UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Simulação numérica da estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekus

Arianne Alves da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Arianne Alves da Silva

Simulação numérica da estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekeus

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Agosto de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A586s Alves da Silva, Arianne
 Simulação numérica da estabilidade de escoamentos
de um fluido Giesekus / Arianne Alves da Silva;
orientador Leandro Franco de Souza. -- São Carlos,
2018.
 114 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

 1. Transição Laminar-Turbulenta. 2. Fluidos
Viscoelásticos. 3. Simulação Numérica Direta. 4.
Modelo Giesekus. 5. Estabilidade de Escoamento. I.
Franco de Souza, Leandro, orient. II. Título.

Arianne Alves da Silva

Numerical simulation of the flow stability of a Giesekus fluid

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
August 2018

*À minha família
e amigos.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela força e esperança que me deu para conseguir concluir esta etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Leandro Franco de Souza, pelo apoio e ensinamentos que me deu durante essa trajetória de desenvolvimento deste trabalho.

À minha mãe, Zilândia, por todo incentivo, dedicação e preocupação que teve para me dar suporte emocional e intelectual para que eu tivesse condições de chegar, permanecer e concluir este ciclo. À minha família pelo apoio.

Ao Leandro Mundim, pela força e autoestima sempre. Aos amigos que conquistei na pós-graduação, que me ajudaram, foram companheiros e amigos que compartilharam comigo alguns momentos. À Mirianne, por ser minha amiga irmã desde a graduação.

Aos amigos e amigas que tenho fora da pós.

Ao Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC), por toda estrutura disponível.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

À FAPESP pelo financiamento dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), (proc. 2013/07375-0).

À Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), aos professores que conheço deste instituto, responsáveis pela minha formação acadêmica e, à alguns deles, inclusive pelo meu amadurecimento pessoal.

*“The greatest adventure you can have
is to live the life of your dreams.”
(Oprah Winfrey)*

RESUMO

SILVA, A. A. **Simulação numérica da estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekus**. 2018. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Diversas aplicações industriais utilizam escoamentos de fluidos viscoelásticos, e em muitos casos é necessário saber se os escoamentos propagam-se no estado laminar ou no turbulento. Embora a hidrodinâmica de fluidos viscoelásticos seja fortemente afetada pelo balanço entre forças inerciais e elásticas no escoamento, o efeito da elasticidade sobre a estabilidade de escoamentos inerciais não foi completamente estabelecido. Neste trabalho, estuda-se o que ocorre durante a transição laminar-turbulenta, investigando a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento incompressível, para um fluido viscoelástico, entre placas paralelas, utilizando a equação constitutiva Giesekus. Para isto, adotou-se a simulação numérica direta para verificar a estabilidade dos escoamentos à perturbações não estacionárias deste fluido. Experimentos computacionais para verificação do código foram realizados. Com os resultados numéricos obtidos, foi possível verificar e analisar a estabilidade de escoamentos utilizando-se o modelo não newtoniano Giesekus.

Palavras-chave: Transição Laminar-Turbulenta, Fluidos Viscoelásticos, Simulação Numérica Direta, Modelo Giesekus, Estabilidade de Escoamentos.

ABSTRACT

SILVA, A. A. **Numerical simulation of the flow stability of a Giesekus fluid.** 2018. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Several industrial applications use viscoelastic fluid flows, and it is necessary to know if the flows propagate in the laminar or turbulent state. Although the hydrodynamics of viscoelastic fluids is strongly affected by the balance between inertial and elastic forces in the flow, the effect of elasticity on the stability of inertial flows has not been completely established. In this work we study what happens during the laminar-turbulent transition, investigating the convection of Tollmien-Schlichting waves for the incompressible flow, for a viscoelastic fluid, between parallel plates, using the constitutive equation Giesekus. For this, the direct numerical simulation was used to verify the stability of the flows to the non-stationary perturbations of this fluid. Computational experiments to verify the code were performed. With the numerical results obtained, it was possible to verify and analyze the stability of flows modelled by Giesekus non-newtonian model.

Keywords: Laminar-Turbulent Transition, Viscoelastic Fluids, Direct Numerical Simulation, Giesekus Model, Flow Stability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Domínio computacional para o escoamento entre placas planas paralelas . .	56
Figura 2 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 5000$, $\beta = 0.25$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 1$. .	57
Figura 3 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 4000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 1$. .	58
Figura 4 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 3000$, $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.50$ e $Wi = 5$. .	59
Figura 5 – Desvio da solução numérica em relação a solução semi analítica da velocidade u , variando Re , $\beta = 0.25$ e $Wi = 1$. As linhas contínuas é para $\alpha_G = 0.25$ e as tracejadas para $\alpha_G = 0.5$	60
Figura 6 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (3)	61
Figura 7 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (2)	62
Figura 8 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (1)	63
Figura 9 – Componente T^{xx} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi	64
Figura 10 – Componente T^{xy} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi	65
Figura 11 – Componente T^{yy} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi	66
Figura 12 – Variáveis u , v e ω_z para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 3$	67
Figura 13 – Domínio computacional para o escoamento entre placas planas paralelas com perturbação	68
Figura 14 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para diferentes valores de Re , para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2.0$. .	72
Figura 15 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, diferentes valores de β , $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$	73
Figura 16 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 7000$, diferentes valores de β , $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$	74
Figura 17 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 5000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G e $Wi = 1.0$	75

Figura 18 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 5000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G e $Wi = 10$	76
Figura 19 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G , $\beta = 0.75$ e $Wi = 1.0$	77
Figura 20 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G , $\beta = 0.75$ e $Wi = 10$	78
Figura 21 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.0$ e diferentes valores de Wi	79
Figura 22 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.8$ e diferentes valores de Wi	80
Figura 23 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	81
Figura 24 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	82
Figura 25 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	83
Figura 26 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	84
Figura 27 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	85
Figura 28 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$	86
Figura 29 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	87
Figura 30 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	87
Figura 31 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	88
Figura 32 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	89
Figura 33 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	90
Figura 34 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$	91
Figura 35 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	92
Figura 36 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	93

Figura 37 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	94
Figura 38 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	95
Figura 39 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	96
Figura 40 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação de Instabilidades	42
Tabela 2 – Classificação de estabilidade para $Re = 5200$, variando α_G , $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$	69
Tabela 3 – Classificação de estabilidade para $Re = 8000$, variando α_G , $\beta = 0.9$ e $Wi = 5$	70
Tabela 4 – Classificação de estabilidade variando Re , $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 6$. .	70
Tabela 5 – Classificação de estabilidade variando Re , $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.6$ e $Wi = 2$. .	70
Tabela 6 – Classificação de estabilidade para $Re = 3000$, $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.20$ e variando Wi	70
Tabela 7 – Classificação de estabilidade para $Re = 4000$, $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.0$ e variando Wi	71
Tabela 8 – Classificação de estabilidade para $Re = 6000$, variando β , $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$	71
Tabela 9 – Classificação de estabilidade para $Re = 7000$, variando β , $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$	71

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ — Densidade do fluido

t — Tempo

σ — Tensor tensão total

$\mathbf{I}$ — Tensor identidade

τ_c — Tensão de cisalhamento

η_0 — Viscosidade dinâmica total do fluido

η_s — Viscosidade dinâmica do solvente

η_p — Viscosidade dinâmica do polímero

$\mathbf{D}$ — Tensor taxa de deformação

$\mathbf{T}$ — Tensor extra-tensão

λ — Tempo de relaxação do fluido

α_G — Parâmetro de mobilidade do fluido

Re — Número de Reynolds

Wi — Número de Weissenberg

β — Constante β que controla a contribuição do solvente

ω_z — Vorticidade

ω_r — Frequência

α_r — Número de onda

α_i — Taxa de amplificação

ω_t — Frequência temporal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	29
2.1	Equações Governantes	29
2.1.1	<i>Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano</i>	30
2.2	Adimensionalização	33
2.3	Simulação Numérica Direta	34
2.4	Teoria de Estabilidade Linear	37
2.4.1	<i>Classificação de Instabilidades</i>	41
2.5	Escoamento Base	42
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	45
3.1	Simulação Numérica Direta	45
3.1.1	<i>Introdução de Perturbações</i>	45
3.1.2	<i>Derivadas Espaciais</i>	46
3.1.3	<i>Derivadas Temporais</i>	48
3.1.4	<i>Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento</i>	49
3.1.5	<i>Relaminarização do Escoamento</i>	49
3.1.6	<i>Cálculo da Vorticidade na Parede</i>	50
3.1.7	<i>Algoritmo Computacional</i>	51
3.2	Solução semi-analítica	52
4	RESULTADOS	55
4.1	Escoamento Base	55
4.1.1	<i>Verificação</i>	55
4.1.2	<i>Simulações</i>	63
4.2	Escoamento com Perturbação	67
4.2.1	<i>Verificação</i>	68
4.2.2	<i>Simulações</i>	71
5	CONCLUSÕES	99
	REFERÊNCIAS	103

APÊNDICE A	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	107
APÊNDICE B	SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA O ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO DE UM FLUIDO GIESEKUS ENTRE PLACAS PARALELAS	111

INTRODUÇÃO

A dinâmica de fluidos computacional é uma área com relevante interesse industrial nas áreas química, alimentícia, aeronáutica e petrolífera, e por isso, há muitos problemas a serem investigados. Entre os diversos problemas surgidos nessa área está o tratamento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. Esse tipo de problema tem-se tornado um grande desafio nessa área, pois a maioria das aplicações industriais envolvem escoamentos de fluidos viscoelásticos, tais como, injeção de plásticos, processos de extrusão de forma geral, extração de petróleo, dentre outros.

Desse modo, existe um grande interesse em desenvolver métodos numéricos capazes de simular escoamentos de fluidos viscoelásticos para poder prever, a custos baixos e com bons resultados, o comportamento do escoamento de um fluido durante o processo industrial. Porém, essa não é uma tarefa fácil pois nestes problemas as equações constitutivas que modelam um fluido viscoelástico são equações matemáticas complexas e de difícil tratamento em contornos do domínio computacional.

Um fluido viscoelástico pode ser definido, simplificado, como sendo um fluido que se comporta como viscoso e elástico ao mesmo tempo. Um material elástico ideal, sob uma tensão, responde com deformação reversível. Ao cessar a tensão o corpo retorna à sua forma e volume original. Segundo (TANNER, 2000) ele também tem a característica de armazenar todo o trabalho externo aplicado. Já um material viscoso, quando sob uma tensão de cisalhamento, responde de forma irreversível as deformações sofridas. O fluido viscoso dissipa energia do trabalho externo aplicado, enquanto que, o fluido viscoelástico dissipa um pouco de energia e armazena o restante (TANNER, 2000). Portanto, a natureza dual deste material implica no seu comportamento complexo e ao mesmo tempo interessante.

Os modelos viscoelásticos podem ser classificados entre lineares ou não lineares. O modelo viscoelástico linear mais popular é o modelo de Maxwell ((BERIS; ARMOSTRONG; BROWN, 1987), (MOMPEAN; DEVILLE, 1997)), que incorpora a ideia de um fluido que

apresenta características tanto de um sólido elástico, como de um fluido viscoso Newtoniano. Entre os principais modelos viscoelásticos não lineares encontrados na literatura podem ser citados os modelos diferenciais: Oldroyd-B ((BRASSEUR *et al.*, 1994), (PINHO; ALVES; OLIVEIRA, 2003)), White-Metzner (WHITE; METZNER, 1963), Giesekus (GIESEKUS, 1982), Leonov (LEONOV, 1976), modelos do tipo FENE (BIRD; DOTSON; JOHNSON, 1980), PTT ((PHAN-THIEN; TANNER, 1977), (PINHO; ALVES; OLIVEIRA, 2003)) e derivados, Pom Pom (LARSON, 1988) e derivados; e os modelos integrais: Maxwell (KAYE, 1962) e K-BKZ ((LUO; TANNER, 1986), (LUO; TANNER, 1988)). De maneira geral, modelos viscoelásticos, conseguem descrever qualitativamente o comportamento viscoelástico não-linear de polímeros fundidos (BRETAS; DAVILA, 2000).

O processo pelo qual um escoamento laminar torna-se turbulento é conhecido como transição laminar-turbulenta. Este é um processo extremamente complexo que na atualidade ainda não é completamente compreendido. No entanto, com o resultado de décadas de intensa investigação, certas características tornaram-se gradualmente claras, mas a maioria destes avanços ocorreram para escoamentos de fluidos Newtonianos. Entretanto, há muitas aplicações científicas e industriais em que a estabilidade do escoamento laminar e a transição para a turbulência são relevantes. Portanto, é importante investigar a física da estabilidade e a transição laminar-turbulenta a fim de controlá-la, adiantá-la ou prevení-la.

Escoamentos laminares estão sempre sujeitos à pequenas perturbações. Essas perturbações são devido a vários fatores, tais como, vibração estrutural, rugosidade superficial, ruído, turbulência externa, entre outros. Se essas perturbações não são amortecidas, o escoamento laminar sofre transição para um outro estado mais complexo, mas não necessariamente um estado de escoamento turbulento. O conceito de ondas de Tollmien-Schlichting surge pela necessidade de se justificar o paradoxo gerado pelo fato de uma camada limite laminar, teoricamente estável por não possuir nenhum ponto de inflexão, transicionar para a turbulência (SCHLICHTING, 1979). Normalmente, essa transição é provocada por meio da instabilidade da camada limite laminar frente as perturbações.

