresentam resultados em malhas mais simples, enquanto as Figuras [24b](#), [26b](#) e [28b](#) mostram que o método também funciona para malhas mais complexas (com buracos).

A [Figura 21](#) ilustra o efeito do critério sobre a curvatura no método em cima da curva implícita Taubin dada por um polinômio de 4° grau (retirada de (TAUBIN, 1994b)). A tolerância γ é o único parâmetro fornecido pelo usuário, note como a malha apresenta uma concentração maior de triângulos em regiões de alta curvatura a medida que o parâmetro é variado.

Figura 21 – Curva implícita Taubin. Regiões de maior curvatura apresentam maior número de triângulos.

O resultado apresentado na [Figura 22](#) mostra que o método é capaz de aproximar uma curva implícita em uma coleção desordenada de triângulos (chamada sopa de triângulos) assim como em uma malha de triângulos com informação topológica. Para o primeiro exemplo ([Figura 22b](#)) foi utilizado refinamento por ponto médio, e no segundo refinamento malha 4-8 ([Figura 22c](#)).

Figura 22 – Método aplicado em uma (b)sopa de triângulos, e em uma (c)malha.

(a) Malha Inicial (Octagon).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 23 – Curva implícita dada por $y^2(a^2 - x^2) - (x^2 + 2ay - a)^2 = 0$ com $a = 0.75$.

(a) Malha Inicial (K7).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 24 – Curva implícita dada por $(y - x^2 + 1)^4 + (x^2 + y^2)^4 - 1 = 0$.

(a) Malha Inicial (Aircraft).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 25 – Curva implícita dada por $y^2 - x^3 + x - 0.5 = 0$.

(a) Malha Inicial (Gear).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 26 – Curva implícita dada por $x^2y^2 - (x^2 + y^2 - 1)^3 = 0$.

(a) Malha Inicial (Beetle).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 27 – Curva implícita dada por $4y^2 - (x + 1)^3(1 - x) = 0$.

(a) Malha Inicial (Eight).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 28 – Curva implícita dada por $(xy + \cos(x + y))(xy + \sin(x + y)) = 0$.

Figura 29 – Curva implícita dada por $(xy + \cos(x + y))(xy + \sin(x + y)) = 0$.

Figura 30 – Logotipo Pisces (<http://www.geom.umn.edu/fjw/pisces/>). (a) O algoritmo de marching cubes gera uma curva com topologia errada na malha de 101 triângulos e (b) só produz um resultado satisfatório com a malha de 12928 triângulos. (c) utilizando adaptatividade obtém-se um bom resultado com 2382 triângulos.

4.6 Resultados em Malhas Triangulares 3D

A [Tabela 5](#) lista as estatísticas de vários exemplos de aproximações de diferentes curvas em diferentes malhas 3D. Esta tabela apresenta a mesma configuração da [Tabela 5](#). Os resultados foram gerados em uma máquina Intel Core i7 2.4 GHz com 8GB de RAM.

Fig.	Curva	Malha	Prof.	γ	Δ iniciais	Δ finais	tempo
31b	Sin	Dinosaur	4	1×10^{-4}	1852	21073	315
32b	Knot Curve	Lauranna	4	1×10^{-4}	7817	12604	250
33b	Curve1	Teapot	3	1×10^{-4}	1962	10902	112
34b	TwoCircles	Gorilla	5	1×10^{-4}	8474	12898	487
35b	Harmonic 0	Sphere	4	1×10^{-4}	1536	7382	237
35c	Harmonic 1	Sphere	4	1×10^{-4}	1536	8586	215
35d	Harmonic 2	Sphere	6	1×10^{-4}	1536	19612	574
35e	Harmonic 3	Sphere	6	1×10^{-4}	1536	18718	523
35f	Harmonic 4	Sphere	7	1×10^{-4}	1536	26808	924
36c	Sphere	Bitorus	3	1×10^{-4}	3386	5974	125
37b	Cylinder 0	Sphere	5	1×10^{-4}	1536	3300	91
37d	Cylinder 1	Sphere	9	1×10^{-4}	1536	11856	418
37f	Cylinder 2	Sphere	5	1×10^{-4}	1536	4984	116
38a	Hiperboloide	Klein Bottle	3	1×10^{-4}	800	4463	29
38b	Hiperboloide	Klein Bottle	10	1×10^{-4}	8	4890	37

Tabela 5 – Resultados produzidos pelo [Algoritmo 2](#) para Malhas Triangulares 3D.

