UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Problemas de empacotamento bidimensional em níveis: estratégias baseadas em modelagem matemática

Vanessa Munhoz Reina Bezerra

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de
Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vanessa Munhoz Reina Bezerra

Problemas de empacotamento bidimensional em níveis: estratégias baseadas em modelagem matemática

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Maristela Oliveira dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. José Fernando da Costa Oliveira

USP – São Carlos
Março de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M966p Munhoz Reina Bezerra, Vanessa
Problemas de empacotamento bidimensional em
níveis: estratégias baseadas em modelagem matemática
/ Vanessa Munhoz Reina Bezerra; orientador
Maristela Oliveira dos Santos; coorientador José
Fernando da Costa Oliveira. -- São Carlos, 2018.
105 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2018.

1. Problema de corte e empacotamento. 2. Corte
guilhotinado. 3. Empacotamento em níveis. 4.
Programação inteira. 5. Planogramas. I. Oliveira dos
Santos, Maristela, orient. II. da Costa Oliveira,
José Fernando, coorient. III. Título.

Vanessa Munhoz Reina Bezerra

**Two-dimensional level packing problems: strategies based
on mathematical modeling**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Maristela Oliveira dos Santos

Co-advisor: Prof. Dr. José Fernando da Costa Oliveira

USP – São Carlos
March 2018

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Luiz (em memória) e Maria Neusa, que me ensinaram a admirá-los. Ao meu esposo Wesley por seu amor e sua paciência. E ao meu grande amor, Beatriz (minha filha).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me guiado e abençoado em todas as fases deste trabalho e em todos os momentos da minha vida.

Aos professores Aline, José Fernando e Maristela pela orientação, amizade e paciência. Exemplos de grandes profissionais.

Aos professores e funcionários do ICMC-USP, pela colaboração e atenção dispensada. Especialmente a professora Franklina pelos ensinamentos e conselhos.

A todos meus colegas do ICMC-USP, que tornaram esta caminhada mais agradável. Em especial ao Everton, Alfredo, Pâmela, Larissa e Flaviana, por nossos estudos e experiências compartilhadas, por tudo que sofremos ou sorrimos juntos. Também aos colegas de laboratório pela agradável companhia.

Ao grande amigo Willy, companheiro de toda hora, às vezes filho, outras vezes pai, tantas vezes irmão, mais novo ou mais velho, sempre amigo. Obrigado pelo companheirismo e lealdade. A minha gratidão imensa pela amizade, pela sua infinita paciência, confiança, incentivo e pelos valiosos ensinamentos.

Aos colegas da UFGD. Principalmente, a minha amiga Selma e ao Marcos, pelo incentivo e ajuda em um momento tão importante da minha vida.

Neste sentido, honras e terna gratidão à minha família, que com seu amor e ensinamentos sempre me transmitiram esperança, confiança e a alegria de poder estar sempre de cabeça erguida. Mais que agradecer, eu dedico este trabalho à minha família:

Ao Julian e Luciana que além de serem meus irmãos, são meus grandes e melhores amigos. Minha eterna gratidão pelo incentivo, apoio e imenso amor.

Aos meus tios Luiza e Zezinho, que sempre me apoiaram, me escutaram e com os quais sei que sempre poderei contar. A Victória pelo enorme carinho e amor.

A minha sogra Clarice, as minhas cunhadas Juliana e Walny, ao meu cunhado Bruno e aos meus sobrinhos Samuel, Felipe e Mariana pelo carinho e pelas orações.

Especialmente aos meus pais Luiz (em memória) e Neusa, a minha princesinha Beatriz e ao meu esposo e cúmplice Wesley, pelo incentivo, encorajamento e, principalmente, pela oportunidade de estudar e completar mais esta etapa em minha vida. Se cheguei até aqui, foi graças a eles!

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

BEZERRA, V. M. R. **Problemas de empacotamento bidimensional em níveis: estratégias baseadas em modelagem matemática**. 2018. 105 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Nesta tese abordamos o problema de empacotamento em faixas bidimensional em níveis - 2LSP. O 2LSP é um problema de otimização combinatória que, no que diz respeito a modelagem, tem recebido pouca atenção por parte da comunidade científica. Atualmente, o modelo mais competitivo para este problema, até onde sabemos, é o proposto por Lodi et al. em 2004, onde é acrescentado ao problema a restrição de que os itens devem ser alocados formando níveis. Em 2015, um modelo de fluxo para tratar o problema foi apresentado por Mehdi Mrad. A literatura apresenta alguns modelos matemáticos que, embora não seja especificamente para este problema, são modelos eficientes e podem ser adaptados para o 2LSP. Neste trabalho, desenvolvemos novos modelos para o problema, adaptando três modelos de programação linear inteira mista da literatura. Mais ainda, comparamos o desempenho computacional destes novos modelos com os modelos de Lodi et al. e de Mehdi Mrad, usando instâncias clássicas da literatura. Os resultados computacionais mostram que uma das novas formulações matemáticas supera os demais modelos em relação ao número de soluções ótimas. Para finalizar, apresentamos uma aplicação prática com a finalidade de desenvolver uma ferramenta para a geração automática dos planogramas utilizados para a montagem de gôndulas de supermercados. Para a aplicação, apresentamos um modelo de programação inteira mista preliminar que pode ser aplicado para tratar aplicações reais.

Palavras-chave: Problema de corte e empacotamento; Corte guilhotinado; Empacotamento em níveis; Programação inteira; Planogramas.

ABSTRACT

BEZERRA, V. M. R. **Two-dimensional level packing problems: strategies based on mathematical modeling**. 2018. 105 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this thesis we approached the two-dimensional level strip packing problem - 2LSP. 2LSP is a combinatorial optimization problem that, with respect to modeling, has received little attention from the scientific community. To the best of our knowledge, the most competitive model is the one proposed by Lodi et al. in 2004, where the items are packed by levels. In 2015, an arc flow model addressing the problem was proposed by Mehdi Mrad. The literature presents some mathematical models, despite not addressing specifically this problem, they are efficient and can be adapted for the two-dimensional level strip packing problem. In this thesis, we develop new models for the problem by adapting three mixed integer linear programming models from the literature. We also compare the computational performance of these new models with the models of Lodi et al. and Mehdi Mrad, by solving classical instances from the literature. The computational results show that one of the new mathematical formulations outperforms the remaining models with respect to the number of optimal solutions. To conclude, we present a practical application with the purpose of developing a tool for the automatic generation of the planograms used for the assembly of supermarket gondolas. For the application, we present a preliminary mixed integer programming model that can be applied to solve real applications.

Keywords: Cutting and packing problems; Guillotine cutting; Level packing; Integer programming; Planograms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de um problema de corte unidimensional - adaptada de (SILVA, 2008).	7
Figura 2 – Exemplo de um problema de corte bidimensional - adaptada de (SILVA, 2008).	8
Figura 3 – Exemplo de um problema de corte tridimensional - extraída de (SILVA, 2008).	8
Figura 4 – Exemplo da forma dos itens: (a) Irregular e (b) Regular - adaptada de (COELHO, 2011).	9
Figura 5 – Problemas do tipo básico - adaptada de (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007).	13
Figura 6 – Problemas do tipo intermediário - Minimização da entrada - adaptada de (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007).	15
Figura 7 – Exemplo de corte: (a) guilhotinado e (b) não-guilhotinado - adaptada de (COELHO, 2011).	16
Figura 8 – Exemplo de corte guilhotinado: (a) 2-estágios e (b) 3-estágios - adaptada de (COELHO, 2011).	17
Figura 9 – Exemplos de empacotamento: (a) ortogonal e (b) não-ortogonal - adaptada de (COELHO, 2011).	18
Figura 10 – Exemplo de rotação de itens.	18
Figura 11 – Exemplo de alocação dos itens em níveis - adaptada de (COELHO, 2011).	19
Figura 12 – Exemplo de um problema de corte bidimensional retangular com uma dimensão aberta.	20
Figura 13 – Exemplo de sobreposição entre os itens.	21
Figura 14 – Itens retangulares dos tipos i e j	21
Figura 15 – Exemplo no qual os itens não estão completamente contidos no objeto.	21
Figura 16 – Item inteiramente contido no objeto.	22
Figura 17 – Problema de empacotamento em faixas.	23
Figura 18 – (a) Empacotamento em níveis; (b) empacotamento em níveis normalizado (representa o empacotamento utilizado em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), no qual os itens de cada nível são ordenados de forma decrescente pela altura) - adaptada de (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002).	25
Figura 19 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático Lodi et al. (2004).	27
Figura 20 – Grafo associado ao nível π_1	30
Figura 21 – Grafo associado ao nível π_2	30
Figura 22 – Grafo associado ao nível π_3	30

Figura 23 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático proposto por Mehdi Mrad (2015).	30
Figura 24 – Um corte em uma placa de comprimento e largura finito de acordo com o algoritmo de Silva et al.: (a) primeiro estágio e (b) segundo estágio - adaptada de (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010).	36
Figura 25 – O corte de um item do tipo 1 da faixa.	36
Figura 26 – O corte de um item do tipo 2 de uma placa do tipo 4.	37
Figura 27 – Solução ótima do Exemplo 5 obtida pelo o modelo matemático M3.	39
Figura 28 – O corte na posição p produz duas placas k_1 e k_2 - (a) horizontal e (b) vertical (adaptada de (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016)).	40
Figura 29 – Primeiro corte da primeira fase do Algoritmo 3.	44
Figura 30 – Obtenção de uma placa do tipo 6 e uma placa do tipo 1 a partir de uma placa do tipo 8.	45
Figura 31 – Obtenção de duas placas do tipo 3 a partir de uma placa do tipo 6.	45
Figura 32 – Obtenção de duas placas do tipo 65 a partir de uma placa do tipo 3.	45
Figura 33 – Apara para a obtenção de um item do tipo 2	46
Figura 34 – Solução ótima do Exemplo 7 obtida pelo modelo matemático M4.	46
Figura 35 – Avaliação do desempenho da solução primal dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3.	65
Figura 36 – Avaliação do desempenho da solução dual dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3.	65
Figura 37 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 1.	66
Figura 38 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 2.	66
Figura 39 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 3.	66
Figura 40 – Árvore de decisão da categoria <i>cream cheese</i> - extraída da revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2011).	72
Figura 41 – Exemplo de um planograma.	73
Figura 42 – Visualização vertical dos produtos em uma gôndula - adaptada de (NONATO, 2010).	74
Figura 43 – Visualização horizontal dos produtos em uma gôndula com base no fluxo dos <i>shoppers</i> - adaptada de (NONATO, 2010).	74
Figura 44 – (a) Posicionamento do produto e (b) relação entre frentes e quantidade total no nível – adaptada de (HÜBNER; SCHAAAL, 2017b).	78

Figura 45 – Divisão de uma gôndula em três módulos.	83
Figura 46 – Exemplo de uma parte de uma gôndula dividida em dois módulos, onde cada um dos módulos é cortado em 2-estágios.	84
Figura 47 – Salto entre módulos consecutivos.	87
Figura 48 – Salto entre níveis consecutivos.	88
Figura 49 – Salto entre níveis consecutivos dentro de um módulo.	89
Figura 50 – Salto entre módulos consecutivos, considerando os níveis.	89
Figura 51 – Neste caso, temos $\beta_{pi}^{ks} = \beta_{je}^{(k+1)s} = 1$	90
Figura 52 – Aqui, temos que $\beta_{ip}^{ks} = \beta_{ej}^{(k+1)s} = 1$	90
Figura 53 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático parcial (5.1) - (5.29).	92
Figura 54 – Solução do exemplo utilizando o modelo completo (5.1) - (5.39).	94

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo para construção dos grafos.	28
Algoritmo 2 – Algoritmo para geração de cortes e tipos de placas.	38
Algoritmo 3 – Algoritmo para gerar parâmetros e variáveis.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados relativos aos itens.	26
Tabela 2 – Dados relativos aos itens do conjunto S	29
Tabela 3 – Dados relativos aos itens.	33
Tabela 4 – Dados relativos aos itens.	44
Tabela 5 – Problemas-teste de Hopper e Turton (2001).	48
Tabela 6 – Dados relativos aos itens.	49
Tabela 7 – Dados relativos aos itens.	49
Tabela 8 – Dados relativos aos itens.	50
Tabela 9 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004) e M4 para as instâncias da <i>Class2</i> . . .	53
Tabela 10 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 1. . .	54
Tabela 11 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 1. . .	54
Tabela 12 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 1.	55
Tabela 13 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 1. . .	56
Tabela 14 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 2. . .	56
Tabela 15 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 2. . .	57
Tabela 16 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 2.	58
Tabela 17 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 2. . .	58
Tabela 18 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 3. . .	59
Tabela 19 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 3. . .	60
Tabela 20 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 3.	62
Tabela 21 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 3. . .	63
Tabela 22 – Dados relativos aos produtos.	92

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Organização do trabalho	3
2	PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO	5
2.1	Estrutura básica para os PCE	7
2.1.1	<i>Classificação quanto à dimensão</i>	7
2.1.2	<i>Forma dos itens</i>	9
2.2	Classificação dos PCE (Principais tipologias)	9
2.2.1	<i>Tipologia de Wäscher et al. (2007)</i>	11
2.3	O problema de corte e empacotamento retangular bidimensional . .	15
2.3.1	<i>Restrições</i>	16
2.3.2	<i>Definição geral do problema de corte e empacotamento retangular bidimensional</i>	20
3	O PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO EM FAIXAS BIDIMENSIONAL	23
3.1	Formulações matemáticas da literatura	25
3.1.1	<i>Formulação matemática proposta por Lodi et al. (2004)</i>	25
3.1.2	<i>Formulação matemática proposta por Mehdi Mrad (2015)</i>	27
3.2	Formulações matemáticas desenvolvidas	30
3.2.1	<i>Formulações matemáticas M1 e M1desig</i>	31
3.2.2	<i>Formulações matemáticas M2 e M2desig</i>	34
3.2.3	<i>Formulação matemática M3</i>	35
3.2.4	<i>Formulação matemática M4</i>	40
4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	47
4.1	Descrição das instâncias avaliadas	47
4.2	Análise dos experimentos computacionais	52
4.2.1	<i>Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 1</i>	53
4.2.2	<i>Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 2</i>	56
4.2.3	<i>Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 3</i>	58
4.2.4	<i>Análise geral de desempenho</i>	64
4.3	Relaxação linear	65

5	APLICAÇÃO PRÁTICA: ALOCAÇÃO DE PRODUTOS EM GÔNDULAS DE SUPERMERCADOS	69
5.1	Gerenciamento por categorias	70
5.2	O planejamento espacial de prateleiras (gôndulas)	76
5.2.1	<i>O problema de alocação de produtos nas gôndulas</i>	77
5.2.2	<i>Literatura relacionada</i>	78
5.3	Problema abordado	82
5.3.1	<i>Descrição do problema</i>	82
5.3.2	<i>Formulação matemática</i>	83
5.3.3	<i>Considerações finais</i>	94
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS	97
	REFERÊNCIAS	99

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos matemáticos para a resolução de problemas de corte e empacotamento tiveram início em 1939 com o matemático e economista soviético Leonid Vitaliyevich Kantorovich (ver (KANTOROVICH, 1960)) e ganhou destaque durante a década de 60 com os trabalhos de (GILMORE; GOMORY, 1961; GILMORE; GOMORY, 1963; GILMORE; GOMORY, 1965). Desde então houve um crescimento rápido no número de trabalhos que tratam tais problemas. Este fato é devido ao grande número de aplicações reais que o problema modela e que surgem em indústrias de vestuários, papéis, metalúrgicas, bem como, no carregamento de containers, paletes, entre outros. Discussões sobre as diversas aplicações para problemas de corte e empacotamento podem ser encontradas em (DYCKHOFF, 1990), (DOWSLAND; DOWSLAND, 1992), (HOPPER; TURTON, 2001b), (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002), (LODI; MARTELLO; VIGO, 2002), (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007), (OLIVEIRA; WÄSCHER, 2007), (RIFF; BONNAIRE; NEVEU, 2009), (BENNEL; OLIVEIRA, 2009), (COFFMAN *et al.*, 2013) e (BORTFELDT; WÄSCHER, 2013).

Em várias aplicações industriais é necessário alocar um conjunto de itens retangulares em unidades retangulares padronizadas maiores (objetos) com o objetivo de minimizar o desperdício de matéria-prima. Por exemplo, nas indústrias de papel ou tecido, os componentes retangulares (itens) precisam ser cortados a partir de um rolo de material e o objetivo é obter todos os itens utilizando o comprimento mínimo do rolo. Estes problemas de otimização são conhecidos na literatura como: problemas de empacotamento em faixas bidimensional (*two-dimensional strip packing problem* - 2SP). A maioria das contribuições da literatura são dedicadas ao caso em que os itens a serem empacotados possuem orientação fixa com respeito à unidade em estoque (faixa ou placa). Além disso, ao 2SP são acrescentadas restrições relativas ao tipo de corte (guilhotinado ou não), limitação do número de cortes (estágios), entre outras. Tais restrições são impostas pelas características dos equipamentos utilizados no processo de corte. Mais ainda, em (LODI; MARTELLO; VIGO, 1999), (LODI, 1999), (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002) e (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) é acrescentada ao problema a restrição de que os itens devem ser

alocados formando níveis (ou prateleiras). Neste trabalho, consideramos que os itens são alocados de forma ortogonal na faixa e possuem orientação fixa, o corte é do tipo guilhotinado feito em 2-estágios não exato e os itens são alocados formando níveis. Logo, o problema abordado nesta tese é denotado por: problemas de empacotamento em faixas bidimensional em níveis (*two-dimensional level strip packing problem* - 2LSP).

Por se tratar de problemas de otimização combinatória e pertencerem à classe NP-Difícil (conforme (BROWN; BAKER; KATSEFF, 1982) e (JR; DOWNEY; WINKLER, 2002)), as principais pesquisas são baseadas em métodos heurísticos. A maior parte dos métodos heurísticos para o 2SP encontram uma solução para o empacotamento dos itens na faixa, da esquerda para a direita, em linhas que formam níveis. O primeiro nível é o fundo da faixa, e os itens são alocados com sua base nela. Os itens começam a ser inseridos neste primeiro nível. A altura do nível é determinada pela altura do item mais alto. Assim, o próximo nível se inicia na linha horizontal desenhada no topo do item mais alto do nível anterior, e assim por diante (ver (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002)). Este tipo de empacotamento tem grande importância prática, pois na maioria das aplicações de corte, é necessário que os padrões sejam de tal modo que os itens possam ser obtidos por meio de uma sequência de cortes de ponta-a-ponta paralelas às bordas da faixa (cortes guilhotinados), e é facilmente visto que o empacotamento em nível cumpre esta restrição.

1.1 Objetivos

Podemos notar que, ao longo dos anos, diversos métodos têm sido desenvolvidos com o objetivo de encontrar boas soluções para os problemas de corte e empacotamento. Dentre eles, destacam-se alguns algoritmos de nível (tais como, *Next Fit*, *First-Fit*, *Best-Fit* etc), bem como a combinação destes algoritmos associados à estratégias metaheurísticas. Se tratando dos PCE bidimensionais guilhotinados, podemos diferenciar os algoritmos entre os de uma fase e duas fases e estes podem ou não ser orientados a níveis (ver (LODI, 1999)). Em (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002) foi realizada uma revisão geral de métodos heurísticos e exatos, bem como limitantes inferiores para o 2SP. Existem poucos trabalhos na literatura que apresentam modelos matemáticos para o 2LSP. Atualmente, o modelo de programação linear inteira mais competitivo para este problema, até onde sabemos, é o proposto por (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004). Em (MRAD, 2015), um modelo de fluxo foi apresentado para tratar o problema.

O objetivo principal deste trabalho de doutorado é analisar e desenvolver novas formulações matemáticas para o 2LSP. Para tanto, revisamos alguns modelos matemáticos para os problemas de corte e empacotamento, os quais foram adaptados para o 2LSP. As novas formulações matemáticas foram obtidas por meio de alterações nos modelos apresentados em (LODI; MONACI, 2003), (FURINI *et al.*, 2012), (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010) e (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016). Além disso, realizamos experimentos computacionais

utilizando-se 537 instâncias da literatura com a finalidade de analisar e comparar o desempenho dos modelos propostos e os modelos da literatura.

Para finalizar, apresentamos uma aplicação prática com o objetivo de desenvolver uma ferramenta para a geração automática dos planogramas utilizados para a montagem de gôndulas de supermercados. Um modelo de programação inteira mista preliminar foi desenvolvido para tratar aplicações reais.

1.2 Organização do trabalho

Esta tese de doutorado apresenta a seguinte estrutura:

- Capítulo 1 (Introdução): de modo geral, neste capítulo, apresentamos o problema e o objetivo principal deste trabalho.
- Capítulo 2 (Problemas de corte e empacotamento): este capítulo é destinado a uma revisão bibliográfica sobre os problemas de corte e empacotamento (PCE), em específico sobre o problema estudado neste trabalho. Nesta revisão definimos uma estrutura básica e apresentamos as principais tipologias propostas, pela literatura, para unificar as notações existentes para os PCE.
- Capítulo 3 (O problema de empacotamento em faixas bidimensional): aqui definimos o problema central deste doutorado. Também descrevemos o modelo matemático apresentado por (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) e o modelo de fluxo de arco introduzido em (MRAD, 2015) para o 2LSP. Além disso, apresentamos as novas formulações desenvolvidas para o problema.
- Capítulo 4 (Experimentos computacionais): neste capítulo, descrevemos as 537 instâncias da literatura utilizadas, apresentamos os resultados computacionais relativos aos testes realizados em um *solver* de otimização de alto desempenho (CPLEX 12.6), bem como os resultados computacionais da relaxação linear dos modelos descritos no Capítulo 3.
- Capítulo 5 (Aplicação prática: alocação de produtos em gôndulas de supermercados): aqui apresentamos uma aplicação prática com a finalidade de desenvolver uma ferramenta para a geração automática dos planogramas utilizados para a montagem de gôndulas de supermercados. Esta aplicação contou com a colaboração de uma rede de supermercados do interior do estado de São Paulo.
- Capítulo 6 (Conclusão e perspectivas para trabalhos futuros): por fim, são apresentadas as principais conclusões e as perspectivas para futuras pesquisas.

PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO

Os problemas de corte e os problemas de empacotamento possuem em comum o fato de se dividir a matéria-prima ou espaço (objetos grandes) em partes menores (itens) de dimensões e formas definidas. Por exemplo, pode-se pensar em cortar couro de maneira a ter menos retalhos, ou acomodar vários tipos de alimentos dentro de uma caixa, mas sempre pensando na melhor utilização do material ou do espaço disponível.

No caso dos problemas de corte de estoque os objetos grandes são dados por materiais sólidos cortados em pequenos itens como peças. Materiais usuais são papel e celulose, metal, vidro, madeira, plásticos, couro e têxteis (DYCKHOFF, 1990). O objetivo é minimizar os desperdícios que têm um impacto direto nos custos de produção.

Os problemas de empacotamento, em sentido estrito, são caracterizados por objetos grandes, definidos como o espaço vazio útil dos veículos, carros, paletes, contentores, *bins*, e assim por diante. Empacotar itens pequenos nestes objetos também pode ser considerado como cortar o espaço vazio dos grandes objetos em partes de espaços vazios, alguns dos quais estão ocupados por pequenos itens, sendo o outro espaço ocioso (DYCKHOFF, 1990). É necessário que se planeje como será feito o empacotamento, de modo que se minimize este espaço ocioso.

Devido a forte relação entre os problemas de corte e os problemas de empacotamento, estes são estudados de forma conjunta, pois possuem a mesma estrutura e podem ser descritos de maneira similar. Na literatura, tais problemas são classificados como problemas de corte e empacotamento - PCE. Estes problemas são, em geral, problemas de otimização combinatória e buscam determinar um arranjo ótimo de peças menores (as quais são denominadas itens) dentro de peças maiores (objetos), obedecendo certas restrições e maximizando a ocupação dos objetos ou minimizando desperdícios.

Pode-se dizer que os trabalhos científicos sobre os PCE se intensificaram a partir dos anos

60. Desde então tem havido um crescimento rápido do número de trabalhos que tratam o problema sob vários aspectos. É possível observar que a maioria das pesquisas nesta área tem caminhado no sentido de desenvolver métodos heurísticos, visto que tais problemas são classificados como NP-Difíceis (conforme (BROWN; BAKER; KATSEFF, 1982) e (JR; DOWNEY; WINKLER, 2002)), o que significa que ainda não há, e possivelmente não haverá de todo, um algoritmo exato eficiente que o solucione em tempo polinomial. Logo, do ponto de vista computacional, o uso dos métodos exatos torna-se bastante restrito.

O matemático e economista soviético Leonid Vitaliyevich Kantorovich foi o pioneiro no estudo dos problemas de corte e empacotamento (PCE) por meio do seu trabalho "*Mathematical methods of organizing and planning production*" (KANTOROVICH, 1960), publicado em 1939 (na versão original em russo), que só ficou conhecido no ocidente na década de 60, após sua publicação em inglês. Neste trabalho, Kantorovich apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção, além de métodos de solução para os problemas apresentados. Dentre os diversos problemas abordados neste trabalho, está o problema de corte de estoque unidimensional. Os estudos deste problema aprimoraram-se durante a década de 60, sendo que os trabalhos de maior repercussão na literatura foram os trabalhos (GILMORE; GOMORY, 1961; GILMORE; GOMORY, 1963; GILMORE; GOMORY, 1965).

Em 1961, (GILMORE; GOMORY, 1961) apresentaram uma formulação matemática para o problema de corte de estoque unidimensional e propuseram o Método Simplex com geração de colunas para a solução da relaxação linear do problema que, pela primeira vez, resolveu problemas de maior porte para o caso unidimensional. Em 1963, (GILMORE; GOMORY, 1963) introduziram um novo método para o problema da mochila e apresentaram uma nova formulação para o problema de corte de estoque unidimensional, realizando um estudo de caso no corte de papel. Neste trabalho, foi acrescentada uma nova restrição ao problema, o número limite de lâminas na máquina. Em (GILMORE; GOMORY, 1965), os métodos descritos nos trabalhos anteriores foram adaptados para o problema de corte de estoque bidimensional, impondo algumas restrições, a saber: o corte guilhotinado, estagiado e irrestrito.

Desde então houve um crescimento rápido no número de trabalhos que tratam os PCE. Este fato é devido ao grande número de aplicações reais que o problema modela e que surgem em indústrias de vestuários, papel, metalúrgicas, bem como, no carregamento de containers, paletes, entre outros. Discussões sobre as diversas aplicações para problemas de corte e empacotamento podem ser encontradas em (DYCKHOFF, 1990), (DOWSLAND; DOWSLAND, 1992), (HOPPER; TURTON, 2001b), (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002), (LODI; MARTELLO; VIGO, 2002), (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007), (OLIVEIRA; WÄSCHER, 2007), (RIFF; BONNAIRE; NEVEU, 2009), (BENNELL; OLIVEIRA, 2009), (COFFMAN *et al.*, 2013) e (BORTFELDT; WÄSCHER, 2013).

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre os PCE. Na Seção 2.1 introduzimos

uma estrutura básica para os PCE. As principais tipologias usadas, pela literatura, para classificar os PCE estão na Seção 2.2 e, na Seção 2.3, é apresentada uma revisão sobre o problema de corte e empacotamento retangular bidimensional, o qual é objeto de estudo deste trabalho.

2.1 Estrutura básica para os PCE

Nesta seção apresentamos uma estrutura lógica básica para os PCE baseada nas dimensões relevantes do objeto e a forma dos itens.

2.1.1 Classificação quanto à dimensão

A estrutura básica dos PCE de acordo com a dimensão é apresentada segundo (DYCKHOFF, 1990). O autor considera a dimensão como o critério mais importante na classificação dos problemas. Este critério é definido pelo número mínimo de dimensões relevantes necessárias para descrever o problema geometricamente.

- **Problemas unidimensionais**

Dizemos que um problema é unidimensional quando apenas uma dimensão (largura) do objeto é relevante no processo de corte, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de um problema de corte unidimensional - adaptada de (SILVA, 2008).

O problema de corte unidimensional consiste em obter itens de tamanho específico a partir de um objeto maior, com o objetivo de maximizar a utilização deste objeto, isto é, a soma dos comprimentos dos itens obtidos deve ser próxima do comprimento total do objeto. Este tipo de problema possui várias aplicações industriais, como por exemplo, na indústria de papel ((GILMORE; GOMORY, 1961), (GILMORE; GOMORY, 1963)), onde grandes rolos são cortados em rolos de comprimentos menores e de mesmo diâmetro.

- **Problemas bidimensionais**

O problema é dito bidimensional quando duas dimensões (largura e altura) do objeto são relevantes no processo de corte. Podemos encontrar este tipo de problema em indústrias de placas de madeira, vidro, entre outras, onde placas retangulares grandes precisam ser

cortadas em peças menores (itens) as quais compõem os produtos demandados, ver Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de um problema de corte bidimensional - adaptada de (SILVA, 2008).

Apresentamos mais detalhes sobre os problemas bidimensionais na Seção 2.3.

• Problemas tridimensionais

No problema tridimensional três dimensões (largura, altura e comprimento) do objeto são relevantes no processo de corte. Neste tipo de problema, é necessário alocar itens tridimensionais dentro de objetos maiores, como mostra a Figura 3. Tal problema, é aplicado, por exemplo, no corte de espumas para a produção colchões e travesseiros, ou ainda, no empacotamento de caixas em galpões ou de cargas em contêineres.

Figura 3 – Exemplo de um problema de corte tridimensional - extraída de (SILVA, 2008).

• Problemas 1,5 e 2,5-dimensionais e multidimensionais

Ainda considerando o aspecto geométrico, podemos encontrar problemas dos seguintes tipos:

- **1,5-dimensional:** é um problema bidimensional no qual uma das dimensões é variável e a outra é fixa. Como exemplo, podemos considerar um rolo de tecido cuja largura é fixa e o comprimento é suficientemente grande para a confecção de camisetas. Neste exemplo, o comprimento utilizado deve ser minimizado.
- **2,5-dimensional:** é um problema tridimensional no qual uma das dimensões é variável e as outras duas são fixas. Por exemplo, considere um contêiner com largura e comprimento fixos e altura suficientemente grande para acomodar um determinado volume de carga. Neste problema, o objetivo é minimizar a altura utilizada do contêiner.

