

Planejamento do Tratamento por Radioterapia Através de Métodos de Pontos Interiores ¹

Cecília Bollini Barboza Cid

Orientador: Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ICMC-USP - São Carlos

¹Trabalho realizado com o apoio da CNPq

Agradecimentos

Quero manifestar minha gratidão ao meu orientador Professor Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira pela amizade, críticas, sugestões e apoio, os quais proporcionaram a elaboração deste trabalho.

Meus agradecimentos à minha família, especialmente aos meus avós, Plínio e Izelda, por todo seu amor, sabedoria, incentivo e orações.

Um obrigado muito especial ao Alexandre que me apoiou em todo momento, com muito amor, compreensão e incentivo.

Também gostaria de agradecer a todos meus companheiros de mestrado que contribuíram para realização deste trabalho e que se revelaram grandes amigos.

Quero manifestar meu reconhecimento e gratidão a Deus, que sempre me mostrou o caminho a ser seguido, nunca deixou que eu me esquecesse do quanto a vida é realmente bela, e que é verdadeiramente o responsável pela realização deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer ao apoio financeiro do CNPq e a todos que de diversas formas contribuíram para a realização deste projeto de mestrado.

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento, estudo e implementação de métodos de pontos interiores específicos para o problema de planejamento do tratamento de câncer por radioterapia. Este é um problema de grande porte que contém uma estrutura matricial particular. A exploração desta estrutura de forma eficiente obtém bom desempenho computacional, através da redução da dimensão dos sistemas lineares que devem ser resolvidos a cada iteração, agilizando a definição de um tratamento adequado, uma vez que tipicamente várias simulações são realizadas antes da definição de um plano definitivo. Resultados numéricos em Matlab ilustram a eficiência desta abordagem em problemas reais e mostram a superioridade do método preditor corretor em comparação ao método primal-dual.

Abstract

In this work, a specialized interior point method is developed for planning cancer treatment by radiotherapy. This is a large-scale problem with a specific matrix structure. That structure is explored in an efficient way reducing the dimension of the linear system which must be solved at each iteration speeding up the treatment design since usually several versions must be solved to obtain a satisfactory plan. Moreover, the system obtained is sparse, symmetric and positive definite. Numerical results in Matlab illustrate the efficiency of this approach in real problems and show the superiority of the predictor-corrector method in comparison to the primal-dual method.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Abordagem por Métodos de Pontos Interiores	1
2	Métodos de Pontos Interiores para Programação Linear	3
2.1	Método de Newton para uma Variável	4
2.2	Método de Newton para Várias Variáveis	5
2.3	Método Primal-Dual Afim Escala	5
2.3.1	Método Primal-Dual Clássico	7
2.4	Método Preditor-Corretor	8
2.5	Cálculo das Direções nos Métodos de Pontos Interiores	10
3	Um Modelo para Formulação do Tratamento por Radioterapia	13
3.1	Formulação do Modelo	16
3.2	Problema de Otimização Linear	18
3.3	Propriedades das Restrições Elásticas	20
3.3.1	Interpretação das Soluções	20
4	Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Modelo de Tratamento por Radioterapia	23
4.1	Análise Média	23
4.1.1	O Método Primal-Dual para Análise Média	28
4.1.2	Eliminação de Variáveis	30
4.1.3	Resumo do Método de Pontos Interiores	35
4.1.4	Método Preditor-Corretor para Análise Média	36
4.2	Análise Absoluta	37

4.2.1	O Método Primal-Dual para Análise Absoluta	43
4.2.2	Eliminação de Variáveis	45
4.2.3	Resumo do Método de Pontos Interiores	52
4.2.4	Método Preditor-Corretor para Análise Absoluta	53
5	Resultados Computacionais	55
6	Conclusões	59
6.1	Perspectivas Futuras	59
	Bibliografia	61

Capítulo 1

Introdução

Modelos de programação linear tem sido usados extensivamente para encontrar bons planos de tratamento por radioterapia. A primeira formulação proposta como um modelo de programação linear ocorreu em 1968 [3]. O objetivo do tratamento é eliminar as células do tumor através de radiação ao mesmo tempo em que procura evitar a destruição de células vizinhas saudáveis também afetadas pela radiação. Existem atualmente máquinas sofisticadas inspiradas na tomografia computadorizada que emitem radiação ao longo de todo o corpo do paciente [23], por um lado ampliando as possibilidades de minimização destes efeitos colaterais e por outro aumentando a complexidade de obtenção de planos de tratamento.

Do ponto de vista matemático, o desafio consiste em emitir uma alta dosagem de radiação no tumor, suficiente para sua eliminação, e simultaneamente, minimizar a radiação nas regiões vizinhas compostas de tecido saudável, reduzindo ao máximo as complicações nestas regiões que são muitas vezes críticas.

1.1 Abordagem por Métodos de Pontos Interiores

Uma vantagem deste problema, do ponto de vista computacional, é que ele pode ser modelado como um problema de otimização linear [3, 8, 9, 22, 24, 23]. Por outro lado, o tipo de solução obtida pelo método simplex para estes modelos não corresponde ao tratamento mais adequado do ponto de vista médico porque as variáveis não básicas estarão nos seus respectivos limites [8]. Isto significa, nestes modelos, que parte do tumor recebe a dosagem

mínima estabelecida para sua eliminação enquanto parte do tecido saudável pode receber a dosagem máxima permitida.

Soluções deste tipo são naturalmente evitadas pelos métodos de pontos interiores. Na presença de múltiplas soluções esses métodos convergem para aquelas, em certa medida, distanciadas de vértices. Estas seriam as soluções mais adequadas na formulação de um tratamento, pois as variáveis não tendem a atingir seus limites na presença de múltiplas soluções. Uma outra vantagem da abordagem por pontos interiores é a possibilidade de trabalhar com pontos ineficazes durante o processo de otimização, facilitando a identificação de modelos mal formulados.

Uma motivação adicional para a abordagem por métodos de pontos interiores, está na estrutura matricial bem definida deste problema. Experiências anteriores com o desenvolvimento de métodos de pontos interiores específicos para uma classe de problemas e a exploração da estrutura matricial dos sistemas lineares resultantes mostra que esta abordagem é muito bem sucedida em termos da obtenção de melhor desempenho computacional [4, 15, 16, 18, 17, 19, 20, 21].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são discutidos os métodos de pontos interiores para programação linear. No Capítulo 3 apresentamos modelos para a formulação do tratamento por radioterapia e discutimos com mais detalhes o modelo adotado. No Capítulo 4 os métodos de pontos interiores são aplicados ao modelo de tratamento por radioterapia. No Capítulo 5 são apresentados os resultados computacionais obtidos. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho.

Capítulo 2

Métodos de Pontos Interiores para Programação Linear

Neste capítulo vamos adotar a seguinte forma, denominada padrão, para o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde, $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ com posto m e os vetores coluna x , c e b tem a dimensão apropriada.

O dual desse problema é dado por:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.a} \quad & A^T y + z = c \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

Um ponto é dito interior quando todas as variáveis estão estritamente dentro de seus limites [27] no problema dual por exemplo $z^0 > 0$ é um ponto interior. Um ponto interior é factível quando todas as restrições são satisfeitas, ou seja, o ponto x^0 , onde, $Ax^0 = b$ com $x^0 > 0$ é um ponto interior factível. As condições de otimalidade para problemas primal e dual são dadas pela [27]:

factibilidade primal

$$b - Ax = 0$$

$$x \geq 0,$$

factibilidade dual

$$c - A^T y - z = 0$$

$$z \geq 0,$$

e condições de complementaridade [26]

$$x_i z_i = 0, \quad i = 1 \cdots n$$

$$\text{ou seja,} \quad XZe = 0,$$

onde, X é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor x , Z é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor z e e é o vetor unitário, $e^T = (1, 1, 1, \dots, 1)$. Os métodos de pontos interiores primais-duais podem ser desenvolvidos através aplicação do método de Newton às condições de otimalidade [27] partindo de um ponto interior desconsiderando as desigualdades. A não negatividade das variáveis é controlada pelo tamanho do passo.

2.1 Método de Newton para uma Variável

Antes de desenvolvermos estes métodos, apresentaremos uma breve revisão do método de Newton. O método de Newton para uma variável busca zeros de uma função resolvendo equações da forma, $\phi(x) = 0$. Este método pode ser deduzido aplicando a série de Taylor a $\phi(x)$ em torno de x^0 , obtendo:

$$\phi(x) = \phi(x^0) + \phi'(x^0)(x - x^0) + \dots$$

Ignorando os termos de ordem superior temos, para $\phi(x) = 0$ com $\phi'(x) \neq 0$:

$$-\frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} = x - x^0 \Rightarrow x = -\frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} + x^0$$

obtendo assim o processo iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)}, \text{ onde } d^k = -\frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)} \text{ é a direção de Newton.}$$

Este processo pode ser repetido até que uma tolerância estabelecida seja satisfeita.

2.2 Método de Newton para Várias Variáveis

O método de Newton para várias variáveis tem como objetivo encontrar os zeros de sistemas de equações da seguinte forma:

seja, $f(x)=0$, um conjunto de funções não lineares $\phi_i(x)$ onde $\phi_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

O método pode ser deduzido aplicando a série de Taylor para cada $\phi_i(x)$ em torno de x^0 , obtendo:

$\phi_i(x) = \phi_i(x^0) + [\nabla\phi_i(x^0)]^T(x - x^0) + \dots$, para todo, $i = 1 \dots n$, onde

$$\nabla\phi_i(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_i(x^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi_i(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ignorando os termos de ordem superior temos:

$$[\nabla\phi_i(x^0)]^T(x - x^0) = -\phi_i(x^0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Onde definimos agora o Jacobiano no ponto x^0 :

$$J(x^0) = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \nabla\phi_n(x^0) \end{pmatrix}^T \quad e \quad f(x_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \phi_n(x^0) \end{pmatrix}$$

Podemos resumir assim o método de Newton:

Dado um ponto inicial x^0

Para $k = 0, 1, \dots$

Cálculo da direção $d^k = -J(x^k)^{-1}f(x^k)$

Cálculo do novo ponto $x^{k+1} = x^k + d^k$

até convergir

onde um critério de convergência poderia ser $\|f(x^{k+1})\|/\|x^{k+1}\|$ menor que uma dada tolerância.

2.3 Método Primal-Dual Afim Escala

Este método busca a solução dos problemas de programação linear primal e dual aplicando variantes do método de Newton às condições de otimalidade, e modificando o tamanho do passo para manter os pontos interiores [14]. Escrevemos as condições de otimalidade

da seguinte forma,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe \end{pmatrix} = 0.$$

Aplicando o método de Newton a este sistema de equações não lineares obtemos:

$$(x, y, z) = (x^0, y^0, z^0) - (J(x^0, y^0, z^0))^{-1} f(x^0, y^0, z^0) = (x^0, y^0, z^0) - d^0.$$

onde,

$$-f(x^0, y^0, z^0) = - \begin{pmatrix} Ax^0 - b \\ A^T y^0 + z^0 - c \\ X^0 Z^0 e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix} \equiv r^0.$$

A direção do método de Newton aplicado às equações $f(x,y,z)$ torna-se:

$$J(x^0, y^0, z^0)d^0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \\ d_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix}$$

logo,

$$d^0 = \begin{pmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \\ d_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix}.$$

Podemos assim resumir o método de pontos interiores primal-dual afim escala:

dado um ponto interior (x^0, y^0, z^0) onde $(x^0, z^0) > 0$

Para $k = 0, 1, \dots$

$$r_p^k = b - Ax^k$$

$$r_d^k = c - A^T y^k - z^k$$

$$r_a^k = -X^k Z^k e$$

$$d^k = J^{-1}(x^k, y^k, z^k)r^k$$

calcule o tamanho do passo primal α_p^k e dual α_d^k

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k d_x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k d_y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k d_z^k$$

até convergir.

O critério de convergência usado neste método é baseado nas condições de otimalidade:

$$\left| \frac{x^t z}{1+c^t x+b^t y} \right| \leq \epsilon$$

$$\frac{\|b - Ax\|}{1 + \|b\|} \leq \epsilon,$$

$$\frac{\|c - A^t y - z\|}{1 + \|c\|} \leq \epsilon,$$

onde ϵ é a tolerância desejada e $x^t z$ uma medida da condição de complementaridade.

O tamanho do passo α_p^k , α_d^k é calculado da seguinte forma:

primeiramente calculamos:

$$\rho_p^k = \min_{dx_i^k < 0} -\frac{x_i^k}{dx_i^k}, \quad (2.1)$$

e em seguida,

$$\rho_d^k = \min_{dz_i^k < 0} -\frac{z_i^k}{dz_i^k}. \quad (2.2)$$

Os valores ρ_p^k e ρ_d^k representam o tamanho de passo máximo tal que a primeira variável de x e z se anulam respectivamente.

Portanto, o tamanho do passo será obtido multiplicando ρ por um parâmetro $\tau \in (0,1)$:

$$\begin{cases} \alpha_p^k = \min(1, \tau \rho_p^k) \\ \alpha_d^k = \min(1, \tau \rho_d^k) \end{cases} \quad \text{e} \quad (2.3)$$

o que garante que nenhuma variável de x ou z se anule. Adicionalmente, o passo é limitado ao tamanho máximo 1, que corresponde a um passo de newton.