As Figuras [31](#), [32](#) e [33](#) são exemplos produzidos através do refinamento MP enquanto no restante utilizou-se refinamento 4-8. Nos exemplos de intersecções com superfícies 3D, a superfície pode ser vista na cor azul e foi aproximada com o algoritmo Marching Cubes ([LORENSEN; CLINE, 1987](#)) (Figuras [36](#) e [37](#)).

Harmônicos esféricos são a porção angular de um conjunto de soluções da equação de Laplace ($\Delta\phi = 0$). Representados em coordenadas esféricas, os harmônicos esféricos de Laplace Y_l^m são um conjunto específico de harmônicos esféricos que formam um sistema ortogonal (os elementos deste conjunto também são chamados de auto-funções). As curvas da [Figura 35](#) são resultados de intersecções de uma esfera com os harmônicos esféricos reais:

- Harmonic 0: $Y_4^0 = \frac{3}{16} \frac{1}{\pi} \frac{(35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4)}{r^4}$ ([Figura 35b](#))
- Harmonic 1:i: $\frac{1}{2}(Y_4^{-1} + Y_4^1) = \frac{3}{4} \frac{1}{2\pi} \frac{5(yz(7z^2 - 3r^2))}{r^4}$ ([Figura 35c](#))
- Harmonic 2: $\frac{1}{2}(Y_4^{-2} + Y_4^2) = \frac{3}{8} \frac{1}{\pi} \frac{5((x^2 - y^2)(7z^2 - r^2))}{r^4}$ ([Figura 35d](#))
- Harmonic 3:i: $\frac{1}{2}(Y_4^{-3} + Y_4^3) = \frac{3}{4} \frac{1}{2\pi} \frac{35(yz(3x^2 - y^2))}{r^4}$ ([Figura 35e](#))
- Harmonic 4: $\frac{1}{2}(Y_4^{-4} + Y_4^4) = \frac{3}{16} \frac{1}{\pi} \frac{35(x^2(x^2 - 3y^2) - y^2(3x^2 - y^2))}{r^4}$ ([Figura 35f](#))

A Figura 38 mostra a intersecção de uma superfície implícita com uma superfície definida no domínio paramétrico. Para fins de comparação, uma malha triangular representando a superfície paramétrica foi gerada para que a intersecção fosse calculada tanto sob a malha quanto no domínio paramétrico.

(a) Malha Inicial (Dinosaur).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 31 – Curva implícita dada por $y - 3\sin x = 0$.

(a) Malha Inicial (Lauranna).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 32 – Curva implícita dada por $y^2(3 + 2y) - (x^2 - 1)^2 = 0$.

(a) Malha Inicial (Teapot).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 33 – Curva implícita dada por $(xy - 2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

(a) Malha Inicial (Gorilla).

(b) Malha refinada com a curva.

Figura 34 – Curva implícita dada por $xy^2(1 - \frac{p}{xy^2}) - 0.04 = 0$.

4.7 Considerações Finais

Existem algumas limitações para a técnica proposta. Talvez a mais crucial seja quando a curva a ser aproximada apresenta pontos de singularidade. Nestes pontos, a distância das retas geradas pelas faixas afim é grande. Desta forma, dependendo do valor de γ escolhido, a recursão em cima do ponto de singularidade continuará e será limitada pela precisão computacional. Por conta disto, como é utilizado o método da bisseção para o cálculo dos segmentos de reta, o valor da função nos vértices dos triângulos é muito pequena e a ligação entre os segmentos já não é mais garantida (são limitações que surgem por conta do marching triangles).

(a) Malha Inicial (Sphere).

(b) Harmônico 0.

(c) Harmônico 1.

(d) Harmônico 2.

(e) Harmônico 3.

(f) Harmônico 4.

Figura 35 – Intersecção da esfera com harmônicos esféricos reais.

(a) Malha Inicial (Bitorus).

(b) Superfície implícita.

