Testes Acelerados Assumindo um Modelo de Lei de Potência Inversa e Dados com Censuras do Tipo II

Teresa Cristina Martins Dias

Orientador: Dr. Jorge Alberto Achcar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em "Ciências de Computação e Matemática Computacional".

São Carlos

1992

À minha família

*Que triste seria o mundo
se tudo nele estivesse feito.
Se não se pudesse plantar uma flor
ou iniciar uma conquista.*

Gabriela Mistral

Agradeço ao Prof. Dr. Jorge A. Achcar pela orientação segura e dedicada.

À Prof^a. Maria Creusa S. Galvão Leite pelo incentivo no início do curso de pós - graduação.

Aos colegas e funcionários da UFSCar pela acolhida. Aos funcionários da USP pela colaboração na realização desse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro parcial recebido.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para a realização desse trabalho. Em especial aos amigos Castilho, Silvely, Élvia, Gilberto e Joãozinho pela amizade e apoio durante este período, dentro e fora do ICMSC.

RESUMO

Nesta dissertação de mestrado, alguns resultados sobre análise estatística de *testes de sobrevivência acelerados* são apresentados. Em particular, um modelo de teste de vida acelerado, *Modelo de Lei de Potência Inversa*, é considerado assumindo uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência dos componentes, com censuras do Tipo II. Análises clássica e Bayesiana são apresentadas para fazer inferências a respeito dos parâmetros de interesse. Na análise clássica, estimadores pontuais e intervalos de confiança são encontrados usando métodos assintóticos. Na análise Bayesiana, partindo de uma priori de Jeffreys, densidades a posteriori marginais para os parâmetros de interesse e intervalos de credibilidade são determinados, utilizando o Método de Laplace para aproximações de integrais. Uma análise Bayesiana é desenvolvida também, quando os tempos de falha seguem uma distribuição de Weibull. Também são apresentados, alguns métodos de Planejamento de Experimentos e uma aplicação de densidades preditivas em Controle de Qualidade.

Os métodos propostos são ilustrados através de dois exemplos.

ABSTRACT

In this dissertation, we present some results on the statistical analysis of accelerated life tests. In particular, we consider the Inverse Power Law Model, assuming an Exponential distribution for the lifetimes of the components with censored data under a type II censoring mechanism. Classical and Bayesian analysis are presented to get inferences about the parameters of interest. In the classical analysis, point estimates and confidence intervals are obtained using asymptotics methods. In the Bayesian analysis, assuming a noninformative Jeffreys prior density, marginal posterior densities for the parameters of interest and credible intervals are obtained using the Laplace's method for the approximation of integrals. Bayesian analysis is also considered when the failure times follow a Weibull distribution. Some methods for design of experiments are developed and an application of predictive densities in Quality Control is presented.

The proposed methods are illustrated with two numerical examples.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Análise Clássica do Modelo de Lei de Potências	6
3	Análise Bayesiana	15
3.1	Análise Bayesiana assumindo α e β desconhecidos	16
3.2	Análise Bayesiana assumindo β conhecido	20
4	Planejamento de Experimentos	24
4.1	Planejamento Seqüencial	24
4.2	Determinação de r_{k+1}	27
5	Densidades Preditivas	30
5.1	Densidades Preditivas em Controle de Qualidade	34
6	Análise Bayesiana assumindo uma Distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência	37
6.1	Análise Bayesiana assumindo α , β e p desconhecidos	40
6.2	Posteriori Conjunta Marginal para θ_1^* e p : $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$	44

7	Dois Exemplos	48
7.1	Um Exemplo com a Distribuição Exponencial	48
7.2	Um Exemplo com a Distribuição de Weibull	57
7.2.1	Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p : $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$. . .	61
8	Considerações Futuras	64
	Apêndice A Método Delta	66
	Apêndice B Aproximação de Integrais pelo Método de Laplace	68
	Apêndice C Densidade a Posteriori Marginal para $\delta_1 = \ln \theta_1$ quando θ_1 e β são desconhecidos	70
	Bibliografia	73

Capítulo 1

Introdução

O estudo de confiabilidade de um componente ou de um sistema tem sido muito considerado na literatura estatística nas últimas décadas, por sua importância em sistemas de operação (eletrônicos, mecânicos, etc.). Quanto mais complexo for um sistema, mais difícil será achar uma medida de sua confiabilidade. Como um caso especial, considere os equipamentos eletrônicos atuais que são muito complexos devido ao grande avanço tecnológico e exigem componentes com baixa taxa de falha para se obter uma grande confiabilidade. Se o tipo de falha do sistema ou dos componentes é conhecido, pode-se então diminuir o custo da produção, garantir a manutenção e confiabilidade desse equipamento (ver por exemplo, Levenbach, 1957).

Determinar a taxa de falha em experimentos de teste de vida que são comuns na prática, é quase que impossível nas condições usuais de stress (temperatura, pressão, voltagem, ou outros fatores) e difíceis de serem simulados em laboratórios pois, normalmente exigem tempo ou custo muito elevados (ver por exemplo, Lawless, 1982).

Os testes acelerados consistem em observar o desempenho das peças submetidas a níveis de stress mais altos do que o usual, reduzindo artificialmente o tempo de falha dessas peças. A partir do conhecimento prévio a respeito da variação do comportamento de falha nas condições usuais e através dos testes de sobrevivência conduzidos sob condições aceleradas, chamados *testes de sobrevivência acelerados*, pode-se fazer inferências sobre características da distribuição de vida correspondente às condições normais de uso do componente.

Um exemplo interessante mostrado por R. L. Guild da indústria Sylvania, citado em Levenbach (1957) está relacionado ao tempo de queima de válvulas de rádio.

Neste exemplo, a distribuição ajustada ao tempo de falha não muda quando as condições do teste se tornam mais rigorosas, resultando em uma redução no tempo de queima na razão 30 : 1.

