

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Estudo numérico de escoamento transicional sobre placa
côncava com perturbações não estacionárias**

Adriano Sueke Takata

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de
Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Adriano Sueke Takata

Estudo numérico de escoamento transicional sobre placa côncava com perturbações não estacionárias

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Julho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T136e Takata, Adriano Sueke
Estudo numérico de escoamento transicional sobre
placa côncava com perturbações não estacionárias /
Adriano Sueke Takata; orientador Leandro Franco de
Souza. -- São Carlos, 2020.
113 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2020.

1. Vórtices de Görtler Estacionários/Não
estacionários. 2. Perturbações Não estacionárias. 3.
Análise Não Linear. 4. Transferência de Calor. 5.
Simulação Numérica de Alta Ordem. I. Souza, Leandro
Franco de , orient. II. Título.

Adriano Sueke Takata

Numerical study of transitional flow over a concave surface
with non stationary disturbances

This thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Computer and Mathematical Sciences Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
July 2020

*Às pessoas que mais amo na vida:
Minha família*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus,
aos meus pais Rosa e Luiz e aos meus irmãos Anderson e Alessandro,
à todas as pessoas da família Yamada e Takata.

Agradeço ao professor e orientador Leandro Franco de Souza.

Agradeço ao professor Jerzy Maciej Floryan e Laurie Montgomery.

Agradeço aos meus amigos, e a todas as pessoas que diretamente e indiretamente me ajudaram no meu desenvolvimento.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao ICMC-USP e a FAPESP pela infraestrutura.

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

TAKATA, A. S. **Estudo numérico de escoamento transicional sobre placa côncava com perturbações não estacionárias**. 2020. 110 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

A geração dos vórtices de Görtler é o primeiro estágio do processo de transição laminar turbulento em um escoamento de camada limite sobre uma superfície côncava. Estes vórtices geram fortes distorções tanto no perfil de velocidade quanto no perfil de temperatura intensificando a taxa de transferência de calor e o coeficiente de arrasto em relação ao escoamento laminar. A fim de maximizar ou minimizar os efeitos dessas duas propriedades neste tipo de escoamento, há vários estudos com o intuito de entender os mecanismos da formação dos vórtices de Görtler para poder retardar ou antecipar a geração deles. Este trabalho investiga a evolução, a estrutura e a influência das perturbações não estacionárias em um escoamento de camada limite sobre uma superfície côncava através da simulação numérica com métodos de alta ordem de precisão. Os resultados mostram que quando o comprimento de onda transversal e a frequência temporal aumentam, o modo subharmônico estacionário (0,2) domina o escoamento gerando os vórtices de Görtler estacionários, caso contrário, o modo fundamental (1,1) domina o escoamento e os vórtices não estacionários são gerados. As perturbações não estacionárias retardam o surgimento os vórtices de Görtler, pois a taxa de crescimento do modo fundamental (1,1) diminui quando a frequência aumenta independentemente do comprimento de onda transversal. A taxa de transferência de calor e o coeficiente de arrasto são menores para os vórtices não estacionários do que para os vórtices estacionários.

Palavras-chave: Vórtices de Görtler Estacionários/Não Estacionários, Perturbações Não Estacionárias, Análise Não Linear, Transferência de Calor, Simulação Numérica de Alta Ordem.

ABSTRACT

TAKATA, A. S. **Numerical study of transitional flow over a concave surface with non stationary disturbances**. 2020. 110 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

The generation of Görtler vortices is the first stage of the turbulent laminar transition process in a boundary layer flow over a concave surface. These vortices produce distortions both in the velocity profile and in the temperature profile, intensifying the heat transfer rate and the drag coefficient compared to the laminar flow. There are several studies to understand the mechanisms of the formation of Görtler vortices to delay or anticipate their generation to maximize or minimize the effects of these two properties in this type of flow. This work investigates the evolution, structure, and influence of non-stationary disturbances in a boundary layer flow over a concave surface through numerical simulation with high-precision methods. The results show the stationary sub-harmonic mode (0,2) dominates the flow generating the stationary Görtler vortices as the spanwise wavelength and time-frequency increase, otherwise, the fundamental mode (1,1) dominates the flow and generated the unsteady vortices. Non-stationary disturbances delay the appearance of Görtler vortices since the growth rate of the fundamental mode (1,1) decreases when the frequency increases regardless of the transverse wavelength. The heat transfer rate and the drag coefficient for the unsteady vortices are lower than for the steady vortices.

Keywords: steady/unsteady Görtler vortices, Non-stationary Disturbances, Non-linear Analysis, Heat Transfer, High-order Numerical Simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração dos resultados obtidos nos experimentos de Reynolds.	34
Figura 2 – Classificação da estabilidade do sistema.	35
Figura 3 – Estágios do processo de transição laminar-turbulento.	36
Figura 4 – Configurações do critério de circulação de Rayleigh. (a) superfície convexa caso estável; (b) superfície convexa caso instável; (c) superfície côncava caso instável; e (d) superfície côncava caso estável.	37
Figura 5 – Ilustração dos principais escoamentos envolvendo a instabilidade centrífuga. (a) Taylor; (b) Dean; e (c) Görtler.	38
Figura 6 – Vórtices de Görtler	39
Figura 7 – Curvas constantes da taxa de amplificação.	40
Figura 8 – Regiões ascendente e descendente.	41
Figura 9 – Distorção das linhas de isovelocidade longitudinal pelos vórtices de Görtler.	42
Figura 10 – Domínio computacional do escoamento base.	50
Figura 11 – Domínio computacional do escoamento perturbado.	52
Figura 12 – Estiramento de malha em torno do ponto j	58
Figura 13 – Ilustração do algoritmo do método multimalha.	60
Figura 14 – Gráfico da função $h(x)$, onde a linha com círculos representa a região de amortecimento e a linha com quadrados indica a zona de relaminarização.	61
Figura 15 – Decomposição de domínio.	63
Figura 16 – Comparação entre os resultados obtidos pelo HOPE (linhas sólidas) e pela Marensi e Ricco (2017) (pontos azuis).	66
Figura 17 – Comparação entre os isocontornos da velocidade \tilde{u} do HOPE (esquerdo) e da (MARENSI, 2016) (direito) na posição $\bar{x} = 5,0$ para os seguintes tempos: (a) $\phi = k_x 2\pi t^* U_\infty^* / \lambda_z^* = 7\pi/8$; (b) $\phi = 2\pi/3$; (c) $\phi = 25\pi/8$; e (d) $\phi = 11\pi/9$	67
Figura 18 – Comparação entre os resultados obtidos pelo HOPE (linhas contínuas) e por Boiko <i>et al.</i> (2010a) (pontos azuis) do lado esquerdo, e os resultados experimentais e “teóricos” extraídos do mesmo artigo para os modos: (a) (1,1); (b) (2,2); e (c) (0,2)	69
Figura 19 – Comparação da energia da perturbação (6.1) entre HOPE (linhas contínuas) e (SOUZA, 2017) para os seguintes comprimentos de onda: (a) $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$; (b) $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$; e (c) $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$	73

- Figura 20 – Isosuperfícies com $Q = 0,05$ e os isocontornos do perfil de velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ nas posições $x = 6,0; 8,5; 11,0; 13,5$ e $16,0$ para: (a) $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$; (b) $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$; e (c) $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ 74
- Figura 21 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x,y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$ para as seguintes frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$ 75
- Figura 22 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$ 76
- Figura 23 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$ 77
- Figura 24 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$ 77
- Figura 25 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$ 78
- Figura 26 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$ 78
- Figura 27 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x,y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ para: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$ 80
- Figura 28 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$ 81
- Figura 29 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$ 81
- Figura 30 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$ 82
- Figura 31 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$ 82
- Figura 32 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$ 83

Figura 33 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x,y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ para: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	84
Figura 34 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos:(a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$	85
Figura 35 – A isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos:(a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$	86
Figura 36 – A isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$	86
Figura 37 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos:(a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$	87
Figura 38 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos:(a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$	87
Figura 39 – Os isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y,z)$ (linha contínua) e de temperatura $\tilde{\theta}(y,z)$ (linha tracejada) para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$ na posição $x = 15,0$ e nos tempos $t = 30\pi, 61\pi/2, 31\pi$ e $63\pi/2$ para: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	89
Figura 40 – O perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ em $x = 15,2, z = 0,45$ e nos tempos $t = 30\pi, 61\pi/2, 31\pi$ e $63\pi/2$ para as seguintes frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	90
Figura 41 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$	91
Figura 42 – Isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y,z)$ (linha contínua) e temperatura $\tilde{\theta}(y,z)$ (linha tracejada) para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 60\pi, 121\pi/2, 61\pi$ e $123\pi/2$ em $x = 14,0$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; e (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ e na posição $x = 19,0$ para: (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	93
Figura 43 – Perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ nos tempos $t = 60\pi, 121\pi/2, 61\pi$ e $123\pi/2$ no ponto $x = 14,0$ e $z = 0,9$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ e no ponto $x = 19,0$ e $z = 0,9$ para as frequências:(c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	94
Figura 44 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$	95

Figura 45 – Isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y, z)$ (linhas contínuas) e temperatura $\tilde{\theta}(y, z)$ (linhas tracejadas) para $\lambda_z = 36,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 150\pi, 301\pi/2, 151\pi$ e $303\pi/2$, e na posição $x = 16,0$ para a frequência: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e na posição $x = 25,0$ para as frequências: (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	97
Figura 46 – Perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ nos tempos $t = 150\pi, 301\pi/2, 151\pi$ e $303\pi/2$ no ponto $x = 16,0$ e $z = 0,18$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e no ponto $x = 25,0$ e $z = 0,18$ para as frequências: (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$	98
Figura 47 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$	92
Tabela 2	– Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$	92
Tabela 3	– Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$	96
Tabela 4	– Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$	96
Tabela 5	– Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$	100
Tabela 6	– Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$	100

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
FAS	Full Aproximation Scheme
FW	Full Weight
HOPe	High Order Parallel code
LSOR	Line Successive Over Relaxation
MPI	Message-Passing Interface
SI	Straight Injection

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma(r)$ — circulação

Go_δ — número de Görtler com relação a espessura da camada limite

δ — espessura da camada limite

U_∞^* — velocidade do escoamento fora da camada limite

x_0^* — distância inicial do bordo de ataque

R^* — raio de curvatura

ν^* — viscosidade cinemática

β — número de onda na direção transversal

α — taxa de amplificação

Λ — comprimento de onda característico

λ_z^* — comprimento de onda da direção transversal

h_1, h_2, h_3 — coeficientes de Lamé

k_c^* — termo de curvatura

x — coordenada associado à direção longitudinal do escoamento

y — coordenada associado à direção normal à superfície rígida

z — coordenada associado à direção transversal ao escoamento

L^* — comprimento de referência

ρ^* — densidade do fluido

T_0^* — temperatura na superfície

T_∞^* — temperatura fora da camada limite

$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ — componentes do vetor velocidade

\tilde{p} — pressão

$\tilde{\theta}$ — temperatura

Re — número de Reynolds

Go — número de Görtler

Pr — número de Prandtl

α^* — difusividade térmica

$\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)$ — componentes do vetor vorticidade

$\tilde{\phi}$ — função genérica que representa um componente do escoamento instantâneo

ϕ_b — função genérica que representa um componente do escoamento base

ϕ — função genérica que representa um componente do escoamento perturbado

δ — espessura da camada limite

$[x_0; x_{\max}]$ — plano que representa o início e o término do domínio

$\phi_{Blasius}$ — função genérica que representa alguma componente da solução de similaridade de Blasius

λ_z^* — comprimento de onda na direção transversal

$[x_1; x_2]$ — região de amortecimento de perturbações

$[x_2; x_3]$ — região de inserção de perturbações

$[x_3; x_4]$ — região de interesse

$[x_4; x_5]$ — região de relaminarização

$\hat{\alpha}$ — vetor do número de onda

Φ_k — função genérica que representa um componente do escoamento no espaço de Fourier

i — unidade imaginária

k — índice do modo de Fourier na direção transversal

β_k — número de onda na direção transversal

α_r — parte real do número de onda na direção longitudinal

stf — razão de estiramento de malha na direção normal à parede

Δy — espaçamento na direção normal à parede

N_y — número pontos na direção normal à parede

Δt — espaçamento temporal

\mathcal{A} — amplitude das perturbações

ω_{gv} — frequência adimensional

f_{gv}^* — frequência das perturbações

$imax$ — número de pontos na direção longitudinal

m — comprimento da célula computacional

N — número de níveis utilizado no método multimalha

pts_x — número de pontos do subdomínio

N_x — número total de pontos na direção longitudinal

p — número de processadores

$U_{max_{m,k}}$ — velocidade máxima na direção longitudinal no espaço de Fourier

En_k — energia da perturbação

Ω — Vorticidade

\mathbf{S} — tensões de cisalhamento

St_x — número médio de Stanton local

Nu_x — número de Nusselt local

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Objetivo e escopo do presente trabalho	30
2	CONCEITOS BÁSICOS SOBRE INSTABILIDADE	33
2.1	Instabilidade hidrodinâmica	33
2.2	Estágios do processo de transição laminar turbulento	35
2.3	Instabilidade centrífuga	36
2.4	Vórtices de Görtler	39
2.4.1	<i>Revisão bibliográfica</i>	41
2.4.2	<i>Contribuições do trabalho para o estado da arte</i>	44
3	MODELO MATEMÁTICO	47
3.1	Sistema de equações governantes	47
3.2	Formulação do escoamento base e perturbado	50
3.2.1	<i>Escoamento base</i>	50
3.2.2	<i>Escoamento perturbado</i>	52
4	FORMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODOS NUMÉRICOS	55
4.1	Métodos numéricos	55
4.1.1	<i>Método espectral</i>	55
4.1.2	<i>Método de diferenças finitas compactas</i>	57
4.1.3	<i>Integrador temporal</i>	58
4.1.4	<i>Método multimalha</i>	59
4.2	Inserção de perturbações	60
4.3	Regiões de amortecimento e relaminarização	61
4.4	Filtro	61
4.5	Decomposição de domínio	62
5	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO	65
5.1	Verificação	65
5.2	Validação	68
6	RESULTADOS	71
6.1	Perturbações estacionárias e os vórtices de Görtler estáveis	71

6.2	A influência das perturbações não estacionárias na formação dos vórtices de Görtler para diferentes comprimentos de onda	73
6.2.1	$\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$	74
6.2.2	$\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$	79
6.2.3	$\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$	83
6.3	Transferência de calor e o coeficiente de arrasto	88
6.3.1	<i>Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$</i>	88
6.3.2	<i>Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$</i>	92
6.3.3	<i>Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$</i>	96
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	101
	REFERÊNCIAS	103

INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos é a ciência que estuda o comportamento de fluidos e de suas propriedades. Ela tem diversas aplicações ocorrendo a todo instante no nosso dia-a-dia, como por exemplo, a circulação do sangue em nossos corpos, a inversão térmica do ar na atmosfera, na combustão dos motores, na aerodinâmica de veículos automotivos, no transporte de fluidos através das tubulações, entre outros.

O processo de transição laminar turbulento é um dos ramos da mecânica dos fluidos que tem grande importância tanto no desenvolvimento científico quanto para aplicações industriais. Este processo vem sendo estudado por mais de um século pela comunidade científica com o intuito não apenas de encontrar uma solução analítica, mas de tentar entender os seus mecanismos, de prever quando vai ocorrer a turbulência e como se pode retardar ou antecipar a turbulência. A importância de saber sobre esses aspectos está relacionado ao aumento do coeficiente de arrasto e da taxa de transferência de calor quando o escoamento passa do estado laminar para o turbulento. Desta forma, os projetos de engenharia os quais envolvem esses tipos problemas podem ser elaborados com o objetivo de potencializar (minimizar ou maximizar) a sua funcionalidade.

[Reynolds \(1883\)](#) estudou o processo de transição laminar-turbulento realizando um experimento, o qual investigava a evolução de traçadores em escoamentos em dutos de vidros. Ele observou que um escoamento inicialmente laminar poderia se tornar turbulento à medida que as forças inerciais fossem suficientemente maiores que as forças viscosas. Essa relação entre forças inerciais e viscosas deu origem a um parâmetro adimensional conhecido como o número de Reynolds, e ele é definido como a razão entre as forças inerciais e viscosas.

Lord Rayleigh também foi um dos pioneiros no estudo da instabilidade, as suas principais contribuições foram o desenvolvimento teórico de dois teoremas considerando fluidos não viscosos. O primeiro teorema dá uma condição necessária para que ocorra à instabilidade em um escoamento paralelo, e essa condição é a existência de um ponto de inflexão no perfil de velocidade ([RAYLEIGH, 1879](#)). O segundo teorema fornece uma condição necessária e

suficiente para que ocorra a instabilidade em escoamento sobre influência da força de curvatura, e ele é conhecido como o teorema de circulação de Rayleigh (RAYLEIGH, 1917). O segundo teorema de Rayleigh impulsionou três grandes estudos sobre a instabilidade onde estão presentes as forças de curvatura (instabilidade centrífuga).

Taylor (1923) realizou a primeira investigação baseando-se no segundo teorema de Rayleigh. Nesse estudo, ele considerou o escoamento entre cilíndricos concêntricos rotativos, e demonstrou que as forças centrífugas podem ou não gerar instabilidades que transicionam o escoamento base laminar para um outro escoamento laminar caracterizado pelo movimento secundário transversal ao escoamento base. Esse novo regime laminar apresenta vórtices toroidais contrarrotativos conhecidos como vórtices de Taylor.

Dean (1928) investigou a instabilidade centrífuga através do escoamento em um duto curvo, onde ele constatou a presença de vórtices contrarrotativos semelhantes ao de Taylor. Note que, a diferença entre os escoamentos de Taylor e Dean é que o escoamento de Taylor é paralelo e confinado e o escoamento de Dean é paralelo e não confinado.

Finalmente, Görtler (1941) estudou teoricamente e experimentalmente a influência da instabilidade centrífuga em problema de camada limite sobre uma superfície côncava. Neste trabalho, ele mostrou que o desbalanceamento das forças inerciais e centrífugas pode levar ao surgimento de vórtices longitudinais contrarrotativos conhecidos na literatura como vórtices de Görtler. Esse escoamento é não paralelo e não confinado.

A complexidade do processo de transição laminar turbulento pode ser evidenciado nos trabalhos de Taylor (1923), Dean (1928) e Görtler (1941), pois apesar da instabilidade centrífuga estar presente no sistema, isso não implicou na transição do escoamento à turbulência e que estágios intermediários complexos podem surgir antes no escoamento.

1.1 Objetivo e escopo do presente trabalho

O presente trabalho tenta contribuir para o entendimento de alguns fenômenos que ocorrem quando perturbações não estacionárias são introduzidas em um escoamento de camada limite sobre uma superfície côncava. Os seus objetivos são: investigar o desenvolvimento das perturbações não estacionárias para diferentes comprimentos de onda transversal na geração dos vórtices de Görtler na região linear e não linear, e na influência que esses vórtices podem causar na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto. A investigação é realizada através de um código de simulação numérica de alta ordem. O trabalho é estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 2 (Conceitos básicos sobre a instabilidade) apresenta uma breve introdução aos conceitos básicos de instabilidade, dos estágios do processo de transição laminar turbulento e da instabilidade centrífuga. Este capítulo também apresenta os vórtices de Görtler e uma revisão bibliográfica sobre eles.

O **Capítulo 3** (Modelo matemático) contém o sistema de equações escritas no sistema de coordenadas curvilíneas usado para modelar fenômeno físico, a formulação vorticidade-velocidade para eliminar os termos de pressão e a decomposição dos componentes do escoamento em uma parcela base e outra perturbada.

O **Capítulo 4** (Formulação numérica e métodos numéricos) abrange todos os métodos numéricos e técnicas numéricas usados para resolver as equações descritas no **Capítulo 3**. Os métodos numéricos usados são: método espectral, método de diferenças finitas compactas de alta ordem, método de Runge-Kutta de quarta ordem e método multimalhas. As técnicas numéricas usadas são: o estiramento de malha na direção normal à parede, a região de amortecimento, a região de relaminarização e o filtro numérico.

No **Capítulo 5** (Verificação e validação), os resultados obtidos neste trabalho são comparados com os resultados numéricos e experimentais da literatura.

O **Capítulo 6** (Resultados) apresenta os resultados das simulações numéricas para três comprimentos de onda na direção transversal e cinco frequências temporais. A instabilidade de Görtler é analisada através da evolução da amplitude máxima das perturbações não estacionárias ao longo do escoamento. Por fim, investiga-se a influência dos vórtices de Görtles estacionários/não estacionários na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto.

O **Capítulo 7** (Considerações finais e trabalhos futuros) sumariza as conclusões e as contribuições desse trabalho para o entendimento da instabilidade de Görtler quando perturbações não estacionárias são inseridas no escoamento de camada limite sobre uma superfície côncava. Além disso, apresenta-se algumas sugestões para trabalhos futuros.

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE INSTABILIDADE

Este capítulo tem a finalidade de apresentar uma breve introdução ao conceito de instabilidade hidrodinâmica, estágios do processo de transição laminar turbulento, instabilidade centrífuga, vórtices de Görtler e uma breve revisão bibliográfica sobre o tópico.

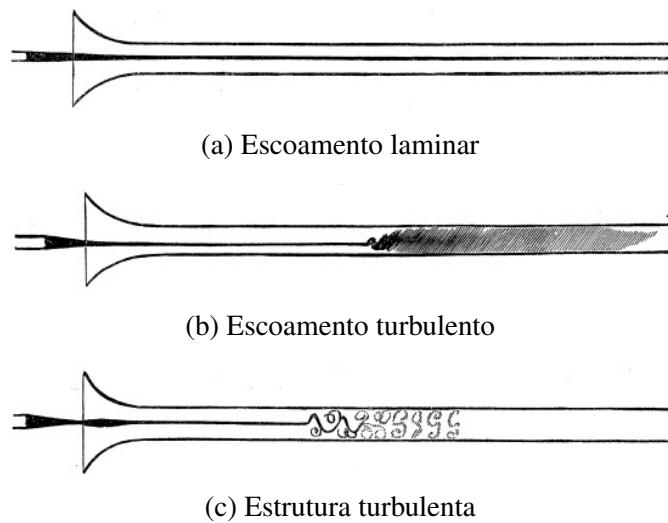
2.1 Instabilidade hidrodinâmica

Pesquisadores como Hermann von Helmholtz (1868), Lord Kelvin (1871) e [Rayleigh \(1879\)](#) já vinham pesquisando sobre a instabilidade hidrodinâmica como pode ser visto na teoria relacionado a instabilidade de Kelvin-Helmholdz, e no teorema do ponto de inflexão de Rayleigh o qual dá uma condição necessária para que ocorra a instabilidade em um escoamento paralelo e não viscoso.

No entanto, a instabilidade hidrodinâmica ganhou destaque após ao clássico experimento de [Reynolds \(1883\)](#). Esse experimento investiga a evolução de um traçador no centro de um tubo de vidro. Nesse experimento, Reynolds mostrou que um escoamento inicialmente laminar pode transicionar para um regime turbulento quando um parâmetro adimensional atinge um valor crítico. Este parâmetro adimensional conhecido como o número de Reynolds é definido como o quociente entre as forças inerciais e viscosas. A [Figura 2](#) ilustra os resultados do experimento de Reynolds, onde a [Figura 1a](#) mostra o escoamento no regime laminar, a [Figura 1b](#) ilustra a transição do estado laminar para o turbulento e a [Figura 1c](#) apresenta a estrutura da turbulência usando uma iluminação estroboscópica.

No experimento de Reynolds, do ponto de vista teórico, o escoamento não deveria transicionar do estado laminar para o turbulento independentemente do número de Reynolds, pois a solução analítica do problema é dada por uma função parabólica. Então, a pergunta que

Figura 1 – Ilustração dos resultados obtidos nos experimentos de Reynolds.



Fonte: Reynolds (1883).

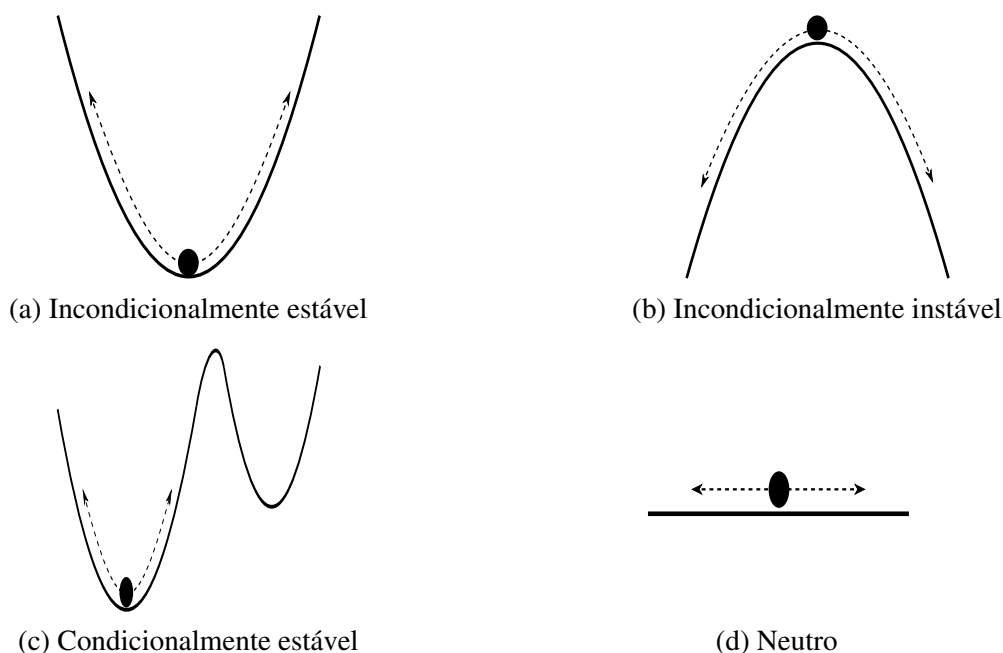
se deve fazer é “o que faz o escoamento transicionar?” Para responder a essa pergunta se deve recorrer ao estudo da estabilidade de um sistema de equações, o qual tem como o intuito estudar o comportamento de pequenas perturbações em um sistema.

Kundu e Cohen (2001) explicam de forma didática o estudo de estabilidade de um sistema relacionando ao comportamento de uma esfera em diferentes formas de superfícies. De acordo com os autores o sistema pode ser definido em:

1. **Incondicionalmente estável** é quando o sistema volta ao seu estado inicial independente da amplitude das perturbações, ou seja, a amplitude das perturbações são decrescente (Figura 2a);
2. **Incondicionalmente instável** é quando o sistema não volta ao seu estado inicial independente da amplitude das perturbações. Neste caso, a amplitude das perturbações são crescentes (Figura 2b);
3. **Condicionamente estável** é quando o sistema depende da amplitude das perturbações para ser estável ou instável, em outras palavras, existe um valor crítico da amplitude o qual o sistema pode ser estável ou instável (Figura 2c); e
4. **Neutro** é quando a amplitude da perturbação permanece constante (Figura 2d).

Note que, quando o sistema é instável pode haver dois comportamentos ou a amplitude das perturbações cresce infinitamente ou a amplitude cresce até encontrar um novo estado de equilíbrio. A este novo estado de equilíbrio associa-se um novo sistema inicial o qual ele pode ser estável ou instável à outras perturbações. Com isso, observa-se que pode haver vários estágios de

Figura 2 – Classificação da estabilidade do sistema.



Fonte: Elaborada pelo autor.

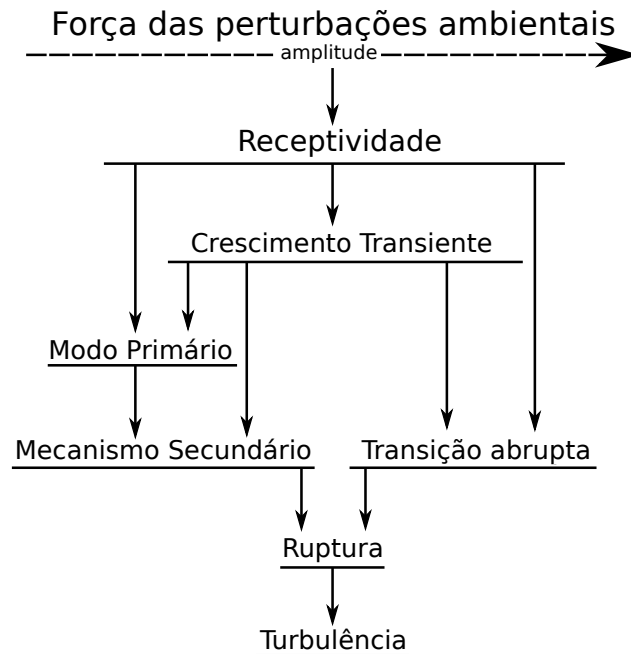
transição até chegar à turbulência. Portanto, a resposta da pergunta acima é que no final de todos esses estágios do processo de transição laminar turbulento, o escoamento é instável quando o número de Reynolds excede um valor crítico para um espectro de perturbações.

2.2 Estágios do processo de transição laminar turbulento

O processo de transição laminar turbulento é complexo e pode ou não ser abrupta como mencionado no final da [Seção 2.1](#). A transição do regime laminar para o turbulento pode passar por diversos estágios dependendo da amplitude das perturbações dentro do escoamento como mostra a [Figura 3](#). Os estágios que o escoamento pode sofrer até chegar a turbulência de acordo com [Saric, Reed e Kerschen \(2002\)](#) são:

- **Receptividade** é o primeiro estágio do processo de transição e ela é de extrema importância, pois esse estágio consiste em converter as fontes de perturbações externas ou internas para perturbações dentro do escoamento, em outras palavras, ela estabelece as condições iniciais para o problema de transição ([SARIC; REED; KERSCHEN, 2002](#)).
- **Crescimento transiente** surge quando há interação entre dois modos estáveis não ortogonais (geralmente pelos modos de Tollmien-Schlichting e de Squire). Ele é caracterizado pelo crescimento algébrico dos componentes de velocidade e logo em seguida por um decaimento exponencial deles ([RESHOTKO, 2001](#)).

Figura 3 – Estágios do processo de transição laminar-turbulento.



Fonte: Adaptada de Saric, Reed e Kerschen (2002).

- **Modo primário** é o primeiro estágio para pequenas perturbações e ele é geralmente estudado pela teoria de estabilidade linear. Neste estágio, a amplitude das perturbações v e w são pequenas, mas a perturbações de u podem chegar a ordem de quase 10% (REED; SARIC; ARNAL, 1996).
- **Mecanismo secundário** é o estágio posterior ao do modo primário. Ele é caracterizado pela instabilidade secundária que surge através da interação entre as perturbações. Nele a amplitude das perturbações já excede um valor crítico onde as equações da teoria de estabilidade linear já não se aplicam (SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987; HERBERT, 1988).
- **Transição abrupta** (bypass transition) é caracterizada pelo desvio do estágio de crescimento linear devido à alta amplitude da perturbação. Neste estágio, o processo de transição do regime linear para um outro estágio ocorre rapidamente (RESHOTKO, 2001).

2.3 Instabilidade centrífuga

Os escoamentos sobre uma parede curva podem sofrer uma instabilidade devido ao desequilíbrio entre o gradiente de pressão na direção normal às linhas de corrente e a força centrífuga (LI; MALIK, 1995). Essa instabilidade é conhecida como instabilidade centrífuga e uma diferença entre ela e a instabilidade sem força de curvatura é que a instabilidade centrífuga pode ocorrer mesmo no limite não viscoso (BOIKO *et al.*, 2011).