(c) Malha refinada com a curva.

Figura 36 – Curva implícita dada por $x^2 + y^2 + z^2 - 0.25 = 0$.

(a) Superfície implícita para $a = 0.5$

(b) Malha refinada com a curva.

(c) Superfície implícita para $a = 1.0$

(d) Malha refinada com a curva.

(e) Superfície implícita para $a = 1.5$

(f) Malha refinada com a curva.

Figura 37 – Curvas implícitas dadas pela Esfera e $(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ com diferentes valores de a .

(a) Curva calculada na malha triangular.

(b) Curva calculada diretamente no domínio paramétrico.

Figura 38 – Intersecção entre o hiperbolóide dado pela equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ e a superfície paramétrica definida por $x(u, v) = (a + \cos(u) \sin(v) - \sin(u) \sin(2v)) \cos(u)$, $y(u, v) = (a + \cos(u) \sin(v) - \sin(u) \sin(2v)) \sin(u)$, $z(u, v) = \sin(u) \sin(v) + \cos(u) \sin(2v)$, onde $a = 2.7$ e $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

A Figura 39 ilustra um ponto de singularidade, onde os segmentos da curva de cor vermelha representam locais que devem ser refinados ainda. Note que pelo método a região deverá ser refinada continuamente, porém será limitada pela precisão do hardware. Desta forma, o código permite que o usuário opte pela bi-coloração da curva, a fim de visualmente identificar porções da curva que o método exige refinamento, e por fim identificar possíveis pontos de singularidade.

Existe um estudo feito sobre a largura da faixa afim gerada pela AA de acordo com os ângulos formados pelas arestas dos triângulo. Na Figura 40a, triângulos com o ângulos do vértice

Figura 39 – Ponto de singularidade.

superior iguais a 15° , 45° e 60° são intersectados com uma parábola. É possível notar a variação do comprimento da faixa afim a medida que o ângulo aumenta. Já na [Figura 40b](#), o mesmo é feito com a função cosseno, porém neste caso a largura da faixa não se altera entre os 3 triângulos.

Figura 40 – Variação do comprimento da faixa afim para diferentes ângulos do vértice superior e diferentes funções para cada um dos paralelogramos que dividem o triângulo.

TRABALHOS COMPLEMENTARES

5.1 Imagens Confiáveis de Curvas Implícitas

Os métodos descritos nos capítulos anteriores buscam eficiência na aproximação poligonal de curvas implícitas através da enumeração adaptativa. Os algoritmos propostos utilizam apenas informações locais ao processar cada célula - a aproximação da curva implícita dentro de uma célula não necessita de informações de outras células da decomposição para ser feita. Esta característica possibilita uma execução em paralelo do algoritmo.

Hoje em dia, uma placa de processamento gráfico (GPU - Graphics Processing Unit) dispõe de centenas de processadores permitindo a execução paralela de algoritmos, o que permite o uso de um número maior de células na decomposição do domínio. O número de células pode ser escolhido de tal maneira que se produza uma imagem da curva implícita com resolução a nível de pixel.

Uma imagem de uma região retangular de um domínio Ω pode ser obtida pelo método de enumeração através da decomposição da região por uma malha regular da qual cada célula corresponde a pixels e a cada pixel é atribuída uma cor. Normalmente, a cor do pixel é atribuída de acordo com o valor da função implícita em seu centro. Porém, para que uma imagem seja confiável, a cor do pixel deve ser baseada no valor da função implícita em toda a região do pixel. Por exemplo, se branco significa que o valor da função é positivo, então um pixel branco deve garantir que toda região que cobre tem valor positivo como resultado da função. A melhor imagem é, então, a imagem cuja resolução é igual à resolução da decomposição do domínio, onde cada célula corresponde a apenas um pixel.

O uso de métodos intervalares como a AI permite a atribuição robusta de cores para pixels em imagens construídas a partir da decomposição regular do domínio. Podem-se definir 3 cores para a imagem: preto, onde a função tem valor negativo, branco para regiões positivas e vermelho para regiões que contém o zero. Mais precisamente, a cor vermelha representará regiões

onde a curva implícita se encontra e por sua vez serão os pixels que definirão a aproximação da curva implícita.