2.3.1 Método Primal-Dual Clássico

O método afim-escala têm uma desvantagem importante: ele permite que as variáveis (x,z) se aproximem de seus limites muito rapidamente. Conseqüentemente as direções calculadas são muito distorcidas e o método converge lentamente, pois $x_i z_i \approx 0$. Para evitar que isto ocorra é acrescentada uma perturbação (μ) na condição de complementaridade $x_i z_i = 0$ [27]. Em seu lugar consideramos $x_i z_i = \mu$ ou seja, o método primal-dual

resolve o seguinte sistema de equações não lineares a cada iteração:

$$\begin{cases} b - Ax^k = 0 \\ c - A^t y^k - z^k = 0 \\ \mu^k e - X^k Z^k e = 0, \end{cases}$$

onde μ^k é um parâmetro que varia a cada iteração $\mu^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. As únicas alterações do método primal-dual clássico em relação ao método afim-escala são a substituição de r_a^k por $r_c^k = \mu^k e - X^k Z^k e$ e o cálculo da perturbação $\mu^k = \sigma^k \frac{\gamma^k}{n}$, onde $\gamma^k = x^t z$, $\sigma \in (0,1)$, o valor $\frac{\gamma^k}{n}$ seria uma “medida” da distância média de um ponto a uma solução ótima. É importante ressaltar que o Jacobiano permanece o mesmo o que significa que ambos métodos necessitam resolver sistemas lineares com a mesma matriz.

2.4 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor [13] é o método de pontos interiores mais utilizado na prática, pois obtém os melhores resultados computacionais e tem convergência quadrática considerando a resolução de dois sistemas lineares em uma única iteração.

Este método calcula uma direção com três componentes [27]:

- direção afim-escala,
- direção de centragem (σ),
- direção de correção que compensa a aproximação linear do método de Newton, que pode ser visualizada pela relação $(x + d_x)^t(z + d_z) = d_x^t d_z$.

No método preditor corretor calcula-se primeiro a direção afim escala ($\tilde{d} = \tilde{d}_x, \tilde{d}_y, \tilde{d}_z$):

$$\begin{cases} A\tilde{d}_x = r_p \\ A^t \tilde{d}_y + \tilde{d}_z = r_d \\ Z\tilde{d}_x + X\tilde{d}_z = r_a = -XZe \end{cases} \quad (2.4)$$

Usando o mesmo Jacobiano encontra-se em seguida a direção perturbada no ponto,

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z) + (\tilde{d}_x, \tilde{d}_y, \tilde{d}_z)$$

ou seja:

$$\begin{cases} A\hat{d}_x = r_p = b - A\tilde{x} = b - A(x + \tilde{d}_x) = 0 \\ A^t\hat{d}_y + \hat{d}_z = z - A^T\tilde{y} - \tilde{z} = 0 \\ Z\hat{d}_x + X\hat{d}_z = \mu e - (X + \tilde{D}_x)(Z + \tilde{D}_z)e = \mu e - \tilde{D}_x\tilde{D}_ze \end{cases}$$

onde, μe é a direção de centragem e $(X + \tilde{D}_x)(Z + \tilde{D}_z)$ representa a correção não linear.

A direção utilizada será a soma das duas direções:

$$d_x = \tilde{d}_x + \hat{d}_x,$$

$$d_y = \tilde{d}_y + \hat{d}_y,$$

$$d_z = \tilde{d}_z + \hat{d}_z.$$

Logo, (d_x, d_y, d_z) , podem ser calculados diretamente somando o dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} Ad_x = r_p \\ A^td_y + d_z = r_d \\ Zd_x + Xd_z = r_a + \mu e - \tilde{D}_x\tilde{D}_ze = r_s. \end{cases} \quad (2.5)$$

ou seja, não é necessário que $\hat{d} = (\hat{d}_x, \hat{d}_y, \hat{d}_z)$ seja calculada.

O cálculo da perturbação μ^k é função da direção afim [13]. Quanto melhor a direção menor será a perturbação e vice-versa: considere,

$$\mu^k = \sigma^k \frac{\gamma^k}{n}; \quad \tilde{\gamma}^k = (x^k + \tilde{\alpha}_p^k d_{\tilde{x}}^k)^t (z^k + \tilde{\alpha}_d^k d_{\tilde{z}}^k)$$

onde, $\tilde{\alpha}_p^k$ e $\tilde{\alpha}_d^k$ são o tamanho do passo em relação ao problema primal e dual, respectivamente para a direção afim, calculados da seguinte forma:

$$\tilde{\rho}_p^k = \min_{dx_i^k < 0} -\frac{\tilde{x}_i^k}{d\tilde{x}_i^k} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho}_d^k = \min_{dz_i^k < 0} -\frac{\tilde{z}_i^k}{d\tilde{z}_i^k}, \quad \text{sendo} \quad \tilde{\alpha}_p^k = \min(1, \tau\tilde{\rho}_p^k) \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}_d^k = \min(1, \tau\tilde{\rho}_d^k),$$

com $\tau \in (0, 1)$. E,

$$\sigma^k = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\gamma}^k}{\gamma^k}\right)^3, & \text{se } \gamma^k > 1 \\ \frac{\gamma^k}{\sqrt{n}}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

A idéia desse método é calcular a direção afim-escala e estudar o progresso do método ao longo dessa direção, calculando a perturbação μ^k de acordo com este progresso. Uma vez que uma segunda direção é calculada, também calcula-se a correção não linear utilizando o mesmo Jacobiano da direção anterior [13]. Por outro lado, se $\gamma^k < 1$ existem razões teóricas para calcular uma perturbação proporcional a $(\gamma^k)^2$ [25], explicando assim a segunda relação no cálculo de σ .

Podemos resumir o método preditor-corretor da seguinte forma:

Dados $\tau \in (0, 1)$, (x^0, y^0, z^0) tal que $(x^0, z^0) > 0$

para $k = 0, 1, \dots$

$$r_p^k = b - Ax^k$$

$$r_d^k = c - A^T y^k - z^k$$

$$r_a^k = -X^k Z^k e$$

Calcule \tilde{d}^k usando (2.4)

Calcule $\tilde{\alpha}_p^k, \tilde{\alpha}_d^k$

$$\tilde{\gamma}^k = (x^k + \tilde{\alpha}_p^k d_{\tilde{x}}^k)^t (z^k + \tilde{\alpha}_d^k d_{\tilde{z}}^k)$$

Calcule μ^k usando (2.6)

$$r_s^k = \mu^k e + r_a^k - D_{\tilde{x}^k} D_{\tilde{z}^k} e$$

Calcule d^k usando (2.5)

Calcule α_p^k, α_d^k

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k d_x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k d_y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k d_z^k$$

até convergir.

O critério de convergência é o mesmo dos métodos primais-duais.

2.5 Cálculo das Direções nos Métodos de Pontos Interiores

O sistema linear (2.5) tem dimensão $2n+m$. Este sistema pode ser reduzido à dimensão m através das seguintes relações:

$$d_y = (AD^{-1}A^T)^{-1}(r_p + AD^{-1}r_d - AZ^{-1}r_s)$$

$$d_x = D^{-1}(A^T d_y - r_d + X^{-1}r_s)$$

$$d_z = X^{-1}(r_s - Z d_x),$$

obtidas eliminando-se d_z e d_x sucessivamente onde $D = X^{-1}Z$.

Essas simplificações também são válidas para os métodos primal-dual afim escala e clássico. A única alteração será do resíduo r_s que representa os valores r_a e r_c , respectivamente. O maior esforço computacional destes métodos, portanto, está no cálculo de d_y ,

onde uma matriz simétrica definida positiva ($AD^{-1}A^T$) deve ser decomposta a cada iteração. Usualmente é utilizada a decomposição de Cholesky [7] na resolução deste sistema linear, obtendo-se excelente desempenho computacional [1, 2, 11, 12, 15].

Capítulo 3

Um Modelo para Formulação do Tratamento por Radioterapia

Neste capítulo são apresentados alguns modelos de programação linear para o tratamento por radioterapia.

O primeiro passo no desenvolvimento de um plano de tratamento é definir a localização do tumor e da região de risco (estrutura crítica). Em seguida, a dose do raio é calculada individualmente conforme cada paciente. Uma formulação para programação linear consiste em minimizar a dose total emitida sujeito a um limite inferior da dose na região do tumor. Este modelo pode ser representado pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m D_{ij} \\ \text{s. a} \quad & D_{ij} = \sum_{p=1}^n \omega_p A_{ij}^p \quad \forall (i, j) \\ & l \leq D_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Gamma \\ & w \geq 0, \end{aligned}$$

onde,

D_{ij} representa a dosagem total recebida pelo paciente na posição (i, j) ;

A_{ij} representa a dosagem nominal emitida pelo raio p na posição (i, j) ;

w representa a ponderação da dosagem emitida pelos raios;

l representa a dosagem mínima a ser recebida pelo tumor;

Γ representa o subconjunto de posições onde se encontra o tumor;

n representa o número de raios;



Figura 3.1: Uma representação de aparelho de tratamento para radioterapia

m representa o número total de pixels.

Definindo os seguintes subconjuntos:

- R representa o subconjunto de posições onde se encontra tecido crítico (saudável) ou estrutura crítica;
- N representa o subconjunto de posições onde se encontram os demais tecidos saudáveis;

é possível formular um modelo com ponderações em cada região do paciente privilegiando ou penalizando algumas áreas quanto à quantidade de dosagem a ser recebida.

Em [23] são apresentados outros modelos de otimização linear que consistem em pequenas variações do modelo acima, tendo em mente o aparelho mostrado na Figura 3.1.

Suponha uma matriz de pixels de imagem $n \times n$, e que os ângulos avaliados são $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_\rho$. Além disso, supomos que cada ângulo está composto por η sub-raios. Os sistemas de tratamento modernos são capazes de realizar combinações complexas entre estes sub-raios. A geometria de um modelo usando raios elementares, onde $n=2$, $\rho = 4$ e $\eta = 4$, é indicada na Figura 3.2. Os intervalos entre os ângulos é $\frac{\pi}{4}$, e o ângulo inicial é (usualmente) zero.

Seja $x_{(a,i)}$ a dose ao longo do i -ésimo sub-raio do a -ésimo ângulo ($a = 1, 2, \dots, \rho$) e $d_{(p,a,i)}$ a distância entre o sub-raio $x_{(a,i)}$ e a imagem do pixel p . Definimos $A_{(p,a,i)}$ como o produto de $e^{-\mu d_{(p,a,i)}}$ e a área geométrica comum a ambos os sub-raios $x_{(a,i)}$ e o pixel p . Por exemplo, na Figura 3.2 o raio hachurado correspondente a $x_{(1,2)}$ atinge a metade do pixel 3 e a distância deste pixel a este raio elementar é $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (supondo que cada pixel tenha a mesma largura igual a 1). Conseqüentemente, $A_{(3,1,2)} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mu}$. Os componentes da

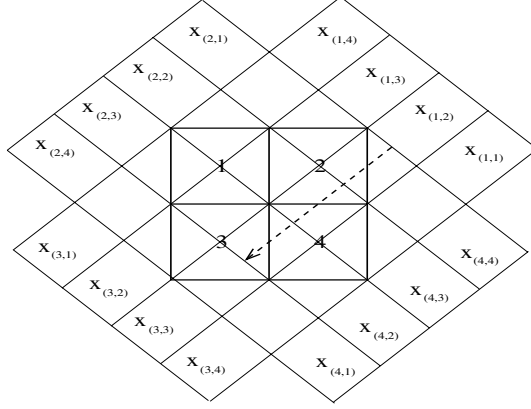


Figura 3.2: Geometria de uma imagem de *pixel* 2×2 com ângulos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

matriz de propagação dos raios, denotada por A , são $A_{(p,a,i)}$, onde as linhas de A são indexadas por p e as colunas são indexadas por (a,i) . O fator $e^{-\mu d_{(p,a,i)}}$ mede atenuação da radiação sobre o tecido, e os valores deste *coeficiente de atenuação*, (μ) , dependem da energia do raio. O coeficiente de atenuação define a característica do tecido, ou seja, com relação a sua densidade. Podemos tomar como exemplo o Raio-X: quanto menor a densidade do tecido menor o coeficiente de atenuação, portanto queimará mais o filme e conseqüentemente este ficará mais escuro; quanto maior a densidade do tecido maior o coeficiente de atenuação, portanto queimará menos o filme ficando mais claro.

A matriz dose de propagação sem atenuação ($\mu=0$) do exemplo da Figura 3.2, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Os elementos de x podem ser ordenados da seguinte forma:

$[x_{(1,1)} \ x_{(1,2)} \ \cdots \ x_{(1,r)} \ x_{(2,1)} \ \cdots \ x_{(2,r)} \ \cdots \ x_{(\rho,1)} \ \cdots \ x_{(\rho,r)}]$, assim a dose de radiação no pixel p é o p -ésimo componente de Ax .

Embora a matriz de propagação da dose permita modelar facilmente os limites superior e inferior da radiação para algum pixel na imagem, elaborar um plano de tratamento não é uma tarefa trivial. Por exemplo, um plano de tratamento pode prescrever

que o tumor não receba menos do que 80 Gy, onde Gy é a dose absorvida, usualmente medida em joules por quilograma (J/kg), também denominada gray (Gy): $1\text{Gy} = 1\text{ J/kg}$. Por outro lado, o plano de tratamento pode não permitir que alguma estrutura crítica receba mais do que 40 Gy.

A maioria das pesquisas tem utilizado modelos de otimização com restrições lineares, com uma das duas funções objetivos mais evidente, maximização da dose no tumor ou minimização da dose na estrutura crítica. Uma vez que esta maximização leva geralmente a altas doses, outros trabalhos buscam maximizar a dose mínima do tumor ou minimizar a dose máxima da estrutura crítica [10].

As metas listadas abaixo indicam que este problema tem uma grande quantidade de parâmetros a considerar na decisão do que seria desejável para um plano de tratamento:

- Transmitir uma dose uniformemente letal na região do tumor.
- Transmitir uma radiação tão pequena quanto possível na estrutura crítica.
- Obter uma dose total tão pequena quanto possível.
- Reduzir a frequência de doses altas fora da região do tumor.
- Controlar o número de raios utilizados no plano de tratamento.