O primeiro critério de instabilidade envolvendo força centrífuga foi proposta por [Rayleigh \(1917\)](#). Neste critério, considera-se uma geometria circular e as equações de Navier-Stokes incompressíveis são escritas em um sistema de coordenada cilíndricas (r, θ, z) . O vetor de velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$ é definido como $u = w = 0$ e $v = v(r)$. Este critério é conhecido como o teorema de circulação de Rayleigh e ele é postulado no seguinte teorema:

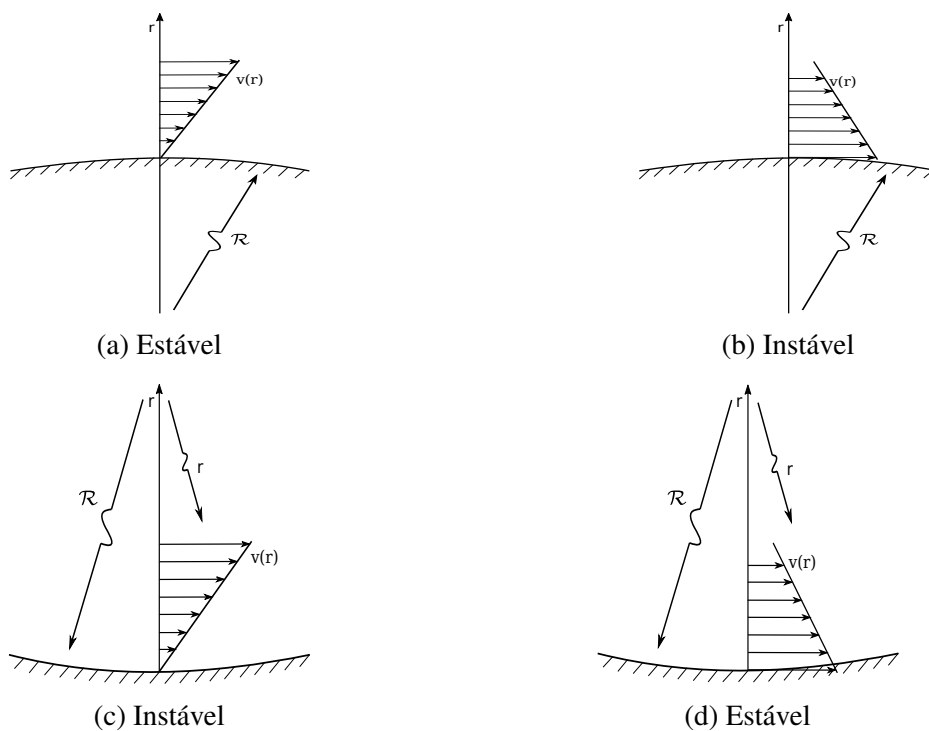
Teorema 1. Uma condição necessária e suficiente para a existência de instabilidade centrífuga em um escoamento não viscoso e axissimétrico é que

$$\frac{\partial \Gamma^2}{\partial r} < 0, \quad (2.1)$$

onde $\Gamma(r) = rv$ representa a circulação.

Uma observação sobre o teorema é que para escoamentos viscosos o critério é apenas uma condição necessária. A [Figura 4](#) ilustra os exemplos do critério de circulação de Rayleigh e mostra em quais situações os escoamentos não viscosos sobre uma parede curva são estáveis ou instáveis. Basicamente, o escoamento é estável desde que $|\Gamma(r)|$ seja uma função crescente com relação ao raio como mostra a [Figura 4a](#) e a [Figura 4d](#), e o escoamento é instável quando $|\Gamma(r)|$ é uma função decrescente com relação ao raio como ilustra a [Figura 4b](#) e a [Figura 4c](#).

Figura 4 – Configurações do critério de circulação de Rayleigh. (a) superfície convexa caso estável; (b) superfície convexa caso instável; (c) superfície côncava caso instável; e (d) superfície côncava caso estável.



Fonte: Adaptada de [Saric \(1994\)](#).

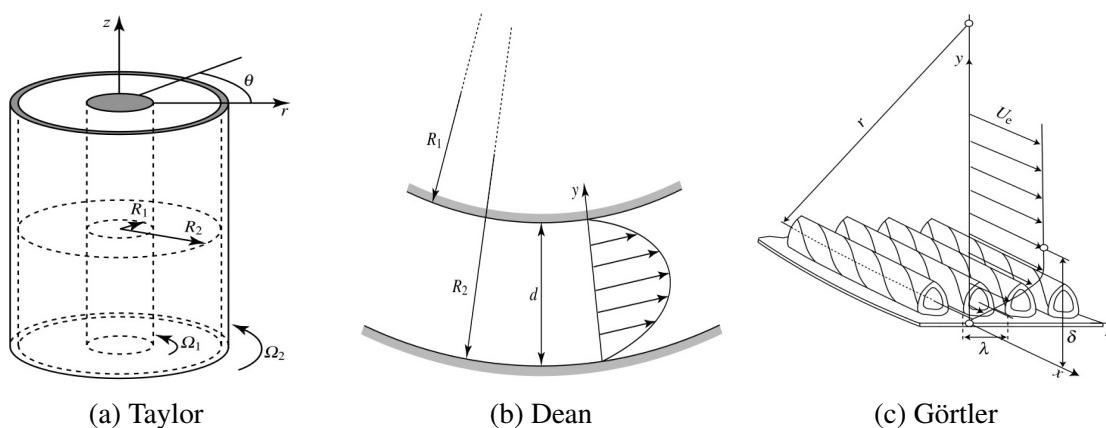
[Taylor \(1923\)](#) usou como base o critério de circulação de Rayleigh para estudar teoricamente e experimentalmente o comportamento do escoamento em cilindros concêntricos onde

ambos os cilindros giram na mesma direção (Figura 5a). Ele mostrou que quando a velocidade angular do cilindro interno excede um valor crítico, a instabilidade centrífuga ocorre no escoamento (Figura 4b). Esta instabilidade transiciona o escoamento base laminar para um outro escoamento laminar caracterizado pelos vórtices toroidais contrarrotativos conhecidos como vórtices de Taylor. Note que, os cilindros podem ter outras configurações como girarem em direções oposta e um cilindro ficar em repouso e outro girando (escoamento de Couette). Nesse problema o escoamento é classificado como paralelo e confinado.

Dean (1928) investigou teoricamente a instabilidade centrífuga através do escoamento em um duto curvo (Figura 5b). Ele usou como base o estudo de Taylor (1923), pois a geometria do escoamento desse problema é uma seção dos cilindros concêntricos. No entanto, neste caso ambos os cilindros estão em repouso e o escoamento se dá pela diferença de pressão. Os resultados obtidos mostram vórtices contrarrotativos semelhantes aos de Taylor. A configuração desse problema é paralela e não confinado.

Finalmente, Görtler (1941) utilizou as ideias de Rayleigh para estudar teoricamente e experimentalmente a influência da instabilidade centrífuga em problema de camada limite com superfície côncava (Figura 4c). Os resultados obtidos foram que a instabilidade centrífuga pode levar ao surgimento de vórtices longitudinais contrarrotativos conhecidos na literatura como vórtices de Görtler (Figura 5c). Esse tipo de escoamento é classificado com não paralelo e não confinado. Vale ressaltar que os vórtices de Görtler não se limita apenas às superfícies côncavas, ela também pode ser gerada em escoamentos de jato sobre uma parede convexa (FLORYAN, 1986).

Figura 5 – Ilustração dos principais escoamentos envolvendo a instabilidade centrífuga. (a) Taylor; (b) Dean; e (c) Görtler.



Fonte: Boiko *et al.* (2011).

Clauser e Clauser (1937) mostrou em seu estudo experimental a influência da força de curvatura no processo de transição laminar turbulento sobre uma camada limite. Nesse trabalho foi considerado superfícies côncava, cônvexa e plana. As conclusões foram que a força centrífuga

antecipa o processo de transição laminar-turbulento em relação ao número de Reynolds e que essa antecipação acontece ainda mais cedo para superfície côncava.

A importância de estudar o processo de transição envolvendo a instabilidade centrífuga sobre superfícies côncavas e a suas aplicabilidades podem ser encontradas em: turbinas de vento (DUCOIN; SHADLOO; ROY, 2017), pás de turbinas (WANG; OLSON; GOLDSTEIN, 2005), aerofólios (WANG *et al.*, 2018), bocais (BECKWITH; HOLLEY, 1981) e motores a jato (TOE; AJAKH; PEERHOSSAINI, 2002). Portanto, o entendimento da instabilidade centrífuga é de grande importância para o aperfeiçoamento dessas aplicações. A partir de agora, o trabalho é direcionado para a instabilidade centrífuga em uma camada limite sobre uma parede côncava. O objetivo é contribuir para o entendimento da instabilidade centrífuga quando no escoamento são inseridas perturbações não estacionárias.

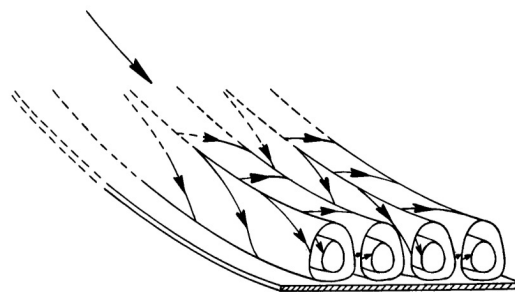
2.4 Vórtices de Görtler

No estudo de Görtler (1941), ele considerou o escoamento base paralelo à parede e usou uma análise por modos normais para provar que o escoamento base transicionava para um novo regime laminar caracterizado pelo vórtices longitudinais contrarrotivos como ilustra a Figura 6. Essa transição do escoamento acontecia quando um certo parâmetro adimensional excedia um valor crítico. Esse parâmetro é conhecido como o número de Görtler e ele é definido como:

$$Go_{\delta} = \frac{U_{\infty}^* \delta}{\nu^*} \sqrt{\frac{\delta}{R^*}}, \quad \text{onde} \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu^* x_0^*}{U_{\infty}^*}},$$

U_{∞}^* é a velocidade do escoamento fora da camada limite, x_0^* é a distância inicial do bordo de ataque, R^* é o raio de curvatura e ν^* é a viscosidade cinemática.

Figura 6 – Vórtices de Görtler



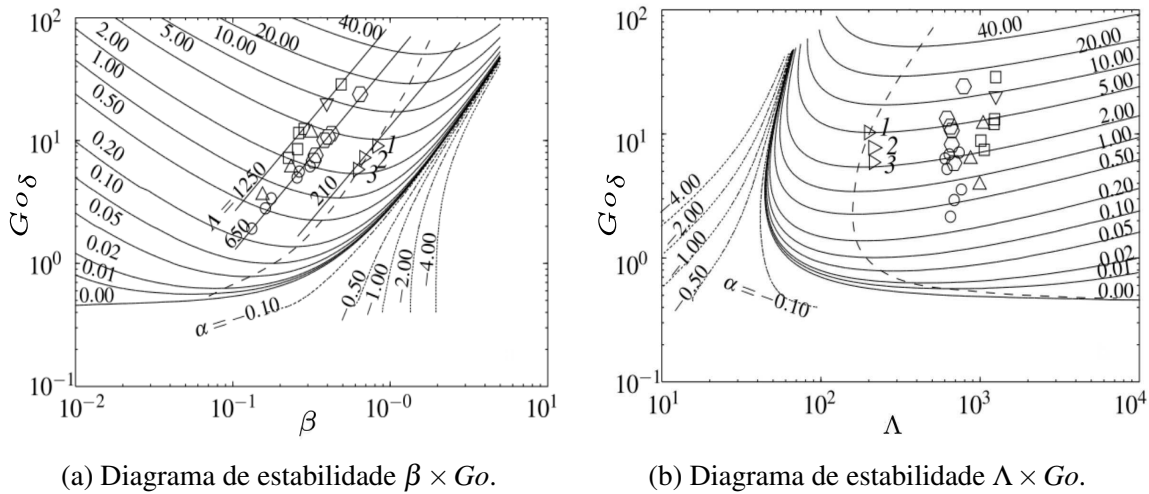
Fonte: Görtler (1941).

Observação 1. Um componente genérico do escoamento no estado estacionário e usando a análise por modos normais é escrito da seguinte forma: $\phi(x, y, z) = \phi(y) \cos(\beta z) e^{\alpha x}$, onde β é do número de onda na direção transversal e α é a taxa de amplificação.

Observação 2. Os parâmetros que contêm o asterisco (*) são dimensionais, caso contrário, os parâmetros são adimensionais.

Uma outra contribuição desse trabalho é a construção de dois diagramas de estabilidade apresentados na Figura 7. O primeiro diagrama ilustrado na Figura 7a mostra o comportamento da taxa de amplificação para diferentes valores do número de Görtler e do número de onda na direção transversal. Nela as linhas contínuas são quando a taxa de amplificação cresce (instável), as linhas pontilhadas são quando a taxa de amplificação decresce (estável), a linha contínua $\alpha = 0.0$ é o caso neutro e a linha tracejada é a curva de máxima amplificação. Os símbolos são resultados experimentais de Tani e Sakagami (1962) e Bippes (1978).

Figura 7 – Curvas constantes da taxa de amplificação.



Fonte: Adaptada de Floryan e Saric (1982).

A curva de máxima amplificação é o conjunto formado pelo ponto mínimo de cada taxa de amplificação crescente. O parâmetro adimensional que ajuda na localização da curva de máxima amplificação é o comprimento de onda característico definido como:

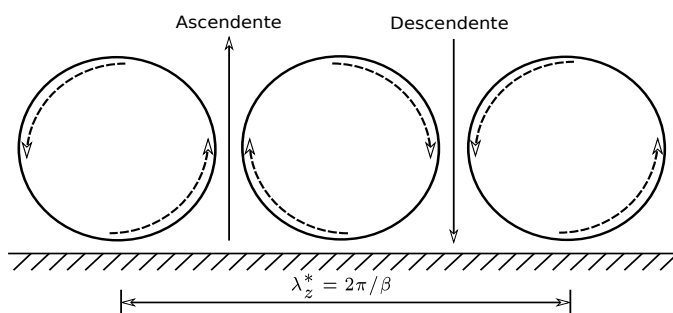
$$\Lambda = \frac{U_{\infty}^* \lambda_z^*}{v^*} \sqrt{\frac{\lambda_z^*}{R^*}},$$

onde λ_z^* é o comprimento de onda direção transversal. Note que, o comprimento de onda característico é uma variação do número de Görtler, onde é considerado o comprimento de onda na direção transversal, ao invés, da espessura da camada limite. A Figura 7a mostra que a máxima amplificação acontece para $\Lambda \approx 210$, mas estudos posteriores demonstraram que máxima amplificação ocorre dentro do intervalo [200, 270] (MITSUDHARMADI; WINOTO; SHAH, 2006). O segundo diagrama é apresentado na Figura 7b, onde analisa-se o comportamento da taxa de amplificação para diferentes valores do número de Görtler e do comprimento de onda característico. Os resultados e análise são os mesmos do caso anterior.

Alguns autores ao tentar estender as características da instabilidade de Görtler usaram outros graus de aproximação das equações governantes (HÄMMERLIN, 1955; SMITH, 1955; RAGAB; NAYFEH, 1981; FLORYAN; SARIC, 1983). No entanto, cada autor obteve um diagrama de estabilidade diferente um do outro. Este problema foi resolvido por Hall (1983) ao propor um modelo parabólico para investigar a instabilidade de Görtler para pequenos comprimentos de onda. Ele mostra também que a não unicidade das curvas neutras estão relacionadas com a origem e a função das perturbações iniciais os quais são desprezadas por uma análise local.

Os efeitos dos vórtices de Görtler alteram a distribuição do componente de velocidade na direção longitudinal criando duas regiões características desse problema como ilustra a Figura 8. A primeira região conhecida como ascendente (upwash) está situada no limite entre dois vórtices e a força de rotação deles estão apontando na direção oposta à parede. Nessa região, o fluido de baixa velocidade é impelido para longe da parede fazendo com que a camada limite seja mais espessa e conseqüentemente reduz a tensão de cisalhamento e a taxa de transferência de calor. A segunda região conhecida como descendente (downwash) também está situada no limite entre dois vórtices, mas ao contrário da região ascendente, as suas forças estão apontando na direção da parede. Nesse caso, o fluido de alta velocidade é impelido contra a parede criando um achatamento na camada limite, e ao contrário da região ascendente, a tensão de cisalhamento e a taxa de transferência de calor crescem nesta região.

Figura 8 – Regiões ascendente e descendente.



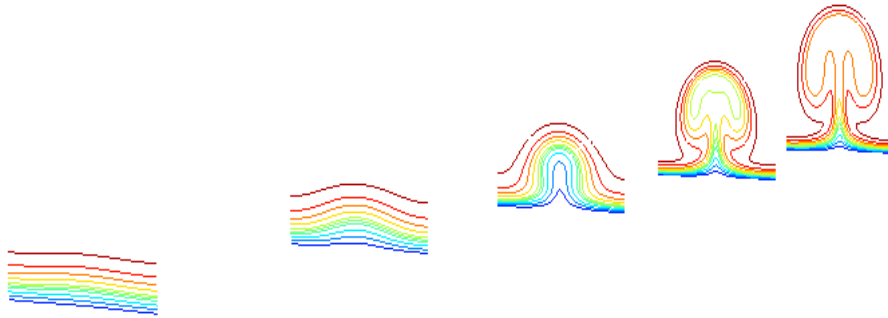
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 9 mostra a influência dos vórtices de Görtler através dos isocontornos da velocidade total $u(x, y, z, t)$ no plano $y \times z$ em cinco posições. Nela pode-se observar a distorções que o escoamento sofre à medida que os vórtices vão se desenvolvendo ao longo do escoamento criando as regiões descendentes (nas laterais do domínio), a região ascendente (no meio do domínio) e a estrutura cogumelo característica dos vórtices de Görtler.

2.4.1 Revisão bibliográfica

Há uma vasta literatura sobre o mecanismo da instabilidade de Görtler. No entanto, a revisão bibliográfica focará apenas nos vórtices de Görtler com perturbações não estacionárias

Figura 9 – Distorção das linhas de isovelocidade longitudinal pelos vórtices de Görtler.



Fonte: Elaborada pelo autor.

o qual pode ou não gerar vórtices estacionários ou não estacionários. Aos interessados sobre a instabilidade de Görtler segue uma lista com alguns artigos sobre alguns ramos da instabilidade de Görtler:

- Estudos experimentais sobre os vórtices de Görtler estacionários (LIEPMANN, 1943; TANI, 1949; TANI; SAKAGAMI, 1962; BIPPES; GÖRTLER, 1972; IURCHENKO; BABENKO; KOZLOV, 1979; ITO, 1980; FINNIS; BROWN, 1997; SCHULTZ; VOLINO, 2003);
- Estudos teóricos numéricos sobre os vórtices de Görtler estacionários (SMITH, 1955; HERBERT, 1976; FLORYAN; SARIC, 1982; HALL, 1982; HALL, 1983; FLORYAN; SARIC, 1984; DAY; HERBERT; SARIC, 1990)
- Receptividade (GOLDSTEIN; HULTGREN, 1989; KERSCHEN, 1990; HALL, 1990; SARIC; REED; KERSCHEN, 2002);
- Estudos experimentais sobre a transferência de calor com vórtices de Görtler estacionários (MCCORMACK; WELKER; KELLEHER, 1970; MCKEE, 1973; TORII; YANAGIHARA, 1997; TOE; AJAKH; PEERHOSSAINI, 2002; UMUR; OZALP, 2006);
- Estudos teóricos numéricos sobre a transferência de calor com vórtices de Görtler estacionários (LIU; SABRY, 1991; SMITH; HAJ-HARIRI, 1993; LIU; LEE, 1995; LIU, 2008; MALATESTA; SOUZA; LIU, 2013; MALATESTA; ROGENSKI; SOUZA, 2017);
- Estudos dos vórtices de Görtler estacionários com gradiente de pressão (RAGAB; NAYFEH, 1981; GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996; ROGENSKI; SOUZA; FLORYAN, 2016; FERNANDES; MENDONÇA, 2019)
- Estudos sobre vórtices de Görtler estacionários em escoamentos compressíveis (MANGALAM *et al.*, 1985; HALL; FU, 1989; HALL; MALIK, 1989; MARENSI; RICCO; WU, 2017; VIARO; RICCO, 2019; CHEN; HUANG; LEE, 2019);

- Instabilidade secundária (SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987; LI; MALIK, 1995; WHANG; ZHONG, 2001; MITSUDHARMADI; WINOTO; SHAH, 2004; SESCU *et al.*, 2015; SOUZA, 2017);
- Métodos de controle para retardar a transição (MYOSE; BLACKWELDER, 1995; CATHALIFAUD; LUCHINI, 2000; LU *et al.*, 2014; SESCU; AFSAR, 2018); e
- Vórtices de Görtler não estacionários (BOIKO *et al.*, 2010b; BOIKO *et al.*, 2010a; IVANOV; KACHANOV; MISCHENKO, 2012; XU; ZHANG; WU, 2017; MARENSI; RICCO, 2017).

Observação 3. Esta lista apresenta apenas alguns artigos sobre a instabilidade de Görtler e vale ressaltar que muitos desses artigos se encaixam em mais de uma categoria da lista.

Boiko *et al.* (2010b) realizaram o primeiro estudo sobre os vórtices de Görtler com perturbações não estacionárias. Eles conseguiram uma boa concordância entre os resultados experimentais e teóricos para as perturbações quase estacionárias (baixa frequência temporal) e para as perturbações não estacionárias (alta frequência temporal). As investigações teóricas numéricas foram feitas através de três metodologias: (I) equação de estabilidade linear localmente paralela; (II) equação de estabilidade linear localmente não paralela; e (III) equação de estabilidade não paralela. Embora os melhores resultados foram alcançados pela terceira metodologia, as outras duas metodologias também obtiveram resultados satisfatórios. Os autores observaram que os vórtices de Görtler decresciam conforme a frequência aumentava e para casos com alta frequência o escoamento era estável, além disso, os vórtices de Görtler não estacionários quando gerados eram inclinados e por isso acontecia a sobreposição entre eles.

Boiko *et al.* (2010a) estenderam as investigações realizadas no seu primeiro artigo sobre vórtices de Görtler não estacionários considerando também uma região fracamente não linear. As suas contribuições foram determinar os principais modos gerados não linearmente e que as perturbações entram na região fracamente não linear quando a amplitude do modo fundamental (1, 1) da velocidade u excede um valor de 4 a 6% do valor da velocidade fora da camada limite.

Wu, Zhao e Luo (2011) estendeu a formulação matemática proposta por Leib, Wundrow e Goldstein (1999) para investigar a instabilidade de Görtler quando as perturbações não estacionárias são inseridas através de perturbações de vorticidade no escoamento livre (do inglês Free-Stream Vortical Disturbances (FSVD) para vários raios de curvatura e baixa frequência. Em suas análises, eles concluíram que a camada limite tem o mesmo comportamento do caso plano quando o número de Görtler não excede um valor crítico, ou seja, a velocidade na direção longitudinal amplifica até um certo ponto do domínio e depois decai. No entanto, a taxa de crescimento da amplitude das perturbações apresenta um comportamento quase exponencial quando o número de Görtler excede um valor crítico. Além disso, eles concluíram que a amplitude dos vórtices de Görtler decrescem quando a frequência aumenta e que vórtices estacionários dominam o escoamento para as alta frequência.

Ivanov, Kachanov e Mischenko (2012) investigam através de superfícies não uniformes (rugosidade e vibrações) os coeficientes de receptividade na camada limite para a geração dos vórtices de Görtler não estacionários. Eles concluíram que a amplitude do coeficiente de receptividade deve aumentar conforme a frequência aumenta, e que o coeficiente de receptividade para as perturbações não estacionárias são fortemente dependente do comprimento de onda na direção transversal (λ_z^*) ao contrário das perturbações estacionárias.

Boiko *et al.* (2017) estendeu as investigações numéricas de Ivanov, Kachanov e Mischenko (2012) no estudo do coeficiente de receptividade utilizando as equações parabólicas lineares nas simulações e outras técnicas para calcular o coeficiente de receptividade. Embora os resultados obtidos são os mesmos da investigação anterior, esse trabalho generalizou os formatos das membranas usadas para gerar as oscilações das superfícies não uniformes.

Xu, Zhang e Wu (2017) continuaram as investigações iniciados por Wu, Zhao e Luo (2011) estudando numericamente a evolução não linear e instabilidade secundária dos vórtices de Görtler através de perturbações vorticidade no escoamento livre. Neste estudo, eles usaram como base vários artigos para a verificação do código, mas os principais resultados são focados no artigo de Swearingen e Blackwelder (1987). Os resultados da evolução não linear mostraram que os vórtices não estacionários são gerados para baixas frequências e os vórtices estacionários são gerados para altas frequências. Além disso, eles investigaram através de uma análise linear a instabilidade secundária.

2.4.2 Contribuições do trabalho para o estado da arte

As principais contribuições deste trabalho são:

- Desenvolvimento de um código de alta ordem para simulações de escoamentos em camada limite sobre uma superfície côncava inserindo perturbações não estacionárias;
- Verificação e validação do código através de resultados numéricos e experimentais da literatura;
- Estudo não linear dos vórtices de Görtler estacionários e não estacionários para três comprimentos de onda na direção transversal ($\lambda_z^* = 9,0; 18,0$ e $36,0$ mm) e cinco frequências temporais ($f_{gv}^* = 3; 6; 9; 12$ e 15 Hz); e
- Análise da influência dos vórtices de Görtler estacionários e não estacionários na taxa de transferência de calor e do coeficiente de arrasto.

Neste capítulo foi abordado alguns conceitos sobre a instabilidade hidrodinâmica, estágios do processo de transição laminar turbulento que podem acontecer em um escoamento,

instabilidade centrífuga e vórtices de Görtler. No próximo capítulo serão apresentadas as equações diferenciais parciais e as metodologias utilizadas para estudar o processo de transição em camada limite sobre uma superfície côncava.

MODELO MATEMÁTICO

O sistema de equações usado para modelar esse fenômeno físico consiste das equações de quantidade de movimento nas três direções, da equação da continuidade e da conservação de energia. Elas são escritas no sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, o qual devido a essa transformação de coordenadas aparece um termo de curvatura na equação do momento linear na direção y . As equações são escritas na formulação vorticidade-velocidade para eliminar os termos da pressão. Além disso, o estudo da estabilidade deste sistema de equações é feito decompondo os componentes do escoamento em uma parte base e o outro perturbado.

3.1 Sistema de equações governantes

As equações usadas para modelar o fenômeno físico têm como base as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis sem força de volume, e da conservação de energia no sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais (x^*, y^*, z^*) com os coeficientes de Lamé $h_1 = 1 - y^*k_c^*$ e $h_2 = h_3 = 1$ (FLORYAN; SARIC, 1982), onde x^* representa a direção longitudinal, y^* é definido como a direção normal à parede, z^* é a direção transversal, $k_c^* = 1/R^*$ é o termo de curvatura e R^* é o raio de curvatura.

As variáveis dimensionais são adimensionalizadas da seguinte forma:

$$x = \frac{x^*}{L^*}; \quad y = \frac{y^*}{L^*}; \quad z = \frac{z^*}{L^*}; \quad t = \frac{t^*U_\infty^*}{L^*}; \quad k_c = \frac{L^*}{R^*};$$

$$\tilde{u} = \frac{u^*}{U_\infty^*}; \quad \tilde{v} = \frac{v^*}{U_\infty^*}; \quad \tilde{w} = \frac{w^*}{U_\infty^*}; \quad \tilde{p} = \frac{p^*}{\rho^*U_\infty^{*2}}; \quad \tilde{\theta} = \frac{T^* - T_0^*}{T_\infty^* - T_0^*},$$

onde L^* é um comprimento de referência baseado na distância do bordo de ataque, U_∞^* é a velocidade do escoamento fora da camada limite, ρ^* é a densidade do fluido, T_0^* é a temperatura da superfície, T_∞^* é a temperatura fora da camada limite. As variáveis $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$ são os componentes adimensionais de velocidades, pressão e temperatura. Além disso, tanto nas equações de Navier-Stokes quanto na equação da conservação de energia os termos de curvatura

de alta ordem são desprezados através de uma análise de magnitude dos componentes proposto por (FLORYAN; SARIC, 1982). Assim, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \tilde{u}^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{\theta})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{\theta})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{w}\tilde{\theta})}{\partial z} = \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (3.5)$$

sendo os números adimensionais de Reynolds, Görtler e Prandtl definidos respectivamente como $Re = L^* U_\infty^* / \nu^*$, $Go = (k_c \sqrt{Re})^{1/2}$, e $Pr = \nu^* / \alpha^*$, onde ν^* é a viscosidade cinemática, α^* é a difusividade térmica do fluido.

Note que, no sistema de equações (3.1)-(3.5) o componente de pressão não possui uma equação para evoluí-lo no tempo. Assim, para evitar o cálculo dos componentes de pressão é usado a formulação vorticidade-velocidade, o qual define-se o vetor vorticidade como sendo $\tilde{\omega} = -\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}$, com isso, as equações dos momentos (3.2)-(3.4) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u})}{\partial y} - \frac{\partial(\tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w})}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v})}{\partial z} - \frac{\partial(\tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u})}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w})}{\partial x} - \frac{\partial(\tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v})}{\partial z} - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.8)$$

As equações para as velocidades são obtidas através de algumas manipulações algébricas entre a equação da conservação da massa e da definição de vorticidade. A equação de Poisson para a velocidade \tilde{u} é obtida derivando o componente de vorticidade $\tilde{\omega}_y$ em relação a z e usando a equação da continuidade (3.1) para obter o termo $\partial \tilde{w} / \partial z$, tem -se:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}.$$

A equação de Poisson para a velocidade \tilde{v} é obtida derivando a equação de continuidade (3.1) em relação a z e os termos $\partial \tilde{u}/\partial y$ e $\partial \tilde{w}/\partial y$ são substituídos respectivamente pelos os componentes de vorticidade $\tilde{\omega}_z$ e $\tilde{\omega}_x$, assim tem-se:

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial z}.$$

Finalmente, a equação de Poisson para a velocidade \tilde{w} é obtida derivando o componente de vorticidade $\tilde{\omega}_y$ em relação a x e usando a equação da continuidade (3.1) para obter termo $\partial \tilde{u}/\partial x$, tem-se

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z}.$$

Portanto, as equações de Navier-Stokes e da conservação de energia na formulação vorticidade-velocidade são dadas por:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{d}}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial z^2} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z}. \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z} = \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u}; & \tilde{b} &= \tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w}; & \tilde{c} &= \tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v}; \\ \tilde{d} &= \tilde{u}^2; & \tilde{e} &= \tilde{u} \tilde{\theta}; & \tilde{f} &= \tilde{v} \tilde{\theta}; & \tilde{g} &= \tilde{w} \tilde{\theta}.\end{aligned}$$

3.2 Formulação do escoamento base e perturbado

A estabilidade de um sistema pode ser estudada introduzindo perturbações infinitesimais em um escoamento laminar estacionário e uma representação matemática deste conceito é escrita como:

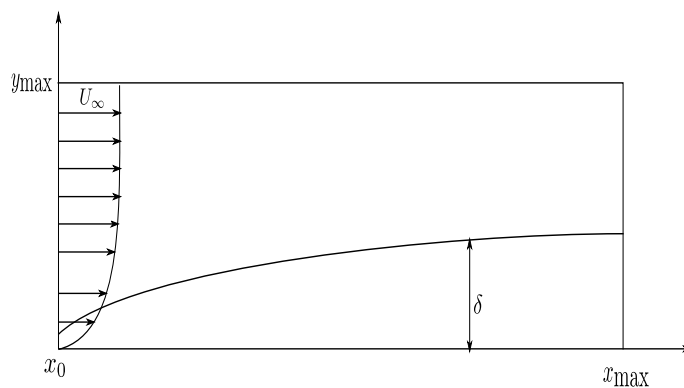
$$\tilde{\phi}(x, y, z, t) = \phi_b(x, y, z) + \phi(x, y, z, t), \quad (3.17)$$

onde $\tilde{\phi}$ representa alguma propriedade do escoamento instantâneo, ϕ_b é algum componente do escoamento base e ϕ representa alguma propriedade do escoamento perturbado. Os sistemas de equações dos escoamentos base e perturbado são obtidos aplicando para cada componente do sistema (3.9)-(3.16) a decomposição expressada pela Equação 3.17.