O uso da GPU permite definir uma função de inclusão (descrita na [seção 3.2](#)) para cada pixel de uma imagem a fim de produzir uma imagem confiável de uma curva implícita. As dimensões de cada pixel são calculadas de acordo com o domínio escolhido e utilizadas, em conjunto com a posição do pixel, para definir os intervalos em cada pixel. A função implícita é então calculada com AI em cada pixel e através da análise do intervalo resultante, a cor do pixel é definida. Se o intervalo inteiro é negativo, o pixel é pintado de preto. Se o intervalo é inteiramente positivo, o pixel é pintado de branco. Caso contrário o pixel é pintado de vermelho representando a presença do zero.

Este algoritmo pode ser executado através da aplicação desenvolvida para o projeto que se encontra no website <http://filipecn.github.io/WebGL-Tools/2DOurves.html> (NASCIMENTO, 2015). A aplicação permite que o usuário digite uma expressão algébrica da curva implícita qualquer, defina as propriedades do domínio e visualize a imagem gerada em tempo real. A [Figura 41](#) mostra um exemplo de uso da aplicação.

Figura 41 – Exemplo de geração de imagem confiável de uma curva implícita fornecida pelo usuário.

5.2 Superfícies Implícitas de Conjuntos de Pontos

Dado um conjunto de pontos $S = \{s_i\}_{i=1}^N$ que representa os N pontos contidos numa superfície, uma função implícita deve ser definida de tal maneira que a superfície implícita

represente a superfície original.

Normalmente, esta função é uma função implícita f com $|f(p)| = d(p)$, onde d é uma função de distância. A função de distância $d(p)$ é definida como

$$d(p) = \min_i (\|p - s_i\|) \quad (5.1)$$

implicando que $d(p) = 0$ na fronteira onde $p \in S$. Geometricamente, d pode ser construída como se segue. Se $p \in S$, então $d(p) = 0$. Caso contrário, para um dado ponto p , encontre o ponto $\hat{p} \in S$ mais próximo de p . Então $d(p) = \|p - \hat{p}\|$.

A função f é definida com $f < 0$ no interior da região definida por $f = 0$ e $f > 0$ fora desta região. Então, $f(p) = d(p) = 0$ para todo $p \in S$, $f(p) = -d(p)$ para todo p dentro e $f(p) = d(p)$ para todo p fora. Dadas estas propriedades de f e $\|\nabla f\| = 1$, f é definida como a Função de Distância com Sinal (FDS). Uma descrição da FDS pode ser encontrada em (FEDKIW; OSHER, 2003). Um simples exemplo da FDS é baseado no Moving Least Squares (MLS) (KOLLURI, 2008). A FDS de um ponto p é definida como a média ponderada envolvendo os pontos de S da seguinte maneira:

$$f(p) = \frac{\sum_i W_i(p) [(p - s_i) \cdot n_i]}{\sum_j W_j(p)} \quad (5.2)$$

com n_i sendo a normal da superfície em s_i e $W_i(p) = \exp(-\|p - s_i\|^2 / \varepsilon^2 A_i)$, onde A_i é o número de pontos dentro de uma bola de raio ε centrada em s_i , incluindo s_i .

O principal desafio ao construir funções implícitas para conjuntos de pontos é conseguir superfícies suaves enquanto preservando volume. Existem várias técnicas que utilizam funções implícitas mais sofisticadas baseadas em FDS que tentam atingir estes objetivos (GOMES et al., 2009). Duas destas técnicas são:

- Técnicas baseadas em Funções de Base Radial (RBFs) (CARR et al., 2001), que produzem um interpolador único que aproxima todos os pontos do conjunto.
- Técnicas que utilizam funções locais e são unidas por meios de partição de unidade. A partição de unidade é um conjunto de pesos locais (ou funções de peso) que somam 1 em todo o domínio. A técnica apresentada em (OHTAKE et al., 2005) utiliza o Multilevel Partition of Unity (MPU) em conjunto com 3 tipos de quádricas locais para reconstrução de superfícies implícitas de conjuntos grandes de pontos.