Na literatura, os problemas 1,5-dimensionais e 2,5-dimensionais também são denotados por: $n,1/2$ -dimensional, onde n indica o número de dimensões fixas do problema. Entretanto, nos dias de hoje, a maioria dos autores preferem utilizar a classificação 2D ou 3D para descrever a dimensão dos problemas.

- **multidimensional:** é um problema onde mais de três dimensões do objeto a ser cortado são significativas no processo de corte. Por exemplo, o problema de alocação de tarefas.

2.1.2 Forma dos itens

Os itens dos PCE podem ter sua forma geométrica regular ou irregular, como podemos observar na Figura 4.

Figura 4 – Exemplo da forma dos itens: (a) Irregular e (b) Regular - adaptada de (COELHO, 2011).

A grande maioria dos problemas considerados na literatura trata de itens que possuem formas regulares, especialmente formas retangulares. Estes problemas aparecem, por exemplo, em indústrias que realizam corte de madeiras e vidros. Tais problemas serão abordados na Subseção 2.3.2. Os itens irregulares são caracterizados por apresentarem forma não-convexa e assimétrica. É comum encontrarmos este tipo de problema em indústrias que trabalham com tecido, calçados, entre outros.

2.2 Classificação dos PCE (Principais tipologias)

Se vistos de forma separada, os problemas de corte e os problemas de empacotamento, possuem uma estrutura em comum. De forma geral, estes problemas possuem dois conjuntos de entrada:

- um conjunto de objetos grandes, que chamamos de objetos (ou placas); e
- um conjunto de objetos pequenos (de tamanho menor que os objetos), denominados itens.

Tais conjuntos (ou seja, os objetos e os itens) podem ser definidos em uma, duas, três ou mais dimensões geométricas. Alguns ou todos os itens são selecionados e agrupados em um ou mais conjuntos e são atribuídos aos objetos de tal forma que:

- todos os itens de um conjunto ficam inteiramente dentro do objeto ao qual foram atribuídos;
- e
- os itens não se sobrepõem.

Além disso, é dada uma função objetivo e esta deve ser otimizada. Note que uma solução para o problema pode resultar na utilização de alguns ou de todos os objetos, e alguns ou todos os itens, respectivamente.

Esta estrutura serve de base para todos os PCE. De acordo com (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007), cinco subproblemas podem ser distinguidos, os quais precisam ser resolvidos simultaneamente a fim de obter o valor ótimo:

1. Problema de seleção de objetos

Os objetos (*bins*, faixas etc) possuem características diferentes, tais como, dimensões, materiais, custos, entre outros.

2. Problema de seleção de itens

Alguns itens possuem finalidades diferentes, tendo prioridade em relação aos outros.

3. Problema de agrupamento de itens

Determinado conjunto de itens não podem ser empacotados juntos. Por exemplo, produtos alimentícios e produtos químicos.

4. Problema de alocação dos itens nos objetos

Alguns itens tem a restrição de alocação somente em objetos específicos. Por exemplo, carga de caminhões.

5. Problema de *layout*

Os itens devem ser dispostos nos objetos, respeitando as condições geométricas. Disposição de produtos em gôndulas de supermercados, por exemplo.

Tipos especiais de PCE são caracterizados por propriedades adicionais.

Devido à diversidade dos problemas que podem ser encontrados sob a formulação geral dos PCE, (DYCKHOFF, 1990) e (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007) propuseram tipologias com o objetivo de padronizar e classificar esta diversidade.

A princípio, a tipologia de Dyckhoff foi considerada uma excelente forma de organizar e classificar os PCE encontrados na literatura. Entretanto, ao passar dos anos, tornou-se limitada

para caracterizar os novos problemas, o que motivou a pesquisa por uma nova tipologia. Segundo (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007), esta tipologia é parcialmente inconsistente e sua aplicação pode ter resultados confusos. De acordo com estes autores, uma das desvantagens da tipologia de Dyckhoff é a classificação para o problema de empacotamento em faixas bidimensional. Além disso, a notação torna-se ainda mais questionável para problemas bidimensionais onde a largura e a altura são variáveis, e, do mesmo modo, para os problemas tridimensionais, nos quais a largura, o comprimento e/ou altura são variáveis. Deste modo, os autores sugeriram modificações na tipologia de Dyckhoff, conforme é apresentado na próxima subseção.

2.2.1 Tipologia de Wäscher et al. (2007)

Baseados na tipologia de Dyckhoff, Wäscher et al. apresentaram uma nova tipologia para classificar os PCE. Esta nova tipologia trata-se de uma classificação mais consistente e abrange uma quantidade maior de problemas, que antes não fazia parte da classificação apresentada em (DYCKHOFF, 1990). Além de ser utilizada em vários trabalhos, a tipologia introduzida em (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007) também foi adotada pelo *European Special Interest Group on Cutting and Packing* (ESICUP) para fins de classificação de trabalhos. Tal tipologia classifica os PCE de acordo com cinco critérios: Dimensionalidade, Tipo de atribuição, Variedade dos objetos, Variedade dos itens e Forma dos itens. A seguir apresentaremos esses cinco critérios de forma detalhada:

1. Dimensionalidade

Este critério foi adotado diretamente da tipologia proposta por (DYCKHOFF, 1990). A classificação quanto a dimensão introduzida por (DYCKHOFF, 1990) pode ser vista em 2.1.1.

2. Tipo de atribuição

Neste critério, como em (DYCKHOFF, 1990), os problemas apresentam dois casos básicos, no entanto, a fim de evitar as notações alemãs "*Verladeproblem*" (V) e "*Beladeproblem*" (B), os autores referem-se às categorias, de um modo geral, como "minimização da entrada" e "maximização da saída", respectivamente.

- maximização da saída

Neste tipo de problema, a quantidade de objetos disponíveis é limitada e, portanto, não é suficiente para acomodar todos os itens. Deste modo, é necessário selecionar os itens de modo a maximizar a utilização dos objetos (isto é, todos os objetos serão utilizados).

- minimização da entrada

Aqui, os objetos disponíveis são suficientes para alocar todos os itens, sendo necessário alocar os itens buscando minimizar a quantidade de objetos utilizados.

A fim de superar as limitações da tipologia de (DYCKHOFF, 1990), os critérios **Variedade dos objetos** e **Variedade dos itens** foram redefinidos e/ou complementados com novas propriedades, além disso, foi acrescentado o critério **Forma dos itens**. Tais critérios serão descritos a seguir:

3. Variedade dos objetos

No que diz respeito à variedade dos objetos é considerado os seguintes casos:

- um único objeto

Neste caso, o conjunto de objetos é constituído por um único elemento. A extensão do objeto pode ser fixada em todas as dimensões relevantes para o problema (**todas as dimensões são fixas**), ou a sua extensão pode ser variável em uma ou mais dimensões (**uma ou mais dimensões são variáveis**). A primeira categoria é idêntica à da tipologia de Dyckhoff, tipo (O), enquanto a segunda categoria representa uma extensão do conjunto dos tipos elementares (ver (DYCKHOFF, 1990)).

- vários objetos

No que diz respeito ao tipo de problema que é descrito na literatura, no caso de vários objetos, não parece necessário distinguir entre as dimensões fixas e variáveis; logo, serão consideradas apenas dimensões fixas. Podemos distinguir entre objetos **idênticos**, **pouco heterogêneos** e **muito heterogêneos**. Ao fazer isso, estamos novamente ampliando a tipologia de (DYCKHOFF, 1990), que só identifica os objetos como idênticos - tipo (I) e diferentes formas - tipo (D).

4. Variedade dos itens

No que diz respeito à variedade dos itens, podemos distinguir os problemas em três casos:

- itens idênticos;

Esta categoria é idêntica ao tipo elementar (C) da tipologia de (DYCKHOFF, 1990).

- itens pouco heterogêneos;

Esta categoria é idêntica ao tipo elementar (R) da tipologia de (DYCKHOFF, 1990).

- itens muito heterogêneos.

Esta categoria inclui os tipos elementares (M) e (F) da tipologia de (DYCKHOFF, 1990).

5. Forma dos itens

Os autores classificam os problemas que possuem duas ou três dimensões de acordo com a forma de seus itens:

- regulares;
- irregulares.

Problemas que permitem *layouts* não ortogonais e/ou misturas de itens regulares e irregulares são encarados como problemas variantes.

Com base no objetivo do problema e nos critérios descritos anteriormente, a classificação dos PCE proposta por (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007) é definida por 3 tipos:

1. **Tipo básico:** os critérios "tipo de atribuição" e "variedade dos itens" são combinados para definir a estrutura básica dos PCE. Estes tipos de problemas básicos (que já representam tipos combinados no sentido de (DYCKHOFF, 1990)), fornecem os objetos fundamentais para a introdução de uma nova nomenclatura, mais amplamente aceita. Nomes existentes foram adaptados na medida do possível, em particular, onde não havia nenhuma ou apenas uma pequena probabilidade de que seu uso resultaria em erros de interpretação de seu conteúdo. A Figura 5 representa as combinações relevantes e os tipos de problemas básicos correspondentes.

Figura 5 – Problemas do tipo básico - adaptada de (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007).

Inicialmente os problemas são subdivididos em duas categorias: "maximização da saída" e "minimização da entrada", as quais são descritas a seguir:

- maximização da saída

De acordo com a Figura 5, podemos distinguir os seguintes problemas do tipo básico:

- Problema de Empacotamento de Itens Idênticos (IIPP - *Identical Item Packing Problem*): esta categoria de problemas consiste na atribuição do maior número possível de itens iguais para um determinado conjunto (limitado) de objetos. Como todos os itens são iguais, não existe de fato um problema de seleção de

itens, além disto, não ocorre nenhum problema de agrupamento ou de distribuição. Em outras palavras, o problema é reduzido a um arranjo dos itens (idênticos) em cada um dos objetos. Por exemplo, o Problema de Paletização (do produtor).

- Problema de Alocação (PP - *Placement Problem*): nesta categoria de problemas uma variedade pouco heterogênea de itens é atribuída a um determinado conjunto (limitado) de objetos. A produção dos itens tem que ser maximizada ou, alternativamente, o desperdício correspondente tem que ser minimizado. Por exemplo, o Problema de Cortes Retangulares Bidimensional.
 - Problema da Mochila (KP - *Knapsack Problem*): este problema representa uma categoria a qual é caracterizada por uma variedade muito heterogênea de itens que precisam ser atribuídos a um determinado conjunto (limitado) de objetos. Como a disponibilidade dos objetos é limitada, nem todos os itens podem ser alocados. Busca-se maximizar a soma dos valores dos itens alocados, conforme a função objetivo adotada.
- minimização da entrada

Os problemas a seguir são considerados do tipo básico:

- Problema de Dimensão Aberta (ODP - *Open Dimension Problem*): esta categoria de problemas é definida pelo fato de que um conjunto de itens deve ser completamente alocado em um único objeto. Nesta categoria, ao menos uma das dimensões do objeto é considerada variável. Deste modo, a decisão que envolve o problema diz respeito à extensão desta dimensão. Em outras palavras, como neste tipo de problema apenas uma parte do objeto é suficiente para alocar todos os itens, o objetivo do problema é minimizar a dimensão variável do objeto, que pode ser a altura, o comprimento ou o volume, dependendo da situação tratada.
- Problema de Corte de Estoque (CSP - *Cutting Stock Problem*): problemas desta categoria exigem que um conjunto de itens pouco heterogêneos seja completamente alocados na menor quantidade possível de objetos.
- Problema de Empacotamento em Bins (BPP - *Bin Packing Problem*): esta categoria de problemas caracteriza-se por um conjunto de itens muito heterogêneos que devem ser completamente alocados de tal forma que o valor (número ou tamanho total) dos objetos necessários seja minimizado.

2. **Tipo intermediário:** a fim de definir a estrutura intermediária, o critério "tipo de objetos" é combinado com os problemas do tipo básico apresentados anteriormente. A Figura 6 apresenta a estrutura intermediária para os problemas que possuem como objetivo geral a minimização da entrada. O problema abordado no presente trabalho está destacado na Figura 6.

Variedade dos Itens		Pouco Heterogêneo	Muito Heterogêneo
Variedade dos Objetos	Idênticos	<i>Single Stock Size Cutting Stock Problem (SSSCSP)</i>	<i>Single Bin Size Bin Packing Problem (SBSBPP)</i>
	Pouco Heterogêneo	<i>Multiple Stock Size Cutting Stock Problem (MSSCSP)</i>	<i>Multiple Bin Size Bin Packing Problem (SBSBPP)</i>
	Muito Heterogêneo	<i>Residual Cutting Stock Problem (RCSP)</i>	<i>Residual Bin Packing Problem (RBPP)</i>
Um único objeto com dimensão variável		<i>Open Dimensional Problem ODP</i>	

Figura 6 – Problemas do tipo intermediário - Minimização da entrada - adaptada de (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007).

3. **Tipo refinado:** para finalizar, os critérios "dimensionalidade" e "forma dos itens" são acrescentados à estrutura intermediária do problema, sendo definida, assim, a classe do mesmo.

Portanto, o resultado final da classificação proposta por (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007) é obtido através da regra abaixo:

{1,2,3}-D {retangular, circular, ..., irregular} {classificação intermediária}.

De acordo com esta classificação, o presente trabalho abordará o:

- 2D - (Rectangular) Open Dimensional Problem - ODP: Problema de Corte Bidimensional (retangular) com uma dimensão aberta.

Tal problema está detalhado no Capítulo 3.

2.3 O problema de corte e empacotamento retangular bidimensional

Nos PCE bidimensionais duas dimensões são consideradas relevantes no processo de corte, conforme visto na Subseção 2.1.1. O modo como um objeto em estoque é cortado para produzir os itens demandados é denominado **padrão de corte**. Se considerarmos que a quantidade de tipos de itens demandados é n , então a um padrão de corte k é associado um vetor

n -dimensional a_k , onde cada coordenada α_{jk} contabiliza os itens do tipo j presentes no padrão de corte k , como mostra a expressão 2.1:

$$a_k = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{nk})^T. \quad (2.1)$$

Nos problemas bidimensionais, os padrões de corte precisam obedecer diversas restrições físicas impostas pelo tipo de material (por exemplo, no caso da madeira, quando é necessário o corte ao longo de suas fibras) e aos equipamentos de corte (por exemplo, quando há limitação no número de facas). As restrições mais relevantes para este tipo de problema são descritas na próxima subseção.

2.3.1 Restrições

Muitas restrições para os padrões de corte/empacotamento surgem das aplicações práticas destes problemas. Estas restrições são específicas para cada dimensionalidade ou tipo de geometria. Se os itens do problema possuírem formas retangulares, as restrições podem estar ligadas a orientação dos itens no objeto, a forma com que estes itens serão encaixados, o tipo de corte permitido etc. As restrições que aparecem com mais frequência na literatura são:

- **Tipos de corte:** esta restrição está relacionada ao tipo de corte permitido durante o processo. Duas estruturas básicas são: corte guilhotinado e corte não-guilhotinado.
 - Corte guilhotinado: é feito paralelamente a um dos lados do objeto e por toda sua extensão, dividindo-o sempre em duas partes. Quando o objeto envolvido no problema possui forma retangular, a cada corte são gerados dois retângulos (COELHO, 2011), como podemos ver na Figura 7 (a).
 - Corte não-guilhotinado: acompanha o contorno do item sem descaracterizar o objeto (COELHO, 2011), como na Figura 7 (b).

Figura 7 – Exemplo de corte: (a) guilhotinado e (b) não-guilhotinado - adaptada de (COELHO, 2011).

- **Estágios de corte:** no corte guilhotinado pode ocorrer mudanças ortogonais na direção do corte. Cada uma destas mudanças, isto é, cada sequência de cortes guilhotinados, feitos na mesma direção, é chamada de estágio de corte. Logo, cada estágio corresponde ao número de vezes que se pode mudar a direção em que o corte é realizado no objeto. Esta restrição está ligada ao número de estágios de corte permitido. Se o problema, por exemplo, está limitado a ter n estágios, o corte guilhotinado é dito ser feito em $n - 1$ rotações. O que significa que são feitas $n - 1$ rotações de 90° no objeto durante o corte (dado que a guilhotina é fixa).

Os cortes guilhotinados, com estágios limitados, são muito comuns na indústria, devido ao intenso uso de guilhotinas. A Figura 8 (a) apresenta um exemplo de corte guilhotinado 2-estágios, neste tipo de corte apenas uma mudança na direção do corte é necessária. A Figura 8 (b) apresenta um exemplo de corte guilhotinado 3-estágios. Observe que os cortes iniciais, realizados na horizontal e paralelos entre si, são considerados do 1º estágio. Os cortes realizados nos retângulos obtidos no 1º estágio (ortogonais aos cortes iniciais, ou seja, realizados na vertical) são de 2º estágio, e assim por diante.

Figura 8 – Exemplo de corte guilhotinado: (a) 2-estágios e (b) 3-estágios - adaptada de (COELHO, 2011).

Observação 1. Após o corte é possível que não se obtenha o item final esperado, sendo necessário ainda, em um processo pós-corte, realizar recortes em volta destes itens. Nestes casos, o corte final realizado para "aparar" o item não é contado como um novo estágio e diz-se um padrão de corte não exato.

- **Orientação dos itens:** tal restrição está relacionada à forma com que os itens poderão ser alocados no objeto. A Figura 9 mostra dois exemplos comuns de empacotamento.

No empacotamento (a) da Figura 9, os itens são encaixados de forma ortogonal no objeto, ou seja, os lados dos itens deverão estar paralelos ou ortogonais aos lados do objeto. Já no empacotamento (b), apesar dos itens serem retangulares, eles estão alocados no objeto de forma não-ortogonal, isto é, seus lados não estão alinhados com os lados do objeto, neste caso, os itens poderão ser alocados em qualquer ângulo.

Figura 9 – Exemplos de empacotamento: (a) ortogonal e (b) não-ortogonal - adaptada de (COELHO, 2011).

Geralmente, os problemas que exigem ortogonalidade são mais comuns quando os itens e objetos tem forma retangulares.

- **Rotação dos itens:** esta restrição trata-se de uma estratégia utilizada pelas indústrias para reduzir as perdas durante o processo de corte. Ela está relacionada ao fato de permitir que os itens sejam rotacionados ou não. Como podemos observar na Figura 10 (c), a rotação dos itens pode permitir um melhor aproveitamento da matéria-prima, entretanto, a complexidade de resolução do problema irá aumentar uma vez que teremos que levar em consideração as rotações possíveis. No caso dos itens retangulares teremos que considerar somente a rotação ortogonal.

Figura 10 – Exemplo de rotação de itens.

Em problemas em que os itens não são rotacionados, dizemos que eles possuem orientação fixa, caso contrário, dizemos que os itens têm rotação permitida.

- **Alocação dos itens em níveis:** tal restrição relaciona-se ao fato dos itens serem alocados no objeto formando níveis. A Figura 11 apresenta um exemplo de alocação de um conjunto de itens em um objeto, considerando o corte guilhotinado com primeiro estágio na horizontal, formando 4 níveis.

Figura 11 – Exemplo de alocação dos itens em níveis - adaptada de (COELHO, 2011).

Note que o objetivo deste problema é encontrar a melhor forma de posicionar um conjunto de itens em um retângulo de dimensão maior, de modo que a altura utilizada deste retângulo seja a menor possível.

- **Quantidade de itens por padrão:** esta restrição é relativa à limitação na geração dos itens. Quando existe um limite para o número máximo de vezes que um determinado item pode ser cortado a partir do objeto, considera-se que o corte é restrito (problema restrito). Caso contrário, trata-se de um problema irrestrito (ANDRADE, 2009).
- **Objetivos:** os objetivos relacionados aos PCE podem envolver os itens, o objeto, os padrões de corte, ou ainda o processo de alocação. É possível diferenciar os inúmeros trabalhos encontrados na literatura por meio da função objetivo tratada. Esta função relaciona-se com o fato de maximizar ou minimizar algum critério (COELHO, 2011). Exemplos de critérios de otimização são:
 - Maximização da quantidade de itens produzidos;
 - Maximização do lucro com a qualidade dos processos envolvidos;
 - Minimização do desperdício de matéria-prima;
 - Minimização do número de troca de padrões;
 - Minimização da quantidade de objetos utilizados;
 - Minimização da utilização do objeto.

2.3.2 Definição geral do problema de corte e empacotamento retangular bidimensional

O problema de corte e empacotamento retangular bidimensional caracteriza-se pelo corte/empacotamento de peças retangulares maiores para a obtenção de peças retangulares menores com a finalidade de atender uma demanda específica. Em geral, o processo de corte/empacotamento implica em perda de matéria-prima o que influencia diretamente no aumento dos custos da produção. Este problema pode ser definido do seguinte modo:

Definição 1. Um conjunto de n tipos distintos de itens retangulares, cada um com largura w_i , altura h_i e valor v_i , para $i = 1, \dots, n$ devem ser alocados, numa quantidade mínima de d_i^L unidades e máxima de d_i^U unidades, em um conjunto de m objetos retangulares grandes, cada um com largura W_j , altura H_j e valor V_j , para $j = 1, \dots, m$ disponíveis numa quantidade limitada de D_j unidades.

Dependendo de n , d_i^L , d_i^U , m , W_j , H_j , D_j , e do objetivo do problema pode-se obter classificações distintas de acordo com a tipologia introduzida em (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007) (ver Subseção 2.2.1). Por exemplo, se considerarmos $n = 2$, $d_1^L = 3$, $d_1^U = 3$, $d_2^L = 4$, $d_2^U = 4$, $m = 1$, $H_1 = \infty$, $D_1 = 1$, e o objetivo de minimizar a altura H_1 utilizada para alocar os itens, temos um 2D - *Rectangular open dimensional problem* (ODP) - Problema de corte bidimensional retangular com uma dimensão aberta, como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 – Exemplo de um problema de corte bidimensional retangular com uma dimensão aberta.

Para caracterizar um problema também é necessário que este atenda a um conjunto de restrições, tais como na Subseção 2.3.1. Além disso, é preciso respeitar as seguintes condições:

1. Não pode haver sobreposição entre os itens, ver Figura 13.

Figura 13 – Exemplo de sobreposição entre os itens.

Ao lidar com formas retangulares, a verificação de que os itens não se sobrepõem é uma questão de comparação entre coordenadas. Para tanto, considere o item i sendo um retângulo com dimensões (w_i, h_i) e tendo seu canto inferior esquerdo colocado nas coordenadas (x_i, y_i) do plano cartesiano e, o item j sendo um retângulo com dimensões (w_j, h_j) com seu canto inferior esquerdo alocado nas coordenadas (x_j, y_j) do plano cartesiano conforme Figura 14.

Figura 14 – Itens retangulares dos tipos i e j .

Então, dizemos que o retângulo j não se sobrepõe ao retângulo i se ele está acima, abaixo, à esquerda ou à direita do mesmo, isto é,

$$y_j \geq y_i + h_i \quad \text{ou} \quad y_j + h_j \leq y_i \quad \text{ou} \quad x_j + w_j \leq x_i \quad \text{ou} \quad x_j \geq x_i + w_i.$$

2. Todos os itens alocados no objeto devem estar inteiramente contidos no mesmo, ver Figura 15.

Figura 15 – Exemplo no qual os itens não estão completamente contidos no objeto.

Considere o objeto (retângulo maior) de dimensões (W, H) e suponha que o canto inferior esquerdo deste objeto esteja alocado nas coordenadas $(0, 0)$ do plano cartesiano. Para garantir que um retângulo i esteja totalmente alocado dentro do objeto, conforme na Figura 16, é necessário atender simultaneamente as seguintes condições:

$$x_i \geq 0 \quad e \quad x_i + w_i \leq W \quad e \quad y_i \geq 0 \quad e \quad y_i + h_i \leq H.$$

Figura 16 – Item inteiramente contido no objeto.

O trabalho (LODI, 1999) aponta, de acordo com a literatura, dois problemas específicos em que o problema de empacotamento retangular bidimensional pode ser dividido: o problema de empacotamento em *bins* bidimensional (2BP) e o problema de empacotamento em faixas bidimensional (2SP). O problema abordado neste trabalho é o 2SP, e está detalhado no próximo capítulo.

O PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO EM FAIXAS BIDIMENSIONAL

No problema de empacotamento em faixas bidimensional (2SP) está disponível um único objeto (faixa), com largura W e altura "infinita", e o objetivo é alocar todos os itens na faixa, minimizando a altura utilizada. Além disso, os itens são alocados com sua aresta w paralela a aresta W da faixa.

Definição 2. Considere um conjunto de n itens retangulares com dimensões (w_i, h_i) , onde w_i representa a largura e h_i a altura de cada item, para $i = 1, \dots, n$. Seja R um objeto retangular (o qual chamamos de faixa) com largura fixa W e altura H grande o suficiente ("altura infinita") para alocar todos os itens, conforme mostra a Figura 17. O objetivo no problema de empacotamento em faixas é alocar, sem sobreposição, todos os itens em R , minimizando a altura utilizada.

Figura 17 – Problema de empacotamento em faixas.

Na tipologia dada por (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007), o problema apresentado acima pode ser classificado como: 2D - *Rectangular open dimensional problem* - ODP: problema de corte bidimensional retangular com uma dimensão aberta.

Em (LODI, 1999), (LODI; MARTELLO; VIGO, 1999) e, nos trabalhos posteriores, (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002) e (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), é acrescentado ao problema a restrição de que os itens devem ser alocados formando níveis (ou prateleiras). Assim, o problema passa a ser denotado por: problema de empacotamento em faixas bidimensional em níveis (*two-dimensional level strip packing problem* - 2LSP). Em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) os problemas são resolvidos utilizando um modelo de programação linear inteira relaxado.

A origem destes problemas pode ser encontrada no trabalho (GILMORE; GOMORY, 1965). Primeiramente os autores introduziram o problema de corte de estoque guilhotinado 2-estágios exato, que é um problema de empacotamento em *bins* bidimensional em níveis - 2LBP, com a restrição adicional de que todos os itens alocados em um nível têm a mesma altura. Eles, então, consideraram e analisaram o caso mais prático (e mais difícil) que surge se um terceiro estágio de corte é permitido para separar um item de uma área de resíduos. Gilmore e Gomory chamaram este problema, que coincide com 2LBP, de problema de corte de estoque guilhotinado 2-estágios não exato. Note que o 2LSP pode ser visto como uma generalização do problema de empacotamento em *bins* unidimensional - 1BP, onde n itens, tendo tamanho h_j , para $j = 1, \dots, n$, têm que ser particionados em um número mínimo de subconjuntos de modo que a soma dos tamanhos em cada subconjunto não exceda a capacidade H dada. Dada qualquer instância do 1BP, podemos construir uma instância equivalente para o 2LSP, definindo $h_j = 1$, para $j = 1, \dots, n$.

Problemas de corte e empacotamento bidimensionais possuem muitas aplicações industriais, especialmente na indústria (de vidro, madeira, têxtil, papel etc), e em armazenagem e transporte (embalagem de pisos, estantes, baú de caminhão etc). De acordo com aplicações específicas, é necessário diversas restrições. Por exemplo, os itens podem ter orientação fixa ou rotação (em geral, de 90°) pode ser permitida. Neste trabalho abordamos o problema irrestrito não exato e são impostas as seguintes restrições:

- o corte é do tipo guilhotinado feito em 2-estágios;
- os itens são alocados de forma ortogonal na faixa e possuem orientação fixa;
- os itens são alocados formando níveis.

Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os dados de entrada são números inteiros positivos e que $w_j \leq W$ e $h_j \leq H$, para $j = 1, \dots, n$.

O problema de empacotamento em faixas bidimensional com os itens apresentando orientação fixa e considerando que o corte é do tipo guilhotinado feito em 2-estágios é uma versão do

problema de empacotamento em faixas que tem recebido pouca atenção por parte da comunidade científica. Uma formulação matemática com um número polinomial de variáveis e restrições foi proposta por (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) a qual ainda é bastante competitiva. Em (MRAD, 2015) é introduzido um modelo de fluxo de arco para o mesmo problema. Na Seção 3.1, Subseções 3.1.1 e 3.1.2 descrevemos os modelos matemáticos apresentados por (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) e por (MRAD, 2015), respectivamente. Em seguida, na Seção 3.2 introduzimos a novas formulações matemáticas desenvolvidas para o 2LSP.

3.1 Formulações matemáticas da literatura

Nesta Seção apresentamos dois modelos matemáticos da literatura para o 2LSP.

3.1.1 Formulação matemática proposta por Lodi et al. (2004)

Neste modelo, introduzido em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), os itens são alocados formando níveis. O primeiro nível é o fundo da faixa (ou placa). Os itens começam a ser inseridos neste primeiro nível (da esquerda para a direita). A altura do nível é determinada pela altura do item mais alto. Deste modo, o próximo nível se inicia na linha horizontal desenhada no topo do item mais alto do nível anterior, e assim por diante (ver Figura 18 (b)).

Figura 18 – (a) Empacotamento em níveis; (b) empacotamento em níveis normalizado (representa o empacotamento utilizado em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), no qual os itens de cada nível são ordenados de forma decrescente pela altura) - adaptada de (LODI; MARTELLO; MONACI, 2002).

Para a modelagem matemática do problema, assumimos que:

1. em cada nível, o primeiro item (mais à esquerda) possui a maior altura;
2. o primeiro nível (inferior) é o nível mais alto da faixa;
3. os itens são ordenados e reenumerados de forma decrescente em relação à altura, isto é,

$$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n.$$

As variáveis de decisão são:

- $y_k = \begin{cases} 1, & \text{se o item } k \text{ inicializa o nível } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n)$
- $x_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ está alocado no nível } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n-1, j > k)$

A formulação matemática proposta por (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) para o 2LSP é:

$$\text{Min } \sum_{k=1}^n h_k y_k \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{k=1}^{j-1} x_{kj} + y_j = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=k+1}^n w_j x_{kj} \leq (W - w_k) y_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$x_{kj} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n-1, j > k \quad (3.5)$$

A função objetivo (3.1) deste problema tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. As equações (3.2) garantem que cada item será alocado exatamente uma vez (inicializando um nível ou em um nível inicializado por um item precedente (mais alto)). As restrições (3.3) impõem que, em cada nível, a largura da faixa não será ultrapassada. E, as expressões (3.4) e (3.5) definem o domínio das variáveis do problema.