O objetivo mais comum adotado na prática consiste em transmitir a maior radiação possível no tumor [23]. Há duas razões para evitar este objetivo. Normalmente altos níveis de radiação podem conduzir uma grande soma de necrose, e o corpo humano tem dificuldade na eliminação de um grande volume de tecido morto. Além disso, células doentes estão distribuídas entre tecidos saudáveis. Conseqüentemente, uma dose letal uniformemente distribuída na região do tumor é crucial para o sucesso do plano de tratamento, pois, uma dose inferior permite que a célula cancerosa sobreviva enquanto uma dose superior pode ter efeitos altamente indesejáveis nos tecidos vizinhos.

3.1 Formulação do Modelo

Suponha que cada órgão do corpo humano está dividido por pixels, onde cada pixel representará parte do tecido saudável ou do tumor em um órgão doente. Seja, m_T o

número de pixels do tumor, m_C o número de pixels da estrutura crítica e m_G o número de pixels restantes (tecido saudável), ou seja, $m = m_G + m_T + m_C$. Finalmente n , representa o número de sub-raios para atingir o alvo. A prescrição é definida por quatro limites:

- u_t : representa o vetor de limite superior para radiação no tumor ($u_t \in \mathbb{R}^{m_T}$);
- l_t : representa o vetor de limite inferior para radiação no tumor ($l_t \in \mathbb{R}^{m_T}$);
- u_c : representa o vetor de limite superior para radiação na estrutura crítica ($u_c \in \mathbb{R}^{m_C}$);
- u_g : representa o vetor de limite superior para radiação no restante de tecido saudável ($u_g \in \mathbb{R}^{m_G}$).

Fazemos as suposições óbvias que $0 < l_t \leq u_t, u_c \geq 0$, e $u_g \geq 0$. Se uma dose letal uniforme é transmitida ao tumor, o limite superior e inferior para os pixels do tumor são obtidos através das metas estabelecidas. Supondo que as metas estabelecidas para uma célula cancerosa sejam t_g , os valores de u_{t_i} e l_{t_i} são geralmente $(1 + \epsilon)t_g$ e $(1 - \epsilon)t_g$, respectivamente, onde, ϵ é a porcentagem da variação para a dosagem do tumor e é denominado *nível de uniformidade do tumor*. Valores típicos de ϵ encontrados na literatura vão de 0.02 à 0.15 [8]. O vetor u_g representa a maior quantidade de radiação permitida para algum pixel (saudável). Em geral tecidos saudáveis não devem receber mais do que 10% da dose estabelecida para o tumor. Ou seja, $u_g = t_g(1 + 0.10)$.

As linhas da matriz de propagação da dose podem ser reordenadas considerando as linhas que correspondem ao tumor, as linhas que correspondem à estrutura crítica, e as linhas que correspondem ao tecido saudável. Esta reordenação é representada pelas sub-matrizes A_T, A_C e A_G , como indicado abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} A_T \\ A_C \\ A_G \end{bmatrix}$$

ou seja, A_T : tumor, A_C : estrutura crítica e A_G : restante de tecido saudável.

Sub-raios que não atingem o tumor são removidos pela eliminação das colunas de A que tem o vetor zero na coluna correspondente da submatriz A_T . Assim, sem perda de generalidade, consideraremos que a matriz A_T não tem colunas nulas. Portanto, temos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A_T \in \mathbb{R}^{m_T \times n}$, $A_C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$ e $A_G \in \mathbb{R}^{m_G \times n}$.

3.2 Problema de Otimização Linear

Um novo modelo de programação linear usado para auxiliar no plano de radioterapia foi introduzido em [8]. Este modelo incorpora restrições elásticas, e quando resolvidas pelo método de pontos interiores, produzem planos favoráveis. A função objetivo é representada pela soma ponderada de três metas: $l^T t$, que mede o quanto falta para que o plano encontrado consiga aplicar a dose mínima na região do tumor; $u_c^T c$ que mede a quantidade de radiação acima da prescrita recebida pela região crítica; e $u_g^T g$ que mede a quantidade de radiação acima da prescrita nos demais tecidos saudáveis. O escalar positivo w pondera a importância da formulação de um plano que obtenha a dose mínima na região do tumor, isto é, valores grandes de w forçam $l^T t$ a ser tão pequeno quanto possível. Seria desejável que existisse valor para um finito $w > 0$ tal que o valor ótimo da componente $l^T t$ fosse zero o que garantiria ao tumor receba o nível mínimo de radiação necessário para sua eliminação. O modelo proposto pode ser representado pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w l^T t + u_c^T c + u_g^T g \\
 \text{s.a} \quad & l_t - Lt \leq A_T x \leq u_t \\
 & A_C x \leq u_c + U_C c \\
 & A_G x \leq u_g + U_G g \\
 & 0 \leq Lt \leq l_t \\
 & -u_c \leq U_C c \\
 & U_G g \geq 0 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde,

w : escalar positivo,

x : dose do sub-raio que entra na imagem para alcançar o pixel p , ($x \in \mathbb{R}^n$);

t : $t \in \mathbb{R}^{m_T}$, $t \geq 0$;

c : $c \in \mathbb{R}^{m_C}$;

g : $g \in \mathbb{R}^{m_G}$, $g \geq 0$;

As restrições $l_t - Lt \leq A_T x$, $A_C x \leq u_c + U_C c$, e $A_G x \leq u_g + U_G g$, são denominadas *elásticas*, pois seus limites podem variar de acordo com os vetores t , c , e g , respectivamente. As matrizes L , U_C e U_G definem como medir a elasticidade, e l , u_c e u_g controlam a

penalização ou recompensa com relação à elasticidade. Valores fixos de l , u_c , u_g , L , U_C e U_G definem um conjunto de *funções elásticas*. E estas são incorporadas pelas seguintes razões: 1) a restrição elástica garante que algum conjunto de funções elásticas, (3.1) é sempre estritamente factível; 2) a diferença dos limites inferiores nas funções elásticas nos permitem incorporar diferentes objetivos de tratamento.

Considerando que conjuntos diferentes de funções elásticas determinam diferentes filosofias de tratamento a interpretação do modelo (3.1) depende da escolha deste conjunto. Em [8] foram propostas as seguintes escolhas, *análise média* e *análise absoluta*.

Na análise média,

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{m_T}e, \text{ onde } l \in \mathfrak{R}^{m_T}; \\
u_c &= \frac{1}{m_C}e, \text{ onde } u_C \in \mathfrak{R}^{m_C}; \\
u_G &= \frac{1}{m_G}e, \text{ onde } u_G \in \mathfrak{R}^{m_G}; \\
L &= I, \text{ onde } L \in \mathfrak{R}^{m_T \times m_T}; \\
U_C &= I, \text{ onde } U_C \in \mathfrak{R}^{m_C \times m_C}; \\
U_G &= I, \text{ onde } U_G \in \mathfrak{R}^{m_G \times m_G}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo I a matriz identidade. Esta escolha tem os seguintes objetivos:

- minimizar a dosagem média recebida pelo tumor dentro do limite prescrito;
- minimizar a dosagem média da radiação que a estrutura crítica recebe, e
- minimizar a dosagem média que o tecido saudável recebe.

Na análise absoluta,

$$\begin{aligned}
l &= e_{m_T}, \text{ onde } l \in \mathfrak{R}^{m_T}; \\
u_c &= e_{m_C}, \text{ onde } u_C \in \mathfrak{R}^{m_C}; \\
u_G &= e_{m_G}, \text{ onde } u_G \in \mathfrak{R}^{m_G}; \\
L &= e_{m_T}e_{m_T}^T, \text{ onde } L \in \mathfrak{R}^{m_T}; \\
U_C &= e_{m_C}e_{m_C}^T, \text{ onde } U_C \in \mathfrak{R}^{m_C}; \\
U_G &= e_{m_G}e_{m_G}^T, \text{ onde } U_G \in \mathfrak{R}^{m_G}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Esta escolha tem os seguintes objetivos:

- minimizar a dosagem máxima recebida pelo tumor dentro do limite prescrito;
- minimizar a dosagem máxima da radiação que a estrutura crítica recebe, e
- minimizar a dosagem máxima recebida pelo tecido saudável.

3.3 Propriedades das Restrições Elásticas

Considere a seguinte definição:

Definição A prescrição (u_t, l_t, u_c, u_g) admite a uniformidade do tratamento do tumor se existe um plano, $x \geq 0$, tal que $l_t \leq A_T x \leq u_t$.

O Teorema abaixo foi demonstrado em [8].

Teorema 3.3.1 Seja $(x^*(w), t^*(w), c^*(w), g^*(w))$ uma solução ótima de (3.1). Para qualquer conjunto de funções elásticas temos que $l^T t^*(w) = O(\frac{1}{w})$, desde que a prescrição admita a uniformidade do tratamento do tumor.

Este Teorema mostra que se a prescrição do tratamento é viável, o déficit de radiação no tumor é uniformemente limitada pelo inverso de w . Utilizando este resultado é possível, resolvendo apenas um problema de programação linear, interpretar o resultado e concluir se existe um tratamento que atende à prescrição violando ou não os limites u_g e u_c [8].

3.3.1 Interpretação das Soluções

Em [8] Holder mostra que quando $w = \frac{\kappa}{\epsilon}$ e o valor ótimo de $l^T t$ é menor do que ϵ , então a uniformidade na região do tumor é garantida, onde κ é uma constante que depende dos dados do problema. Portanto, dados w como definido acima e solução do problema linear correspondente, podemos interpretar a solução para as análises média e absoluta da seguinte forma:

Análise Média

$$(l = e, u_c = e, u_g = e)$$

Caso 1: $l^T t^*(w) > \epsilon$, concluímos que a prescrição não permite a uniformidade do tumor.

Caso 2: $l^T t^*(w) \leq \epsilon$, concluímos que a prescrição permite a uniformidade do tumor.

Esta situação contém dois importante subcasos:

Caso 2a: $u_c^T c^*(w) + u_g^T g^*(w) > 0$, a conclusão é que a uniformidade do tumor é acessível, mas é cara, pois tecidos saudáveis estão recebendo mais radiação do que desejado.

Caso 2b: $u_c^T c^*(w) + u_g^T g^*(w) \leq 0$, a conclusão é que a uniformidade do tumor é permitida, a soma média de radiação sobre o tecido saudável é no mínimo tão boa quanto desejada.

Análise Absoluta

$$(l = u_c = u_g = 1)$$

Caso 1: $t^*(w) > \epsilon$, mesma interpretação da análise média.

Caso 2: $t^*(w) \leq \epsilon$, idem. Esta situação contém dois importante subcasos:

Caso 2a: $u_c^T c^*(w) + u_g^T g^*(w) > 0$, mesma interpretação da análise média.

Caso 2b: $u_c^T c^*(w) + u_g^T g^*(w) \leq 0$, idem.

Capítulo 4

Métodos de Pontos Interiores

Aplicados ao Modelo de Tratamento por Radioterapia

Neste capítulo aplicaremos os métodos de pontos interiores para o modelo (3.1) considerando duas situações a análise média e análise absoluta.

4.1 Análise Média

Adotamos inicialmente a *análise média* (3.2), descrita no Capítulo 3. Com esta escolha o problema (3.1) se reduz a:

$$\begin{aligned} \min \quad & w \frac{1}{m_T} e^T t + \frac{1}{m_C} e^T c + \frac{1}{m_G} e^T g \\ \text{s.a} \quad & l_t - t \leq A_T x \leq u_t \\ & A_C x \leq u_c + c \\ & A_G x \leq u_g + g \\ & 0 \leq t \leq l_t \\ & -u_c \leq c \\ & (g, x) \geq 0. \end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo consiste em obter um problema de programação linear na forma padrão, contendo apenas restrições de igualdade. Seja, $A_T x = a$, substituindo a restrição

canalizada por $l_t - t \leq a \leq u_t$ e $u_c + c = \tilde{c} \Rightarrow c = \tilde{c} - u_c$, teremos então:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w \frac{1}{m_T} e^T t + \frac{1}{m_C} e^T (\tilde{c} - u_c) + \frac{1}{m_G} e^T g \\
s.a \quad & l_t - t \leq a \leq u_t \\
& A_T x = a \\
& A_C x \leq \tilde{c} \\
& A_G x \leq u_g + g \\
& 0 \leq t \leq l_t \\
& (\tilde{c}, g, x) \geq 0.
\end{aligned}$$

Introduzimos as variáveis de folga e desconsideramos a constante $e^T u_c$, obtendo o problema primal:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w \frac{1}{m_T} e^T t + \frac{1}{m_C} e^T c + \frac{1}{m_G} e^T g \\
s.a \quad & a + s_u = u_t \\
& a + t - s_l = l_t \\
& A_T x - a = 0 \\
& A_C x + s_c - c = 0 \\
& A_G x - g + s_g = u_g \\
& t + s_t = l_t \\
& (t, c, g, x, s_u, s_l, s_c, s_g, s_t) \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde sem perda de generalidade substituímos \tilde{c} por c . Primeiramente escrevemos a matriz de restrições de (4.1):

$$M = \begin{pmatrix}
I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\
-I & A_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A_C & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & A_G & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I
\end{pmatrix}$$