3.2.1 Escoamento base

O escoamento base é invariante na direção transversal, pois a velocidade fora da camada limite U_∞^* é paralela e perpendicular aos eixos x e y respectivamente. Assim, o escoamento base pode ser simplificado em um problema bidimensional tendo os seguintes componentes $\phi_b = \{\omega_{zb}, u_b, v_b, \theta_b\}$. O domínio computacional do escoamento base é ilustrado na Figura 10, onde δ é a espessura da camada limite, x_0 e x_{\max} são respectivamente a entrada e saída do escoamento.

Figura 10 – Domínio computacional do escoamento base.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As equações do escoamento base são obtidas através da substituição da Equação 3.17 para cada componente do sistema (3.9)-(3.16) os quais são considerados apenas os componentes

ϕ_b . Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial t} + \frac{\partial(\omega_{zb}u_b)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_{zb}v_b)}{\partial y} - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial u_b^2}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial y^2} \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \frac{\partial(u_b \theta_b)}{\partial x} + \frac{\partial(v_b \theta_b)}{\partial y} = \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 \theta_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_b}{\partial y^2} \right). \quad (3.21)$$

Note que, um termo de curvatura aparece na [Equação 3.18](#) o qual de acordo com os estudos de [Souza \(2011\)](#) esse termo pode ser desprezados. As condições de contorno e inicial são similares as que foram adotados por [Kloker, Konzelmann e Fasel \(1993\)](#) e elas são definidas como:

- A condição inicial ($t = 0$) é dada pela solução de similaridade de Blasius e da camada limite térmica (Pohlhausen) (para mais detalhes ver ([SCHLICHTING; GERSTEN, 2016](#))):

$$\begin{aligned} u_b(x, y, 0) &= u_{Blasius}(x, y), & v_b(x, y, 0) &= v_{Blasius}(x, y), \\ \omega_{zb}(x, y, 0) &= \omega_{Blasius}(x, y), & \theta_b(x, y, 0) &= \theta_{Pohlhausen}(x, y). \end{aligned}$$

- Na entrada do escoamento ($x = x_0$) é imposta a solução de similaridade de Blasius e da camada limite térmica:

$$\begin{aligned} u_b(x_0, y, t) &= u_{Blasius}(x_0, y), & v_b(x_0, y, t) &= v_{Blasius}(x_0, y), \\ \omega_{zb}(x_0, y, t) &= \omega_{Blasius}(x_0, y), & \theta_b(x_0, y, t) &= \theta_{Pohlhausen}(x_0, y). \end{aligned}$$

- Na parede rígida ($y = 0$) tem-se:

$$\begin{aligned} u_b(x, 0, t) &= 0, & v_b(x, 0, t) &= 0, \\ \frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x} \Big|_{(x, 0, t)} &= -\frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} \Big|_{(x, 0, t)}, & \theta_b(x, 0, t) &= 0. \end{aligned}$$

- Como o contorno externo ($y = y_{\max}$) está longe o suficiente da camada limite, o escoamento é considerado irrotacional, assim se tem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_b(x, y_{\max}, t) &= u_{Blasius}(x, y_{\max}), & \frac{\partial u_b}{\partial y} \Big|_{(x, y_{\max}, t)} &= \frac{\partial u_{Blasius}}{\partial x} \Big|_{(x, y_{\max})}, \\ \omega_{zb}(x, y_{\max}, t) &= 0 & \theta_b(x, y_{\max}, t) &= 1. \end{aligned}$$

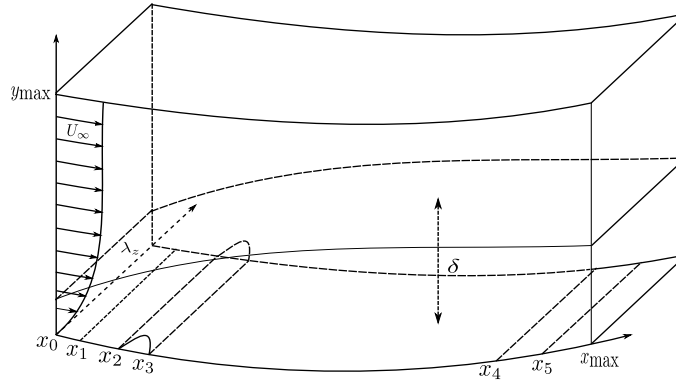
- Na saída do escoamento ($x = x_{\max}$), a seguinte condição é imposta:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x^2} \right|_{(x_{\max}, y, t)} = 0.$$

3.2.2 Escoamento perturbado

O escoamento perturbado é resolvido no domínio computacional mostrado na [Figura 11](#), onde λ_z^* é o comprimento de onda na direção transversal, $[x_1; x_2]$ é a região de amortecimento de perturbações, $[x_2; x_3]$ é região de inserção de perturbações, $[x_3; x_4]$ é a região de interesse e $[x_4; x_5]$ é a região de relaminarização.

Figura 11 – Domínio computacional do escoamento perturbado.



Fonte: Adaptada de [Souza \(2003\)](#).

O sistema de equações do escoamento perturbado é o resultado da substituição da [Equação 3.17](#) para cada componente do sistema (3.9)-(3.16) menos as equações do escoamento base (3.18)-(3.21). Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial d}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial d}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.29)$$

onde a , b , c , d , e , f e g são definidas como:

$$\begin{aligned} a &= \omega_x(v_b + v) - \omega_y(u_b + u); & b &= \omega_{zb}u + \omega_z(u_b + u) - \omega_x w; \\ c &= \omega_y w - \omega_{zb}v - \omega_z(v_b + v); & d &= 2u_b u + u^2; & e &= u\theta_b + (u_b + u)\theta; \\ & & f &= v_b \theta + (v_b + v)\theta; & g &= w(\theta_b + \theta). \end{aligned}$$

As condições de contorno e inicial para o sistema de equações (3.22)-(3.29) são similares as que foram adotados por [Kloker, Konzelmann e Fasel \(1993\)](#) e são dadas por:

- A condição inicial ($t = 0$) para todos os componentes são zero, ou seja:

$$\omega(x, y, z, 0) = 0, \quad \mathbf{u}(x, y, z, 0) = 0, \quad e \quad \theta(x, y, z, 0) = 0;$$

- Na entrada do escoamento ($x = x_0$) as condições de contorno para todos os componentes também são zero:

$$\omega(x_0, y, z, t) = 0, \quad \mathbf{u}(x_0, y, z, t) = 0, \quad e \quad \theta(x_0, y, z, t) = 0;$$

- Na parede ($y = 0$), a condição de não-escorregamento é considerada para todas as velocidades. No entanto, na região onde são inseridas as perturbações a velocidade v não é zero (os detalhes sobre a inserção das perturbações serão apresentados na [Seção 4.2](#)). Os componentes de vorticidades são calculados a partir das seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\omega_y(x, 0, z, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\theta(x, 0, z, t) = 0.$$

- No contorno superior ($y = y_{\max}$), o escoamento é considerado irrotacional. Além disso, o componente da velocidade v decai exponencialmente quando se afasta da parede ($y = 0$). Assim, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\omega_x(x, y_{\max}, z, t) = 0, \quad \omega_y(x, y_{\max}, z, t) = 0, \quad \omega_z(x, y_{\max}, z, t) = 0, \quad u(x, y_{\max}, z, t) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x, y_{\max}, z, t)} = -\alpha v(x, y_{\max}, z, t), \quad w(x, y_{\max}, z, t) = 0, \quad \text{e} \quad \theta(x, y_{\max}, z, t) = 0$$

onde α é o vetor do número de onda (KUNDU, 1990) e ele será definido na [Subseção 4.1.1](#).

- Os experimentos realizados por Swearingen e Blackwelder (1987) indicam que na direção transversal há periodicidade, desta forma, as condições de contorno são:

$$\left. \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \right|_{(x, y, 0, t)} = \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \right|_{(x, y, \lambda_z, t)} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- Na saída do escoamento ($x = x_{\max}$), tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{(x_{\max}, y, z, t)} = 0.$$

Esta condição só é possível devido a zona de relaminarização próximo a parede (detalhes sobre a região de relaminarização na [Seção 4.3](#)).

Portanto, conclui-se a formulação matemática usada para estudar a instabilidade centrífuga em camada limite sobre uma superfície côncava quando perturbações não estacionárias são inseridas no escoamento. No próximo capítulo serão apresentados os métodos e as técnicas numéricas usadas para resolver e estudar o problema numericamente.

FORMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os métodos numéricos para resolver o modelo matemático apresentado no [Capítulo 3](#), a técnica de inserção de perturbações, as regiões de amortecimento e relaminarização para que não haja reflexões das perturbações no escoamento, um filtro computacional para o amortecimento das perturbações de alta frequência não físicas gerado pelo esquema numérico de alta ordem e a técnica de decomposição de domínio para paralelização do código. Este conjunto de métodos e técnicas estão implementados no código chamado High Order Parallel code (HOPe).

4.1 Métodos numéricos

Os métodos numéricos utilizados para resolver o sistema de equações (3.26)-(3.29) são: o método espectral na direção transversal, o esquema de diferenças finitas compactas de alta ordem nas direções longitudinal e normal à parede, o método clássico de Runge-Kutta de 4ª ordem na evolução temporal, e o método multimalha com ciclo V de quatro níveis é usado para resolver as equações de Poisson (3.26)-(3.28).

4.1.1 Método espectral

Como mencionado na [Subseção 3.2.2](#), o escoamento é periódico na direção transversal. Esta periodicidade foi comprovada em diversos estudos experimentais (BIPPES, 1978), (SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987) e (ZHANG; CHEW, 1995). Devido a essa hipótese e pela comparação entre os métodos de diferenças finitas e espectral realizada por [Canuto et al. \(2012\)](#), optou-se em utilizar o método espectral. O método consiste em aproximar os componentes do

escoamento por uma combinação linear de $K + 1$ modos de Fourier, ou seja,

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^K \Phi_k(x, y, t) e^{-i\beta_k z}, \quad (4.1)$$

onde Φ_k é um componente do escoamento perturbado no espaço de Fourier, $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, k denota o modo de Fourier na direção transversal e $\beta_k = 2\pi k L^* / \lambda_z^*$ é o número de onda na direção transversal.

Substituindo a [Equação 4.1](#) para todos os componentes do sistema de equações (3.22)-(3.29) obtêm-se o seguinte sistema de equações para cada modo de Fourier $k = 0, \dots, K$

$$\frac{\partial \Omega_{xk}}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial y} + i\beta_k B_k - i\beta_k \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} D_k = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \Omega_{xk}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{yk}}{\partial t} - i\beta_k C_k - \frac{\partial A_k}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \Omega_{yk}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Omega_{zk}}{\partial t} + \frac{\partial B_k}{\partial x} - \frac{\partial C_k}{\partial y} - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial D_k}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \Omega_{zk}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial V_k}{\partial y} - i\beta_z W_k = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} - \beta_k^2 U_k = i\beta_k \Omega_{yk} - \frac{\partial^2 V_k}{\partial x \partial y}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - \beta_k^2 V_k = -\frac{\partial \Omega_{yk}}{\partial x} - i\beta_k \Omega_{xk}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} - \beta_k^2 W_k = \frac{\partial \Omega_{yk}}{\partial x} + i\beta_k \frac{\partial V_k}{\partial y}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial F_k}{\partial y} - i\beta_k G_k = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \Theta_k, \quad (4.9)$$

onde $\nabla_k^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_k^2 \right)$ e

$$\begin{aligned} A_k &= \Omega_{xk}(V_b + V_k) - \Omega_{yk}(U_b + U_k); & B_k &= \Omega_{zb}U_k + \Omega_{zk}(U_b + U_k) - \Omega_x W_k; \\ C_k &= \Omega_{yk}W_k - \Omega_{zb}V_k - \Omega_{zk}(V_b + V_k); & D_k &= 2U_b U_k + U_k^2; & E_k &= U_k \Theta_b + (U_b + U_k) \Theta_k; \\ F_k &= V_b \Theta_k + (V_b + V_k) \Theta_k; & G_k &= W_k (\Theta_b + \Theta_k). \end{aligned}$$

As condições de contornos e inicial no espaço espectral são dadas por:

- Para $t = 0$:

$$\Omega_k(x, y, 0) = 0, \quad U_k(x, y, 0) = 0, \quad e \quad \Theta_k(x, y, 0) = 0;$$

- Para $x = x_0$:

$$\Omega_k(x_0, y, t) = 0, \quad \mathbf{U}_k(x_0, y, t) = 0, \quad \text{e} \quad \Theta(x_0, y, t) = 0; \quad (4.10)$$

- Para $y = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{xk}}{\partial y^2} \Big|_{(x,0,t)} - \beta_k^2 \Omega_{xk}(x, 0, t) = - \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y \partial x} \Big|_{(x,0,t)} - i\beta_k \nabla_k^2 V_k(x, 0, t),$$

$$\Omega_{yk}(x, 0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega_{zk}}{\partial x} \Big|_{(x,0,t)} = -i\beta_k \Omega_{xk}(x, 0, t) - \nabla_k^2 V_k(x, 0, t),$$

$$\Theta(x, 0, t) = 0;$$

- Para $y = y_{\max}$:

$$\Omega_{xk}(x, y_{\max}, t) = 0, \quad \Omega_{yk}(x, y_{\max}, t) = 0, \quad \Omega_{zk}(x, y_{\max}, t) = 0, \quad U_k(x, y_{\max}, t) = 0,$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial y} \Big|_{(x, y_{\max}, t)} = -\alpha V_k(x, y_{\max}, t), \quad W_k(x, y_{\max}, t) = 0, \quad \text{e} \quad \Theta_k(x, y_{\max}, t) = 0;$$

onde $\alpha = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_k^2}$ sendo α_r a parte real do número de onda na direção longitudinal.

- Para $x = x_{\max}$

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \Big|_{(x_{\max}, y, t)} = 0.$$

As principais vantagens de utilizar o método espectral são que as derivadas são calculadas analiticamente nesta direção apresentando apenas erro de arredondamento e que facilita na solução numérica das equações de Poisson. As suas desvantagens estão na restrição em resolver apenas problemas com periodicidade na direção z e no alto custo computacional no cálculo dos produtos não-lineares dos componentes A_k , B_k , C_k , E_k , F_k e G_k . No entanto, para diminuir este custo computacional, os componentes não-lineares são calculados no espaço físico e então são transformados para espaço de Fourier. Neste sentido, o método é chamado de pseudo-espectral.

4.1.2 Método de diferenças finitas compactas

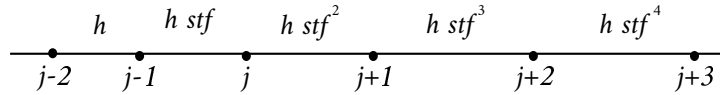
Nas direções longitudinal e normal ao contorno rígido, as derivadas são aproximadas usando o método de diferenças finitas compactas. As ordens de aproximações adotadas são de 6ª ordem para pontos longe do contorno e 5ª ordem para os dois primeiros e os dois últimos pontos. A escolha da ordem de aproximação e do método é devido aos estudos realizados por [Souza, Mendonça e Medeiros \(2005\)](#), onde foram comparados os métodos de diferenças finitas tradicional e o compacto com várias ordens de aproximações. Eles constaram que os métodos de diferenças finitas compactos de alta ordem podem diminuir os esforços computacionais, pois não foi necessário ter uma malha refinada para capturar os efeitos de transição.

Uma técnica adotada para diminuir o custo computacional e para melhorar a aproximação da solução numérica na região de interesse é o estiramento de malha na direção normal, pois desta forma, obtém-se uma malha refinada próximo ao contorno rígido onde está localizada a camada limite e uma malha mais grossa longe dela. O estiramento de malha consiste em uma progressão geométrica de razão stf . Assim, os pontos da malha na direção y pode ser obtidos pela seguinte expressão:

$$y_j = \Delta y \left(\frac{stf^j - 1.0}{stf - 1.0} \right), \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, Ny - 1,$$

onde Δy é a distância inicial e Ny é o número de pontos na direção normal à parede. Uma ilustração do esquema do espaçamento da malha em torno do ponto j é mostrado na [Figura 12](#).

Figura 12 – Estiramento de malha em torno do ponto j .



Fonte: Adaptada de [Rogenski \(2015\)](#).

Os detalhes de como calcular dos coeficientes do método de diferentes finitas compactas de 5ª e 6ª ordem com estiramento de malha podem ser encontrados nos trabalhos de [Rogenski \(2015\)](#) e [Marques \(2018\)](#). Uma análise sobre a influência do stf na solução numérica em problemas de transição é encontrado no artigo de [Malatesta, Rogenski e Souza \(2017\)](#).

4.1.3 Integrador temporal

O método escolhido para a evolução temporal das equações de vorticidades (4.2)-(4.4) e da equação da conservação de energia (4.9) foi o método explícito de Runge-Kutta de 4º ordem. A escolha deste método foi devido aos testes realizados por [Souza \(2005\)](#), onde foram comparados vários métodos de integração temporal, e o método de Runge-Kutta de 4º ordem obteve o menor tempo computacional e a menor restrição da condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

O método de Runge-Kutta usado segue do livro de [Ferziger e Peric \(2012\)](#) e ele é descrito como:

$$\Phi^{(n+\frac{1}{2})^*} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t^n, \Phi^n), \quad (4.11)$$

$$\Phi^{(n+\frac{1}{2})^{**}} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t^{n+\frac{1}{2}}, \Phi^{(n+\frac{1}{2})^*}), \quad (4.12)$$

$$\Phi^{(n+1)^*} = \Phi^n + \Delta t f(t^{n+\frac{1}{2}}, \Phi^{(n+\frac{1}{2})^{**}}), \quad (4.13)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{6} [f(t^n, \Phi^n) + 2f(t^{n+\frac{1}{2}}, \Phi^{(n+\frac{1}{2})^*}) + f(t^{n+\frac{1}{2}}, \Phi^{(n+\frac{1}{2})^{**})} + f(t^{n+1}, \Phi^{(n+1)^*})], \quad (4.14)$$

onde Δt é o espaçamento temporal. A [Equação 4.11](#) e a [Equação 4.12](#) são respectivamente os métodos de Euler explícito e implícito. Eles funcionam como um método preditor-corretor. A [Equação 4.13](#) e [Equação 4.14](#) são os métodos do ponto médio e a regra de Simpson, e eles também funcionam com um método preditor-corretor.

4.1.4 Método multimalha

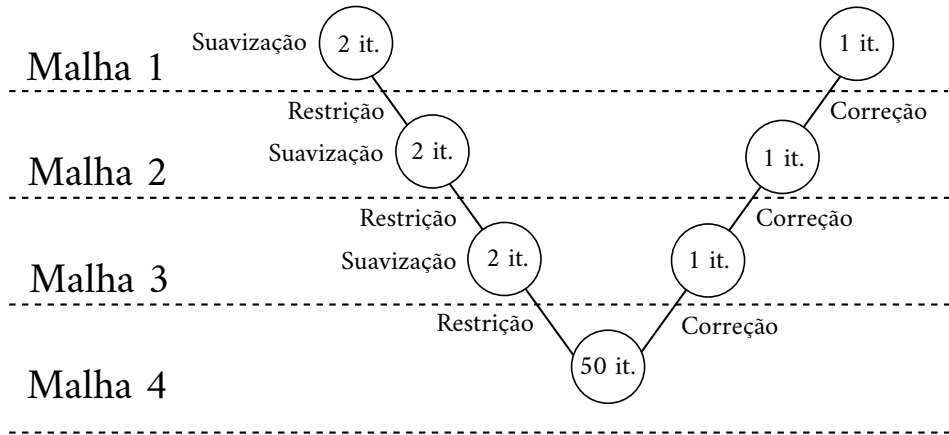
O método multimalha é uma poderosa ferramenta na obtenção da solução numérica das equações diferenciais elípticas em particular das equações de Poisson (4.6)-(4.8). No entanto, o seu uso não se limita apenas a este tipo de equação. Ele também pode resolver equações diferenciais parciais dependente do tempo e sistemas de equações não lineares e não simétricos ([HENSON, 2002](#)). As suas principais características são a alta convergência e a baixa complexidade de tempo ([GUPTA; KOUATCHOU; ZHANG, 1997](#)) ([SPITALERI, 2000](#)).

A estrutura base do algoritmo do método multimalha são:

- **Suavização:** Consiste em reduzir os erros de alta frequência. Neste trabalho, utiliza-se algumas iterações do método Line Successive Over Relaxation (LSOR);
- **Restrição:** Consiste em transmitir os valores de uma malha fina para uma malha grossa. O método multimalha do tipo Full Approximation Scheme (FAS) é utilizado, desta forma, os valores são transmitidos através de duas técnicas: (1) o Straight Injection (SI) para os componentes do fluido; e (2) o Full Weight (FW) para o resíduo;
- **Correção:** Consiste em interpolar os valores do resíduo de uma malha grossa para uma malha fina. Aqui, utiliza-se uma interpolação bilinear; e
- **Ciclo:** É o caminho que o método percorre realizando a as operações de suavização, restrição ou correção. Neste trabalho, o ciclo V composto por quatro níveis foi escolhido.

Uma ilustração do algoritmo do método multimalha é apresentado na [Figura 13](#). Um estudo mais detalhado sobre a discretização e implementação pode ser encontrados nos trabalhos de [Souza \(2003\)](#), [Rogenski \(2011\)](#) e [Rogenski, Petri e Souza \(2015\)](#).

Figura 13 – Ilustração do algoritmo do método multimalha.



Fonte: Adaptada de Souza (2003).

4.2 Inserção de perturbações

Como mencionado na Seção 3.2, uma maneira de estudar a estabilidade de um sistema é verificar o comportamento das perturbações infinitesimais neste sistema. Essas perturbações podem ser inseridas de várias maneiras, por exemplo, rugosidade na superfície, da turbulência do escoamento externo, vibrações acústicas e pela injeção e sucção de massa na parede (DENIER; SEDDOUGUI, 1991), (SOUZA *et al.*, 2004) e (BOIKO *et al.*, 2010b). A introdução das perturbações é feita na velocidade V_1 ($k = 1$) pela injeção e sucção de massa na região $x_2 \leq x \leq x_3$. Assim, a condição de contorno é dada por:

$$V_1(x, 0, t) = \begin{cases} \mathcal{A}(t)q(x) & \text{for } x \in [x_2, x_3] \\ 0 & \text{for } x \in [x_0, x_2) \cup (x_3, x_{max}] \end{cases}. \quad (4.15)$$

Para que as perturbações sejam inseridas suavemente no escoamento, a função $q(x)$ e a sua segunda derivada ($q''(x)$) devem ser nulas nos pontos x_2 e x_3 . Portanto, a função escolhida que satisfaz essas duas propriedades é definida como:

$$q(x) = \text{sen}^3 \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \pi \right).$$

A função \mathcal{A} pode ou não depender do tempo. Se \mathcal{A} não depender do tempo, então a perturbação é dita ser estacionária, caso contrário, ela é não estacionária. A função usada para gerar as perturbações não estacionárias é definida como:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} \cos(\omega_{gv} t), \quad (4.16)$$

onde \mathcal{A} faz o ajuste da amplitude das perturbações e $\omega_{gv} = 2\pi L^* f_{gv}^* / U_\infty^*$ é a frequência adimensional, sendo f_{gv}^* a frequência das perturbações em Hertz.

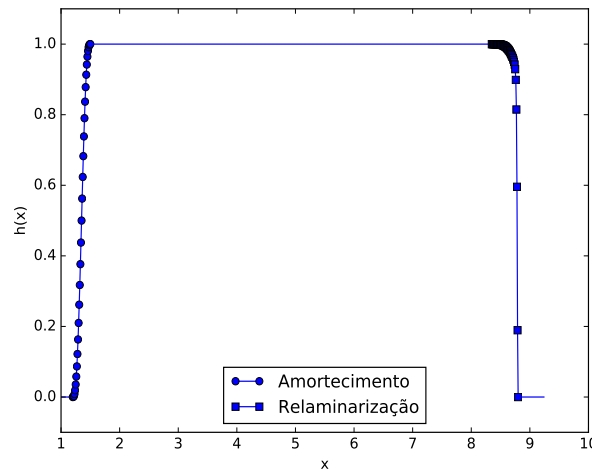
4.3 Regiões de amortecimento e relaminarização

De acordo com Meitz (1996), a presença de vórtices longitudinais nas simulações numéricas podem fazer surgir reflexões desses vórtices na entrada e saída do domínio computacional. Por esse motivo, Souza (2003) adotou as técnicas de amortecimento e relaminarização próximas a entrada e saída do domínio. Essas técnicas consistem em multiplicar os componentes de vorticidade por uma função $h(x)$ no último subpasso do método de Runge-Kutta. A função $h(x)$ é definida da seguinte forma (ROGENSKI, 2015):

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq x_1 \\ 6\varepsilon_a(x)^5 - 15\varepsilon_a(x)^4 + 10\varepsilon_a(x)^3 & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1 & \text{para } x_2 \leq x \leq x_4 \\ (1 - \varepsilon_r(x)^{50})e^{-\frac{\varepsilon_r(x)^4}{10}} & \text{para } x_4 \leq x \leq x_5 \\ 0 & \text{para } x > x_5 \end{cases},$$

onde $\varepsilon_a(x) = \pi(x - x_1)/(x_2 - x_1)$ e $\varepsilon_r(x) = \pi(x - x_4)/(x_5 - x_4)$. O comportamento da função $h(x)$ é mostrada na Figura 14, onde pode-se observar uma estrutura tipo rampa (linha com círculos) em $x_1 \leq x \leq x_2$ e uma zona de relaminarização (linha com quadrados) em $x_4 \leq x \leq x_5$.

Figura 14 – Gráfico da função $h(x)$, onde a linha com círculos representa a região de amortecimento e a linha com quadrados indica a zona de relaminarização.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Filtro

O alto número de Reynolds faz com que os termos convectivos dominem as equações do momento (4.2)-(4.4) e a equação da conservação de energia (4.9). Esse tipo de equação apresenta característica ou dissipativa ou dispersiva dependendo da ordem de aproximação das derivadas

(LEVEQUE, 2007). De acordo com os estudos de Lele (1992), os métodos de diferenças finitas compactas centradas de alta ordem são dispersivas, então pode surgir perturbações numéricas (não físicas) de alta frequência.

Uma maneira de amortecer estas perturbações de alta frequência é usar um filtro numérico (LELE, 1992). Este filtro é aplicado apenas na direção longitudinal para os componentes de vorticidade após o último subpasso da (Equação 4.14) do método de Runge-Kutta. Os componentes de vorticidade já filtrados são representados com o símbolo $\hat{\omega}$ e eles são calculados pelo seguinte sistema tridiagonal:

- Para $i = 1$ e $imax$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{15}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i\pm 1,j,k} - \frac{6}{16}\omega_{i\pm 2,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i\pm 3,j,k} - \frac{1}{16}\omega_{i\pm 4,j,k};$$

- Para $i = 2$ e $imax - 1$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{1}{16}\omega_{i\mp 1,j,k} + \frac{12}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{6}{16}\omega_{i\pm 1,j,k} - \frac{4}{16}\omega_{i\pm 2,j,k} + \frac{1}{16}\omega_{i\pm 3,j,k};$$

- Para $i = 3$ e $imax - 2$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = -\frac{1}{16}\omega_{i\mp 2,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i\mp 1,j,k} + \frac{10}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i\pm 1,j,k} - \frac{1}{16}\omega_{i\pm 2,j,k};$$

- Para $i = 4, \dots, imax - 3$:

$$\alpha_f \hat{\omega}_{i-1,j,k} + \hat{\omega}_{i,j,k} + \alpha_f \hat{\omega}_{i+1,j,k} = a_f \omega_{i,j,k} + b_f (\omega_{i-1,j,k} + \omega_{i+1,j,k}) + c_f (\omega_{i-2,j,k} + \omega_{i+2,j,k}) + d_f (\omega_{i-3,j,k} + \omega_{i+3,j,k}),$$

onde

$$\alpha_f = 0.2, \quad a_f = \frac{11 + 10\alpha_f}{16}, \quad b_f = \frac{15 + 34\alpha_f}{64},$$

$$c_f = \frac{-3 + 6\alpha_f}{32}, \quad e \quad d_f = \frac{1 - 2\alpha_f}{64}.$$

4.5 Decomposição de domínio

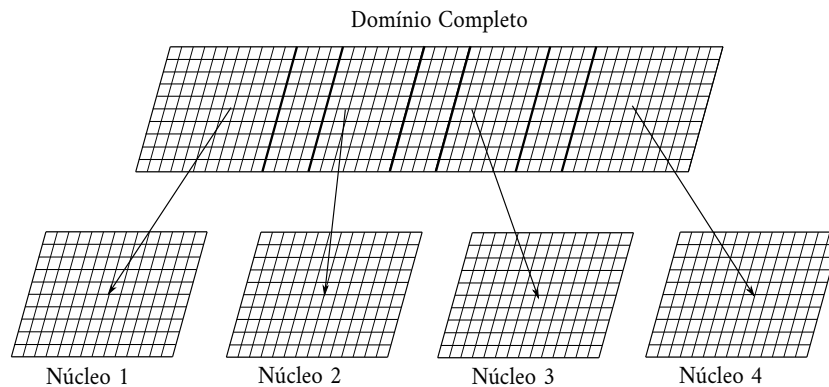
A paralelização do código é feita apenas na direção longitudinal e a técnica usada é a decomposição de domínio, ou seja, o domínio é dividido em vários subdomínios e cada subdomínio é resolvido em um núcleo do processador como mostra a Figura 15. Os subdomínios têm regiões onde eles devem se sobrepor aos subdomínios vizinhos para que haja troca de informações. O número de pontos na região de sobreposição depende de alguns fatores como o comprimento da célula computacional ($m = 5$) usada na aproximação da derivada e do método usado para

resolver a equação de Poisson, assim o número de pontos (*inter*) na região de sobreposição é calculado pela seguinte expressão:

$$inter = 2^{(N-1)}(m - 2),$$

sendo N o número de níveis utilizado no método multimalha ($N = 4$).

Figura 15 – Decomposição de domínio.



Fonte: Adaptada de Souza (2011).

O número de pontos de cada subdomínio na direção longitudinal (*pt_{sx}*) é calculado pela expressão:

$$pt_{sx} = \frac{N_x + (inter + 1)(p - 1)}{p},$$

onde N_x é número total de pontos na direção longitudinal p é o número de processadores. A comunicação dessas regiões é realizado pela biblioteca Message-Passing Interface (MPI) (PACHECO, 1997). Assim, finaliza-se a apresentação de todos os métodos e técnicas numéricas implementadas no HOPE. No próximo capítulo será feita a verificação e validação do código através dos resultados da literatura.

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Um das partes mais importantes da simulação numérica são verificação e validação do código. A verificação consiste em determinar se os métodos numéricos estão implementados de forma correta, e ela pode ser feita através de soluções manufaturadas ou comparando diferentes metodologias numéricas. A validação mostra se as equações matemáticas propostas modelam corretamente o problema físico, nesta parte compara-se os resultados numéricos com os resultados experimentais.

5.1 Verificação

Para verificar se este código está implementado de forma correta, os seus resultados são comparados com os resultados de [Marensi e Ricco \(2017\)](#). Os resultados deste artigo são obtidos através de um código de alta ordem, no entanto, as perturbações não estacionárias são introduzidas através das perturbações de vorticidade no escoamento livre (FSVD). Na simulação foram adotados os seguintes parâmetros: a velocidade fora da camada limite é $U_{\infty}^* = 9,18 \text{ m/s}$, o raio de curvatura é $R^* = 8,37 \text{ m}$, a viscosidade cinemática é $\nu^* = 1,544 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ e o comprimento de referência é $L^* = 0,1 \text{ m}$. Assim, os valores do número de Reynolds e de Görtler são respectivamente $Re = 60240,039$ e $Go = 1,712$. O comprimento de onda na direção transversal é $\lambda_z^* = 8,0 \text{ mm}$ implicando $\Lambda = 149,0$.