Exemplo 1. Considere uma instância com objeto inicial (faixa) de largura fixa $W = 20$ e três tipos de itens, indexados por j , com as alturas e larguras apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)
1	10	20
2	5	15
3	20	10

A solução ótima deste problema é 30 e o *layout* desta solução pode ser visto na Figura 19, na qual os traços em negrito representam os níveis e a parte hachurada denota o desperdício.

Figura 19 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático Lodi et al. (2004).

3.1.2 Formulação matemática proposta por Mehdi Mrad (2015)

A formulação matemática apresentada em (MRAD, 2015) é uma adaptação do modelo de fluxo de arco desenvolvido em (MACEDO; ALVES; CARVALHO, 2010) para problemas de corte de estoque bidimensional em 2-estágios.

Seja $S = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de itens no qual cada item $j \in S$ possui largura w_j , altura h_j e demanda d_j (aqui iremos considerar $d_j = 1, \forall j = 1, \dots, n$). Considere S_k um subconjunto de itens, H_k o conjunto de diferentes alturas dos itens em S_k e um objeto inicial (faixa) com dimensões W e H . Então no 1º estágio do corte esta faixa é cortada em níveis e, em seguida, estes níveis são cortados em itens durante o 2º estágio e uma "apara" permite extrair os itens dos níveis. Uma "apara" nada mais é que um corte perpendicular ao corte anterior (isto é, um corte horizontal) e a mesma não é computada como um novo estágio.

Durante o 1º estágio do corte podemos obter até n tipos de níveis $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, cada um com largura W e altura h_j ($j = 1, \dots, n$). Além disso, cada tipo de nível π_j pode incluir itens do conjunto $S_j = \{i; h_i \leq h_j \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$ e o objetivo é minimizar a altura total dos níveis empacotados.

Note que a solução deste problema pode ser definida como um conjunto de níveis que precisam ser cortados do objeto inicial (faixa), e estes níveis são cortados em itens durante o segundo estágio do corte. Uma vez que cada tipo de nível π_k é cortado obedecendo um padrão de corte, incluindo um subconjunto de itens S_k , é possível apresentar a sua estrutura como um caminho em um grafo especial introduzido em (CARVALHO, 1999). Para cada tipo de nível π_k ($k = 1, \dots, n$) associamos um grafo $G_k = (V_k, A_k)$, onde V_k representa o conjunto de vértices e $A_k = \{(j, i); 0 \leq j < i \leq W \text{ e } i - j = w_i, \forall i \in S_k \text{ ou } i - j = 1\}$ o conjunto de arcos.

Vale ressaltar que o número de níveis utilizados de cada tipo π_k , será igual ao número de caminhos usados no grafo G_k . Além disso, qualquer caminho em G_k , entre os nós 0 e W , é uma sequência de não sobreposição de arcos a qual representa uma sequência de não sobreposição de itens com largura menor ou igual a W , que é equivalente a um padrão de corte no 2º estágio.

As condições a seguir reduzem significativamente o tamanho dos grafos:

- (1) os itens são ordenados e renumerados de forma decrescente em relação à largura, isto é,
 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$;
- (2) o número de ocorrência de um item em um caminho não pode exceder a sua própria demanda;
- (3) em cada nível, qualquer caminho deve incluir um item com a mesma altura do nível.

O algoritmo 1 é usado para construir qualquer grafo G_k :

Algoritmo 1 – Algoritmo para construção dos grafos.

```

1:  $n \leftarrow 0$ ;
2:  $V_k \leftarrow \{0, W\}$ ;
3:  $r \leftarrow 0$ ;
4: para todo item  $j \in S_k$  faça
5:    $\{\text{conjunto de nós}\} \leftarrow \emptyset$ ;
6:   para todo  $i \in V_k$  faça
7:     se  $(i + w_j \leq W)$  e  $r \leq 1$  então
8:        $A_k \leftarrow A_k \cup (i, i + w_j)$ ;
9:        $r \leftarrow r + 1$ ;
10:       $\{\text{conjunto de nós}\} \leftarrow \{\text{conjunto de nós}\} \cup \{i, w_j\}$ ;
11:    fim se
12:  fim para
13:   $V_k \leftarrow V_k \cup \{\text{conjunto de nós}\}$ ;
14: fim para
15: para todo  $i = 0, \dots, W - 1$  faça
16:    $A_k \leftarrow A_k \cup (i, i + 1)$ ;
17: fim para

```

As variáveis de decisão são:

- z_k : variáveis inteiras que representam o fluxo total no grafo correspondente ao nível π_k , ou seja, o número de vezes que o nível π_k é utilizado.
- x_{abh}^k : variável inteira associada a cada arco $(a, b) \in A_k$ e tem o número de itens com largura $(b - a)$ e altura $h \in H_k$ alocado na posição a desde o início de um nível π_k . Esta variável representa o fluxo no arco (a, b) associado ao item de altura h no grafo G_k .

Assim, o modelo matemático introduzido em (MRAD, 2015) é dado como segue.

$$\text{Min} \sum_{k=1}^n h_k z_k \quad (3.6)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{(a,b) \in A_k; h \in H_k} x_{abh}^k - \sum_{(b,c) \in A_k; h \in H_k} x_{bch}^k = \begin{cases} -z_k, & \text{se } b = 0 \\ 0, & \text{se } b = 1, 2, \dots, W-1, \forall k \in \{1, \dots, n\} \\ z_k, & \text{se } b = W \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\sum_{k; h_k \geq h_j} \sum_{(a, a+w_j, h_j) \in A_k} x_{a, a+w_j, h_j}^k = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.8)$$

$$x_{abh}^k \in \mathbb{N}; \forall (a, b) \in A_k; \forall h \in H_k \quad (3.9)$$

$$z_k \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.6) deste problema tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. As equações (3.7) correspondem à igualdade de conservação do fluxo, isto é, o valor do fluxo que sai de cada nó $b \in \{1, 2, \dots, W-1\}$ em qualquer grafo G_k deve ser igual ao valor do fluxo que entra neste nó, e o fluxo que sai do nó 0 deve ser igual ao fluxo que entra no nó W . As expressões (3.8) satisfazem a demanda dos itens, ou seja, garantem que cada item será cortado exatamente uma vez. E, as restrições de integralidade são definidas pelas expressões (3.9) e (3.10).

Exemplo 2. Considere a mesma instância do Exemplo 1, ou seja, uma faixa com largura fixa $W = 20$ e altura H ilimitada e seja $S = \{1, 2, 3\}$ o conjunto de tipos de itens, indexados por j , com as larguras e alturas apresentadas na Tabela 2 (observe que aqui os itens estão ordenados de forma decrescente pela largura).

Tabela 2 – Dados relativos aos itens do conjunto S .

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)
1	20	10
2	10	20
3	5	15

No 1º estágio do corte obtemos 3 níveis (π_1, π_2, π_3) todos com largura $W_k = 20$ com $k = 1, 2, 3$ e altura 10, 20 e 15, respectivamente. Note que cada nível π_k inclui apenas itens do conjunto S_k , ou seja, o nível π_1 inclui os itens do conjunto $S_1 = \{1\}$, π_2 de $S_2 = \{1, 2, 3\}$ e π_3 de $S_3 = \{1, 3\}$. Durante o 2º estágio do corte, para cada tipo de nível π_k , associamos um grafo $G_k = (V_k, A_k)$; $k = 1, 2, 3$, como pode ser visto nas Figuras a seguir:

- $G_1 = (V_1, A_1)$, onde $A_1 = \{(0, 20)\}$

Figura 20 – Grafo associado ao nível π_1 .

- $G_2 = (V_2, A_2)$, onde $A_2 = \{(0, 20); (0, 10); (10, 15); (0, 5)\}$

Figura 21 – Grafo associado ao nível π_2 .

- $G_3 = (V_3, A_3)$, onde $A_3 = \{(0, 20); (0, 5)\}$

Figura 22 – Grafo associado ao nível π_3 .

A solução ótima deste problema é 30 e a Figura 23 apresenta o *layout* desta solução, na qual os traços em negrito representam os cortes executados no 1º estágio e a parte hachurada o desperdício.

Figura 23 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático proposto por Mehdi Mrad (2015).

3.2 Formulações matemáticas desenvolvidas

Nesta seção apresentamos quatro formulações matemáticas obtidas por meio da adaptação de modelos matemáticos conhecidos da literatura, bem como dois modelos com a inclusão de

desigualdades válidas adaptadas da literatura. Para estas formulações, consideramos que os itens são ordenados e reenumerados de forma decrescente em relação à altura, isto é, $h_1 \geq h_2 \geq \dots h_n$ (exceto para o modelo M4, onde consideramos que os itens são alocados de forma crescente pela altura, ou seja $h_1 \leq h_2 \leq \dots h_n$).

3.2.1 Formulações matemáticas M1 e M1desig

O modelo matemático M1 é uma adaptação do modelo proposto por (LODI; MONACI, 2003) para o problema da mochila bidimensional 2-estágios. Em M1, os itens são alocados formando níveis e o objetivo é minimizar a soma das alturas dos níveis (ou seja, minimizar a altura utilizada da faixa). Análogo ao que acontece em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), para a modelagem matemática M1, supomos que: n níveis estão disponíveis para serem inicializados; em cada nível, o primeiro item (mais à esquerda) possui a maior altura; e que o primeiro nível (inferior) é o nível mais alto do objeto inicial (faixa). Além disso, aqui consideramos que se o nível k for utilizado, este deve ser inicializado pelo item k .

Para a modelagem M1, a variável de decisão é:

$$\bullet x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ está alocado no nível } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

Logo, a formulação matemática M1 é dada por:

$$\text{Min } H \quad (3.11)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{k=1}^n h_k x_{kk} \leq H \quad (3.12)$$

$$\sum_{k=1}^j x_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=k+1}^n w_j x_{jk} \leq (W - w_k) x_{kk}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = k, \dots, n \quad (3.15)$$

A função objetivo (3.11) deste problema tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. A altura H da faixa é definida como mostrado nas restrições (3.12). As equações (3.13) garantem que cada item é alocado exatamente uma vez (inicializando um nível ou em um nível inicializado por um item precedente (mais alto)). As restrições (3.14) impõem que, em cada nível, a largura da faixa não seja ultrapassada pela soma das larguras dos itens (e que, ou o item k está no nível k ou o nível k está vazio). E, as expressões (3.15) define o domínio das variáveis do problema.

Observe que a ideia do modelo matemático M1 é similar ao modelo introduzido em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004), entretanto M1 apresenta um número menor de variáveis.

Exemplo 3. Considerando o Exemplo 1 e utilizando a formulação matemática M1, obtemos o mesmo *layout* da solução ótima apresentado na Figura 19.

► **Inclusão de desigualdades válidas no modelo M1**

Ao lidar com métodos exatos para problemas de cortes e empacotamentos um dos principais problemas que encontramos é a simetria. Análogo ao que é apresentado em (LODI; MONACI, 2003), na formulação M1, algumas dessas simetrias são evitadas pelo fato de não diferenciarmos explicitamente a posição de um item em um nível (nem a posição de um nível na faixa). Além disso, n potenciais níveis são considerados (cada um deles com uma altura pré-fixada) o que possibilita restringir ainda mais o espaço de busca. Mais ainda, outras simetrias podem ser evitadas fazendo o uso de dois conjuntos de desigualdades lineares conforme apresentamos a seguir: para cada tipo de item i , com $i = 1, \dots, m$, considere ub_i como sendo itens iguais j tais que $h_j = h_i$ e $w_j = w_i$ (ou seja, ub_i representa a quantidade de itens do tipo i) e, seja $n = \sum_{i=1}^m ub_i$ o número total de itens. Defina $\alpha_i = \sum_{s=1}^i ub_s$ com $\alpha_0 = 0$. Deste modo, temos as seguintes desigualdades válidas:

$$x_{kk} \geq x_{k+1,k+1}, \quad k \in [\alpha_{i-1} + 1, \alpha_i - 1] \quad (3.16)$$

$$\sum_{s=k+1}^{\alpha_i} x_{sk} \geq \sum_{s=k+2}^{\alpha_i} x_{s,k+1}, \quad k \in [\alpha_{i-1} + 1, \alpha_i - 1] \quad (3.17)$$

As desigualdades (3.16) visam remover do espaço de busca as soluções equivalentes onde é utilizado um nível k ao invés de um nível l , ambas correspondentes a itens do mesmo tipo, e tal que $k > l$. Enquanto que as desigualdades (3.17) dizem respeito ao número de itens adicionais de um determinado tipo, digamos i , que podem ser alocados nos níveis, digamos l e k , com ambos os níveis sendo inicializados pelo item i . Portanto, desejamos remover do espaço de busca aquelas soluções em que o número de itens alocados no nível k é maior do que o número de itens alocados no nível l , se $k > l$ (ver (LODI; MONACI, 2003)).

Exemplo 4. Considere uma instância contendo o conjunto de itens, indexados por j , com as alturas e larguras apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)
1	10	20
2	10	20
3	5	15
4	5	15
5	20	10
6	6	10
7	15	8
8	10	5

Então, temos que $n = 8$, $m = 6$ tipos de itens e que $ub_1 = 2, ub_2 = 2, ub_3 = 1, ub_4 = 1, ub_5 = 1, ub_6 = 1$. Além disso, temos que $\alpha_i = \sum_{s=1}^i ub_s$; $i = 1, \dots, 6$, com $\alpha_0 = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sum_{s=1}^1 ub_s = ub_1 = 2; \\ \alpha_2 &= \sum_{s=1}^2 ub_s = ub_1 + ub_2 = 4; \\ \alpha_3 &= \sum_{s=1}^3 ub_s = ub_1 + ub_2 + ub_3 = 5; \\ \alpha_4 &= \sum_{s=1}^4 ub_s = ub_1 + ub_2 + ub_3 + ub_4 = 6; \\ \alpha_5 &= \sum_{s=1}^5 ub_s = ub_1 + ub_2 + \dots + ub_5 = 7; \\ \alpha_6 &= \sum_{s=1}^6 ub_s = ub_1 + ub_2 + \dots + ub_6 = 8.\end{aligned}$$

Logo, as desigualdades (3.16) para este exemplo são:

$$\begin{aligned}x_{11} &\geq x_{22}; \\ x_{33} &\geq x_{44}; \\ x_{44} &\geq x_{55}; \\ x_{55} &\geq x_{66}; \\ x_{66} &\geq x_{77}; \\ x_{77} &\geq x_{88}; \\ x_{88} &\geq x_{99}.\end{aligned}$$

E, as desigualdes (3.17) são as seguintes:

$$\begin{aligned}x_{21} &\geq x_{22} + x_{32}; \\ x_{43} &\geq x_{44} + x_{54}; \\ x_{54} &\geq x_{55} + x_{65}; \\ x_{55} + x_{65} &\geq x_{56} + x_{66} + x_{76}; \\ x_{65} &\geq x_{66} + x_{76}; \\ x_{66} + x_{76} &\geq x_{67} + x_{77} + x_{87}; \\ x_{76} &\geq x_{77} + x_{87}; \\ x_{77} + x_{87} &\geq x_{78} + x_{88} + x_{98}; \\ x_{87} &\geq x_{88} + x_{98}; \\ x_{88} + x_{98} &\geq x_{89} + x_{99} + x_{10,9}.\end{aligned}$$

Observação 2. Denotamos por **M1desig** a formulação matemática M1 com a inclusão das desigualdades (3.16) e (3.17).

3.2.2 Formulações matemáticas M2 e M2desig

Esta segunda formulação, denominada M2, está baseada na adaptação do modelo proposto por (FURINI *et al.*, 2012) para o problema de corte de estoque bidimensional guilhotinado 2-estágios com tamanho de estoque múltiplos. Em M2, análogo ao que acontece em M1, os itens são alocados formando níveis e o objetivo é minimizar a altura utilizada da faixa.

Para esta modelagem matemática, as variáveis de decisão são:

- $x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ está alocado no nível } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, n)$
- y_k : variáveis contínuas as quais representam a altura do nível k ($k = 1, \dots, n$).

Observação 3. A altura do nível k não é necessariamente a altura do item k .

A formulação matemática M2 é descrita da seguinte forma:

$$\text{Min } H \quad (3.18)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{k=1}^n y_k \leq H \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j x_{jk} \leq W, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

$$h_j x_{jk} \leq y_k, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

$$y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

A função objetivo (3.18) deste problema também tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. A altura H da faixa é definida como mostrado nas restrições (3.19). As equações (3.20) garantem que cada item é alocado exatamente uma vez. As restrições (3.21) impõem que, em cada nível, a largura da faixa não é ultrapassada pela soma das larguras dos itens (gera o nível). As desigualdades (3.22) asseguram que a altura y_k do nível k não é menor do que a altura de qualquer item. E, as expressões (3.23) e (3.24) definem o domínio das variáveis do problema.

Exemplo 5. Utilizando o modelo matemático M2, o *layout* da solução ótima para o Exemplo 1 é o mesmo apresentado na Figura 19.

► **Inclusão de desigualdades válidas no modelo M2**

A fim de fortalecer a relaxação linear da formulação matemática M2, adicionamos algumas desigualdades válidas apresentadas em (FURINI *et al.*, 2012). Tais desigualdades são:

$$\sum_{j=1}^n (w_j h_j) x_{jk} \leq y_k W, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

$$y_k \leq y_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

As restrições geométricas (3.25) garantem que a área global dos itens (ou seja, a soma da área de todos os itens) em um nível não exceda a área do nível, enquanto que as desigualdades (3.26) impõem que os níveis possuam altura não decrescente (o que reduz a simetria do modelo).

Observação 4. O modelo matemático M2 com a inclusão das desigualdades (3.25) e (3.26) é denominado **M2desig**.

3.2.3 Formulação matemática M3

Nesta subseção, o modelo apresentado em (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010) para problemas de corte de estoque bidimensional em 2 e 3-estágios é adaptado para o 2LSP. Neste artigo, os autores propuseram um modelo baseado na contagem de todos os diferentes cortes e placas residuais. Um corte consiste em tomar um objeto retangular e obter um item a partir dele, por meio de um ou dois cortes guilhotinados (ou seja, um corte já considera o corte horizontal e vertical). Em geral, um corte resulta em um item e dois objetos retangulares que ainda podem ser cortados. As objetos resultantes de um corte são denominados **placas residuais**. O modelo baseia-se em enumerar todos os cortes e tipos de placas residuais. As placas do mesmo tipo têm a mesma largura, altura, e pertencem ao mesmo estágio.

Vale ressaltar que o estágio é relevante ao definir o tipo de uma placa, pois um corte produz diferentes placas residuais de acordo com o estágio onde ele é executado, conforme pode ser visto na Figura 24 (os traços em negrito representam os cortes).

Figura 24 – Um corte em uma placa de comprimento e largura finito de acordo com o algoritmo de Silva et al.: (a) primeiro estágio e (b) segundo estágio - adaptada de (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010).

A ideia principal da formulação matemática M3 é semelhante ao que foi apresentado em (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010). Entretanto, para o 2LSP, é necessário fazer algumas alterações no algoritmo de geração de cortes e tipos de placas residuais. Diferentemente do que é feito em (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010), aqui o algoritmo não gera placas residuais do tipo superior, ele gera apenas placas residuais à direita.

Exemplo 6. Considere uma faixa com largura fixa $W = 20$, altura H ilimitada e três tipos de itens, indexados por j , com as larguras e alturas apresentados na Tabela 1.

Na primeira fase do algoritmo (1º estágio do corte), para cada item é realizado um corte, o qual se extrai o item e gera uma placa residual à direita e, esse corte sempre é realizado na faixa. Um exemplo de um corte é a obtenção de um item do tipo 1 a partir da faixa. Neste corte, um nível de altura 20 é gerado por um corte horizontal e o item do tipo 1 é, então, obtido por um corte vertical neste nível. Deste modo, além do item do tipo 1, também obtemos uma placa à direita do tipo 4, tal placa possui altura $H_4 = h_1 = 20$ e largura $W_4 = W - w_1 = 20 - 10 = 10$ (ver Figura 25). Este corte gera uma variável x_{10} (um item do tipo 1 é cortado da faixa (placa do tipo 0)) e um parâmetro a_{104} (o corte de um item do tipo 1 da placa do tipo 0 resulta em uma placa do tipo 4).

Figura 25 – O corte de um item do tipo 1 da faixa.

De maneira análoga, cortamos o item do tipo 2 da faixa (placa do tipo 0) e obtemos uma placa do tipo 5 que tem altura $H_5 = h_2 = 15$ e largura $W_5 = W - w_2 = 15$, o que gera uma variável x_{20} e um parâmetro a_{205} .

O procedimento se repete para o item do tipo 3, obtendo uma placa do tipo 6 e gerando uma variável x_{30} e um parâmetro a_{306} .

Na segunda fase do algoritmo (2º estágio do corte), também extraímos os itens e obtemos apenas placas residuais à direita. Por exemplo, na placa do tipo 4 cabe o item do tipo 2, então ao cortar o item do tipo 2 da placa do tipo 4, obtemos uma placa do tipo 7 que tem altura $H_7 = H_4 = h_1 = 20$ e largura $W_7 = W_4 - w_2 = 5$ e geramos uma variável x_{24} e um parâmetro a_{247} (ver Figura 26).

Figura 26 – O corte de um item do tipo 2 de uma placa do tipo 4.

Sejam R o conjunto dos tipos de placas residuais e $N \subseteq R$ o subconjunto de placas com dimensões iguais a um dos itens, ou seja, N também denota o conjunto de itens. Note que cada placa $k \in R$ tem dimensões $(H_k, W_k) \subset (H, W)$. O algoritmo para gerar todos os cortes e as placas residuais é apresentado no Algoritmo 2.

O Algoritmo 2 é usado para construir o modelo de programação inteira para o 2LSP. Podemos observar que, neste caso, as placas repetidas não precisam ser armazenadas (o que diminui significativamente o tamanho do modelo) e que não precisamos nos preocupar com a “apara”, pois uma placa sempre é cortada no item final.

Algoritmo 2 – Algoritmo para geração de cortes e tipos de placas.

```

1: entrada: Placa 0, conjunto de itens  $N$ ;
2: Inicialize  $R = 0$ ;
3: Marque a faixa (placa do tipo 0) como não analisada;
4: para todo item  $j = 1, \dots, n$  faça
5:   Corte a placa 0 na altura  $h_j$ , extraia o item  $j$  e gere uma placa residual à direita ( $i$ ) com
6:   altura  $h_j$  e largura  $W - w_j$ ;
7:   se não existe uma placa do tipo  $i$  em  $R$  e cabe algum item em  $i$  então
8:      $R = R \cup \{i\}$ ;
9:   fim se
10:  Crie  $x_{j0}$  e  $a_{j0i}$ ;
11: fim para
12: enquanto  $R$  conter placas não analisadas faça
13:  Pegue uma placa  $k \in R$  não analisada;
14:  para todo item  $j = 1, \dots, n$  faça
15:    se algum item cabe na placa  $k$  então
16:      Corte  $k$  na largura  $w_j$ , extraia o item  $j$  e gere uma placa residual à direita ( $i$ ) com
17:      altura  $H_k$  e largura  $W_k - w_j$ ;
18:      se não existe uma placa do tipo  $i$  em  $R$  e cabe algum item em  $i$  então
19:         $R = R \cup \{i\}$ ;
20:      fim se
21:      Crie  $x_{jk}$  e  $a_{jki}$ ;
22:    fim se
23:  fim para
24:  Marque  $k$  como analisada;
25: fim enquanto
26: saída:  $x_{jk}$  e  $a_{jki}$ ;

```

As variáveis e os parâmetros criados no Algoritmo 2 e utilizados no modelo são:

- variáveis de decisão:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ é cortado da placa do tipo } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, \dots, m)$$

- parâmetros:

$$a_{jki} = \begin{cases} 1, & \text{se a placa do tipo } i \text{ resulta do corte do item } j \text{ da placa do tipo } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(j = 1, \dots, n; k = 0, \dots, m; i = 1, \dots, m)$$

Análogo ao que é feito em (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2010), o modelo M3 associa cada variável de decisão com o corte de um item a partir de uma placa. As restrições asseguram que os cortes podem ser feitos apenas em placas existentes. Supondo que todos os

cortes possíveis e os tipos de placas residuais correspondentes são conhecidos, temos que a formulação matemática M3 desenvolvida para o 2LSP é dada por:

$$\text{Min } H \quad (3.27)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n h_j x_{j0} \leq H \quad (3.28)$$

$$\sum_{k=0}^m x_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^n a_{jki} x_{jk} \geq \sum_{j=1}^n x_{ji}, \quad i \in N \quad (3.30)$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^n a_{jki} x_{jk} \geq \sum_{j=1}^n x_{ji}, \quad i \in R \setminus N \quad (3.31)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 0, \dots, m \quad (3.32)$$

A função objetivo (3.27) deste modelo tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. A altura H da faixa é definida como mostrado nas restrições (3.28). As equações (3.29) garantem que cada item é alocado exatamente uma vez. As restrições (3.30) e (3.31) impõem que para cada tipo de placa residual i o número de cortes resultando em tal placa residual deve sempre ser maior ou igual que o número de cortes executados em tal placa (ou seja, somente cortes em placas residuais existentes podem ser executados). Por fim, as expressões (3.32) definem o domínio das variáveis envolvidas no problema.

Exemplo 7. A solução ótima do Exemplo 6 é 30 e seu *layout* pode ser visto na Figura 27, na qual os traços em negrito representam os cortes e a parte hachurada denota o desperdício.

Figura 27 – Solução ótima do Exemplo 5 obtida pelo o modelo matemático M3.

Trabalhando na adaptação do Algoritmo 2 mencionado anteriormente e fazendo as respectivas adaptações no modelo, nos deparamos com o artigo “*Modeling Two-Dimensional Guillotine Cutting Problems via Integer Programming*” apresentado por (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016), daí surgiu nossa última adaptação, a formulação matemática M4.

3.2.4 Formulação matemática M4

Para finalizar esta seção, adaptamos para o 2LSP o modelo apresentado em (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016) para problemas de corte bidimensional guilhotinado. Neste artigo, os autores se concentraram no problema da mochila bidimensional e fizeram uma breve discussão sobre a extensão da modelagem para o problema de corte de estoque bidimensional e para o problema de empacotamento em faixas.

A ideia principal da formulação matemática M4 é semelhante ao que foi apresentado em (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016) e também na Subseção 3.2.3 para o modelo M3. A partir de um objeto retangular inicial (faixa), obtemos placas residuais menores por meio de um corte guilhotinado horizontal (1º **estágio do corte**); para cada placa obtida, precisamos decidir se realizamos novos cortes ou mantemos a placa; mantemos a placa quando suas dimensões são iguais às dimensões de um dos itens ($H_k \leq h_j$). O processo é iterativo até que a altura das placas não sejam suficientemente grandes para caber algum item ($H_k \leq h_j$). De maneira análoga, realizamos um corte na vertical (2º **estágio do corte**) e obtemos duas placas menores, novamente é necessário decidir se realizaremos outro corte ou armazenaremos a placa ($W_k \leq w_j$), e assim sucessivamente até que não exista mais placas que caibam itens. Diferentemente do que é feito em (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016), que realiza os cortes na horizontal e vertical simultaneamente, pois o problema possui k -estágios, aqui primeiro realizamos os cortes na horizontal (gerando todos níveis) e, depois na vertical.

Assim como em (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016), em M4 cada decisão de corte está representada por uma tripla (p, k, o) , na qual a posição p indica a distância a partir do canto inferior esquerdo de uma placa k , onde um corte com a orientação o é executado. Na Figura 28 (a) temos um exemplo de corte horizontal realizado na posição p em uma placa k , produzindo duas placas menores k_1 e k_2 e, na Figura 28 (b) um corte vertical.

Figura 28 – O corte na posição p produz duas placas k_1 e k_2 - (a) horizontal e (b) vertical (adaptada de (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016)).

Seja R o conjunto de placas no qual a placa retangular indexada por $k = 0$ indica o objeto inicial (faixa) e possui dimensões (H, W) , onde H é um limitante superior para a faixa (placa

do tipo 0); cada placa $k \in R$ tem dimensões $(H_k, W_k) \in \{1, \dots, H\} \times \{1, \dots, W\}$. Denotamos por $O = \{h, v\}$ o conjunto de possíveis orientações para um corte (1º estágio (h) - horizontal e 2º estágio (v) - vertical, respectivamente) e, $N \subseteq R$ indica o subconjunto de placas com dimensões iguais a um dos itens, deste modo também podemos denotar o conjunto de itens por N . Além disso, para toda placa k denotamos por $P^o(k)$ o conjunto de posições nas quais podemos cortar a placa k na orientação o .

Note que dependendo da cardinalidade dos conjuntos R e $P^o(k), k \in R, o \in O$, o modelo pode ter um número muito grande de variáveis. O número de placas que consideramos e o número de cortes realizados em cada placa (geralmente, produzindo novas placas) determinam, na prática, o tamanho do modelo. Assim, precisamos definir o conjunto de posições $P^o(k), k \in R, o \in O$, o qual será denominado conjunto de discretização da placa.

Seja $I_k = \{j \in N; h_j \leq H_k \text{ e } w_j \leq W_k\}$, o conjunto de itens que cabem na placa k . O conjunto completo das posições P onde um corte pode ser realizado inclui as dimensões de todos os itens $j \in N$, bem como todas as combinações das dimensões destes itens. Se considerarmos os itens ordenados de forma crescente pela altura ($h_1 < h_2 < \dots < h_n$), temos que o conjunto de discretização da placa com dimensões (H_k, W_k) para cortes horizontais é dado por:

$$P^h(k) = \left\{ p; 0 < p < H_k, \exists z_j \in \{0, 1\}; p = \sum_{j \in I_k} z_j h_j \right\}.$$

E, considerando os itens ordenados de forma crescente pela largura ($w_1 < w_2 < \dots < w_n$), o conjunto de discretização para cortes verticais, é:

$$P^v(k) = \left\{ p; 0 < p < W_k, \exists z_j \in \{0, 1\}; p = \sum_{j \in I_k} z_j w_j \right\}.$$

Estes conjuntos consideram o conceito de exclusão de (HERZ, 1972) e podem ser calculados utilizando uma técnica de programação dinâmica padrão (DP); ver, por exemplo, (CHRISTOFIDES; WHITLOCK, 1977).