Encontraremos agora o problema dual. Multiplicando a transposta de M , por y , o vetor de variáveis duais temos:

$$M^t y = \begin{pmatrix} I & I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_T^t & A_C^t & A_G^t & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_u \\ y_l \\ y_a \\ y_c \\ y_g \\ y_t \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$y_u + y_l - y_a = 0$$

$$A_T^t y_a + A_C^t y_c + A_G^t y_g \leq 0$$

$$y_l + y_t \leq w \frac{1}{m_T} e$$

$$-y_c \leq \frac{1}{m_C} e$$

$$-y_g \leq \frac{1}{m_G} e$$

$$y_u \leq 0$$

$$-y_l \leq 0$$

$$y_c \leq 0$$

$$y_g \leq 0$$

$$y_t \leq 0.$$

Definindo,

$$y_u = -\tilde{y}_u; y_c = -\tilde{y}_c; y_g = -\tilde{y}_g; y_t = -\tilde{y}_t \text{ e}$$

substituindo no sistema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\tilde{y}_u + y_l - y_a &= 0 \\
A_T^t y_a - A_C^t \tilde{y}_c - A_G^t \tilde{y}_g &\leq 0 \\
y_l - \tilde{y}_t &\leq w \frac{1}{m_T} e \\
\tilde{y}_c &\leq \frac{1}{m_C} e \\
\tilde{y}_g &\leq \frac{1}{m_G} e \\
(\tilde{y}_u, y_l, \tilde{y}_c, \tilde{y}_g, \tilde{y}_t) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned}
-\tilde{y}_u + y_l - y_a &= 0 \\
A_T^t y_a - A_C^t \tilde{y}_c - A_G^t \tilde{y}_g &\leq 0 \\
y_l - \tilde{y}_t &\leq w \frac{1}{m_T} e \\
0 &\leq \tilde{y}_c \leq \frac{1}{m_C} e \\
0 &\leq \tilde{y}_g \leq \frac{1}{m_G} e \\
(\tilde{y}_u, y_l, \tilde{y}_t) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Introduzindo agora as variáveis de folga z e w temos:

$$\begin{aligned}
-\tilde{y}_u + y_l - y_a &= 0 \\
A_T^t y_a - A_C^t \tilde{y}_c - A_G^t \tilde{y}_g + z_x &= 0 \\
y_l - \tilde{y}_t + z_t &= w \frac{1}{m_T} e \\
\tilde{y}_c + w_c &= \frac{1}{m_C} e \\
\tilde{y}_g + w_g &= \frac{1}{m_G} e \\
(\tilde{y}_u, y_l, \tilde{y}_c, \tilde{y}_g, \tilde{y}_t) &\geq 0 \\
(z_x, z_t) &\geq 0 \\
(w_c, w_g) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, tomamos $\tilde{y}_u = y_u; \tilde{y}_c = y_c; \tilde{y}_g = y_g; \tilde{y}_t = y_t$ e, encontramos finalmente o problema dual no formato desejado:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -u_t^t y_u + l_t^t y_l - u_g^t y_g - l_t^t y_t \\
s.a \quad & -y_u + y_l - y_a = 0 \\
& A_T^t y_a - A_C^t y_c - A_G^t y_g + z_x = 0 \\
& y_l - y_t + z_t = w \frac{1}{m_T} e \\
& y_c + w_c = \frac{1}{m_C} e \\
& y_g + w_g = \frac{1}{m_G} e \\
& (y_u, y_l, y_c, y_g, y_t, z_x, z_t, w_c, w_g) \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

As condições de complementaridade [27] para os problemas (4.1) e (4.2) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
Y_u S_u e = 0; Y_l S_l e = 0 \\
Y_c S_c e = 0; Y_g S_g e = 0; Y_t S_t e = 0 \\
X Z_x e = 0; T Z_t e = 0; \\
C W_c e = 0; G W_g e = 0.
\end{array} \right. \tag{4.3}$$

As condições de otimalidade para os problemas (4.1) e (4.2) são dadas pela factibilidade primal:

$$\left\{ \begin{array}{l}
a + s_u = u_t \\
a + t - s_l = l_t \\
A_T x - a = 0 \\
A_C x + s_c - c = 0 \\
A_G x - g + s_g = u_g \\
t + s_t = l_t \\
(t, c, g, x, s_u, s_l, s_c, s_g, s_t) \geq 0,
\end{array} \right.$$

factibilidade dual:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-y_u + y_l - y_a = 0 \\
A_T^t y_a - A_C^t y_c - A_G^t y_g + z_x = 0 \\
y_l - y_t + z_t = w \frac{1}{m_T} e \\
y_c + w_c = \frac{1}{m_C} e \\
y_g + w_g = \frac{1}{m_G} e \\
(y_u, y_l, y_c, y_g, y_t, z_x, z_t, w_c, w_g) \geq 0,
\end{array} \right.$$

e as condições de complementaridade (4.3).

4.1.1 O Método Primal-Dual para Análise Média

Agora, seguindo os passos descritos no Capítulo 2, determinamos as direções do método primal-dual, para os problemas (4.1) e (4.2) escrevendo primeiramente o Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & A_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_T^t & -A_C^t & -A_G^t & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_u & 0 & 0 & 0 & 0 & S_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_l & 0 & 0 & 0 & S_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_c & 0 & 0 & S_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

Multiplicando esta matriz pelas seguintes direções:

$d^t = (d_a, d_x, d_t, d_c, d_g, d_{s_u}, d_{s_l}, d_{s_c}, d_{s_g}, d_{s_t}, d_{y_u}, d_{y_l}, d_{y_a}, d_{y_c}, d_{y_g}, d_{y_t}, d_{z_x}, d_{z_t}, d_{w_c}, d_{w_g})$, e igualando aos resíduos: $r = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_{20})$, onde:

$$\left\{ \begin{array}{l}
r_1 = u_t - a - s_u \\
r_2 = l_t - a - t + s_l \\
r_3 = a - A_T x \\
r_4 = -A_C x - s_c + c \\
r_5 = u_g - A_G x + g - s_g \\
r_6 = l_t - t - s_t \\
r_7 = y_u - y_l + y_a \\
r_8 = -A_T^t y_a + A_C^t y_c + A_G^t y_g - z_x \\
r_9 = w \frac{1}{m_T} e - y_l + y_t - z_t \\
r_{10} = \frac{1}{m_C} e - y_c - w_c \\
r_{11} = \frac{1}{m_G} e - y_g - w_g \\
r_{12} = \mu e - Y_u S_u e_{m_T} \\
r_{13} = \mu e - Y_l S_l e_{m_T} \\
r_{14} = \mu e - Y_c S_c e_{m_C} \\
r_{15} = \mu e - Y_g S_g e_{m_G} \\
r_{16} = \mu e - Y_t S_t e_{m_T} \\
r_{17} = \mu e - X Z_x e \\
r_{18} = \mu e - T Z_t e_{m_T} \\
r_{19} = \mu e - C W_c e_{m_C} \\
r_{20} = \mu e - G W_g e_{m_G},
\end{array} \right. \tag{4.4}$$

obtemos assim o sistema linear, $Jd=r$:

$$d_a + d_{s_u} = r_1 \quad (4.5)$$

$$d_a + d_t - d_{s_l} = r_2 \quad (4.6)$$

$$-d_a + A_T d_x = r_3 \quad (4.7)$$

$$A_C d_x - d_c + d_{s_c} = r_4 \quad (4.8)$$

$$A_G d_x - d_g + d_{s_g} = r_5 \quad (4.9)$$

$$d_t + d_{s_t} = r_6 \quad (4.10)$$

$$-d_{y_u} + d_{y_l} - d_{y_a} = r_7 \quad (4.11)$$

$$A_T^t d_{y_a} - A_C^t d_{y_c} - A_G^t d_{y_g} + d_{z_x} = r_8 \quad (4.12)$$

$$d_{y_l} - d_{y_t} + d_{z_t} = r_9 \quad (4.13)$$

$$d_{y_c} + d_{w_c} = r_{10} \quad (4.14)$$

$$d_{y_g} + d_{w_g} = r_{11} \quad (4.15)$$

$$Y_u d_{s_u} + S_u d_{y_u} = r_{12} \quad (4.16)$$

$$Y_l d_{s_l} + S_l d_{y_l} = r_{13} \quad (4.17)$$

$$Y_c d_{s_c} + S_c d_{y_c} = r_{14} \quad (4.18)$$

$$Y_g d_{s_g} + S_g d_{y_g} = r_{15} \quad (4.19)$$

$$Y_t d_{s_t} + S_t d_{y_t} = r_{16} \quad (4.20)$$

$$Z_x d_x + X d_{z_x} = r_{17} \quad (4.21)$$

$$Z_t d_t + T d_{z_t} = r_{18} \quad (4.22)$$

$$W_c d_c + C d_{w_c} = r_{19} \quad (4.23)$$

$$W_g d_g + G d_{w_g} = r_{20}. \quad (4.24)$$

4.1.2 Eliminação de Variáveis

As equações de (4.5) a (4.24) definem o sistema linear que determina as direções dos métodos de pontos interiores. Este sistema pode ser resolvido diretamente mas esta opção é muito cara computacionalmente devido à sua grande dimensão. No entanto, este sistema pode ser reduzido através da substituição de variáveis de forma similar à redução realizado para problema na forma padrão.

Isolando as variáveis duais de (4.16) a (4.24), obtemos:

$$\begin{aligned}
d_{y_u} &= S_u^{-1}(r_{12} - Y_u d_{s_u}) \\
d_{y_l} &= S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) \\
d_{y_c} &= S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) \\
d_{y_g} &= S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) \\
d_{y_t} &= S_t^{-1}(r_{16} - Y_t d_{s_t}) \\
d_{z_x} &= X^{-1}(r_{17} - Z_x d_x) \\
d_{z_t} &= T^{-1}(r_{18} - Z_t d_t) \\
d_{w_c} &= C^{-1}(r_{19} - W_c d_c) \\
d_{w_g} &= G^{-1}(r_{20} - W_g d_g)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

substituindo em (4.11) à (4.15):

$$-S_u^{-1}(r_{12} - Y_u d_{s_u}) + S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) - d_{y_a} = r_7 \Rightarrow$$

$$S_u^{-1}Y_u d_{s_u} - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - d_{y_a} = r_7 + S_u^{-1}r_{12} - S_l^{-1}r_{13} = r_{21}$$

$$A_T^t d_{y_a} - A_C^t S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) - A_G^t S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) + X^{-1}(r_{17} - Z_x d_x) = r_8 \Rightarrow$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_c^{-1}Y_c d_{s_c} + A_G^t S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - X^{-1}Z_x d_x = r_8 + A_C^t S_c^{-1}r_{14} + A_G^t S_g^{-1}r_{15} - X^{-1}r_{17} = r_{22}$$

$$S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) - S_t^{-1}(r_{16} - Y_t d_{s_t}) + T^{-1}(r_{18} - Z_t d_t) = r_9 \Rightarrow$$

$$-S_l^{-1}Y_l d_{s_l} + S_t^{-1}Y_t d_{s_t} - T^{-1}Z_t d_t = r_9 - S_l^{-1}r_{13} + S_t^{-1}r_{16} - T^{-1}r_{18} = r_{23}$$

$$S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) + C^{-1}(r_{19} - W_c d_c) = r_{10} \Rightarrow$$

$$-S_c^{-1}Y_c d_{s_c} - C^{-1}W_c d_c = r_{10} - S_c^{-1}r_{14} - C^{-1}r_{19} = r_{24}$$

$$S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) + G^{-1}(r_{20} - W_g d_g) = r_{11} \Rightarrow$$

$$-S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - G^{-1}W_g d_g = r_{11} - S_g^{-1}r_{15} - G^{-1}r_{20} = r_{25}.$$

O novo sistema linear é dado pelas equações de (4.5) à (4.10) em conjunto com as equações

abaixo:

$$S_u^{-1}Y_u d_{s_u} - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - d_{y_a} = r_{21} \quad (4.26)$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_C^{-1} Y_c d_{s_c} + A_G^t S_g^{-1} Y_g d_{s_g} - X^{-1} Z_x d_x = r_{22} \quad (4.27)$$

$$-S_l^{-1}Y_l d_{s_l} + S_t^{-1}Y_t d_{s_t} - T^{-1}Z_t d_t = r_{23} \quad (4.28)$$

$$-S_c^{-1}Y_c d_{s_c} - C^{-1}W_c d_c = r_{24} \quad (4.29)$$

$$-S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - G^{-1}W_g d_g = r_{25}. \quad (4.30)$$

Tomemos agora:

$$d_{s_u} = r_1 - d_a$$

$$d_{s_l} = -r_2 + d_a + d_t$$

$$d_{s_c} = Y_c^{-1}S_c(-C^{-1}W_c d_c - r_{24}) \quad (4.31)$$

$$d_{s_g} = Y_g^{-1}S_g(-G^{-1}W_g d_g - r_{25})$$

$$d_{s_t} = r_6 - d_t$$

e substituindo as equações acima em (4.8), (4.9) e (4.26) a (4.28) temos:

$$A_c d_x - d_c + Y_c^{-1}S_c(-C^{-1}W_c d_c - r_{24}) = r_4 \Rightarrow$$

$$A_c d_x - (I + Y_c^{-1}S_c C^{-1}W_c) d_c = r_4 + Y_c^{-1}S_c r_{24} = r_{26}$$

$$A_g d_x - d_g + Y_g^{-1}S_g(-G^{-1}W_g d_g - r_{25}) = r_5 \Rightarrow$$

$$A_g d_x - (I + Y_g^{-1}S_g G^{-1}W_g) d_g = r_5 + Y_g^{-1}S_g r_{25} = r_{27}$$

$$S_u^{-1}Y_u(r_1 - d_a) - S_l^{-1}Y_l(-r_2 + d_a + d_t) - d_{y_a} = r_{21} \Rightarrow$$

$$-(S_u^{-1}Y_u + S_l^{-1}Y_l)d_a - S_l^{-1}Y_l d_t - d_{y_a} = r_{21} - S_u^{-1}Y_u r_1 - S_l^{-1}Y_l r_2 = r_{28}$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_C^{-1} Y_c (Y_c^{-1} S_c (-C^{-1} W_c d_c - r_{24})) + A_G^t S_g^{-1} Y_g (Y_g^{-1} S_g (-G^{-1} W_g d_g - r_{25})) - X^{-1} Z_x d_x =$$

$$r_{22} \Rightarrow A_T^t d_{y_a} - A_C^t C^{-1} W_c d_c - A_G^t G^{-1} W_g d_g - X^{-1} Z_x d_x = r_{22} + A_C^t r_{24} + A_G^t r_{25} = r_{29}$$

$$-S_l^{-1}Y_l(-r_2 + d_a + d_t) + S_t^{-1}Y_t(r_6 - d_t) - T^{-1}Z_t d_t = r_{23} \Rightarrow$$

$$-S_l^{-1}Y_l d_a - (S_l^{-1}Y_l + S_t^{-1}Y_t + T^{-1}Z_t) d_t = r_{23} - S_l^{-1}Y_l r_2 - S_t^{-1}Y_t r_6 = r_{30}.$$