O espaçamento na direção x é $\Delta x = 2,0 \times 10^{-2}$ e o espaçamento inicial na direção y é $\Delta y = 5,0 \times 10^{-4}$ com o estiramento de 1%, ainda nessas duas direções, o número de pontos usado para discretizar o domínio são $N_x = 1225$ e $N_y = 259$. Na direção transversal, considera-se 21 modos de Fourier (espaço de Fourier) e 64 pontos no espaço físico para evitar os efeitos de aliasing. O passo temporal é $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$. As perturbações não estacionárias com frequência $f_{gv}^* = 5 \text{ Hz}$ são inseridas entre $x_2 = 1,2$ e $x_3 = 1,52$. A amplitude inicial das perturbações é $A = 4,5 \times 10^{-4}$ e ela foi ajustada de forma que os resultados obtidos pelo HOPE coincidissem com os resultados de [Marensi e Ricco \(2017\)](#).

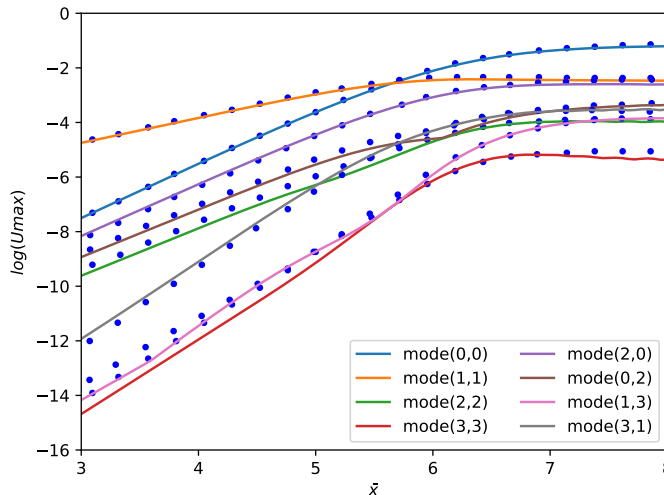
A métrica usada para comparar os resultados é o mesmo do artigo de [Marensi e Ricco \(2017\)](#) o qual é definida como:

$$U_{\max_{m,k}}(x) = rt \left| \max_y U_{m,k}(x,y) \right|^2, \quad (5.1)$$

onde $rt = \varepsilon R_\lambda$ é o número de Reynolds turbulento sendo $\varepsilon = A$ a amplitude inicial da perturbação e $R_\lambda = U_\infty^* \lambda_z^* / 2\pi v^*$ o número de Reynolds baseado no comprimento de onda na direção transversal.

A [Figura 16](#) apresenta os resultados para os seguintes modos de Fourier (0,0), (1,1), (0,2), (2,0), (2,2), (1,3), (3,1) e (3,3). A escala usada no eixo-x é $\bar{x} = (2\pi x^* k_x) / \lambda_z^*$, sendo $k_x = 4,35 \times 10^{-3}$ e no eixo-y tem-se o logaritmo da métrica dada pela [Equação 5.1](#). No gráfico, as linhas sólidas são os resultados obtidos pelo HOPE e os pontos são os resultados extraídos do artigo o qual pode-se observar uma boa concordância entre eles. O modo (1,1) domina até $x < 5,5$, no entanto, nesta mesma região todos os modos amplificam rapidamente. A intersecção entre os modos (0,0) e (1,1) acontece em $x \approx 5,5$, e a partir deste ponto o modo (0,0) domina o escoamento. No entanto, como modo (0,0) está relacionado com o escoamento médio, a estrutura dos vórtices formados pelo modo (1,1) domina o escoamento. O modo (0,0) tem aproximadamente uma ordem de magnitude maior do que (1,1) e o modo (2,0) tem a mesma ordem de magnitude do modo (1,1) para $\bar{x} > 6,5$. Além disso, o modo (0,2) é o que tem maior amplitude entre os modos estacionários.

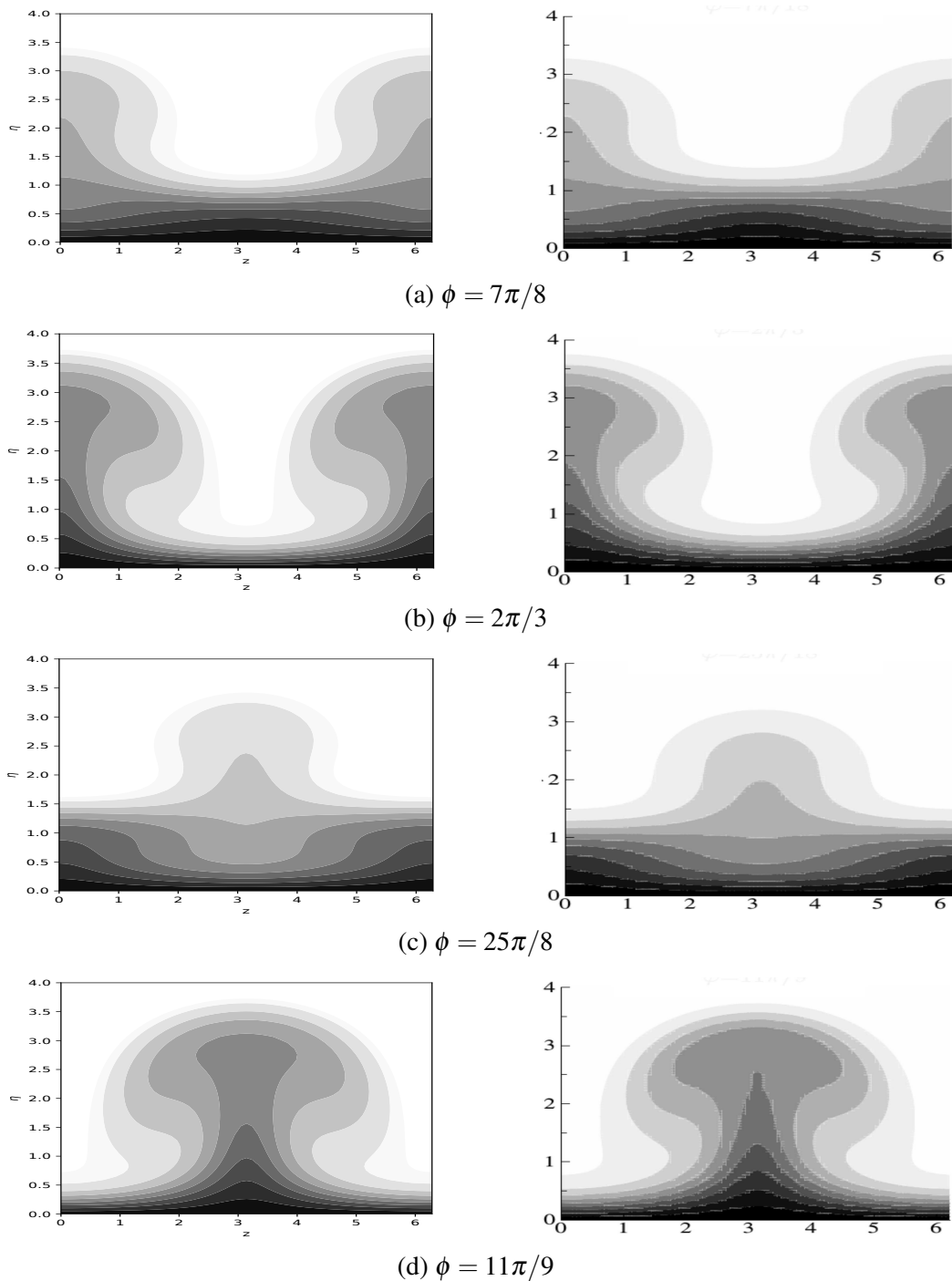
Figura 16 – Comparação entre os resultados obtidos pelo HOPE (linhas sólidas) e pela [Marensi e Ricco \(2017\)](#) (pontos azuis).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, uma análise qualitativa do perfil de velocidade \tilde{u} é comparado com o trabalho [Marensi \(2016\)](#). O componente de velocidade \tilde{u} é plotado no plano $\eta \times z$, sendo que a sua variável adimensional z varia no intervalo $[0, 2\pi]$ e $\eta = \frac{2\pi y^*}{\lambda_z^*} \sqrt{\frac{k_x R_\lambda}{2\bar{x}}}$. A [Figura 17](#) mostra os isocontornos

Figura 17 – Comparação entre os isocontornos da velocidade \tilde{u} do HOPe (esquerdo) e da (MARENSI, 2016) (direito) na posição $\bar{x} = 5,0$ para os seguinte tempos: (a) $\phi = k_x 2\pi t^* U_\infty^* / \lambda_z^* = 7\pi/8$; (b) $\phi = 2\pi/3$; (c) $\phi = 25\pi/8$; e (d) $\phi 11\pi/9$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

de 0 à 0,9 na posição $\bar{x} = 5$ para os seguintes tempos: (a) $\phi = k_x 2\pi t^* U_\infty^* / \lambda_z^* = 7\pi/8$; (b) $2\pi/3$; (c) $25\pi/8$; e (d) $11\pi/9$. O lado esquerdo da figura estão os resultados do HOPe e do lado direito estão os resultados de Marensi (2016), o qual observa-se também uma boa concordância entre eles. Portanto, pode-se concluir que tanto os métodos numéricos quanto as técnicas numéricas

estão implementado corretamente.

5.2 Validação

A validação do modelo matemático é realizada comparando os resultados obtidos pelo HOPE com os resultados experimentais apresentados por [Boiko et al. \(2010a\)](#). Esses resultados foram obtidos em uma região onde os termos não-lineares são fracos. Os valores dos parâmetros do raio de curvatura, da velocidade fora da camada limite e da viscosidade cinemática são os mesmos da verificação. O comprimento de referência é $L^* = 0,2 m$. Assim, os valores do número de Reynolds e Görtler são respectivamente $Re = 18870,77$ e $Go = 2,870$. O comprimento de onda na direção transversal é $\lambda_z^* = 16,0 mm$ implicando $\Lambda = 415,778$.

A configuração na direção y é a mesma da verificação do código. O espaçamento e o número de pontos na direção x são respectivamente $\Delta x = 5.0 \times 10^{-3}$ e $N_x = 780$. Na direção transversal, usa-se 21 modos de Fourier e 32 pontos no espaço físico. Embora a região de inserção das perturbações seja a mesma da verificação, a frequência das perturbações são $f_{gv}^* = 4 Hz$. As amplitudes iniciais das perturbações foram ajustadas de forma que os resultados obtidos pelas simulações coincidisse com os resultados experimentais de [Boiko et al. \(2010a\)](#).

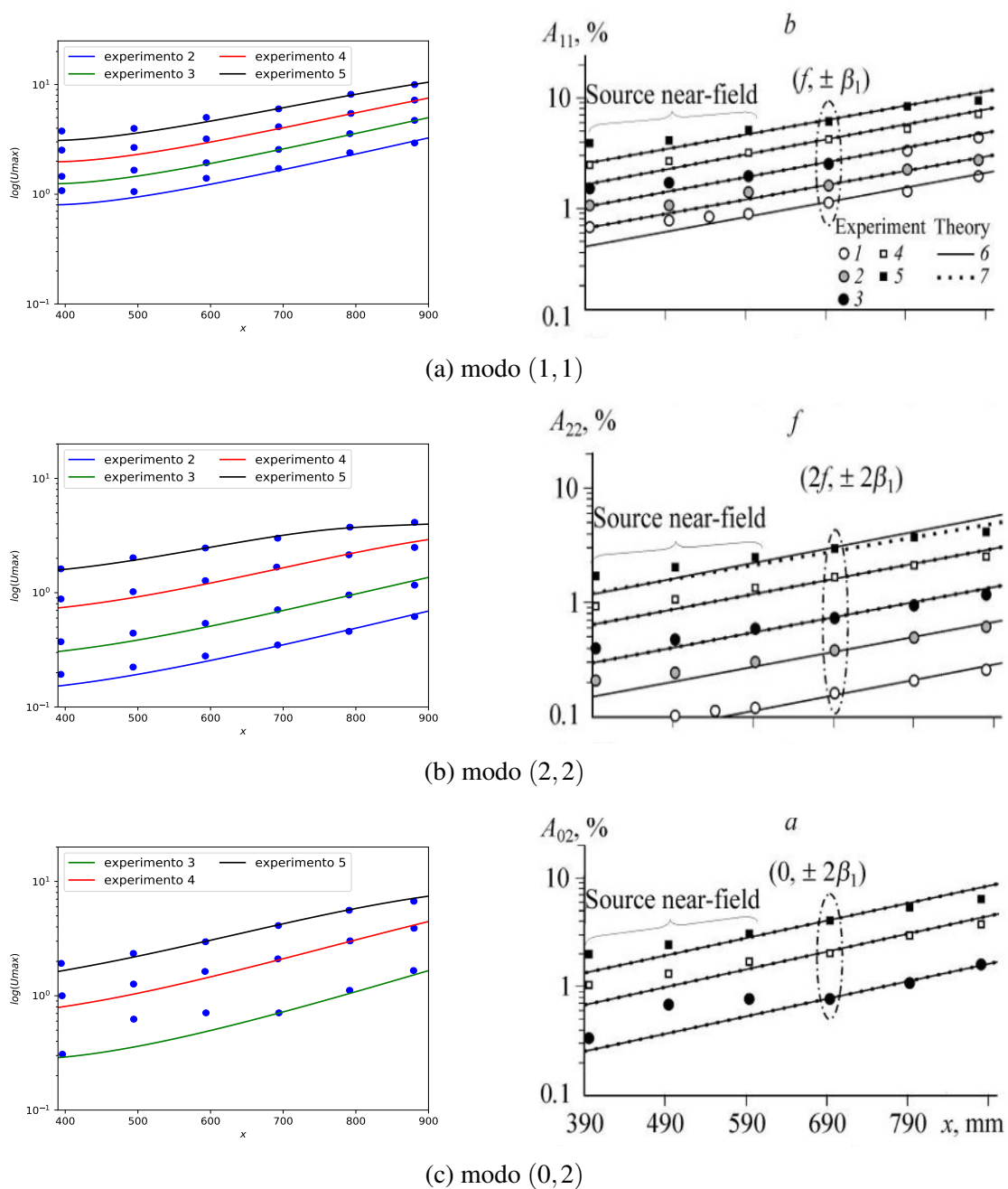
A evolução das perturbações não estacionárias ao longo do escoamento é analisada através de uma análise de Fourier temporal. Portanto, os componentes de vorticidade e velocidade dependem apenas das variáveis x e y . A notação usada para representar esses componentes são $\Phi_{m,k}(x,y)$ sendo m o índice do modo temporal e k o índice do modo espacial. A métrica usada para fazer a comparação entre os resultados é definida pela expressão:

$$U_{\max_{m,k}} = \max_y U_{m,k}(x,y). \quad (5.2)$$

Os resultados para os modos $(1,1)$, $(2,2)$ e $(0,2)$ são apresentados na [Figura 18a](#), [18b](#) e [18c](#) respectivamente, onde do lado esquerdo estão os resultados da simulação numérica obtidos pelo HOPE (linhas contínuas) e os dados extraídos do artigo (pontos). Do lado direito das figuras são apresentados os gráficos dos resultados de [Boiko et al. \(2010a\)](#), onde eles analisaram tanto experimentalmente quanto numericamente para cinco amplitudes (cinco experimentos). Os resultados teóricos numéricos citados nas figuras (lado direito) foram obtidos a partir da teoria de estabilidade não linear e não paralela (linhas contínuas) e da teoria de estabilidade linear e não-paralela (linhas pontilhadas).

Os resultados obtidos pelo HOPE estão de acordo com os resultados tanto experimental quanto teóricos numéricos apresentado por [Boiko et al. \(2010a\)](#), o qual observa-se uma pequena diferença dos resultados no início do domínio, mas que a partir de $x = 690 mm$ os resultados estão em concordância. Portanto, conclui-se que o sistema de equações proposto no [Capítulo 3](#) é uma boa representação do problema físico.

Figura 18 – Comparação entre os resultados obtidos pelo HOPE (linhas contínuas) e por Boiko *et al.* (2010a) (pontos azuis) do lado esquerdo, e os resultados experimentais e “teóricos” extraídos do mesmo artigo para os modos:(a)(1,1); (b)(2,2); e (c)(0,2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste capítulo foi realizado com sucesso a verificação e a validação do código com os resultados da literatura. Assim, o código de alta ordem que vem sendo desenvolvido pelo grupo de pesquisa ganhou mais um importante recurso no estudo de problemas de camada limite sobre uma superfície côncava. No próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos pelo código para três comprimentos de onda na direção transversal com cinco frequências temporais.

RESULTADOS

O presente capítulo tem como objetivo investigar a influência da não linearidade no desenvolvimento dos vórtices de Görtler quando são inseridas perturbações não estacionárias. Nesta investigação considera-se três comprimentos de onda na direção transversal e cinco frequências temporais. Por fim, analisa-se a influência dos vórtices de Görtler estacionário/não estacionário gerados pelas perturbações não estacionárias na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto.

Os resultados foram computados no Cluster Euler (EULER, 2015), o qual foram utilizados 10 núcleo de um processador ($p = 10$) para cada simulação. O tempo de simulação de cada caso variou entre duas semanas a um mês.

6.1 Perturbações estacionárias e os vórtices de Görtler estáveis

Primeiramente, considera-se a inserção de perturbações estacionárias ($f_{gv}^* = 0 \text{ Hz}$) para obter a amplitude das perturbações iniciais que geram resultados similares de Souza (2017). Os parâmetros físicos usados na simulação são os mesmos do artigo de Swearingen e Blackwelder (1987), onde o raio de curvatura é $R^* = 3,2 \text{ m}$, a velocidade fora da camada limite é $U_\infty^* = 5,0 \text{ m/s}$, e a viscosidade cinemática é $\nu^* = 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. A difusividade térmica do fluido é $\alpha^* = 2,095 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ e o comprimento de referência é $L^* = 0,1 \text{ m}$. Assim, os seguintes valores para os números adimensionais de Reynolds, Görtler e Prandtl são respectivamente $Re = 33124,0$, $Go = 2,385$ e $Pr = 0,72$.

O espaçamento na direção longitudinal é $\Delta x = 2,0 \times 10^{-2}$, o espaçamento inicial na direção normal à parede é $\Delta y = 5,0 \times 10^{-4}$ com o estiramento de malha de 1% e o passo temporal é $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$. O domínio computacional é discretizado por $N_x = 825$ pontos na direção longitudinal e $N_y = 297$ pontos na direção normal à parede. No método pseudo-espectral são

usados 21 modos de Fourier e 64 pontos no espaço físico para evitar o aliasing.

Os três comprimentos de onda na direção transversal são $\lambda_z^* = 9,0; 18,0$ e $36,0$ mm e os seus respectivos comprimento de onda característico são $\Lambda = 158; 447$ e 1265 . A amplitude inicial que ajustam os resultados ao do artigo [Souza \(2017\)](#) são $\mathcal{A} = 3,5 \times 10^{-3}; 1,08 \times 10^{-3}$ e $5,0 \times 10^{-5}$ respectivamente aos três comprimentos de onda. O escoamento é considerado estacionário quando a diferença entre dois passos consecutivo no tempo do componente de velocidade u na norma do máximo for menor do que $1,0 \times 10^{-7}$. A perturbação é introduzida entre $x_2 = 1,2$ e $x_3 = 1,52$.

A métrica usada para comparar os resultados é a energia da perturbação proposta por [Li e Malik \(1995\)](#), e ela é definida pela seguinte expressão:

$$\text{En}_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\infty (|U_k|^2 + |W_k|^2) dy & \text{para } k = 0 \\ \int_0^\infty (|U_k|^2 + |V_k|^2 + |W_k|^2) dy & \text{se } k > 0 \end{cases}. \quad (6.1)$$

O critério Q é usado para visualizar a evolução e a estrutura dos vórtices de Görtler. Ele é a segunda invariante de $\nabla \tilde{\mathbf{u}}$ e é definida como:

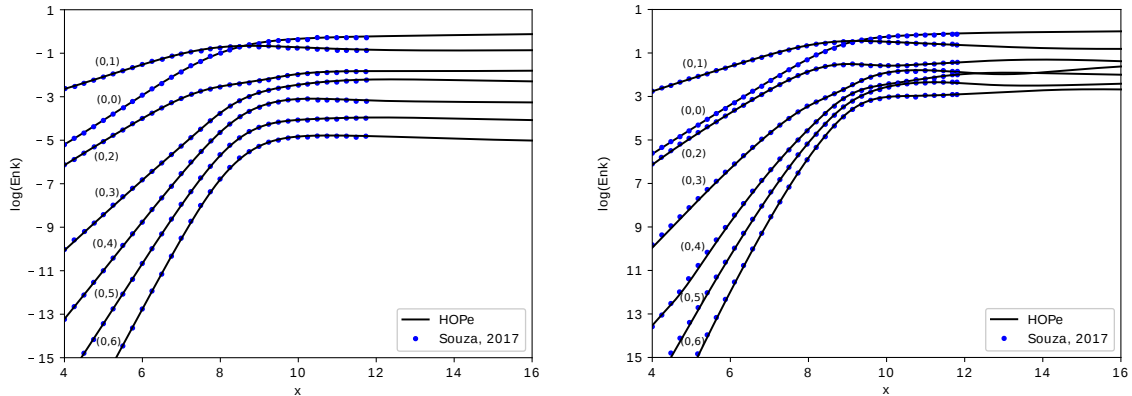
$$Q = \frac{1}{2} (|\Omega|^2 - |\mathbf{S}|^2),$$

onde Ω e \mathbf{S} são respectivamente a parte antissimétrica e a parte simétrica da decomposição do tensor $\nabla \tilde{\mathbf{u}}$. Assim, a variável Q fornece informações tanto das vorticidades (antissimétrico) quanto das tensões de cisalhamento (simétrico) do tensor $\nabla \tilde{\mathbf{u}}$. A norma usada para um tensor genérico \mathbf{G} é definida como sendo $\|\mathbf{G}\| = [\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^t)]^{1/2}$. Os detalhes sobre o critério Q pode ser encontrado nos artigos de [Jeong e Hussain \(1995\)](#) e [Dubief e Delcayre \(2000\)](#).

A [Figura 19](#) apresenta os resultados para os sete primeiros modos de Fourier, onde os pontos azuis são as soluções de referência ([SOUZA, 2017](#)) e as linhas contínuas são as soluções obtida pelo HOPE, o qual pode-se observar uma boa concordância entre eles. O modo $(0, 1)$ domina o escoamento até $x \approx 8,75; 9,25$ e $9,50$ para os $\lambda_z^* = 9,0; 18,0$ e $36,0$ mm, respectivamente, onde ocorre a intersecção entre os modos $(0, 0)$ e $(0, 1)$ e a saturação de todos os modos de Fourier. Na região antes da intersecção, todos os modos crescem rapidamente, no entanto, nota-se que a amplitude do modo $(0, 2)$ aproxima-se do $(0, 0)$ conforme o comprimento de onda aumenta chegando a ser maior para $\lambda_z^* = 36,0$ mm até $x \approx 7,6$.

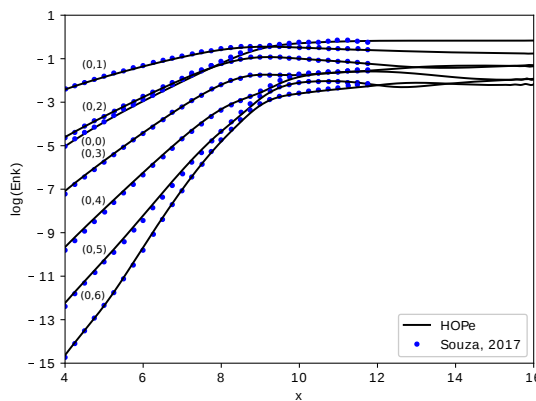
A [Figura 20](#) mostra a evolução, a estrutura e a influência dos vórtices de Görtler sobre a camada limite para os três comprimentos de ondas na direção transversal. A evolução e a estrutura dos vórtices de Görtler são ilustrados pelas isosuperfícies com $Q = 0,05$, o qual observa-se que o par de vórtices gerado pelo modo dominante $(0, 1)$ se desenvolve em todo o escoamento. Os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ nas posições $x = 6,0; 8,5; 11,0; 13,5$ e $16,0$

Figura 19 – Comparação da energia da perturbação (6.1) entre HOPe (linhas contínuas) e (SOUZA, 2017) para os seguintes comprimento de onda: (a) $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$; (b) $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$; e (c) $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$



(a) $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$

(b) $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$



(c) $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$

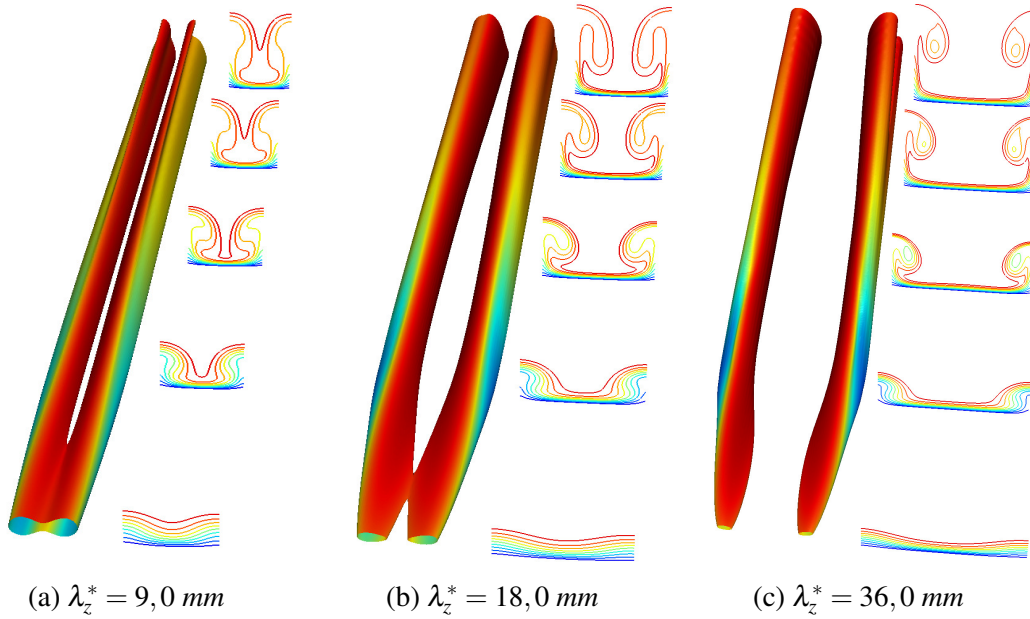
Fonte: Elaborada pelo autor.

mostram a influência dos vórtices sobre a camada limite, nela observa-se a distorção que os vórtices produzem na camada limite criando a região ascendente e descendente e conseqüentemente a estrutura cogumelo.

6.2 A influência das perturbações não estacionárias na formação dos vórtices de Görtler para diferentes comprimentos de onda

Nas simulações com perturbações não estacionárias são considerados os mesmos parâmetros da Seção 6.1 com exceção do número de pontos na direção longitudinal. Para cada comprimento de onda na direção transversal são analisadas cinco frequências $f_{gv}^* = 3; 6; 9; 12$

Figura 20 – Isosuperfícies com $Q = 0,05$ e os isocontornos do perfil de velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ nas posições $x = 6,0; 8,5; 11,0; 13,5$ e $16,0$ para: (a) $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$; (b) $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$; e (c) $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

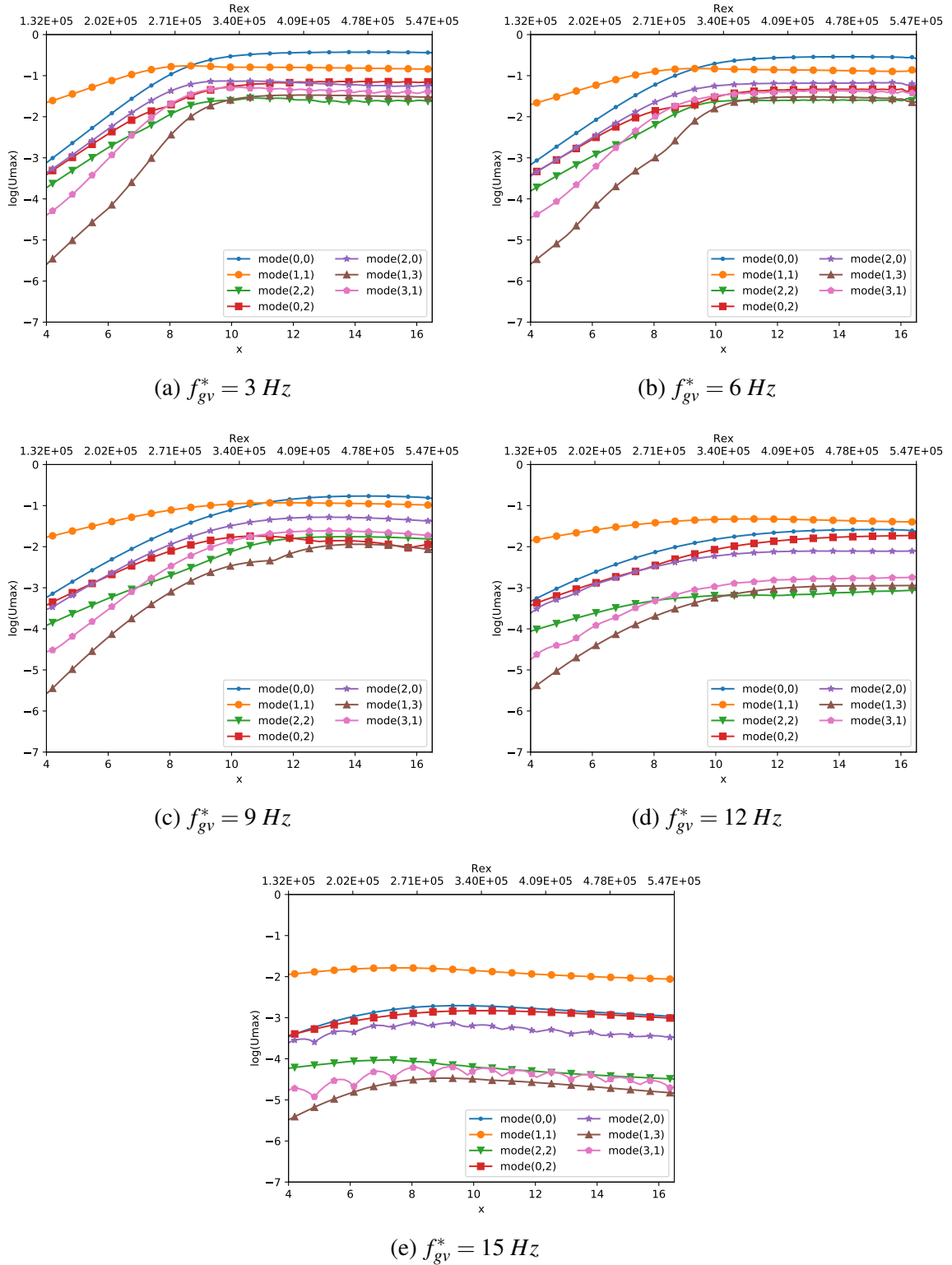
e 15 Hz , com os respectivos valores adimensionais $\omega_{gv} = 0,3769; 0,7539; 1,1309; 1,5079$ e $1,8849$. A evolução das perturbações não estacionárias no escoamento é analisada pela métrica dada pela [Equação 5.2](#).