Para a formulação M4, primeiramente precisamos de um limitante superior para a faixa (placa do tipo 0), definimos este limitante como $H = 2 \sum_{j=1}^n h_j$. A partir da placa do tipo 0, duas novas placas são obtidas por meio de um corte horizontal (1º estágio), com $P^h(0) \subseteq 1, \dots, H$, tais placas são armazenadas no conjunto R quando o seu tamanho é tal que pode caber algum item; caso contrário, é descartada. Note que não realizamos cortes verticais (2º estágio) na placa 0 (isto é, $P^v(0) = \emptyset$); além disso, no primeiro corte realizado na horizontal, consideramos que somente a parte inferior da faixa é um retângulo finito o qual pode ser utilizado como uma placa residual, enquanto que a parte superior da faixa é um retângulo "infinito". As variáveis e os parâmetros utilizados no modelo M4 são obtidos processando o conjunto de itens N e a placa 0 tal como descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 – Algoritmo para gerar parâmetros e variáveis.

```

1: entrada: Placa 0, conjunto de itens  $N$ ;
2: Inicialize  $R = 0$ ;
3: Marque a placa 0 como não analisada;
4: enquanto  $R$  conter placas não analisadas para o 1º estágio do corte faça
5:   Pegue uma placa  $k \in R$  não analisada;
6:   Calcule o conjunto de posições  $P^h(k)$ ;
7:   para todo posição  $p \in P^h(k)$  faça
8:     Corte  $k$  na posição  $p$  e gere as placas 1 e 2;
9:     se  $1 \notin R$  e cabe algum item em 1 então
10:       $R = R \cup \{1\}$ ;
11:     fim se
12:     se  $2 \notin R$  e cabe algum item em 2 então
13:       $R = R \cup \{2\}$ ;
14:     fim se
15:   fim para
16:   Marque  $k$  como analisada para o 1º estágio do corte;
17:   Crie  $x_{pk}^h$  e  $a_{pki}^h$ ;
18: fim enquanto
19: enquanto  $R$  conter placas não analisadas para o 2º estágio do corte faça
20:   Pegue uma placa  $k \in R$  não analisada;
21:   Calcule o conjunto de posições  $P^v(k)$ ;
22:   para todo toda posição  $p \in P^v(k)$  faça
23:     Corte  $k$  na posição  $p$  e gere as placas 1 e 2;
24:     se  $1 \notin R$  e cabe algum item em 1 então
25:       $R = R \cup \{1\}$ ;
26:     fim se
27:     se  $2 \notin R$  e cabe algum item em 2 então
28:       $R = R \cup \{2\}$ ;
29:     fim se
30:   fim para
31:   Marque  $k$  como analisada para o 2º estágio do corte;
32:   Crie  $x_{pk}^v$  e  $a_{pki}^v$ ;
33: fim enquanto
34: saída:  $x_{pk}^h, x_{pk}^v, a_{pki}^h$  e  $a_{pki}^v$ ;

```

Na primeira fase do algoritmo de enumeração de placas e variáveis geramos os níveis (1º estágio do corte), que por sua vez são cortados verticalmente a fim de obtermos os itens finais (2º estágio do corte). Note que, para obter alguns itens é necessário realizar uma "apara". Além disso, o algoritmo e o modelo precisam considerar demanda, ambos funcionam para demanda unitária, entretanto quando a instância avaliada possui itens repetidos é necessário agrupar estes itens.

As variáveis de decisão e os parâmetros utilizados no modelo são os seguintes:

- variáveis inteiras:

x_{pk}^o : indica o número de vezes que a placa do tipo k é cortada na posição p com orientação o ;

d_i : representa a quantidade de placas do tipo i .

- parâmetros: a_{pki}^o .

Em (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016), estes parâmetros são definidos por: $a_{pki}^o = 1$, se a placa do tipo i é obtida pelo corte da placa k na posição p com orientação o e $a_{pki}^o = 0$ caso contrário. Entretanto, em M4 é preciso acrescentar o fato de que quando uma placa tipo k é cortada na posição p com orientação o gera duas placas idênticas, fazemos $a_{pki}^o = 2$.

Portanto, a formulação matemática M4 é descrita por:

$$\text{Min } H \quad (3.33)$$

$$\text{sujeito a : } p \ x_{p0}^h \leq H, \ p \in P^h(0) \quad (3.34)$$

$$\sum_{p \in P^h(0)} x_{p0}^h = 1 \quad (3.35)$$

$$\sum_{k \in R} \sum_{o \in O} \sum_{p \in P^o(k)} a_{pki}^o x_{pk}^o - \sum_{o \in O} \sum_{p \in P^o(i)} x_{pi}^o - d_i \geq 0, \ i \in N; i \neq 0 \quad (3.36)$$

$$\sum_{k \in R} \sum_{o \in O} \sum_{p \in P^o(k)} a_{pki}^o x_{pk}^o - \sum_{o \in O} \sum_{p \in P^o(i)} x_{pi}^o \geq 0, \ i \in R \setminus N \quad (3.37)$$

$$x_{pk}^o \in \mathbb{Z}_+, \ k \in R, \ o \in O, \ p \in P^o(k) \quad (3.38)$$

A função objetivo (3.33) deste problema tem, como critério de otimização, a minimização da altura utilizada da faixa. A altura H da faixa é definida como mostrado nas restrições (3.34). As equações (3.35) impõem que o primeiro corte seja na horizontal (onde p é a posição do corte, com $p \in P^h(0)$). As restrições (3.36) garantem que o número de placas i que são cortadas ou mantidas como itens não exceda o número de placas i obtidas por meio do corte de algumas outras placas. As desigualdades (3.37) são equivalentes as restrições anteriores para placas $i \notin N$. E, a expressão (3.38) define o domínio das variáveis do problema.

Exemplo 8. Considere o Exemplo 1 apresentado anteriormente, ou seja, uma instância com uma faixa de largura fixa $W = 20$ e os três tipos de itens, indexados por j , reordenados conforme apresentado na Tabela 4 (note que neste caso os itens estão ordenados de forma crescente pela altura).

Tabela 4 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)
1	20	10
2	5	15
3	10	20

Temos que o conjunto de itens que cabem na placa 0 é dado por $I_0 = \{1, 2, 3\}$ e que o conjunto de posições na horizontal é $P^h(0) = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 45\}$.

No primeiro corte da primeira fase do algoritmo (1º estágio do corte), para toda posição $p \in P^h(0)$ realizamos um corte horizontal obtendo um nível para cada corte. Note que, no primeiro corte realizado na horizontal, consideramos que somente a parte inferior da faixa é um retângulo finito o qual pode ser utilizado como uma placa residual. Por meio destes cortes obtemos 7 tipos de níveis (placas residuais) todos com largura $W_k = 20$ e altura 10, 15, 20, 25, 30, 35 e 45, respectivamente (ver Figura 29).

Figura 29 – Primeiro corte da primeira fase do Algoritmo 3.

Os traços em negrito indicam a posição que foi realizado o corte e, estes cortes, geram as variáveis $x_{10,0}^h, x_{15,0}^h, x_{20,0}^h, x_{25,0}^h, x_{30,0}^h, x_{35,0}^h$ e $x_{45,0}^h$, bem como os parâmetros $a_{10,0,1}^h, a_{15,0,5}^h, a_{20,0,6}^h, a_{25,0,7}^h, a_{30,0,8}^h, a_{35,0,9}^h$ e $a_{45,0,10}^h$.

A partir do "segundo" corte executado na horizontal, para toda posição p é realizado um corte que gera uma ou duas placas residuais (superior e inferior). Um exemplo de um corte é a obtenção de uma placa do tipo 6 e uma placa do tipo 1 (item 1) a partir de uma placa do tipo

8, conforme mostra a Figura 30. Por meio deste corte obtemos a variável $x_{10,8}^h$ e os parâmetros $a_{10,8,1}^h$ e $a_{10,8,6}^h$.

Figura 30 – Obtenção de uma placa do tipo 6 e uma placa do tipo 1 a partir de uma placa do tipo 8.

Na segunda fase do algoritmo (2º estágio do corte), realizamos o corte na vertical e também geramos uma ou duas placas residuais (à direita e à esquerda). Por exemplo, cortando uma placa do tipo 6 na posição 10, obtemos duas placas do tipo 3 (item 3) e geramos a variável $x_{10,6}^v$ e o parâmetro $a_{10,6,3}^v$ que, neste caso, recebe o valor 2 (ver Figura 31).

Figura 31 – Obtenção de duas placas do tipo 3 a partir de uma placa do tipo 6.

Realizando um corte vertical na placa do tipo 3 na posição 5, obtemos duas placas do tipo 65, este corte gera a variável $x_{5,3}^v$ e o parâmetro $a_{5,3,65}^v$ (ver Figura 32).

Figura 32 – Obtenção de duas placas do tipo 65 a partir de uma placa do tipo 3.

Para finalizar precisamos realizar a "apara" de modo a obtermos um item final. A Figura 33 mostra uma "apara" na placa do tipo 65 para a obtenção de um item do tipo 2. Tal "apara" gera a variável $x_{15,65}^h$ e o parâmetro $a_{15,65,2}^h$.

Figura 33 – Apara para a obtenção de um item do tipo 2

E assim obtem-se o modelo M4 para este exemplo. A solução ótima deste problema é 30. A Figura 34 apresenta o *layout* desta solução, no qual os traços em negrito representam os cortes executados (no 1º e 2º estágios) e a parte hachurada denota a perda (ou seja, o desperdício).

Figura 34 – Solução ótima do Exemplo 7 obtida pelo modelo matemático M4.

EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, apresentamos os testes computacionais realizados para avaliar os modelos descritos no Capítulo 3 para o problema de empacotamento em faixas bidimensional em níveis - 2LSP, bem como a relaxação linear destas formulações matemáticas. Os modelos analisados foram implementados utilizando-se a linguagem de programação C++ em conjunto com a biblioteca *Concert Technology* do *solver* comercial CPLEX 12.6 com a parametrização padrão (ou seja, sem adaptação específica). Implementamos o modelo de Lodi et. al (2004), bem como as formulações matemáticas denotadas por M1, M1desig, M2, M2desig, M3 e M4, o código do modelo de fluxo de arco apresentado em (MRAD, 2015) foi gentilmente cedido pelo autor.

Os testes computacionais apresentados a seguir foram realizados de maneira sequencial em um computador equipado com 2 Processadores Intel Xeon E5-2680v2 de 2.8 GHz com dez núcleos e com 128 GB DDR3 1866MHz de memória RAM. Foi fixado um limite de tempo de execução de 3600 segundos para cada instância, de modo que, nos casos em que a solução ótima não foi encontrada no tempo limite, capturou-se a melhor solução fornecida pelo *solver* e o limitante inferior. O desvio *gap* foi calculado pela expressão $gap = \frac{(z - lb)}{z} \times 100$, onde z representa o valor corrente da função objetivo analisada e lb o melhor limitante inferior encontrado.

A seguir, nas Seções 4.1 e 4.2 são apresentadas, respectivamente, as características das instâncias testadas e os resultados computacionais observados com relação aos modelos matemáticos apresentados. Para finalizar este capítulo, na Seção 4.3, mostramos os resultados computacionais obtidos pela relaxação linear de todas as formulações matemáticas investigadas.

4.1 Descrição das instâncias avaliadas

Para analisar o desempenho dos modelos implementados neste trabalho, foram efetuados testes computacionais considerando 3 grupos de instâncias da literatura. Tais grupos estão

descritos a seguir:

Grupo 1: Este grupo apresenta 21 problemas-teste os quais foram desenvolvidos em (HOPPER; TURTON, 2001a) e podem ser encontrados em <https://paginas.fe.up.pt/~esicup/datasets>. Estas instâncias foram construídas para PCE bidimensionais com as seguintes características:

- um conjunto de itens, que pode conter itens iguais;
- um único objeto com comprimento fixo e altura “infinita” (faixa);
- todos os itens são retangulares.

Vale destacar que mesmo que seja possível a existência de itens com dimensões iguais em um problema-teste, os tipos de itens são muito diversificados e esta diversificação se mostrou bastante adequada em alguns dos modelos implementados nesta pesquisa. Além disso, apesar de existirem poucos itens iguais em um mesmo problema-teste, quando isto ocorre, estes dois (ou mais itens) são considerados itens diferentes, cada um com uma demanda de uma unidade.

Os problemas-teste de (HOPPER; TURTON, 2001a) foram desenvolvidos por seus autores de tal forma que a solução ótima para cada problema é conhecida, apresenta perda zero de material quando solucionados de maneira não-guilhotinada e permitindo a rotação ortogonal dos itens. Estes problemas-teste são denotados por $CiPj$, onde i representa sete categorias de objetos ($C1, C2, \dots, C7$) sendo que cada categoria contém três tipos de problemas ($P1, P2, P3$), conforme mostra a Tabela 5. As colunas 2, 3 e 4 desta tabela apresentam o total de itens de cada problema (este valor varia de 16 a 197 retângulos). A quinta coluna, indicada por W , mostra a largura dos objetos pertencentes a uma determinada categoria (observe que, quanto maior a categoria, maior a quantidade de itens presente nos problemas-teste e maior a largura do objeto). Na última coluna é dado o valor da altura ótima (H^*) do objeto em que os itens serão alocados quando é considerado o corte não-guilhotinado e permitindo a rotação ortogonal dos itens.

Tabela 5 – Problemas-teste de Hopper e Turton (2001).

Categorias	Número de itens			W	H*
	P1	P2	P3		
C1	16	17	16	20	20
C2	25	25	25	40	15
C3	28	29	28	60	30
C4	49	49	49	60	60
C5	73	73	73	60	90
C6	97	97	97	80	120
C7	196	197	196	160	240

Grupo 2: Neste segundo grupo apresentamos um conjunto contendo 16 instâncias conhecidas na literatura, tais instâncias estão divididas em dois conjuntos A e B. As instâncias apre-

sentadas neste grupo podem ser extraídas em <https://paginas.fe.up.pt/~esicup/datasets> ou em http://www.or.deis.unibo.it/research_pages/ORinstances/ORinstances.htm.

- Conjunto A: aqui temos 3 instâncias, denotadas por *cgcut1*, *cgcut2* e *cgcut3*, que foram introduzidas na Tabela 2 de (CHRISTOFIDES; WHITLOCK, 1977). Tais instâncias foram construídas para o problema de corte de estoque bidimensional guilhotinado e estão descritas da seguinte forma:

- *cgcut1*: Objeto inicial com largura $W = 10$, altura $H = 15$ e os sete tipos de itens, indexados por j , conforme apresentado na Tabela 6

Tabela 6 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)	Demanda (d_j)
1	8	4	2
2	3	7	1
3	8	2	3
4	3	4	5
5	3	3	2
6	3	2	2
7	2	1	1

- *cgcut2*: Objeto inicial com largura $W = 70$, altura $H = 40$ e os dez tipos de itens, indexados por j , conforme apresentado na Tabela 7

Tabela 7 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)	Demanda (d_j)
1	21	22	1
2	31	13	1
3	9	35	3
4	9	24	3
5	30	7	2
6	11	13	3
7	10	14	1
8	14	8	3
9	12	8	3
10	13	7	3

- *cgcut3*: Objeto inicial com largura $W = 70$, altura $H = 40$ e os vinte tipos de itens, indexados por j , conforme apresentado na Tabela 8

Tabela 8 – Dados relativos aos itens.

Tipo de item (j)	Largura (w_j)	Altura (h_j)	Demanda (d_j)
1	31	43	4
2	30	41	2
3	29	39	4
4	28	38	4
5	27	37	3
6	26	36	4
7	25	35	3
8	24	34	4
9	33	23	4
10	22	32	3
11	31	21	3
12	29	18	3
13	17	27	2
14	15	24	2
15	16	25	4
16	15	24	1
17	23	14	4
18	21	12	3
19	19	11	4
20	9	17	1

Vale ressaltar que adaptamos estas instâncias para o 2SP considerando o objeto inicial com a mesma largura, mas com altura ilimitada. Além disso, utilizamos os mesmos tipos de itens, entretanto como consideramos que a demanda é sempre unitária, quando tínhamos itens com demanda maior do que 1, consideramos como sendo itens diferentes, deste modo, as instâncias *cgcut1*, *cgcut2* e *cgcut3* passaram a conter 16, 23 e 62 itens, respectivamente.

- Conjunto B: neste conjunto temos as 12 instâncias apresentadas na Tabela 1 de (BEASLEY, 1985), juntamente com a única instância apresentada na Tabela 2 deste mesmo trabalho. Tais instâncias foram desenvolvidas para o problema de corte guilhotinado irrestrito e são denotadas por *gcut1*, *gcut2*, ..., *gcut13*. A dimensão do objeto inicial destas instâncias são: (250, 250) para *gcut1*, ..., *gcut4*; (500, 500) para *gcut5*, ..., *gcut8*; (1000, 1000) para *gcut9*, ..., *gcut12* e (3000, 3000) para a *gcut13*; além disso, os itens contidos em cada destas instâncias são diferentes, ou seja, todos os itens de todas as instâncias possuem demanda unitária. Estas instâncias também foram adaptadas para o 2SP considerando os mesmos itens e largura do objeto inicial.

Grupo 3: Para finalizar, temos um conjunto de 500 instâncias. Este conjunto é composto por 10 classes representadas por *Class1*, *Class2*, ..., *Class10*. Cada uma destas classes possui 50 problemas-teste, sendo 10 para cada valor de $n \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$. As seis primeiras classes foram introduzidas em (BERKEY; WANG, 1987) de acordo com a seguinte estrutura:

- *Class1*: $W = 10$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 10]$;
- *Class2*: $W = 30$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 10]$;
- *Class3*: $W = 40$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 35]$;
- *Class4*: $W = 100$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 35]$;
- *Class5*: $W = 100$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 100]$;
- *Class6*: $W = 300$, w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória no intervalo $[1, 100]$.

As próximas quatro classes (*Class7*, *Class8*, *Class9* e *Class10*) foram apresentadas por (MARTELLO; VIGO, 1998) e são baseadas na geração de itens de quatro tipos diferentes do seguinte modo:

- tipo 7: w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória nos intervalos $[\frac{2W}{3}, W]$ e $[1, \frac{H}{2}]$, respectivamente;
- tipo 8: w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória nos intervalos $[1, \frac{W}{2}]$ e $[\frac{2H}{3}, H]$, respectivamente;
- tipo 9: w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória nos intervalos $[\frac{W}{2}, W]$ e $[\frac{H}{2}, H]$, respectivamente;
- tipo 10: w_i e h_i são uniformemente distribuídos de forma aleatória nos intervalos $[1, \frac{W}{2}]$ e $[1, \frac{H}{2}]$, respectivamente.

Logo, cada classe (*Classk*, com $k = 7, 8, 9, 10$) é obtida por meio da geração de um item do tipo k com uma probabilidade de 70%, e cada tipo restante com uma probabilidade de 10%. A largura da faixa é sempre definida por $W = 100$. As 500 instâncias, bem como o código gerador, estão disponíveis em http://www.or.deis.unibo.it/research_pages/ORinstances/ORinstances.htm.

Note que mesmo que seja possível a existência de itens com dimensões iguais em um problema-teste, neste trabalho consideramos todos os itens como sendo diferentes.

4.2 Análise dos experimentos computacionais

A seguir, são apresentados os resultados obtidos a partir dos três grupos de instâncias expostos na Seção 4.1, com relação aos modelos matemáticos descritos no anteriormente para o 2LSP. As Tabelas 10, 11, 12 e 13 apresentam os resultados das instâncias do Grupo 1, as Tabelas 14, 15, 16 e 17 das instâncias do Grupo 2 e, das instâncias do Grupo 3, as Tabelas 18, 19, 20 e 21.

Para os Grupos 1 e 2, consideramos as colunas das Tabelas 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 dispostas da seguinte maneira:

- a coluna Instâncias indica o nome do problema-teste utilizado;
- a segunda coluna, indicada por n , representa o número de itens da instância;
- as seções Lodi et al., Mehdi Mrad, M1, M1desig, M2, M2desig e M3 contém as colunas z (valor da função objetivo analisada), lb (melhor limitante inferior no tempo de execução), NV (número de variáveis do modelo reduzido, ou seja, após o pré-processamento do CPLEX), gap (gap em porcentagem) e t (tempo de execução, em segundos de CPU).

Já para a coleção de 500 instâncias do Grupo 3, as colunas das Tabelas 9, 18, 19, 20 e 21 estão dispostas como segue:

- a coluna Instâncias indica a classe de problemas utilizada;
- a segunda coluna, indicada por n , representa o número de itens das instâncias;
- as seções Lodi et al., Mehdi Mrad, M1, M1desig, M2, M2desig, M3 e M4 contém as colunas N_R (número de instâncias resolvidas na otimalidade), NV_{Me} (número médio de variáveis do modelo reduzido, ou seja, após o pré-processamento do CPLEX), G_{Me} (gap médio em porcentagem) e t_{Me} (tempo médio de execução, em segundos de CPU).

Note que os valores que estão em negrito nas tabelas indicam que a solução ótima foi encontrada, * indica que o CPLEX resolveu a instância durante o pré-processamento e, indicamos por TL, quando a instância atinge o limite de tempo de execução fixado (3600 segundos).

Observação 5. Vale ressaltar que os resultados obtidos pela formulação M4 não serão comparados com os demais modelos porque seu desempenho foi muito inferior. Em várias situações, o CPLEX nem consegue carregar o modelo/obter uma solução inicial no tempo limite. Por exemplo, na Tabela 9 comparamos os resultados obtidos pelo modelo Lodi et al. (2004) com os obtidos pela formulação M4. Indicamos por N_{CR} o número de instâncias que o CPLEX não conseguiu nem carregar o modelo/obter uma solução inicial no tempo limite.

Tabela 9 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004) e M4 para as instâncias da *Class2*.

Instâncias	<i>n</i>	Lodi et al. (2004)					M4				
		N_R	N_{CR}	$NV_{Me}(\times 10^2)$	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	N_{CR}	$NV_{Me}(\times 10^4)$	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$
<i>Class2</i>	20	10	0	2.03	0.00	2.78	8	0	2.99	1.53	1128.12
	40	10	0	8.11	0.00	13.62	0	0	6.26	5.92	TL
	60	6	0	18.19	1.07	1898.14	0	0	11.60	43.13	TL
	80	1	0	32.28	2.70	3375.30	0	4	17.11	52.13	TL
	100	0	0	50.24	2.93	TL	0	10	23.34	—	TL

Como pode ser visto na Tabela 9, considerando o tempo limite de 1 hora de execução, o CPLEX foi capaz de encontrar a solução ótima em 27 das 50 instâncias contidas na *Class2* (ou seja, em 54%) para o modelo de (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004). Entretanto, para a formulação matemática M4 o CPLEX só foi capaz de provar a otimalidade em 8 instâncias (isto é, em 16% das instâncias avaliadas). Além disso, podemos observar que o *gap* médio para as instâncias com 80 itens é de 2.70% no modelo da literatura, enquanto que em M4 este *gap* é muito superior (52.13%). Mais ainda, nas instâncias contendo 100 itens, o CPLEX nem consegue carregar o modelo/obter uma solução inicial no tempo limite para a formulação M4. Portanto, podemos concluir que, para este problema, a extensão do modelo (FURINI; MALAGUTI; THOMOPULOS, 2016) não se mostrou vantajosa, principalmente devido ao número de variáveis necessárias para a construção do modelo matemático.

4.2.1 Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 1

Na Tabela 10 fazemos uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo M1 com os obtidos pela formulação M1desig. Lembre-se de que a formulação matemática M1desig nada mais é do que modelo M1 com a inclusão das desigualdades (3.16) e (3.17). Analizando os resultados obtidos utilizando o tempo limite de 1 hora de execução para cada instância, vemos que a inclusão dessas desigualdades melhoram o desempenho do modelo M1. De fato, note que o modelo M1desig consegue provar a otimalidade de uma instância a mais do que M1 (a instância C6P2). Além disso, M1desig diminui o tempo de execução bem como o valor do *gap* em todas as instâncias do Grupo 1 (ver Tabela 10).

A Tabela 11 deixa claro o impacto positivo da inserção das desigualdades (3.25) e (3.26) no modelo M2. Considerando o tempo limite de 1 hora de execução para cada instância, temos que a formulação matemática M2desig (modelo M2 com a inclusão das desigualdades válidas) apresenta um *gap* muito inferior ao apresentado pela modelagem M2 (isto acontece em todas as instâncias que estes modelos não conseguiram obter o resultado ótimo). Por exemplo, na instância C7P1 o *gap* que era 75.59%, diminui para 4.64% após a inclusão das desigualdades válidas (ver Tabela 11).

Tabela 10 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 1.

Instâncias	n	M1					M1desig				
		z	lb	NV	gap(%)	t(s)	z	lb	NV	gap(%)	t(s)
C1P1	16	27	27	118	0.00	1.32	27	27	118	0.00	0.41
C1P2	17	29	29	135	0.00	0.05	29	29	135	0.00	0.57
C1P3	16	23	23	119	0.00	0.02	23	23	119	0.00	0.01
C2P1	25	20	20	318	0.00	2.46	20	20	320	0.00	0.47
C2P2	25	34	34	316	0.00	0.80	34	34	318	0.00	0.19
C2P3	25	23	23	312	0.00	0.03	23	23	318	0.00	0.03
C3P1	28	40	40	401	0.00	0.82	40	40	401	0.00	0.41
C3P2	29	42	42	429	0.00	0.83	42	42	431	0.00	0.15
C3P3	28	43	43	400	0.00	0.88	43	43	400	0.00	0.40
C4P1	49	74	74	1220	0.00	2.79	74	74	1220	0.00	2.39
C4P2	49	74	74	1219	0.00	1.76	74	74	1220	0.00	0.57
C4P3	49	80	80	1219	0.00	2.21	80	80	1222	0.00	0.60
C5P1	73	100	100	2694	0.00	168.23	100	100	2694	0.00	20.03
C5P2	73	106	106	2683	0.00	2.97	106	106	2687	0.00	1.97
C5P3	73	106	104	2692	2.90	TL	106	105	2693	1.17	TL
C6P1	97	136	134	4729	1.65	TL	136	134	4730	1.16	TL
C6P2	97	145	143	4730	1.12	TL	145	145	4733	0.00	213.91
C6P3	97	139	139	4729	0.00	2313.84	139	139	4635	0.00	58.75
C7P1	196	261	254	19301	2.81	TL	262	255	19301	2.81	TL
C7P2	197	283	277	19482	2.04	TL	283	277	19487	2.05	TL
C7P3	196	273	267	19300	2.28	TL	272	267	19300	1.90	TL

Tabela 11 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 1.

Instâncias	n	M2					M2desig				
		z	lb	NV	gap(%)	t(s)	z	lb	NV	gap(%)	t(s)
C1P1	16	27	27	148	0.00	0.64	27	27	134	0.00	1.39
C1P2	17	29	29	166	0.00	0.20	29	29	151	0.00	1.06
C1P3	16	23	23	148	0.00	0.90	23	23	134	0.00	0.75
C2P1	25	20	20	346	0.00	0.51	20	20	323	0.00	0.84
C2P2	25	34	34	346	0.00	0.67	34	34	323	0.00	1.04
C2P3	25	23	23	346	0.00	0.55	23	23	323	0.00	0.83
C3P1	28	40	40	430	0.00	1.46	40	40	404	0.00	1.15
C3P2	29	42	43	460	0.00	1.43	42	42	433	0.00	1.37
C3P3	28	43	43	430	0.00	1.52	43	43	404	0.00	1.39
C4P1	49	74	52	1270	30.34	TL	74	70	1223	4.84	TL
C4P2	49	74	55	1270	25.78	TL	74	71	1223	4.52	TL
C4P3	49	80	63	1270	21.54	TL	80	77	1223	4.33	TL
C5P1	73	100	53	2770	46.85	TL	101	93	2699	7.99	TL
C5P2	73	106	59	2770	44.15	TL	106	102	2699	3.74	TL
C5P3	73	106	63	2770	40.82	TL	106	101	2699	4.29	TL
C6P1	97	136	60	4846	55.66	TL	136	129	4751	5.37	TL
C6P2	97	145	77	4846	46.62	TL	145	136	4751	5.97	TL
C6P3	97	139	71	4751	49.24	TL	139	134	4656	3.43	TL
C7P1	196	261	64	19498	75.59	TL	261	249	19304	4.64	TL
C7P2	197	283	106	19696	62.70	TL	283	261	19501	7.65	TL
C7P3	196	273	94	19498	65.67	TL	273	255	19304	6.42	TL

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 12 e 13 é possível perceber que os modelos mais eficientes para as instâncias do Grupo 1 são Lodi et al. (2004) e M1desig. Consi-

derando o tempo limite de 1 hora de execução, ambos os modelos foram capazes de encontrar a solução ótima em 16 das 21 instâncias contidas neste grupo (ou seja, em 76,2%), porém a formulação M1desig forneceu um limitante dual de melhor qualidade. O modelo Mehdi Mrad (2015) conseguiu provar a otimalidade em 61,9% das instâncias enquanto que M2desig provou a otimalidade de 42,9%. Entretanto, M2desig conseguiu obter soluções factíveis de boa qualidade para todas as instâncias deste grupo, além disso, esta formulação apresentou número de variáveis e gap muito inferior ao apresentado pela formulação Mehdi Mrad (2015). Já o modelo M3 foi o que apresentou resultados menos eficientes para as instâncias do Grupo 1. Neste modelo, o CPLEX encontrou o valor ótimo em 33,3% das instâncias, apresentou o gap mais alto, 51,02%, e o maior número de variáveis no modelo após o pré-processamento.

Observação 6. Vale ressaltar que estes resultados, na medida em que tratam do 2LSP guilhotinado e sem a rotação dos itens, têm soluções com alturas maiores que as alturas ótimas encontradas nos problemas-teste solucionados (segundo sua formulação original) de forma não-guilhotinada e com a rotação dos itens permitida.

Tabela 12 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 1.