Restando as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} -d_a + A_T d_x = r_3 \\ A_c d_x - (I + Y_c^{-1} S_c C^{-1} W_c) d_c = r_{26} \\ A_g d_x - (I + Y_g^{-1} S_g G^{-1} W_g) d_g = r_{27} \\ -(S_u^{-1} Y_u + S_l^{-1} Y_l) d_a - S_l^{-1} Y_l d_t - d_{y_a} = r_{28} \\ A_T^t d_{y_a} - A_C^t C^{-1} W_c d_c - A_G^t G^{-1} W_g d_g - X^{-1} Z_x d_x = r_{29} \\ -S_l^{-1} Y_l d_a - (S_l^{-1} Y_l + S_t^{-1} Y_t + T^{-1} Z_t) d_t = r_{30}. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Definimos agora as seguintes matrizes diagonais para simplificar a notação:

$$\begin{aligned} D_1 &= I + Y_c^{-1} S_c C^{-1} W_c \\ D_2 &= I + Y_g^{-1} S_g G^{-1} W_g \\ D_3 &= S_u^{-1} Y_u + S_l^{-1} Y_l \\ D_4 &= S_l^{-1} Y_l \\ D_5 &= C^{-1} W_c \\ D_6 &= G^{-1} W_g \\ D_7 &= X^{-1} Z_x \\ D_8 &= S_l^{-1} Y_l + S_t^{-1} Y_t + T^{-1} Z_t. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Substituindo no sistema (4.32), temos:

$$-d_a + A_T d_x = r_3 \quad (4.34)$$

$$A_c d_x - D_1 d_c = r_{26} \quad (4.35)$$

$$A_g d_x - D_2 d_g = r_{27} \quad (4.36)$$

$$-D_3 d_a - D_4 d_t - d_{y_a} = r_{28} \quad (4.37)$$

$$A_T^t d_{y_a} - A_C^t D_5 d_c - A_G^t D_6 d_g - D_7 d_x = r_{29} \quad (4.38)$$

$$-D_4 d_a - D_8 d_t = r_{30}. \quad (4.39)$$

Isolando d_{y_a} e d_t das equações (4.37) e (4.39), teremos:

$$d_{y_a} = -D_3 d_a - D_4 d_t - r_{28} \quad \text{e} \quad (4.40)$$

$$d_t = -D_8^{-1} (r_{30} + D_4 d_a). \quad (4.41)$$

Substituímos na Equação (4.38), obtemos:

$$\begin{aligned}
& A_T^t(-D_3d_a - D_4d_t - r_{28}) - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{29} \Rightarrow \\
& -A_T^tD_3d_a - A_T^tD_4d_t - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{29} + A_T^tr_{28} \Rightarrow \\
& -A_T^tD_3d_a - A_T^tD_4(-D_8^{-1}(r_{30} + D_4d_a)) - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{29} + A_T^tr_{28} \Rightarrow \\
& -A_T^tD_3d_a + A_T^tD_4D_8^{-1}D_4d_a - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{29} + A_T^tr_{28} - A_T^tD_4D_8^{-1}r_{30} \\
& \quad -A_T^t(D_3 + D_4D_8^{-1}D_4)d_a - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{31}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases}
A_Td_x - d_a = r_3 \\
A_Cd_x - D_1d_c = r_{26} \\
A_Gd_x - D_2d_g = r_{27} \\
-A_T^tD_4d_a - A_C^tD_5d_c - A_G^tD_6d_g - D_7d_x = r_{31},
\end{cases}$$

onde,

$$D_a = (D_3 - D_4D_8^{-1}D_4). \tag{4.43}$$

Lembrando que:

$$A = \begin{pmatrix} A_T \\ A_C \\ A_G \end{pmatrix} \quad \text{e definindo} \quad d = \begin{pmatrix} d_a \\ d_c \\ d_g \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}, r_p = \begin{pmatrix} r_3 \\ r_{26} \\ r_{27} \end{pmatrix} e$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & D_6 \end{pmatrix}.$$

Podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$Ad_x - Dd = r_p \tag{4.44}$$

$$-D_7d_x - A^t\tilde{D}d = r_{31}. \tag{4.45}$$

Isolando d da equação (4.44), temos:

$$d = D^{-1}(Ad_x - r_p). \tag{4.46}$$

Admitindo-se que a matriz A tem mais linhas (que estão representadas pelo número de pixels) do que colunas (que são representadas pelo número de raios) e substituindo (4.46)

em (4.45) temos:

$$\begin{aligned} -D_7 d_x - A^T \tilde{D} D^{-1} A d_x + A^T \tilde{D} D^{-1} r_p &= r_{31} \Rightarrow \\ (D_7 + A^T \tilde{D} D^{-1} A) d_x &= r_{31} - A^T \tilde{D} D^{-1} r_p = -\tilde{r}_p. \end{aligned}$$

Logo,

$$(A^T \tilde{D} D^{-1} A + D_7) d_x = \tilde{r}_p. \quad (4.47)$$

Este sistema é simétrico e definido positivo podendo ser resolvido pela decomposição de Cholesky. Sua dimensão é muito menor que o sistema original representado pelas equações (4.5) a (4.24).

4.1.3 Resumo do Método de Pontos Interiores

O método de pontos interiores desenvolvido nesta seção pode ser resumido da seguinte forma:

Seja, $h = (t, c, g, x, s_u, s_l, s_c, s_g, s_t)$ e $j = (y_u, y_l, y_c, y_g, y_t, z_x, z_t, w_c, w_g)$

Dado um ponto interior (h^0, j^0)

Para $k = 1, 2, \dots$

Calcule as matrizes diagonais D_1 à D_8 por (4.33) e D_a por (4.43)

Calcule os resíduos:

r_1 a r_{20} por (4.4)

r_{21} a r_{25} por (4.26) à (4.30)

r_{26} a r_{30} por (4.35) à (4.39)

r_{31} por (4.42)

r_p por (4.44) e \tilde{r}_p por (4.47)

Calcule d por (4.47),

Calcule as direções:

d_{y_a} por (4.40), d_t por (4.41),

$d_{s_u}, d_{s_l}, d_{s_c}, d_{s_g}, d_{s_t}$ por (4.31) e

$d_{y_u}, d_{y_c}, d_{y_g}, d_{y_t}, d_{z_x}, d_{z_t}, d_{w_c}, d_{w_g}$ por (4.25)

Calcule ρ_p por (2.1) e ρ_d por (2.2)

Calcule α_p e α_d por (2.3)

$$a^{k+1} = a^k + \alpha_p d_p^k$$

$$\begin{aligned}
y_a^{k+1} &= y_a^k + \alpha_d d_{y_a}^k \\
h_p^{k+1} &= h^k + \alpha_p^k d_h^k \\
j_d^{k+1} &= j^k + \alpha_d^k d_j^k
\end{aligned}$$

até convergir.

4.1.4 Método Preditor-Corretor para Análise Média

No método preditor-corretor dois sistemas lineares determinam as direções. Primeiramente é calculada a *direção afim* (d_h, d_j, d_a, d_{y_a}) resolvendo o sistema linear (4.5) a (4.24) com $\mu = 0$. Em seguida, a direção desejada é obtida resolvendo o seguinte sistema linear [13]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
d_a + d_{s_u} = r_1 \\
d_a + d_t - d_{s_l} = r_2 \\
-d_a + A_T d_x = r_3 \\
A_C d_x - d_c + d_{s_c} = r_4 \\
A_G d_x - d_g + d_{s_g} = r_5 \\
d_t + d_{s_t} = r_6 \\
-d_{y_u} + d_{y_l} - d_{y_a} = r_7 \\
A_T^t d_{y_a} - A_C^t d_{y_c} - A_G^t d_{y_g} + d_{z_x} = r_8 \\
d_{y_l} - d_{y_t} + d_{z_t} = r_9 \\
d_{y_c} + d_{w_c} = r_{10} \\
d_{y_g} + d_{w_g} = r_{11} \\
Y_u d_{s_u} + S_u d_{y_u} = \tilde{r}_{12} \\
Y_l d_{s_l} + S_l d_{y_l} = \tilde{r}_{13} \\
Y_c d_{s_c} + S_c d_{y_c} = \tilde{r}_{14} \\
Y_g d_{s_g} + S_g d_{y_g} = \tilde{r}_{15} \\
Y_t d_{s_t} + S_t d_{y_t} = \tilde{r}_{16} \\
Z_x d_x + X d_{z_x} = \tilde{r}_{17} \\
Z_t d_t + T d_{z_t} = \tilde{r}_{18} \\
W_c d_c + C d_{w_c} = \tilde{r}_{19} \\
W_g d_g + G d_{w_g} = \tilde{r}_{20}
\end{array} \right.$$

onde os novos resíduos são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{\tilde{12}} = \mu e_{m_T} - Y_u S_u e_{m_T} - D\tilde{y}_u D\tilde{s}_u e_{m_T} \\ r_{\tilde{13}} = \mu e_{m_T} - Y_l S_l e_{m_T} - D\tilde{y}_l D\tilde{s}_l e_{m_T} \\ r_{\tilde{14}} = \mu e_{m_C} - Y_c S_c e_{m_C} - D\tilde{y}_c D\tilde{s}_c e_{m_C} \\ r_{\tilde{15}} = \mu e_{m_G} - Y_g S_g e_{m_G} - D\tilde{y}_g D\tilde{s}_g e_{m_G} \\ r_{\tilde{16}} = \mu e_{m_T} - Y_t S_t e_{m_T} - D\tilde{y}_t D\tilde{s}_t e_{m_T} \\ r_{\tilde{17}} = \mu e - Z_x X e - D\tilde{z}_x D\tilde{x} e \\ r_{\tilde{18}} = \mu e_{m_T} - Z_t T e_{m_T} - D\tilde{z}_t D\tilde{t} e_{m_T} \\ r_{\tilde{19}} = \mu e_{m_C} - W_c C e_{m_C} - D\tilde{w}_c D\tilde{c} e_{m_C} \\ r_{\tilde{20}} = \mu e_{m_G} - W_g G e_{m_G} - D\tilde{w}_g D\tilde{g} e_{m_G} \end{array} \right.$$

e o parâmetro μ é calculado da forma descrita no Capítulo 2.

4.2 Análise Absoluta

Trabalhamos agora com a *análise absoluta* (3.3), descrita no Capítulo 3. Com esta escolha o problema (3.1) se reduz a:

$$\begin{aligned} \min \quad & w e_{m_T}^T t + e_{m_C}^T c + e_{m_G}^T g \\ \text{s.a} \quad & l_t - e_{m_T} e_{m_T}^T t \leq A_T x \leq u_t \\ & A_C x \leq e_{m_C} + e_{m_C} e_{m_C}^T c \\ & A_G x \leq e_{m_G} + e_{m_G} e_{m_G}^T g \\ & 0 \leq e_{m_T} e_{m_T}^T t \leq l_t \\ & -e_{m_C} \leq e_{m_C} e_{m_C}^T c \\ & e_{m_G} e_{m_G}^T g \geq 0 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo consiste em obter um problema linear na forma padrão contendo apenas restrições de igualdade. Seja, $A_T x = a$, e $\lambda = \min(l_t)$ e como existem m_T e m_G

equações lineares, teremos então:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & we_{m_T}^T t + e_{m_C}^T c + e_{m_G}^T g \\
 \text{s.a} \quad & l_t - e_{m_T} e_{m_T}^T t \leq a \leq u_t \\
 & A_T x = a \\
 & A_C x \leq e_{m_C} + e_{m_C} e_{m_C}^T c \\
 & A_G x \leq e_{m_G} + e_{m_G} e_{m_G}^T g \\
 & 0 \leq e_{m_T}^T t \leq \lambda \\
 & e_{m_C}^T c \geq -1 \\
 & e_{m_G}^T g \geq 0 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Os vetores t , c e g não tem significado físico e neste modelo só nos interessa a soma dos seus elementos. Assim, criamos uma variável para caracterizar a soma dos elementos de cada um deles: $e_{m_T}^T t = \tau$, $e_{m_C}^T c = \gamma$, $e_{m_G}^T g = \beta$, obtendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w\tau + \gamma + \beta \\
 \text{s.a} \quad & l_t - e_{m_T} \tau \leq a \leq u_t \\
 & A_T x = a \\
 & A_C x \leq e_{m_C} + e_{m_C} \gamma \\
 & A_G x \leq e_{m_G} + e_{m_G} \beta \\
 & 0 \leq \tau \leq \lambda \\
 & \gamma \geq -1 \\
 & \beta \geq 0 \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Tomando $\tilde{\gamma} = \gamma + 1$ para facilitar o desenvolvimento, e introduzindo as variáveis de folga para obter as equações de igualdade e temos:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w\tau + \tilde{\gamma} - 1 + \beta \\
s.a \quad & a + s_u = u_t \\
& a + e_{m_T}\tau - s_l = l_t \\
& A_T x - a = 0 \\
& A_C x - e_{m_C}\tilde{\gamma} + s_c = 0 \\
& A_G x - e_{m_G}\beta + s_g = e_{m_G} \\
& \tau + \sigma_t = \lambda \\
& (x, s_u, s_l, s_c, s_g, \sigma_t, \tau, \beta, \tilde{\gamma}) \geq 0, \\
& a : \text{livre}.
\end{aligned}$$