6.2.1 $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$

Primeiramente, o comprimento de onda e o número de pontos na direção longitudinal são respectivamente $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$ e $N_x = 825$, assim, o comprimento de onda característico é $\Lambda = 158$. A [Figura 21](#) apresenta os resultados usando a métrica (5.2) para todas as frequências. Nela observa-se que para as três primeiras frequências $f_{gv}^* = 3; 6$ e 9 Hz o modo $(1, 1)$ domina respectivamente o escoamento até $x \approx 8,4; 9,2$ e $11,0$, onde ocorre a intersecção entre os modos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A saturação das amplitudes de todos os modos ocorrem após a intersecção entre os modos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Para $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, o modo $(1, 1)$ domina todo o escoamento, em outras palavras, nenhum modo de Fourier alcança amplitude suficiente para intersectar o modo $(1, 1)$. Neste caso, o modo $(1, 1)$ tem um leve crescimento até $x \approx 11,0$ e após a esse valor ele tem um leve decrescimento até $x \approx 15,0$, onde ocorre a saturação do modo. Os outros modos crescem até $x \approx 15$ e depois desse ponto eles também saturam. Para a última frequência ($f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$), as perturbações não estacionárias são estáveis a partir de $x \approx 8,0$, pois observa-se que todos os modos decrescem após a esse ponto até o final do domínio considerado.

Em todos os casos, o modo $(1, 1)$ domina o processo de transição, isto significa que, apenas um par de vórtices pode ou não ser gerado e que este par de vórtices quando gerado é

Figura 21 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x, y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$ para as seguintes frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.



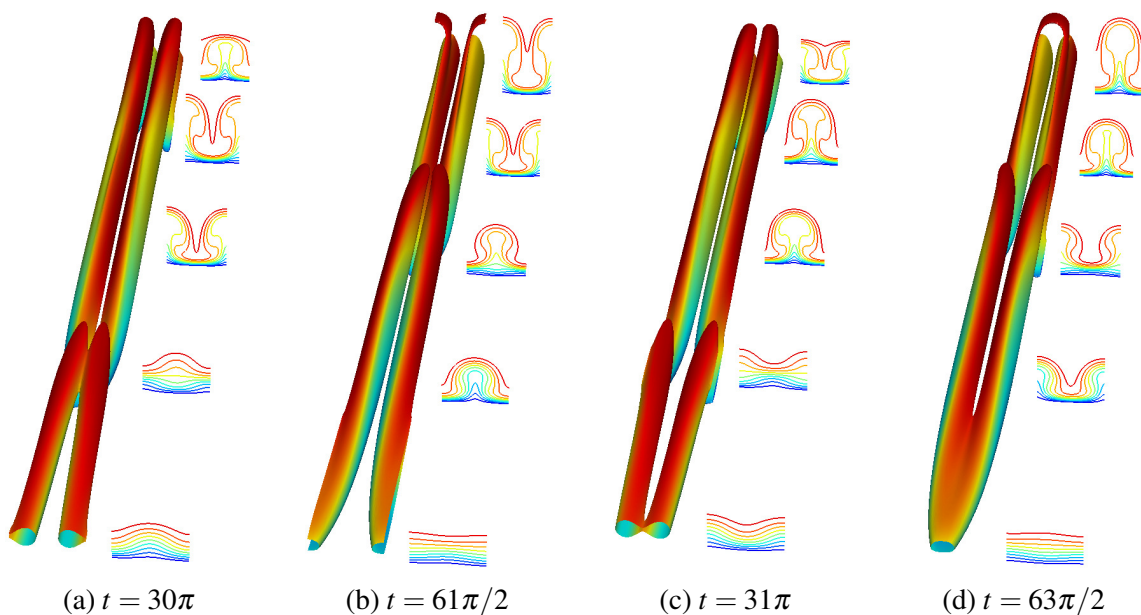
Fonte: Elaborada pelo autor.

não estacionário. O conceito de vórtices de Görtler não estacionado está na mudança da região ascendente para a descendente e vice-versa quando fixado um plano $z \times y$. Esta interpretação fica mais clara através da isosuperfície e dos isocontornos apresentados nas Fig. 22-26, onde eles mostram a evolução, a estrutura e a influência dos vórtices de Görtler instáveis sobre a camada limite. Em cada figura são apresentadas quatro gráficos, o qual cada gráfico está associado com $1/4$ do ciclo da função $\cos(\omega_{gv}t)$, desta forma, a evolução temporal e o desenvolvimento dos vórtices instáveis podem ser observados.

A isosuperfície com $Q = 0,05$ mostra a evolução e a estrutura dos vórtices de Görtler não estacionários, o qual observa-se que os vórtices não estacionários são gerados para $f_{gv}^* = 3, 6, 9$ e 12 Hz , mas eles não são gerados para $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, além disso, os gráficos mostram o decaimento das amplitudes das perturbações confirmando a análise feita para a amplitude dos modos de Fourier. Os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ mostram a distorção que a camada limite sofre pelo par de vórtices de Görtler não estacionários para $f_{gv}^* = 3, 6, 9$ e 12 Hz . Esta distorção cria as regiões ascendente e descendente e conseqüentemente a estrutura cogumelo características desse problema. Para $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, como não há vórtices de Görtler observa-se apenas algumas ondulações na camada limite.

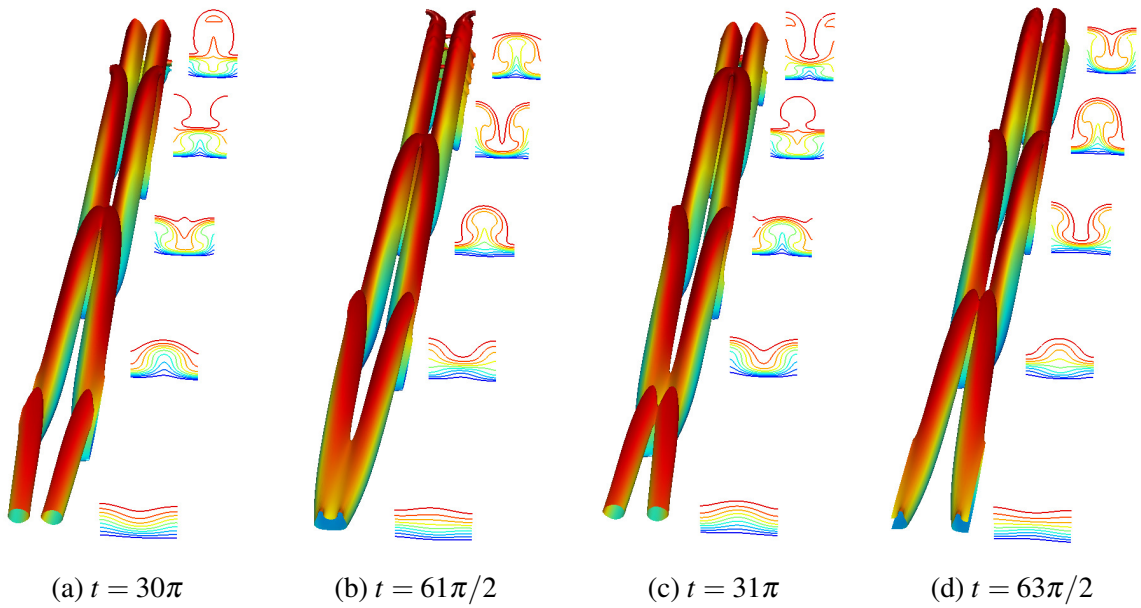
A isosuperfície e os isocontornos apresentados nas Fig. 22-26 mostram um fenômeno interessante que acontece apenas com os vórtices de Görtler não estacionários que é a sobreposição entre eles. No entanto, este assunto será explorado com mais detalhes na [Subseção 6.3.1](#).

Figura 22 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$.



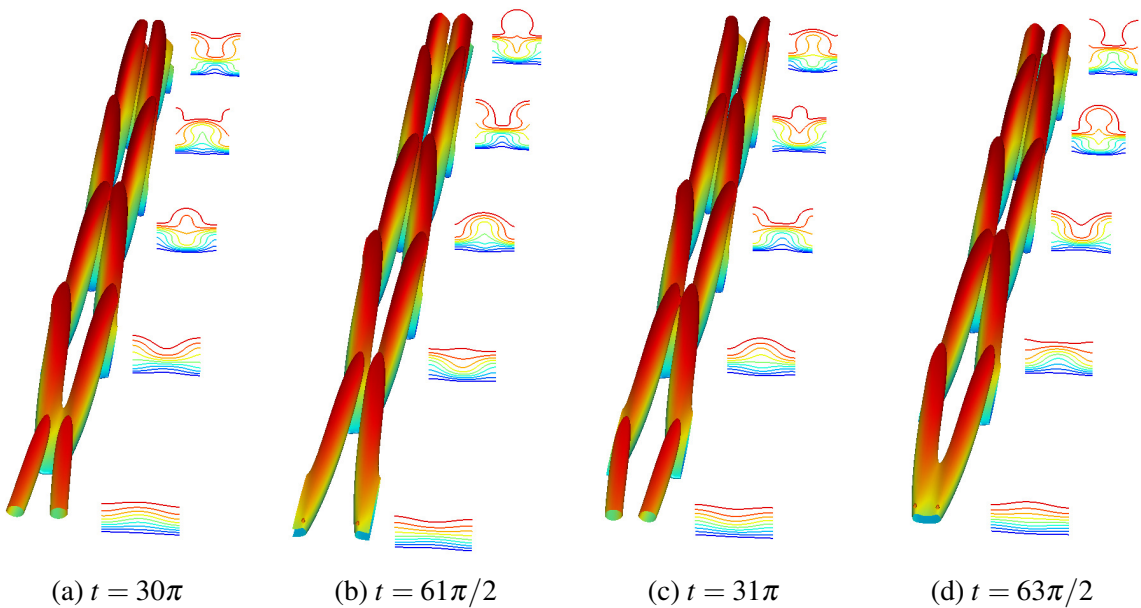
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$.



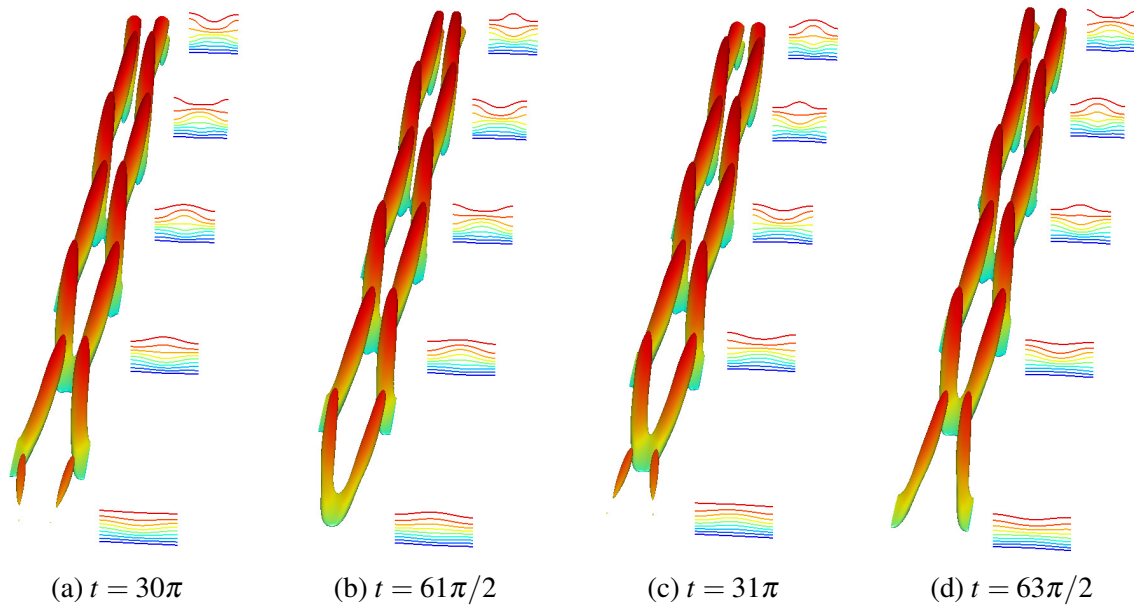
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$.



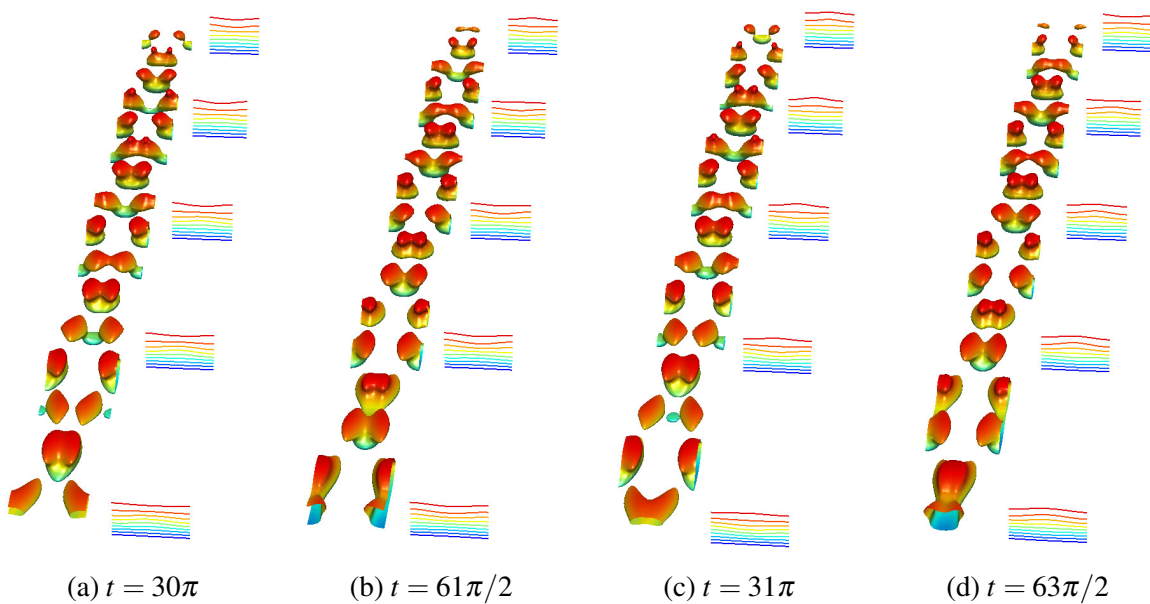
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, nas posições $x = 6,3; 8,7; 11,1; 13,5$ e $15,9$ e nos tempos: (a) $t = 30\pi$; (b) $t = 61\pi/2$; (c) $t = 31\pi$; e (d) $t = 63\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.2 $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$

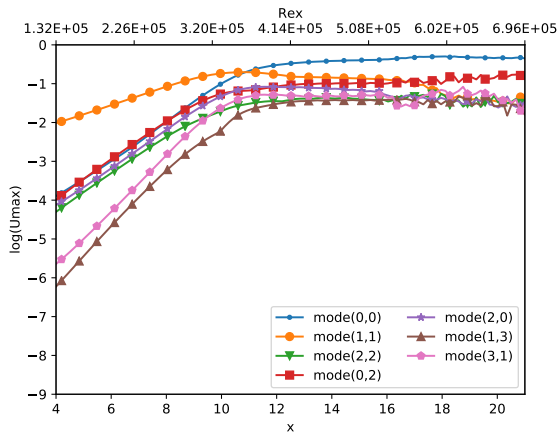
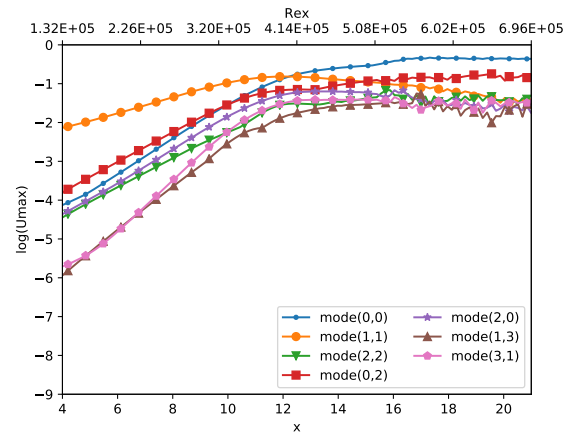
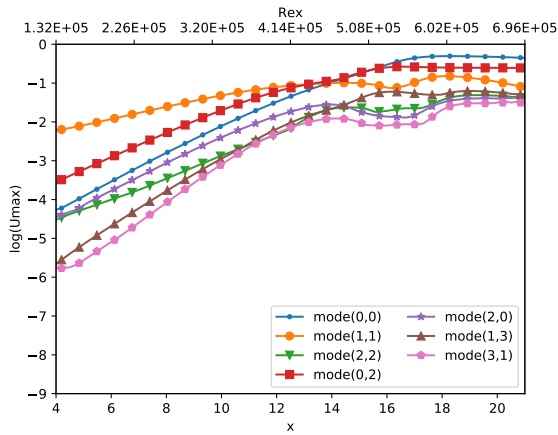
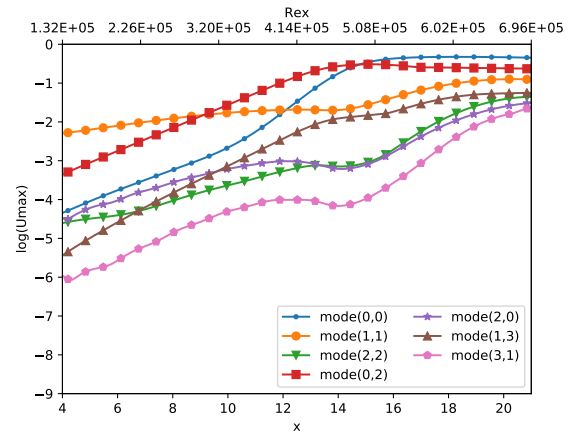
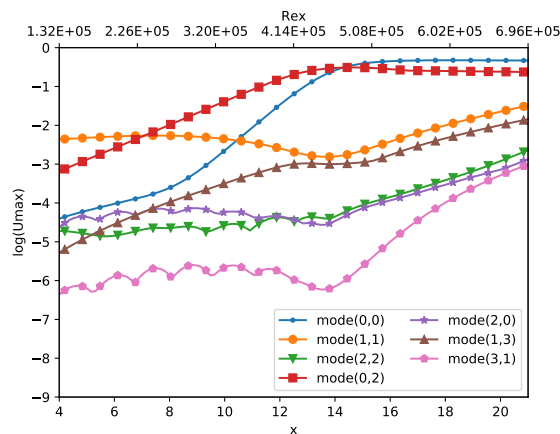
O número de pontos considerado na direção longitudinal para as simulações com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ é $N_x = 1065$. A [Figura 27](#) mostra a evolução das amplitudes das perturbações não estacionárias dos principais modos de Fourier usando a métrica (5.2). As [Fig. 28-32](#) apresentam a evolução e a estrutura dos vórtices de Görtler através da isosuperfície com $Q = 0,05$, e a influência desses vórtices sobre a camada limite é ilustrada pelos isocontornos da velocidade \bar{u} no plano $z \times y$ em $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$. Assim, os resultados são divididos em três casos: (1) $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz ; (2) $f_{gv}^* = 9$ e 12 Hz ; e (3) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.

No primeiro caso, o modo $(1,1)$ domina o escoamento até $x \approx 10,8$ e $12,2$ para as frequências $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz , respectivamente. Neste ponto ocorre a intersecção entre os modos $(0,0)$ e $(1,1)$ e a saturação de todos os modos de Fourier. Na região antes da intersecção, todos os modos crescem rapidamente, além disso, observa-se que o subharmônico estacionário $(0,2)$ tem a mesma amplitude que o $(0,0)$ para $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, e uma amplitude um pouco maior que o modo $(0,0)$ até $x \approx 10,0$ para $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$. Os resultados também mostram oscilações de alta frequência para ambos os casos em $x \approx 15,0$. Essas oscilações quando analisadas através do critério $Q = 0,05$ se mostrou ser uma instabilidade secundária do tipo varicoso como ilustra as [Figura 28](#) e [Figura 29](#). Nesses dois casos, as características do modo $(1,1)$ domina o escoamento até ocorrer a interação entre os modos $(1,1)$ e $(0,2)$, pois apenas um par de vórtices de Görtler não estacionário surge nesta região.

No segundo caso, o modo $(1,1)$ cresce com pouca intensidade e domina o escoamento até $x \approx 13,1$ e $9,1$ para as frequências $f_{gv}^* = 9$ e 12 Hz , respectivamente, onde a intersecção entre ele e o subharmônico estacionário $(0,2)$ ocorre. A intersecção entre o modo $(0,0)$ e $(1,1)$ acontece apenas em $x \approx 13,5$ e $12,0$. No entanto, ao contrário das outras análises, o ponto de intersecção dos modos $(0,0)$ e $(1,1)$ não é mais o ponto de saturação dos modos. Os únicos modos que realmente saturam são o $(0,0)$ e $(0,2)$, e eles saturam no ponto de intersecção entre eles que é em $x \approx 14,8$ em ambos os casos. As [Figura 30](#) e [Figura 31](#) ilustram a análise feita acima através da isosuperfície e dos isocontornos. Nelas pode-se observar que inicialmente um par de vórtices de Görtler não estacionário é gerado pelo modo $(1,1)$, mas dois pares de vórtices vão surgindo e dominando o escoamento conforme a amplitude o modo $(0,2)$ aumenta. Esses dois pares de vórtices são estacionário apesar de terem intensidades diferentes, pois não há mudança da região ascendente para a descendente ou vice-versa ao longo do tempo.

Finalmente, para $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, o modo $(1,1)$ inicialmente decresce até $x \approx 13,5$, mas ele volta a crescer após a esse ponto. Análogo aos casos anteriores, o subharmônico $(0,2)$ continua crescendo rapidamente e intersecta o $(1,1)$ cada vez mais próximo ao bordo de ataque. O modo $(0,0)$ só começa ter um crescimento acentuado a partir de $x \approx 7,8$ e ele intersecta o $(0,2)$ em $x \approx 14,3$, onde ocorre a saturação desses dois modos. Os modos $(2,2)$, $(2,0)$ e $(3,1)$ apresentam um comportamento oscilatório até $x \approx 13,5$, no entanto, eles começam a crescer após a este ponto como acontece com o modo $(1,1)$. O modo $(1,3)$ cresce em todo o domínio e alcança

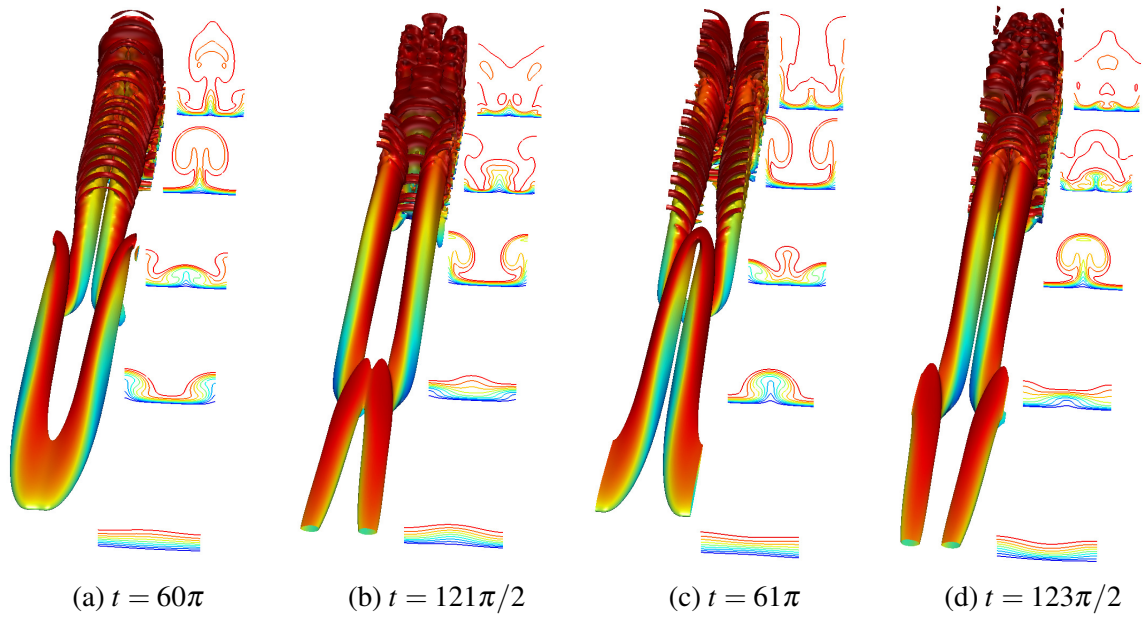
Figura 27 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x,y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ para: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.

(a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$ (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

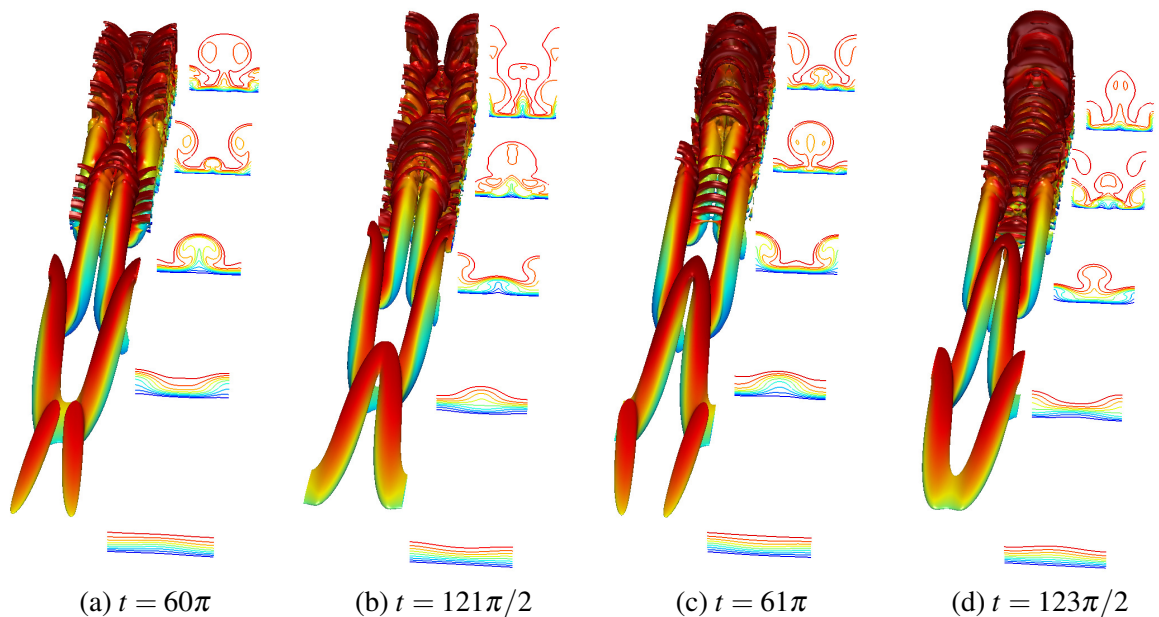
uma amplitude próxima ao do modo (1, 1) a partir de $x \approx 12,5$. A Figura 32 mostra que apenas os dois pares de vórtices de Görtler estacionários são gerados ao longo do escoamento.

Figura 28 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$.



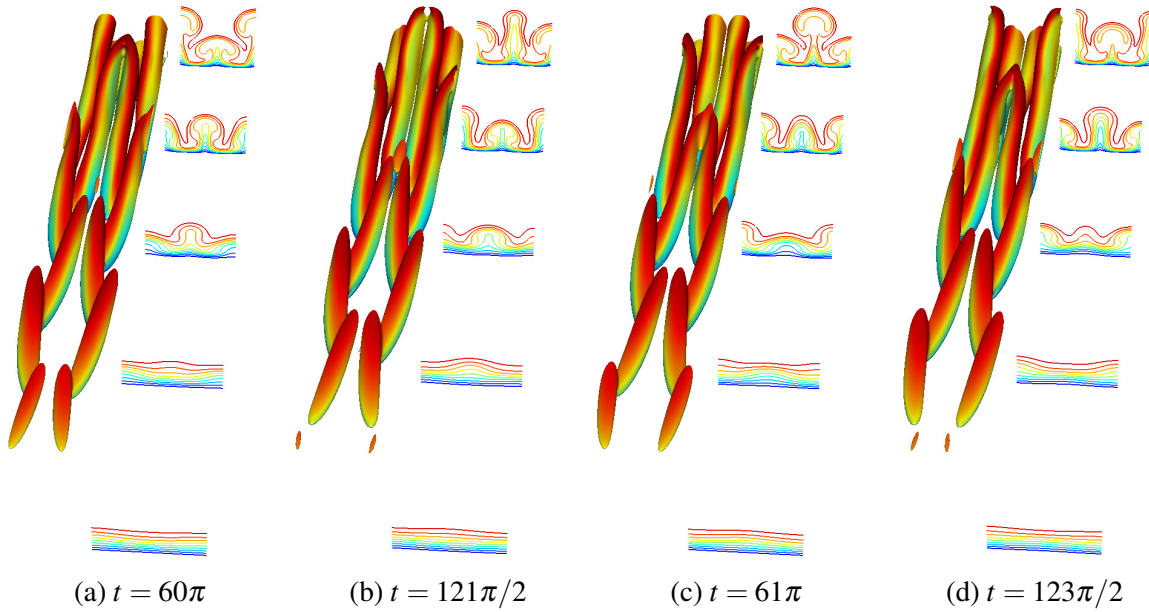
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$.



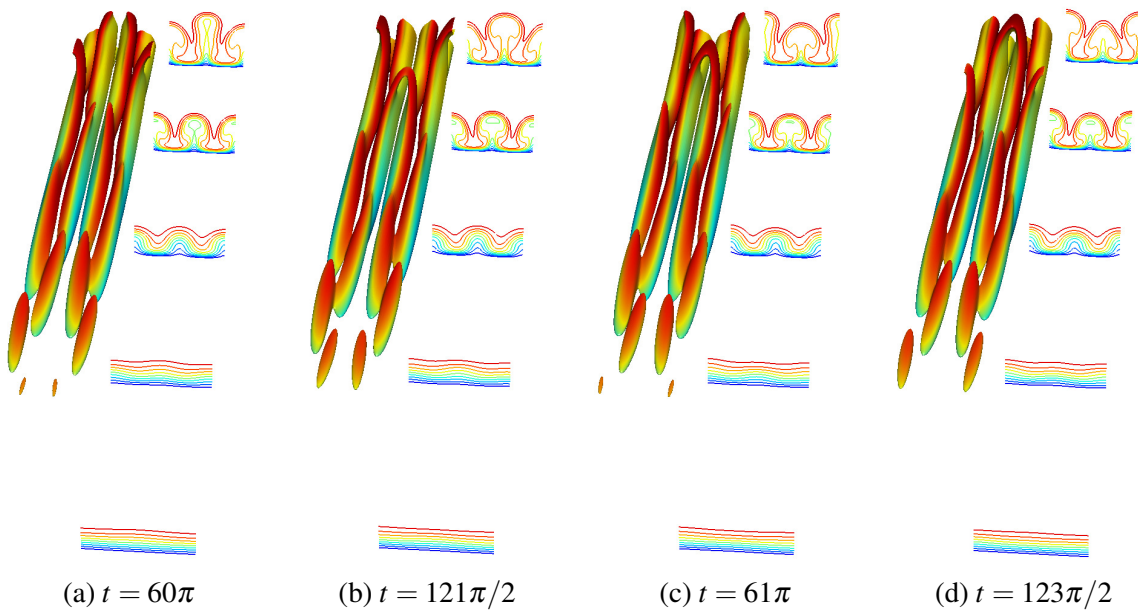
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$.