Instâncias	<i>n</i>	Lodi et al.					Mehdi Mrad					M1desig				
		<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)	<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)	<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)
C1P1	16	27	27	118	0.00	0.65	27	27	426	0.00	0.71	27	27	118	0.00	0.41
C1P2	17	29	29	135	0.00	0.03	29	29	644	0.00	0.57	29	29	135	0.00	0.57
C1P3	16	23	23	119	0.00	0.02	23	23	473	0.00	0.25	23	23	119	0.00	0.01
C2P1	25	20	20	318	0.00	0.61	20	20	2947	0.00	1.67	20	20	320	0.00	0.47
C2P2	25	34	34	316	0.00	0.33	34	34	4517	0.00	1.67	34	34	318	0.00	0.19
C2P3	25	23	23	312	0.00	0.03	23	23	3450	0.00	0.77	23	23	318	0.00	0.03
C3P1	28	40	40	401	0.00	0.26	40	40	5075	0.00	17.05	40	40	401	0.00	0.41
C3P2	29	42	42	429	0.00	1.12	42	42	10920	0.00	70.72	42	42	431	0.00	0.15
C3P3	28	43	43	400	0.00	0.76	43	43	7287	0.00	8.06	43	43	400	0.00	0.40
C4P1	49	74	74	1220	0.00	1.98	74	74	15777	0.00	1786.19	74	74	1220	0.00	2.39
C4P2	49	74	74	1219	0.00	0.77	74	74	18343	0.00	231.17	74	74	1220	0.00	0.57
C4P3	49	80	80	1219	0.00	1.50	80	80	16927	0.00	98.94	80	80	1222	0.00	0.60
C5P1	73	100	100	2694	0.00	74.68	100	98	21769	1.84	TL	100	100	2694	0.00	20.03
C5P2	73	106	106	2683	0.00	4.64	106	106	39982	0.00	1285.56	106	106	2687	0.00	1.97
C5P3	73	106	104	2692	1.97	TL	106	104	24993	2.09	TL	106	105	2693	1.17	TL
C6P1	97	136	134	4729	1.63	TL	137	130	64047	5.00	TL	136	134	4730	1.16	TL
C6P2	97	145	145	4730	0.00	2367.81	149	136	98851	8.59	TL	145	145	4733	0.00	213.91
C6P3	97	139	139	4729	0.00	61.99	139	135	71082	2.69	TL	139	139	4635	0.00	58.75
C7P1	196	261	254	19301	2.68	TL	365	252	443554	31.06	TL	262	255	19301	2.67	TL
C7P2	197	283	277	19482	2.12	TL	346	266	701978	23.04	TL	283	277	19487	2.12	TL
C7P3	196	273	267	19300	2.30	TL	413	259	620683	37.20	TL	272	267	19300	1.90	TL

Tabela 13 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 1.

Instâncias	<i>n</i>	M2desig					M3				
		<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)	<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)
<i>C1P1</i>	16	27	27	134	0.00	1.39	27	27	713	0.00	1.18
<i>C1P2</i>	17	29	29	151	0.00	1.06	29	29	1026	0.00	1.48
<i>C1P3</i>	16	23	23	134	0.00	0.75	23	23	722	0.00	0.46
<i>C2P1</i>	25	20	20	323	0.00	0.84	20	20	4166	0.00	930.38
<i>C2P2</i>	25	34	34	323	0.00	1.04	34	34	6351	0.00	18.95
<i>C2P3</i>	25	23	23	323	0.00	0.83	23	23	4609	0.00	3.81
<i>C3P1</i>	28	40	40	404	0.00	1.15	40	35	7478	13.47	TL
<i>C3P2</i>	29	42	42	433	0.00	1.37	42	42	15987	0.00	75.19
<i>C3P3</i>	28	43	43	404	0.00	1.39	43	40	11290	8.05	TL
<i>C4P1</i>	49	74	70	1223	4.84	TL	74	65	22341	12.24	TL
<i>C4P2</i>	49	74	71	1223	4.52	TL	74	72	26006	2.71	TL
<i>C4P3</i>	49	80	77	1223	4.33	TL	80	77	23102	3.91	TL
<i>C5P1</i>	73	101	93	2699	7.99	TL	100	93	27115	6.87	TL
<i>C5P2</i>	73	106	102	2699	3.74	TL	106	103	50970	2.63	TL
<i>C5P3</i>	73	106	101	2699	4.29	TL	106	101	32302	4.71	TL
<i>C6P1</i>	97	136	129	4751	5.37	TL	136	123	78896	9.83	TL
<i>C6P2</i>	97	145	136	4751	5.97	TL	156	134	120124	14.17	TL
<i>C6P3</i>	97	139	134	4656	3.43	TL	139	134	84805	3.84	TL
<i>C7P1</i>	196	261	249	19304	4.64	TL	374	241	503729	35.63	TL
<i>C7P2</i>	197	283	261	19501	7.65	TL	574	262	795143	54.29	TL
<i>C7P3</i>	196	273	255	19304	6.42	TL	494	242	699989	51.02	TL

4.2.2 Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 2

As Tabelas 14 e 15 comparam os resultados obtidos pelos modelos M1 (M2) com os obtidos pela formulação M1desig (M2desig). No que diz respeito a provar a otimalidade, neste grupo de instâncias, a inclusão das desigualdades válidas não altera a quantidade de soluções ótimas encontrada pelos modelos.

Tabela 14 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 2.

Instâncias	<i>n</i>	M1					M1desig				
		<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)	<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)
<i>cgcut1</i>	16	28	28	114	0.00	0.63	28	28	115	0.00	1.09
<i>cgcut2</i>	23	78	78	268	0.00	1.40	78	78	264	0.00	0.49
<i>cgcut3</i>	62	711	711	1577	0.00	1.03	711	711	1566	0.00	0.84
<i>gcut1</i>	10	1016	1016	*	0.00	0.01	1016	1016	*	0.00	0.01
<i>gcut2</i>	20	1262	1262	121	0.00	0.05	1262	1262	121	0.00	0.04
<i>gcut3</i>	30	1810	1810	238	0.00	0.02	1810	1810	238	0.00	0.02
<i>gcut4</i>	50	3126	3126	826	0.00	1.02	3126	3126	826	0.00	0.36
<i>gcut5</i>	10	1360	1360	39	0.00	0.02	1360	1360	39	0.00	0.02
<i>gcut6</i>	20	2862	2862	117	0.00	0.63	2862	2862	117	0.00	0.66
<i>gcut7</i>	30	4979	4979	108	0.00	0.25	4979	4979	108	0.00	0.56
<i>gcut8</i>	50	6168	6168	837	0.00	0.34	6168	6168	837	0.00	1.00
<i>gcut9</i>	10	2646	2646	17	0.00	0.04	2646	2646	17	0.00	0.04
<i>gcut10</i>	20	6167	6167	87	0.00	0.03	6167	6167	87	0.00	0.03
<i>gcut11</i>	30	7298	7298	292	0.00	0.22	7298	7298	292	0.00	0.18
<i>gcut12</i>	50	14943	14943	580	0.00	0.04	14943	14943	580	0.00	0.04
<i>gcut13</i>	32	5357	5357	501	0.00	294.41	5357	5357	501	0.00	332.13

Como pode ser visto na Tabela 14, tanto o modelo M1 como M1desig foram capazes de provar a otimalidade em todas as instâncias do Grupo 2, utilizando o tempo limite de 1 hora de execução para cada instância. Considerando este mesmo tempo limite, podemos observar na Tabela 15 que, assim como acontece com as instâncias do Grupo 1, a inclusão das desigualdades (3.25) e (3.26) no modelo M2 apresentou uma melhora significativa no valor do *gap* (ver, por exemplo, a instância *gcut8*).

Tabela 15 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 2.

Instâncias	<i>n</i>	M2					M2desig				
		<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)	<i>z</i>	<i>lb</i>	<i>NV</i>	<i>gap</i> (%)	<i>t</i> (s)
<i>cgcut1</i>	16	28	28	147	0.00	2.07	28	28	133	0.00	2.69
<i>cgcut2</i>	23	78	68	295	12.37	TL	78	77	274	1.85	TL
<i>cgcut3</i>	62	713	642	2011	9.89	TL	712	649	1951	8.85	TL
<i>gcut1</i>	10	1016	1016	6	0.00	0.04	1016	1016	1	0.00	0.02
<i>gcut2</i>	20	1262	1262	219	0.00	16.96	1262	1262	201	0.00	28.33
<i>gcut3</i>	30	1810	1810	474	0.00	4.08	1810	1810	446	0.00	1.64
<i>gcut4</i>	50	3126	2794	1264	10.63	TL	3126	2967	1217	5.09	TL
<i>gcut5</i>	10	1360	1360	60	0.00	0.51	1360	1360	52	0.00	0.52
<i>gcut6</i>	20	2862	2862	224	0.00	5.43	2862	2862	206	0.00	8.29
<i>gcut7</i>	30	4979	4979	258	0.00	13.67	4979	4979	238	0.00	30.26
<i>gcut8</i>	50	6220	4888	1264	21.42	TL	6168	5881	1217	4.65	TL
<i>gcut9</i>	10	2646	2646	38	0.00	0.55	2646	2646	32	0.00	0.39
<i>gcut10</i>	20	6167	6167	192	0.00	2.40	6167	6167	175	0.00	1.84
<i>gcut11</i>	30	7298	6574	482	9.92	TL	7298	6966	454	4.55	TL
<i>gcut12</i>	50	14943	14943	1163	0.00	173.93	14943	14943	1118	0.00	111.97
<i>gcut13</i>	32	5357	3974	556	25.82	TL	5357	4965	526	7.32	TL

Como pode ser visto nas Tabelas 16 e 17, considerando o tempo limite de 1 hora de execução, tanto o modelo Lodi et al. (2004) quanto o modelo M1desig conseguiram provar a otimalidade em todas as instâncias do Grupo 2. Além disso, essas duas formulações apresentam resultados muito parecidos com relação ao tempo de execução e número de variáveis do modelo após o pré-processamento do CPLEX. Logo, estes dois modelos também são os mais eficientes para este grupo de instâncias. Os modelos Mehdi Mrad (2015) e M3 só não conseguiram provar a otimalidade de uma instância (*gcut13*). Entretanto, a formulação Mehdi Mrad (2015) obteve um *gap* de 4.74% enquanto que o modelo M3 apresentou *gap* de 6.06%, além disso, o número de variáveis desta formulação é inferior ao apresentado por M3. Diferente do que acontece com as instâncias do Grupo 1, para as instâncias do Grupo 2, o modelo M2desig é o menos eficiente, esta formulação provou a otimalidade de 10 das 16 instâncias deste grupo (ou seja, em 62.5%) e apresentou o *gap* mais alto, 8.85%, para a instância *cgcut3*.

Tabela 16 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 2.

Instâncias	n	Lodi et al.					Mehdi Mrad					M1desig				
		z	lb	NV	gap(%)	t(s)	z	lb	NV	gap(%)	t(s)	z	lb	NV	gap(%)	t(s)
cgcut1	16	28	28	114	0.00	0.55	28	28	115	0.00	0.45	28	28	115	0.00	1.09
cgcut2	23	78	78	268	0.00	1.77	78	78	1840	0.00	4.36	78	78	264	0.00	0.49
cgcut3	62	711	711	1577	0.00	1.89	711	711	1832	0.00	1.44	711	711	1566	0.00	0.84
gcut1	10	1016	1016	*	0.00	0.01	1016	1016	*	0.00	0.01	1016	1016	*	0.00	0.01
gcut2	20	1262	1262	121	0.00	0.04	1262	1262	146	0.00	0.24	1262	1262	121	0.00	0.04
gcut3	30	1810	1810	238	0.00	0.02	1810	1810	238	0.00	0.01	1810	1810	238	0.00	0.02
gcut4	50	3126	3126	826	0.00	0.40	3126	3126	1016	0.00	0.88	3126	3126	826	0.00	0.36
gcut5	10	1360	1360	39	0.00	0.02	1360	1360	39	0.00	0.01	1360	1360	39	0.00	0.02
gcut6	20	2862	2862	117	0.00	0.52	2862	2862	115	0.00	0.67	2862	2862	117	0.00	0.66
gcut7	30	4979	4979	108	0.00	0.29	4979	4979	145	0.00	0.72	4979	4979	108	0.00	0.56
gcut8	50	6168	6168	837	0.00	0.14	6168	6168	1895	0.00	0.67	6168	6168	837	0.00	1.00
gcut9	10	2646	2646	17	0.00	0.04	2646	2646	24	0.00	0.01	2646	2646	17	0.00	0.04
gcut10	20	6167	6167	87	0.00	0.03	6167	6167	85	0.00	0.01	6167	6167	87	0.00	0.03
gcut11	30	7298	7298	292	0.00	0.44	7298	7298	449	0.00	0.02	7298	7298	292	0.00	0.18
gcut12	50	14943	14943	580	0.00	0.08	14943	14943	607	0.00	0.03	14943	14943	580	0.00	0.04
gcut13	32	5357	5357	501	0.00	272.41	5357	5103	53242	4.74	TL	5357	5357	501	0.00	332.13

Tabela 17 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 2.

Instâncias	n	M2desig					M3				
		z	lb	NV	gap(%)	t(s)	z	lb	NV	gap(%)	t(s)
cgcut1	16	28	28	133	0.00	2.69	28	28	133	0.00	0.07
cgcut2	23	78	77	274	1.85	TL	78	78	3367	0.00	6.11
cgcut3	62	712	649	1951	8.85	TL	711	711	3192	0.00	0.82
gcut1	10	1016	1016	1	0.00	0.02	1016	1016	*	0.00	0.01
gcut2	20	1262	1262	201	0.00	28.33	1262	1262	263	0.00	1.03
gcut3	30	1810	1810	446	0.00	1.64	1810	1810	286	0.00	0.02
gcut4	50	3126	2967	1217	5.09	TL	3126	3126	1553	0.00	0.49
gcut5	10	1360	1360	52	0.00	0.52	1360	1360	58	0.00	0.01
gcut6	20	2862	2862	206	0.00	8.29	2862	2862	148	0.00	0.42
gcut7	30	4979	4979	238	0.00	30.26	4979	4979	108	0.00	0.59
gcut8	50	6168	5881	1217	4.65	TL	6168	6168	3438	0.00	0.25
gcut9	10	2646	2646	32	0.00	0.39	2646	2646	16	0.00	0.41
gcut10	20	6167	6167	175	0.00	1.84	6167	6167	137	0.00	0.02
gcut11	30	7298	6966	454	4.55	TL	7298	7298	804	0.00	0.04
gcut12	50	14943	14943	1118	0.00	111.97	14943	14943	936	0.00	0.06
gcut13	32	5357	4965	526	7.32	TL	5371	5045	310332	6.06	TL

4.2.3 Análise dos resultados obtidos pelo Grupo 3

Análogo ao que acontece com os dois primeiros grupos de instâncias, para o Grupo 3 a inclusão das desigualdades válidas também melhoram o desempenho dos modelos. Considerando o tempo limite de 1 hora de execução para cada instância, o modelo M1 provou a otimalidade em 83.8% das instâncias, enquanto que M1desig foi capaz de provar a otimalidade em 86.4%, como mostra a Tabela 18. Na Tabela 19 podemos observar que os modelos M2 e M2desig provaram a otimalidade em 23.2% e 25.2% das instâncias, respectivamente. Entretanto, a formulação

M2desig apresenta um *gap* médio bem inferior ao apresentado pelo o modelo M2.

Tabela 18 – Desempenho dos modelos M1 e M1desig para as instâncias do Grupo 3.

Instâncias	n	M1				M1desig			
		N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$
Class1	20	10	92.70	0.00	1.77	10	92.80	0.00	0.20
	40	10	374.10	0.00	2.94	10	361.00	0.00	0.34
	60	10	787.20	0.00	2.82	10	773.40	0.00	0.62
	80	10	1287.00	0.00	1.45	10	1272.10	0.00	0.39
	100	9	2254.10	0.05	364.96	10	2152.40	0.00	5.23
Class2	20	10	203.00	0.00	3.72	10	203.40	0.00	0.41
	40	10	810.80	0.00	11.47	10	812.20	0.00	1.85
	60	5	1818.90	1.54	2133.59	9	1821.90	0.37	780.76
	80	0	3227.90	3.01	TL	4	3232.00	1.54	2519.72
	100	0	5034.50	3.10	TL	1	5039.40	2.17	3394.96
Class3	20	10	130.80	0.00	3.56	10	131.10	0.00	0.47
	40	10	518.00	0.00	3.50	10	516.40	0.00	0.50
	60	10	1115.30	0.00	4.13	10	1115.80	0.00	0.60
	80	10	1862.40	0.00	3.45	10	1863.70	0.00	0.62
	100	10	3135.70	0.00	7.30	10	3137.80	0.00	3.55
Class4	20	10	206.40	0.00	3.28	10	206.60	0.00	0.57
	40	10	816.60	0.00	5.54	10	816.60	0.00	2.30
	60	9	1826.30	0.06	457.90	10	1826.50	0.00	283.69
	80	4	3236.50	0.65	2378.42	6	3236.50	0.36	1736.23
	100	1	5046.10	1.40	3422.10	1	5046.10	1.30	3437.21
Class5	20	10	108.80	0.00	1.46	10	108.70	0.00	0.32
	40	10	421.80	0.00	3.34	10	421.40	0.00	0.39
	60	10	895.50	0.00	3.53	10	894.20	0.00	0.53
	80	10	1457.60	0.00	3.60	10	1456.60	0.00	0.49
	100	10	2525.40	0.00	12.77	10	2525.10	0.00	4.31
Class6	20	10	206.80	0.00	3.38	10	206.80	0.00	0.64
	40	10	816.70	0.00	11.95	10	816.70	0.00	2.95
	60	10	1826.80	0.00	335.94	9	1826.80	0.02	456.19
	80	5	3236.90	0.31	2933.02	5	3236.90	0.30	2389.44
	100	0	5046.90	1.06	TL	0	5046.90	0.93	TL
Class7	20	10	34.20	0.00	0.33	10	30.00	0.00	0.14
	40	10	125.20	0.00	0.91	10	116.10	0.00	0.29
	60	10	288.70	0.00	2.02	10	282.00	0.00	0.45
	80	10	458.20	0.00	1.43	10	454.70	0.00	0.35
	100	10	762.00	0.00	1.38	10	756.60	0.00	0.47
Class8	20	10	169.50	0.00	2.99	10	169.50	0.00	0.78
	40	8	606.10	0.26	853.31	8	606.00	0.24	756.67
	60	3	1455.20	0.72	2535.46	3	1455.10	0.69	2531.20
	80	2	2466.50	0.44	2910.72	3	2466.20	0.39	2577.01
	100	3	3898.40	0.38	2833.49	3	3898.20	0.41	2682.46
Class9	20	10	22.50	0.00	0.05	10	24.60	0.00	0.02
	40	10	107.90	0.00	0.06	10	111.40	0.00	0.03
	60	10	255.10	0.00	0.09	10	246.60	0.00	0.10
	80	10	496.60	0.00	0.15	10	493.80	0.00	0.07
	100	10	924.80	0.00	0.50	10	921.60	0.00	0.11
Class10	20	10	148.20	0.00	2.25	10	148.20	0.00	0.43
	40	10	572.20	0.00	5.31	10	572.20	0.00	0.73
	60	10	1356.70	0.00	23.76	10	1356.60	0.00	5.55
	80	10	2439.90	0.00	20.65	10	2439.80	0.00	5.19
	100	10	3875.60	0.00	165.15	10	3875.80	0.00	41.78

Tabela 19 – Desempenho dos modelos M2 e M2desig para as instâncias do Grupo 3.

Instâncias	n	M2				M2desig			
		N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$
Class1	20	10	189.70	0.00	4.17	10	189.70	0.00	10.06
	40	2	775.00	2.76	2894.91	2	775.00	2.86	2886.29
	60	0	1759.50	16.89	TL	0	1759.50	6.00	TL
	80	0	3099.20	44.66	TL	0	3099.20	6.98	TL
	100	0	4909.90	57.64	TL	0	4909.90	4.45	TL
Class2	20	10	208.00	0.00	3.38	10	208.00	0.00	7.92
	40	0	818.00	31.78	TL	0	818.00	7.92	TL
	60	0	1828.00	54.02	TL	0	1828.00	6.87	TL
	80	0	3238.00	66.22	TL	0	3238.00	5.74	TL
	100	0	5048.00	73.77	TL	0	5048.00	4.58	TL
Class3	20	10	197.70	0.00	3.91	10	197.70	0.00	10.64
	40	2	790.50	2.87	2897.88	2	790.50	2.86	2888.64
	60	0	1789.30	7.33	TL	0	1789.30	6.14	TL
	80	0	3138.20	49.56	TL	0	3138.20	9.09	TL
	100	0	4996.40	64.70	TL	0	4996.40	7.89	TL
Class4	20	10	208.00	0.00	2.22	10	208.00	0.00	4.24
	40	0	818.00	26.82	TL	0	818.00	6.96	TL
	60	0	1828.00	51.75	TL	0	1828.00	7.11	TL
	80	0	3238.00	63.50	TL	0	3238.00	6.58	TL
	100	0	5048.00	68.88	TL	0	5048.00	5.79	TL
Class5	20	10	190.30	0.00	5.99	10	190.30	0.00	5.45
	40	3	773.00	2.16	2533.95	3	773.00	2.13	2525.98
	60	0	1744.10	9.87	TL	0	1744.10	4.18	TL
	80	0	3059.60	50.44	TL	0	3059.60	9.31	TL
	100	0	4956.80	64.24	TL	0	4956.80	7.53	TL
Class6	20	10	208.00	0.00	0.88	10	208.00	0.00	6.19
	40	0	818.00	24.66	TL	0	818.00	7.68	TL
	60	0	1828.00	49.22	TL	0	1828.00	7.52	TL
	80	0	3238.00	62.59	TL	0	3238.00	6.67	TL
	100	0	5048.00	67.87	TL	0	5048.00	6.22	TL
Class7	20	10	177.20	0.00	6.31	10	177.20	0.00	5.48
	40	2	787.40	2.32	2894.74	7	787.40	0.15	1105.86
	60	0	1777.00	28.31	TL	1	1777.00	3.52	3289.86
	80	0	3140.80	54.22	TL	0	3140.80	9.81	TL
	100	0	4914.20	66.53	TL	0	4914.20	11.94	TL
Class8	20	10	207.00	0.00	34.53	10	207.00	0.00	100.30
	40	0	807.90	26.41	TL	0	807.90	6.86	TL
	60	0	1822.10	46.99	TL	0	1822.10	5.89	TL
	80	0	3220.60	69.26	TL	0	3220.60	5.65	TL
	100	0	5034.50	80.55	TL	0	5034.50	5.19	TL
Class9	20	10	112.30	0.00	4.00	10	112.30	0.00	2.69
	40	7	657.10	4.07	1158.40	10	657.10	0.00	82.88
	60	0	1604.80	27.83	TL	1	1604.80	9.29	3245.06
	80	0	2770.90	41.05	TL	0	2770.90	12.11	TL
	100	0	4834.60	62.44	TL	0	4834.60	17.11	TL
Class10	20	10	185.00	0.00	22.68	10	185.00	0.00	12.51
	40	0	769.20	9.10	TL	0	769.20	3.96	TL
	60	0	1760.50	17.91	TL	0	1760.50	4.59	TL
	80	0	3171.40	31.23	TL	0	3171.40	5.37	TL
	100	0	4971.80	53.14	TL	0	4971.80	6.08	TL

Com relação a este terceiro e último grupo de instâncias analisadas, utilizando o tempo limite de 1 hora de execução para cada instância, os modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1desig, M2desig e M3 foram capazes de encontrar a solução ótima para 84.6%, 76.6%, 86.4%, 25.2% e 64.4% das instâncias, respectivamente. Note que, análogo ao que aconteceu com as instâncias do Grupo 2, o modelo que obteve o pior desempenho foi o M2desig. Veja também que, Mehdi Mrad (2015) e M3, embora apresentem um melhor desempenho que M2desig, possuem um desempenho inferior a Lodi et al. (2004) e M1desig. No que diz respeito a provar a otimalidade, o melhor desempenho é do modelo M1desig, seguido do modelo Lodi et al. (2004), como mostram as Tabelas 20 e 21. Vale ressaltar que todos os modelos, exceto o M2desig, se mostraram bastante eficientes para as instâncias das classes 1, 3, 5, 7, 9 e 10; para as demais classes o desempenho dos modelos foi inferior. Por exemplo, o pior desempenho apresentado por todos os modelos ocorreu na *Class2*. Nesta classe de instâncias, os modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1desig, M2desig e M3 foram capazes de provar a otimalidade em apenas 54%, 40%, 68%, 20% e 24% das instâncias, respectivamente. Observe também que o CPLEX foi capaz de encontrar a solução ótima em apenas 1 instância com 100 itens da *Class2* para o modelo M1desig e nenhuma para as demais formulações. Com relação ao número médio de variáveis dos modelos após o pré-processamento do CPLEX, podemos observar que as formulações Lodi et al. (2004), M1desig e M2desig apresentam uma quantidade muito semelhante de variáveis, já os modelos Mehdi Mrad (2015) e M3 apresentam uma quantidade mais elevada; o que já era esperado, pois as modelagens Lodi et al. (2004), M1desig e M2desig são polinomiais, enquanto que as formulações Mehdi Mrad (2015) e M3 são pseudopolinomiais. Note ainda que, somente na *Class8*, o modelo apresentado em (MRAD, 2015) supera os demais modelos quanto ao número de instâncias resolvidas na otimalidade, o que se deve ao fato desta classe conter multiplicidade de itens mais elevada.

Tabela 20 – Desempenho dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015) e M1desig para as instâncias do Grupo 3.

Instâncias	<i>n</i>	Lodi et al.				Mehdi Mrad				M1desig			
		N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$
Class1	20	10	92.50	0.00	0.34	10	153.00	0.00	0.26	10	92.80	0.00	0.20
	40	10	369.20	0.00	0.57	10	542.80	0.00	0.46	10	361.00	0.00	0.34
	60	10	787.20	0.00	0.65	10	962.60	0.00	0.48	10	773.40	0.00	0.62
	80	10	1287.00	0.00	0.50	10	1348.40	0.00	0.48	10	1272.10	0.00	0.39
	100	10	2254.10	0.00	302.59	10	2030.10	0.00	2.16	10	2152.40	0.00	5.23
Class2	20	10	203.00	0.00	2.78	10	1254.40	0.00	1.86	10	203.40	0.00	0.41
	40	10	810.80	0.00	13.62	10	3784.60	0.00	221.01	10	812.20	0.00	1.85
	60	6	1818.90	1.07	1898.14	0	6519.40	3.50	TL	9	1821.90	0.37	780.76
	80	1	3227.90	2.84	3466.20	0	9124.80	3.16	TL	4	3232.00	1.54	2519.72
	100	0	5034.50	3.00	TL	0	12155.10	3.08	TL	1	5039.40	2.17	3394.96
Class3	20	10	130.80	0.00	2.81	10	443.70	0.00	0.35	10	131.10	0.00	0.47
	40	10	516.50	0.00	3.18	10	2270.50	0.00	0.78	10	516.40	0.00	0.50
	60	10	1115.30	0.00	4.98	10	4774.80	0.00	2.77	10	1115.80	0.00	0.60
	80	10	1862.40	0.00	3.78	10	7315.50	0.00	0.95	10	1863.70	0.00	0.62
	100	10	3135.70	0.00	14.19	10	13374.30	0.00	10.53	10	3137.80	0.00	3.55
Class4	20	10	206.40	0.00	3.92	10	4007.90	0.00	7.53	10	206.60	0.00	0.57
	40	10	816.60	0.00	9.88	10	16846.80	0.00	474.03	10	816.60	0.00	2.30
	60	10	1826.30	0.00	219.92	1	37510.10	2.20	3491.04	10	1826.50	0.00	283.69
	80	5	3236.50	0.51	2050.90	0	56384.30	2.78	TL	6	3236.50	0.36	1736.23
	100	1	5046.10	1.51	3374.38	0	85713.70	3.91	TL	1	5046.10	1.30	3437.21
Class5	20	10	108.70	0.00	2.01	10	443.10	0.00	0.25	10	108.70	0.00	0.32
	40	10	421.40	0.00	2.75	10	3238.60	0.00	0.95	10	421.40	0.00	0.39
	60	10	894.50	0.00	2.86	10	7469.30	0.00	0.77	10	894.20	0.00	0.53
	80	10	1456.60	0.00	3.67	10	12734.30	0.00	1.15	10	1456.60	0.00	0.49
	100	10	2525.20	0.00	15.67	10	27240.60	0.00	42.18	10	2525.10	0.00	4.31
Class6	20	10	206.80	0.00	3.03	10	9404.20	0.00	29.57	10	206.80	0.00	0.64
	40	10	816.70	0.00	9.67	4	53086.60	4.82	2827.70	10	816.70	0.00	2.95
	60	10	1826.03	0.00	334.03	0	133942.80	7.30	TL	9	1826.80	0.02	456.19
	80	3	3236.90	0.39	2671.69	0	228599.60	13.60	TL	5	3236.90	0.30	2389.44
	100	0	5046.90	1.00	TL	0	385550.20	19.17	TL	0	5046.90	0.93	TL
Class7	20	10	29.90	0.00	0.76	10	45.60	0.00	0.04	10	30.00	0.00	0.14
	40	10	115.50	0.00	1.70	10	236.90	0.00	0.06	10	116.10	0.00	0.29
	60	10	282.30	0.00	3.37	10	730.30	0.00	0.30	10	282.00	0.00	0.45
	80	10	455.50	0.00	2.53	10	1375.00	0.00	0.13	10	454.70	0.00	0.35
	100	10	757.60	0.00	3.06	10	3073.30	0.00	0.47	10	756.60	0.00	0.47
Class8	20	10	169.50	0.00	5.18	10	1413.90	0.00	9.41	10	169.50	0.00	0.78
	40	8	606.10	0.27	817.41	8	6513.80	0.31	1031.69	8	606.00	0.24	756.67
	60	3	1455.10	0.69	2530.30	4	17834.90	0.73	2398.97	3	1455.10	0.69	2531.20
	80	3	2466.20	0.42	2635.04	3	26930.60	0.46	2616.40	3	2466.20	0.39	2577.01
	100	3	3898.30	0.43	2754.09	5	44492.20	0.42	2450.51	3	3898.20	0.41	2682.46
Class9	20	10	24.50	0.00	0.07	10	45.90	0.00	0.01	10	24.60	0.00	0.02
	40	10	111.00	0.00	0.12	10	256.50	0.00	0.01	10	111.40	0.00	0.03
	60	10	247.60	0.00	0.25	10	531.10	0.00	0.02	10	246.60	0.00	0.10
	80	10	495.00	0.00	0.17	10	1505.10	0.00	0.03	10	493.80	0.00	0.07
	100	10	922.50	0.00	0.68	10	4290.10	0.00	0.10	10	921.60	0.00	0.11
Class10	20	10	148.20	0.00	3.11	10	1237.30	0.00	1.11	10	148.20	0.00	0.43
	40	10	572.20	0.00	4.06	10	6628.00	0.00	2.57	10	572.20	0.00	0.73
	60	10	1356.70	0.00	28.76	10	19775.40	0.00	251.54	10	1356.60	0.00	5.55
	80	10	2439.80	0.00	17.72	10	34302.40	0.00	128.54	10	2439.80	0.00	5.19
	100	10	3875.60	0.00	306.44	8	56109.80	0.04	994.15	10	3875.80	0.00	41.78

Tabela 21 – Desempenho dos modelos M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 3.