Para experimentos onde a distribuição do tempo de vida dos componentes é conhecida, boas estimativas para os parâmetros da distribuição podem ser obtidas, sem ter que esperar pela falha de todos os elementos da amostra (ver por exemplo, Epstein & Sobel, 1953). Este procedimento é conhecido como esquema de censuras.

Em situações onde o interesse é analisar a distribuição do tempo de vida de lâmpadas, válvulas de rádios, rolamentos ou de capacitores dielétricos, verifica-se que a distribuição Exponencial é muito usada na prática, pois caracteriza a distribuição do tempo de vida dos componentes e representa a taxa de falha constante para os itens.

De um modo geral, o conhecimento físico mostra que freqüentemente pode existir uma ou mais relações entre os parâmetros da distribuição de falha e as condições usuais do teste. O uso destes modelos ou relações tem sido discutido na literatura, especialmente pelos autores que tratam de mecanismos que induzem às falhas.

Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974), descrevem alguns modelos, baseados no conceito de mecânica estatística, tais como energia de ativação e teoria cinética. Por exemplo, o Modelo de Arrhenius,

$$\lambda_i = \exp\left\{\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right\}$$

e o Modelo de Eyring,

$$\lambda_i = V_i \exp\left\{\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right\}$$

têm sua maior aplicação em componentes eletrônicos, como por exemplo, semi - condutores. O Modelo de Lei de Potência Inversa,

$$\theta_i = \frac{\alpha}{V_i^\beta}$$

muito popular na indústria e engenharia, tem sua aplicação em capacitores dielétricos. Os parâmetros α e β são desconhecidos e V é a variável stress assumindo vários níveis, $i = 1, 2, \dots, k$. Para componentes onde os tempos de sobrevivência seguem uma distribuição Exponencial, eles analisam cada uma dessas relações entre o parâmetro da distribuição de vida e a variável stress V . Estimadores de máxima verossimilhança foram encontrados para α , β e para o parâmetro de interesse λ_u ou θ_u (tempo médio de sobrevivência dos itens nas condições normais de funcionamento).

Klein & Basu (1981) estudaram um modelo geral para tempos de falha com distribuição de Weibull, considerando o parâmetro de forma comum para todos os níveis de stress e os esquemas de censura do Tipo I, Tipo II e censura progressiva. Este Modelo Geral inclui como caso particular, cada um dos modelos acima citados: Arrhenius, Eyring e Lei de Potência. Klein & Basu (1981a) estudaram este mesmo problema, considerando o parâmetro de forma diferente para cada um dos níveis de stress. Nestes estudos, encontraram estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do Modelo Geral e de interesse. Nelson (1972), assumindo tempos de falha com distribuição de Weibull e a relação dada pelo Modelo de Lei de Potência Inversa, apresenta alguns métodos gráficos para verificar a adequabilidade do Modelo e estimar os parâmetros de interesse e percentis da distribuição de vida. Considerando uma relação linear inversa entre a variável stress e os parâmetros da distribuição Gaussiana Inversa, Bhattacharyya & Fries (1981), determinam estimadores de máxima verossimilhança e estimadores de mínimos quadrados para os parâmetros de interesse.

Neste trabalho será desenvolvida uma análise clássica e Bayesiana assumindo que os tempos de falha dos componentes têm distribuição Exponencial, com função densidade,

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad \lambda_i > 0 \text{ e } t \geq 0$$

onde a relação entre o parâmetro da distribuição do tempo de sobrevivência, λ_i , e a variável stress para vários níveis, V_i , é dada pelo Modelo de Lei de Potência Inversa,

$$\theta_i = \frac{\alpha}{V_i^\beta}$$

onde $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < \infty$ e $\theta_i = \frac{1}{\lambda_i}$.

A adequabilidade do modelo Exponencial pode ser verificada usando métodos gráficos baseados em um estimador não - paramétrico da função de sobrevivência empírica, como por exemplo, o Estimador Produto - Limite de Kaplan & Meier (1958).

Em geral os pesquisadores da área industrial e de engenharia justificam o uso deste modelo a partir de considerações empíricas (ver por exemplo, Levenbach, 1957).

Em situações práticas de teste de vida, os dados de sobrevivência, em geral, são incompletos ou censurados. Isto pode ser devido ao próprio planejamento do experimento considerado para a coleta dos dados.

Um plano amostral muito usado nesta área é dado pelo esquema de censuras de Tipo II, onde sob as condições ambientais, o teste é aplicado nos componentes e termina

quando um número pré - determinado de falhas é obtido. Além disso, são considerados k níveis de uma variável stress V_i , $i = 1, 2, \dots, k$, assumindo uma distribuição Exponencial para os tempos de sobrevivência dos componentes e para cada nível de stress é considerada uma amostra de n_i unidades e r_i falhas. Portanto, para um nível i de stress V , tem-se os tempos de sobrevivência ordenados associados a este nível i , $t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{r_i}$ e $(n_i - r_i)$ observações censuradas iguais à t_{r_i} , $i = 1, 2, \dots, k$.

No esquema de amostragem completa, todos os componentes da amostra são observados até que todos falhem. Para este plano amostral, as inferências são análogas ao esquema de censuras do Tipo II, quando $n = r$ ou $n_i = r_i$ para cada nível i de stress V .

Um outro esquema de censuras é dado pelo esquema de censuras de Tipo I. Nesse esquema, são observados os tempos de sobrevivência de n unidades durante um tempo fixo t_0 . Este plano amostral tem grande aplicação na área médica. Lawless (1982), descreve outros planos amostrais.

Considerando os testes acelerados, é possível desenvolver métodos para planejar um experimento. O pesquisador pode estar interessado em determinar um nível adicional de stress V_i ou ainda, determinar o número necessário de falhas r_i para um dado nível de stress V_i . Zelen (1959), apresenta alguns métodos de planejamento de experimentos, envolvendo duas variáveis stress, assumindo as distribuições Exponencial com dois parâmetros, de Weibull e outras, para os tempos de vida dos componentes.