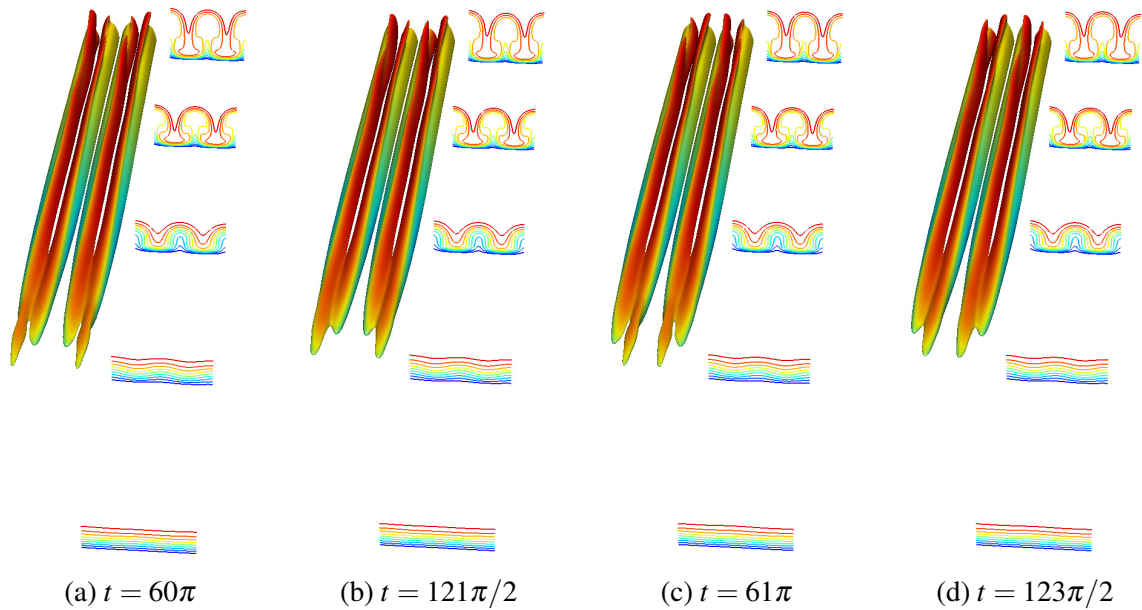
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$, nas posições $x = 7,8; 10,8; 13,8; 16,8$ e $19,8$ e nos tempos: (a) $t = 60\pi$; (b) $t = 121\pi/2$; (c) $t = 61\pi$; e (d) $t = 123\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Fig. 28-32, observa-se que a sobreposição dos vórtices de Görtler não estacionários acontece para as frequências $f_{gv}^* = 3, 6$ e 9 Hz com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$. O caso com a frequência $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$, tem-se a formação dos vórtices não estacionários em uma pequena região do domínio, no entanto, como eles estão no início do seu desenvolvimento não é possível obter muitas características da sobreposição dos vórtices nesse caso.

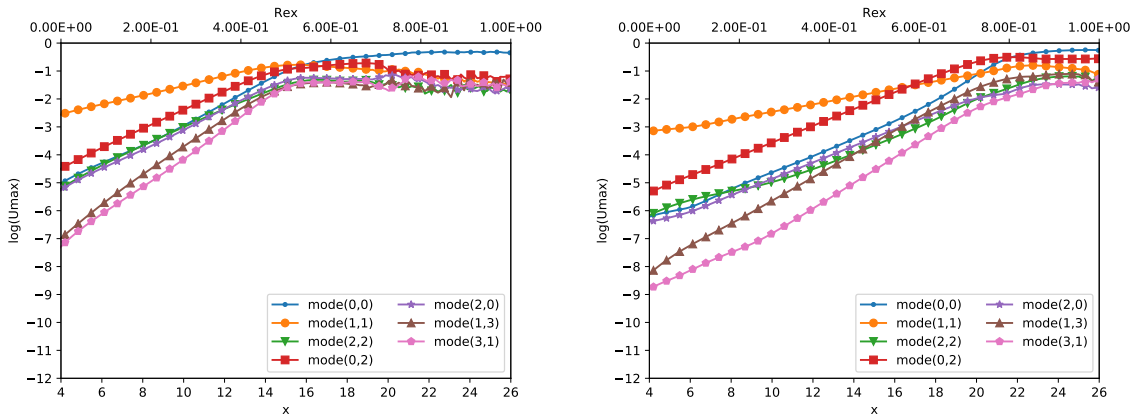
6.2.3 $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$

O último comprimento de onda é $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ e o número de pontos na direção longitudinal é $N_x = 1305$. Análogo aos outros dois casos, os resultados da evolução das amplitudes das perturbações não estacionárias são analisadas através da métrica (5.2) e eles são mostrados na Figura 33. A isosuperfície com $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ são apresentados nas Fig. 34-38, onde a estrutura e a evolução dos vórtices de Görtler estacionários/não estacionários e a distorção que da camada limite sofre pelos vórtices podem ser observados.

Os resultados para $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ mostram que o modo (1,1) domina o escoamento até $x \approx 15,8$ onde a intersecção entre ele e o modo (0,0) ocorre. Na região antes da intersecção, todos os modos de Fourier crescem rapidamente, além disso, ainda nessa região o subharmônico estacionário (0,2) tem uma amplitude maior que o (0,0) até $x \approx 15,4$. Após a intersecção entre os modos (0,0) e (1,1) acontece o mesmo comportamento observado nos casos com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ e $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz , ou seja, embora a saturação de todos os modos aconteça após a

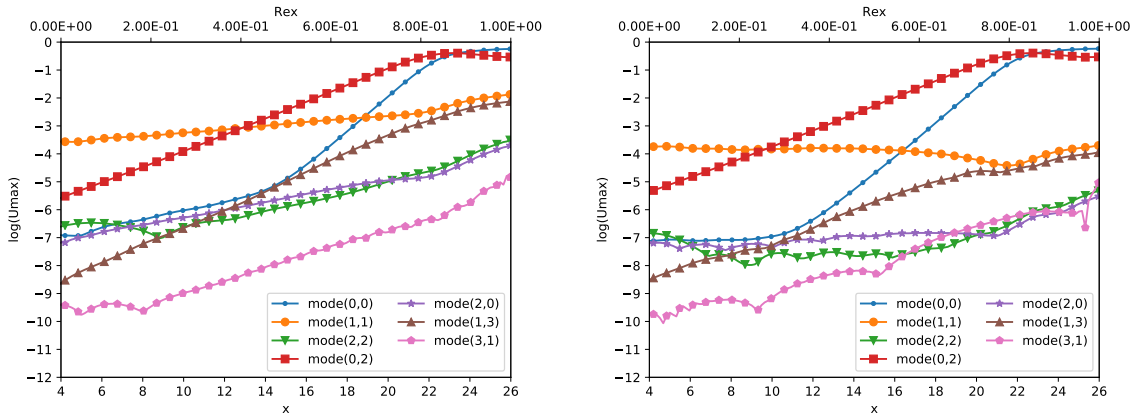
essa intersecção, o modo (0,2) acaba interagindo com o (1,1), pois ambos os modos possuem amplitudes equivalentes na região onde os termos não lineares são significativos, e a partir dessa interação surge uma instabilidade secundária do tipo varicoso como ilustra a [Figura 34](#).

Figura 33 – Amplitude máxima da velocidade $U_{m,k}(x,y)$ com comprimento de onda $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ para: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.



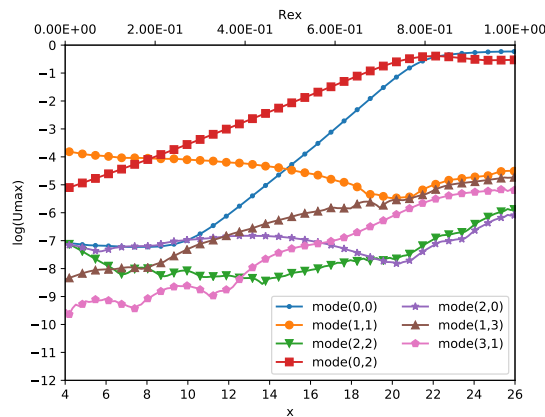
(a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$

(b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$



(c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$

(d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$

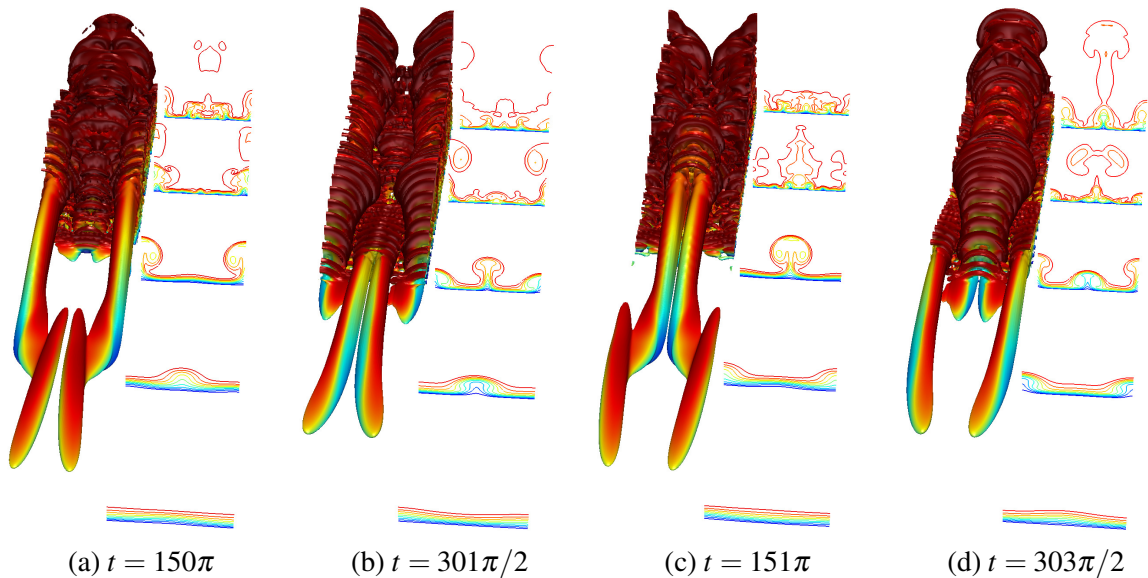


(e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados considerando a frequência $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ são mostrados na [Figura 33b](#). Nela o modo (1, 1) domina o escoamento até ser intersectado pelo subharmônico estacionário (0, 2) em $x \approx 16,8$, e a partir desse ponto, o modo (0, 2) domina o escoamento até $x \approx 21,8$, onde ocorre a intersecção com o modo (0, 0) e a saturação de todos os modos de Fourier. A [Figura 35](#) mostra que apesar do modo (1, 1) dominar grande parte do escoamento ele não alcança uma magnitude suficiente nesta região para gerar os vórtices não estacionários, e que apenas os vórtices de Görtler estacionários são gerados pelo modo (0, 2) no final do escoamento, mas cada par de vórtices possuem intensidades diferentes.

Figura 34 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$.

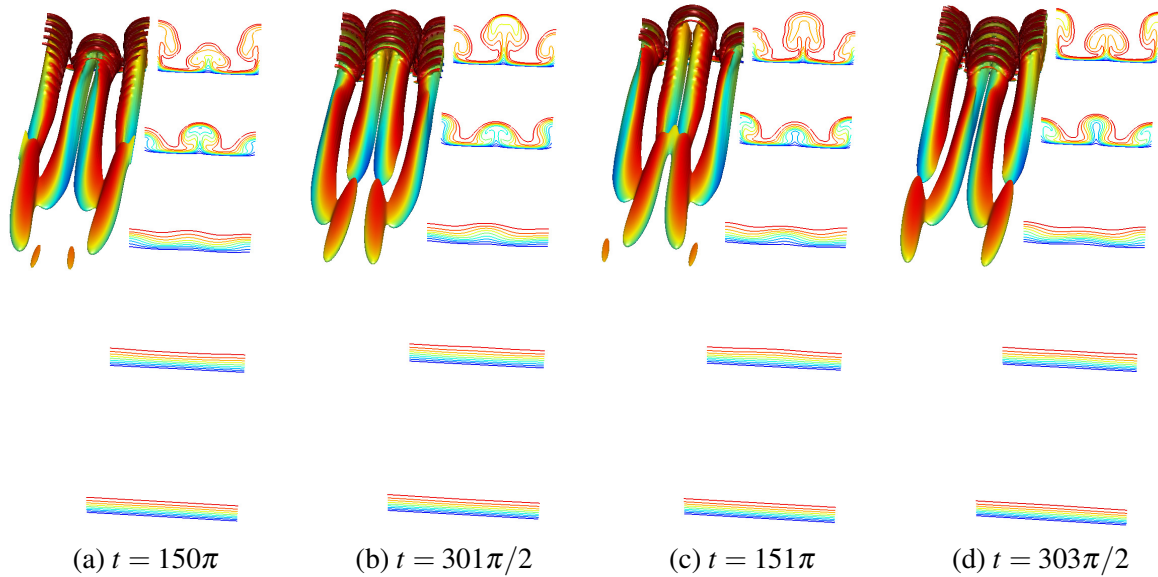


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados para a frequência $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$ são ilustrados na [Figura 33c](#), onde inicialmente o escoamento é dominado pelo modo (1, 1) até ocorrer a intersecção entre ele e o subharmônico estacionário (0, 2), e a partir deste ponto, o escoamento passa a ser dominado pelo modo (0, 2). Neste caso, os únicos modos que alcançam amplitude suficiente para saturarem são os modos (0, 0) e (0, 2), e o ponto de saturação acontece na intersecção entre eles no ponto $x \approx 23,4$. Embora a amplitude dos outros modos cresça em todo o domínio, eles não alcançam amplitude suficiente para saturar. Note também que, o modo (1, 3) alcança uma amplitude próxima ao do modo (1, 1) no final do escoamento. A [Figura 35](#) mostra dois pares de vórtices de Görtler estacionários gerado pelo modo dominante (0, 2) ao longo do escoamento.

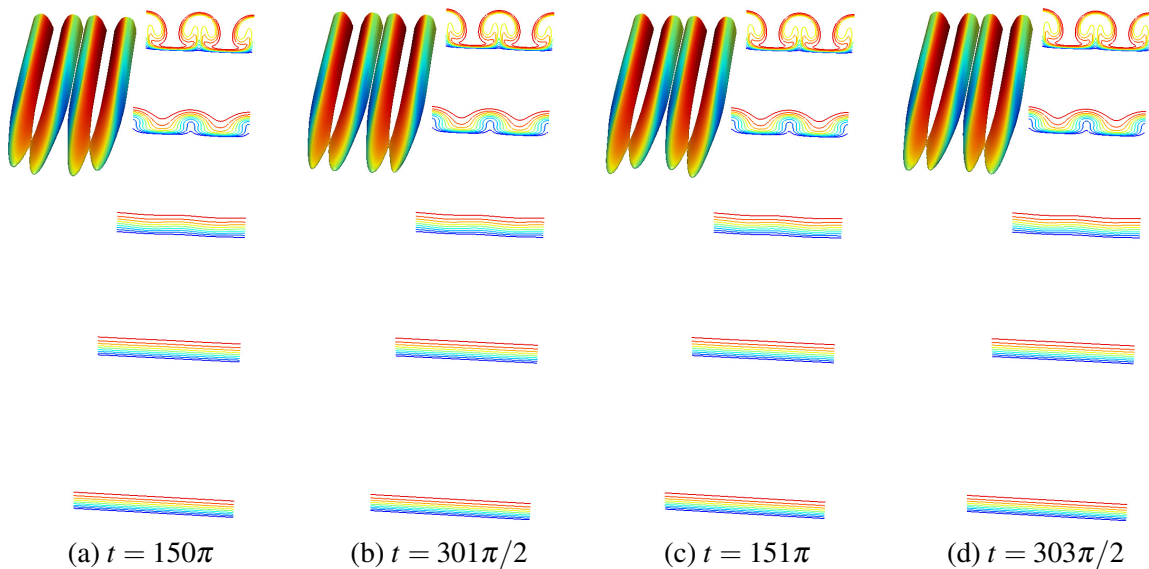
A [Figura 33d](#) e a [Figura 33e](#) mostram respectivamente os resultados para $f_{gv}^* = 12$ e 15 Hz . Nela pode-se observar que o modo (1, 1) decresce até $x \approx 21,5$ e $20,0$, mas após a esse ponto ele tem um leve crescimento até o final do domínio. A intersecção entre os modos (1, 1) e (0, 2) acontece cada vez mais próximo ao bordo de ataque, em outras palavras, modo (0, 2)

Figura 35 – A isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – A isosuperfície $Q = 0,05$ e os isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$.

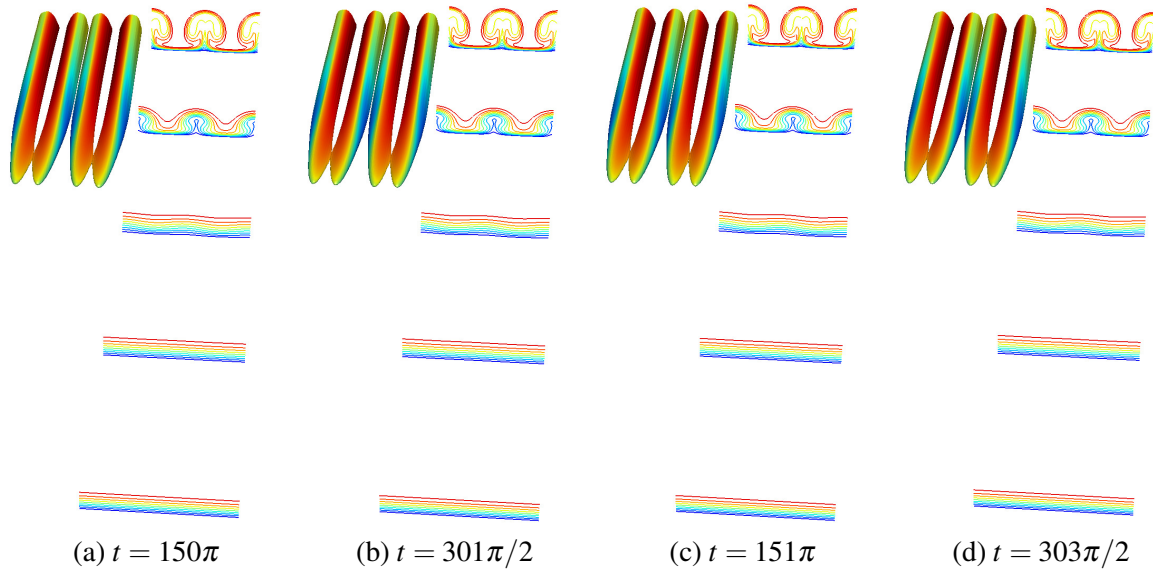


Fonte: Elaborada pelo autor.

começa a dominar o escoamento cada vez mais a montante. Em ambas as frequências, os únicos modos que alcançam amplitude suficiente para saturar são $(0,0)$ e $(0,2)$ e eles saturação em $x \approx 22,9$ e $22,3$, onde ocorrem a intersecção eles. Os modos $(2,2)$, $(2,0)$ e $(3,1)$ apresentam um comportamento oscilatório antes de começarem a ter um comportamento de crescimento até

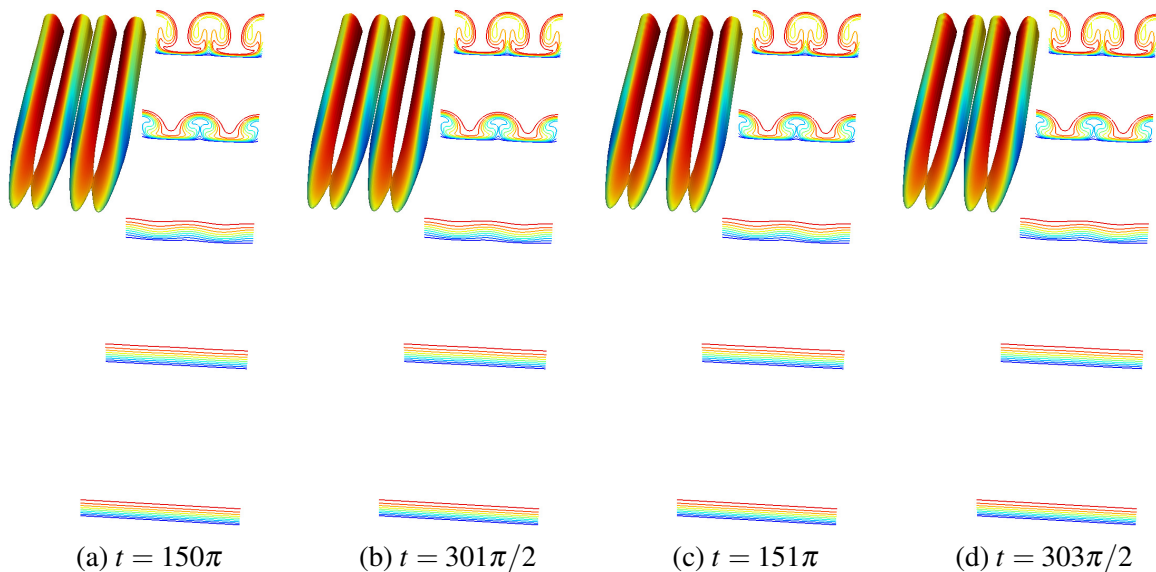
o final do escoamento. Análogo ao caso $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$, o modo $(1, 3)$ cresce em todo o domínio e alcança uma amplitude próxima a do modo $(1, 1)$ perto do final do escoamento. As [Figura 37](#) e [Figura 38](#) mostram formação de dois pares de vórtices de Görtler estacionários gerados pelo modo dominante $(0, 2)$.

Figura 37 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Isosuperfície $Q = 0,05$ e isocontornos da velocidade \tilde{u} no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ com $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$ nas posições $x = 11,4; 15,0; 18,6; 22,2$ e $25,8$ e nos tempos: (a) $t = 150\pi$; (b) $t = 301\pi/2$; (c) $t = 151\pi$; e (d) $t = 303\pi/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.3 Transferência de calor e o coeficiente de arrasto

Devido a relação entre as camadas limites térmica e hidrodinâmica, os vórtices de Görtler gerados também modificam o perfil de temperatura $\tilde{\theta}$ criando assim uma estrutura cogumelo similar ao do perfil de velocidade \tilde{u} ao longo da direção longitudinal. Além disso, de acordo com os estudos de [Winoto *et al.* \(2011\)](#), [Malatesta, Souza e Liu \(2013\)](#) e [Méndez *et al.* \(2018\)](#) os vórtices amplificam a taxa de transferência de calor e o coeficiente de arrasto em relação ao escoamento laminar. Os parâmetros adotados na simulação são os mesmos apresentados no início da [Seção 6.1](#), no entanto, vale ressaltar que o número de Prandtl considerado em todas as simulações é $Pr = 0,72$.

A taxa de transferência de calor é analisada através do número de Stanton médio local na direção transversal e no tempo o qual é definido como:

$$St_x = \frac{Nu_x}{PrRe_x}, \quad \text{com} \quad Nu_x = \frac{\partial T^*}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{x^*}{T_\infty^* - T_0^*},$$

onde Nu_x é o número de Nusselt local. As taxas de transferência de calor obtidas nas simulações são comparados usando as curvas médias do número de Stanton dos escoamentos laminar e turbulento extraídos do livro ([BERGMAN *et al.*, 2011](#)), o qual são definidos:

$$St_{lam} = 0.332Re_x^{-1/2}Pr^{-2/3} \quad \text{e} \quad St_{tur} = 0.0296Re_x^{-1/5}Pr^{-2/3}.$$

O coeficiente de arrasto é definido por:

$$Cf_x = \frac{\tau_w}{0.5\rho^*U_\infty^{*2}} \quad \text{com} \quad \tau_w = \mu \frac{d\tilde{u}}{dy} \Big|_{y=0},$$

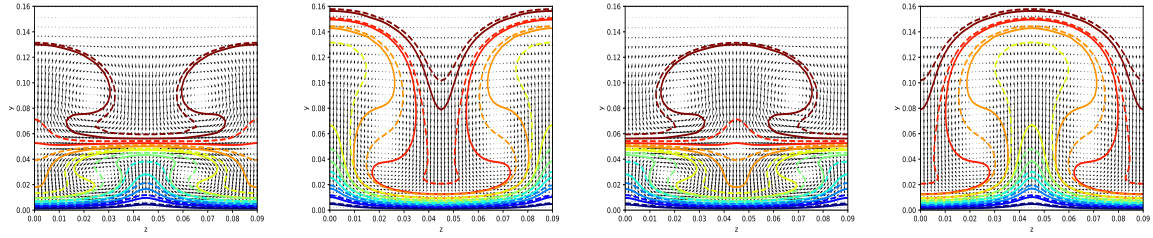
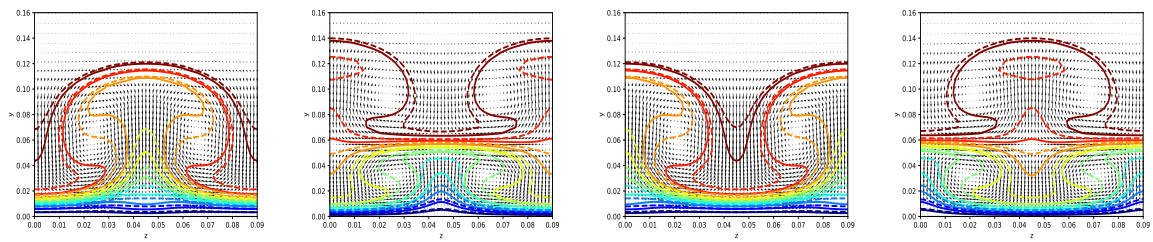
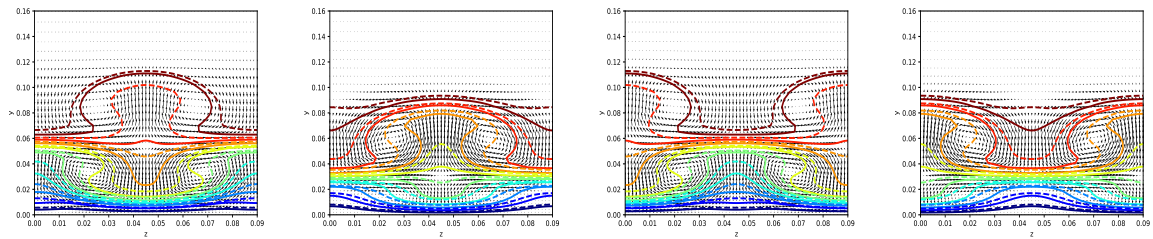
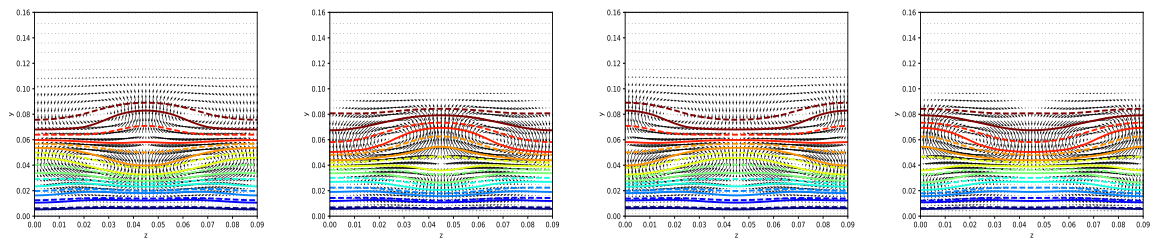
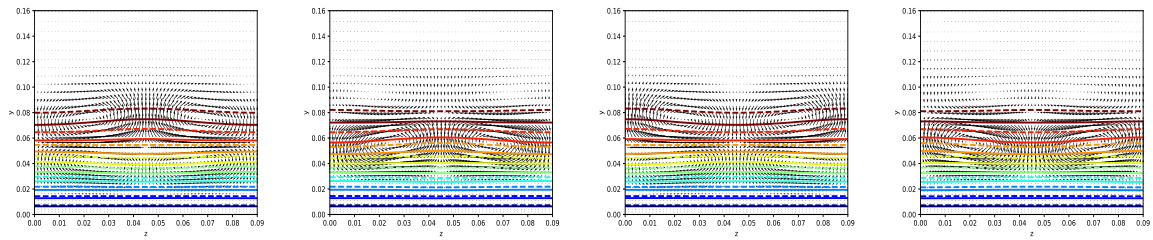
onde τ_w é tensão de cisalhamento na parede. Os resultados das simulações do HOPE são comparados com as curvas de referência dos escoamentos laminar e turbulento definidos como:

$$Cf_{lam} = 0.664Re_x^{-1/2} \quad \text{e} \quad Cf_{tur} = 0.027Re_x^{-1/7}.$$

6.3.1 Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$

A [Figura 39](#) apresenta o campo de velocidade (\tilde{v}, \tilde{w}) e os perfis de velocidade \tilde{u} e de temperatura $\tilde{\theta}$ no plano $z \times y$ considerando $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$, a posição $x = 15,0$ e quatro tempos diferentes para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$. Uma comparação entre as camadas limites hidrodinâmica e térmica sobre a influência dos vórtices de Görtler pode ser observado através desta figura, o qual mostra que a camada limite térmica é um pouco mais espessa que a hidrodinâmica o que é esperado, pois o número de Prandtl é menor que 1,0.

Figura 39 – Os isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y,z)$ (linha contínua) e de temperatura $\tilde{\theta}(y,z)$ (linha tracejada) para $\lambda_z^* = 9.0$ mm na posição $x = 15.0$ e nos tempos $t = 30\pi, 61\pi/2, 31\pi$ e $63\pi/2$ para: (a) $f_{gv}^* = 3$ Hz; (b) $f_{gv}^* = 6$ Hz; (c) $f_{gv}^* = 9$ Hz; (d) $f_{gv}^* = 12$ Hz; e (e) $f_{gv}^* = 15$ Hz.

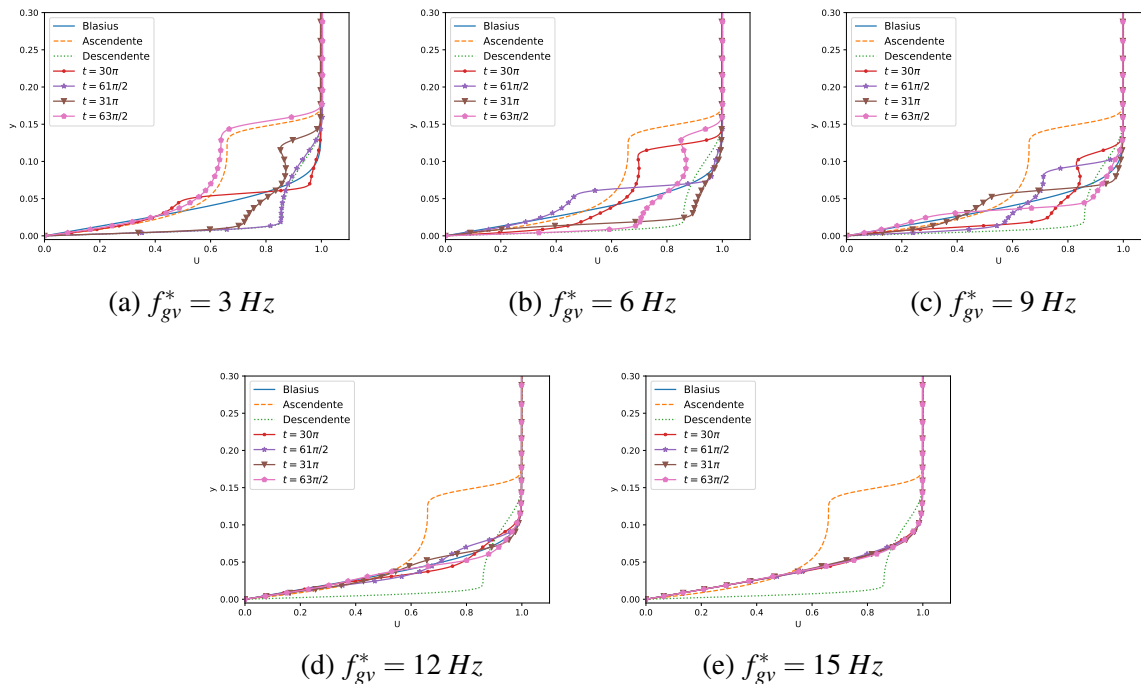
(a) $f_{gv}^* = 3$ Hz.(b) $f_{gv}^* = 6$ Hz.(c) $f_{gv}^* = 9$ Hz.(d) $f_{gv}^* = 12$ Hz.(e) $f_{gv}^* = 15$ Hz.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na [Figura 39](#) é possível ver que para alguns casos a intensidade dos vórtices de Görtler geram distorções tanto nos perfis de velocidade \tilde{u} (linha contínua) quanto nos perfis de temperatura $\tilde{\theta}$ (linhas tracejadas). Estas distorções criam as regiões ascendente e descendente formando também a estrutura cogumelo. Uma característica interessante o qual foi apenas mencionando na [Subseção 6.2.1](#) é a sobreposição dos vórtices não estacionários. Essa sobreposição acontece justamente na transição do sinal da função $\cos(\omega_{gv}t)$, onde os vórtices se descolam da superfície devido à alta velocidade e sobrepõem o final do outro par de vórtices gerado que possui baixa velocidade.