Instâncias	n	M2desig				M3			
		N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$	N_R	NV_{Me}	$g_{Me}(\%)$	$t_{Me}(s)$
Class1	20	10	189.70	0.00	10.06	10	250.30	0.00	0.34
	40	2	775.00	2.86	2886.29	10	709.00	0.00	0.73
	60	0	1759.50	6.00	TL	10	1146.20	0.00	0.73
	80	0	3099.20	6.98	TL	10	1526.60	0.00	0.68
	100	0	4909.90	4.45	TL	10	2188.60	0.00	1.06
Class2	20	10	208.00	0.00	7.92	10	2129.30	0.00	15.58
	40	0	818.00	7.92	TL	2	4954.00	5.39	2982.92
	60	0	1828.00	6.87	TL	0	7550.70	5.40	TL
	80	0	3238.00	5.74	TL	0	9983.70	4.24	TL
	100	0	5048.00	4.58	TL	0	12585.10	3.04	TL
Class3	20	10	197.70	0.00	10.64	10	1237.50	0.00	0.74
	40	2	792.10	2.86	2888.64	10	4895.70	0.00	9.03
	60	0	1789.30	6.14	TL	10	9696.20	0.00	24.51
	80	0	3138.20	9.09	TL	10	14629.50	0.00	3.40
	100	0	4996.40	7.89	TL	9	24222.20	0.05	370.01
Class4	20	10	208.00	0.00	4.24	9	9773.80	0.21	816.59
	40	0	818.00	6.96	TL	0	31091.10	5.80	TL
	60	0	1828.00	7.11	TL	0	61455.70	5.68	TL
	80	0	3238.00	6.58	TL	0	89633.40	5.28	TL
	100	0	5048.00	5.79	TL	0	126035.90	7.72	TL
Class5	20	10	190.30	0.00	5.45	10	2014.70	0.00	0.87
	40	3	773.00	2.13	2525.98	10	10384.80	0.00	29.50
	60	0	1744.10	4.18	TL	10	20274.80	0.00	7.40
	80	0	3059.60	9.31	TL	10	33402.80	0.00	24.93
	100	0	4956.80	7.53	TL	9	65799.50	0.06	402.58
Class6	20	10	208.00	0.00	6.19	6	32379.30	1.55	2037.57
	40	0	818.00	7.68	TL	0	122825.00	7.76	TL
	60	0	1828.00	7.52	TL	0	265935.00	8.57	TL
	80	0	3238.00	6.67	TL	0	438326.20	12.57	TL
	100	0	5048.00	6.22	TL	0	678847.70	35.98	TL
Class7	20	10	177.20	0.00	5.48	10	214.40	0.00	0.04
	40	7	787.40	0.15	1105.86	10	984.30	0.00	0.44
	60	1	1777.00	3.52	3289.86	10	2732.70	0.00	1.01
	80	0	3140.80	9.81	TL	10	4942.30	0.00	1.38
	100	0	4914.20	11.94	TL	10	9938.70	0.00	2.20
Class8	20	10	207.00	0.00	100.30	8	4745.70	1.22	751.54
	40	0	807.90	6.86	TL	6	16649.90	0.98	1671.62
	60	0	1822.10	5.89	TL	1	38008.60	1.08	3305.89
	80	0	3220.60	5.65	TL	1	56847.40	0.76	3321.51
	100	0	5034.50	5.19	TL	0	83748.50	0.70	TL
Class9	20	10	101.30	0.00	2.69	10	171.10	0.00	0.08
	40	10	628.60	0.00	82.88	10	1149.60	0.00	0.21
	60	1	1604.80	9.29	3245.06	10	2197.90	0.00	0.65
	80	0	2770.90	12.11	TL	10	5645.90	0.00	0.86
	100	0	4834.60	17.11	TL	10	12914.00	0.00	1.72
Class10	20	10	185.00	0.00	12.51	10	4357.00	0.00	103.75
	40	0	769.20	3.96	TL	10	17586.60	0.00	64.89
	60	0	1760.50	4.59	TL	5	43423.10	0.37	1914.14
	80	0	3171.40	5.37	TL	5	72408.40	0.37	2040.84
	100	0	4971.80	6.08	TL	1	110283.00	0.59	3254.37

4.2.4 Análise geral de desempenho

A seguir fazemos uma análise de desempenho dos modelos para as instâncias dos Grupos 1, 2 e 3.

Os gráficos das Figuras 35 e 36 foram construídos de acordo com (DOLAN; MORÉ, 2002). Para a interpretação destes gráficos, considere P sendo o conjunto das 537 instâncias analisadas, S o conjunto das modelagens que estão sendo testadas e comparadas e t a métrica de avaliação. Além disso, considere:

- a comparação da solução primal (z). O gráfico da Figura 35 mostra as curvas de desempenho referente aos valores da solução primal encontrada por cada um dos modelos. Seja t_{ps} o valor z da modelagem s ao resolver a instância p , então definimos a qualidade da solução primal (z) de uma modelagem particular s para uma dada instância p como:

$$r_{ps} = \frac{t_{ps}}{\min\{t_{ps} : s \in S\}}.$$

- a comparação da solução dual (lb). O gráfico da Figura 36 mostra as curvas de desempenho referente aos valores da solução dual encontrada por cada um dos modelos. Deste modo, t_{ps} denota o valor lb da modelagem s ao resolver a instância p e, definimos a qualidade da solução dual (lb) de uma modelagem particular s para uma dada instância p como:

$$r_{ps} = \frac{\max\{t_{ps} : s \in S\}}{t_{ps}}.$$

Com estes valores, a probabilidade de que cada modelagem seja melhor ou igual a τ pode ser calculada por: $p_s(\tau) = \frac{|p \in P : r_{ps} \leq \tau|}{NP}$, onde NP é o número de instâncias consideradas.

Nos gráficos das Figuras 35 e 36, o eixo das abscissas representa os valores de τ e o eixo das ordenadas representa as probabilidades de obter uma solução cuja qualidade é melhor ou igual a τ . Deste modo, o valor $\tau = 1$ indica a porcentagem de instâncias nas quais a modelagem s forneceu a melhor solução. Mais ainda, se τ'_s é o menor valor para o qual a curva da modelagem s atingiu a marca de 100% no eixo das ordenadas, então τ'_s é o maior desvio apresentado pela modelagem s . Logo, quanto maior a porcentagem correspondente a $\tau = 1$ e quanto menor o valor de τ'_s , mais eficiente é a modelagem.

Na Figura 35, observe que a linha que representa a solução primal do modelo M1desig cruza o valor de abscissa 1,01 acima de 99%, indicando que esta modelagem tem uma probabilidade igual a 99% de obter uma solução com desvio máximo de 1% em comparação com a melhor solução das modelagens analisadas, que neste caso, é a Lodi et al. (2004). Já na Figura 36, podemos ver que a linha que representa o limitante dual do modelo Lodi et al. (2004) cruza o valor de abscissa 1,01 em 90%, indicando que esta modelagem tem uma probabilidade igual a 90% de obter uma solução com desvio máximo de 1% em comparação ao modelo M1desig.

Figura 35 – Avaliação do desempenho da solução primal dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3.

Figura 36 – Avaliação do desempenho da solução dual dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3.

No geral, podemos concluir que a formulação matemática que apresentou o melhor desempenho foi M1desig, seguido dos modelos da literatura apresentados em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) e (MRAD, 2015), respectivamente. Isso se deve ao fato de que embora o modelo Lodi et al. (2004) apresente melhores soluções primais, a modelagem M1desig também apresenta boas soluções primais e, além disso, obtém melhores limitantes duais (ver Figuras 35 e 36).

4.3 Relaxação linear

Nesta seção fazemos uma comparação dos resultados referentes aos valores das relaxações lineares obtidos por cada uma das formulações matemáticas analisadas. A métrica de comparação utilizada foi proposta por (DOLAN; MORÉ, 2002). Para cada grupo de instâncias, construímos um gráfico com as curvas de desempenho utilizando a normalização das soluções obtidas por cada abordagem de solução (modelagem) e a melhor solução encontrada em cada

caso.

Nos gráficos das Figuras 37, 38 e 39, o eixo das abscissas representa os valores de τ e o eixo das ordenadas representa as probabilidades de obter uma solução cuja qualidade é melhor ou igual a τ .

Figura 37 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 1.

Figura 38 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 2.

Figura 39 – Avaliação do desempenho da relaxação linear dos modelos Lodi et al. (2004), Mehdi Mrad (2015), M1, M1desig, M2, M2desig e M3 para as instâncias do Grupo 3.

Ao relaxar a condição de integralidade podemos observar por meio das curvas de desempenho apresentadas nos gráficos das Figuras 37, 38 e 39 que as formulações matemáticas Lodi et al. (2004), M1 e M1desig apresentaram os mesmos limitantes inferiores. Além disso, os gráficos de desempenho mostram claramente que a relaxação linear do modelo de fluxo de arco apresentado em (MRAD, 2015) foi a mais eficiente. Para as instâncias do Grupo 1, o segundo melhor desempenho foi dos modelos Lodi et al. (2004), M1 e M1desig, seguidos de M2desig e M3. Já para as instâncias dos Grupos 2 e 3, o segundo melhor desempenho foi apresentado pela formulação M3, seguido das formulações Lodi et al. (2004), M1 e M1desig, M2desig e M2. Vale ressaltar que, em todos os grupos de instâncias, o modelo M2 obteve resultados muito inferiores que as demais modelagens.

APLICAÇÃO PRÁTICA: ALOCAÇÃO DE PRODUTOS EM GÔNDULAS DE SUPERMERCADOS

A adversidade do cenário econômico atual levou o consumidor a experimentar novos hábitos de consumo, gerando forte redução nas vendas dos supermercados. Mudanças nos padrões de compra e migração para outros formatos como o *cash and carry* (também conhecido como atacado de autosserviço) são alguns fenômenos observados e que contribuem fortemente para as quedas nas vendas (Revista Super Varejo ([VAREJO, 2017](#))). Neste momento, o mercado está cada vez mais competitivo, logo os supermercadistas tem se preocupado em adotar estratégias para organizar as gôndolas¹ e aproveitar todos os recursos disponíveis para atrair a atenção do consumidor e, consequentemente melhorar o desempenho financeiro de suas lojas. As estratégias de organização das gôndolas têm influenciado no aumento de compras realizadas pelos consumidores, tornando-se uma ferramenta essencial na gestão dos supermercados visto que é no ponto de venda que efetivamente acontece a decisão de compra (ver, por exemplo, ([ROSA; DIAS, 2015](#))). A posição dos produtos nas gôndolas deve ser pensada de forma estratégica, pois um arranjo de produtos inteligente nas gôndulas assume uma importância crucial como ferramenta para aumentar a visibilidade, a conscientização do consumidor e a demanda pelos produtos, levando a um maior desempenho (ver ([BIANCHI-AGUIAR, 2015](#))). Para tanto, os supermercadistas promovem ações estratégicas como forma de atender as expectativas dos consumidores, satisfazer suas necessidades e proporcionar uma experiência de compra agradável em busca de maior eficiência nos negócios e de competitividade no mercado.

Esta aplicação é o resultado de uma pesquisa motivada pelos problemas de gerenciamento de espaço que surgem nos supermercados brasileiros. Em colaboração com uma rede de supermercados do interior paulista, nosso objetivo é abordar o problema de alocação de produtos

¹ Uma gôndula consiste em diferentes níveis (prateleiras) que são usados para alocar produtos.

nas gôndulas e aproximar pesquisa e prática por meio do desenvolvimento de ferramentas quantitativas que suportem a geração de soluções de alocação de produtos em gôndulas automatizadas e otimizadas na prática. A fim de alcançar este objetivo, vamos estender a formulação matemática M2, apresentada na Subseção 3.2.2 para o problema de empacotamento em faixas bidimensional.

A seguir, na Seção 5.1 fazemos uma revisão sobre gerenciamento por categorias. Na Seção 5.2, Subseções 5.2.1 e 5.2.2 introduzimos o problema de alocação de produtos nas gôndulas e a literatura relacionada ao problema, respectivamente. Em seguida, na Seção 5.3 apresentamos o problema abordado neste capítulo, bem como a formulação matemática desenvolvida.

5.1 Gerenciamento por categorias

O surgimento da indústria nacional, o aumento da eficiência na distribuição e a urbanização das cidades contribuíram para o aparecimento e fortalecimento dos supermercados. Foi a partir da década de 70 que os supermercados firmaram-se culturalmente como forma de varejo (PRIMIO, 1999). Segundo (PARENTE, 2000), varejo pode ser definido como todas as atividades que englobam o processo de venda de produtos e serviços para atender necessidades pessoais dos consumidores finais dos produtos e serviços. Além disso, para este mesmo autor, o supermercado é uma loja de varejo organizada em departamentos que disponibiliza para o consumidor final os produtos. Os departamentos categorizam uma ampla variedade de produtos, tais como, bebidas, higiene pessoal, hortifrutícolas, mercearia, bazar, carnes, limpeza, frios e laticínios, padaria etc. Portanto, supermercado é uma loja que tem como finalidade fechar o elo da cadeia de produção onde o produto acabado é levado de forma a satisfazer a necessidade do consumidor final. Vale ressaltar que a atividade supermercadista é uma das maiores do setor varejista brasileiro, representando mais de 20% do comércio geral (ROSA; DIAS, 2015).

Durante as últimas décadas, o setor supermercadista brasileiro sofreu uma série de transformações. Essas mudanças resultaram de diversos fatores, como por exemplo, mudanças do cenário econômico, grande oferta e variedade de produtos no mercado, novo perfil dos consumidores, entre outros. Logo, o consumo ficou mais dinâmico e os mercados mais competitivos. Diante disto, aparece a necessidade das empresas se adaptarem a essa nova realidade mudando seus processos de gerenciamento e estrutura organizacional, adotando novas filosofias para que se mude o modo de operar a organização como um todo. É neste contexto que surge o **gerenciamento por categorias** como um novo processo que busca resolver esses desafios.

O gerenciamento por categorias (GC) nada mais é do que uma estratégia organizacional na qual a administração de um estabelecimento varejista é dividida em categorias de produtos. No GC as decisões sobre a seleção de produtos, arranjo, promoção e precificação são feitas categoria por categoria (e não mais por produto), visando maximizar o lucro e eficiência da categoria como um todo. Uma categoria é um conjunto de produtos que os *shoppers*² percebem como

² *shopper* corresponde ao papel exercido no processo de compra, é ele quem decide onde comprar, sendo

inter-relacionados para satisfazer suas necessidades (ver (BRASIL, 1998)). O modo como a categoria é definida influencia todas as etapas do GC. Os objetivos desta definição são selecionar os produtos específicos que irão formar a categoria e definir sua estrutura e segmentação dentro dela (mais detalhes em (NONATO, 2010)).

Para exemplificar o processo de categorização considere o departamento de perecíveis lácteos. De acordo com o guia de categorias publicado pela revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2011), este departamento possui as seguintes categorias:

- *Cream cheese* e requeijão;
- Iogurte;
- Iogurte funcional;
- Leite fermentado;
- Margarina e manteiga;
- Queijo tipo *petit suisse*;
- Queijos especiais;
- Sobremesa cremosa láctea.

Na aplicação do GC, os maiores esforços são para atender o *shopper*, pois é ele quem vai à loja e decide a compra. Além disso, segundo (BRASIL, 2007), uma das questões mais importantes no GC é o *layout* da loja, a qual deve estar organizada de forma que o fluxo de circulação atraia a atenção dos *shoppers* para todas as categorias. Logo, o planejamento do *layout* deve buscar a melhor forma para expor os produtos de acordo com o processo decisório do *shopper*, conhecido como **árvore de decisão**.

Para o guia de categorias publicado pela revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2011), a árvore de decisão é o conjunto de fatores que descreve o processo mental de escolha do *shopper* e a parte de um problema que ele precisa solucionar, por exemplo: o que comprar para o café da manhã. Supondo que o objetivo seja escolher um *cream cheese*, a árvore é construída da seguinte maneira na cabeça do *shopper*:

- Quem vai consumir o produto? Minha família.
- Em que ocasião? No café da manhã.
- Qual tipo de *cream cheese*? Tradicional.

ele quem interage com o ponto de venda, diferente do consumidor que é o papel exercido por quem fará o uso do produto adquirido (ALVAREZ, 2008).

- Que marca? XXX.
- Qual tamanho da embalagem: 400g (consumo familiar).

No entanto, o processo de compras não é finalizado nesta etapa. Neste momento, começam a ser considerados os atributos da categoria. Eles correspondem ao conjunto de fatores que o *shopper* prioriza quando está em frente à gôndola. Voltando ao exemplo do *cream cheese*, o *shopper* avalia os atributos que julga importantes, por exemplo, o preço. A Figura 40 apresenta um exemplo de árvore de decisão para a categoria *cream cheese*.

Figura 40 – Árvore de decisão da categoria *cream cheese* - extraída da revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2011).

A Figura 40 detalha a maneira como o *shopper* raciocina em relação aos atributos que valoriza por ordem de importância de acordo com cada classe social. Note que para a categoria *cream cheese*, o primeiro atributo do produto a ser avaliado no momento da compra pelas classes A e B é a marca, enquanto que nas classes C e D é o preço. Além disso, conforme pesquisa realizada pela *Kraft foods*, divulgada pelo guia de categorias da revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2011), o sabor, a consistência e a leveza são as características do produto consideradas mais importantes para o consumidor. Tais atributos também fazem parte da árvore de decisão, ou seja, são avaliados pelo *shopper* na hora da compra, independente da classe social.

Portanto, no GC, a árvore de decisão e seus atributos definem uma segmentação para a categoria correspondente ao processo de escolha do *shopper*. A partir disso, o varejista pode definir o melhor sortimento e a exposição mais adequada. No caso da identificação do *mix*, deve-se analisar os SKU's³ que estão dentro de cada quebra da árvore, considerando informações como giro, vendas em volume, valor e rentabilidade. A ideia é verificar os itens que podem entrar ou sair do sortimento. No que diz respeito à exposição, cada quebra da árvore deve corresponder

³ SKU: menor unidade de controle para o gerenciamento de um produto, identificando e diferenciando dos demais. Pode requerer especificações como tamanho, cor, sabor, embalagem etc (BRASIL, 1998).

a um agrupamento na gôndola para facilitar a escolha na hora da compra, para tanto, usa-se uma ferramenta muito conhecida, o **planograma**.

Para (MCGOLDRICK, 2002) o planograma padroniza a exposição dos produtos nas lojas, cria uma identidade visual, aumenta a variedade de produtos e melhora a gestão dos estoques. Além disso, ele facilita a identificação das rupturas⁴ existentes nas gôndulas, minimizando a falta de produtos e facilitando o processo de reposição, pois fica evidente quais produtos precisam ser repostos na área de venda e, conseqüentemente, reduz-se os estoques. Mais ainda, como a elaboração do planograma influencia as tarefas relacionadas ao fator numérico (número de SKU's) e visual da loja, ele permite a redução de erros na aparência das gôndulas em supermercados.

Vale ressaltar que o planograma permite que o varejista retrate a exposição vertical (disposição dos produtos nos níveis (prateleiras)) e horizontal (fluxo dos *shoppers* no corredor) dos produtos na gôndola, conforme mostra a Figura 41.

Iogurte			Iogurte funcional			Leite fermentado		
Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1	Marca 1
Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2	Marca 2
Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3	Marca 3

(a) exposição vertical

Iogurte			Iogurte funcional			Leite fermentado		
1	2	3	1	2	3	1	2	3

(b) exposição horizontal

Figura 41 – Exemplo de um planograma.

De acordo com (MCGOLDRICK, 2002), a grande vantagem da utilização de planogramas visuais, conforme apresentado na Figura 41, é sua capacidade de replicação à realidade da gôndola onde serão expostos os produtos, sendo assim mais fidedigno à realidade da loja. Outra vantagem no uso do planograma é o fato dele chamar a atenção para a importância da qualidade do espaço da gôndola ao invés de somente para a quantidade. Em (DREZE; HOCH; PURK, 1994), os autores concluíram que os efeitos da qualidade do espaço de uma gôndola são muito

⁴ Ruptura é a ausência de produtos no expositor da loja onde o *shopper* está acostumado encontrá-lo (BRASIL, 2007).

mais satisfatórios do que os efeitos relacionados à quantidade de produtos. Por exemplo, ao mover um produto do pior para o melhor local horizontalmente (em uma gôndula) houve um aumento médio de 15% das vendas, enquanto que ao mover este mesmo produto do pior para o melhor local verticalmente, este aumento foi de 39%. As Figuras 42 e 43 mostram os melhores pontos de visualização dos produtos nas gôndulas.

Figura 42 – Visualização vertical dos produtos em uma gôndula - adaptada de (NONATO, 2010).

Figura 43 – Visualização horizontal dos produtos em uma gôndula com base no fluxo dos *shoppers* - adaptada de (NONATO, 2010).

Para o site <http://helioprint.com.br/blog/organizar-prateleiras-supermercado/>, o segredo para a elaboração de um planograma é posicionar os produtos estrategicamente nos cinco níveis das gôndolas. Esses níveis são os seguintes:

- **Nível 1 (chão):** o chão deve ser reservado para os produtos pesados, ou para produtos com baixas margens de lucro;

- **Nível 2 (abaixo da cintura):** este nível não faz parte do campo de visão dos consumidores e portanto é interessante colocar os produtos mais baratos e que os *shoppers* sempre comprem. Desta forma, mesmo que o produtos não estejam visivelmente posicionados, as pessoas tendem a procurá-los, pois são produtos essenciais ou mais baratos;
- **Nível 3 (linha da cintura):** este nível pode ser considerado uma área nobre para expor os produtos. Logo, deve ser alocado nele os produtos de grande procura;
- **Nível 4 (altura dos olhos):** este nível também é conhecido como área nobre, pois é o nível que mais aumenta as vendas dos produtos. Neste nível devemos colocar os produtos com melhor margem de lucro, os mais caros. Como o campo de visão dos *shoppers* atinge diretamente este nível, as compras por impulso são maiores;
- **Nível 5 (acima da cabeça):** finalmente, os produtos acima da linha de visão dos *shoppers* possuem menor visibilidade, e por isto devemos colocar produtos de menor interesse.

Resumindo, o planograma representa o modelo de exposição de cada categoria. Ele define a quantidade de itens expostos, o número de frentes⁵ de cada versão, o tipo e altura de empilhamento. Mais ainda, ele aponta como organizar em uma gôndula as diferentes marcas, sabores, embalagens etc. Cada detalhe do planograma deve servir para facilitar a compra, aumentar o giro e lucro da categoria. Tão crucial quanto definir bem esse desenho é executá-lo com eficiência, e quando isso acontece, há um incremento de 30% a 40% no volume de vendas, segundo Fátima Merlin, CEO da *Connect Shopper* (ver revista Supermercado Moderno (MODERNO, 2017)). Portanto, para gerar um planograma, deve-se levar em consideração que cada frente de produto significa aumento da receita da loja e que cada produto possui diferentes margens de lucro, sendo necessária a definição de quais são as marcas preferidas dos consumidores, as mais lucrativas e as mais vendidas. A representação dos produtos na gôndula deve seguir uma série de considerações realizadas durante o processo de GC (ver (NONATO, 2010)). De acordo com (BRASIL, 1998), os critérios de decisão são:

- consumidor-alvo: a gôndula deve ser organizada de forma lógica e fácil para o *shopper* de acordo com suas necessidades e o modo como ele procede em suas decisões no momento da compra (árvore de decisão);
- posicionamento competitivo: a arrumação da gôndula deve ressaltar os pontos-chave de diferenciação competitiva que o varejista procura;
- estratégia de *marketing*: a gôndula deve refletir e reforçar para o *shopper* a imagem de variedade;
- papel e estratégias da categoria: a organização da gôndula deve ser consistente com o papel e as estratégias da categoria;

⁵ Uma frente é a primeira unidade visível de um produto específico na primeira fila de um nível.

- custo/benefício de várias escolhas de apresentação na gôndula: faz-se essencial a avaliação das questões operacionais como o custo de reestocagem de produtos que não serão utilizados na gôndula, por exemplo, o impacto nas vendas e no lucro da localização específica e *layout* da categoria dentro da loja e se a apresentação da gôndula auxilia o varejista na implementação de sua estratégia de serviço ao cliente.

5.2 O planejamento espacial de prateleiras (gôndulas)

Geralmente os consumidores entram nos supermercados com apenas uma ideia geral do que comprar, tornando-se suscetíveis ao *marketing* da loja. Além disso, os sortimentos e estoques reduzidos obrigam os consumidores a procurar produtos de substituição, destacando o papel do gerenciamento espacial.

O planejamento espacial de gôndulas e a alocação de produtos em uma gôndula segue o planejamento de ordenação e é feito separadamente para cada categoria. Em (HÜBNER; KUHN, 2012), (HÜBNER; KUHN; STERNBECK, 2013) e (KÖK; FISHER; VAIDYANATHAN, 2015) são apresentadas estruturas de planejamento de operações que identificam e integram todos os aspectos relevantes de planejamento de varejo. Estes autores diferenciam entre uma série de etapas de planejamento hierárquico:

- o planejamento de sortimento envolve uma listagem de produtos levando em consideração os efeitos de substituição (ver, por exemplo, (SMITH; AGRAWAL, 2000), (KÖK; FISHER, 2007), (YÜCEL *et al.*, 2009), (KATSIFOU; SEIFERT; TANCRES, 2014) e (HÜBNER; KUHN; KÜHN, 2016)).
- o planejamento espacial de gôndulas atribui a posição dos produtos na gôndula e o número de frentes dos produtos listados sob as restrições do tamanho limitado da gôndula. A demanda atual do produto pode depender da quantidade e posição disponíveis na gôndula (ver, por exemplo, (HANSEN; HEINSBROEK, 1979), (URBAN, 1998), (IRION *et al.*, 2012), (BIANCHI-AGUIAR, 2015)).
- o planejamento de reposição na loja determina as políticas de reabastecimento. Mais detalhes podem ser obtidos em (ZELST *et al.*, 2009), (DONSELAAR *et al.*, 2010), (REINER; TELLER; KOTZAB, 2013) e (ATAN; ERKIP, 2015).

As três áreas de planejamento são fortemente interdependentes se o espaço da gôndula e a capacidade de reabastecimento forem limitados. Por exemplo, uma variedade mais ampla com mais produtos requer menos unidades por produto na gôndula ou reabastecimento mais frequente (HÜBNER; SCHAAL, 2017b). De modo geral, os supermercadistas resolvem os problemas de forma sequencial: primeiro determinam o seu sortimento, depois atribuem-no à gôndula e, finalmente, eles gerenciam o reabastecimento da loja (ver (KUHN; STERNBECK,

2013)). O planejamento de sortimento é tradicionalmente o domínio de uma unidade central de planejamento de *marketing*, enquanto que o planejamento de gôndulas normalmente é uma tarefa da organização de vendas. O planejamento de reposição da loja é muito operacional e o gerente da loja é responsável por isso. Segundo (HÜBNER; SCHAAL, 2017b), a desagregação nestas três etapas de planejamento, conforme aplicado na prática, ajuda a superar as complexidades analíticas decorrentes de diferentes horizontes de planejamento. Os módulos de planejamento devem relacionar-se às hierarquias e responsabilidades organizacionais, bem como ao horizonte de planejamento (ver (SCHNEEWEISS, 2003) e (HÜBNER; SCHAAL, 2017b)).

O problema abordado neste capítulo é centrado no problema de planejamento espacial de gôndulas. De acordo com o conceito de planejamento hierárquico mencionado anteriormente, iremos supor que decisões de sortimento já foram efetuadas e que o supermercadista aplica uma política de reabastecimento direto em cada período sem armazenamento, o que permite uma logística econômica nas lojas (ver, por exemplo, (KUHN; STERNBECK, 2013) e (PIRES *et al.*, 2015)). Além disso, o espaço disponível para uma categoria em uma gôndula é limitado.

5.2.1 O problema de alocação de produtos nas gôndulas

Alocação de espaço nas prateleiras é o nome científico para o problema de alocação de produtos no escasso espaço existente nas gôndulas de lojas de varejo entre um conjunto de produtos de uma categoria. A definição do problema pode variar dependendo do segmento varejista, estratégia da empresa, relação com fornecedores, *layout* da loja, entre outros. A seguir iremos definir o problema de maneira geral, considerando o ambiente de varejo alimentício (supermercados).

O planejamento de gôndulas aloca produtos para os diferentes níveis e atribui quantidades de níveis e módulos. Isto inclui a definição da posição vertical da gôndula (isto é, qual nível), posição horizontal (ou seja, quais produtos estão próximos uns dos outros e até onde um produto é posicionado a partir do corredor) e o número de frentes (HÜBNER; SCHAAL, 2017b).