5.2.1 Implementação

A primeira função FDS escolhida para os experimentos foi a Equação 5.2, utilizando uma Gaussiana com função de peso:

$$W_i(p) = \exp(-\|p - s_i\|^2 / \varepsilon^2 A_i) \quad (5.3)$$

onde A_i é o número de pontos dentro da bola de raio ε centrada no ponto s_i , incluindo s_i .

Foi implementada uma adaptação do [Algoritmo 2](#) utilizando as Equações 5.2 e 5.3. Como conjuntos de pontos iniciais, foram utilizados pontos de curvas de contorno extraídas de imagens binárias ([Figura 42](#)) ou pontos gerados por equações paramétricas. A [Figura 43](#) mostra o processo de extração de imagens binárias. Todos exemplos, Circle Test, Hand Test e Arrow Test mostrados nas Figuras 44, 45 e 46, respectivamente. A curva aproximada é composta por segmentos pintados em vermelho e o conjunto de pontos é representado por pequenos pontos e suas normais.

Figura 42 – Exemplos de imagens binárias usadas para construção de conjuntos de pontos.

Figura 43 – O processo de construção de conjuntos de pontos a partir de imagens binárias: Primeiro, o contorno da curva é extraído pixel a pixel, onde cada pixel representa um vértice da curva e depois a curva pode ser simplificada diminuindo o número de vértices. Foi utilizado o código *Decimate* e *Polygon* fornecido por ([SEMECHKO, 2012](#)).

Inicialmente os testes deram bons resultados, o Circle Test mostrou boa adaptatividade espacial do algoritmo. O Arrow Test mostrou sinais de boa adaptatividade geométrica, mas não tão boa quanto era esperado. O Hand Test foi mais problemático, nem a adaptatividade geométrica ou espacial funcionaram. A maior parte do domínio foi igualmente refinada, com muitas partes

Figura 44 – Circle Test: Teste utilizando pontos gerados pela equação paramétrica do círculo.

Figura 45 – Hand Test: Teste usando os pontos extraídos da imagem binária de uma mão.

refinadas longe da curva (má adaptatividade espacial) e mesmo nas pontas dos dedos, onde existe maior variação de curvatura, o domínio não foi mais refinado (má adaptatividade geométrica).

Figura 46 – Arrow Test: Teste usando os pontos extraídos da imagem binária de uma mão. Células descartadas pela ausência da curva estão pintadas de cinza.

Mais pesquisa teve de ser feita para tentar solucionar os problemas, mas dois fatos impediram de continuar:

- A função de peso ([Equação 5.3](#)) utiliza operação de raiz, por conta do cálculo da distância Euclidiana. Como AA trabalha com regiões de incerteza, estas regiões podem estar total ou parcialmente composta de números negativos, levando a resultados errados para [Equação 5.2](#). A Tabelas 6 e 7 mostram os resultados inconsistentes quando executando a operação de raiz em duas bibliotecas AA diferentes.

func lib	LIBAFFA
X^2	$16\overline{5} + -8e1 + 0\overline{5}e2$
X^3	$-66 + 48\overline{5}e1 + 0e2 + -2e3 + 8\overline{5}e4$
$\sqrt{X}$	$-nan + -nane1 + -nane2$
expX	$0\overline{0}180496 + 0\overline{0}215246e1 + 0\overline{0}0510643e2$
sinX	$0\overline{6}04541 + -0\overline{5}74922e1 + 0\overline{2}20538e2$

Tabela 6 – Resultados com a região parcialmente negativa utilizando ([GAY](#); [COEURJOLLY](#); [HURSTAND](#), 2006).

Poderia se evitar cálculos envolvendo raiz de números negativos substituindo a [Equação 5.3](#) por outras equações. Entretanto isto não resolve o problema. É preciso pesquisar mais a respeito para saber como tratar corretamente estes casos.

- Uma característica da AA é de gerar símbolos de ruído para toda quantidade independente ([seção 2.2](#)). Isto funciona muito bem para calculos que envolvem poucas quantidades.

func lib	AAFLIB
X^2	$16\overline{5} - 8e1 - 0\overline{5}e2$
X^3	$- 69\overline{9}96 + 49e1 + 6e2$
$\sqrt{X}$	error
$\exp X$	$0\overline{0}23 + 0\overline{0}21e1 + 0\overline{0}05e2$
$\sin X$	$0\overline{6} - 0\overline{5}7e1 + 0\overline{2}2e2$

Tabela 7 – Resultados com a região parcialmente negativa utilizando (IMS, 2010).