Um estudo importante dentro da Estatística está relacionado com a teoria de decisão e " predição " de observações futuras, considerando os dados observados . Na literatura, a aplicação de densidades preditivas tem sido de grande importância (ver por exemplo, Box & Tiao, 1973; Aitchinson & Dunsmore, 1975 e Press, 1988). Uma aplicação é dada por Achcar (1984) que determina a densidade preditiva para uma observação futura, para dados com censura do Tipo II, onde o logaritmo dos tempos de sobrevivência seguem um modelo Log - linear. Também verifica a adequabilidade do modelo proposto através de densidades preditivas. Achcar & Bolfarine (1988), discutem alguns problemas de verificação do modelo de regressão Gama Generalizado, usando densidades preditivas.

Em geral, o interesse do pesquisador está voltado para inferências sobre o tempo médio de vida dos componentes, sob condições usuais de funcionamento. Numa análise clássica, os pesquisadores encontram os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros α e β e usam métodos assintóticos para as inferências sobre os parâmetros. Sprott & Kalbfleish (1968), discutem e comparam resultados de funções de verossimilhança e aproximações da Teoria das Grandes Amostras, através de exemplos

dados na literatura. Para o parâmetro θ_1 , tempo médio de vida sob as condições usuais de funcionamento, em geral, são considerados resultados assintóticos obtidos a partir do Método " Delta " (ver por exemplo, Miller, 1981).

Num estudo de testes acelerados, Bhattacharya (1967), apresenta uma análise Bayesiana do modelo Exponencial, discutindo o uso das densidades a priori Uniforme, Gama Inversa e a priori quasi - densidade.

O objetivo principal deste trabalho, é desenvolver uma análise Bayesiana do Modelo de Lei de Potência Inversa, assumindo uma priori de Jeffreys para os parâmetros α e β (ver por exemplo, Box & Tiao, 1973) e uma distribuição Exponencial para os tempos de vida dos componentes.

Em alguns casos, a taxa de falha dos componentes apresenta pequenas variações, podendo ser considerada constante, onde é possível ajustar a distribuição Exponencial para os dados. Neste trabalho, também será desenvolvida uma análise Bayesiana do Modelo de Lei de Potência Inversa assumindo uma distribuição de Weibull. Considerando a densidade a posteriori para o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, pode-se verificar se a suposição de distribuição Exponencial é razoável para os dados pois, o modelo de Weibull engloba o modelo Exponencial como um caso particular.

Utilizando o Método de Laplace para aproximação de integrais, as densidades a posteriori marginais para os parâmetros de interesse são determinadas (ver por exemplo, Tierney & Kadane, 1986; Tierney, Kass & Kadane, 1989) quando não é possível resolver analiticamente as integrais envolvidas. Além disso, são desenvolvidos alguns métodos para planejamento de experimentos e uma aplicação de densidades preditivas em Controle de Qualidade é apresentada.

Os métodos propostos neste trabalho, são ilustrados com dois exemplos.

Capítulo 2

Análise Clássica do Modelo de Lei de Potências

Neste capítulo será apresentada uma análise clássica para determinação de estimadores de máxima verossimilhança e intervalos de confiança para os parâmetros α e β do Modelo de Lei de Potência, considerando que os dados provêm de uma amostra com distribuição Exponencial. Através desses estimadores, serão feitas inferências sobre características da distribuição de vida dos componentes sob condições usuais, em especial para o parâmetro de interesse θ_1 .

Considere um teste de sobrevivência acelerado em um planejamento onde são aplicados nos itens, k valores acelerados de stress V_i , $i = 1, 2, \dots, k$. O comportamento de falha desses componentes é especificado pela distribuição Exponencial.

Seja então, $f(t; \lambda_i)$ a *função densidade de probabilidade* da variável aleatória tempo de falha, $T > 0$, dada por :

$$f(t; \lambda_i) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t} & \lambda_i > 0 \text{ e } t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.1)$$

Correspondente à função densidade de probabilidade, fica determinada a probabilidade acumulada de falha de um componente até o tempo t , dada pela *função distribuição*:

$$F(t) = P[T \leq t] = \int_0^t f(x) dx$$

e a probabilidade de que o componente não tenha falha até o tempo t , dada pela *função*

de Sobrevivência ou função de Confiabilidade:

$$S(t) = 1 - F(t) = P[T > t] = \int_t^{\infty} f(x)dx$$

Considerando a função densidade de probabilidade, (2.1), tem-se:

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$S(t) = e^{-\lambda t}$$

Através da função Risco, $h(t)$, verifica-se que a função densidade Exponencial tem uma taxa constante de falha, λ (ver por exemplo, Lawless, 1982):

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda$$

Considerando k níveis de stress, tem-se que λ_i é a taxa constante de falha sob um stress V_i e $\theta_i = 1/\lambda_i$ é o tempo médio de sobrevivência sob o stress V_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Assumir que a relação entre o parâmetro da distribuição de falha e o stress é definida pelo Modelo de Lei de Potência Inversa:

$$\theta_i = \frac{\alpha}{V_i^\beta} \quad (2.2)$$

para α e β pertencentes ao espaço paramétrico Θ , onde $\Theta = \{\alpha, \beta : \alpha > 0; -\infty < \beta < \infty\}$.

Observar que α e β são parâmetros desconhecidos a serem estimados.

Assumindo a relação (2.2) entre o parâmetro da distribuição de falha e o stress, duas suposições são feitas a respeito do comportamento de falha do planejamento:

(i) O aumento dos níveis de stress não muda o tipo da distribuição de sobrevivência, $f(t; \lambda_i)$ da distribuição Exponencial, mas a variação dos níveis influencia os valores dos parâmetros;

(ii) A relação entre o stress e o parâmetro é válida somente para um certo intervalo de valores do stress. Fora desse intervalo, podem ocorrer alterações no mecanismo de falha do sistema, mudando essa relação (ver por exemplo, Singpurwalla, 1971).

Em testes de sobrevivência, os tempos de falha tornam-se disponíveis de uma maneira ordenada. Se n observações são submetidas ao mesmo estímulo de falha, então

o item mais fraco falha primeiro, o segundo mais fraco é o próximo a falhar, e assim sucessivamente, até que o último item falhe.