A Simulação Numérica Direta consiste em resolver as equações de Navier-Stokes diretamente, resolvendo com precisão todas as escalas espaciais e temporais presentes no escoamento, desde as escalas maiores e mais energéticas, representadas pela dimensão característica do problema, às escalas menores e dissipativas, representadas pela escala de Kolmogorov (FRISCH, 1995). A vantagem deste método é a possibilidade de se chegar mais próximo dos últimos estágios da transição, onde as interações não lineares são fortes, permitindo um estudo mais aprofundado dos processos que levam um escoamento à turbulência.

O estudo teórico da propagação de perturbações numa camada limite foi realizado independentemente por Willian MaFadden Orr (1866-1934) em 1907 e por Arnold Johannes Sommerfeld (1868-1951), em 1908, dando origem a hoje conhecida equação de Orr-Sommerfeld. Os primeiros pesquisadores que demonstraram que a equação de Orr-Sommerfeld tem perturbações

instáveis para escoamentos sem pontos de inflexão foram Water Tollmien (1900-1968) e Hermann Schlichting em 1933. Em homenagem a estes dois pesquisadores, as ondas não estacionárias que se propagam sobre a camada limite são denominadas ondas de Tollmien-Schlichting.

Neste contexto, o presente trabalho teve como objetivo investigar como ocorre o fenômeno de transição à turbulência, para um escoamento incompressível, bidimensional de um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Giesekus. Especificamente, foi investigada a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento entre duas placas paralelas. Para isso, foi utilizada a Simulação Numérica Direta para analisar a estabilidade de escoamentos de um fluido viscoelástico.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: neste capítulo foram introduzidas as equações governantes para escoamentos incompressíveis, isotérmicos, e para os modelos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. A equação constitutiva considerada para o escoamento viscoelástico é o modelo Giesekus. As equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional. Também são apresentadas as equações na formulação vorticidade-velocidade utilizadas na Simulação Numérica Direta.
- Capítulo 3: apresenta os métodos numéricos utilizados para a solução das equações governantes adotando a Simulação Numérica Direta.
- Capítulo 4: apresenta a verificação do código e os resultados numéricos das simulações considerando o problema do escoamento incompressível para um fluido viscoelástico, entre placas planas paralelas, utilizando a equação constitutiva Giesekus.
- Capítulo 5: descreve as principais conclusões que foram observadas.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para fluidos Newtoniano e não-Newtoniano, considerando escoamentos incompressíveis e isotérmico. A equação adotada para modelar o comportamento do fluido não-Newtoniano é o modelo viscoelástico Giesekus. Essas equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional. Em seguida, estão expostas as equações na formulação vorticidade-velocidade utilizadas na simulação numérica direta, a apresentação acerca da Teoria de Estabilidade Linear para um fluido viscoelástico e, posteriormente, o escoamento base.

2.1 Equações Governantes

As equações que modelam escoamentos incompressíveis e isotérmicos são as equações de conservação de massa (equação da continuidade) e de conservação de quantidade de movimento (equações de Navier-Stokes). Elas são dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total definido por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

em que p é a pressão, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor simétrico das tensões, que pode ser determinado a partir da equação constitutiva do fluido. No caso bidimensional, o tensor simétrico das tensões é dado por: $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$.

2.1.1 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano

Os fluidos apresentam diversas características relacionadas às suas propriedades físicas, as quais podem influenciar fatores como o fluxo do material, a taxa de deformação, entre outras. Essas características estão associadas com a natureza do fluido, que pode ser Newtoniano ou não-Newtoniano.

Um fluido newtoniano é um fluido cuja viscosidade, ou atrito interno, é constante para diferentes taxas de cisalhamento e não variam com o tempo, ou seja, satisfaz a Lei de Newton da viscosidade ($\tau_c = \eta_s \partial u / \partial y$), (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011). A constante de proporcionalidade é a viscosidade dinâmica, η_s . Nesse tipo de fluido, a tensão (τ) é diretamente proporcional à taxa de deformação, que é dado por:

$$\tau = 2\eta_s \mathbf{D},$$

em que η_s é a viscosidade dinâmica do fluido e $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, dado por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T),$$

ou ainda no caso bidimensional, pode-se escrever como:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Com isso, calculando o divergente da equação (2.3) do tensor tensão total, para um fluido Newtoniano, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas bidimensionais, as equações (2.1) e (2.2), para um fluido Newtoniano se tornam, respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.6)$$

Os fluidos não-Newtonianos são os fluidos que não apresentam uma linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, ou seja, o valor da viscosidade dinâmica não é constante, variando de acordo com a taxa de deformação aplicada (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011), não satisfazendo a Lei de Newton da Viscosidade. Neste tipo de fluido não existe um comportamento padrão da variação da taxa de deformação. Essas diferenças sugerem várias subclassificações dos fluidos não-Newtonianos, por exemplo: fluidos viscoelásticos, fluidos tixotrópicos, fluidos pseudoplásticos, entre outros, mais detalhes em (BRETAS; DAVILA, 2000).

Sendo assim, no modelo de fluido não-Newtoniano, em particular, de fluido viscoelástico, o tensor simétrico das tensões pode ser definido pela soma da contribuição Newtoniana (viscosa) e da contribuição não-Newtoniana (elástica), da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T},$$

em que η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação e $\mathbf{T}$ é o tensor extra-tensão (simétrico), que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), dado por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

Agora, calculando o divergente do tensor tensão total (2.3) para um fluido não-Newtoniano, segue que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Neste caso, as equações de conservação (2.1) e (2.2) em coordenadas cartesianas para um fluido viscoelástico, se tornam, respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.9)$$

Neste trabalho é utilizada a equação constitutiva do modelo Giesekus (GIESEKUS, 1962), que é uma equação reológica que descreve o comportamento físico do fluido, sendo caracterizada por:

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.10)$$

em que η_p é um coeficiente de viscosidade polimérica, λ é o tempo de relaxação do fluido. A constante α_G representa o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento "shear thinning" (cisalhamento fino ou pseudoplasticidade) do fluido ($0 \leq \alpha_G \leq 1$) e $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ denota o produto tensorial (dupla contração), e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada definida por:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T},$$

em que $(D\mathbf{T}/Dt)$ é a derivada material de $\mathbf{T}$, descrita por:

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}).$$

Reescrevendo a equação (2.10) em coordenadas cartesianas bidimensionais, obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \mathbf{T} + \lambda \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \right) - \\ & - \lambda \left(\begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \right) + \\ & + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} \left(\begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \right) = 2\eta \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, realizando algumas manipulações algébricas, são obtidas as expressões dos

tensores não-Newtonianos do modelo Giesekus:

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xy} (T^{xx} + T^{yy})) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.12)$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.13)$$

2.2 Adimensionalização

Resultados de estudos experimentais podem ser exibidos em forma adimensional, permitindo escalar condições de fluxo real. A mesma abordagem também pode ser realizada em estudos numéricos. Em dinâmica dos fluidos computacional é comum utilizar as equações governantes do problema na forma adimensional (FERZIGER; PERIC, 1997), pois usando a normalização apropriada, é possível mostrar os efeitos físicos, formular o modelo independente do sistema de unidades, limitar os valores de variáveis e parâmetros.

Para esses fins, considerou-se uma mudança de variáveis, surgindo então algumas constantes adimensionais conhecidas na literatura, como por exemplo o número de Reynolds, o de Weissenberg, a constante β , entre outros.

Os seguintes parâmetros foram definidos: o comprimento L , a velocidade U e a densidade ρ_0 , que neste caso pode ser o próprio ρ , pois o escoamento é incompressível. Assim, as variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito $*$) são dadas por:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}. \quad (2.14)$$

Ao aplicar as variáveis (2.14) nas equações governantes, surgem os números adimensionais, como mostrados abaixo:

- Número de Reynolds (Re): Representa a razão entre as forças inercias e as forças viscosas do escoamento e é definido por:

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta_0},$$

onde η_0 é a viscosidade dinâmica total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi): Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento:

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}.$$

- Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, definida por:

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}.$$

Substituindo as transformações (2.14) nas equações de conservação (2.7)–(2.9) e (2.11)–(2.13), obtém-se a forma bidimensional cartesiana e adimensional (o símbolo * foi omitido por simplicidade) das equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

As equações (2.15)–(2.20) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Giesekus. Os detalhes da adimensionalização dessas equações podem ser vistos no Apêndice A.

2.3 Simulação Numérica Direta

A Simulação Numérica Direta adotada no presente estudo consiste na solução direta das equações de Navier-Stokes e das demais equações consideradas, em que todos movimentos con-

tidos no escoamento são resolvidos e simulados, sem precisar adicionar equações de fechamento do sistema. A principal restrição desta técnica está relacionada com o custo computacional, por isso a necessidade de métodos eficientes para resolver o problema. Com o propósito de eliminar o tratamento da pressão nas equações de Navier-Stokes, optou-se pela formulação vorticidade-velocidade. Para isso, define-se a vorticidade ω_z bidimensional como sendo:

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Derivando a equação (2.21) em relação a x , tem-se:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Utilizando a equação da continuidade, (2.4), segue que:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

A partir disso, é obtida uma equação de Poisson para a componente v da velocidade, obtendo:

$$-\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Convenientes manipulações envolvendo as equações de Navier-Stokes resultam na equação de transporte de vorticidade bidimensional. Para isso, faz-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2(uu)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.23)$$

Subtraindo a equação (2.23) da (2.22), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(uu)}{\partial y \partial x} = \\ & = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Com isso, simplificando as derivadas, é obtida a equação de transporte de vorticidade bidimensional:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}.$$

Portanto, o seguinte sistema de equações é considerado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial(\omega_z)}{\partial x} + v \frac{\partial(\omega_z)}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy} (T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Neste trabalho, é considerado o escoamento entre placas planas paralelas de um fluido não-Newtoniano, onde requer, basicamente, três tipos de condições de contorno, a saber: condição de entrada de fluido no domínio de solução, condição de saída de fluido do domínio de solução e condição sobre superfícies rígidas.

- Entrada de fluido (*Inflow*): Estabelecida a posição do contorno de entrada a velocidade tangencial (v) ao contorno é considerada nula e a velocidade normal (u) é prescrita, ou seja,

$$u = U(y) \quad \text{e} \quad v = 0.$$

- Parede ou fronteira sólida: Nestes contornos consideramos a condição de não-eskorregamento e impermeabilidade, ou seja,

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = 0.$$

- Saída de fluido (*Outflow*): Considera-se a derivada segunda na direção do escoamento nula, para o componente de velocidade v , logo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

As condições descritas acima são adotadas na metodologia numérica e foram utilizadas neste trabalho.

2.4 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção, a Teoria de Estabilidade Linear (do inglês *Linear Stability Theory* - LST) é apresentada de forma sucinta para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva Giesekus. Algumas manipulações algébricas estão omitidas no decorrer desta seção, pois podem ser encontradas em (FURLAN, 2018).

A Teoria de Estabilidade Linear foi abordada neste trabalho a fim de se comparar com os resultados da Simulação Numérica Direta. Uma vez que são consideradas as perturbações iniciais com pequenas amplitudes, pode-se aplicar a Teoria de Estabilidade Linear. Esta teoria assume que as perturbações se propagam como ondas de amplitude infinitesimal e o escoamento médio é paralelo. A evolução destas perturbações é acompanhada ao se propagar no escoamento.

A Teoria de Estabilidade Linear considera o escoamento base invariante na direção x , ou seja:

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad p = P(x, y), \quad T = \hat{T}(y).$$

Considerando o escoamento instantâneo decomposto em um escoamento base e um escoamento perturbado, as variáveis dependentes são decompostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), \\ T(x, y, t) &= \hat{T}(y) + \tilde{T}(x, y, t). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) nas equações da continuidade, da quantidade de movimento e dos tensores não-Newtonianos, são obtidas as equações para as perturbações. Note que, por hipótese, o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, então as perturbações também devem satisfazer o sistema de equações.

Com isso, seguem as equações perturbadas:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xx} \tilde{T}^{xx} + 2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} + \right. \\ \left. + [\tilde{T}^{xx^2} + \tilde{T}^{xy^2}] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left([\tilde{T}^{xy}(\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy})] + \right. \\ \left. + \tilde{T}^{xy}(\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) + \hat{T}^{xy}(\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy}) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right], \quad (2.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} + 2\hat{T}^{yy} \tilde{T}^{yy} + \right. \\ \left. + [\tilde{T}^{xy^2} + \tilde{T}^{yy^2}] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Os termos entre colchetes das equações (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36) são os termos não lineares. Schlichting (SCHLICHTING, 1979) afirma que as perturbações devem ser pequenas no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados, quando comparados com os termos lineares. Assim, uma vez que as amplitudes das perturbações são pequenas, esses termos não lineares podem ser desprezados.