A [Figura 40](#) mostra uma outra forma de visualizar a sobreposição dos vórtices de Görtler. Nela o perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ em $x = 15,2$ e $z = 0,45$ é apresentado para todas as frequências, onde a linha contínua azul é a solução de Blasius, a linha tracejada laranja é a velocidade na região ascendente, a linha pontilhada verde é velocidade na região descendente e as linhas com símbolos são as soluções do HOPE nos tempos $t = 30\pi$, $61\pi/2$, 31π e $63\pi/2$. Nas [Fig. 40a-40d](#), pode-se observar que quando não há sobreposição dos vórtices não estacionários tem-se o perfil de velocidade na região ascendente ou descendente. No entanto, quando os vórtices se sobrepõem o perfil de velocidade tem características de ambas as regiões. A [Figura 40e](#) confirma que para esta configuração o escoamento é estável e que não há distorções na camada limite.

Figura 40 – O perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ em $x = 15,2$, $z = 0,45$ e nos tempos $t = 30\pi$, $61\pi/2$, 31π e $63\pi/2$ para as seguintes frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.



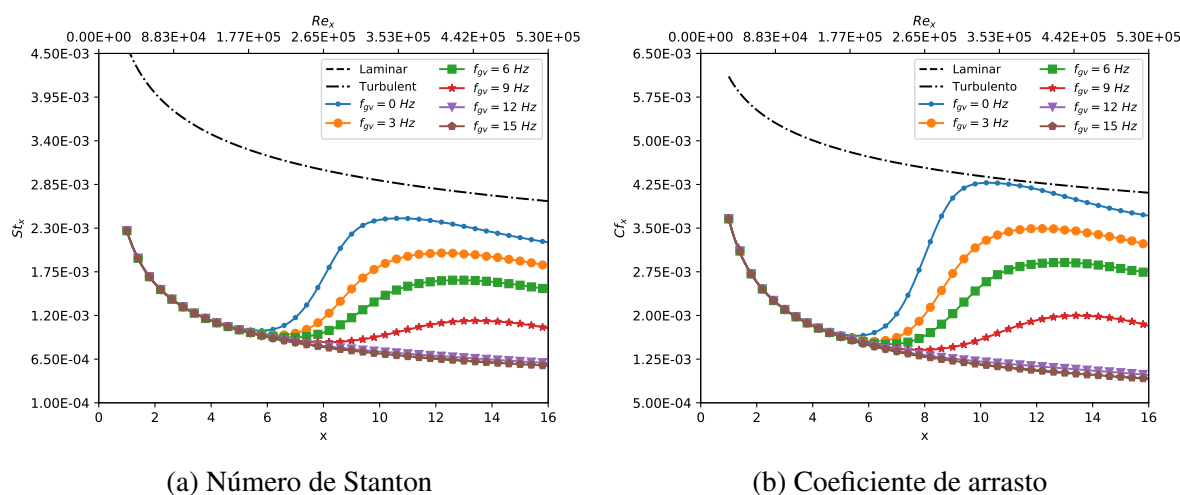
Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 41](#) apresenta os resultados da evolução do número de Stanton e do coeficiente

de arrasto na direção longitudinal. Inicialmente, as soluções de todas as simulações têm o mesmo comportamento da solução do problema laminar, pois ainda não há influência das perturbações. No entanto, tanto a taxa de transferência de calor quanto o coeficiente de arrasto começam a ser influenciado pelas perturbações e pelo início da geração dos vórtices de Görtler a partir de $x \approx 4,5; 5,8; 6,0; 6,2$ e $7,5$ para $f_{gv}^* = 0; 3; 6; 9$ e 12 Hz, respectivamente. Note também que, para $f_{gv}^* = 15$ Hz ambas as propriedades têm o mesmo comportamento da curva de referência laminar.

A Figura 41 mostra também que a taxa de transferência de calor e do coeficiente de arrasto vão alcançando valores menores quando a frequência das perturbações aumenta. Para explicar este decaimento é preciso voltar nos resultados apresentados na Figura 21, onde observa-se que a taxa de crescimento de todos os modos de Fourier diminuem conforme a frequência das perturbações aumenta. Assim, a baixa taxa de crescimento dos modos implica diretamente na fraca intensidade dos vórtices e consequentemente na diminuição da taxa de transferência de calor e do coeficiente de arrasto. Desta forma, conclui-se que para esta configuração as perturbações não estacionárias podem retardar a formação dos vórtices de Görtler e diminuir os efeitos na transferência de calor e na força de arrasto.

Figura 41 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 9,0$ mm.



(a) Número de Stanton

(b) Coeficiente de arrasto

Fonte: Elaborada pelo autor.

As Tabela 1 e Tabela 2 complementam respectivamente a análise da Figura 41a e Figura 41b. Nelas são mostradas exatamente o ponto do domínio onde o valor máximo da propriedade é alcançado no escoamento, o valor máximo da propriedade e uma comparação em porcentagem entre os escoamentos laminar e o transicional e entre o escoamento transicional e o turbulento. No entanto, aqui é considerado apenas a região onde há influência das perturbações ou dos vórtices de Görtler, pois em alguns casos o valor máximo da propriedade é alcançado no início do domínio.

Tabela 1 – Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$.

f_{gv}^*	x	St_x	St_{lam}	St_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	10.72	2.42×10^{-3}	6.93×10^{-4}	2.85×10^{-3}	249.43%	-15.25%
3	12.1	1.98×10^{-3}	6.52×10^{-4}	2.79×10^{-3}	204.41%	-28.80%
6	12.86	1.64×10^{-3}	6.33×10^{-4}	2.75×10^{-3}	159.79%	-40.34%
9	13.42	1.13×10^{-3}	6.19×10^{-4}	2.73×10^{-3}	82.82%	-58.55%
12	7.5	8.39×10^{-4}	8.29×10^{-4}	3.07×10^{-3}	1.28%	-72.65%

Tabela 2 – Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$.

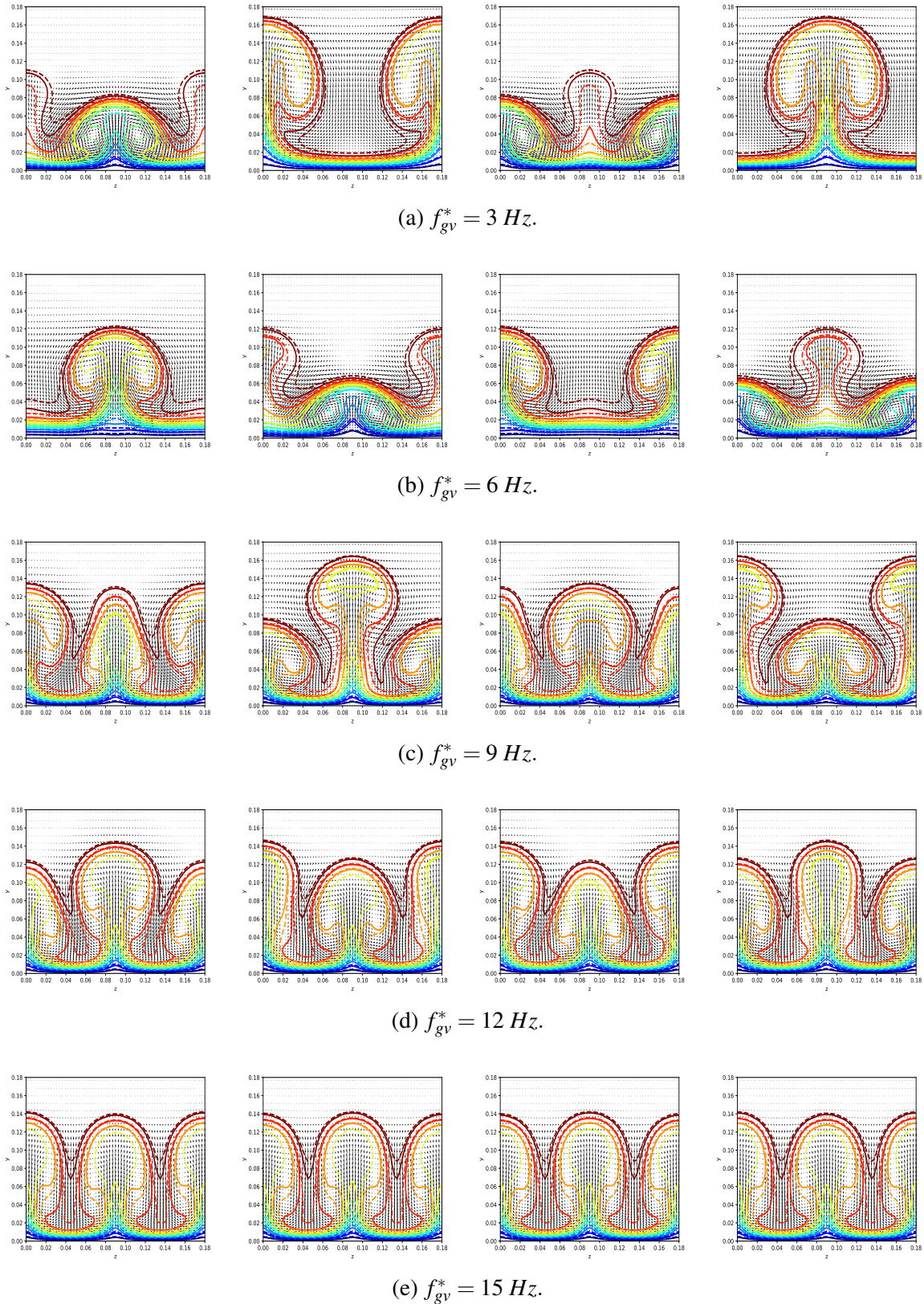
f_{gv}^*	x	Cf_x	Cf_{lam}	Cf_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	10.28	4.27×10^{-3}	1.13×10^{-3}	4.37×10^{-3}	276.02%	-2.21%
3	12.00	3.49×10^{-3}	1.05×10^{-3}	4.28×10^{-3}	231.84%	-18.34%
6	12.84	2.91×10^{-3}	1.01×10^{-3}	4.23×10^{-3}	185.83%	-31.34%
9	13.46	1.99×10^{-3}	9.94×10^{-4}	4.21×10^{-3}	100.83%	-52.56%
12	7.50	1.35×10^{-3}	1.33×10^{-3}	4.57×10^{-3}	1.71%	-70.39%

6.3.2 Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$

A Figura 42 mostra o campo de velocidade (\tilde{v} , \tilde{w}) e os perfis de velocidade \tilde{u} e de temperatura $\tilde{\theta}$ no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, em $x = 14,0$ para as frequências $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz , e na posição $x = 19,0$ para as frequências $f_{gv}^* = 9, 12$ e 15 Hz . Ela também mostra que os vórtices de Görtler têm intensidade suficiente para distorcer ambas as camadas limites para todas as frequências consideradas formando as regiões ascendentes e descendentes diferente do que foi observado para as análises com o comprimento de onda $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$.

A Figura 42a e a Figura 42b apresentam respectivamente os resultados para as frequências $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz em $x = 14,0$, o qual observa-se os vórtices de Görtler não estacionários gerados ao longo do escoamento. Os resultados para as frequências $f_{gv}^* = 9, 12$ e 15 Hz ilustrados respectivamente na Figura 42c, Figura 42d e Figura 42e mostram sempre dois pares de vórtices em $x = 19,0$ e esses pares de vórtices são estacionários, pois apesar de cada par de vórtices possuir intensidades diferentes não há mudança da região ascendente para a descendente em nenhum instante de tempo.

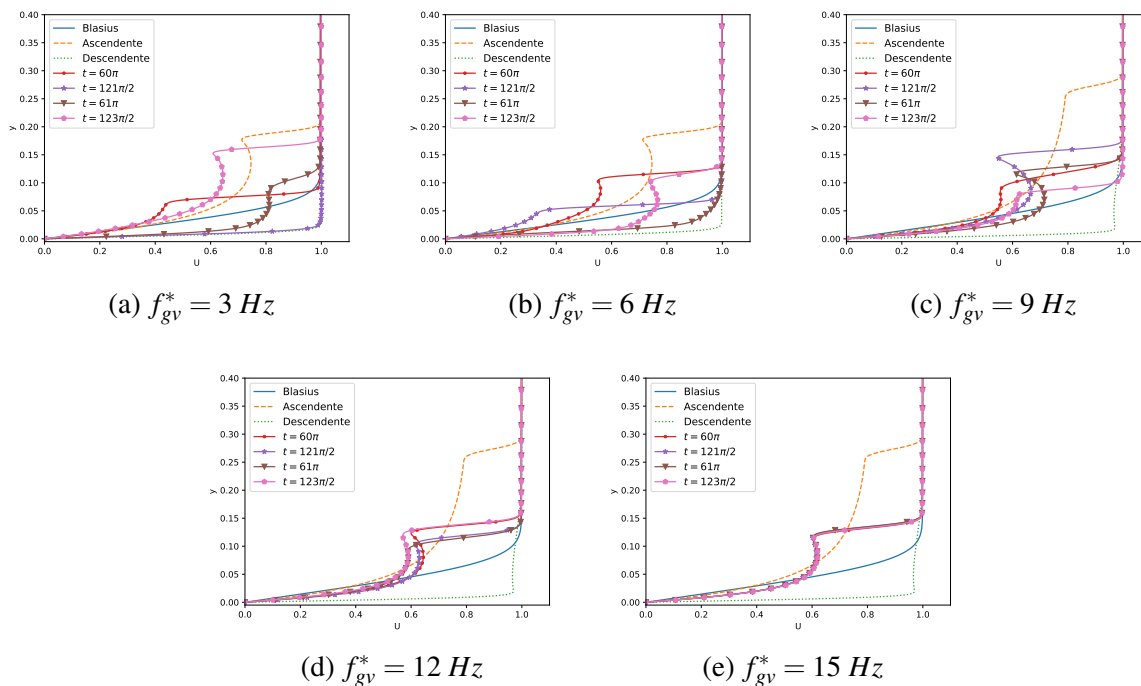
Figura 42 – Isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y, z)$ (linha contínua) e temperatura $\tilde{\theta}(y, z)$ (linha tracejada) para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 60\pi$, $121\pi/2$, 61π e $123\pi/2$ em $x = 14,0$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$; e (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ e na posição $x = 19,0$ para: (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 43 mostra o perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ considerando $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ nos tempos $t = 60\pi$, $121\pi/2$, 61π e $123\pi/2$ para todas as frequências. Nela as curvas de referência do perfil de velocidade de Blasius e do perfil de velocidade nas regiões ascendente e descendente também são mostradas. A Figura 43a e a Figura 43b mostram os perfis de velocidade $\tilde{u}(y)$ no ponto $x = 14,0$ e $z = 0,9$ sobre a influência dos vórtices de Görtler não estacionários, ou seja, em cada instante de tempo considerado, o perfil de velocidade pode estar ou na região ascendente, ou na região descendente, ou na região onde ocorre a sobreposição dos vórtices. As Fig. 43c-43e apresentam os resultados para as últimas três frequências no ponto $x = 19,0$ e $z = 0,9$, onde o perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ tem o comportamento similar do perfil de velocidade na região ascendente em qualquer instante de tempo considerado.

Figura 43 – Perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ nos tempos $t = 60\pi$, $121\pi/2$, 61π e $123\pi/2$ no ponto $x = 14,0$ e $z = 0,9$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$ e no ponto $x = 19,0$ e $z = 0,9$ para as frequências: (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

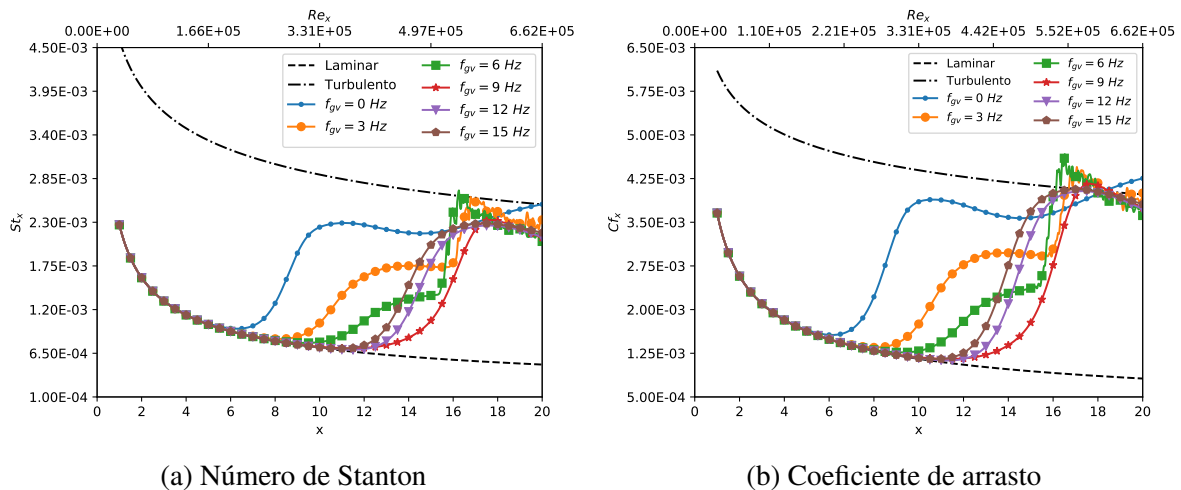
A Figura 44 mostra a evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto ao longo do escoamento na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$. Inicialmente, as soluções possuem o mesmo comportamento do caso laminar até $x \approx 4,5$, $7,0$, $8,0$, $9,5$, $9,9$ e $9,8$ para as frequências $f_{gv}^* = 0, 3, 6, 9, 12$ e 15 Hz , respectivamente, e após a este ponto, as perturbações e os vórtices de Görtler começam a influenciar ambas as camadas limites e conseqüentemente a taxa de transferência de calor e do coeficiente de arrasto. Nesta figura, os resultados apresentam dois comportamentos o qual dependem especificamente do modo de Fourier dominante.

O primeiro comportamento é parecido com do $\lambda_z^* = 9,0 \text{ mm}$ e acontece para as frequên-

cias $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz. Aqui ambas as propriedades analisadas decrescem quando a frequência das perturbações aumenta. Este comportamento acontece, pois a taxa de crescimento do modo dominante $(1, 1)$ é menor quando a frequência das perturbações aumenta implicando assim na baixa taxa de transferência de calor e na força de arrasto. Note também que, os resultados para essas duas frequências apresentam oscilações de alta frequência a partir de $x \approx 15,0$, e essas oscilações são devidos a estabilidade secundária do tipo varicoso que surge no escoamento.

O segundo comportamento acontece para as frequências $f_{gv}^* = 9, 12$ e 15 Hz. Nela os resultados alcançam valores próximos ao caso com perturbação estacionária em uma região do domínio para o número de Stanton, e valores maiores que o caso com perturbação estacionária em uma região para o coeficiente de arrasto. Estes resultados são explicados pelo fato que no ponto onde as propriedades alcançam seus valores máximos o modo dominante é $(0, 2)$ o que implica a geração de dois pares de vórtices estacionários.

Figura 44 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 18,0$ mm.



(a) Número de Stanton

(b) Coeficiente de arrasto

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 3 e a Tabela 4 mostram uma análise quantitativa dos resultados da Figura 44, e elas apresentam respectivamente as mesmas informações da Tabela 1 e da Tabela 2. Os valores das propriedades para cada frequência são obtidos em um intervalo onde a região com o comportamento da curva de referência laminar e a região com as oscilações de alta frequência não são consideradas.

Portanto, conclui-se que, embora os resultados para $\lambda_z^* = 18,0$ mm com as frequências $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz possam reduzir a taxa de transferência de calor e o coeficiente de arrasto, elas também antecipam a instabilidade secundária. Os resultados com as frequências $f_{gv}^* = 9, 12$ e 15 Hz podem retardar o surgimento ou a influência dos vórtices no escoamento, no entanto, na região onde há geração de vórtices de Görtler estacionários a taxa de transferência de calor é equivalente ao caso com perturbação estacionária, e o coeficiente de arrasto podem alcançar

valores maiores que o caso com perturbação estacionária chegando a valores equivalentes ao da curva de referência turbulenta.

Tabela 3 – Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$.

f_{gv}^*	x	St_x	St_{lam}	St_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	19.98	2.52×10^{-3}	5.08×10^{-4}	2.52×10^{-3}	397.03%	0.0%
3	14.16	1.75×10^{-3}	6.03×10^{-4}	2.70×10^{-3}	190.54%	-35.18%
6	14.98	1.37×10^{-3}	5.86×10^{-4}	2.67×10^{-3}	134.69%	-48.51%
9	17.72	2.32×10^{-3}	5.39×10^{-4}	2.58×10^{-3}	331.40%	-10.01%
12	17.6	2.25×10^{-3}	5.41×10^{-4}	2.58×10^{-3}	317.39%	-12.76%
15	17.36	2.28×10^{-3}	5.45×10^{-4}	2.59×10^{-3}	319.03%	-12.05%

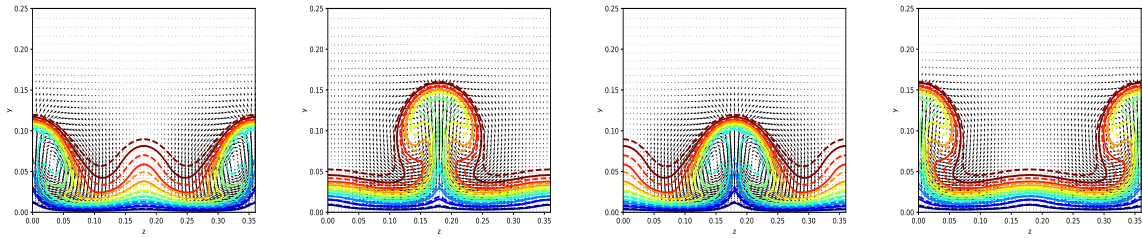
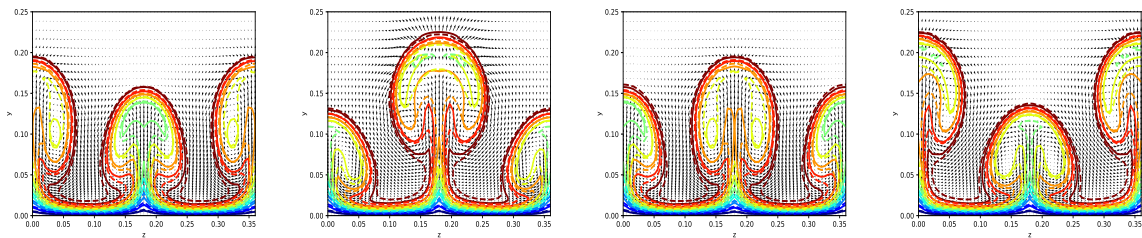
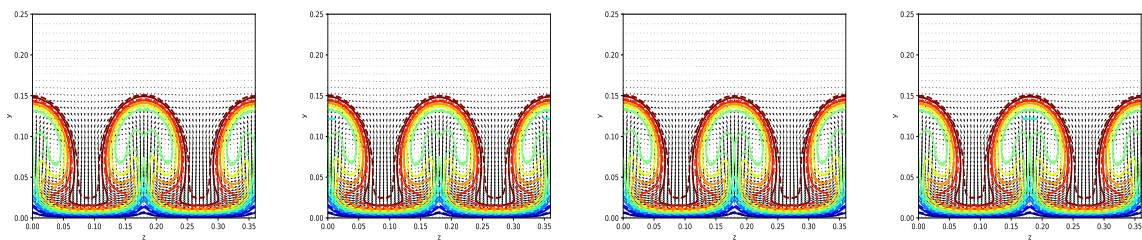
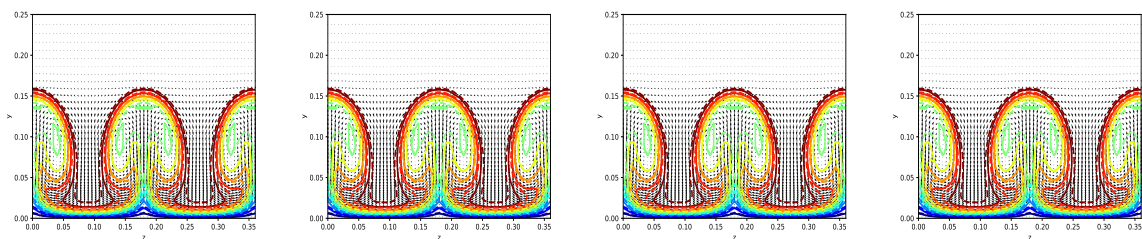
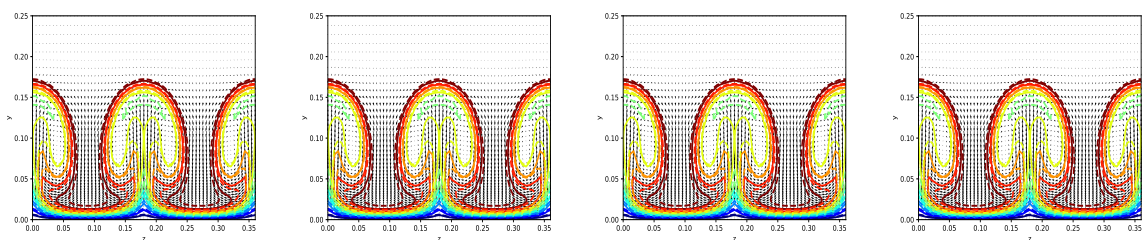
Tabela 4 – Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$.

f_{gv}^*	x	Cf_x	Cf_{lam}	Cf_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	19.98	4.25×10^{-3}	8.16×10^{-4}	3.97×10^{-3}	420.89%	6.83%
3	14.02	2.97×10^{-3}	9.74×10^{-4}	4.18×10^{-3}	205.33%	-28.92%
6	14.98	2.36×10^{-3}	9.42×10^{-4}	4.14×10^{-3}	151.06%	-42.92%
9	17.66	4.15×10^{-3}	8.68×10^{-4}	4.05×10^{-3}	379.00%	2.67%
12	17.32	4.03×10^{-3}	8.76×10^{-4}	4.06×10^{-3}	360.21%	-0.66%
15	17.04	4.06×10^{-3}	8.86×10^{-4}	4.07×10^{-3}	358.76%	-0.10%

6.3.3 Análise do coeficiente de arrasto e da transferência de calor com comprimento transversal $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$

A Figura 45 mostra o campo de velocidade (\tilde{v} , \tilde{w}) e os perfis de velocidade \tilde{u} e de temperatura $\tilde{\theta}$ no plano $z \times y$ para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 150\pi$, $301\pi/2$, 151π e $303\pi/2$, e na posição $x = 16,0$ para as frequências $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, e na posição $x = 25,0$ para as frequências $f_{gv}^* = 6, 9, 12$ e 15 Hz . Nesta figura o campo de velocidade ilustra os vórtices de Görtler e os perfis de velocidade e de temperatura apresentam a influência dos vórtices na distorção das camadas limites. Nela observa-se que a camada limite térmica é um pouco mais espessa que a hidrodinâmica como acontece nos dois casos anteriores, e para todas as frequências os vórtices de Görtler gerados possuem força suficiente para distorcer as camadas limites criando as regiões ascendente e descendente.

Figura 45 – Isocontornos dos perfis de velocidade $\tilde{u}(y, z)$ (linhas contínuas) e temperatura $\tilde{\theta}(y, z)$ (linhas tracejadas) para $\lambda_z = 36,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 150\pi$, $301\pi/2$, 151π e $303\pi/2$, e na posição $x = 16,0$ para a frequência: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e na posição $x = 25,0$ para as frequências: (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$; e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.

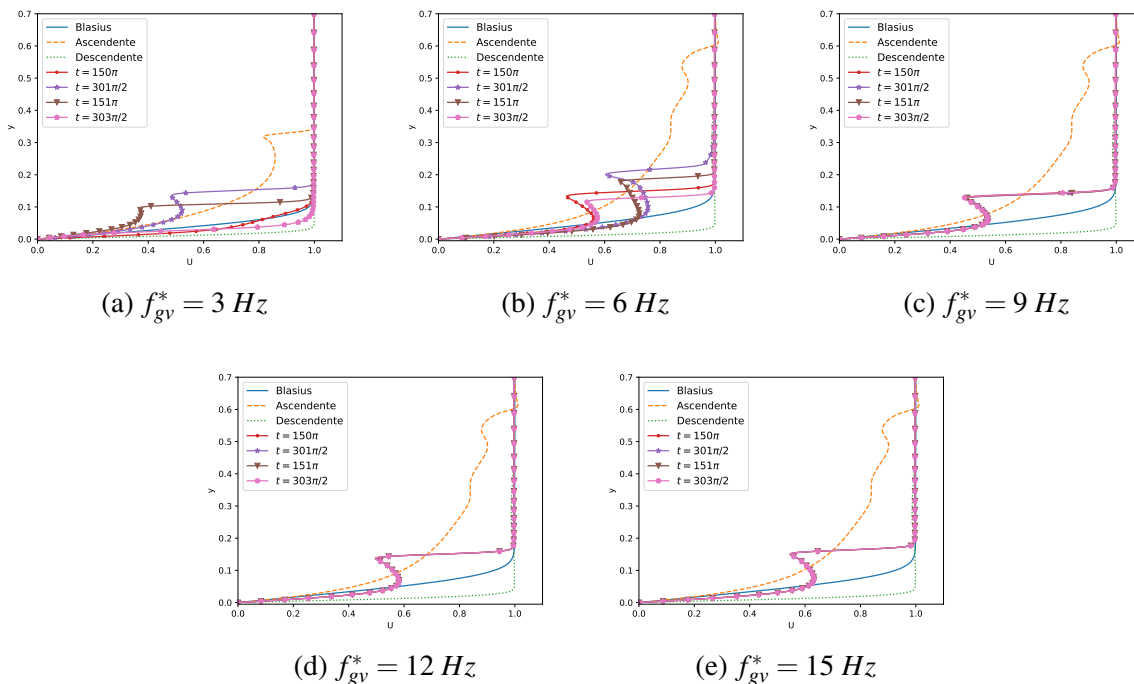
(a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$.(b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$.(c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$.(d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$.(e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 45a](#) apresenta o desenvolvimento dos vórtices de Görtler não estacionários ao longo do escoamento para a frequência $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$, em outras palavras, ela mostra transição da região ascendente para descendente e vice-versa. As [Fig. 45b - 45e](#) ilustram os dois pares de vórtices de Görtler estacionários gerados pelo modo dominante $(0, 2)$ para as frequências $f_{gv}^* = 6, 9, 12$ e 15 Hz , respectivamente. Note que, para a frequência $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$, apesar dos vórtices serem estacionários cada par de vórtices possuem intensidades diferentes.

Os perfis de velocidade $\tilde{u}(y)$ considerando $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$, nos tempos $t = 150\pi, 301\pi/2, 151\pi$ e $303\pi/2$ para todas as frequências são mostradas na [Figura 46](#). Nela são plotados também o perfil de velocidade de Blasius e o perfil de velocidade na região ascendente e descendente para auxiliar na comparação dos resultados. A [Figura 46a](#) mostra os perfis de velocidade \tilde{u} sobre a influência dos vórtices de Görtler instáveis para a frequência $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ no ponto $x = 16,0$ e $z = 0,18$, ou seja, o perfil de velocidade ou está na região ascendente ou na região descendente dependendo do instante de tempo considerado. As [Fig. 46b-46e](#) apresentam respectivamente os perfis de velocidade $u(y)$ para as frequências $f_{gv}^* = 6; 9; 12$ e 15 Hz na posição $x = 25,0$ e $z = 0,18$, onde os perfis de velocidade têm apenas o comportamento da região ascendente independente do instante de tempo considerado.