Epstein & Sobel (1953) mostram duas vantagens associadas à possibilidade de se interromper o teste antes de todas as n observações falharem. A primeira diz respeito ao fato que se pode chegar a uma conclusão em menor tempo e com um número menor de observações a serem testadas e a segunda, que se pode obter um estimador não viciado e de variância mínima, para o parâmetro em estudo.

O esquema de censura do Tipo II adotado no planejamento, em tais situações, garante ainda uma economia no custo do experimento.

Assim, no início do teste, fixar o seguinte:

- k níveis de stress V_i suficientemente grandes para induzirem falhas;
- n_i itens a serem observados em cada nível de stress;
- r_i falhas correspondentes a cada nível V_i .

Os k testes são realizados aplicando-se constantemente o stress V_i nas n_i unidades. Interromper os testes logo após a r_i -ésima falha ocorrer e tomar os seus respectivos tempos de falhas aleatórias ordenados e não-censurados $t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{r_i i}$ observados e as $(n_i - r_i)$ observações censuradas restantes iguais à $t_{r_i i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Assumir então que os tempos de falha constituem uma amostra de n variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição, porém com o parâmetro λ_i diferente para cada nível de stress V_i e desconhecido, onde a forma da função densidade é conhecida, dada por (2.1) e $n = n_1 + \dots + n_k$. Tem-se por objetivo encontrar estatísticas, funções das observações $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{r_i i})$, para serem usadas como estimadores de α e β ou de funções desses parâmetros tal como o modelo dado em (2.2).

Sendo V_1 o nível de stress sob as condições usuais de funcionamento do teste, em particular, quer-se estimar o *tempo médio de sobrevivência* θ_1 , sob o nível V_1 .

Definição 2.1 *Sejam $t_{(1i)} < t_{(2i)} < \dots < t_{(r_i i)}$, os tempos observados das r_i primeiras falhas das variáveis aleatórias independentes $T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{n_i i}$ com função densidade dada em (2.1), $r_i \leq n_i$ produzidos sob um stress V_i ; $(t_{(1i)}, t_{(2i)}, \dots, t_{(r_i i)})$ é chamado estatística de ordem da amostra i , $i = 1, 2, \dots, k$.*

Teorema 2.1 A função densidade conjunta das r primeiras estatísticas de ordem de $(T_{(1i)}, T_{(2i)}, \dots, T_{(r,i)})$ é dada por:

$$f(t_{(1i)}, \dots, t_{(r,i)}) = \frac{n_i!}{(n_i - r_i)!} f(t_{(1i)}) \dots f(t_{(r,i)}) [S(t_{(r,i)}; \lambda_i)]^{(n_i - r_i)} \quad (2.3)$$

para $i = 1, 2, \dots, k$ (ver por exemplo, Mood, Graybill & Boes, 1974).

Para verificar a expressão acima, note que o coeficiente combinatório representa o número de maneiras a escolher uma unidade correspondente a cada um dos $t_{(1i)}, \dots, t_{(r,i)}$ e $(n_i - r_i)$ unidades para os tempos de falhas não observados. O fator produto representa a densidade conjunta dos r_i tempos de falhas observados, dado o parâmetro λ_i , e finalmente, o último fator representa a probabilidade que $(n_i - r_i)$ unidades tenham duração de vida maior que $t_{(r,i)}$.

Notação: Por facilidade, adota-se a seguinte igualdade:

$$\begin{cases} t_{(1i)} = t_{1i} \\ t_{(2i)} = t_{2i} \\ \vdots \\ t_{(r,i)} = t_{r,i} \end{cases}$$

Tem-se agora um modelo estatístico e a relação entre o parâmetro deste modelo e o stress bem definidos. Torna-se possível então, estimar os parâmetros da distribuição que geram os dados e o parâmetro de interesse.

O Método da Máxima Verossimilhança, permite estimar os parâmetros α e β , e conseqüentemente estimar θ_i . Este método consiste em encontrar o valor dos parâmetros α e β , que com maior probabilidade, produzem os dados $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{r,i})$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Definição 2.2 A função de verossimilhança do resultado observado, sob o modelo (2.1), com censuras do Tipo II assumindo k níveis aleatorizados da variável stress, é dada por:

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^k \{f(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{r,i}; \lambda_i)\} \quad (2.4)$$

onde $f(t_{1i}, \dots, t_{r,i})$ é dada em (2.3).

Substituindo (2.3) na equação (2.4) e considerando $V_1, V_2, \dots, V_k$ valores fixos, $L(\alpha, \beta)$ é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ji}; \lambda_i) [1 - F(t_{r,i}; \lambda_i)]^{(n_i - r_i)} \right\} \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} \lambda_i \exp[-\lambda_i t_{ji}] (\exp[-\lambda_i t_{r,i}])^{(n_i - r_i)} \right\} \end{aligned}$$

Como $\lambda_i = 1/\theta_i = V_i^\beta / \alpha$

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \left(\prod_{j=1}^{r_i} \frac{V_i^\beta}{\alpha} \exp\left[-\frac{V_i^\beta}{\alpha} t_{ji}\right] \right) (\exp\left[-\frac{V_i^\beta}{\alpha} t_{r,i}\right])^{(n_i - r_i)} \right\} \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{V_i^{r_i \beta}}{\alpha^{r_i}} \exp\left[-\frac{\sum_{j=1}^{r_i} V_i^\beta t_{ji}}{\alpha}\right] \right) (\exp\left[-\frac{(n_i - r_i) V_i^\beta t_{r,i}}{\alpha}\right]) \right\} \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{V_i^{r_i \beta}}{\alpha^{r_i}} \exp\left[-\frac{V_i^\beta}{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{r_i} t_{ji} + (n_i - r_i) t_{r,i}\right)\right] \right\} \end{aligned}$$

Definindo $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ji} + (n_i - r_i) t_{r,i}$, tem-se:

$$L(\alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{V_i^{r_i \beta}}{\alpha^{r_i}} \exp\left[-\frac{A_i V_i^\beta}{\alpha}\right] \right\} \quad (2.5)$$

Suponha que exista um valor $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ que maximize $L(\alpha, \beta)$. Então $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é chamado de Estimador de Máxima Verossimilhança de (α, β) . Em geral, o Estimador de Máxima Verossimilhança, quando existe, é um conceito muito usado por suas boas propriedades estatísticas (ver por exemplo, Bickel & Doksum, 1977).