Logo, seguem as equações da continuidade, da quantidade de movimento e dos tensores não-Newtonianos perturbadas, na forma de um sistema mais simplificado:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xx} \tilde{T}^{xx} + 2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy} (\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy}) + \tilde{T}^{xy} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right], \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} + 2\hat{T}^{yy} \tilde{T}^{yy} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (2.42) \end{aligned}$$

As condições de contorno consideradas para o escoamento entre placas planas paralelas são as de não escorregamento na parede (no-slip) e ao decaimento das perturbações longe da parede:

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para} \quad y = -1 \quad \text{e} \quad y = 1.$$

Visto que as equações resultantes são lineares e os coeficientes das equações não dependem de x e t , as soluções podem ser encontradas por meio do método da separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{u}(y) e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{v}(y) e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{p}(y) e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{T}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{T}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \underbrace{\bar{T}(y) e^{i(\omega t - \alpha x)}}_{cc}], \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, cc é o complexo conjugado da variável em questão, $\alpha = (2\pi/\lambda)$ é o número de onda na direção x , o que implica que $\lambda = (2\pi/\alpha)$ é o comprimento de onda, ω é a frequência com que as perturbações se propagam. Considera-se ainda $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$ e $\bar{T}$ as amplitudes das perturbações e a velocidade da onda $c = (\omega/\alpha)$.

Sabe-se que, somar um número complexo com o seu conjugado, é o mesmo que obter o valor da variável em questão no domínio real, e resolver as equações perturbadas complexas, é encontrar o valor de α , ω e $\bar{u}$, assim, o complexo conjugado é desprezado ao substituir as variáveis nas equações perturbadas.

Para isso, substituindo essas variáveis nas equações perturbadas (2.37)–(2.39), é obtido um novo sistema de equações. A equação da continuidade e as Equações de Navier-Stokes são,

respectivamente:

$$\begin{aligned}
 i\alpha\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} &= 0, \\
 i\alpha(U - c)\bar{u} + \bar{v}\frac{dU}{dy} - i\alpha\bar{p} - i\alpha\bar{T}^{xx} - \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \alpha^2\bar{u} \right), \\
 i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\bar{T}^{xy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right). \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Assim, esse sistema em função das autofunções $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$ e $\bar{T}$ deve ser considerado para a dedução da equação de Orr-Sommerfeld.

Após algumas manipulações algébricas, a equação de Orr-Sommerfeld, deduzida para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \alpha(U - c) \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right) - \alpha\bar{v} \frac{d^2U}{dy^2} + \alpha \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) + \alpha^3\bar{T}^{xy} &= \\
 = -\frac{i\beta}{Re} \left(\frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \alpha^4\bar{v} \right), \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

onde as equações dos tensores não-Newtonianos, que aparecem na equação anterior, são:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + Wi \left(-i\omega \frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + i\alpha \frac{d^2U}{dy^2} \bar{T}^{xx} + i\alpha \frac{dU}{dy} \frac{\bar{T}^{xx}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \frac{\bar{T}^{xx}}{dy} + i\alpha U \frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \right. \\
 \left. + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \bar{v} \frac{d^3\hat{T}^{xx}}{dy^3} + 2 \frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} \frac{d\bar{v}}{dy} + 2 \frac{\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + 2 \frac{\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + 2\hat{T}^{xx} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - \right. \\
 \left. - 2 \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2 \frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - 2 \frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - 2 \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{xy} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - 2 \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} \frac{dU}{dy} - 2 \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d^2U}{dy^2} - \right. \\
 \left. - 2 \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \frac{d^2U}{dy^2} - 2\bar{T}^{xy} \frac{d^3U}{dy^3} \right) + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} \left(\frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} \bar{T}^{xx} + \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} \bar{T}^{xy} + 2 \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \right. \\
 \left. + 2 \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \hat{T}^{xx} \frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + \hat{T}^{xy} \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} \right) = -\frac{2\alpha Wi Re}{(1 - \beta)} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3}, \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + Wi \left((i\alpha U - i\omega) \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \frac{dU}{dy} + \left(\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - i\alpha\hat{T}^{xx} \right) \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \right. \\
 \left. + 2 \left(\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \right) \frac{d\bar{v}}{dy} + \bar{v} \left(\frac{d^3\hat{T}^{xy}}{dy^3} - i\alpha \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} \right) - \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} \frac{d\bar{u}}{dy} - 2 \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \right. \\
 \left. - \hat{T}^{yy} \frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2U}{dy^2} - \bar{T}^{yy} \frac{d^3U}{dy^3} \right) + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} \left((\bar{T}^{xx} + \bar{T}^{yy}) \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} + \right. \\
 \left. + 2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \left(\frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{T}^{yy}}{dy^2} \right) \hat{T}^{xy} + (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + \right. \\
 \left. + 2 \left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \right) \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \bar{T}^{xy} \left(\frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} \right) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} \right), \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} + Wi \left(-i\omega \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{yy} + i\alpha U \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} + i\alpha \frac{d^2 U}{dy^2} \bar{T}^{yy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{yy} + \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + \right. \\
& + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2 \hat{T}^{yy}}{dy^2} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2 \hat{T}^{yy}}{dy^2} + \bar{v} \frac{d^3 \hat{T}^{yy}}{dy^3} - 2i\alpha \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} - 2i\alpha \bar{v} \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} - 2i\alpha \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2i\alpha \hat{T}^{xy} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \\
& - 2 \frac{d^2 \hat{T}^{yy}}{dy^2} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2 \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - 2 \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - 2 \hat{T}^{yy} \frac{d^3 \bar{v}}{dy^3} \left. \right) + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\frac{d^2 \hat{T}^{xy}}{dy^2} \bar{T}^{xy} + \frac{d^2 \hat{T}^{yy}}{dy^2} \bar{T}^{yy} + \right. \\
& + 2 \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + 2 \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + \hat{T}^{xy} \frac{d^2 \bar{T}^{xy}}{dy^2} + \hat{T}^{yy} \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} \left. \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d^3 \bar{v}}{dy^3}. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Com este sistema de equações e condições de contorno apropriadas, pode-se obter resultados de análise da Teoria de Estabilidade Linear.

Resolver este sistema, corresponde a resolver um problema de autovalor (MENDONÇA; AVELAR, 2016), cuja solução está vinculada aos valores dos parâmetros α , ω , Re , e depende do perfil de velocidade do escoamento base.

Uma descrição detalhada da solução numérica deste sistema pode ser vista em (FURLAN, 2018).

2.4.1 Classificação de Instabilidades

A equação:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \text{cc}],$$

possui a autofunção $\bar{u}$ e as constantes ω e α , complexos, e onde cc é o complexo conjugado. Neste caso, a solução é expressa por:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \bar{u}(y) e^{(-\alpha_i x + \omega_i t)} e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)},$$

onde r e i são as componentes real e imaginária, respectivamente.

Quando ω é um número real e α é um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio, na direção x . Neste caso, essa formulação chama-se *análise espacial*. Os componentes ω_r , α_r e α_i representam a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial, respectivamente. Por outro lado, na formulação da *análise temporal*, α é um número real e ω é um número complexo. Neste caso, a amplitude da perturbação cresce diretamente em função do tempo. Para esta formulação, taxa de amplificação é dada por ω_i .

Com isso, a Tabela (1) simplifica a classificação de instabilidades desta teoria.

Neste trabalho, é observada somente a classificação de instabilidade da Teoria de Estabilidade Linear da análise espacial, onde a taxa de amplificação é o α_i , pois ela é verificada e comparada com a taxa de amplificação obtida através da formulação da Simulação Numérica Direta, quando inseridas as perturbações.

Tabela 1 – Classificação de Instabilidades

Tipo de análise	Taxa de amplificação	Amplitude	Classificação
Temporal	$\omega_i < 0$	decrece	estável
	$\omega_i = 0$	constante	neutro
	$\omega_i > 0$	cresce	instável
Espacial	$\alpha_i < 0$	cresce	instável
	$\alpha_i = 0$	constante	neutro
	$\alpha_i > 0$	decrece	estável

2.5 Escoamento Base

Para o escoamento base, também conhecido por laminar, ou totalmente desenvolvido, assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y , para calcular o escoamento base no canal, exceto para a pressão cujo gradiente é constante na direção x . O domínio compreende de $y = -1$ a $y = 1$, na direção y .

A componente v do vetor velocidade é nula, pois da equação da continuidade (2.4) segue que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y, t) \equiv \text{constante.} \quad (2.49)$$

Como $v_{parede} = 0$ então $v(x, y, t) \equiv 0$.

Dessa forma, as hipóteses sobre o escoamento são:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = c; \quad v = 0; \quad u = u(y); \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(y).$$

Dadas as equações adimensionalizadas para o modelo de fluido viscoelástico (2.15)–(2.20), considerando as hipóteses acima e a geometria do canal, obtém-se as equações simplificadas que descrevem o escoamento de fluido viscoelástico, para o modelo Giesekus:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (2.50)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (2.51)$$

$$T^{xx} - 2WiT^{xy} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 0, \quad (2.52)$$

$$T^{xy} - WiT^{yy} \frac{du}{dy} - \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = 0, \quad (2.53)$$

$$T^{yy} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 0. \quad (2.54)$$

As equações (2.50) – (2.59) possuem solução analítica, de acordo com (ARAÚJO *et al.*, Unpublished Work), e serão apresentadas a seguir.

Foi feita uma revisão da literatura acerca da solução analítica para o escoamento entre placas planas paralelas de um fluido Giesekus, (FERRÁS; NÓBREGA; PINHO, 2012), (RAISI *et al.*, 2008), (TAGHAVI; KHABAZI; SADEGHY, 2009), (YOO; CHOI, 1989), e mais recente (ARAÚJO, 2015), porém estes trabalhos não tratam da viscosidade total $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, tratam somente a contribuição polimérica do fluido, isto é, $\eta_0 = \eta_p$, ou ainda $\beta = 0$. Contudo, (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991) resolveu e discutiu matematicamente as soluções para escoamentos estacionários entre placas paralelas, em coordenadas cartesianas bidimensionais, considerando um fluido de Giesekus com e sem solvente newtoniano. E usaram uma formulação adimensional diferente da que é usada neste trabalho.

Com isso, (ARAÚJO *et al.*, Unpublished Work) apresenta os passos para resolver analiticamente o sistema de equações não lineares, que representa o estado estacionário de escoamentos em um canal de um fluido Giesekus com solvente Newtoniano, baseado em (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991). No apêndice B também pode ser encontrados os cálculos realizados para obtenção dessa solução analítica.

A solução analítica não é obtida explicitamente, isto é, a derivada do componente da velocidade é dada por uma equação implícita, denominada por (ARAÚJO *et al.*, Unpublished Work) por "solução semi-analítica".

Reescrevendo as equações (2.50) – (2.59), tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (2.56)$$

$$T^{xx} - 2WiT^{xy} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 0, \quad (2.57)$$

$$T^{xy} - WiT^{yy} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xy} (T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{du}{dy}, \quad (2.58)$$

$$T^{yy} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 0. \quad (2.59)$$

Considere que, $T^{xx}(0) = T^{xy}(0) = T^{yy}(0) = \frac{du(0)}{dy} = 0$ no centro do canal.

Note que, o sistema de equações (2.50) – (2.59) é análogo ao sistema (2.1) – (2.5) resolvido por (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991), a menos da adimensionalização dos parâmetros.

Portanto, segue a solução semi-analítica de (ARAÚJO *et al.*, Unpublished Work):

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\alpha_G Re \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right) \left[(1-\beta) + b \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha_G^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)^2} \right]}{\left[b(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha_G^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)^2} \right]^2} \quad (2.60)$$

$$T^{xx} = \frac{(1-\beta)[(1-\beta) + Re Wi T^{yy}] \frac{du}{dy}}{\alpha_G Re^2 Wi T^{xy}} - \frac{[(1-\beta) + \alpha_G Re Wi T^{yy}]}{\alpha_G Re Wi}, \quad (2.61)$$

$$T^{yy} = \frac{-(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha_G^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}}}{2\alpha_G Re Wi}, \quad (2.62)$$

$$T^{xy} = \frac{\partial p}{\partial x} y - \frac{\beta}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (2.63)$$

Assim, para obter a solução analítica, são necessários os seguintes passos:

1. Resolver a equação (2.60) para obter $\frac{du}{dy}$ para um $\frac{\partial p}{\partial x}$ dado;
2. Resolver a equação (2.63) para obter $T^{xy}(y)$;
3. Resolver a equação (2.62) para obter $T^{yy}(y)$;
4. Resolver a equação (2.61) para obter $T^{xx}(y)$.

Novamente, note que (2.60), (2.63), (2.62) e (2.61) são similares às (5.5), (5.2), (5.3) e (5.4) de (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991), respectivamente, a menos da adimensionalização dos parâmetros.

Seguindo os passos de 2. a 4., é possível ver que todas componentes dos tensores podem ser obtidas explicitamente. No entanto, no passo 1. não é fácil resolver $\frac{du}{dy}$ analiticamente. Portanto, na seção 3.2 são discutidos os procedimentos e estratégias numéricas adotadas para escolher $\frac{\partial p}{\partial x}$ corretamente, calcular $\frac{du}{dy}$ e calcular o componente da velocidade u .

Com isso, tem-se as soluções numérica, via Simulação Numérica Direta, e a semi-analítica via (ARAÚJO *et al.*, Unpublished Work), para a solução do sistema de equações em questão, equações (2.50)–(2.59).