Retiramos o -1 da função objetivo e sem perda de generalidade substituímos γ no lugar de $\tilde{\gamma}$ obtemos o problema primal:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w\tau + \gamma + \beta \\
s.a \quad & a + s_u = u_t \\
& a + e_{m_T}\tau - s_l = l_t \\
& A_T x - a = 0 \\
& A_C x - e_{m_C}\gamma + s_c = 0 \\
& A_G x - e_{m_G}\beta + s_g = e_{m_G} \\
& \tau + \sigma_t = \lambda \\
& (x, s_u, s_l, s_c, s_g, \sigma_t, \tau, \beta, \gamma) \geq 0, \\
& a : \text{livre}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Para encontrar o problema dual, escrevemos a matriz de restrições de (4.48):

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & e_{m_T} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & A_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{m_C} & 0 & A_C & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{m_G} & A_G & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a transposta de M, por y , o vetor de variáveis duais temos:

$$M^t y = \begin{pmatrix} I & I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{m_T}^T & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{m_C}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{m_G}^T & 0 \\ 0 & 0 & A_T^T & A_C^T & A_G^T & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_u \\ y_l \\ y_a \\ y_c \\ y_g \\ \pi_t \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
y_u + y_l - y_a &= 0 \\
e_{m_T}^T y_l + \pi_t &\leq w \\
-e_{m_C}^T y_c &\leq 1 \\
-e_{m_G}^T y_g &\leq 1 \\
A_T^T y_a + A_C^T y_c + A_G^T y_g &\leq 0 \\
y_u &\leq 0 \\
-y_l &\leq 0 \\
y_c &\leq 0 \\
y_g &\leq 0 \\
\pi_t &\leq 0.
\end{aligned}$$

Definindo, $y_u = -\tilde{y}_u$; $y_c = -\tilde{y}_c$; $y_g = -\tilde{y}_g$; $\pi_t = -\tilde{\pi}_t$
e substituindo no modelo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\tilde{y}_u + y_l - y_a &= 0 \\
e_{m_T}^T y_l - \tilde{\pi}_t &\leq w \\
e_{m_C}^T \tilde{y}_c &\leq 1 \\
e_{m_G}^T \tilde{y}_g &\leq 1 \\
A_T^T y_a - A_C^T \tilde{y}_c - A_G^T \tilde{y}_g &\leq 0 \\
(\tilde{y}_u, y_l, \tilde{y}_c, \tilde{y}_g, \tilde{\pi}_t, &\geq 0 \\
y_a &: \text{livre}.
\end{aligned}$$

Introduzimos agora as variáveis de folga z , ζ_t , ζ_c e ζ_g obtemos as restrições na forma de igualdade:

$$\begin{aligned}
-\tilde{y}_u + y_l - y_a &= 0 \\
e_{m_T}^T y_l - \tilde{\pi}_t + \zeta_t &= w \\
e_{m_C}^T \tilde{y}_c + \zeta_c &= 1 \\
e_{m_G}^T \tilde{y}_g + \zeta_g &= 1 \\
A_T^T y_a - A_C^T \tilde{y}_c - A_G^T \tilde{y}_g + z_x &= 0 \\
(\tilde{y}_u, y_l, \tilde{y}_c, \tilde{y}_g, \tilde{\pi}_t, \zeta_t, \zeta_c, \zeta_g, z_x) &\geq 0 \\
y_a &: \text{livre.}
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, tomamos $\tilde{y}_u = y_u$; $\tilde{y}_c = y_c$; $\tilde{y}_g = y_g$; $\tilde{\pi}_t = \pi_t$ e, encontramos finalmente o problema dual no formato desejado:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -u_t^T y_u + l_t^T y_l - e_{m_g}^T y_g - \lambda \pi_t \\
s.a \quad & -y_u + y_l - y_a = 0 \\
& e_{m_T}^T y_l - \pi_t + \zeta_t = w \\
& e_{m_C}^T y_c + \zeta_c = 1 \\
& e_{m_G}^T y_g + \zeta_g = 1 \\
& A_T^T y_a - A_C^T y_c - A_G^T y_g + z_x = 0 \\
& (y_u, y_l, y_c, y_g, \pi_t, \zeta_t, \zeta_c, \zeta_g, z_x) \geq 0 \\
& y_a : \text{livre.}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

As condições de complementaridade para os problemas (4.48) e (4.49) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
Y_u S_u e_{m_T} = 0; \quad Y_l S_l e_{m_T} = 0; \quad Y_c S_c e_{m_C} = 0 \\
Y_g S_g e_{m_G} = 0; \quad \pi_t \sigma_t = 0; \quad \tau \zeta_t = 0 \\
\gamma \zeta_c = 0; \quad \beta \zeta_g = 0; \quad X Z_x e = 0.
\end{array} \right. \tag{4.50}$$

As condições de otimalidade para os problemas (4.48) e (4.49) são dadas pela factibilidade primal:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + s_u = u_t \\ a + e_{m_T}\tau - s_l = l_t \\ A_T x - a = 0 \\ A_C x - e_{m_C}\gamma + s_c = 0 \\ A_G x - e_{m_G}\beta + s_g = e_{m_G} \\ \tau + \sigma_t = \lambda \\ (x, s_u, s_l, s_c, s_g, \sigma_t, \tau, \beta, \gamma) \geq 0, \\ a : \text{livre}, \end{array} \right.$$

factibilidade dual:

$$\left\{ \begin{array}{l} -y_u + y_l - y_a = 0 \\ e_{m_T}^T y_l - \pi_t + \zeta_t = w \\ e_{m_C}^T y_c + \zeta_c = 1 \\ e_{m_G}^T y_g + \zeta_g = 1 \\ A_T^T y_a - A_C^T y_c - A_G^T y_g + z_x = 0 \\ (y_u, y_l, y_c, y_g, \pi_t, \zeta_t, \zeta_c, \zeta_g, z_x) \geq 0 \\ y_a : \text{livre}, \end{array} \right.$$

e as condições de complementaridade (4.50).

4.2.1 O Método Primal-Dual para Análise Absoluta

Seguindo os passos descritos no Capítulo 2, determinamos as direções do método primal-dual, para os problemas (4.48) e (4.49) escrevendo primeiramente o Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & e_{m_T} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & A_T & 0 \\ 0 & A_C & 0 & -e_{m_C} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 & 0 & -e_{m_G} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{m_t}^T & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{m_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{m_g}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_C^T & -A_G^T & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_c & 0 & 0 & 0 & 0 & S_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_g & 0 & 0 & 0 & 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & Z_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Obtemos agora os resíduos resultantes da aplicação do método de Newton às condições de otimalidade:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 r_1 = u_t - a - s_u \\
 r_2 = l_t - a - e_{m_T} \tau + s_l \\
 r_3 = -A_T x + a \\
 r_4 = -A_C x + e_{m_C} \gamma - s_c \\
 r_5 = e_{m_G} - A_G x + e_{m_G} \beta - s_g \\
 r_6 = \lambda - \tau - \sigma_t \\
 r_7 = y_u - y_l + y_a \\
 r_8 = w - e_{m_T}^T y_l + \pi_t - \zeta_t \\
 r_9 = 1 - e_{m_C}^T y_c - \zeta_c \\
 r_{10} = 1 - e_{m_G}^T y_g - \zeta_g \\
 r_{11} = -A_T^T y_a + A_C^T y_c + A_G^T y_g - z_x \\
 r_{12} = -Y_u S_u e_{m_T} + \mu e_{m_T} \\
 r_{13} = -Y_l S_l e_{m_T} + \mu e_{m_T} \\
 r_{14} = -Y_c S_c e_{m_C} + \mu e_{m_C} \\
 r_{15} = -Y_g S_g e_{m_G} + \mu e_{m_G} \\
 r_{16} = -\pi_t \sigma_t + \mu \\
 r_{17} = -\tau \zeta_t + \mu \\
 r_{18} = -\gamma \zeta_c + \mu \\
 r_{19} = -\beta \zeta_g + \mu \\
 r_{20} = -X Z_x e + \mu e.
 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Multiplicamos a matriz do Jacobiano pelas seguintes direções:

$d^t = (d_a, d_x, d_\tau, d_\gamma, d_\beta, d_{s_u}, d_{s_l}, d_{s_c}, d_{s_g}, d_{\sigma_t}, d_{y_a}, d_{y_u}, d_{y_l}, d_{y_c}, d_{y_g}, d_{\pi_t}, d_{\zeta_t}, d_{\zeta_c}, d_{\zeta_g}, d_{z_x})$, e as igualamos

aos resíduos $r = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_{20})$, temos, $Jd=r$:

$$d_a + d_{s_u} = r_1 \quad (4.52)$$

$$d_a + e_{m_T} d_\tau - d_{s_l} = r_2 \quad (4.53)$$

$$-d_a + A_T d_x = r_3 \quad (4.54)$$

$$A_C d_x - e_{m_C} d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \quad (4.55)$$

$$A_G d_x - e_{m_G} d_\beta + d_{s_g} = r_5 \quad (4.56)$$

$$d_\tau + d_{\sigma_t} = r_6 \quad (4.57)$$

$$-d_{y_a} - d_{y_u} + d_{y_l} = r_7 \quad (4.58)$$

$$e_{m_T}^T d_{y_l} - d_{\pi_t} + d_{\zeta_t} = r_8 \quad (4.59)$$

$$e_{m_C}^T d_{y_c} + d_{\zeta_c} = r_9 \quad (4.60)$$

$$e_{m_G}^T d_{y_g} + d_{\zeta_g} = r_{10} \quad (4.61)$$

$$A_T^T d_{y_a} - A_C^T d_{y_c} - A_G^T d_{y_g} + d_{z_x} = r_{11} \quad (4.62)$$

$$Y_u d_{s_u} + S_u d_{y_u} = r_{12} \quad (4.63)$$

$$Y_l d_{s_l} + S_l d_{y_l} = r_{13} \quad (4.64)$$

$$Y_c d_{s_c} + S_c d_{y_c} = r_{14} \quad (4.65)$$

$$Y_g d_{s_g} + S_g d_{y_g} = r_{15} \quad (4.66)$$

$$\pi_t d_{\sigma_t} + \sigma_t d_{\pi_t} = r_{16} \quad (4.67)$$

$$\zeta_t d_\tau + \tau d_{\zeta_t} = r_{17} \quad (4.68)$$

$$\zeta_c d_\gamma + \gamma d_{\zeta_c} = r_{18} \quad (4.69)$$

$$\zeta_g d_\beta + \beta d_{\zeta_g} = r_{19} \quad (4.70)$$

$$Z_x d_x + X d_{z_x} = r_{20}. \quad (4.71)$$

4.2.2 Eliminação de Variáveis

As equações de (4.52) a (4.71) definem o sistema linear que determina as direções dos métodos de pontos interiores para a análise média. Este sistema pode ser resolvido diretamente mas esta opção é muito cara computacionalmente devido à sua grande dimensão. No entanto, este problema pode ser reduzido através da substituição de variáveis.

Isolando as variáveis duais de (4.63) a (4.71), obtemos:

$$\begin{aligned}
d_{y_u} &= S_u^{-1}(r_{12} - Y_u d_{s_u}) \\
d_{y_l} &= S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) \\
d_{y_c} &= S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) \\
d_{y_g} &= S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) \\
d_{\pi_t} &= \sigma_t^{-1}(r_{16} - \pi_t d_{\sigma_t}) \\
d_{\zeta_t} &= \tau^{-1}(r_{17} - \zeta_t d_{\tau}) \\
d_{\zeta_c} &= \gamma^{-1}(r_{18} - \zeta_c d_{\gamma}) \\
d_{\zeta_g} &= \beta^{-1}(r_{19} - \zeta_g d_{\beta}) \\
d_{z_x} &= X^{-1}(r_{20} - Z_x d_x)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

substituindo (4.72) em (4.58) à (4.62):

$$\begin{aligned}
-d_{y_a} - S_u^{-1}(r_{12} - Y_u d_{s_u}) + S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) &= r_7 \Rightarrow \\
-d_{y_a} + S_u^{-1}Y_u d_{s_u} - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} &= r_7 + S_u^{-1}r_{12} - S_l^{-1}r_{13} = r_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{m_T}^T S_l^{-1}(r_{13} - Y_l d_{s_l}) - \sigma_t^{-1}(r_{16} - \pi_t d_{\sigma_t}) + \tau^{-1}(r_{17} - \zeta_t d_{\tau}) &= r_8 \Rightarrow \\
-e_{m_T}^T S_l^{-1}Y_l d_{s_l} + \sigma_t^{-1}\pi_t d_{\sigma_t} - \tau^{-1}\zeta_t d_{\tau} &= r_8 + \sigma_t^{-1}r_{16} - \tau^{-1}r_{17} - e_{m_T}^T S_l^{-1}r_{13} = r_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{m_C}^T S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) + \gamma^{-1}(r_{18} - \zeta_c d_{\gamma}) &= r_9 \Rightarrow \\
-e_{m_C}^T S_c^{-1}Y_c d_{s_c} - \gamma^{-1}\zeta_c d_{\gamma} &= r_9 - e_{m_C}^T S_c^{-1}r_{14} - \gamma^{-1}r_{18} = r_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{m_G}^T S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) + \beta^{-1}(r_{19} - \zeta_g d_{\beta}) &= r_{10} \Rightarrow \\
-e_{m_G}^T S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - \beta^{-1}\zeta_g d_{\beta} &= r_{10} - e_{m_G}^T S_g^{-1}r_{15} - \beta^{-1}r_{19} = r_{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_T^t d_{y_a} - A_C^t S_c^{-1}(r_{14} - Y_c d_{s_c}) - A_G^t S_g^{-1}(r_{15} - Y_g d_{s_g}) + X^{-1}(r_{20} - Z_x d_x) &= r_{11} \Rightarrow \\
A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_c^{-1}Y_c d_{s_c} + A_G^t S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - X^{-1}Z_x d_x &= r_{11} + A_C^t S_c^{-1}r_{14} + A_G^t S_g^{-1}r_{15} - X^{-1}r_{20} = r_{25}.
\end{aligned}$$