Resultado 2.1 Se $L(\alpha, \beta)$ dada em (2.4), é diferenciável em α e β , então $L(\alpha, \beta)$ e $l(\alpha, \beta) = \ln L(\alpha, \beta)$ possuem seus máximos para o mesmo valor de (α, β) . Então $\max L(\alpha, \beta) = \max l(\alpha, \beta)$; portanto $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, os estimadores de máxima verossimilhança de (α, β) , são soluções das equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

Portanto, aplicando o logaritmo em (2.5), $l(\alpha, \beta)$, é dado por:

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta) &= \ln L(\alpha, \beta) \\
 &= \ln \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{V_i^{\beta r_i}}{\alpha^{r_i}} \exp[-A_i V_i^\beta / \alpha] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^k \left\{ \beta r_i \ln V_i - r_i \ln \alpha - (A_i V_i^\beta) / \alpha \right\} \\
 &= \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - \ln \alpha \sum_{i=1}^k r_i - \left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \right) / \alpha
 \end{aligned}$$

Considerando todos os níveis i do stress V , o número total de falhas observadas é dado por, $r = \sum_{i=1}^k r_i$. Então:

$$l(\alpha, \beta) = \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \ln \alpha - \frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\alpha} \quad (2.6)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de (α, β) são dados pela resolução das equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad \text{então,} \quad \begin{cases} -r/\alpha + (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta) / \alpha^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \ln V_i) / \alpha = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = (\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}) / r \\ \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i = r \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \ln V_i / \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ji} + (n_i - r_i) t_{r_i, i}$ e $i = 1, 2, \dots, k$.

As equações de verossimilhança (2.7) são não lineares. Para solucionar numericamente estas equações, pode-se recorrer a métodos iterativos. Alguns artigos foram escritos com o propósito de analisar técnicas numéricas para soluções de equações de verossimilhança (ver Zacks, 1971).

A partir dos Estimadores de Máxima Verossimilhança pontuais para α e β , intervalos de confiança podem ser obtidos para esses parâmetros, usando a Teoria das Grandes Amostras. Sob certas condições, ela assegura que os Estimadores de Máxima Verossimilhança α e β têm assintoticamente uma distribuição Normal Bivariada. É interessante observar que se a Matriz de Informação de Fisher é composta por *constantes*, os resultados assintóticos em geral são bem precisos, mesmo para amostras não muito grandes (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980). Para o caso estudado neste trabalho, é necessário muito cuidado em verificar a precisão, especialmente para amostras não muito grandes pois, a Matriz de Informação de Fisher contém termos envolvendo o parâmetro α .

Suponha que uma função de verossimilhança $L(\alpha, \beta)$, de uma amostra aleatória de tamanho n , seja diferenciável em α e β até segunda ordem e se $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é Estimador de Máxima Verossimilhança para (α, β) então, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ têm distribuição Normal assintótica. Assim, considere o seguinte resultado:

Resultado 2.2 *Se a função de verossimilhança (2.5) para α e β é diferenciável em (α, β) até segunda ordem para um conjunto de dados fixado e se $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é o Estimador de Máxima Verossimilhança de (α, β) para uma amostra aleatória de tamanho n , considerando k níveis de stress, tem-se que:*

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \stackrel{a}{\sim} N \{(\alpha, \beta) ; I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} \quad (2.8)$$

onde $I(\alpha, \beta)$ é a Matriz de Informação de Fisher, dada por:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} E\{-\partial^2 l / \partial \alpha^2\} & E\{-\partial^2 l / \partial \alpha \partial \beta\} \\ E\{-\partial^2 l / \partial \beta \partial \alpha\} & E\{-\partial^2 l / \partial \beta^2\} \end{pmatrix}$$

Note que $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, o inverso da Matriz de Informação de Fisher, é a Matriz de Variância e Covariância assintótica de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, dada por:

$$I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\alpha}^2 & \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \\ \hat{\sigma}_{\beta\alpha} & \hat{\sigma}_{\beta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

(ver por exemplo, Bickel & Doksum, 1977).

A partir da função de verossimilhança dada em (2.6) e das primeiras derivadas parciais dadas anteriormente em (2.7) e notando que $E\{A_i\} = (r, \alpha)/V_i^\beta$, para todos os

níveis de stress $i = 1, \dots, k$, tem-se que:

$$E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \right\} = -\frac{r}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^k V_i^\beta \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} = E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} \right\} = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} V_i^\beta (\ln V_i) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)$$

$$E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right\} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} V_i^\beta (\ln V_i)^2 = \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2$$

Portanto, a Matriz de Informação de Fisher é dada por:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} r/\alpha^2 & (-\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)/\alpha \\ (-\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)/\alpha & \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Considerando a distribuição Normal Assintótica (2.8) para os Estimadores de Máxima Verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, é possível construir testes de hipóteses ou intervalos de confiança para os parâmetros α e β .

Assim, os intervalos de confiança para os parâmetros α e β , considerando um nível de confiança $100(1 - \gamma)\%$, são dados por:

$$\begin{aligned} ic(\alpha) &= [\hat{\alpha} - Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_\alpha ; \hat{\alpha} + Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_\alpha] \\ ic(\beta) &= [\hat{\beta} - Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_\beta ; \hat{\beta} + Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_\beta] \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $Z_{\gamma/2}$ é um percentil da distribuição Normal padronizada.