Porém, esta solução semi-analítica tem algumas restrições para resolver alguns casos. Por isso, como escoamento base, este trabalho considera a Simulação Numérica Direta com ausência de perturbações para fornecer os resultados desejados. Assim, as simulações são executadas até o escoamento atingir o estado estacionário. E, as variáveis são consideradas no meio do canal.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são apresentados e comentados os métodos numéricos utilizados para a obtenção das soluções das equações governantes, empregando as formulações da Simulação Numérica, com isso, é descrito algoritmo desenvolvido para esta formulação. Em seguida é apresentado uma solução semi-analítica para resolver o escoamento base de um fluido não-newtoniano com modelo Giesekus ([ARAUJO *et al.*, Unpublished Work](#)).

3.1 Simulação Numérica Direta

Nesta seção, são apresentados os métodos utilizados na formulação da Simulação Numérica. Todos os métodos utilizados são baseados em referências que garantem a eficiência de se obter resultados satisfatórios. Mediante o uso desses métodos numéricos, foi necessário implementar a programação paralela no código computacional. Com isso, utilizou-se o cluster Euler¹ disponível no ICMC/USP, para realizar os experimentos e testes necessários para este trabalho.

3.1.1 Introdução de Perturbações

Segundo ([FASEL; RIST; KONZELMANN, 1990](#)), a introdução de perturbações é realizada através de injeção e sucção de massa na parede, por ser eficiente em gerar as ondas de Tollmien-Schlichting.

Neste trabalho, optou-se por esse método, devido a questões de estabilidade e maior coerência com resultados experimentais e numéricos de ([FASEL; RIST; KONZELMANN, 1990](#)). No método, quando o tempo é $t = 0$ assume-se que o escoamento é não perturbado. Porém, quando o tempo é $t + \delta t$, as perturbações são introduzidas através da injeção e sucção de massa na

¹ Número de processo 2013/07375-0 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

parede, delimitada pelos extremos x_1 e x_2 , como pode ser observado na figura (13). A perturbação é representada por meio de uma função polinomial de 9º grau para a velocidade v , tal que:

$$v = A f(x) \text{sen}(\omega_t t), \quad x_1 < x < x_2, \quad (3.1)$$

e

$$v = 0, \quad x \leq x_1 \quad \text{ou} \quad x \geq x_2, \quad (3.2)$$

onde A é uma constante que representa a amplitude máxima das perturbações e ω_t é a frequência temporal da perturbação. Os coeficientes do polinômio são escolhidos, convenientemente, com o objetivo de anular o valor da função e das suas primeira e segunda derivadas nos pontos x_1 e x_2 , o que suaviza a introdução de perturbações no escoamento.

3.1.2 Derivadas Espaciais

As derivadas espaciais são calculadas usando Diferenças Finitas Compactas de alta ordem (KLOKER, 1998; LELE, 1992; SOUZA, 2003; SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005). O uso das Diferenças Finitas Compactas utilizadas para a aproximar a primeira e segunda derivada espacial, requer a solução de sistemas lineares tridiagonais. Usar essa técnica faz com que as aproximações das derivadas tenham quinta e sexta-ordem de precisão (SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005).

Cálculo da Primeira Derivada

Para o ponto no contorno, $i = 1$, adotou-se a aproximação descentrada de 5ª ordem:

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24h} (-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + O(h^5).$$

Para o ponto próximo a parede, $i = 2$, adotou-se a aproximação descentrada de 6ª ordem:

$$f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = \frac{1}{120h} (-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) + O(h^6).$$

Para os pontos centrais adotou-se a seguinte aproximação:

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12h} (-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + O(h^6).$$

Para os casos $i = N$ e $i = N - 1$ as aproximações são análogas às obtidas para os pontos $i = 1$ e $i = 2$, com inversão do sinal. Para o cálculo de todas as derivadas, há a necessidade de inversão de uma matriz ou da aplicação do algoritmo de Thomas, para uma matriz tridiagonal.

Assim, o cálculo da aproximação referente à primeira derivada de uma função f é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & & & & \\ & 1 & 6 & 2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 2 & 6 & 1 \\ & & & & & & & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{24}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) \\ \frac{1}{120}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) \\ \vdots \\ \frac{1}{12}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{120}(406f_n + 300f_{n-1} - 760f_{n-2} + 80f_{n-3} - 30f_{n-4} + 4f_{n-5}) \\ \frac{1}{24}(74f_n - 16f_{n-1} - 72f_{n-2} + 16f_{n-3} - 2f_{n-4}) \end{bmatrix},$$

em que h é o espaçamento, n é o número de pontos discretizados.

Cálculo da Segunda Derivada

Para o ponto no contorno, $i = 1$, adotou-se a aproximação descentrada de 5ª ordem:

$$13f''_1 + 137f''_2 = \frac{1}{120h^2} (9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) + O(h^5).$$

Para o ponto próximo a parede, $i = 2$, adotou-se a aproximação descentrada de 6ª ordem:

$$f''_1 + 12f''_2 + 3f''_3 = \frac{1}{360h^2} (4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 - 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) + O(h^6).$$

Para os pontos centrais utilizou-se a seguinte aproximação:

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{1}{4h^2} (3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) + O(h^6).$$

Dessa forma, o cálculo da segunda derivada resulta no seguinte:

$$\begin{bmatrix} 13 & 137 & & & & \\ & 1 & 12 & 3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & 11 & 2 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 3 & 12 & 1 \\ & & & & & & & 137 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{60} (9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) \\ \frac{1}{360} (4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) \\ \vdots \\ \frac{1}{4} (3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{360} (4834f_n - 8424f_{n-1} + 1890f_{n-2} + 2320f_{n-3} - 810f_{n-4} + 216f_{n-5} - 26f_{n-6}) \\ \frac{1}{60} (9775f_n - 20285f_{n-1} + 11170f_{n-2} - 550f_{n-3} - 145f_{n-4} + 36f_{n-5}) \end{bmatrix}.$$

Neste estudo adotou-se aproximações de 6ª ordem para o ponto próximo ao contorno e aproximações de 5ª ordem para o ponto no contorno. (ADAM, 1977) mostrou que a vantagem em se calcular a derivada no contorno através de aproximações compactas é a de manter o esquema estável, prevenindo qualquer instabilidade numérica proveniente do contorno. Em (SOUZA, 2003), aproximações de sexta ordem foram testadas para o ponto no contorno, mas resultaram em instabilidades numéricas.

3.1.3 Derivadas Temporais

O método numérico adotado para discretização temporal das equações que modelam o escoamento e dos componentes do tensor extra-tensão é um esquema clássico de quatro etapas na integração, que é o Método de Runge-Kutta de quarta ordem (FERZIGER; PERIC, 1997; BURDEN; FAIRES, 2003).

O sistema linear resultante da solução numérica da equação de Poisson é resolvido usando um esquema de aproximação *multigrid* (FAS) (STÜBEN; TROTTEBERG, 1981). O sistema linear foi resolvido por meio de um ciclo V composto por 4 níveis. Uma vez que a resolução é de um problema elíptico, optou-se, de acordo com o trabalho de (BRANDT, 1977), por uma razão de engrossamento igual a 2.

O avanço no tempo se dá através do Método de Runge-Kutta Explícito de quarta ordem citado em (FERZIGER; PERIC, 1997). Esse método é do tipo previsor-corretor onde, os Métodos de Euler Explícito e Implícito são utilizados como previsor e corretor, respectivamente, para um avanço de t a $t + \Delta t/2$. Para o avanço de $t + \Delta t/2$ a $t + \Delta t$, o método se dá pela aplicação do previsor baseado na Regra do Ponto Médio e um corretor baseado na Regra de Simpson. Assim,

os quatro passos do método são descritos por:

$$\begin{aligned}
 \omega_z^{(n+\frac{1}{2})*} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{2} g(t^n, \omega_z^n), \\
 \omega_z^{(n+\frac{1}{2})**} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{2} g(t^{(n+\frac{1}{2})}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})*}), \\
 \omega_z^{(n+1)*} &= \omega_z^n + \Delta t g(t^{(n+\frac{1}{2})}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})**}), \\
 \omega_z^{(n+1)} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{6} \left[g(t^n, \omega_z^n) + 2g(t^{(n+\frac{1}{2})}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})*}) \right] + \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{6} \left[g(t^{(n+\frac{1}{2})}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})**}) + g(t^{(n+1)}, \omega_z^{(n+1)*}) \right],
 \end{aligned}$$

onde

$$g(t, \omega_z) = -u \frac{\partial(\omega_z)}{\partial x} - v \frac{\partial(\omega_z)}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y}.$$

Este mesmo esquema, utilizando o Método de Runge-Kutta, também é utilizado para os tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} .

3.1.4 Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento

Em simulações numéricas podem existir reflexões de vórtices na entrada do domínio, quando há presença destes na direção longitudinal (MEITZ, 1996). Para evitar essas possíveis reflexões, uma zona de amortecimento, próxima à entrada e antes da introdução de perturbação, é adotada e o componente da perturbação da vorticidade é ponderado por meio de uma função da seguinte forma:

$$f_1(x) = f_1(\varepsilon) = 6\varepsilon^5 - 15\varepsilon^4 + 10\varepsilon^3, \quad (3.3)$$

onde ε é uma função que depende dos pontos (i) de discretização na direção longitudinal, e é definida como:

$$\varepsilon = \frac{i-1}{i_1-1}, \quad (3.4)$$

em que $1 \leq i \leq i_1$. Assim, a função $f_1(x)$ é aplicada no intervalo da seguinte forma:

$$\omega_z(x, y, t) = f_1(x) \hat{\omega}_z(x, y, t), \quad (3.5)$$

onde o termo $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ é a componente de vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é o valor da componente obtido após a aplicação do amortecimento.

3.1.5 Relaminarização do Escoamento

Da mesma forma que ocorre na entrada do escoamento, efeitos não físicos associados à reflexão numérica de perturbações convectivas, na região de saída do escoamento, podem prejudicar a qualidade dos resultados numéricos. Para tratar este problema, (KLOKER, 1998;

MEITZ, 1996; SOUZA, 2003) desenvolveram uma técnica de relaminarização no sentido de eliminar tais efeitos de reflexão de onda, que foi adotada neste trabalho.

A técnica fundamenta-se em considerar um intervalo próximo à saída do escoamento, impondo que o componente da perturbação da vorticidade decaia a zero. Assim, considerando um intervalo $x_3 < x < x_4$, em correspondência com os pontos de malha i_3 e i_4 , utiliza-se uma função f_2 tal que $f_2(x_3) = 1$ e $f_2(x_4) = 0$. Assim, faz-se:

$$\omega_z(x, y, t) = f_2(x) \hat{\omega}_z(x, y, t), \quad (3.6)$$

para todo o intervalo definido. De forma análoga ao amortecimento de reflexões na entrada do escoamento, $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ representa a componente da vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é tomado como valor obtido após a relaminarização.

(KLOKER, 1998) utiliza um polinômio de 5ª ordem para a função $f_2(x)$, onde:

$$f_2(x) = f_2(\varepsilon) = 1 - 6\varepsilon^5 + 15\varepsilon^4 - 10\varepsilon^3, \quad (3.7)$$

tal que, para $i_3 \leq i \leq i_4$:

$$\varepsilon = \frac{i - i_3}{i_4 - i_3}.$$

As perturbações em um escoamento se propagam como ondas, se estas ondas se propagam na direção do escoamento principal, elas são conhecidas como ondas de Tollmien-Schlichting planares. Se estas perturbações forem infinitesimais, elas podem ser estudadas pela Teoria de Estabilidade Linear.

3.1.6 Cálculo da Vorticidade na Parede

(ADAM, 1977) mostrou que a vantagem em se calcular a derivada no contorno através de aproximações compactas é a de manter o esquema estável, prevenindo qualquer instabilidade numérica proveniente do contorno.

Após a resolução das equações de Poisson e da continuidade para as componentes de velocidade, o cálculo da vorticidade na parede, em $y = -1$ ou $y = 1$, pode ser realizado, segundo (SOUZA, 2003), efetuando os seguintes passos:

Calcula-se:

$$J = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3.8)$$

A segunda derivada na direção x , no intervalo entre x_1 e x_2 , é obtida considerando a mesma função utilizada na inserção da perturbação. Além disso, toma-se como nula a derivada nos demais pontos. Na direção y , a aproximação explícita e descentrada abaixo apresentada é

utilizada:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{y=-1} = \frac{1}{18 \delta y^2} [-134.89 v_1 + 216 v_2 - 135 v_3 + 80 v_4 - 33.75 v_5 + 8.64 v_6 - v_7] + O(\delta y^6). \quad (3.9)$$

Em $y = 1$, uma aproximação similar é empregada. Essas aproximações reforçam o fato de que $\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{y=\text{parede}} = 0$.

Tendo os valores do laplaciano da velocidade, a componente de vorticidade é então obtida por meio da equação:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -J. \quad (3.10)$$

As aproximações numéricas empregadas, também propostas por (SOUZA, 2003), são:

Para $i = 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{720} [\delta x (251 \omega'_{z_1} + 646 \omega'_{z_2} - 264 \omega'_{z_3} + 106 \omega'_{z_4} - 19 \omega'_{z_5}) + 720 \omega_{z_1}] + O\left(\frac{3}{160} \delta x^6\right); \quad (3.11)$$

Para $3 \leq i \leq imax - 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{57} \left[\delta x (10 \omega'_{z_{i-1}} + 57 \omega'_{z_{i-1}} + 24 \omega'_{z_i} - \omega'_{z_{i-1}}) + 33 \omega'_{z_{i-2}} + 24 \omega'_{z_{i-1}} \right] + O\left(\frac{11}{3420} \delta x^6\right); \quad (3.12)$$

Para $i = imax - 1$: uma aproximação similar a $i = 2$ é utilizada.