O novo sistema linear é dado pelas equações de (4.52) à (4.57) em conjunto com as

equações abaixo:

$$-d_{y_a} + S_u^{-1}Y_u d_{s_u} - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} = r_{21} \quad (4.73)$$

$$-e_{m_T}^T S_l^{-1}Y_l d_{s_l} + \sigma_t^{-1}\pi_t d_{\sigma_t} - \tau^{-1}\zeta_t d_\tau = r_{22} \quad (4.74)$$

$$-e_{m_C}^T S_c^{-1}Y_c d_{s_c} - \gamma^{-1}\zeta_c d_\gamma = r_{23} \quad (4.75)$$

$$-e_{m_G}^T S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - \beta^{-1}\zeta_g d_\beta = r_{24} \quad (4.76)$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_c^{-1}Y_c d_{s_c} + A_G^t S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - X^{-1}Z_x d_x = r_{25}. \quad (4.77)$$

Isolando d_{s_u} da equação (4.52) e d_{σ_t} da equação (4.57) obtemos:

$$d_{s_u} = r_1 - d_a \quad (4.78)$$

$$d_{\sigma_t} = r_6 - d_\tau \quad (4.79)$$

e substituindo as equações acima em (4.73) e (4.74) temos:

$$S_u^{-1}Y_u(r_1 - d_a) - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - d_{y_a} = r_{21} \Rightarrow$$

$$-S_u^{-1}Y_u d_a - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - d_{y_a} = r_{21} - S_u^{-1}Y_u r_1 = r_{26}$$

$$-e_{m_T}^T S_l^{-1}Y_l d_{s_l} + \sigma_t^{-1}\pi_t(r_6 - d_\tau) - \tau^{-1}\zeta_t d_\tau = r_{22} \Rightarrow$$

$$-e_{m_T}^T S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - \sigma_t^{-1}\pi_t d_\tau - \tau^{-1}\zeta_t d_\tau = r_{22} - \sigma_t^{-1}\pi_t r_6 = r_{27}.$$

Restando as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_a + e_{m_T} d_\tau - d_{s_l} = r_2 \\ A_T d_x - d_a = r_3 \\ A_C d_x - e_{m_C} d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \\ A_G d_x - e_{m_G} d_\beta + d_{s_g} = r_5 \\ -e_{m_T}^T S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - (\sigma_t^{-1}\pi_t + \tau^{-1}\zeta_t) d_\tau = r_{27} \\ -e_{m_C}^T S_c^{-1}Y_c d_{s_c} - \gamma^{-1}\zeta_c d_\gamma = r_{23} \\ -e_{m_G}^T S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - \beta^{-1}\zeta_g d_\beta = r_{24} \\ A_T^t d_{y_a} + A_C^t S_c^{-1}Y_c d_{s_c} + A_G^t S_g^{-1}Y_g d_{s_g} - X^{-1}Z_x d_x = r_{25} \\ -S_u^{-1}Y_u d_a - S_l^{-1}Y_l d_{s_l} - d_{y_a} = r_{26}. \end{array} \right. \quad (4.80)$$

Definindo as seguintes matrizes diagonais para simplificar a notação:

$$\begin{aligned}
D_1 &= S_u^{-1}Y_u \\
D_2 &= S_l^{-1}Y_l \\
D_3 &= \sigma_t^{-1}\pi_t \\
D_4 &= \tau^{-1}\zeta_t \\
D_5 &= S_c^{-1}Y_c \\
D_6 &= \gamma^{-1}\zeta_c \\
D_7 &= S_g^{-1}Y_g \\
D_8 &= \beta^{-1}\zeta_g \\
D_9 &= X^{-1}Z_x
\end{aligned} \tag{4.81}$$

e substituindo (4.81)no modelo acima, temos:

$$d_a + e_{m_T}d_\tau - d_{s_l} = r_2 \tag{4.82}$$

$$A_T d_x - d_a = r_3 \tag{4.83}$$

$$A_C d_x - e_{m_C}d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \tag{4.84}$$

$$A_G d_x - e_{m_G}d_\beta + d_{s_g} = r_5 \tag{4.85}$$

$$-e_{m_T}^T D_2 d_{s_l} - (D_3 + D_4)d_\tau = r_{27} \tag{4.86}$$

$$-e_{m_C}^T D_5 d_{s_c} - D_6 d_\gamma = r_{23} \tag{4.87}$$

$$-e_{m_G}^T D_7 d_{s_g} - D_8 d_\beta = r_{24} \tag{4.88}$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t D_5 d_{s_c} + A_G^t D_7 d_{s_g} - D_9 d_x = r_{25} \tag{4.89}$$

$$-D_1 d_a - D_2 d_{s_l} - d_{y_a} = r_{26}. \tag{4.90}$$

Isolando d_{s_l} da equação (4.90) temos:

$$d_{s_l} = -D_2^{-1}(r_{26} + D_1 d_a + d_{y_a}) \tag{4.91}$$

Substituímos nas equações (4.82) e (4.86) obtendo:

$$d_a + e_{m_T}d_\tau + D_2^{-1}(r_{26} + D_1 d_a + d_{y_a}) = r_2 \Rightarrow$$

$$(I + D_2^{-1}D_1)d_a + e_{m_T}d_\tau + D_2^{-1}d_{y_a} = r_2 - D_2^{-1}r_{26} = r_{28}$$

$$-e_{m_T}^T D_2(-D_2^{-1}(r_{26} + D_1 d_a + d_{y_a})) - (D_3 + D_4)d_\tau = r_{27} \Rightarrow$$

$$e_{m_T}^T D_1 d_a + e_{m_T}^T d_{y_a} - (D_3 + D_4)d_\tau = r_{27} - e_{m_T}^T r_{26} = r_{29}.$$

Logo restaram as seguintes equações:

$$A_T d_x - d_a = r_3 \quad (4.92)$$

$$A_C d_x - e_{m_C} d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \quad (4.93)$$

$$A_G d_x - e_{m_G} d_\beta + d_{s_g} = r_5 \quad (4.94)$$

$$e_{m_T}^T D_1 d_a + e_{m_T}^T d_{y_a} - (D_3 + D_4)d_\tau = r_{29} \quad (4.95)$$

$$-e_{m_C}^T D_5 d_{s_c} - D_6 d_\gamma = r_{23} \quad (4.96)$$

$$-e_{m_G}^T D_7 d_{s_g} - D_8 d_\beta = r_{24} \quad (4.97)$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t D_5 d_{s_c} + A_G^t D_7 d_{s_g} - D_9 d_x = r_{25} \quad (4.98)$$

$$(I + D_2^{-1} D_1) d_a + e_{m_T} d_\tau + D_2^{-1} d_{y_a} = r_{28}. \quad (4.99)$$

Isolando d_a de (4.99), temos:

$$d_a = D_{10}(r_{28} - e_{m_T} d_\tau - D_2^{-1} d_{y_a}) \quad (4.100)$$

onde é $D_{10} = (I + D_2^{-1} D_1)^{-1}$. Substituindo d_a em (4.92) e (4.95) teremos:

$$A_T d_x - D_{10}(r_{28} - e_{m_T} d_\tau - D_2^{-1} d_{y_a}) = r_3 \Rightarrow$$

$$A_T d_x + D_{10} e_{m_T} d_\tau + D_{10} D_2^{-1} d_{y_a} = r_3 + D_{10} r_{28} = r_{30}$$

$$e_{m_T}^T D_1 D_{10}(r_{28} - e_{m_T} d_\tau - D_2^{-1} d_{y_a}) + e_{m_T}^T d_{y_a} - (D_3 + D_4)d_\tau = r_{29} \Rightarrow$$

$$-e_{m_T}^T (D_1 D_{10} D_2^{-1} - I) d_{y_a} - (e_{m_T}^T D_1 D_{10} e_{m_T} + (D_3 + D_4)) d_\tau = r_{29} - e_{m_T}^T D_1 D_{10} r_{28} = r_{31}.$$

Logo restaram as seguintes equações:

$$A_T d_x + D_{10} e_{m_T} d_\tau + D_{10} D_2^{-1} d_{y_a} = r_{30} \quad (4.101)$$

$$A_C d_x - e_{m_C} d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \quad (4.102)$$

$$A_G d_x - e_{m_G} d_\beta + d_{s_g} = r_5 \quad (4.103)$$

$$-e_{m_T}^T (D_1 D_{10} D_2^{-1} - I) d_{y_a} - (e_{m_T}^T D_1 D_{10} e_{m_T} + (D_3 + D_4)) d_\tau = r_{31} \quad (4.104)$$

$$-e_{m_C}^T D_5 d_{s_c} - D_6 d_\gamma = r_{23} \quad (4.105)$$

$$-e_{m_G}^T D_7 d_{s_g} - D_8 d_\beta = r_{24} \quad (4.106)$$

$$A_T^t d_{y_a} + A_C^t D_5 d_{s_c} + A_G^t D_7 d_{s_g} - D_9 d_x = r_{25} \quad (4.107)$$

Lembrando que,

$$A = \begin{pmatrix} A_T \\ A_C \\ A_G \end{pmatrix}$$

e definindo

$$d_1 = \begin{pmatrix} d_\tau \\ d_\gamma \\ d_\beta \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} d_{y_a} \\ d_{s_c} \\ d_{s_g} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} D_{10}e_{m_T} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{m_C} & 0 \\ 0 & 0 & -e_{m_G} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{10}D_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -(e_{m_T}^T D_1 D_{10} e_{m_T} + (D_3 + D_4)) & 0 & 0 \\ 0 & -D_6 & 0 \\ 0 & 0 & -D_8 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} -e_{m_T}^T (D_1 D_{10} D_2^{-1} - I) & 0 & 0 \\ 0 & -e_{m_C}^T D_5 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{m_G}^T D_7 \end{pmatrix},$$

$$r_p = \begin{pmatrix} r_{30} \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}, \tilde{r}_p = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{23} \\ r_{24} \end{pmatrix}, \tilde{D} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & D_7 \end{pmatrix}.$$

Assim substituímos (4.101), (4.102) e (4.103) por:

$$Ad_x + Ed_1 + Dd_2 = r_p.$$

Agora restaram as seguintes equações:

$$Ad_x + Ed_1 + Dd_2 = r_p \tag{4.108}$$

$$\tilde{E}d_2 + \hat{D}d_1 = \tilde{r}_p \tag{4.109}$$

$$A^t \tilde{D}d_2 - D_9 d_x = r_{25}. \tag{4.110}$$

Isolando d_1 de (4.109) teremos:

$$d_1 = \hat{D}^{-1}(\tilde{r}_p - \tilde{E}d_2). \quad (4.111)$$

Substituindo em (4.108) temos:

$$\begin{aligned} Ad_x + E\hat{D}^{-1}(\tilde{r}_p - \tilde{E}d_2) + Dd_2 &= r_p \Rightarrow \\ Ad_x - E\hat{D}^{-1}\tilde{E}d_2 + Dd_2 &= r_p - E\hat{D}^{-1}\tilde{r}_p = r_s. \end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$Ad_x - (E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)d_2 = r_s \quad (4.112)$$

$$A^t\tilde{D}d_2 - D_9d_x = r_{25}. \quad (4.113)$$

Isolando agora d_2 de (4.112) temos:

$$d_2 = (E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)^{-1}(Ad_x - r_s) \quad (4.114)$$

Substituindo em (4.113) teremos:

$$\begin{aligned} A^t\tilde{D}(E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)^{-1}(Ad_x - r_s) - D_9d_x &= r_{25} \Rightarrow \\ A^t\tilde{D}(E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)^{-1}Ad_x - D_9d_x &= r_{25} + A^t\tilde{D}(E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)^{-1}r_s = r. \end{aligned}$$

Logo restou a seguinte equação:

$$(A^t\tilde{D}(E\hat{D}^{-1}\tilde{E} - D)^{-1}A + D_9)d_x = r. \quad (4.115)$$

Este sistema é simétrico e definido positivo podendo ser resolvido pela decomposição de Cholesky. Sua dimensão é muito menor que o sistema original representado pelas equações (4.52) a (4.71).

A primeira vista, a inversão da matriz $(D - E\hat{D}^{-1}\tilde{E})^{-1}$ parece ser computacionalmente cara. Mas se utilizarmos a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury [6] obtemos a seguinte relação:

$$(D - E\hat{D}^{-1}\tilde{E})^{-1} = D^{-1} + D^{-1}E\hat{D}^{-1}(I_3 - \tilde{E}D^{-1}E\hat{D}^{-1})^{-1}\tilde{E}D^{-1} \quad (4.116)$$

que envolve a inversão de uma matriz diagonal $I_3 - \tilde{E}D^{-1}E\hat{D}^{-1}$ de dimensão 3. Portanto esta inversa pode ser facilmente calculada não representando grande esforço computacional.

4.2.3 Resumo do Método de Pontos Interiores

O método de pontos interiores desenvolvido nesta seção pode ser resumido da seguinte forma:

Seja, $f = (x, s_u, s_l, s_c, s_g, \sigma_t, \tau, \beta, \gamma)$ e $g = (y_u, y_l, y_c, y_g, \pi_t, \zeta_t, \zeta_c, \zeta_g, z_x)$

Dado um ponto interior (f^0, g^0)

Para $k = 1, 2, \dots$

Calcule as matrizes diagonais D_1 à D_9 por (4.81)

Calcule os resíduos:

r_1 a r_{20} por (4.51)

r_{21} a r_{25} por (4.73) à (4.77)

r_{26} e r_{27} por (4.90)e(4.86)

r_{28} e r_{29} por (4.99) e (4.95)

r_{30} e r_{31} por (4.101) e (4.104)

r_p e \tilde{r}_p por (4.108) e (4.109)

r_s e r por (4.112) e (4.115)

Calcule d_2 por (4.114),

Calcule d_1 por (4.111),

Calcule as direções:

d_a por (4.100), d_{s_l} por (4.91),

d_{s_u} por (4.78), d_{σ_t} por (4.79)

$d_{y_u}, d_{y_l}, d_{y_c}, d_{y_g}, d_{\pi_t}, d_{\zeta_t}, d_{\zeta_c}, d_{\zeta_g}, d_{z_x}$ por (4.72)

Calcule α_p e α_d de forma equivalente à descrita no Capítulo 2

$$a^{k+1} = a^k + \alpha_p d_a^k$$

$$y_a^{k+1} = y_a^k + \alpha_p d_{y_a}^k$$

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_p^k d_f^k$$

$$g^{k+1} = g^k + \alpha_d^k d_g^k$$

até convergir.