Neste caso, para cada ponto é considerada uma quantidade independente, então novos símbolos de ruído são criados. A [Equação 5.2](#) é calculada para cada ponto, e toda vez que isto ocorre, todo termo nesta soma gera novos símbolos. Quanto maior o conjunto de pontos, maior o numero de símbolos necessários. Como AA armazena os símbolos globalmente (mesmo para pares de pontos que não estão relacionados diretamente ou nem mesmo fazem parte do mesmo passo da recursão), o programa encontra limitações de memoria rapidamente.

A pesquisa continuou para se obter um melhor entendimento de AA na resolução destes problemas. Outras pessoas estão tentando resolver questões similares. Um exemplo é o trabalho de ([KASHIWAGI, 2012](#)), que propõe um modo de comprimir os símbolos de ruído, mantendo um numero fixo de símbolos, podendo ser uma solução para um dos obstáculos do projeto. Outra alternativa, é investigar o trabalho de ([CHATTOPADHYAY; PLANTINGA; VEGTER, 2012](#)), onde propõe um novo método para calcular FDS utilizando métodos intervalares.

Enquanto isso, tentou-se adaptar este projeto para calcular curvas de intersecção entre conjuntos de pontos e malhas triangulares ([Figura 47](#)), uma operação importante em situações onde se tem diferentes tipos de elementos. Para este teste foi utilizada malha com refinamento 4-8.

Figura 47 – Intersecção de um conjunto de pontos e uma malha triangular. Malha inicial (esquerda). Malha após 11 chamadas recursivas (direita). As normais dos pontos estão pintadas de vermelho e a curva aproximada de verde.

CONCLUSÕES

O projeto trata da aproximação poligonal de curvas implícitas em diferentes domínios. A característica adaptativa do algoritmo permite maior eficiência comparada às técnicas tradicionais de enumeração. O uso da ferramenta numérica AA fornece estimativas de curvatura sem exigir o cálculo de derivadas da função implícita e permite a detecção de pontos de singularidade. A AA também garante robustez ao método, característica importante em aplicações de visualização de objetos implícitos.

O método de aproximação poligonal de curvas implícitas em malhas triangulares não depende de regras de refinamento ou estrutura da malha. Isto significa que o método pode ser aplicado a qualquer tipo de malha triangular independente do tipo de refinamento. Uma limitação porém, é que os resultados podem depender da qualidade dos triângulos da decomposição inicial, a menos que o esquema de refinamento escolhido evite triângulos de má qualidade.

A maior limitação deste trabalho está no fato de que a curva implícita deve ser fornecida ao método apenas em sua forma algébrica, deixando de fora aplicações importantes como a aproximação de superfícies implícitas a partir de conjuntos de pontos. Um trabalho foi iniciado neste sentido mas ainda sem resultados, os experimentos iniciais foram discutidos no [seção 5.2](#). A solução para este problema faz parte do conjunto de trabalhos futuros do projeto.

O trabalho apresentado em ([PAIVA et al., 2006](#)) propõe um algoritmo robusto para aproximação de superfícies implícitas utilizando AI. Diante dos resultados obtidos com AA para aproximação de curvas implícitas, estender este trabalho para o uso da AA se torna uma ideia natural.

Métodos Intervalares como a AA podem ser aplicados em diversos outros tipos de problema, um exemplo é o cálculo de complexos Morse-Smale, cujo um método baseado em AI é proposto por ([CHATTOPADHYAY; VEGTER; YAP, 2015](#)). Como trabalho futuro relacionado a este projeto de mestrado, este tema pode ser um forte candidato ao desenvolvimento de métodos baseados em AA.

Por fim, enquanto a AI cobre apenas regiões retangulares do domínio, a AA permite a formação de paralelogramos e outros tipos de zonotopos. Um trabalho interessante é o estudo destas formas a fim de aplicar a AA em outros tipos de decomposição do domínio, não só no 2D como também no 3D. A cobertura de diferentes tipos de decomposição de domínio, juntamente com a possível aplicação de AA a outros tipos de objetos (ex, curvas e superfícies paramétricas), pode possibilitar o desenvolvimento de ferramentas capazes de manipular os diferentes tipos de dados.