Note que o Estimador de Máxima Verossimilhança para $\theta_1 = \alpha/V_1^\beta$ é dado por $\hat{\theta}_1 = \hat{\alpha}/V_1^{\hat{\beta}}$. Para inferências sobre θ_1 , em geral os pesquisadores usam o *Método Delta* (ver Apêndice A). Como $\theta_1 = g(\alpha, \beta) = \alpha/V_1^\beta$, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 1/V_1^\beta \\ \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\alpha \ln V_1/V_1^\beta \end{cases} \quad (2.12)$$

Portanto, $\hat{\theta}_1 = \hat{\alpha}/V_1^{\hat{\beta}}$ tem uma distribuição Normal assintótica dada por,

$$\hat{\theta}_1 \approx N \left\{ \frac{\alpha}{V_1^{\beta}} ; \hat{\sigma}_{\theta_1}^2 \right\} \quad (2.13)$$

onde

$$\hat{\sigma}_{\theta_1}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha}^2 \left(\frac{1}{V_1^{\hat{\beta}}} \right)^2 + 2\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{V_1^{\hat{\beta}}} \right) \left(\frac{\hat{\alpha} \ln V_1}{V_1^{\hat{\beta}}} \right) + \hat{\sigma}_{\beta}^2 \left(\frac{\hat{\alpha} \ln V_1}{V_1^{\hat{\beta}}} \right)^2$$

e $\hat{\sigma}_{\alpha}^2$, $\hat{\sigma}_{\beta}^2$ e $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ são dados em (2.9).

Portanto, um *intervalo de confiança* para θ_1 com coeficiente de confiança $100(1 - \gamma)\%$ é dado por:

$$ic(\theta_1) = \left[\hat{\theta}_1 - Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_{\theta_1} ; \hat{\theta}_1 + Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_{\theta_1} \right] \quad (2.14)$$

Em geral o pesquisador deve tomar muito cuidado no uso desses resultados assintóticos, especialmente para amostras pequenas ou moderadas.

Capítulo 3

Análise Bayesiana

Neste capítulo será apresentada uma análise Bayesiana para o modelo Exponencial relacionado através de seu parâmetro λ , com o Modelo de Lei de Potência Inversa, propostos no Capítulo 2. Através de uma densidade a priori não - informativa de Jeffreys, será obtida a densidade a posteriori para os parâmetros α e β . Considerando inicialmente α e β parâmetros desconhecidos, obtém-se a densidade a posteriori conjunta para esses parâmetros e utilizando o Método de Laplace para aproximações de integrais, a densidade a posteriori para o parâmetro de interesse θ_1 é obtida. Supondo β conhecido, um intervalo de credibilidade é construído para θ_1 numa forma muito simples.

Em Inferência Bayesiana, o parâmetro da distribuição de vida com vida média $\theta = 1/\lambda$ é considerado uma variável aleatória, com função densidade $\Pi(\theta)$, que expressa o conhecimento (ou ignorância) que se tem a respeito do verdadeiro valor desconhecido do parâmetro.

O Teorema de Bayes leva à determinação da densidade a posteriori do parâmetro condicionado aos dados observados, incorporando a informação adicional dada pela densidade a priori $\Pi(\theta)$ (ver Box & Tiao, 1973).

3.1 Análise Bayesiana assumindo α e β desconhecidos

Nesta secção, assumo que o pesquisador não tem qualquer conhecimento a priori da distribuição dos parâmetros α e β . O problema do estatístico Bayesiano consiste em encontrar uma densidade a priori conveniente, dado o espaço paramétrico de seus parâmetros. Uma escolha freqüente entre os Bayesianos é a *priori não-informativa de Jeffreys*. A escolha da priori não - informativa de Jeffreys é justificada por suas boas propriedades (ver Box & Tiao, 1973).

Assumindo que o pesquisador não tem informação a respeito dos parâmetros α e β , a regra de Jeffreys determina uma densidade a priori não - informativa, dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta) \propto \{ \det I(\alpha, \beta) \}^{1/2}$$

onde $I(\alpha, \beta)$ é a Matriz de Informação de Fisher, descrita no Capítulo 2 .

Considerando a função densidade Exponencial (2.1), o Modelo de Lei de Potência (2.2) e o esquema de censuras do Tipo II descritos no Capítulo 2, a *densidade a priori de Jeffreys para α e β* é dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha} \left\{ r \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Como a expressão $\{ r \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 - (\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)^2 \}^{1/2}$ é constante em relação à α e β , sem perda de informação, $\Pi(\alpha, \beta)$ pode ser dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha} \quad \alpha \text{ e } \beta \in \Theta \quad (3.1)$$

onde $\Theta = \{(\alpha, \beta) : \alpha > 0 \text{ e } -\infty < \beta < \infty\}$.

Especificada então $\Pi(\alpha, \beta)$, a densidade a posteriori conjunta para α e β é determinada pelo Teorema de Bayes:

$$\Pi(\alpha, \beta | \text{dados}) = \frac{L(\alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} L(\alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}$$

onde $L(\alpha, \beta)$ é a função de verossimilhança (2.4) descrita no Capítulo 2 e $i = 1, 2, \dots, k$.

Observe que o conjunto de observações $(t_{1i}, \dots, t_{ri})$ nesta etapa da análise, são dados que já foram observados, portanto não são mais considerados variáveis aleatórias. Este conjunto passa agora a ser denotado por *dados*.

Note que a integração do denominador da densidade $\Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados})$ anterior, apresenta como resultado uma constante com respeito à α e β . Pelo Teorema de Bayes, se a função de verossimilhança for multiplicada por uma constante arbitrária, as inferências sobre a distribuição da densidade a posteriori não serão afetadas. Assim,

$$\Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados}) \propto L(\alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta)$$

Substituindo $L(\alpha, \beta)$ e $\Pi(\alpha, \beta)$, respectivamente em (2.5) e (3.1), tem-se que:

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados}) &\propto \frac{1}{\alpha} \left(\prod_{i=1}^k \frac{V_i^{\beta r_i}}{\alpha^{r_i}} \right) \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\} \\ &\propto \frac{1}{\alpha^{(r+1)}} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \right) \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Portanto, a densidade a posteriori conjunta para α e β é dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados}) \propto \alpha^{-(r+1)} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \right) \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\}, \quad (3.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, k$ e α e $\beta \in \Theta$.