4.2.4 Método Preditor-Corretor para Análise Absoluta

No método preditor-corretor dois sistemas lineares determinam as direções. Primeiramente é calculada a *direção afim* (d_f, d_g, d_a, d_{y_a}) resolvendo o sistema linear (4.52) a (4.71) com $\mu = 0$. Em seguida, a direção desejada é obtida resolvendo o seguinte sistema linear [13]:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_a + d_{s_u} = r_1 \\ d_a + e_{m_T} d_\tau - d_{s_l} = r_2 \\ -d_a + A_T d_x = r_3 \\ A_C d_x - e_{m_C} d_\gamma + d_{s_c} = r_4 \\ A_G d_x - e_{m_G} d_\beta + d_{s_g} = r_5 \\ d_\tau + d_{\sigma_t} = r_6 \\ -d_{y_a} - d_{y_u} + d_{y_l} = r_7 \\ e_{m_T}^T d_{y_l} - d_{\pi_t} + d_{\zeta_t} = r_8 \\ e_{m_C}^T d_{y_c} + d_{\zeta_c} = r_9 \\ e_{m_G}^T d_{y_g} + d_{\zeta_g} = r_{10} \\ A_T^T d_{y_a} - A_C^T d_{y_c} - A_G^T d_{y_g} + d_{z_x} = r_{11} \\ Y_u d_{s_u} + S_u d_{y_u} = \tilde{r}_{12} \\ Y_l d_{s_l} + S_l d_{y_l} = \tilde{r}_{13} \\ Y_c d_{s_c} + S_c d_{y_c} = \tilde{r}_{14} \\ Y_g d_{s_g} + S_g d_{y_g} = \tilde{r}_{15} \\ \pi_t d_{\sigma_t} + \sigma_t d_{\pi_t} = \tilde{r}_{16} \\ \zeta_t d_\tau + \tau d_{\zeta_t} = \tilde{r}_{17} \\ \zeta_c d_\gamma + \gamma d_{\zeta_c} = \tilde{r}_{18} \\ \zeta_g d_\beta + \beta d_{\zeta_g} = \tilde{r}_{19} \\ Z_x d_x + X d_{z_x} = \tilde{r}_{20} \end{array} \right.$$

onde os novos resíduos são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12} = \mu e_{m_T} - Y_u S_u e_{m_T} - D\tilde{y}_u D\tilde{s}_u e_{m_T} \\ r_{13} = \mu e_{m_T} - Y_l S_l e_{m_T} - D\tilde{y}_l D\tilde{s}_l e_{m_T} \\ r_{14} = \mu e_{m_C} - Y_c S_c e_{m_C} - D\tilde{y}_c D\tilde{s}_c e_{m_C} \\ r_{15} = \mu e_{m_G} - Y_g S_g e_{m_G} - D\tilde{y}_g D\tilde{s}_g e_{m_G} \\ r_{16} = \mu - \pi_t \sigma_t - d\tilde{\pi}_t d\tilde{\sigma}_t \\ r_{17} = \mu - \zeta_t \tau - d\tilde{\zeta}_t d\tilde{\tau} \\ r_{18} = \mu - \zeta_c \gamma - d\tilde{\zeta}_c d\tilde{\gamma} \\ r_{19} = \mu - \zeta_g \beta - d\tilde{\zeta}_g d\tilde{\beta} \\ r_{20} = \mu e - Z_x X e - D\tilde{z}_x D\tilde{x} e \end{array} \right.$$

e o parâmetro μ é calculado da forma descrita no Capítulo 2.

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Neste capítulo as versões de métodos de pontos interiores primal-dual e preditor-corretor para as análises média e absoluta são comparadas. Os métodos foram implementados em Matlab 5.3 e os testes realizados em um microcomputador PC compatível 900MHz usando o sistema operacional Linux.

Nos experimentos foram utilizados dois problemas. O primeiro é um exemplo teste pequeno de apenas 16 pixels e o segundo com 4096 pixels baseados em um problema real obtido na página www.trinity.edu/aholder/research/oncology/.

As Tabelas 5.1 a 5.4 resumem os resultados obtidos quanto ao número de iterações, contagem de operações de ponto flutuante (flops ou megaflops) e tempo de execução em segundos respectivamente, para os métodos primal-dual e preditor-corretor utilizando tanto o comando interno do Matlab quanto a decomposição de Cholesky. A tolerância utilizada para convergência é a raiz quadrada do ϵ da máquina [5] e o parâmetro τ tem o valor fixo 0,99995.

Na análise absoluta foram implementadas duas versões. A primeira delas utiliza a matriz do lado esquerdo da equação (4.116), a segunda versão (rápida) utiliza o lado direito da mesma equação. Somente a versão rápida foi utilizada nos experimentos para o problema de 4096 pixels.

Na Tabela 5.1 podemos ver que ambos os métodos se comportam bem para um problema pequeno e como seria de se esperar o método primal dual converge mais rápido pois o preditor corretor foi desenvolvido para problemas de grande porte. Da mesma forma, a utilização da decomposição de Cholesky no matlab para este problema não

proporciona ganhos significativos.

Método	Iterações	Flops	Tempo
Primal-Dual com Cholesky	12	81099	0,05
Primal-Dual sem Cholesky	12	84075	0,05
Preditor-Corretor com Cholesky	10	91568	0,07
Preditor-Corretor sem Cholesky	10	98548	0,06

Tabela 5.1: Exemplo com 16 pixels - Análise Média

Na Tabela 5.2 os resultados para a análise absoluta são similares ao da análise média, sendo que a utilização da decomposição de Cholesky obteve convergência ligeiramente mais rápida. A versão rápida que inverte a matriz de forma eficiente reduziu quase à metade o número de flops necessário à convergência e também reduz o número de iterações.

Método	Iterações	Flops	Tempo
Primal-Dual com Cholesky	9	123034	0,06
Primal-Dual sem Cholesky	9	125266	0,06
Preditor-Corretor com Cholesky	6	109103	0,05
Preditor-Corretor sem Cholesky	7	131980	0,06
Primal-Dual rápido com Cholesky	8	65713	0,05
Primal-Dual rápido sem Cholesky	8	67697	0,05
Preditor-Corretor rápido com Cholesky	6	61445	0,05
Preditor-Corretor rápido sem Cholesky	6	65645	0,05

Tabela 5.2: Exemplo com 16 pixels - Análise Absoluta

Para o problema de grande porte (Tabela 5.3) na análise média, podemos ver que o método preditor-corretor e o uso da decomposição de Cholesky já apresentam resultados significativamente melhores. O matlab mascara um pouco este resultado no tempo computacional mas no número de flops podemos observar melhor este desempenho superior.

O método primal dual não converge para este problema na análise absoluta (Tabela 5.4). O preditor corretor no entanto converge em um número muito pequeno de iterações, embora com um tempo computacional elevado. Estes experimentos foram realizados em

Método	Iterações	MFlops	Tempo
Primal-Dual com Cholesky	14	69,0	75,3
Primal-Dual sem Cholesky	14	93,3	76,8
Preditor-Corretor com Cholesky	13	73,1	71,7
Preditor-Corretor sem Cholesky	13	141,1	75,6

Tabela 5.3: Exemplo com 4096 pixels - Análise Média

uma estação Sun Blade 100 com o Matlab 6.0, assim, não foi possível estimar o número de flops.

Método	Iterações	Tempo
Primal-Dual rápido com Cholesky	Max.	
Primal-Dual rápido sem Cholesky	Max.	
Preditor-Corretor rápido com Cholesky	8	974,3
Preditor-Corretor rápido sem Cholesky	8	975,2

Tabela 5.4: Exemplo com 4096 pixels - Análise Absoluta

Capítulo 6

Conclusões

Os resultados de nossa implementação em Matlab indicam que os métodos de pontos interiores são promissores para esta classe de problemas sendo o método preditor-corretor mais eficiente, principalmente no aspecto robustez. Pode-se observar que as iterações do método são rápidas devido à redução do sistema linear via eliminação de variáveis, resultando em um sistema da ordem do número de linhas, que determina o número de pixels, da matriz de propagação da radiação, obtendo em ambos os casos um sistema de muito menor dimensão, simétrico e definido positivo que pode ser decomposto utilizando Cholesky acelerando a convergência do método.

Na análise absoluta houve uma simplificação do modelo para facilitar o desenvolvimento do método e da resolução dos sistemas lineares. Foram criadas variáveis que representam a soma dos elementos dos vetores cujos valores individuais não são importantes.

Além disso, é possível reduzir o esforço computacional, utilizando a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury para inverter uma matriz. Devido a utilização desta fórmula, somente matrizes diagonais são invertidas.

6.1 Perspectivas Futuras

Pretende-se comparar a implementação desenvolvida com a implementação descrita em [8] para o método de pontos interiores, que não realiza a redução do sistema linear. Nesta comparação serão utilizados problemas reais e espera-se uma significativa redução no

tempo computacional da versão especializada dos métodos.

Para obter melhor desempenho computacional explorando totalmente as estruturas matriciais envolvidas, deve-se realizar uma implementação utilizando linguagens como C ou Fortran.

Bibliografia

- [1] Ilan Adler, Narendra Karmarkar, Mauricio G. C. Resende, and Geraldo Veiga. Data structures and programming techniques for the implementation of Karmarkar's algorithm. *ORSA Journal on Computing*, 1:84–106, 1989.
- [2] Ilan Adler, Mauricio G. C. Resende, Geraldo Veiga, and Narendra Karmarkar. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297–335, 1989.
- [3] G. K. Bahr, J. G. Kereiakes, H. Horwitz, R. Finney, J. Galvin, and K. Good. The method of linear programming applied to radiation treatment planning. *Radiology*, 91:686–693, 1968.
- [4] Jordi Castro. A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows. *SIAM J. Optimization*, 10(3):852–877, 2000.
- [5] John E. Dennis and Robert B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [6] I. S. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid. *Direct Methods for Sparse Matrices*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [7] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins - 3^a edição, 1996.
- [8] Allen Holder. Designing radiotherapy plans with elastic constraints and interior point methods. *A ser publicado em Health Care and Management Science*, 6(1), 2003.

- [9] M. Langer, R. Brown, M. Urie, J. Leong, M. Stracher, and J. Shapiro. Large scale optimization of beam weights under dose-volume restrictions. *International J. of Radiation Oncology, Biology, Physics*, 18:887–893, 1990.
- [10] W. Lodwick, S. McCout, F. Newman, and S. Humphries. *Series in Applied Mathematics - Computational, Radiology and imaging: Therapy and Diagnosis*. Optimization methods for radiation therapy plans. In C. Borges and F. Natterer, editors, IMA. Springer-Verlag., 1998.
- [11] I. J. Lustig, R. E. Marsten, and D. F. Shanno. On implementing Mehrotra’s predictor-corrector interior point method for linear programming. *SIAM J. Optimization*, 2:435–449, 1992.
- [12] K. A. McShane, C. L. Monma, and D. F. Shanno. An implementation of a primal-dual interior-point method for linear programming. *ORSA Journal on Computing*, 1:70–83, 1989.
- [13] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4):575–601, 1992.
- [14] Renato D. C. Monteiro, Ilan Adler, and Mauricio G. C. Resende. A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension. *Mathematics of Operations Research*, 15:191–214, 1990.
- [15] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira and Christiano Lyra. Interior point methods for the polynomial L_∞ fitting problem. *Trabalho submetido ao Internacional Transactions in Operational Research*, 2002.
- [16] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira, Mário A. Nascimento, and Christiano Lyra. Efficient implementation and benchmark of interior point methods for the polynomial L_1 fitting problem. *Statistics & Data Analysis*, 35(2):119–135, 2000.
- [17] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira, Leonardo Nepomuceno, and Secundino Soares. Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches. *Trabalho submetido à Electrical Power & Energy Systems*, 2001.

- [18] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira, Leonardo Nepomuceno, and Secundino Soares. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *Aceito para publicação, IEEE Transactions on Power Systems*, 2003.
- [19] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira and Secundino Soares. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo. *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática, em CD-ROM, Florianópolis, SC*, pages 790–795, 2000.
- [20] Aurelio Ribeiro Leite Oliveira and Secundino Soares. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo. *Trabalho aceito para publicação na Revista SBA: Controle & Automação*, 2003.
- [21] Mauricio G. C. Resende and Geraldo Veiga. An efficient implementation of a network interior point method. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12:299–348, 1993.
- [22] I. Rosen, R. Lane, S. Morril, and J. Belli. Treatment plan optimization using linear programming. *Med. Phys.*, 18:141–152, 1990.
- [23] D. Shepard, M. Ferris, G. Olivera, and T. Mackie. Optimizing the delivery of radiation therapy to cancer patients. *SIAM Review*, 41(4):721–744, 1999.
- [24] D. Sonderman and P. Abrahamson. Radiotherapy treatment design using mathematical programming models. *Operations Research*, 33(4):705–725, 1985.
- [25] R. A. Tapia and Yin Zhang. Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 73:229–242, 1992.
- [26] R.J. Vanderbei. *An interior-point code for quadratic programming*. Technical Report SOR-94-15, Department of civil Engineering and Operations Research, Princeton University, Princeton, N.J., 1994.
- [27] S. J. Wright. *Primal–Dual Interior–Point Methods*. SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.