3.1.7 Algoritmo Computacional

Uma técnica de filtragem no sentido de eliminar oscilações numéricas, proposta por (LELE, 1992), foi utilizada neste trabalho. Optou-se pelo uso de um método compacto de 4ª ordem. A filtragem é aplicada ao final de cada iteração temporal, do método de Runge-Kutta, e consiste em recalcular a distribuição das componentes de vorticidade, na direção do escoamento, e nas componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano, por meio de um sistema pentadiagonal apresentado por (SOUZA, 2003), onde $\hat{\omega}_z$ representa a vorticidade antes da aplicação do filtro computacional.

Para o escoamento base, utilizou-se o perfil inicial de um fluido Newtoniano. Com os resultados obtidos desse escoamento, foi possível inicializar o escoamento perturbado.

Portanto, resolve-se, numericamente, as equações (2.24)–(2.29) através da aplicação do seguinte algoritmo:

1. Aplicar um passo do integrador de tempo para a vorticidade e para os tensores não-Newtonianos;

2. Aplicar as funções responsáveis pelas zonas de amortecimento e relaminarização do escoamento;
3. Introduzir as perturbações por sucção e injeção nas paredes;
4. Calcular o lado direito da equação de Poisson, dada pela equação (2.25);
5. Calcular a velocidade v , resolvendo a equação de Poisson (2.25);
6. Calcular o valor da velocidade u através da equação (2.24);
7. Calcular a vorticidade ω_z através da equação (2.26);
8. Calcular os componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano através das equações (2.27)–(2.29);
9. Atualizar o valor da vorticidade $\hat{\omega}_z$ nas paredes;
10. Aplicar o filtro após o último passo do integrador de tempo.

O método termina quando o tempo limite de simulação é atingido.

3.2 Solução semi-analítica

Nesta seção, é apresentada uma solução semi-analítica para as equações apresentadas na seção 2.5, que resolve analiticamente o escoamento estacionário entre placas paralelas de um fluido Giesekus.

A solução analítica requer resolver os seguintes passos:

1. Resolver a equação (2.60) para obter $\frac{du}{dy}$ para um $\frac{\partial p}{\partial x}$ dado;
2. Resolver a equação (2.63) para obter $T^{xy}(y)$;
3. Resolver a equação (2.62) para obter $T^{yy}(y)$;
4. Resolver a equação (2.61) para obter $T^{xx}(y)$.

Para resolver o primeiro passo, é calculado um $\frac{\partial p}{\partial x}$ que forneça uma velocidade média U . Obtida a velocidade média, integrando por partes e usando a condição de não-deslizamento na parede $u(1) = 0$, tem-se:

$$U = \int_0^1 u(y) dy = - \int_0^1 y \frac{du(y)}{dy} dy \implies \int_0^1 y \frac{du}{dy} dy = -U. \quad (3.13)$$

Para ajustar $\frac{\partial p}{\partial x}$, são realizadas as etapas I e II, e são elas:

- I. Encontrar um intervalo $[a, b]$, onde $\frac{\partial p}{\partial x}$ pertença aplicando o Teorema do Valor Intermediário:

I.1 Inserir um chute inicial de $\frac{\partial p}{\partial x}^{(n)}$ na equação (2.60);

I.2 Fornecer chutes iniciais para $\frac{du}{dy}^{(n-1)}$ e $\frac{du}{dy}^{(n-2)}$, para obter $\frac{du}{dy}^{(n)}$ aplicando o Método das Secantes em I.1;

I.3 Verificar se $\frac{du}{dy}^{(n)}$ satisfaz a equação (3.13) usando o Método 1/3 de Simpson;

I.3.1 Se $\int_0^1 y \frac{du^{(n)}}{dy} dy = -U$, então $\frac{\partial p}{\partial x}^{(n)} = \frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{du}{dy}^{(n)} = \frac{du}{dy}$ são os procurados. Logo, o passo 1. está feito.

I.3.2 Se $\int_0^1 y \frac{du^{(n)}}{dy} dy < -U$, então mantenha o valor de $\frac{\partial p}{\partial x}^{(n)} := a$, obtenha um novo $\frac{\partial p}{\partial x}^{(n)}$ e repita I.1-I.3 até $\int_0^1 y \frac{du^{(n)}}{dy} dy > -U$. A existência de a e b é garantida pelo Teorema do Valor Intermediário.

II. Como $\frac{\partial p}{\partial x} \in [a, b]$, aplique o Método da Bisseção no intervalo $[a, b]$ para encontrá-lo. Em cada iteração do Método da Bisseção, repita I.1-I.3 até uma tolerância prescrita pelo usuário, para Método de 1/3 de Simpson resolver $\int_0^1 y \frac{du^{(n)}}{dy} dy$ for atingido. Então, $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{du}{dy}$ para o passo 1. é obtido numericamente.

III. Calcula novamente a componente de velocidade $u(y)$, usando um método de alta ordem, como um problema de valor inicial assumindo $u(y_0) = 0$, então $u(y_j) = u(y_{j-1}) + \frac{du(y_{j-1})}{dy}$, $j = 1, \dots, M$, onde $y_j = \frac{j}{M}$, sendo M um inteiro positivo.

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos das simulações, utilizando Simulação Numérica Direta (do inglês *Direct Numerical Simulation* - DNS) para o escoamento entre placas planas paralelas, incompressível para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus. Os resultados consistem na verificação do código e nos resultados obtidos a partir da Simulação Numérica Direta.

4.1 Escoamento Base

Nesta seção é apresentada a verificação do código implementado para o escoamento base, comparando os resultados com a solução semi-analítica descrita na seção (2).

4.1.1 Verificação

Considerando o escoamento entre placas paralelas e adotando as hipóteses do escoamento bidimensional, o domínio computacional pode ser visto na Figura (1). O sistema de equações (2.24) – (2.29) é utilizado para resolver numericamente este problema. Os cálculos são realizados em uma malha cell vertex, estruturada, uniforme ortogonal, paralela à parede. O fluido entra no domínio computacional em $x = x_0$ e sai na fronteira em $x = x_{max}$.

Figura 1 – Domínio computacional para o escoamento entre placas planas paralelas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando as equações (2.55) – (2.59) para resolver analiticamente este problema, empregou-se os mesmos parâmetros para que a comparação fosse realizada.

Então, os seguintes dados foram considerados:

- número de pontos na direção x (i_{max}) = 6825;
- número de processadores na direção x (np_x) = 10;
- número de processadores na direção y (np_y) = 1;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x : $dx = \frac{2\pi}{16}$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y : $dy = \frac{2}{(j_{max}-1)}$;
- passo de tempo: $dt = 1 \times 10^{-4}$;
- início do domínio $x_0 = 1.0$.

Considerando as malhas: M1(número de pontos na direção y , $j_{max} = 249$), M2($j_{max} = 193$), M3($j_{max} = 129$) e M4($j_{max} = 97$), foi realizada uma análise sobre elas. Logo, seguem as Figuras (2), (3) e (4) representando o desvio cometido entre as soluções numérica e analítica, via simulação numérica direta e solução semi-analítica, respectivamente, dados pela diferença em módulo das soluções para as diferentes malhas. As figuras estão dispostas em função do comprimento do canal em y pelo desvio entre as soluções do perfil de velocidade u .

Figura 2 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 5000$, $\beta = 0.25$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 4000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Desvio da solução da simulação numérica direta em relação a solução semi analítica da velocidade u para $Re = 3000$, $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.50$ e $Wi = 5$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando as figuras anteriores, da análise de convergência, pode-se dizer que mesmo a malha mais grossa, M4($j_{max} = 97$), a solução do escoamento base utilizando simulação numérica direta já está muito próxima da solução semi-analítica. Para os casos de $Re = 5000$ e 4000 , os desvios são em torno de 10^{-4} , enquanto que para $Re = 3000$, o desvio é menor que 8×10^{-3} .

Avaliando o desvio das soluções para $j_{max} = 249$, variando o número de Re e fixando as outras constantes, $\alpha_G = 0.25$, $\beta = 0.25$ e $Wi = 1$, em um canal com $i_{max} = 6825$, o desvio entre a solução numérica e semi-analítica diminui lentamente, entre as soluções numérica e semi-analítica, quando Re aumenta. A Figura (5) mostra esse comportamento.

Figura 5 – Desvio da solução numérica em relação a solução semi analítica da velocidade u , variando Re , $\beta = 0.25$ e $Wi = 1$. As linhas contínuas é para $\alpha_G = 0.25$ e as tracejadas para $\alpha_G = 0.5$

Fonte: Elaborada pelo autor.

2ª ordem:

Foi realizado um experimento computacional do escoamento base, utilizando Simulação Numérica com métodos de 2ª ordem, e comparado com a solução semi-analítica. Optou-se por considerar os casos (1) $Re = 3000$, $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.50$ e $Wi = 5$, (2) $Re = 4000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 1$, (3) $Re = 5000$, $\beta = 0.25$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 1$ para ser possível verificar com a simulação numérica direta de alta ordem.

Pode-se ver, nas Figuras (6), (7) e (8) que o desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi-analítica da velocidade u , para os três casos diferentes é maior que o desvio da solução numérica de alta ordem. Para os casos (1) e (3) o desvio é em torno de 10^{-1} e o caso (2) o desvio é menor em torno de 10^{-2} .

Figura 6 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (3)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (2)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Desvio da solução numérica de 2ª ordem em relação a solução semi analítica da velocidade u , para os casos (1)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Simulações

Nesta seção, são apresentadas algumas figuras mostrando a distribuição, na direção y , dos tensores não newtonianos no escoamento base. Para isso, foram realizados experimentos computacionais do código verificado. Os parâmetros são os mesmos quando usados para a verificação do código, comentados na seção anterior.

Seguem as Figuras (9), (10) e (11) ilustrando a distribuição, na direção y , dos tensores, T^{xx} , T^{xy} , T^{yy} , respectivamente, para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando $Wi = 1, 7$ e 12 .

Figura 9 – Componente T^{xx} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10 – Componente T^{xy} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Componente T^{yy} do tensor não newtoniano para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e variando Wi

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com este estudo, notou-se que as outras variáveis u , v e ω_z não sofrem significativas alterações com a variação de Weissenberg. No entanto, a Figura (12) ilustra essas variáveis para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 3$ tanto para um fluido Giesekus (não-Newtoniano) nas curvas em azul, quanto para um fluido Newtoniano, que são as curvas tracejadas.

Figura 12 – Variáveis u , v e ω_z para $Re = 3000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Escoamento com Perturbação

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da simulação numérica direta para analisar a estabilidade do escoamento entre placas paralelas. Primeiramente, é realizada a verificação do código comparando os resultados com a Teoria de Estabilidade Linear. Depois, são apresentadas algumas simulações deste escoamento.

Figura 13 – Domínio computacional para o escoamento entre placas planas paralelas com perturbação

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.1 Verificação

Neste trabalho, foi investigado o comportamento das perturbações infinitesimais do escoamento. Para isso, a introdução de perturbações foi realizada através de injeção e sucção de massa na parede e esta faixa está localizada entre x_1 e x_2 , conforme a Figura (13). No início, no tempo $t = 0$ o escoamento é não perturbado, mas, a partir de um tempo $t > 0$, as perturbações são introduzidas na região mencionada, através da imposição da velocidade v , dada por (3.1). Na região localizada entre os pontos x_0 , x_1 e x_3 , x_4 uma técnica de relaminarização do domínio foi implementada de modo a evitar reflexões de ondas a partir da entrada e saída de fluidos do domínio, respectivamente.

Dado que o objetivo é analisar a estabilidade de uma simulação de transição à turbulência para esse escoamento, através da simulação numérica direta, foi investigada a convecção das ondas Tollmien-Schlichting, a fim de avaliar as taxas de amplificação.

Na intenção de avaliar a taxa de amplificação, denotada por α_i , que é a taxa com que as ondas crescem ou decrescem, no código computacional foi implementado uma análise temporal de Fourier para para obtenção da mesma.

A taxa α_i é mensurada no máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x), obtida pela análise temporal de Fourier. Esta análise foi realizada tomando-se o último período simulado.

Para a verificação, diferentes valores de parâmetros adimensionais foram testados para escoamentos de um fluido não newtoniano. O parâmetro A utilizado na equação (3.1) para ajustar a amplitude das ondas de Tollmien-Schlichting foi de 1×10^{-4} .

Sabendo que o comprimento do canal é $dx \times imax$, as perturbações foram introduzidas entre os pontos 40 e 72, e a relaminarização do domínio inicia no ponto 1865 e segue até o ponto

1905.