De maneira geral, os supermercadistas escolhem uma formação de blocos para exibir os produtos nas gôndulas, ou seja, eles alocam o mesmo número de frentes em vários níveis, exatamente um abaixo do outro, de modo que a apresentação do produto seja retangular (ver, por exemplo, (RUSSELL; URBAN, 2010), (GEISMAR *et al.*, 2015), (BIANCHI-AGUIAR, 2015) e (HÜBNER; SCHAAL, 2017b)). Note que no exemplo apresentado na Figura 44, o produto 1 recebe 2 frentes em 3 níveis, enquanto o produto 2 aparece 1 vez em 3 níveis. Vale ressaltar que, no problema abordado neste trabalho o número de frentes de um produto nos níveis não precisam ser exatamente iguais.

Figura 44 – (a) Posicionamento do produto e (b) relação entre frentes e quantidade total no nível – adaptada de (HÜBNER; SCHAAL, 2017b).

A Figura 44 (a) ilustra a quantidade de frentes de um produto, com a primeira unidade visível no nível, bem como a quantidade de um produto em um nível. Atrás de cada frente tem um estoque de unidades adicionais de um respectivo produto, de modo que a quantidade total de níveis seja determinada pelo número de frentes e pelo estoque. Em outras palavras, o planejamento do espaço na gôndula requer decisões para cada produto em termos de (i) posicionamento de gôndulas vertical e horizontal e (ii) o número de frentes, que também determina a quantidade de níveis. Logo, as decisões mais comuns são o número de frentes de cada produto (isto é, o espaço ocupado por cada produto), a alocação dos produtos nos níveis e a localização destes produtos nas gôndulas. Estudos experimentais comprovam que essas decisões influenciam na decisão de compra do cliente. Os efeitos da demanda estão relacionados a três elasticidades principais:

- demanda espaço-elástica: a elasticidade espacial mede a crescente capacidade de resposta das vendas à medida que mais espaço é destinado a um produto ((CURHAN, 1972) e (CHANDON *et al.*, 2009));
- efeitos de posicionamento: a elasticidade da posição destaca as principais posições de exibição que trazem uma melhor exposição, como por exemplo o nível do olho ou da mão (DREZE; HOCH; PURK, 1994);
- demanda cruzada espaço-elástica: a elasticidade cruzada mede a interdependência entre produtos adjacentes e é considerada positiva para produtos complementares e negativa para produtos substitutivos (CORSTJENS; DOYLE, 1981).

Resumindo, o número de frentes e sua posição vertical têm um impacto significativo nas vendas no varejo. Ao analisar a literatura existente, nos concentramos nos modelos de otimização de gôndulas que respondam por esses efeitos.

5.2.2 Literatura relacionada

A maioria das formulações matemáticas para o problema de alocação de produtos nas gôndulas assumem um determinado sortimento e otimizam o número de frentes dos produtos a serem alocados em um espaço de gôndula limitado.

Ao longo dos anos, vários modelos de otimização foram propostos para ajudar os varejistas a otimizar o espaço das gôndulas. A grande maioria das contribuições consideram uma demanda determinística e se concentram em pelo menos um dos vários efeitos de demanda relevantes, a saber, a elasticidade espacial e cruzada, bem como o posicionamento. A demanda é expressa em termos não-lineares e depois resolvida através de heurísticas, ou linearizadas e resolvidas por *solvers*.

Um dos primeiros modelos foi apresentado por (HANSEN; HEINSBROEK, 1979), os autores desenvolveram um modelo não-linear o qual considera a elasticidade espacial das vendas. Além disso, eles consideram que qualquer produto escolhido deve receber um espaço mínimo na gôndula. Esta modelagem trata a elasticidade espacial, mas não a elasticidade cruzada e os efeitos de substituição. O modelo é resolvido por meio de uma relaxação lagrangiana e testado em um conjunto de dados reais.

Em 1981, (CORSTJENS; DOYLE, 1981) introduziram um modelo que considera a elasticidade espacial e cruzada e maximiza o lucro. Um estudo de caso é usado para estimar os parâmetros e o problema é resolvido por programação geométrica para até 5 itens. Entretanto, os procedimentos de estimativa e otimização não podem ser aplicados a problemas de grande escala e portanto o modelo funciona com grupos de produtos em vez de SKU's. Dois anos depois (CORSTJENS; DOYLE, 1983) estendem este modelo para permitir a incorporação das características do ciclo de vida do produto. Em ambas as publicações, Corstjens e Doyle consideram elasticidades espaciais e cruzadas de forma polinomial.

Um modelo que é resolvido por programação dinâmica é apresentado por (ZUFRYDEN, 1986). Esta modelagem mostra que uma solução eficiente pode ser obtida para problemas em larga escala em um tempo computacional aceitável, entretanto, além da elasticidade espacial, nenhum outro efeito de demanda é considerado.

Em 1994, (BORIN; FARRIS; FREELAND, 1994) estenderam o modelo de (CORSTJENS; DOYLE, 1981). Neste modelo não-linear Borin et al. consideram duas variáveis de decisão básicas: sortimento e alocação de espaço para os itens no sortimento. Os autores aplicam uma heurística para resolver o problema. Além das elasticidades espaciais e cruzadas, eles representam a substituição, entretanto negligenciam os efeitos de posicionamento.

O primeiro modelo para o problema de alocação de produtos em gôndulas que trata os efeitos de posicionamento vertical foi introduzido por (YANG; CHEN, 1999). As elasticidades entre espaços são consideradas e interpretadas por meio de uma análise de dados coletados por uma pesquisa realizada por um questionário. Além disso, os autores desenvolvem uma forma alternativa para seu problema de otimização não-linear, que é então resolvido com uma heurística de vários estágios.

Dois anos depois, (YANG, 2001) simplifica a forma de elasticidade do espaço polinomial e considera uma função linear dentro de um número limitado de frentes. Ele propõe uma

heurística que é semelhante ao algoritmo usado para resolver um problema da mochila. A heurística proposta aloca espaço de gôndula produto por produto de acordo com uma ordem decrescente de lucro de vendas para cada produto por área de exibição ou comprimento. A solução ótima é encontrada apenas para versões simplificadas do problema.

Baseados no modelo linear de Yang, (LIM; RODRIGUES; ZHANG, 2004) apresentam um modelo para atender a outros requisitos, tais como agrupamentos de produtos e funções de lucro não-linear. Mais ainda, os autores apresentam uma estratégia que combina uma pesquisa local com uma abordagem meta-heurística para alocação de espaço. Esta estratégia foi usada para resolver problemas com até 100 produtos.

Um ano depois, (HWANG; CHOI; LEE, 2005) desenvolveram uma formulação matemática integrando o problema de alocação de espaço e o problema de controle de estoque com o objetivo de maximizar o lucro do varejista. Um algoritmo genético e uma heurística de busca são aplicados para resolver o problema.

Em 2007, (HARIGA; AL-AHMARI; MOHAMED, 2007) introduziram um modelo não-linear inteiro misto que integra o sortimento de produtos, o controle e reabastecimento de estoque e considera a disponibilidade de espaço no *backroom*. A elasticidade espacial e cruzada são consideradas, bem como, os efeitos do posicionamento vertical. O modelo é resolvido usando o *software* LINGO e testado em problemas com apenas 4 produtos.

Dois anos depois, (HWANG; CHOI; LEE, 2009) apresentaram um modelo matemático que considera todos os efeitos relevantes de demanda e posicionamento. Para resolver o modelo são propostos dois algoritmos genéticos, entretanto, só foram realizados testes em instâncias com até 4 produtos.

Neste mesmo ano, (RAUT; SWAMI; MOHOLKAR, 2009) desenvolveram um modelo matemático considerando vários períodos que pressupõe que a distribuição de níveis de um produto afeta a demanda em períodos futuros. A solução deste modelo é obtida por meio de duas heurísticas gulosas e um algoritmo genético. É realizado apenas um teste utilizando dados reais para 6 produtos e 5 semanas.

Em 2010, (HANSEN; RAUT; SWAMI, 2010) introduzem um modelo que incorpora uma função de lucro não-linear, efeitos de localização verticais e horizontais e elasticidade cruzada do produto. Neste artigo, os autores também descrevem avanços das heurísticas e meta-heurísticas e comparam abordagens por meio de simulações e realização de um exemplo utilizando dados reais. Ainda em 2010, (RUSSELL; URBAN, 2010) desenvolveram um modelo contínuo e discreto que também considera o agrupamento de produtos. Este modelo é resolvido usando um *solver* em combinação com uma heurística de melhoria. Exemplos com até 20 produtos foram resolvidos e o modelo é estendido para atender às decisões de sortimento.

No ano seguinte (HÜBNER, 2011) apresentou um modelo de programação inteira mista para o planejamento do espaço em gôndula que também leva em consideração as decisões

de sortimento. O modelo é testado em instâncias com até 250 produtos. Além disso, (HÜBNER; KUHN, 2011) desenvolveram um modelo de programação inteira mista que considera a elasticidade espacial e os efeitos de estoque.

Em 2012, (IRION *et al.*, 2012) desenvolveram um modelo não-linear determinístico que incorpora explicitamente custos essenciais na loja e considera elasticidades espaciais e cruzadas. Uma técnica de linearização por partes é usada para aproximar o modelo de alocação de espaço não-linear. A aproximação reformula o problema de otimização não-convexo em um problema de programação linear inteiro misto. A solução do modelo de programação inteira mista não só gera soluções quase ótimas para problemas de otimização de grande porte, mas também fornece um limitante para avaliar a qualidade da solução. O modelo foi testado para instâncias com até 50 produtos.

Três anos mais tarde, (BIANCHI-AGUIAR *et al.*, 2015) usaram uma abordagem de programação inteira mista para formular um modelo determinístico que considera dois recursos inovadores de regras de *merchandising*: famílias de produtos hierárquicos e direções de exibição. Vale ressaltar que este é o primeiro modelo que incorpora regras de *merchandising*. A elasticidade espacial é modelada como uma função linear, como em (YANG, 2001). Com base na formulação, uma heurística baseada em programação matemática também foi desenvolvida. Tal heurística usa famílias de produtos para decompor o problema em uma sequência de sub-problemas. Este modelo foi testado usando dados reais contendo até 240 itens. Além disso, (BIANCHI-AGUIAR; CARRAVILLA; OLIVEIRA, 2015) desenvolveram uma abordagem para replicar planogramas padrões para várias lojas de uma cadeia de varejo. Neste artigo, os autores apresentam duas formulações de programação matemática para abordar o problema de replicação do espaço de gôndula, com diferentes níveis de detalhes práticos. Com base nas formulações, uma heurística baseada em programação matemática também foi desenvolvida. Ambas as abordagens foram testadas usando dados reais.

Recentemente, (HÜBNER; SCHAAL, 2017b) formularam o primeiro modelo de otimização e abordagem de solução que leva em consideração a demanda estocástica. Os autores consideram as elasticidades espaciais e cruzadas, bem como os efeitos de posicionamento vertical e um espaço de gôndula limitado. O modelo considera um determinado sortimento, não incorpora efeitos de substituição e foi testado em exemplos com até 300 produtos. Além disso, em (HÜBNER; SCHAAL, 2017a) é apresentado um modelo que maximiza o lucro de um varejista selecionando o sortimento ideal e atribuindo espaço de gôndula limitado aos produtos. Este modelo é o primeiro modelo de decisão que integra o planejamento de sortimento e espaço em gôndula, considerando demanda estocástica, elasticidade espacial e efeitos de substituição. Para resolver o modelo, os autores desenvolveram uma heurística especializada que produz resultados quase ótimos mesmo para problemas de grande porte.

5.3 Problema abordado

Nesta seção apresentamos o problema de alocação de espaço em gôndulas para uma rede de supermercados do interior do estado de São Paulo, para o qual desenvolvemos um modelo de programação linear inteira. Atualmente, esta rede de supermercados conta com 17 lojas e, de acordo com a classificação do BNDES⁶, é considerada uma grande empresa no setor. O ponto de contato trabalha neste ramo há 26 anos, sendo que nesta empresa está a aproximadamente 1 ano ocupando a função de gerente de loja.

5.3.1 Descrição do problema

O problema que consideramos foi inicialmente inspirado pela análise do sistema de geração de planogramas realizados para a alocação de produtos em gôndulas de supermercados, principalmente, em uma rede de supermercados do interior do estado de São Paulo.

O problema é formulado considerando cortes guilhotinados com um total de 3-estágios. Geralmente, este problema é visto de forma 2D, pois os produtos alocados atrás de cada frente não podem ser vistos diretamente e, portanto, não têm impacto na demanda do consumidor.

Em geral, o objetivo é obter lucro máximo ou maximizar o espaço disponível para venda, considerando a demanda do consumidor em função do espaço destinado aos produtos. Além disso, existem várias restrições potenciais para o problema, variando de complicadas a simples, dependendo da necessidade de satisfazer completamente os requisitos solicitados. As restrições comumente consideradas descritas a seguir estão organizadas da mais complicada para a mais simples.

- restrições de integralidade: o espaço atribuído a um produto em cada nível deve ser um número inteiro multiplicado pela largura desse produto;
- restrições físicas: o espaço total disponível na gôndula não pode ser excedido;
- restrições de controle: definir limites inferiores e superiores para garantir que uma exposição mínima e máxima seja dada aos produtos, ou seja, a quantidade de cada produto (visto de frente) em um nível é variável (aqui, este número varia de acordo com a venda, isto é, os produtos mais vendidos são alocados em maior quantidade para reduzir o abastecimento e consequentemente o gasto com funcionários).

Além disso, vamos considerar as regras estabelecidas pelo gerenciamento por categorias (GC), as quais são denominadas por:

⁶ Microempresa: receita bruta anual menor ou igual a R\$ 360 mil; Pequena empresa: maior que R\$ 360 mil e menor ou igual a R\$ 3,6 milhões; Média empresa: maior que R\$ 3,6 milhões e menor ou igual a R\$ 300 milhões; Grande empresa: maior que R\$ 300 milhões (disponível em: <https://www.bndes.gov.br/wps/portal/site/home/faq/apoio-financeiro/1944455039/2134060738/1782308253>)

- restrições de classes: o guia de categorias identifica classes de produtos que devem ser alocados juntos nas gôndulas. Este guia também pode especificar sequências de produtos predefinidas e orientação de formas.

Como pode ser visto na Subseção 5.2.2, a literatura apresenta uma grande variedade de modelos que abordam o problema de alocação de produtos em gôndulas. Estes modelos diferem no nível de detalhe das decisões, que vão desde o cálculo de frentes até descrições de planogramas quase completas. Entretanto, até onde sabemos, não existe um modelo definitivo de alocação de espaço na gôndula, além disso, a maioria destes modelos ignora que a alocação dos produtos deve seguir regras que especificam associações de produtos nas gôndulas. Mais ainda, até onde sabemos, no Brasil ainda não existe pesquisa envolvendo este problema, ou seja, os planogramas ainda são gerados manualmente.

Gerar planogramas é uma atividade altamente demorada, portanto, na próxima subseção apresentamos um modelo de programação linear inteira que pode ser utilizado na geração de planogramas para uma rede de supermercados. Este planograma é obtido de acordo com os critérios citados acima, bem como seguindo algumas orientações apresentadas no guia de categorias da revista (MODERNO, 2011), as quais foram observadas após a realização de visitas técnicas em algumas lojas desta rede de supermercados do interior paulista.

5.3.2 Formulação matemática

Para a formulação do problema, considere uma gôndula com altura H e largura W na qual devemos alocar produtos do tipo j , com altura h_j e largura w_j ($j = 1, \dots, n$). Os produtos estão agrupados em R categorias distintas (por exemplo, *cream cheese* e requeijão, iogurte, iogurte funcional, e assim por diante). Inicialmente, sobre esta gôndula executamos cortes verticais (1ª fase) a fim de obtermos objetos intermediários denominados módulos. A cada módulo é associada uma categoria de produto $r = 1, \dots, R$ (ver Figura 45). Vale ressaltar que diferentes módulos podem estar associados à mesma categoria.

Figura 45 – Divisão de uma gôndula em três módulos.

Em seguida, cada módulo é cortado (2ª fase) em itens (produtos) demandados de acordo com a categoria do módulo, nas dimensões e quantidades necessárias.

Nos cortes verticais (1ª fase), os módulos da categoria r tem suas larguras limitadas no intervalo $[W_{min}^r, W_{max}^r]$. Os cortes executados na 2ª fase são do tipo guilhotinado 2-estágios, o que leva a um padrão de corte global do tipo guilhotinado 3-estágios. O 2º estágio do corte sobre a gôndula (ou 1º estágio do corte sobre os módulos) é executado na horizontal e o 3º estágio do corte na vertical. Logo, o 1º estágio dos cortes sobre os módulos produz os níveis, que por sua vez são cortados verticalmente para obter os itens finais, conforme podemos constatar na Figura 46, a qual ilustra o corte de uma gôndula em dois módulos e cada um dos módulos é cortado em 2-estágios, com o 1º estágio de corte na horizontal (produzindo 3 níveis) e o 2º estágio na vertical (alocando os produtos). Vale destacar que os níveis possuem a mesma altura em todos os módulos.

3				3			
3				3			
2	2	2	2	2	2	2	2
				1	1	1	1

Figura 46 – Exemplo de uma parte de uma gôndula dividida em dois módulos, onde cada um dos módulos é cortado em 2-estágios.

A modelagem consiste em gerar os níveis para compor os módulos, de maneira que sejam factíveis (ou seja, a soma da altura dos níveis nos módulos deve ser menor ou igual do que a altura da gôndula e a largura do módulo deve estar entre W_{min}^r e W_{max}^r). Além disso, os módulos precisam ser dispostos na gôndula de maneira que não ultrapassem sua largura. As variáveis de decisão necessárias para a formulação matemática do problema são apresentadas ao longo do texto.

Considere os seguintes dados:

- H : altura da gôndula;
- W : largura da gôndula;
- R : número de categorias (as categorias são os tipos de produtos, por exemplo: $r = 1$ *cream cheese* e requeijão, $r = 2$ iogurte, $r = 3$ iogurte funcional, e assim por diante);
- I : conjunto de produtos;
- o conjunto de produtos I é particionado em r conjuntos disjuntos, ou seja, $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r$, onde $I_r = \{n_{r-1} + 1, \dots, n_r\}$ representa o conjunto de produtos que pertencem a categoria r , com $r = 1, \dots, R$;

- h_j : altura do produto do tipo j ;
- w_j : largura do produto do tipo j ;
- K : número de níveis em um módulo;
- v_{jks} : valor de utilidade do produto do tipo j alocado no nível k do módulo s (este valor representa a margem de lucro obtida pela venda de um produto do tipo j que está alocado no nível k do módulo s);
- d_j : limite sobre o número de vezes que o produto do tipo j pode ser alocado na gôndula;
- $W_{min}^r(W_{max}^r)$: limitante inferior (superior) da largura dos módulos preenchidos com produtos da categoria r ;
- l_j : número mínimo de possíveis produtos do tipo j ($j \in I_r$) em um nível (visto de frente);
- L_j : número máximo de possíveis produtos do tipo j (visto de frente) em um nível, onde $L_j = \min \left\{ d_j, \left\lfloor \frac{W_{max}^r}{w_j} \right\rfloor \right\}$; $j \in I_r$; $r = 1, \dots, R$;
- M_r : número máximo de possíveis módulos com produtos da categoria r em uma gôndula, onde $M_r = \left\lfloor \frac{W}{W_{min}^r} \right\rfloor$; $r = 1, \dots, R$.

Inicialmente, iremos apresentar as restrições de alocação dos produtos na gôndula. Esta parte da modelagem está baseada na formulação matemática M2 e no modelo apresentado em (LEÃO, 2013) para o problema da mochila compartimentada bidimensional. A principal diferença entre a modelagem introduzida em (LEÃO, 2013) e o modelo que apresentamos a seguir é que no problema abordado nesta tese os níveis precisam ter exatamente a mesma altura em todos os módulos. As variáveis de decisão necessárias para a alocação dos produtos são:

- z_s^r : variável que representa a largura do módulo s da categoria r , com $s = 1, \dots, S$; $r = 1, \dots, R$;
- y_k : variável que representa a altura do nível k , com $k = 1, \dots, K$;
- α_{jks} : variável inteira que representa o número de vezes que o produto do tipo j é alocado no nível k do módulo s ;
- $x_{jks} = \begin{cases} 1, & \text{se o produto do tipo } j \text{ é alocado no nível } k \text{ do módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $q_{ks}^r = \begin{cases} 1, & \text{se o nível } k \text{ com produtos da categoria } r \text{ é alocado no módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

A seguir apresentamos as restrições de alocação, elas também definem o número de frentes de cada produto alocado nos níveis da gôndula.

$$W_{min}^r q_{ks}^r \leq \sum_{j \in I_r} w_j \alpha_{jks} \leq W_{max}^r q_{ks}^r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.1)$$

$$\sum_{j \in I_r} w_j \alpha_{jks} \leq z_s^r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.2)$$

$$l_j x_{jks} \leq \alpha_{jks} \leq L_j x_{jks}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.3)$$

$$h_j x_{jks} \leq y_k; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.4)$$

$$\sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r} z_s^r \leq W \quad (5.5)$$

$$\sum_{k=1}^K y_k \leq H \quad (5.6)$$

$$\sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K x_{jks} \geq 1; j \in I_r; r = 1, \dots, R \quad (5.7)$$

$$\sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K \alpha_{jks} \leq d_j; j \in I_r; r = 1, \dots, R \quad (5.8)$$

$$0 \leq z_s^r \leq W_{max}^r; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.9)$$

$$y_k \geq 0; k = 1, \dots, K \quad (5.10)$$

$$\alpha_{jks} \in \mathbb{Z}_+; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.11)$$

$$x_{jks} \in \{0, 1\}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.12)$$

$$q_{ks}^r \in \{0, 1\}; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.13)$$

As desigualdades (5.1) controlam a largura dos níveis para os módulos. Logo, se um nível k preenchido com produtos da categoria r for alocado em algum módulo da categoria r , temos que $q_{ks}^r = 1$ e, conseqüentemente, sua largura deve estar entre W_{min}^r e W_{max}^r . As restrições (5.2) definem as variáveis z_s^r , cujo valor é sempre maior ou igual ao do nível de maior largura do módulo s preenchido com produtos da categoria r . Já as restrições (5.3) limitam a quantidade mínima e máxima de produtos do tipo j no nível k do módulo s , se o produto do tipo j é alocado, então a variável $x_{jks} = 1$ (isto é, definem limitantes inferiores e superiores para garantir que uma exposição mínima e máxima seja dada a cada produto (visto de frente), neste trabalho adotamos o limitante inferior igual a 1). As restrições (5.4) definem as variáveis y_k , cujo valor é sempre maior ou igual do que a altura do produto mais alto alocado no nível k do módulo s com itens da categoria r . Já as restrições (5.5) impõem que a soma da largura dos módulos alocados na gôndola deve ser menor ou igual do que a largura da gôndola. As restrições (5.6) garantem que a soma das alturas dos níveis alocados em um módulo com produtos da categoria r não pode ultrapassar a altura da gôndola. As restrições (5.7) asseguram que todo produto seja alocado no mínimo uma vez. As restrições (5.8) limitam a quantidade de produtos do tipo j na gôndola. Já

as desigualdades (5.9) limitam a variável z'_s . E as expressões (5.10) - (5.13) definem o domínio das variáveis envolvidas no problema até o momento.

As restrições necessárias para definir a localização exata dos produtos nos níveis de uma gôndula são apresentadas em 3 etapas. Primeiramente, para que não haja saltos na alocação dos produtos nos níveis e nos módulos de uma gôndula, dois conjuntos de variáveis de decisão são adicionadas ao modelo:

$$\begin{aligned} \bullet \sigma_{js} &= \begin{cases} 1, & \text{se o produto do tipo } j \text{ está alocado no módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ \bullet \theta_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{se o produto do tipo } j \text{ está alocado no nível } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Também adicionamos ao modelo oito novos conjuntos de restrições:

$$\sum_{k=1}^K x_{jks} \leq K \sigma_{js}; \quad j \in I_r; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.14)$$

$$(a - b - 1) (\sigma_{ja} + \sigma_{jb} - 1) \leq \sum_{s=b+1}^{a-1} \sigma_{js}; \quad b = 1, \dots, M_r - 2; \quad a = b + 2, \dots, M_r; \\ j \in I_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.15)$$

$$\sigma_{js} \in \{0, 1\}; \quad j \in I_r; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.16)$$

As restrições (5.14) garantem que o item do tipo j só pode estar alocado no módulo s se estiver alocado em algum nível deste módulo. Já as restrições (5.15) impedem que haja saltos entre módulos consecutivos, ou seja, o item do tipo j só pode ser alocado nos módulos s e $s + 2$ se ele estiver alocado no módulo $s + 1$ (independente do nível). As expressões (5.16) definem o domínio das variáveis σ_{js} .

Exemplo 9. As restrições (5.15) evitam a seguinte situação:

Figura 47 – Salto entre módulos consecutivos.

$$\sum_{s=1}^{M_r} x_{jks} \leq M_r \theta_{jk}; \quad j \in I_r; \quad k = 1, \dots, K; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.17)$$

$$(l - m - 1) (\theta_{jm} + \theta_{jl} - 1) \leq \sum_{k=m+1}^{l-1} \theta_{jk}; \quad m = 1, \dots, K - 2; \quad l = m + 2, \dots, K; \\ j \in I_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.18)$$

$$\theta_{jk} \in \{0, 1\}; \quad j \in I_r; \quad k = 1, \dots, K; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.19)$$

As restrições (5.17) garantem que o item do tipo j só pode estar alocado no nível k se estiver alocado em algum módulo que contém este nível. E, as restrições (5.18) proíbem saltos entre os níveis, isto é, se o item do tipo j está alocado nos níveis k e $k + 2$ de um módulo qualquer, então ele deve ser alocado no nível $k + 1$ (não considera o módulo). As expressões (5.19) definem o domínio das variáveis θ_{jk} .

Exemplo 10. A situação a seguir é evitada pelas desigualdades (5.18).

Figura 48 – Salto entre níveis consecutivos.

Para garantir que um item do tipo j só pode estar alocado nos níveis k e $k + 2$ de um determinado módulo s se ele estiver alocado no nível $k + 1$ deste módulo, utilizamos as restrições (5.20) apresentadas a seguir:

$$(l - m - 1) (x_{jms} + x_{jls} - 1) \leq \sum_{k=m+1}^{l-1} x_{jks}; \quad m = 1, \dots, K - 2; \quad l = m + 2, \dots, K; \\ j \in I_r; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.20)$$

Exemplo 11. As desigualdades (5.20) evitam saltos entre os níveis dentro cada módulo, como mostra a Figura 49.

j		
j		

Figura 49 – Salto entre níveis consecutivos dentro de um módulo.

E, as restrições (5.21) garantem que um item do tipo j só pode estar alocado no nível k do módulo s e no nível $k + 1$ do módulo $s + 1$ se ele estiver alocado no nível k do módulo $s + 1$.

$$x_{jk(s+1)} \geq 1 - M(2 - x_{jks} - x_{j(k+1)(s+1)}); j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.21)$$

Exemplo 12. A seguinte situação é evitada pelas desigualdades 5.21.

	j	
j		

Figura 50 – Salto entre módulos consecutivos, considerando os níveis.

Além disso, precisamos considerar o fato de que os produtos que são do mesmo tipo se alocados em níveis consecutivos (ou seja, em níveis acima ou abaixo), precisam estar exatamente na mesma posição. Para esta finalidade, adaptamos o modelo de programação inteira proposto por (JÜNGER *et al.*, 1997) para o problema de minimização de cruzamento entre arestas de grafos em camadas.

Considere um grafo $G(V, A)$ com várias camadas (ou níveis) no qual o conjunto de nós V é particionado em K conjuntos disjuntos, ou seja, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_K$, onde $|V_k| = n_k, k = 1, \dots, K$ (aqui V representa o conjunto de produtos). O conjunto de arestas A também é particionado em conjuntos disjuntos, $A = A_1 \cup \dots \cup A_{K-1}$, onde o conjunto de arestas A_k liga os nós de V_k para V_{k+1} (ou seja, só existem arestas entre níveis sucessivos). Este problema consiste em encontrar uma ordenação de nós em cada conjunto V_k que minimiza o número de cruzamentos. Para o problema abordado neste trabalho, os nós representam os produtos que precisam ser alocados, e as arestas ligam os produtos do nível k para $k + 1$ (isto é, só são permitidas arestas entre produtos que estão no nível de baixo com o nível imediatamente

acima) e nosso objetivo é maximizar o número de cruzamentos existentes entre arestas com produtos diferentes.

Para a representação do modelo, definimos a bijeção $\rho_k : V_k \longrightarrow \{1, 2, \dots, n_k\}$ a qual representa a permutação dos produtos em V_k , $k = 1, \dots, K$ e consideramos as variáveis de decisão

$$\bullet \beta_{je}^{ks} = \begin{cases} 1, & \text{se } \rho_k(j) < \rho_k(e) \text{ no módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\bullet \gamma_{ijpe}^{ks} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ cruza a aresta } (p, e) \text{ no módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ com } (i, j), (p, e) \in A_k.$$

Note que as variáveis de cruzamento γ_{ijpe}^{ks} são iguais a 1 se:

$$(1) \beta_{pi}^{ks} + \beta_{je}^{(k+1)s} - 1 \leq \gamma_{ijpe}^{ks}, \text{ com } j \neq e. \text{ Ou}$$

Figura 51 – Neste caso, temos $\beta_{pi}^{ks} = \beta_{je}^{(k+1)s} = 1$.

$$(2) \beta_{ip}^{ks} + \beta_{ej}^{(k+1)s} - 1 \leq \gamma_{ijpe}^{ks}, \text{ com } j \neq e.$$

Figura 52 – Aqui, temos que $\beta_{ip}^{ks} = \beta_{ej}^{(k+1)s} = 1$.