A partir de (3.2), a densidade a posteriori marginal para β é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi(\beta \mid \text{dados}) &\propto \int_0^\infty \Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados}) d\alpha \\ &\propto \int_0^\infty \alpha^{-(r+1)} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \right) \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\} d\alpha \\ &\propto \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \right) \int_0^\infty \alpha^{-(r+1)} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\} d\alpha \end{aligned}$$

Resultado 3.1

$$\int_0^\infty b^a \theta^{-(a+1)} \exp\left[-\frac{b}{\theta}\right] d\theta = \Gamma(a)$$

(ver por exemplo, Abramowitz & Stegun, 1968).

Considerando,

$$\begin{cases} a = r \\ b = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \end{cases}$$

tem-se que:

$$\Pi(\beta | \text{dados}) \propto \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{(\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta)^r} \Gamma(r)$$

onde $\Gamma(r) = (r-1)!$

Portanto, a *densidade a posteriori marginal para β* é dada por:

$$\Pi(\beta | \text{dados}) \propto \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{(\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta)^r}, \quad -\infty < \beta < \infty \quad (3.3)$$

Através da maximização de (3.3), pode-se notar que o Estimador de Máxima Verossimilhança para β coincide com o estimador da moda da densidade a posteriori marginal para β , usando a densidade a priori de Jeffreys (3.1):

$$\ln \Pi(\beta | \text{dados}) \propto \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \ln \left\{ \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \right\}$$

Então:

$$\frac{d \ln \Pi(\beta | \text{dados})}{d\beta} \Big|_{\beta=\tilde{\beta}} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \frac{(\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\tilde{\beta}} \ln V_i)}{\sum_{j=1}^k A_j V_j^{\tilde{\beta}}} = 0$$

Portanto, $\tilde{\beta}$, o *estimador de β dado pela moda a posteriori* é dado por:

$$r \frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\tilde{\beta}} \ln V_i}{\sum_{j=1}^k A_j V_j^{\tilde{\beta}}} = \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i \quad (3.4)$$

Usualmente, os objetivos dos pesquisadores e o interesse da indústria estão voltados para inferências a respeito de θ_1 , o tempo médio de vida dos componentes sob o nível de stress usual V_1 .

Considerando o modelo dado em (2.2), e a densidade a posteriori (3.2), uma técnica de transformação de variáveis é utilizada para determinação da densidade a posteriori conjunta para β e θ_1 .

Seja então a transformação de variáveis:

$$\begin{cases} \beta &= \beta \\ \theta_1 &= \alpha/V_1^\beta; \end{cases} \quad \text{então,} \quad \alpha = \theta_1 V_1^\beta$$

e a matriz Jacobiana dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \partial\beta/\partial\beta & \partial\beta/\partial\theta_1 \\ \partial\alpha/\partial\beta & \partial\alpha/\partial\theta_1 \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 V_1^\beta \ln V_1 & V_1^\beta \end{pmatrix}$$

Portanto, $\det(J) = V_1^\beta$.

A densidade a posteriori conjunta para os parâmetros β e θ_1 , é dada por:

$$\Pi(\theta_1, \beta \mid \text{dados}) \propto \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{(\theta_1 V_1^\beta)^{r+1}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \right\} V_1^\beta$$

isto é,

$$\Pi(\theta_1, \beta \mid \text{dados}) \propto \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{(\theta_1^{r+1})(V_1^{\beta r})} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \right\} \quad (3.5)$$

Integrando a densidade (3.5) em relação ao parâmetro β , obtém-se a densidade a posteriori marginal para θ_1 :

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{V_1^{\beta r}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \right\} d\beta \quad (3.6)$$

Como existe dificuldade de se resolver analiticamente a integral em (3.6), um método para aproximação de integrais é usado. Tierney & Kadane (1986) apresentam uma solução para este tipo de problema, dada pela aproximação de integrais pelo *Método de Laplace*.

Pode-se reescrever a densidade (3.6) por,

$$\Pi(\theta_1 | \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-nh_{\theta_1}(\beta)\} d\beta$$

onde $nh_{\theta_1}(\beta) = \beta r \ln V_1 - \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i + (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta) / \theta_1 V_1^\beta$

Se $\hat{\beta}$ maximiza $-nh(\beta)$ e $\sigma = \{h''(\hat{\beta})\}^{-1/2}$, então:

$$\int \exp\{-nh(\beta)\} d\beta \approx \sqrt{2\pi\sigma} n^{-1/2} \exp\{-nh(\hat{\beta})\}$$

(ver Apêndice B).

Então, a *densidade a posteriori marginal* para θ_1 aproximada pelo Método de Laplace é dada por:

$$\Pi(\theta_1 | \text{dados}) \propto \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} r_i}}{\theta_1^{(r-1/2)} V_1^{\hat{\beta} r}} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\hat{\beta}} \left(\ln\left(\frac{V_i}{V_1}\right)\right)^2 \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}}{\theta_1 V_1^{\hat{\beta}}} \right\}, \quad (3.7)$$

para $\theta_1 > 0$.

3.2 Análise Bayesiana assumindo β conhecido

Assumindo agora que o parâmetro β é conhecido, torna-se possível determinar um estimador pontual e construir um intervalo de credibilidade para o parâmetro de interesse θ_1 , numa forma bem simples.