REFERÊNCIAS

CARR, J. C.; BEATSON, R. K.; CHERRIE, J. B.; MITCHELL, T. J.; FRIGHT, W. R.; MCCALLUM, B. C.; EVANS, T. R. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions. In: ACM. Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. [S.l.], 2001. p. 67–76. Citado na página 71.

CHATTOPADHYAY, A.; PLANTINGA, S.; VEGTER, G. Certified meshing of radial basis function based isosurfaces. *The Visual Computer*, Springer, v. 28, n. 5, p. 445–462, 2012. Citado na página 75.

CHATTOPADHYAY, A.; VEGTER, G.; YAP, C. Certified computation of planar morse-smale complexes. *CoRR*, abs/1506.06265, 2015. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1506.06265>. Citado na página 77.

COMBA, J. L. D.; STOLFI, J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. In: *Proceedings of SIBGRAPI'93*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 9–18. Citado na página 29.

DOBKIN, D. P.; LEVY, S. V. F.; THURSTON, W. P.; WILKS, A. R. Contour tracing by piecewise linear approximations. *ACM Transactions on Graphics*, v. 9, n. 4, p. 389–423, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

FEDKIW, R.; OSHER, S. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Springer, 2003. Citado na página 71.

FIGUEIREDO, L. H. de; STOLFI, J. Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic. *Computer Graphics Forum*, v. 15, n. 5, p. 287–296, 1996. Citado na página 29.

_____. *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. [S.l.]: IMPA, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 28, 31, 32 e 33.

_____. *An Introduction to Affine Arithmetic*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 3 vezes nas páginas 13, 28 e 34.

GAY, O.; COEURJOLLY, D.; HURSTAND, N. Libaffa, C++ Affine Arithmetic Library. 2006. <http://www.nongnu.org/libaffa/>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 35 e 74.

GOMES, A.; VOICULESCU, I.; JORGE, J.; WYVILL, B.; GALBRAITH, C. *Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms*. Mathematics, Data Structures and Algorithms. [S.l.]: Springer, 2009. Citado na página 71.

GUÉZIEC, A.; HUMMEL, R. Exploiting triangulated surface extraction using tetrahedral decomposition. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 1, n. 4, p. 328–342, 1995. Citado na página 28.

IMS. *aaflib - An Affine Arithmetic C++ Library*, Institute of Microelectronic Systems - url: <http://aaflib.sourceforge.net/>. 2010. Disponível em: <http://aaflib.sourceforge.net/>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 75.

JR., A. de C.; FIGUEIREDO, L. H. de; GATTASS, M. Interval methods for ray casting implicit surfaces with affine arithmetic. In: Proceedings of SIBGRAPI'99. [S.l.]: IEEE Press, 1999. p. 65–71. Citado na página 29.

KASHIWAGI, M. An algorithm to reduce the number of dummy variables in affine arithmetic. In: SCAN conference, Novosibirsk. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 75.

KOLLURI, R. Provably good moving least squares. ACM Transactions on Algorithms (TALG), ACM, v. 4, n. 2, p. 18, 2008. Citado na página 71.

LOPES, H.; OLIVEIRA, J. B.; FIGUEIREDO, L. H. de. Robust adaptive polygonal approximation of implicit curves. Computers & Graphics, v. 26, n. 6, p. 841–852, 2002. ISSN 0097-8493. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097849302001735>>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 27, 38 e 40.

_____. _____. Computers & Graphics, v. 26, n. 6, p. 841–852, 2002. Citado na página 29.

LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. SIGGRAPH Comput. Graph., ACM, New York, NY, USA, v. 21, n. 4, p. 163–169, ago. 1987. ISSN 0097-8930. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/37402.37422>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 61.

MARTIN, R.; SHOU, H.; VOICULESCU, I.; BOWYER, A.; WANG, G. Comparison of interval methods for plotting algebraic curves. Computer Aided Geometric Design, Elsevier Science Publishers B. V., v. 19, n. 7, p. 553–587, 2002. ISSN 0167-8396. Citado na página 29.