Reescrevemos as expressões acima e obtemos as restrições (5.23) e (5.24). Logo, adicionamos ao modelo as restrições a seguir:

$$2\beta_{je}^{ks} \leq x_{jks} + x_{eks}; \quad j, e \in I_r; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.22)$$

$$-\gamma_{ijpe}^{ks} \leq \beta_{je}^{(k+1)s} - \beta_{ip}^{ks} \leq \gamma_{ijpe}^{ks}; \quad (i, j), (p, e) \in A_k; \quad j < e; \quad k = 1, \dots, K-1; \\ s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.23)$$

$$1 - \gamma_{ijpe}^{ks} \leq \beta_{ej}^{(k+1)s} + \beta_{ip}^{ks} \leq 1 + \gamma_{ijpe}^{ks}; \quad (i, j), (p, e) \in A_k; \quad j > e; \quad k = 1, \dots, K-1; \\ s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.24)$$

$$0 \leq \beta_{ij}^{ks} + \beta_{jp}^{ks} - \beta_{ip}^{ks} \leq 1; \quad 1 \leq i < j < p \leq n_k; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r \quad (5.25)$$

$$\beta_{je}^{ks} + \beta_{ej}^{ks} \leq 1; \quad j, e \in I_r; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.26)$$

$$\beta_{je}^{ks} \in \{0, 1\}; \quad j, e \in I_r; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R \quad (5.27)$$

$$\gamma_{ijpe}^{ks} \in \{0, 1\}; \quad (i, j), (p, e) \in A_k; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r \quad (5.28)$$

As desigualdades (5.22) definem as variáveis β_{je}^{ks} . Se um par de arestas (i, j) e (p, e) se cruzarem, então as restrições (5.23) e (5.24) ajustam a variável de cruzamento γ_{ijpe}^{ks} para 1. As restrições (5.25) e (5.26) asseguram uma ordem viável dos produtos no nível k do módulo s . E, as expressões (5.27) e (5.28) definem o domínio das variáveis envolvidas no problema até o momento.

A função objetivo (5.29) deste problema tem, como critério de otimização, maximizar o lucro e os cruzamentos de arestas entre produtos diferentes. Além disso, ela garante que os produtos menos valiosos sejam alocados em níveis mais baixo e os mais valiosos em cima (de acordo com o que foi apresentado na Figura 42).

$$\text{Max} \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in I_r} v_{jks} \alpha_{jks} + \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K \sum_{(i,j),(p,e) \in A_k; i \neq j, p \neq e} \gamma_{ijpe}^{ks} \quad (5.29)$$

Nos Exemplos 13 e 14, os modelos testados foram implementados utilizando-se a linguagem de programação C++ em conjunto com a biblioteca *Concert Technology do solver* comercial CPLEX 12.6 com a parametrização padrão. Os testes computacionais foram realizados em um computador equipado com 2 Processadores Intel Xeon E5-2680v2 de 2.8 GHz com dez núcleos e com 128 GB DDR3 1866MHz de memória RAM.

Exemplo 13. Considere uma gôndula com altura $H = 60$ e largura $W = 80$ e seis tipos de produtos (pertencentes a uma mesma categoria), indexados por j , com as alturas, larguras, limitantes superiores e valores de utilidade apresentados na Tabela 22.

Tabela 22 – Dados relativos aos produtos.

Tipo de produto (j)	Altura (h_j)	Largura (w_j)	Limitante (d_j)	Valor por nível (v_{jks})				
				1	2	3	4	5
1	20	10	20	70	70	100	100	75
2	15	5	16	75	75	95	95	80
3	10	20	14	85	85	90	90	100
4	10	6	13	90	90	85	85	95
5	8	15	10	95	95	80	80	90
6	5	10	8	100	100	75	75	85

O *layout* da solução ótima deste exemplo, utilizando o modelo matemático (5.1) - (5.29), pode ser visto na Figura 53.

Figura 53 – Solução do exemplo utilizando o modelo matemático parcial (5.1) - (5.29).

Vale ressaltar que este *layout* foi obtido pela solução ótima em 1,54 segundos de execução. Porém, essa solução não é aceitável, na prática, pois no nível 1 foi alocado um produto do tipo 3 entre os produtos do tipo 5. Para evitar este tipo de situação, ou seja, a fim de obtermos uma determinada sequência na alocação dos produtos nos níveis de módulos adjacentes (isto é, se um item do tipo j estiver alocado no nível k dos módulos s e $s + 1$, então j precisa estar na última posição do nível k do módulo s e na primeira posição do nível k do módulo $s + 1$), as seguintes variáveis de decisão adicionais são introduzidas no modelo:

$$\bullet \delta_{jks}^{Inicial} = \begin{cases} 1, & \text{se o produto do tipo } j \text{ está alocado na primeira posição do nível } k \\ & \text{do módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \delta_{jks}^{Final} &= \begin{cases} 1, & \text{se o produto do tipo } j \text{ está alocado na última posição do nível } k \\ & \text{do módulo } s; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
\bullet \varepsilon_{ks} &= \begin{cases} 1, & \text{se o produto que está alocado na última posição do nível } k \text{ do módulo } s \\ & \text{não coincide com o produto que está alocado na primeira posição do} \\ & \text{nível } k \text{ do módulo } s+1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}$$

Consequentemente, as restrições de sequenciamento a seguir são adicionadas ao modelo:

$$\delta_{jks}^{Inicial} \leq x_{jks}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.30)$$

$$\delta_{jks}^{Final} \leq x_{jks}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.31)$$

$$\sum_{j \in I_r} \delta_{jks}^{Inicial} = 1; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.32)$$

$$\sum_{j \in I_r} \delta_{jks}^{Final} = 1; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.33)$$

$$\delta_{jks}^{Inicial} + \sum_{e \in I_r} \beta_{ej}^{ks} = \delta_{jks}^{Final} + \sum_{e \in I_r} \beta_{je}^{ks}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.34)$$

$$\varepsilon_{ks} \geq \delta_{jks}^{Final} + \delta_{ek(s+1)}^{Inicial} - 1; j, e \in I_r, \text{ com } j \neq e; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r - 1; r = 1, \dots, R \quad (5.35)$$

$$\delta_{jks}^{Inicial} \in \{0, 1\}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.36)$$

$$\delta_{jks}^{Final} \in \{0, 1\}; j \in I_r; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r; r = 1, \dots, R \quad (5.37)$$

$$\varepsilon_{ks} \in \{0, 1\}; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, M_r - 1; r = 1, \dots, R \quad (5.38)$$

As desigualdades (5.30) e (5.31) garantem, respectivamente, que um produto do tipo j só pode estar na primeira ou última posição do nível k do módulo s se este item estiver alocado no nível k do módulo s . As restrições (5.32) e (5.33) asseguram que somente um tipo de produto pode ser alocado no início ou no final do nível k do módulo s , respectivamente. As igualdades (5.34) são as restrições de fluxo. Já as restrições (5.35) são utilizadas para garantir que o último produto do nível k do módulo s seja igual ao primeiro produto do nível k do módulo $s+1$. Por fim, as expressões (5.36), (5.37) e (5.38) definem o domínio das variáveis envolvidas no problema.

Além disso, acrescentamos uma penalização na função objetivo apresentada em (5.29), a qual se torna

$$\text{Max} \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in I_r} v_{jks} \alpha_{jks} + \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r} \sum_{k=1}^K \sum_{(i,j),(p,e) \in A_k; i \neq j, p \neq e} \gamma_{ijpe}^{ks} - \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^{M_r-1} \sum_{k=1}^K b \epsilon_{ks} \quad (5.39)$$

Exemplo 14. Considere os mesmos dados apresentados no Exemplo 13.

Na Figura 54, apresentamos o *layout* obtido pela solução ótima em 2,26 segundos de execução, utilizando a formulação matemática completa (5.1) - (5.39) para o problema de alocação de produtos nas gôndulas de supermercados.

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1		1		1		1		1		1		1		1	
5		5				5		5						3	
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	

Figura 54 – Solução do exemplo utilizando o modelo completo (5.1) - (5.39).

Vale ressaltar que o modelo apresentado neste capítulo, trata-se de um modelo preliminar. Ainda precisamos ajustar a função objetivo, pois as restrições de cruzamento (que dizem exatamente onde um produto está alocado, ou seja, as restrições que determinam o *layout* da gôndula) são restrições fracas e com isso, para que as restrições de sequenciamento sejam factíveis, foi necessário acrescentar ao modelo a seguinte restrição:

$$\sum_{j \in I_r} \sum_{e \in I_r} (\beta_{je}^{ks} + \beta_{ej}^{ks}) \leq \sum_{j \in I_r} x_{jks} - 1; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, M_r; \quad r = 1, \dots, R.$$

5.3.3 Considerações finais

Neste capítulo abordamos o problema de alocação de produtos em gôndulas de supermercados. Primeiramente realizamos uma pesquisa em uma rede de supermercados do interior paulista a fim de fazermos um levantamento das características do problema no Brasil. Além disso, fizemos uma revisão da literatura para buscar as aplicações realizadas no setor. Por meio desta revisão notamos que existe grande carência de pesquisas envolvendo este problema, mais precisamente, até onde sabemos, no Brasil ainda não existe pesquisa para apoiar as decisões dos supermercadistas na organização das gôndulas.

Neste trabalho, apresentamos um modelo preliminar para representar o problema introduzido na Seção 5.3, (ou seja, o problema de alocação de produtos em gôndulas de supermercados no Brasil). Esta formulação matemática foi desenvolvida em etapas. Inicialmente sobre uma gôndula executamos cortes verticais a fim de obtermos os módulos. Em seguida, cada módulo é cortado em produtos demandados de acordo com a categoria do módulo, nas dimensões e quantidades necessárias. A alocação dos produtos na gôndula está baseada na formulação matemática M2 e no modelo apresentado em (LEÃO, 2013) para o problema da mochila compartimentada bidimensional. E, a definição da localização exata dos produtos nos níveis de uma gôndula foi realizada em 3 etapas. Primeiramente, foi necessário garantir que não havia saltos na alocação dos produtos nos níveis e nos módulos de uma gôndula. Além disso, foi preciso considerar o fato de que os produtos que são do mesmo tipo se alocados em níveis consecutivos, precisam estar exatamente na mesma posição (para esta finalidade, adaptamos o modelo de programação inteira proposto por (JÜNGER *et al.*, 1997) para o problema de minimização de cruzamento entre arestas de grafos em camadas). E, a fim de obtermos uma determinada sequência na alocação dos produtos nos níveis de módulos adjacentes, utilizamos algumas restrições de sequenciamento.

Por se tratar de um modelo inicial, realizamos testes computacionais considerando apenas uma categoria de produtos, a qual contém 6 tipos de produtos diferentes (ver Exemplo 14). Nosso próximo passo é executar testes utilizando mais categorias de produtos, bem como, dados reais.

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

O objetivo principal deste trabalho de doutorado foi analisar e desenvolver novas formulações matemáticas para o problema de empacotamento em faixas bidimensional em níveis - 2LSP. Além disso, apresentamos uma aplicação prática com a finalidade de futuramente desenvolver uma ferramenta para a geração automática dos planogramas utilizados para a montagem de gôndulas de supermercados. Sendo assim, este capítulo tem o intuito de apresentar as principais conclusões desta pesquisa bem como discutir possíveis perspectivas para trabalhos futuros.

Em um primeiro momento, revisamos alguns modelos matemáticos para os problemas de corte e empacotamento, os quais foram adaptados para o 2LSP. Além disso, utilizando instâncias da literatura, realizamos uma comparação entre as formulações desenvolvidas e os modelos da literatura apresentados em (LODI; MARTELLO; VIGO, 2004) e (MRAD, 2015). Por meio dos testes computacionais realizados, podemos concluir que a formulação matemática mais eficiente, no que diz respeito a provar a otimalidade, foi M1desig, seguido dos modelos da literatura Lodi et al. (2004) e Mehdi Mrad (2015), respectivamente. O M1desig foi obtido por meio da adaptação do modelo apresentado em (LODI; MONACI, 2003) com a inclusão de desigualdades válidas. Isso se deve ao fato de que embora o modelo Lodi et al. (2004) apresente melhores soluções primais, a modelagem M1desig também apresenta boas soluções primais e, além disso, obtém melhores limitantes duais. Mais ainda, realizamos uma comparação dos resultados referentes aos valores das relaxações lineares obtidos por cada uma das formulações matemáticas analisadas. Ao relaxar a condição de integralidade podemos observar que as formulações matemáticas Lodi et al. (2004), M1 e M1desig apresentaram os mesmos limitantes inferiores. A relaxação linear do modelo de fluxo de arco Mehdi Mrad (2015) foi a mais eficiente. Vale ressaltar que, em todos os grupos de instâncias, o modelo M2 obteve resultados muito inferiores que as demais modelagens, tanto para provar a otimalidade, quanto aos resultados da relaxação linear. Uma via interessante para pesquisas futuras seria melhorar a qualidade dos limitantes inferiores destes modelos.

Baseando-se em um dos modelos desenvolvidos para o 2LSP, realizamos uma aplicação prática com o objetivo de futuramente desenvolver uma ferramenta para a geração automática dos planogramas utilizados para a montagem de gôndulas em supermercados. No presente trabalho, desenvolvemos um modelo preliminar e realizamos testes computacionais considerado apenas uma categoria de produtos, a qual contém 6 tipos de produtos diferentes. Futuros trabalhos podem explorar esta modelagem, aprimorando as restrições envolvidas no modelo, bem como, executando testes utilizando dados reais. Além disso, a estrutura do problema sugere o desenvolvimento de heurísticas construtivas baseadas na formulação matemática do problema.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, F. **Trademarketing - a conquista do consumidor no ponto de venda**. 2008. Citado na página 71.

ANDRADE, M. S. F. d. **Algoritmos Evolutivos Mono e Multiobjetivos para Problemas Bidimensionais de Corte**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2009. Citado na página 19.

ATAN, Z.; ERKIP, N. Note on "the backroom effect in retail operations". **Production and Operations Management**, Wiley Online Library, v. 24, n. 11, p. 1833–1834, 2015. Citado na página 76.

BEASLEY, J. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. **Journal of the Operational Research Society**, JSTOR, p. 297–306, 1985. Citado na página 50.

BENNEL, J. A.; OLIVEIRA, J. F. A tutorial in irregular shape packing problems. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 60, n. 1, p. 93–105, 2009. Citado nas páginas 1 e 6.

BERKEY, J. O.; WANG, P. Y. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. **Journal of the Operational Research Society**, JSTOR, v. 38, p. 423–429, 1987. Citado na página 50.

BIANCHI-AGUIAR, T. **The retail shelf space allocation problem: new optimization methods applied to a supermarket chain**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2015. Citado nas páginas 69, 76 e 77.

BIANCHI-AGUIAR, T.; CARRAVILLA, M.; OLIVEIRA, J. Replicating shelf space allocation solutions across retail stores. **Euro. J. Oper. Res. Submitted**, 2015. Citado na página 81.

BIANCHI-AGUIAR, T.; SILVA, E.; GUIMARÃES, L.; CARRAVILLA, M.; OLIVEIRA, J. **Allocating products on shelves under merchandising rules: multi-level product families with display directions**. [S.l.], 2015. Citado na página 81.

BORIN, N.; FARRIS, P. W.; FREELAND, J. R. A model for determining retail product category assortment and shelf space allocation. **Decision sciences**, Wiley Online Library, v. 25, n. 3, p. 359–384, 1994. Citado na página 79.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading: A state-of-the-art review. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 229, n. 1, p. 1–20, 2013. Citado nas páginas 1 e 6.

BRASIL, E. C. R. E. **Gerenciamento por Categorias Melhores Práticas**. 1998. Citado nas páginas 71, 72 e 75.

_____. **Manual Gerenciamento por Categorias, metodologia Simplificada**. 2007. Citado nas páginas 71 e 73.

- BROWN, D. J.; BAKER, B. S.; KATSEFF, H. P. Lower bounds for on-line two-dimensional packing algorithms. **Acta Informatica**, Springer, v. 18, n. 2, p. 207–225, 1982. Citado nas páginas 2 e 6.
- CARVALHO, J. V. D. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 86, p. 629–659, 1999. Citado na página 27.
- CHANDON, P.; HUTCHINSON, J. W.; BRADLOW, E. T.; YOUNG, S. H. Does in-store marketing work? effects of the number and position of shelf facings on brand attention and evaluation at the point of purchase. **Journal of marketing**, American Marketing Association, v. 73, n. 6, p. 1–17, 2009. Citado na página 78.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. **Operations Research**, INFORMS, v. 25, n. 1, p. 30–44, 1977. Citado nas páginas 41 e 49.
- COELHO, D. G. **Um algoritmo evolutivo multiobjetivo aplicado ao problema de corte bidimensional guilhotinado**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2011. Citado nas páginas 15, 9, 16, 17, 18 e 19.
- COFFMAN, E.; CSIRIK, J.; GALAMBOS, G.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Bin packing approximation algorithms: survey and classification. **Handbook of Combinatorial Optimization**, Springer New York, p. 455–531, 2013. Citado nas páginas 1 e 6.
- CORSTJENS, M.; DOYLE, P. A model for optimizing retail space allocations. **Management Science**, INFORMS, v. 27, n. 7, p. 822–833, 1981. Citado nas páginas 78 e 79.
- _____. A dynamic model for strategically allocating retail space. **Journal of the Operational Research Society**, JSTOR, p. 943–951, 1983. Citado na página 79.
- CURHAN, R. C. The relationship between shelf space and unit sales in supermarkets. **Journal of Marketing Research**, JSTOR, p. 406–412, 1972. Citado na página 78.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical Programming**, Springer, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002. Citado nas páginas 64 e 65.
- DONSELAAR, K. H. V.; GAUR, V.; WOENSEL, T. V.; BROEKMEULEN, R. A.; FRAN-SOO, J. C. Ordering behavior in retail stores and implications for automated replenishment. **Management Science**, INFORMS, v. 56, n. 5, p. 766–784, 2010. Citado na página 76.
- DOWSLAND, K. A.; DOWSLAND, W. B. Packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 56, n. 1, p. 2–14, 1992. Citado nas páginas 1 e 6.
- DREZE, X.; HOCH, S. J.; PURK, M. E. Shelf management and space elasticity. **Journal of retailing**, Elsevier, v. 70, n. 4, p. 301–326, 1994. Citado nas páginas 73 e 78.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990. Citado nas páginas 1, 5, 6, 7, 10, 11, 12 e 13.
- FURINI, F.; MALAGUTI, E.; DURÁN, R. M.; PERSIANI, A.; TOTH, P. A column generation heuristic for the two-dimensional two-staged guillotine cutting stock problem with multiple stock size. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 251–260, 2012. Citado nas páginas 2, 34 e 35.

FURINI, F.; MALAGUTI, E.; THOMOPULOS, D. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming. **Journal on Computing, INFORMS**, v. 28, n. 4, p. 736–751, 2016. Citado nas páginas 16, 2, 39, 40, 43 e 53.

GEISMAR, H. N.; DAWANDE, M.; MURTHI, B.; SRISKANDARAJAH, C. Maximizing revenue through two-dimensional shelf-space allocation. **Production and Operations Management**, Wiley Online Library, v. 24, n. 7, p. 1148–1163, 2015. Citado na página 77.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. **Operations Research, INFORMS**, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961. Citado nas páginas 1, 6 e 7.

_____. A linear programming approach to the cutting stock problem-part ii. **Operations Research, INFORMS**, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963. Citado nas páginas 1, 6 e 7.

_____. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. **Operations Research, INFORMS**, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado nas páginas 1, 6 e 24.

HANSEN, J. M.; RAUT, S.; SWAMI, S. Retail shelf allocation: a comparative analysis of heuristic and meta-heuristic approaches. **Journal of Retailing**, Elsevier, v. 86, n. 1, p. 94–105, 2010. Citado na página 80.

HANSEN, P.; HEINSBROEK, H. Product selection and space allocation in supermarkets. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 3, n. 6, p. 474–484, 1979. Citado nas páginas 76 e 79.

HARIGA, M. A.; AL-AHMARI, A.; MOHAMED, A.-R. A. A joint optimisation model for inventory replenishment, product assortment, shelf space and display area allocation decisions. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 181, n. 1, p. 239–251, 2007. Citado na página 80.

HERZ, J. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**, IBM, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado na página 41.

HOPPER, E.; TURTON, B. C. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2d packing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 34–57, 2001. Citado na página 48.

_____. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2d strip packing problems. **Artificial Intelligence Review**, Springer, v. 16, n. 4, p. 257–300, 2001. Citado nas páginas 1 e 6.

HÜBNER, A. **Retail category management: decision support systems for assortment, shelf space, inventory and price planning**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 656. Citado na página 80.

HÜBNER, A.; KUHN, H.; KÜHN, S. An efficient algorithm for capacitated assortment planning with stochastic demand and substitution. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 250, n. 2, p. 505–520, 2016. Citado na página 76.

HÜBNER, A.; KUHN, H.; STERNBECK, M. Retail operations: Why and how retailers benefit from an integrative supply chain management perspective. DVV Media Group, 2013. Citado na página 76.

- HÜBNER, A.; SCHAAL, K. An integrated assortment and shelf-space optimization model with demand substitution and space-elasticity effects. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 261, n. 1, p. 302–316, 2017. Citado na página 81.
- _____. A shelf-space optimization model when demand is stochastic and space-elastic. **Omega**, Elsevier, v. 68, p. 139–154, 2017. Citado nas páginas 16, 76, 77, 78 e 81.
- HÜBNER, A. H.; KUHN, H. Shelf and inventory management with space-elastic demand. In: **Operations research proceedings 2010**. [S.l.]: Springer, 2011. p. 405–410. Citado na página 81.
- _____. Retail category management: State-of-the-art review of quantitative research and software applications in assortment and shelf space management. **Omega**, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 199–209, 2012. Citado na página 76.
- HWANG, H.; CHOI, B.; LEE, G. A genetic algorithm approach to an integrated problem of shelf space design and item allocation. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 56, n. 3, p. 809–820, 2009. Citado na página 80.
- HWANG, H.; CHOI, B.; LEE, M.-J. A model for shelf space allocation and inventory control considering location and inventory level effects on demand. **International Journal of Production Economics**, Elsevier, v. 97, n. 2, p. 185–195, 2005. Citado na página 80.
- IRION, J.; LU, J.-C.; AL-KHAYYAL, F.; TSAO, Y.-C. A piecewise linearization framework for retail shelf space management models. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 222, n. 1, p. 122–136, 2012. Citado nas páginas 76 e 81.
- JR, E. G. C.; DOWNEY, P. J.; WINKLER, P. Packing rectangles in a strip. **Acta informatica**, Springer, v. 38, n. 10, p. 673–693, 2002. Citado nas páginas 2 e 6.
- JÜNGER, M.; LEE, E. K.; MUTZEL, P.; ODENTHAL, T. A polyhedral approach to the multi-layer crossing minimization problem. In: **International Symposium on Graph Drawing**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 13–24. Citado nas páginas 89 e 95.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. **Management Science**, INFORMS, v. 6, n. 4, p. 366–422, 1960. Citado nas páginas 1 e 6.
- KATSIFOU, A.; SEIFERT, R. W.; TANCRESZ, J.-S. Joint product assortment, inventory and price optimization to attract loyal and non-loyal customers. **Omega**, Elsevier, v. 46, p. 36–50, 2014. Citado na página 76.
- KÖK, A. G.; FISHER, M. L. Demand estimation and assortment optimization under substitution: Methodology and application. **Operations Research**, INFORMS, v. 55, n. 6, p. 1001–1021, 2007. Citado na página 76.
- KÖK, A. G.; FISHER, M. L.; VAIDYANATHAN, R. Assortment planning: Review of literature and industry practice. In: **Retail supply chain management**. [S.l.]: Springer, 2015. p. 175–236. Citado na página 76.
- KUHN, H.; STERNBECK, M. G. Integrative retail logistics: an exploratory study. **Operations Management Research**, Springer, v. 6, n. 1-2, p. 2–18, 2013. Citado na página 77.

- LEÃO, A. A. d. S. **Extensões em problemas de corte: padrões compartimentados e problemas acoplados**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. Citado nas páginas 85 e 95.
- LIM, A.; RODRIGUES, B.; ZHANG, X. Metaheuristics with local search techniques for retail shelf-space optimization. **Management science**, *Inform*s, v. 50, n. 1, p. 117–131, 2004. Citado na página 80.
- LODI, A. **Algorithms for two-dimensional bin packing and assignment problems**. Tese (Doutorado) — Universita Degli Studi di Bologna, 1999. Citado nas páginas 1, 2, 22 e 24.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: A survey. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 241–252, 2002. Citado nas páginas 15, 1, 2, 6, 24 e 25.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. **Journal on Computing**, *INFORMS*, v. 11, n. 4, p. 345–357, 1999. Citado nas páginas 1 e 24.
- _____. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 123, n. 1, p. 379–396, 2002. Citado nas páginas 1 e 6.
- _____. Models and bounds for two-dimensional level packing problems. **Journal of Combinatorial Optimization**, Springer, v. 8, n. 3, p. 363–379, 2004. Citado nas páginas 15, 1, 2, 3, 24, 25, 26, 31, 32, 53, 65 e 97.
- LODI, A.; MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. **Mathematical Programming**, Springer, v. 94, n. 2-3, p. 257–278, 2003. Citado nas páginas 2, 31, 32 e 97.
- MACEDO, R.; ALVES, C.; CARVALHO, J. V. D. Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 991–1001, 2010. Citado na página 27.
- MARTELLO, S.; VIGO, D. Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. **Management Science**, *INFORMS*, v. 44, n. 3, p. 388–399, 1998. Citado na página 51.
- MCGOLDRICK, P. J. **Retail marketing**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2002. Citado na página 73.
- MODERNO, G. P. S. S. **Guia de categorias**. [S.l.]: Uma publicação do Grupo Lund. Ano 42, v.5, 2011. Citado nas páginas 16, 71, 72 e 83.
- MODERNO, V. S. S. **8 passos para uma boa execução de planograma**. [S.l.]: <http://www.sm.com.br/detalhe/gestao/oito-passos-para-uma-bo-execucao-de-planograma>, 2017. Citado na página 75.
- MRAD, M. An arc flow-based optimization approach for the two-stage guillotine strip cutting problem. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 66, n. 11, p. 1850–1859, 2015. Citado nas páginas 2, 3, 25, 27, 28, 47, 61, 65, 67 e 97.
- NONATO, A. C. F. **O relacionamento entre fornecedor e varejo no gerenciamento por categorias: um estudo de caso**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010. Citado nas páginas 16, 71, 74 e 75.

- OLIVEIRA, J. F.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1106–1108, 2007. Citado nas páginas 1 e 6.
- PARENTE, J. **Varejo no Brasil: gestão e estratégia**. [S.l.]: Editora Atlas, 2000. Citado na página 70.
- PIRES, M.; PRATASY, J.; LIZY, J.; AMORIM, P. Design of backroom storage: a framework and research opportunity. In: **Working paper**. [S.l.]: Universidade do Porto, 2015. p. 1–19. Citado na página 77.
- PRIMIO, F. D. A história dos supermercados gaúchos. **Porto Alegre: AGAS**, 1999. Citado na página 70.
- RAUT, S.; SWAMI, S.; MOHOLKAR, M. Heuristic and meta-heuristic approaches for multi-period shelf-space optimization: the case of motion picture retailing. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 60, n. 10, p. 1335–1348, 2009. Citado na página 80.
- REINER, G.; TELLER, C.; KOTZAB, H. Analyzing the efficient execution of in-store logistics processes in grocery retailing—the case of dairy products. **Production and Operations Management**, Wiley Online Library, v. 22, n. 4, p. 924–939, 2013. Citado na página 76.
- RIFF, M. C.; BONNAIRE, X.; NEVEU, B. A revision of recent approaches for two-dimensional strip-packing problems. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 823–827, 2009. Citado nas páginas 1 e 6.
- ROSA, N. G.; DIAS, S. d. B. A. Estratégia e gestão das gôndolas de supermercado. **Estudos**, v. 42, n. 1, p. 83–102, 2015. Citado nas páginas 69 e 70.
- RUSSELL, R. A.; URBAN, T. L. The location and allocation of products and product families on retail shelves. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 179, n. 1, p. 131–147, 2010. Citado nas páginas 77 e 80.
- SCHNEEWEISS, C. Distributed decision making: a unified approach. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 150, n. 2, p. 237–252, 2003. Citado na página 77.
- SILVA, C. T. L. d. **Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Citado nas páginas 15, 7 e 8.
- SILVA, E.; ALVELOS, F.; CARVALHO, J. V. de. An integer programming model for two-and three-stage two-dimensional cutting stock problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 205, n. 3, p. 699–708, 2010. Citado nas páginas 16, 2, 35, 36 e 38.
- SMITH, S. A.; AGRAWAL, N. Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution. **Operations Research**, INFORMS, v. 48, n. 1, p. 50–64, 2000. Citado na página 76.
- URBAN, T. L. An inventory-theoretic approach to product assortment and shelf-space allocation. **Journal of Retailing**, Elsevier, v. 74, n. 1, p. 15–35, 1998. Citado na página 76.
- VAREJO, B. H. S. **Olhar para dentro é o caminho para reagir em um cenário de crise**. [S.l.]: <http://www.supervarejo.com.br/olhar-para-dentro-e-o-caminho-para-reagir-em-um-cenario-de-crise>, 2017. Citado na página 69.

- WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado nas páginas [15](#), [1](#), [6](#), [10](#), [11](#), [13](#), [20](#) e [24](#).
- YANG, M.-H. An efficient algorithm to allocate shelf space. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 131, n. 1, p. 107–118, 2001. Citado nas páginas [79](#) e [81](#).
- YANG, M.-H.; CHEN, W.-C. A study on shelf space allocation and management. **International journal of production economics**, Elsevier, v. 60, p. 309–317, 1999. Citado na página [79](#).
- YÜCEL, E.; KARAESMEN, F.; SALMAN, F. S.; TÜRKAY, M. Optimizing product assortment under customer-driven demand substitution. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 199, n. 3, p. 759–768, 2009. Citado na página [76](#).
- ZELST, S. V.; DONSELAAR, K. V.; WOENSEL, T. V.; BROEKMEULEN, R.; FRANSOO, J. Logistics drivers for shelf stacking in grocery retail stores: Potential for efficiency improvement. **International Journal of Production Economics**, Elsevier, v. 121, n. 2, p. 620–632, 2009. Citado na página [76](#).
- ZUFRYDEN, F. S. A dynamic programming approach for product selection and supermarket shelf-space allocation. **Journal of the operational research society**, JSTOR, p. 413–422, 1986. Citado na página [79](#).