Para a verificação do código com a perturbação no escoamento, comparou-se os resultados com a Teoria de Estabilidade Linear. Para isso, adotou os seguintes dados:

- número de pontos na direção x (i_{max}) = 1945;
- número de pontos na direção y (j_{max}) = 249;
- número de processadores na direção x (n_{px}) = 10;
- número de processadores na direção y (n_{py}) = 1;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x : $dx = \frac{2\pi}{32\alpha_r}$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y : $dy = \frac{2}{(j_{max}-1)}$;
- passo de tempo: $dt = 1 \times 10^{-4}$;
- início do domínio $x_0 = 1, 0$.

Quando a Teoria de Estabilidade Linear é utilizada, é possível construir um gráfico em função do número de Re e da frequência ω_t , de modo que pode ser obtida uma curva neutra, fora da qual o escoamento é estável. Nesta região, qualquer perturbação inserida no escoamento será amortecida. Dentro da curva tem-se taxas de amplificação positivas. Se um conjunto de perturbações é inserido sobre o escoamento, em função do número de Reynolds, existirá instabilidade, (NETO, 2001). Com isso, para cada ponto da curva, tem-se um valor α_i .

Diante disso, resolver um caso por meio da simulação numérica direta de forma que, para a frequência $\omega_t = 0.2$, comprimento de onda $\lambda = 0.8306$, $Re = 5200$, $\beta = 0.9$, variando α_G e $Wi = 1$, é equivalente ao LST por também resultar no valor de α_i . Para apresentar alguns casos, segue a tabela (2) com os dados citados, apresentando os valores obtidos através de simulação numérica direta e da Teoria de Estabilidade Linear para α_i .

Tabela 2 – Classificação de estabilidade para $Re = 5200$, variando α_G , $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
5200	0.9	0.0	1	estável	2.07×10^{-2}	2.06×10^{-2}
		0.2		estável	1.90×10^{-2}	1.89×10^{-2}
		0.4		estável	1.85×10^{-2}	1.84×10^{-2}
		0.6		estável	1.82×10^{-2}	1.81×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

Fazendo $\omega_t = 0.24$, comprimento de onda $\lambda = 0.9804$, $Re = 8000$, $\beta = 0.9$, variando α_G e $Wi = 5$, investigou-se alguns casos com esses dados, na tabela (3) são apresentados os valores de α_i para esses casos.

Tabela 3 – Classificação de estabilidade para $Re = 8000$, variando α_G , $\beta = 0.9$ e $Wi = 5$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
8000	0.9	0.0	5	instável	-9.13×10^{-3}	-9.22×10^{-3}
		0.2		instável	-8.99×10^{-3}	-9.03×10^{-3}
		0.4		instável	-8.87×10^{-3}	-9.20×10^{-3}
		0.6		instável	-9.00×10^{-3}	-9.27×10^{-3}

Fonte: Dados da pesquisa.

As tabelas (4) e (5) mostram que para $\omega_i = 0.2$, comprimento de onda $\lambda = 1.0$, variando Re e fixando $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e 0.6 , $Wi = 6$ e 2 , respectivamente.

Tabela 4 – Classificação de estabilidade variando Re , $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 6$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
7000	0.50	0.75	6	instável	-1.59×10^{-2}	-1.80×10^{-2}
6000				instável	-1.22×10^{-2}	-1.14×10^{-2}
5000				estável	6.00×10^{-3}	5.40×10^{-3}
4000				estável	3.40×10^{-3}	3.93×10^{-3}
3000				estável	1.90×10^{-2}	2.71×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 5 – Classificação de estabilidade variando Re , $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.6$ e $Wi = 2$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
7000	0.50	0.60	2	instável	-6.30×10^{-3}	-6.81×10^{-3}
6000				instável	-4.10×10^{-4}	-4.59×10^{-4}
5000				estável	7.00×10^{-3}	7.23×10^{-3}
4000				estável	2.00×10^{-3}	2.51×10^{-3}
3000				estável	3.54×10^{-2}	3.60×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

As tabelas (6) e (7) mostram o caso para $\omega = 0.2$, $\lambda = 1.0$, fixando $Re = 3000$ e 4000 , $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.2$ e 0.0 , respectivamente e variando Wi .

Tabela 6 – Classificação de estabilidade para $Re = 3000$, $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.20$ e variando Wi

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
3000	0.60	0.2	7	estável	3.04×10^{-2}	3.95×10^{-2}
			10	estável	2.00×10^{-2}	2.54×10^{-2}
			12	estável	3.00×10^{-2}	3.77×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 7 – Classificação de estabilidade para $Re = 4000$, $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.0$ e variando Wi

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
4000	0.60	0.0	1	estável	2.18×10^{-2}	2.34×10^{-2}
			3	estável	3.28×10^{-2}	3.84×10^{-2}
			5	estável	4.77×10^{-2}	4.33×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

As tabelas (8) e (9) mostram os casos para $\omega = 0.2$, $\lambda = 1.0$, fixando $Re = 6000$ e 7000 , variando β , $\alpha_G = 0.75$ e 0.25 , respectivamente e $Wi = 2$.

Tabela 8 – Classificação de estabilidade para $Re = 6000$, variando β , $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
6000	0.25	0.75	2	instável	-1.06×10^{-2}	-1.00×10^{-2}
	0.50			instável	-6.20×10^{-3}	-6.53×10^{-3}
	0.75			estável	3.30×10^{-3}	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 9 – Classificação de estabilidade para $Re = 7000$, variando β , $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i s. n.	α_i LST
7000	0.25	0.25	2	estável	3.70×10^{-3}	3.3×10^{-3}
	0.50			estável	1.01×10^{-2}	1.82×10^{-2}
	0.75			estável	1.00×10^{-3}	8.1×10^{-2}

Fonte: Dados da pesquisa.

Dos casos apresentados nas Tabelas (2) a (9), tem-se que os valores de α_i estão bem próximos quando comparados os resultados obtidos pela simulação numérica direta e LST.

4.2.2 Simulações

Diante da verificação do código, o qual resultou bons resultados, experimentos computacionais foram realizados com objetivo de analisar o comportamento do escoamento com perturbações. Com isso, foi possível realizar análises acerca do escoamento e nesta seção, mostrar os casos estudados.

Variação do Re :

Nesse estudo, considera-se as simulações assumindo diferentes valores para o número de Reynolds, e são eles: $Re = 3000, 4000, 5000, 6000$ e 7000 . A Figura (14) mostra o máximo valor da perturbação da velocidade, u_{max} , na direção do escoamento, obtido pela análise temporal

de Fourier. Esta análise foi realizada tomando-se o último período simulado. Nesta figura, as curvas mostram o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Giesekus, para $\alpha_G = 0.25$, $\beta = 0.50$, $Wi = 2$ e para diferentes números de Reynolds. Pode-se observar que para os valores de $Re = 3000, 4000$ e 5000 as curvas estão decrescendo, mostrando o decaimento das perturbações, tornando-as estáveis. Por outro lado, para os valores de $Re = 6000$ e 7000 , pode-se notar o crescimento das perturbações, mostrando que são instáveis.

Pode-se verificar na Tabela (5) o valor da taxa de amplificação referente ao caso apresentado na Figura (14).

Figura 14 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para diferentes valores de Re , para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2.0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Variação do β :

Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento entre placas planas paralelas, do fluido Giesekus, foram realizadas simulações numéricas para Reynolds: $Re = 6000$ e 7000 , Weissenberg: $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.75 . Essa influência da constante β variando um pouco Re e α é apresentada nas Figuras (15) e (16), que mostram o máximo valor da perturbação da velocidade u na direção do escoamento. As curvas nas figuras descrevem o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Giesekus para os parâmetros citados. Pode-se observar que à medida que a constante β diminui, a propagação das perturbações

crecem tornando o escoamento mais instável, exceto quando o valor de α_G é maior e Re menor, o escoamento se torna estável.

Pode-se verificar na Tabela (8) e (9) os valores das taxas de amplificações referente aos casos apresentados nas Figuras (15) e (16), respectivamente.

Figura 15 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, diferentes valores de β , $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 7000$, diferentes valores de β , $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Varição do α_G :

As figuras (17) a (20) mostram o desenvolvimento das ondas de Tollmien-Schlichting tomando o valor máximo do componente de perturbação da velocidade na direção do escoamento sobre a direção normal y para cada posição em x . Estas análises foram realizadas para diferentes parâmetros adimensionais nas simulações numéricas. Das figuras, observou-se que à medida que α_G aumenta, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável, exceto quando Re e Wi são menores, o escoamento se torna estável.

Figura 17 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 5000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G e $Wi = 1.0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 5000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G e $Wi = 10$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G , $\beta = 0.75$ e $Wi = 1.0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.75$, diferentes valores de α_G , $\beta = 0.75$ e $Wi = 10$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Variação do Wi :

Considerando o escoamento viscoelástico entre placas planas paralelas, utilizando o modelo Giesekus, o efeito do número de Weissenberg nas simulações numéricas será analisado neste estudo. Nessas simulações foi considerado $Re = 4000$ e 6000 , $\beta = 0.60$, $\alpha_G = 0.0$ e 0.8 . O efeito do número de Weissenberg (Wi) na estabilidade do escoamento é mostrado nas Figuras (21) e (22). Nessas figuras serão apresentadas o máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção do escoamento (x) e as curvas mostram o comportamento das ondas de Tollmien-Schlichting do fluido Giesekus, para $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.6$. Pode-se observar que aumentando a constante α_G e variando um pouco o número de Reynolds, de 4000 para 6000 , a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável. No entanto, para $Re = 6000$ e $Wi = 1$, isso não acontece, este escoamento ainda é mais estável, ou seja, as curvas dos gráficos mostraram que o escoamento torna-se mais instável às perturbações não estacionárias, à medida que α_G aumenta e para $Wi > 1$. Para $Wi = 1$, o escoamento ainda é estável.

Figura 21 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.0$ e diferentes valores de Wi

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Amplitude máxima da perturbação da velocidade na direção do escoamento, u_{max} , para $Re = 6000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.8$ e diferentes valores de Wi

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dessas simulações apresentadas, para um fluido viscoelástico, utilizando o modelo Giesekus, nota-se que o número de Reynolds associado a escoamentos mais instáveis é em torno de 3000 para mais alto, dependendo do caso. Enquanto que para fluidos Newtonianos esse número é em torno de 2000.

Gráfico das Perturbações:

Uma maneira de visualizar o comportamento de cada variável, do escoamento perturbado, para alguns parâmetros, ilustrando a propagação das perturbações infinitesimais no domínio será apresentada. Considerou-se um caso estável e outro instável. Para cada caso são apresentados o desenvolvimento das perturbações dos componentes de velocidade u e v , da vorticidade ω_z e dos tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} em todo o domínio. Pode-se observar que as perturbações decaem a zero próximo ao final do domínio para todas as variáveis. Este comportamento não é físico, causado pela região de relaminarização, que evita que as perturbações sejam refletidas no contorno de saída, contaminando assim os resultados.

Para isso, foram utilizados os seguintes dados:

- amplitude máxima das perturbações (A) = 1×10^{-4} ;

- número de pontos na direção x ($i_{\max}$) = 481;
- número de pontos na direção y ($j_{\max}$) = 249;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x : $dx = \frac{2\pi}{32\alpha_r}$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y : $dy = \frac{2}{(j_{\max}-1)}$;
- passo de tempo: $dt = 1 \times 10^{-4}$;
- início do domínio $x_0 = 1, 0$.

Caso estável:

As Figuras (23) – (28) ilustram a propagação das ondas presente nas velocidades u e v , na vorticidade ω_z e nos tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$ de um escoamento com propagação de perturbações com taxa de amplificação, $\alpha_i > 0$, portanto, um escoamento estável.

Nas figuras apresentadas a seguir, o escoamento ocorre do lado esquerdo inferior para o lado direito superior. Pode-se observar que após uma posição x , as perturbação decaem a zero. Isto ocorre devido à utilização da zona de relaminarização, que tem como principal objetivo evitar que perturbações cheguem ao contorno de saída do domínio.

Figura 23 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 4000$, $\beta = 0.6$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso instável:

Por sua vez, as Figuras (29) – (34) ilustram a propagação das ondas presentes nas velocidades u e v , na vorticidade ω_z e nos tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$ de um escoamento com propagação de perturbações com taxa de amplificação, $\alpha_i < 0$, ou seja, um escoamento classificado como instável.

Figura 29 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$ e $Wi = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que as Figuras (23) e (29) mostram a propagação de componente de perturbação da velocidade u no domínio. Os maiores valores destas perturbações estão nas regiões próximas à parede ($y = -1$ e $y = 1$). Observa-se o decaimento das perturbações no casos estável e o crescimento das mesmas no caso instável.

Nas Figuras (24) e (30), pode-se observar que próximo à entrada do domínio, em $y = -1$ e $y = 1$, o valor da componente v é não nulo. Neste local é que são inseridas as perturbações no escoamento através de injeção e sucção de massa. Para este componente da velocidade, a maior amplitude ocorre no centro do canal, em $y = 0$.

O comportamento da perturbação da vorticidade ω_z é apresentado nas Figuras (25) e (31). Esta variável apresenta os maiores valores nas paredes ($y = -1$ e $y = 1$), sendo que no centro do domínio são visíveis as ondas com amplitude bem baixa, comparando-se com os valores da parede.

Os três componentes do tensor se comportam de maneira similar à vorticidade. Apresentam os maiores valores nas paredes ($y = -1$ e $y = 1$) e no centro do domínio têm as ondas com amplitude mais baixas.