MITCHELL, D. P. Three applications of interval analysis in computer graphics. In: Frontiers in Rendering course notes. [S.l.]: SIGGRAPH'91, 1991. p. 14–1–14–13. Citado na página 29.

MOCHIZUKI, K. Robust and adaptive polygonization of implicit curves and surfaces. Dissertação (Mestrado) — University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan, 2004. Citado na página 34.

NASCIMENTO, F. de C. 2015. Disponível em: <<http://filipecn.github.io/WebGL-Tools/2DCurves.html>>. Acesso em: 02/12/2015. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 70.

NASCIMENTO, F. de C.; PAIVA, A.; FIGUEIREDO, L. H. D.; STOLFI, J. Approximating implicit curves on plane and surface triangulations with affine arithmetic. Computers & Graphics, Elsevier, v. 40, p. 36–48, 2014. Citado na página 30.

OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; ALEXA, M.; TURK, G.; SEIDEL, H.-P. Multi-level partition of unity implicits. In: ACM. ACM SIGGRAPH 2005 Courses. [S.l.], 2005. p. 173. Citado na página 71.

PAIVA, A.; LOPES, H.; LEWINER, T.; FIGUEIREDO, L. H. de. Robust adaptive meshes for implicit surfaces. In: Sibgrapi 2006 (XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing). Manaus, AM: IEEE, 2006. p. 205–212. Citado 5 vezes nas páginas 13, 25, 28, 29 e 77.

PAIVA, A.; NASCIMENTO, F. d. C.; FIGUEIREDO, L. H. d.; STOLFI, J. Approximating implicit curves on triangulations with affine arithmetic. In: FREITAS, C. M. D. S.; SARKAR, S.; SCOPIGNO, R.; SILVA, L. (Ed.). Proceedings... Los Alamitos: IEEE Computer Society Conference Publishing Services, 2012. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/sibgrapi/>>

[2012/07.04.00.56>](#). Acesso em: 2012, Nov. 07. Citado 6 vezes nas páginas [13](#), [30](#), [38](#), [42](#), [43](#) e [44](#).

PERSIANO, R. C. M.; COMBA, J. L. D.; BARBALHO, V. An adaptive triangulation refinement scheme and construction. In: Proceedings of SIBGRAPI'93. [S.l.: s.n.], 1993. p. 259–266. Citado na página [29](#).

SEMECHKO, A. Source code of Decimate Poly: library LosTopos and sample applications - url: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/34639-decimate-polygon>. 2012. Disponível em: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/34639-decimate-polygon>. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [72](#).

SNYDER, J. M. Generative Modeling for Computer Graphics and CAD. [S.l.]: Academic Press, 1992. xxii+311 p. Citado na página [29](#).

_____. Interval analysis for computer graphics. Computer Graphics, v. 26, n. 2, p. 121–130, 1992. (SIGGRAPH'92 Proceedings). Citado na página [29](#).

SUFFERN, K. G. Quadtree algorithms for contouring functions of two variables. Comput. J., Oxford University Press, Oxford, UK, v. 33, n. 5, p. 402–407, out. 1990. ISSN 0010-4620. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/33.5.402>. Citado na página [27](#).

SUFFERN, K. G.; FACKERELL, E. D. Interval methods in computer graphics. Computers & Graphics, v. 15, n. 3, p. 331–340, 1991. Citado na página [29](#).

TAUBIN, G. Rasterizing algebraic curves and surfaces. IEEE Computer Graphics and Applications, v. 14, n. 2, p. 14–23, 1994. ISSN 0272-1716. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [44](#).

_____. _____. IEEE Computer Graphics and Applications, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, v. 14, p. 14–23, 1994. ISSN 0272-1716. Citado na página [56](#).

VELHO, L. A dynamic adaptive mesh library based on stellar operators. Journal of Graphics Tools, v. 9, n. 2, p. 1–29, 2004. Citado na página [53](#).

VELHO, L.; ZORIN, D. 4-8 subdivision. Computer Aided Geometric Design, v. 18, n. 5, p. 397–427, 2001. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [47](#) e [53](#).