Figura 46 – Perfil de velocidade $\tilde{u}(y)$ nos tempos $t = 150\pi, 301\pi/2, 151\pi$ e $303\pi/2$ no ponto $x = 16,0$ e $z = 0,18$ para as frequências: (a) $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e no ponto $x = 25,0$ e $z = 0,18$ para as frequências: (b) $f_{gv}^* = 6 \text{ Hz}$; (c) $f_{gv}^* = 9 \text{ Hz}$; (d) $f_{gv}^* = 12 \text{ Hz}$ e (e) $f_{gv}^* = 15 \text{ Hz}$.

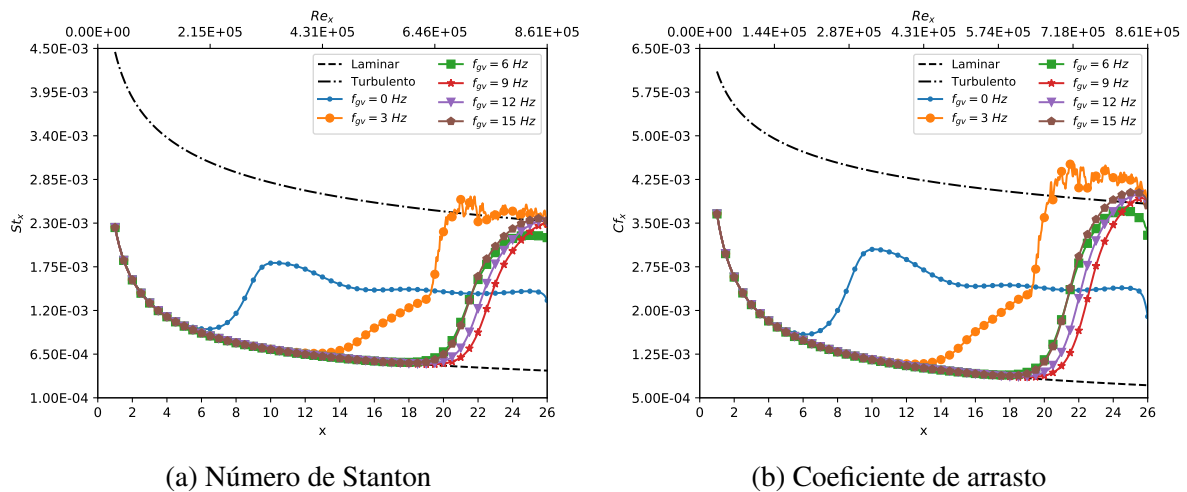


Fonte: Elaborada pelo autor.

A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto ao longo do escoamento para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ são mostrados respectivamente na [Figura 47a](#) e na [Figura 47b](#). Nela pode-se

observar os dois tipos de comportamentos já analisados no caso com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$. O primeiro comportamento acontece para a frequência $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ e ele é similar ao caso com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ e $f_{gv}^* = 3$ e 6 Hz , ou seja, ambas as propriedades analisadas alcançam valores menores que o caso com perturbação estacionária, e ele apresenta oscilações de alta frequências no final do escoamento devido à instabilidade secundária do tipo varicoso. O segundo comportamento é parecido com o caso $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ e $f_{gv}^* = 9, 12$ e 15 Hz , e ele ocorre para as frequências $f_{gv}^* = 6, 9, 12$ e 15 Hz , onde tanto o número de Stanton quanto o coeficiente de arrasto alcançam valores próximo ou maiores que a curva de referência turbulenta.

Figura 47 – A evolução do número de Stanton e do coeficiente de arrasto na direção longitudinal para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$.



(a) Número de Stanton

(b) Coeficiente de arrasto

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a [Tabela 5](#) e [Tabela 6](#) complementam a análise feita da [Figura 47](#) apresentando o ponto do domínio onde o valor máximo da propriedade é alcançado, o valor máximo da propriedade e uma comparação em porcentagem entre os escoamentos laminar e o transicional e entre o escoamento transicional e o turbulento.

As conclusões para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$ são parecidas ao do caso com $\lambda_z^* = 18,0 \text{ mm}$ para os dois comportamentos. O primeiro comportamento acontece para $f_{gv}^* = 3 \text{ Hz}$ que embora há uma pequena redução na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto, ela é mais suscetível à instabilidade secundária. Nesse caso ainda, observa-se um grande retardamento na geração dos vórtices de Görtler não estacionários. O segundo comportamento acontece para o restante das frequências o qual observa-se que o retardamento da geração dos vórtices é ainda maior que o do primeiro comportamento, mas na região onde eles são gerados, os valores de ambas as propriedades estão próximas ou maiores ao da curva de referência turbulenta.

Tabela 5 – Comparação do número de Stanton entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$.

f_{gv}^*	x	St_x	St_{lam}	St_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	10.24	1.79×10^{-3}	7.05×10^{-4}	2.79×10^{-3}	155.10%	-35.69%
3	19.00	1.33×10^{-3}	5.18×10^{-4}	2.47×10^{-3}	158.14%	-45.92%
6	25.22	2.14×10^{-3}	4.49×10^{-4}	2.33×10^{-3}	378.10%	-8.04%
9	25.86	2.29×10^{-3}	4.43×10^{-4}	2.325×10^{-3}	416.94%	-1.31%
12	25.80	2.33×10^{-3}	4.44×10^{-4}	2.326×10^{-3}	424.96%	0.28%
15	25.68	2.36×10^{-3}	4.45×10^{-4}	2.328×10^{-3}	430.03%	1.39%

Tabela 6 – Comparação do coeficiente de arrasto entre os escoamentos laminar e transicional e entre o transicional e turbulento no valor máximo alcançado pelo escoamento com os vórtices de Görtler para $\lambda_z^* = 36,0 \text{ mm}$.

f_{gv}^*	x	Cf_x	Cf_{lam}	Cf_{tur}	Laminar-GV	GV-Turbulento
0	10.14	3.05×10^{-3}	1.14×10^{-3}	4.38×10^{-3}	166.31%	-30.40%
3	18.84	2.26×10^{-3}	8.40×10^{-4}	4.01×10^{-3}	169.71%	-43.50%
6	24.68	3.71×10^{-3}	7.34×10^{-4}	3.86×10^{-3}	405.60%	-3.83%
9	25.64	3.93×10^{-3}	7.20×10^{-4}	3.84×10^{-3}	445.47%	2.34%
12	25.48	3.98×10^{-3}	7.22×10^{-4}	3.843×10^{-3}	451.89%	3.77%
15	25.22	4.02×10^{-3}	7.27×10^{-4}	3.849×10^{-3}	453.50%	4.67%

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos para $\lambda_z^* = 9,0; 18,0$ e $36,0 \text{ mm}$ e para $f_{gv}^* = 3; 6; 9; 12$ e 15 Hz . Os resultados foram analisados através da evolução e da estrutura dos vórtices de Görtler estacionários e não estacionários e pela influência que esses vórtices podem causar na distorção da camada limite. Além disso, foi estudada a influência desses vórtices na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto ao longo da superfície côncava. As considerações finais dessa tese e os possíveis trabalhos futuros serão apresentados no próximo capítulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese investigou-se a evolução, a estrutura e a influência das perturbações não estacionárias em um problema de camada limite sobre uma superfície côncava. Esta investigação foi realizada por meio de simulação numérica com um código de alta ordem (HOPE).

Na investigação considerou-se três comprimentos de onda na direção transversal $\lambda_z^* = 9,0; 18,0$ e $36,0$ *mm* e cinco frequências temporais $f_{gv}^* = 3; 6; 9; 12$ e 15 *Hz*. Na primeira parte do trabalho, analisou-se a evolução da amplitude máxima das perturbações ao longo do escoamento e chegou-se as seguintes conclusões. As perturbações não estacionárias têm um efeito estabilizador no escoamento quando a frequência aumenta para $\lambda_z^* = 9,0$ *mm*, em outras palavras, a taxa de crescimento das amplitudes de todos os modos diminuem conforme a frequência das perturbações aumenta até o escoamento se tornar estável como é o caso para $f_{gv}^* = 15$ *Hz*. Além disso, pôde-se observar através da isosuperfície e dos isocontornos a sobreposição dos vórtices de Görtler não estacionários na região não linear e a região de sobreposição dos vórtices cresce conforme a frequência aumenta.

Ainda no desenvolvimento das perturbações não estacionárias, as conclusões para os comprimentos de onda $\lambda_z^* = 18,0$ e $36,0$ *mm* são que a taxa de crescimento do modo fundamental $(1, 1)$ decresce quando a frequência aumenta, e para o modo subharmônico estacionário $(0, 2)$ que representa os comprimentos de onda $\lambda_z^* = 9,0$ e $18,0$ *mm* a taxa de crescimento cresce quando a frequência aumenta. Por essa razão, o escoamento pode ter diferentes modos dominantes de acordo com a frequência da perturbação, como por exemplo, o modo $(1, 1)$ domina o escoamento para $\lambda_z^* = 18,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 3$ e 6 *Hz* e para $\lambda_z^* = 36,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 3$ *Hz*, o modo $(0, 2)$ domina o escoamento para $\lambda_z^* = 18,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 15$ *Hz* e para $\lambda_z^* = 36,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 9; 12$ e 15 *Hz* e uma mistura dos modos dominantes $(1, 1)$ e $(0, 2)$ pode ser vista para $\lambda_z^* = 18,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 9$ e 12 *Hz* e para $\lambda_z^* = 36,0$ *mm* com $f_{gv}^* = 6$ *Hz*. Além disso, conclui-se que a instabilidade secundária é mais suscetível para as configurações onde o modo $(1, 1)$ é dominante

e quando o modo (0,2) possuem a mesma ordem de magnitude do (1,1).

A segunda parte do trabalho analisou a influência dos vórtices estacionários e não estacionários na taxa de transferência de calor e no coeficiente de arrasto e concluiu-se que quando o modo fundamental (1,1) domina o escoamento ambas as propriedades decrescem quando a frequência aumenta na região da instabilidade primária (apenas vórtices de Görtler) tomando como referência o caso $f_{gv}^* = 0/Hz$ e as propriedades alcançam valores próximo ao caso turbulento na região de instabilidade secundária e quando o modo (0,2) é dominante ambas as propriedades alcançam valores próximos ao caso estacionário referente ao comprimento de onda do seu subharmônico. Esses valores em alguns casos podem alcançar e até ultrapassar a curva de referência do caso turbulento. Além disso, concluiu-se as perturbações não estacionárias retarda a geração de vórtices de Görtler e a frequência que mais retarda a geração dos vórtices de Görtler é $f_{gv}^* = 9 Hz$ para ambos os comprimentos de onda $\lambda_z^* = 18,0$ e $36,0 mm$.

As sugestões para a continuidade desta pesquisa são:

- Estudo da estabilidade secundária dos vórtices de Görtler estacionários/não estacionários;
- Investigar a influência do gradiente de pressão quando são inseridas as perturbações não estacionárias;
- Investigar a influência das perturbações não estacionárias em problemas reais, como por exemplo, em pá de turbina;
- Investigar a interação do vórtices de Görtler e as ondas de Tollmien-Schlichting;
- Adaptar o código para investigar outros tipos de vórtices em camada limite, como por exemplo, os vórtices de escoamento cruzados em camada limite 3D.;

REFERÊNCIAS

BECKWITH, I. E.; HOLLEY, B. B. Görtler vortices and transition in wall boundary layers of two mach 5 nozzles. 1981. Citado na página 39.

BERGMAN, T. L.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; LAVINE, A. S. **Fundamentals of heat and mass transfer**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado na página 88.

BIPPES, H. Experimental study of the laminar-turbulent transition of a concave wall in a parallel flow. 1978. Citado nas páginas 40 e 55.

BIPPES, H.; GÖRTLER, H. Dreidimensionale störungen in der grenzschicht an einer konkaven wand. **Acta Mechanica**, Springer, v. 14, n. 4, p. 251–267, 1972. Citado na página 42.

BOIKO, A.; IVANOV, A.; KACHANOV, Y. S.; MISCHENKO, D. Investigation of weakly-nonlinear development of unsteady görtler vortices. **Thermophysics and Aeromechanics**, Springer, v. 17, n. 4, p. 455, 2010. Citado nas páginas 15, 43, 68 e 69.

_____. Steady and unsteady görtler boundary-layer instability on concave wall. **European Journal of Mechanics-B/Fluids**, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 61–83, 2010. Citado nas páginas 43 e 60.

BOIKO, A.; IVANOV, A.; KACHANOV, Y. S.; MISCHENKO, D.; NECHEPURENKO, Y. M. Excitation of unsteady görtler vortices by localized surface nonuniformities. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, Springer, v. 31, n. 1, p. 67–88, 2017. Citado na página 44.

BOIKO, A. V.; DOVGAL, A. V.; GREK, G. R.; KOZLOV, V. V. **Physics of Transitional Shear Flows: Instability and Laminar–Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 98. Citado nas páginas 36 e 38.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; JR, A. T. *et al.* **Spectral methods in fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 55.

CATHALIFAUD, P.; LUCHINI, P. Optimal control by blowing and suction at the wall of algebraically growing boundary layer disturbances. In: **Laminar-Turbulent Transition**. [S.l.]: Springer, 2000. p. 307–312. Citado na página 43.

CHEN, X.; HUANG, G.; LEE, C. Hypersonic boundary layer transition on a concave wall: stationary görtler vortices. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 865, p. 1–40, 2019. Citado na página 42.

CLAUSER, M.; CLAUSER, F. The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer. 1937. Citado na página 38.

DAY, H.; HERBERT, T.; SARIC, W. Comparing local and marching analyses of görtler instability. **AIAA journal**, v. 28, n. 6, p. 1010–1015, 1990. Citado na página 42.

- DEAN, W. R. Fluid motion in a curved channel. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 121, n. 787, p. 402–420, 1928. Citado nas páginas 30 e 38.
- DENIER, P. H. J. P.; SEDDOUGUI, S. O. On the receptivity problem for görtler vortices: vortex motions induced by wall roughness. **Phil. Trans. R. Soc. Lond. A**, The Royal Society, v. 335, n. 1636, p. 51–85, 1991. Citado na página 60.
- DUBIEF, Y.; DELCAYRE, F. On coherent-vortex identification in turbulence. **Journal of turbulence**, Taylor & Francis, v. 1, n. 1, p. 011–011, 2000. Citado na página 72.
- DUCOIN, A.; SHADLOO, M. S.; ROY, S. Direct numerical simulation of flow instabilities over savonius style wind turbine blades. **Renewable energy**, Elsevier, v. 105, p. 374–385, 2017. Citado na página 39.
- EULER, C. **Cluster Euler**. 2015. Disponível em: <<http://www.cemeai.icmc.usp.br/Euler/index.html>>. Acesso em: 01/06/2020. Citado na página 71.
- FERNANDES, L. M.; MENDONÇA, M. T. d. Effect of pressure gradient on the development of görtler vortices. **Journal of Aerospace Technology and Management**, SciELO Brasil, v. 11, 2019. Citado na página 42.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 58.
- FINNIS, M.; BROWN, A. The linear growth of görtler vortices. **International journal of heat and fluid flow**, Elsevier, v. 18, n. 4, p. 389–399, 1997. Citado na página 42.
- FLORYAN, J. Görtler instability of boundary layers over concave and convex walls. **The Physics of fluids**, American Institute of Physics, v. 29, n. 8, p. 2380–2387, 1986. Citado na página 38.
- FLORYAN, J. M.; SARIC, W. S. Stability of görtler vortices in boundary layers. **AIAA journal**, v. 20, n. 3, p. 316–324, 1982. Citado nas páginas 40, 42, 47 e 48.
- _____. Effects of suction on the görtler instability of boundary layers. **AIAA journal**, v. 21, n. 12, p. 1635–1639, 1983. Citado na página 41.
- _____. Wavelength selection and growth of görtler vortices. **AIAA journal**, v. 22, n. 11, p. 1529–1538, 1984. Citado na página 42.
- GOLDSTEIN, M.; HULTGREN, L. S. Boundary-layer receptivity to long-wave free-stream disturbances. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 21, n. 1, p. 137–166, 1989. Citado na página 42.
- GÖRTLER, H. Instabilität laminarer grenzsichten an konkaven wänden gegenüber gewissen dreidimensionalen störungen. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 21, n. 4, p. 250–252, 1941. Citado nas páginas 30, 38 e 39.
- GOULPIÉ, P.; KLINGMANN, B. G.; BOTTARO, A. Görtler vortices in boundary layers with streamwise pressure gradient: linear theory. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 8, n. 2, p. 451–459, 1996. Citado na página 42.

GUPTA, M. M.; KOUATCHOU, J.; ZHANG, J. Comparison of second-and fourth-order discretizations for multigrid poisson solvers. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 132, n. 2, p. 226–232, 1997. Citado na página 59.

HALL, P. On the non-linear evolution of görtler vortices in non-parallel boundary layers. **IMA Journal of Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 29, n. 2, p. 173–196, 1982. Citado na página 42.

_____. The linear development of görtler vortices in growing boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 130, p. 41–58, 1983. Citado nas páginas 41 e 42.

_____. Görtler vortices in growing boundary layers: the leading edge receptivity problem, linear growth and the nonlinear breakdown stage. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 37, n. 2, p. 151–189, 1990. Citado na página 42.

HALL, P.; FU, Y. On the görtler vortex instability mechanism at hypersonic speeds. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, Springer, v. 1, n. 3, p. 125–134, 1989. Citado na página 42.

HALL, P.; MALIK, M. The growth of görtler vortices in compressible boundary layers. **Journal of engineering mathematics**, Springer, v. 23, n. 3, p. 239–251, 1989. Citado na página 42.

HÄMMERLIN, G. Über das eigenwertproblem der dreidimensionalen instabilität laminarer grenzschichten an konkaven wänden. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, JSTOR, v. 4, p. 279–321, 1955. Citado na página 41.

HENSON, V. E. **Multigrid methods for nonlinear problems: an overview**. [S.l.], 2002. Citado na página 59.

HERBERT, T. On the stability of the boundary layer along a concave wall. **ArMeS**, v. 28, n. 5-6, p. 1039–1055, 1976. Citado na página 42.

_____. Secondary instability of boundary layers. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 20, n. 1, p. 487–526, 1988. Citado na página 36.

ITO, A. The generation and breakdown of longitudinal vortices along a concave wall. **J. Japan Soc. Aero. Space Sci**, v. 28, p. 327–333, 1980. Citado na página 42.

IURCHENKO, N.; BABENKO, V.; KOZLOV, L. Experimental investigation of the görtler instability in boundary layers. **stuf**, p. 50–59, 1979. Citado na página 42.

IVANOV, A.; KACHANOV, Y.; MISCHENKO, D. Generation of nonstationary görtler vortices by localized surface nonuniformities. receptivity coefficients. **Thermophysics and Aeromechanics**, Springer, v. 19, n. 4, p. 523–539, 2012. Citado nas páginas 43 e 44.

JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 285, p. 69–94, 1995. Citado na página 72.

KERSCHEN, E. J. Boundary layer receptivity theory. 1990. Citado na página 42.

KLOKER, M.; KONZELMANN, U.; FASEL, H. Outflow boundary conditions for spatial navier-stokes simulations of transition boundary layers. **AIAA journal**, v. 31, n. 4, p. 620–628, 1993. Citado nas páginas 51 e 53.

- KUNDU, P. K. **Fluid Mechanics**. [S.l.]: Academic Press, Inc, 1990. Citado na página 54.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 2001. Citado na página 34.
- LEIB, S.; WUNDROW, D. W.; GOLDSTEIN, M. Effect of free-stream turbulence and other vortical disturbances on a laminar boundary layer. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 380, p. 169–203, 1999. Citado na página 43.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. Citado na página 62.
- LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. [S.l.]: Siam, 2007. v. 98. Citado na página 62.
- LI, F.; MALIK, M. R. Fundamental and subharmonic secondary instabilities of görtler vortices. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 297, p. 77–100, 1995. Citado nas páginas 36, 43 e 72.
- LIEPMANN, H. W. **Investigations on laminar boundary-layer stability and transition on curved boundaries**. [S.l.], 1943. Citado na página 42.
- LIU, J. Nonlinear instability of developing streamwise vortices with applications to boundary layer heat transfer intensification through an extended reynolds analogy. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society London, v. 366, n. 1876, p. 2699–2716, 2008. Citado na página 42.
- LIU, J.; SABRY, A. Concentration and heat transfer in nonlinear görtler vortex flow and the analogy with longitudinal momentum transfer. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 432, n. 1884, p. 1–12, 1991. Citado na página 42.
- LIU, J. T.; LEE, K. Heat transfer in a strongly nonlinear spatially developing longitudinal vorticity system. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 7, n. 3, p. 559–599, 1995. Citado na página 42.
- LU, L.; AGOSTINI, L.; RICCO, P.; PAPADAKIS, G. Optimal state feedback control of streaks and görtler vortices induced by free-stream vortical disturbances. In: **IEEE. 2014 UKACC International Conference on Control (CONTROL)**. [S.l.], 2014. p. 214–219. Citado na página 43.
- MALATESTA, V.; ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F. d. Heat transfer enhancement via görtler flow with spatial numerical simulation. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, Emerald Publishing Limited, v. 27, n. 1, p. 189–209, 2017. Citado nas páginas 42 e 58.
- MALATESTA, V.; SOUZA, L. F. d.; LIU, J. T. Influence of görtler vortices spanwise wavelength on heat transfer rates. **Computational Thermal Sciences: An International Journal**, Begel House Inc., v. 5, n. 5, 2013. Citado nas páginas 42 e 88.
- MANGALAM, S.; DAGENHART, J.; MEYERS, J.; HEPNER, T. The görtler instability on an airfoil. In: **23rd Aerospace Sciences Meeting**. [S.l.: s.n.], 1985. p. 491. Citado na página 42.

MARENISI, E. **Nonlinear unsteady disturbances generated by the interaction of free-stream vorticity with laminar boundary layer**. Tese (Doutorado) — University of Sheffield, <http://etheses.whiterose.ac.uk/id/eprint/15471>, 11 2016. Citado nas páginas 15, 66 e 67.

MARENISI, E.; RICCO, P. Growth and wall-transpiration control of nonlinear unsteady görtler vortices forced by free-stream vortical disturbances. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 29, n. 11, p. 114106, 2017. Citado nas páginas 15, 43, 65 e 66.

MARENISI, E.; RICCO, P.; WU, X. Nonlinear unsteady streaks engendered by the interaction of free-stream vorticity with a compressible boundary layer. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 817, p. 80–121, 2017. Citado na página 42.

MARQUES, L. F. **Simulação numérica de um escoamento transicional sobre uma superfície côncava de curvatura variável com transferência de calor**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, doi:10.11606/T.55.2019.tde-04012019-082307, 10 2018. Citado na página 58.

MCCORMACK, P. D.; WELKER, H.; KELLEHER, M. Taylor-görtler vortices and their effect on heat transfer. 1970. Citado na página 42.

MCKEE, R. J. **An experimental study of Taylor-Goertler vortices in a curved rectangular channel**. Tese (Doutorado) — Monterey, California. Naval Postgraduate School, 1973. Citado na página 42.

MEITZ, H. L. **Numerical investigation of suction in a transitional flat-plate boundary layer**. Tese (Doutorado), 1996. Citado na página 61.

MÉNDEZ, M.; SHADLOO, M. S.; HADJADJ, A.; DUCOIN, A. Boundary layer transition over a concave surface caused by centrifugal instabilities. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 171, p. 135–153, 2018. Citado na página 88.

MITSUDHARMADI, H.; WINOTO, S.; SHAH, D. Development of boundary-layer flow in the presence of forced wavelength görtler vortices. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 16, n. 11, p. 3983–3996, 2004. Citado na página 43.

_____. Development of most amplified wavelength görtler vortices. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 18, n. 1, p. 014101, 2006. Citado na página 40.

MYOSE, R. Y.; BLACKWELDER, R. F. Control of streamwise vortices using selective suction. **AIAA journal**, v. 33, n. 6, p. 1076–1080, 1995. Citado na página 43.

PACHECO, P. **Parallel programming with MPI**. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1997. Citado na página 63.

RAGAB, S. A.; NAYFEH, A. H. Görtler instability. **The Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 24, n. 8, p. 1405–1417, 1981. Citado nas páginas 41 e 42.

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 57–72, 1879. Citado nas páginas 29 e 33.

_____. On the dynamics of revolving fluids. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, JSTOR, v. 93, n. 648, p. 148–154, 1917. Citado nas páginas 30 e 37.

REED, H. L.; SARIC, W. S.; ARNAL, D. Linear stability theory applied to boundary layers. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 28, n. 1, p. 389–428, 1996. Citado na página 36.

RESHOTKO, E. Transient growth: a factor in bypass transition. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, v. 13, n. 5, p. 1067–1075, 2001. Citado nas páginas 35 e 36.

REYNOLDS, O. Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Philosophical Transactions of the Royal society of London**, The Royal Society London, n. 174, p. 935–982, 1883. Citado nas páginas 29, 33 e 34.

ROGENSKI, J.; PETRI, L.; SOUZA, L. de. Effects of parallel strategies in the transitional flow investigation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 37, n. 3, p. 861–872, 2015. Citado na página 59.

ROGENSKI, J.; SOUZA, L. D.; FLORYAN, J. Influence of pressure gradients on the evolution of the görtler instability. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, p. 2916–2921, 2016. Citado na página 42.

ROGENSKI, J. K. **Desenvolvimento e otimização de um código paralelizado para simulação de escoamentos incompressíveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, doi:10.11606/D.55.2011.tde-12052011-145111, 6 2011. Acesso em: 2019-08-16. Citado na página 59.

ROGENSKI, J. K. **Influência do gradiente de pressão na transição em escoamento sobre superfície côncavas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, doi:10.11606/T.55.2016.tde-04042016-164322, 12 2015. Citado nas páginas 58 e 61.

SARIC, W. S. Görtler vortices. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 26, n. 1, p. 379–409, 1994. Citado na página 37.

SARIC, W. S.; REED, H. L.; KERSCHEN, E. J. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 34, n. 1, p. 291–319, 2002. Citado nas páginas 35, 36 e 42.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-layer theory**. [S.l.]: Springer, 2016. Citado na página 51.

SCHULTZ, M. P.; VOLINO, R. J. Effects of concave curvature on boundary layer transition under high freestream turbulence conditions. **J. Fluids Eng.**, v. 125, n. 1, p. 18–27, 2003. Citado na página 42.

SESCU, A.; AFSAR, M. Hampering görtler vortices via optimal control in the framework of nonlinear boundary region equations. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 848, p. 5–41, 2018. Citado na página 43.

SESCU, A.; PENDYALA, R.; HAYWOOD, J.; VISBAL, M. R. A study of the impact of wide-range roughness elements on gortler instabilities. In: **53rd AIAA aerospace sciences meeting**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 0275. Citado na página 43.

SMITH, A. On the growth of taylor-görtler vortices along highly concave walls. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 13, n. 3, p. 233–262, 1955. Citado nas páginas 41 e 42.

SMITH, S. T.; HAJ-HARIRI, H. Görtler vortices and heat transfer: A weakly nonlinear analysis. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, American Institute of Physics, v. 5, n. 11, p. 2815–2825, 1993. Citado na página 42.

SOUZA, L. F. On the odd and even secondary instabilities of görtler vortices. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, Springer, v. 31, n. 4, p. 405–425, 2017. Citado nas páginas 15, 43, 71, 72 e 73.

SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F.; KLOKER, M. Seeding of görtler vortices through a suction and blowing strip. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 26, n. 3, p. 269–279, 2004. Citado na página 60.

SOUZA, L. F. d.; MENDONÇA, M. T. d.; MEDEIROS, M. A. F. d. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 565–582, 2005. Citado na página 57.

SOUZA, L. F. de. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado), 2003. Citado nas páginas 52, 59, 60 e 61.

SOUZA, L. F. de. Numerical evaluation of time integration schemes in a disturbed flow simulation. In: ABCM. [S.l.]: 18th COBEM, 2005. Citado na página 58.

_____. **Estudo numérico de instabilidade secundária em escoamentos de Görtler**. [S.l.], 2011. Livre-docência. Citado nas páginas 51 e 63.

SPITALERI, R. Full-fas multigrid grid generation algorithms. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier, v. 32, n. 4, p. 483–494, 2000. Citado na página 59.

SWEARINGEN, J. D.; BLACKWELDER, R. F. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 182, p. 255–290, 1987. Citado nas páginas 36, 43, 44, 54, 55 e 71.

TANI, I. Some effects of surface curvature on the velocity distribution in a laminar boundary layer. **Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers**, v. 52, p. 476–477, 1949. Citado na página 42.

TANI, I.; SAKAGAMI, J. Boundary-layer instability at subsonic speeds. In: **Proc. ICAS, Third Congress, Stockholm**. [S.l.: s.n.], 1962. p. 391–403. Citado nas páginas 40 e 42.

TAYLOR, G. I. Viii. stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, The Royal Society London, v. 223, n. 605-615, p. 289–343, 1923. Citado nas páginas 30, 37 e 38.

TOE, R.; AJAKH, A.; PEERHOSSAINI, H. Heat transfer enhancement by görtler instability. **International journal of heat and fluid flow**, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 194–204, 2002. Citado nas páginas 39 e 42.

- TORII, K.; YANAGIHARA, J. I. A review on heat transfer enhancement by longitudinal vortices. **Journal of the Heat Transfer Society of Japan**, The Heat Transfer Society of Japan, v. 36, n. 142, p. 73–86, 1997. Citado na página 42.
- UMUR, H.; OZALP, A. Fluid flow and heat transfer in transitional boundary layers: effects of surface curvature and free stream velocity. **Heat and mass transfer**, Springer, v. 43, n. 1, p. 7, 2006. Citado na página 42.
- VIARO, S.; RICCO, P. Compressible unsteady görtler vortices subject to free-stream vortical disturbances. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 867, p. 250–299, 2019. Citado na página 42.
- WANG, H.; OLSON, S.; GOLDSTEIN, R. Development of taylor-goörtler vortices over the pressure surface of a turbine blade. **J. Heat Transfer**, v. 127, n. 5, p. 540–543, 2005. Citado na página 39.
- WANG, J.-S.; FENG, L.-H.; WANG, J.-j.; LI, T. Görtler vortices in low-reynolds-number flow over multi-element airfoil. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 835, p. 898–935, 2018. Citado na página 39.
- WHANG, C.; ZHONG, X. Secondary görtler instability in hypersonic boundary layers. In: **39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 273. Citado na página 43.
- WINOTO, S. H.; SHAH, D. A.; MITSUDHARMADI, H. *et al.* Concave surface boundary layer flows in the presence of streamwise vortices. **International Journal of Fluid Machinery and Systems**, Turbomachinery Society of Japan, Korean Society for Fluid Machinery, Chinese . . . , v. 4, n. 1, p. 33–46, 2011. Citado na página 88.
- WU, X.; ZHAO, D.; LUO, J. Excitation of steady and unsteady görtler vortices by free-stream vortical disturbances. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 682, p. 66–100, 2011. Citado nas páginas 43 e 44.
- XU, D.; ZHANG, Y.; WU, X. Nonlinear evolution and secondary instability of steady and unsteady görtler vortices induced by free-stream vortical disturbances. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 829, p. 681–730, 2017. Citado nas páginas 43 e 44.
- ZHANG, S. H. W. D. H.; CHEW, Y. T. Measurement in laminar and transitional boundary-layer flows on concave surface. **International journal of heat and fluid flow**, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 88–98, 1995. Citado na página 55.