Em todas as variáveis é possível observar o decaimento das perturbações no caso estável e o crescimento das mesmas no caso instável.

Gráfico das Perturbações com Amplitude Maior:

Outro caso estudado neste trabalho, foi um em que a amplitude A das perturbações inseridas no escoamento são maiores, e não mais 1×10^{-4} . Esta abordagem não é possível ser comparada com o LST, uma vez que o escoamento captura os termos não lineares das equações.

O último caso apresentado, para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 1 \times 10^{-4}$, classificado como instável, foi investigado para $A = 5 \times 10^{-3}$. Este escoamento mostrou-se similar, mas considerando uma amplitude maior. As Figuras (35) – (40) representam então a amplitude presente nas velocidades u e v , na vorticidade ω_z e nos tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} , respectivamente, para $A = 5 \times 10^{-3}$.

Figura 35 – Distribuição das perturbações na velocidade u para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Distribuição das perturbações na velocidade v para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Distribuição das perturbações na vorticidade ω_z para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xx} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 39 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{xy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Distribuição das perturbações no componente do tensor T^{yy} para $Re = 7000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.80$, $Wi = 1$ e $A = 5 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a Figura (35) mostra a propagação da componente de perturbação da velocidade u no domínio. Os maiores valores destas perturbações ainda estão nas regiões próximas à parede ($y = -1$ e $y = 1$). Nota-se o crescimento das perturbações neste caso.

Na Figura (36), pode-se observar que próximo à entrada do domínio, em $y = -1$ e $y = 1$, o valor da componente v é não nulo. Para este componente da velocidade, a maior amplitude ocorre no centro do canal, em $y = 0$, e ainda é possível ver um comportamento diferente próximo à parede, ($y = -1$ e $y = 1$).

O comportamento da perturbação da vorticidade ω_z é apresentado na Figura (37). Esta variável apresenta os maiores valores nas paredes ($y = -1$ e $y = 1$) com uma pequena diferença no comportamento em relação à Figura (31), sendo que no centro do domínio são visíveis as ondas com amplitude bem baixa.

Neste casos, os componentes do tensor se comportam de maneira similar à vorticidade. Apresentam os maiores valores nas paredes ($y = -1$ e $y = 1$) e no centro do domínio têm as ondas com amplitude mais baixas. Neles também é possível ver um diferença no seu comportamento próximo à parede.

Em todas as variáveis é possível observar o crescimento das perturbações.

CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo investigar como ocorre o fenômeno de transição à turbulência, para um escoamento incompressível, bidimensional de um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Giesekus. Então, foi investigada a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento entre placas paralelas. Para isso, utilizou-se a simulação numérica para analisar a estabilidade de escoamentos do fluido viscoelástico, a fim de contribuir para as dificuldades encontradas neste problema.

Apresentou-se as equações governantes bidimensionais para um fluido nao-Newtoniano viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Giesekus, nas formas dimensional e adimensional. Também foram descritas, em detalhe, a adimensionalização das equações governantes para esse escoamento. As equações foram descritas na formulação vorticidade-velocidade. Apresentou-se a uma solução semi-analítica, para um escoamento entre placas planas paralelas de um fluido Giesekus, afim de comparar com a solução do escoamento base utilizando simulação numérica. Foi apresentada a Teoria de Estabilidade Linear para um escoamento envolvendo o modelo viscoelástico Giesekus, no intuito de verificar os resultados das taxas de amplificação com a simulação numérica, ainda foram apresentados os métodos numéricos utilizados, na simulação numérica, para solução do problema estudado e ainda comentada a solução semi-analítica.

Experimentos computacionais foram realizados para verificar a simulação numérica do escoamento base. Foram utilizados três valores do número de Reynolds e combinações diferentes para os outros parâmetros adimensionais. Os resultados mostraram que mesmo para a malha mais grossa, os resultados já estão muito próximos da solução semi-analítica. Avaliou-se também a diferença de utilizar métodos de 2ª ordem e alta ordem utilizando simulação numérica para o escoamento base, os quais os resultados mostraram possíveis de verificar que os métodos de baixa ordem cometem erros maiores que os de alta ordem, o primeiro em torno de 1×10^2 , enquanto que o segundo em torno de 1×10^4 , 1×10^5 . Para esta análise foram considerados os mesmos casos quando verificado o código, na malha mais grossa.

Foram realizadas simulações do escoamento base para mostrar o comportamento das variáveis do problema. Foi considerado um caso variando três valores do número de Weissenberg Wi e fixando as outras variáveis adimensionais.

Experimentos computacionais foram realizados para verificar o código computacional do escoamento perturbado, investigando a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting em um escoamento entre placas paralelas bidimensional, utilizando simulação numérica, avaliando as taxas de amplificação máxima. Diferentes simulações numéricas foram realizadas variando os parâmetros adimensionais para o escoamento. Neste trabalho, os parâmetros estudados foram o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi), a constante β e α_G . Para a verificação foram feitos experimentos variando todos eles. Os resultados mostraram-se próximos, sendo possível verificar o código.

Simulações numéricas foram realizadas para o escoamento perturbado, para observar o comportamento do escoamento com a influência da variação dos outros parâmetros. Os resultados das simulações do escoamento perturbado obtidos, variando Re , foram realizados para cinco valores diferentes do número, que dentre estes, foram escolhidos alguns para simular os escoamentos para variação dos outros parâmetros.

Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento viscoelástico, entre placas planas paralelas, foram realizadas simulações numéricas com a variação dos parâmetros Re e α_G . Nos casos simulados observou-se que à medida que a constante β diminui, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável, exceto quando o valor de α_G é maior e Re menor, o escoamento se torna estável.

A influência de α_G na estabilidade do escoamento foi verificada para simulações numéricas com a variação dos parâmetros Re e Wi . Das simulações, observou-se que à medida que α_G aumenta, a propagação das perturbações crescem tornando o escoamento mais instável, exceto quando Re e Wi são menores, o escoamento se torna estável.

O efeito do número de Weissenberg (Wi) na estabilidade do escoamento foi simulado para diferentes valores de Re e α_G . Nos resultados foram apresentados o máximo valor da perturbação da velocidade, e as curvas dos gráficos mostraram que o escoamento torna-se mais instável às perturbações não estacionárias, à medida que α_G aumenta e para $Wi > 1$. Para $Wi = 1$, o escoamento ainda é estável.

Para ilustrar a propagação das perturbações no domínio, foram apresentadas figuras obtidas no último instante de tempo de casos diferentes, que são um caso estável e outro instável. Também foram apresentadas figuras quando a amplitude A é maior.

Por fim, a simulação numérica mostrou-se uma ferramenta eficiente na análise da estabilidade de escoamentos viscoelásticos, capaz de avaliar se o escoamento vai se tornar mais ou menos instável com a adição de solvente, permitindo uma melhor escolha dos parâmetros adimensionais dos escoamentos.

Como trabalhos futuros, pode-se desenvolver um código paralelizado em três dimensões para analisar a estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekeus.

REFERÊNCIAS

- ADAM, Y. Highly accurate compact methods and boundary conditions. **Journal of Computational Physics**, 24, p. 10–22, 1977. Citado nas páginas 48 e 50.
- ARAUJO, M. T. de. **Solução numérica do modelo Giesekus para escoamentos com superfícies livres**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - ICMC/São Carlos, 2015. Citado na página 43.
- ARAUJO, M. T. de; BRANDI, A. C.; PAULO, G. S. de; SILVA, A. A. da; SOUZA, L. F. de. An algorithm for solving an implicit solution for fully developed flow in a channel of a giesekus fluid. **17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT 2018)**, Unpublished Work. Citado nas páginas 43, 44 e 45.
- BERIS, A.; ARMOSTRONG, R.; BROWN, R. Spectral finite-element calculations of the flow of a maxwell fluid between eccentric rotating cylinders. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 22, p. 129–167, 1987. Citado na página 25.
- BIRD, R. B.; DOTSON, P. J.; JOHNSON, N. L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 7, p. 213–235, 1980. Citado na página 26.
- BRANDT, A. Multilevel adaptive solutions to boundary value problems. **Mathematics of Computation**, 31, p. 333–390, 1977. Citado na página 48.
- BRASSEUR, E.; FYRILLAS, M.; GEORGIOU, G.; CROCHET, M. The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. **Journal of Rheology**, 42, p. 549–566, 1994. Citado na página 26.
- BRETAS, M. A.; DAVILA, R. E. S. **Reologia de Polímeros Fundidos**. [S.l.]: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2000. Citado nas páginas 26 e 31.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2003. Citado na página 48.
- FASEL, H. F.; RIST, U.; KONZELMANN, U. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary-layer transition. **AIAA**, 28, p. 29–37, 1990. Citado na página 45.
- FERRÁS, L. L.; NÓBREGA, J. M.; PINHO, F. T. Analytical solutions for channel flows of phan-thien-tanner and giesekus fluids under slip. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 171, p. 97 – 105, 2012. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025712000109>>. Citado na página 43.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997. Citado nas páginas 33 e 48.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. [S.l.]: LTC, 2011. Citado nas páginas 30 e 31.

- FRISCH, U. **Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. Citado na página 26.
- FURLAN, L. J. da S. **Simulação Numérica de transição de escoamentos de fluidos viscoelásticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista - FCT/Presidente Prudente, 2018. Citado nas páginas 37 e 41.
- GIESEKUS, H. Elasto-viskose flüssigkeiten, für die in stationären schichtströmungen sämtliche normalspannungskomponenten verschieden gross sind. **Rheologica Acta**, 2, p. 50–62, 1962. Citado na página 32.
- GIESEKUS, H. J. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. v. 11, p. 69–109, 01 1982. Citado na página 26.
- KAYE, A. **Non-newtonian flow in incompressible flows**. [S.l.]: College of Aeronautics, 1962. Citado na página 26.
- KLOKER, M. A robust high-resolution split-type compact FD scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. **Applied Scientific Research**, 59, p. 353–377, 1998. Citado nas páginas 46, 49 e 50.
- LARSON, R. G. **Constitutive equations for polymer melts and solutions**. [S.l.]: Butterworths, 1988. Citado na página 26.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **J. Comput. Phys.**, 103, p. 16–42, 1992. Citado nas páginas 46 e 51.
- LEONOV, A. I. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. **Rheologica Acta**, 15, p. 85–98, 1976. Citado na página 26.
- LUO, X. L.; TANNER, R. I. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part II: Integral constitutive models. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 22, p. 61–89, 1986. Citado na página 26.
- _____. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 25, p. 9–22, 1988. Citado na página 26.
- MEITZ, H. L. **Numerical Investigation of Suction in a Transitional Flat-Plate Boundary Layer**. Tese (Doutorado) — The University of Arizona, 1996. Citado nas páginas 49 e 50.
- MENDONÇA, M. T.; AVELAR, A. C. **Turbulência**. [S.l.]: ABCM, 2016. Citado na página 41.
- MOMPEAN, G.; DEVILLE, M. Unsteady finite volume of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 72, p. 253–279, 1997. Citado na página 25.
- NETO, A. da S. **Turbulência nos Fluidos Aplicada**. [S.l.]: Universidade Federal de Uberlândia, 2001. Citado na página 69.
- PHAN-THIEN, N.; TANNER, R. I. A new constitutive equation derived from network theory. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 2, p. 353–365, 1977. Citado na página 26.

- PINHO, F. T.; ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 10, p. 45–75, 2003. Citado na página 26.
- RAISI, A.; MIRZAZADEH, M.; DEHNAVI, A. S.; RASHIDI, F. An approximate solution for the couette–poiseuille flow of the giesekus model between parallel plates. **Rheologica Acta**, v. 47, n. 1, p. 75–80, Jan 2008. ISSN 1435-1528. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00397-007-0212-9>>. Citado na página 43.
- SCHLEINIGER, G.; WEINACHT, R. J. Steady poiseuille flows for a giesekus fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 40, p. 79–102, 1991. Citado nas páginas 43, 44, 112 e 114.
- SCHLICHTING, H. **Boundary-Layer Theory**. [S.l.]: McGraw-Hill, IncH., 1979. Citado nas páginas 26 e 38.
- SOUZA, L. F. **Instabilidade Centrífuga e transição para turbulência em Escoamentos Laminares Sobre Superfícies Côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003. Citado nas páginas 46, 48, 49, 50 e 51.
- SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 48, p. 565–592, 2005. Citado na página 46.
- STÜBEN, K.; TROTTENBERG, U. Nonlinear multigrid methods, the full approximation scheme. **Köln-Portz**, 5, p. 58–71, 1981. Citado na página 48.
- TAGHAVI, S. M.; KHABAZI, N.; SADEGHY, K. Hydromagnetic linear instability analysis of Giesekus fluids in plane Poiseuille flow. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations**, v. 14, p. 2046–2055, maio 2009. Citado na página 43.
- TANNER, R. I. **Engineering Rheology**. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. Citado na página 25.
- WHITE, J. A.; METZNER, A. B. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. **Journal of Applied Polymer Science**, 7, p. 1867–1889, 1963. Citado na página 26.
- YOO, J. Y.; CHOI, H. C. On the steady simple shear flows of the one-mode giesekus fluid. **Rheologica Acta**, v. 28, n. 1, p. 13–24, Jan 1989. ISSN 1435-1528. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01354764>>. Citado na página 43.

ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Neste apêndice é apresentado a adimensionalização das equações governantes utilizadas neste trabalho.

Como apresentada na seção 2.2, definem-se as variáveis adimensionais como:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}. \quad (\text{A.1})$$

As equações que modelam um escoamento incompressível, bidimensional e isotérmico, para um fluido não-Newtoniano, são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (\text{A.3})$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (\text{A.4})$$

Equação da continuidade:

Substituindo as transformções (A.1) na equação (A.2), obtém-se:

$$\frac{\partial(u^*U)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(v^*U)}{\partial(y^*L)} = \frac{U}{L} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] = 0.$$

Multiplicando a equação acima por (L/U) , a equação de continuidade adimensionalizada torna-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0.$$

Omitindo o símbolo (*) por simplicidade, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Equações de Navier-Stokes:

Analogamente, faz-se as seguintes manipulações para a equação da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y .

- Direção x :

Substituindo as transformções (A.1) na equação (A.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(u^*U)}{\partial(\frac{t^*L}{U})} + \frac{\partial(u^*U)(u^*U)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(v^*U)(u^*U)}{\partial(y^*L)} \right] = -\frac{\partial(p^*\rho U^2)}{\partial(x^*L)} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial^2(u^*U)}{\partial(x^*L)^2} + \frac{\partial^2(u^*U)}{\partial(y^*L)^2} \right] + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xx}}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xy}}{\partial(y^*L)}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} \right] = -\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} \right] + \\ + \frac{\eta_s U}{L^2} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $(L/\rho U^2)$, tem-se:

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\eta_s}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)}.$$

Sabendo que $Re = (\rho UL/\eta_0)$, $\beta = (\eta_s/\eta_0)$ e $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, o termo $(\eta_s/\rho UL)$ fica:

$$\frac{\eta_s}{\rho UL} = \frac{\eta_0 - \eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho UL}{\eta_0}} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \beta}{Re} = \frac{\beta}{Re}. \quad (\text{A.6})$$

Então a equação de Navier-Stokes na direção x adimensionalizada é dada por:

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*u^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xx}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(y^*)}.$$

Omitindo o símbolo (*), por simplicidade, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}. \quad (\text{A.7})$$

- Direção y:

De forma análoga, substitui-se as transformções (A.1) na equação (A.4), obtendo:

$$\rho \left[\frac{\partial(v^*U)}{\partial(t^*L)} + \frac{\partial(u^*U)(v^*U)}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(v^*U)(v^*U)}{\partial(y^*L)} \right] = -\frac{\partial(p^*\rho U^2)}{\partial(y^*L)} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial^2(v^*U)}{\partial(x^*L)^2} + \frac{\partial^2(v^*U)}{\partial(y^*L)^2} \right] + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{xy}}{\partial(x^*L)} + \frac{\partial(T^*\rho U^2)^{yy}}{\partial(y^*L)}.$$

Ou ainda,

$$\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(v^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial(y^*)} \right] = -\frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(p^*)}{\partial(y^*)} \right] + \\ + \frac{\eta_s U}{L^2} \left[\frac{\partial^2(v^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(v^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\rho U^2}{L} \left[\frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{yy}}{\partial(y^*)} \right].$$

Multiplicando a equação acima por $(L/\rho U^2)$, vem que:

$$\frac{\partial(v^*)}{\partial(t^*)} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial(y^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(y^*)} + \frac{\eta_s}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2(v^*)}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2(v^*)}{\partial(y^*)^2} \right] + \frac{\partial(T^*)^{xy}}{\partial(x^*)} + \frac{\partial(T^*)^{yy}}{\partial(y^*)}.$$

Sabendo que $Re = (\rho UL/\eta_0)$, $\beta = (\eta_s/\eta_0)$ e $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, utilizando as manipulações (A.6) para o termo $(\eta_s/\rho UL)$, segue que a equação de Navier-Stokes na direção y adimensionalizada, omitindo o símbolo (*), por simplicidade, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (A.8)$$

Modelo Giesekus

A equação constitutiva utilizada neste trabalho é o modelo Giesekus, dada por:

$$\mathbf{T} + \frac{\alpha\lambda}{\eta_p}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (A.9)$$

que em coordenadas cartesianas bidimensionais e após algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (A.10)$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xy} (T^{xx} + T^{yy})) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (A.11)$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G \lambda}{\eta_p} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (A.12)$$

Para obter a equação do tensor não-Newtoniano, na expressão (A.10), na forma adimensional, faz-se a substituição das transformações (A.1) em (A.10):

$$\begin{aligned} & \rho U^2 T^{*xx} + \lambda \left(\frac{\partial(\rho U^2 T^{*xx})}{\partial(\frac{L}{U} t^*)} + \frac{\partial(U u^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial L x^*} + \frac{\partial(U v^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial L y^*} - \right. \\ & \left. - 2\rho U^2 T^{*xx} \frac{\partial U u^*}{\partial L x^*} - 2\rho U^2 T^{*xy} \frac{\partial U u^*}{\partial L y^*} \right) + \frac{\alpha \lambda}{\eta_p} (\rho U^2 T^{*xx2} + \rho U^2 T^{*xy2}) = 2\eta_p \frac{\partial U u^*}{\partial L x^*} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \rho U^2 T^{*xx} + \frac{\lambda \rho U^3}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*xx})}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* T^{*xx})}{\partial y^*} - \right. \\ & \left. - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\alpha \lambda}{\eta_p} \rho^2 U^4 (T^{*xx2} + T^{*xy2}) = 2 \frac{\eta_p U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação por $(1/\rho U^2)$, segue que:

$$\begin{aligned} & T^{*xx} + \frac{\lambda U}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*xx})}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* T^{*xx})}{\partial y^*} - \right. \\ & \left. - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\alpha \lambda \rho U^2}{\eta_p} (T^{*xx2} + T^{*xy2}) = 2 \frac{\eta_p}{\rho U L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}. \end{aligned}$$

Lembrando dos números adimensionais, o termo $(\alpha \lambda \rho U^2 / \eta_p)$ torna-se:

$$\frac{\alpha \lambda \rho U^2}{\eta_p} = \frac{\alpha L Wi U \rho}{\eta_p} = \frac{\alpha Wi (LU \rho)}{\eta_0 - \eta_s} = \frac{\alpha Wi (LU \rho) \frac{1}{\eta_0}}{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}} = \frac{\alpha Wi Re}{1 - \beta}.$$

Logo, a equação adimensionalizada para o tensor não-Newtoniano, omitindo o símbolo (*) por simplicidade e substituindo (A.6), porém com η_p , é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(u T^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v T^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\alpha Wi Re}{1 - \beta} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

De forma análoga, as equações dos tensores não-Newtonianos (A.11) e (A.12) na forma adimensional, são:

$$\begin{aligned} & T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(u T^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v T^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\alpha Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy} (T^{xx} + T^{xy})) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ & T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(u T^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(v T^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\alpha Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA O ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO DE UM FLUIDO GIESEKUS ENTRE PLACAS PARALELAS

Neste apêndice são apresentadas as manipulações algébricas para obter a solução semi-analítica, para o escoamento entre placas planas, apresentada neste trabalho na seção 2.5.

Considerando as hipótese de um escoamento incompressível, isotérmico de um fluido Giesekus com um solvente Newtoniano em coordenadas cartesianas bidimensional e adimensionalização sob as condições de um escoamento completamente desenvolvido e considerando um canal horizontal onde o fluido escoar na direção x , com isso, é levado em consideração o seguinte sistema:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (\text{B.1})$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (\text{B.2})$$

$$T^{xx} - 2WiT^{xy} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xx2} + T^{xy2}) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$T^{xy} - WiT^{yy} \frac{du}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}, \quad (\text{B.4})$$

$$T^{yy} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy2} + T^{yy2}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Considere que, $T^{xx}(0) = T^{xy}(0) = T^{yy}(0) = \frac{du(0)}{dy} = 0$ no centro do canal.

A menos da adimensionalização dos parâmetros, o sistema de equações (B.1) – (B.5) é análogo ao sistema (2.1) – (2.5) resolvido por (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991).

Reescrevendo a equação (B.5), tem-se:

$$\left(T^{yy} + \frac{(1-\beta)}{2\alpha Re Wi}\right)^2 + T^2 = \frac{(1-\beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}, \quad (B.6)$$

que fornece duas expressões para T^{yy} em função de T^{xy} :

$$T^{yy} = \frac{-(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}}}{2\alpha Re Wi} \quad .. \quad (B.7)$$

Como o tensor é nulo no centro do canal, a melhor escolha na equação (B.7) é o sinal positivo:

$$T^{yy} = \frac{-(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}}}{2\alpha Re Wi}. \quad (B.8)$$

Somando as equações (B.3) e (B.5), tem-se:

$$(T^{xx} + T^{yy}) + \frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)} [(T^{xx} + T^{yy})^2 - 2T^{xx}T^{yy} + 2T^{xy2}] - 2WiT^{xy} \frac{du}{dy} = 0, \quad (B.9)$$

ou,

$$\frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)} (T^{xx} + T^{yy})^2 + (T^{xx} + T^{yy}) - \frac{2\alpha Re Wi}{(1-\beta)} T^{xx}T^{yy} + \frac{2\alpha Re Wi}{(1-\beta)} T^{xy2} = 2WiT^{xy} \frac{du}{dy}. \quad (B.10)$$

Tem-se que $(T^{xx} + T^{yy})$ da equação (B.4), é:

$$(T^{xx} + T^{yy}) = \frac{\frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy} + WiT^{yy} \frac{du}{dy} - T^{xy}}{\frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)} T^{xy}}. \quad (B.11)$$

E ainda a equação (B.11) implica que:

$$T^{xx} = \frac{(1-\beta)[(1-\beta) + ReWiT^{yy}] \frac{du}{dy}}{\alpha Re^2 Wi T^{xy}} - \frac{[(1-\beta) + \alpha Re Wi T^{yy}]}{\alpha Re Wi}. \quad (B.12)$$

As equações (B.11) e (B.12) são bem definidas para todo $y \neq 0$.

Substituindo as equações (B.11) e (B.12) na equação (B.10) e depois de algumas manipulações algébricas, usar a equação (B.5) para simplificar os cálculos em:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\left[\frac{(1-\beta)}{Re} + bWiT^{yy}\right] T^{xy}}{\left[\frac{(1-\beta)}{Re} + WiT^{yy}\right]^2}, \quad \text{where } b = 2\alpha - 1. \quad (B.13)$$

A equação (B.13) mostra que $\frac{du}{dy}$ depende de T^{yy} e T^{xy} . Como a equação (B.8) tem T^{yy} dependendo de T , substitui-se a equação B.8 na equação (B.13), e após algumas manipulações

algébricas, obtém-se a solução para $\frac{du}{dy}$:

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\alpha Re T^{xy} \left[(1 - \beta) + b \sqrt{(1 - \beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}} \right]}{\left[b(1 - \beta) + \sqrt{(1 - \beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}} \right]^2}. \quad (\text{B.14})$$

A solução do modelo Giesekus deve satisfazer todas as equações, em particular a equação (??), que pode ser reescrita como a equação (B.6). A equação (B.6) permite que:

$$\left(T^{yy} + \frac{(1 - \beta)}{2\alpha Re Wi} \right)^2 \leq \frac{(1 - \beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}, \quad (\text{B.15})$$

e também,

$$T^{xy2} \leq \frac{(1 - \beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}. \quad (\text{B.16})$$

A restrição dada pela equação (B.16) leva a $(1 - \beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2} \geq 0$, isto é, o radical presente na equação (B.14) é sempre não negativo desde que a equação (B.5) é considerada. Portanto, essa restrição deve ser respeitada.

Integrando a equação (B.1) em relação a y e usando $T^{xy} = \frac{du}{dy} = 0$ no centro do canal, $y = 0$, segue que:

$$T^{xy} = \frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \text{ é uma constante negativa.} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo a equação (B.17) na equação (B.14), é obtida uma expressão implícita para $\frac{du}{dy}$,

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\alpha Re \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right) \left[(1 - \beta) + b \sqrt{(1 - \beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)^2} \right]}{\left[b(1 - \beta) + \sqrt{(1 - \beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} \frac{du}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)^2} \right]^2}. \quad (\text{B.18})$$

Portanto, para obter a solução semi-analítica é necessário seguir os seguintes passos:

1. Resolver a equação (B.18) para obter $\frac{du}{dy}$ para um $\frac{\partial p}{\partial x}$ dado;
2. Resolver a equação (B.8) para obter $T^{xy}(y)$;
3. Resolver a equação (B.14) para obter $T^{yy}(y)$;
4. Resolver a equação (B.17) para obter $T^{xx}(y)$.

Se a sequência 2., 3. e 4. for seguida, é possível ser que todas componentes dos tensores podem ser obtidas explicitamente, apenas usando alguns cálculos algébricos.

No entanto, no passo 1. não é fácil resolver $\frac{du}{dy}$ analiticamente. Portanto, na seção 3.2 são discutidos os procedimentos e estratégias numéricas adotadas para escolher $\frac{\partial p}{\partial x}$ corretamente,

calcular $\frac{du}{dy}$ e calcular o componente da velocidade u , para complementar esta seção e também para fornecer uma aplicabilidade do trabalho matemático de (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991) à área de Engenharia.