A função de verossimilhança (2.5) para α e β , passa agora a ser dada somente em função de α :

$$L(\alpha) \propto \prod_{i=1}^k \frac{V_i^{\beta r_i}}{\alpha^{r_i}} \exp \left\{ -\frac{A_i V_i^\beta}{\alpha} \right\}$$

Considerando a densidade a priori de Jeffreys, $\Pi(\alpha) \propto 1/\alpha$, $\alpha > 0$, e a função de verossimilhança acima, a densidade a posteriori para α é dada por:

$$\Pi(\alpha | \text{dados}) = \frac{L(\alpha)\Pi(\alpha)}{\int_0^\infty L(\alpha)\Pi(\alpha)d\alpha}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha \mid \text{dados}) &= \frac{\alpha^{-(r+1)} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \exp\{-(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)/\alpha\}}{\int_0^\infty [\prod_{j=1}^k V_j^{\beta r_j} / (\alpha^{-(r+1)})] \exp\{-(\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta)/\alpha\} d\alpha} \\ &= \frac{\alpha^{-(r+1)} \exp\{-\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta / \alpha\}}{\int_0^\infty \alpha^{-(r+1)} \exp\{-\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta / \alpha\} d\alpha}\end{aligned}$$

Definindo $b = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta$ no Resultado (3.1), tem-se que a *densidade a posteriori marginal para α* é dada por:

$$\Pi(\alpha \mid \text{dados}) = \frac{\alpha^{-(r+1)}}{\Gamma(r)} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \right\}^r \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\alpha}\right\}, \quad \alpha > 0 \quad (3.8)$$

Considerando a densidade a posteriori para α dada em (3.8) e a transformação de variável $\theta_1 = \alpha/V_1^\beta$, isto é, $\alpha = \theta_1 V_1^\beta$, determina-se a densidade a posteriori para θ_1 , dada por:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \frac{V_1^\beta}{\Gamma(r)} (\theta_1 V_1^\beta)^{-(r+1)} \left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \right)^r \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta}\right\}$$

Logo, a *densidade a posteriori para θ_1 , assumindo β conhecido*, é dada por:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \frac{(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)^r}{\Gamma(r) V_1^{\beta r} \theta_1^{(r+1)}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta}\right\}, \quad \theta_1 > 0 \quad (3.9)$$

A maximização da equação acima fornece um estimador pontual para θ_1 : a moda a posteriori. O logaritmo de $\Pi(\theta_1 \mid \text{dados})$ é dado por,

$$\ln \Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = r \ln \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta - \ln \Gamma(r) - \beta r \ln V_1 - (r+1) \ln \theta_1 - \frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta}$$

$$\text{De, } \frac{d \ln \Pi(\theta_1 \mid \text{dados})}{d\theta_1} \Big|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = 0, \text{ tem-se que, } -\frac{r+1}{\theta_1} - \frac{1}{V_1^\beta} \left[-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1^2} \right] = 0$$

Portanto, $\tilde{\theta}_1$, o *estimador de θ_1 dado pela moda a posteriori com β conhecido* é dado por:

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k A_i (V_i/V_1)^\beta}{r+1} \quad (3.10)$$

Uma maneira de resumir parcialmente as informações contidas na distribuição a posteriori é através de intervalos de credibilidade. Vários intervalos podem ser construídos para cada parâmetro de interesse.

Como especificado anteriormente, a densidade a posteriori para θ_1 é dada na equação (3.9).

Definindo, $C = (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta) / V_1^\beta$ tem-se:

$$\Pi(\theta_1 | \text{dados}) = \frac{C^r}{\theta_1^{(r+1)} \Gamma(r)} \exp\left\{-\frac{C}{\theta_1}\right\}$$

Pela técnica da transformação de variáveis, verifica-se que a distribuição a posteriori para a variável $\lambda_1 = 1/\theta_1$, com $|d\theta_1/d\lambda_1| = 1/\lambda_1^2$, é dada por:

$$\Pi(\lambda_1 | \text{dados}) = \frac{C^r}{\lambda_1^2 \Gamma(r)} \left\{\frac{1}{\lambda_1}\right\}^{-(r+1)} \exp\left\{-\frac{C}{\lambda_1^{-1}}\right\}.$$

$$\text{Isto é, } \Pi(\lambda_1 | \text{dados}) = \frac{\lambda_1^{-(r+1)}}{\Gamma(r)} C^r \exp\{-\lambda_1 C\}, \quad \lambda_1 > 0$$

Note que $\lambda_1 | \text{dados} \sim \text{Gama}(r; C)$

ou seja, a variável λ_1 condicionada aos dados observados tem distribuição Gama com parâmetros $C = (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta) / V_1^\beta$ e $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é um número inteiro positivo.

Através de uma nova transformação de variáveis, pode-se chegar a uma outra distribuição conhecida, porém com maior facilidade para se trabalhar na construção de intervalos de credibilidade. A distribuição χ^2 é um caso particular da distribuição Gama (ver por exemplo, Mood, Graybill & Boes, 1974).

Definindo, $C\lambda_1 = x/2$, isto é, $\lambda_1 = x/2C$ onde $|d\lambda_1/dx| = 1/2C$, tem-se que,

$$\Pi(x | \text{dados}) = \frac{C^r}{\Gamma(r)} \left(\frac{x}{2C}\right)^{r-1} \exp\left\{-C \frac{x}{2C}\right\} \frac{1}{2C}$$

$$\text{Portanto, } \Pi(x | \text{dados}) = \frac{C^r}{\Gamma(r)} \frac{x^{(r-1)}}{2^r C^r} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

onde

$$\begin{cases} C &= (\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta) / V_1^\beta \\ r &= \sum_{i=1}^k r_i \\ X &= 2C\lambda_1 \end{cases}$$

Assim, a densidade a posteriori para a variável X condicionada aos dados tem uma distribuição χ^2 com $(2r)$ graus de liberdade:

$$\Pi(x \mid \text{dados}) = \frac{x^{(2r/2)-1}}{\Gamma(2r/2)2^{2r/2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

ou seja,

$$X \mid \text{dados} = \frac{2 \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \theta_1} \sim \chi_{2r}^2$$

Um intervalo de credibilidade para θ_1 com probabilidade $(1 - \gamma)$, é dado por:

$$P\left\{\chi_{2r}^2(\gamma/2) \leq X \leq \chi_{2r}^2(1 - \gamma/2)\right\} = 1 - \gamma$$

isto é,

$$P\left\{\chi_{2r}^2(\gamma/2) \leq \frac{2 \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \leq \chi_{2r}^2(1 - \gamma/2)\right\} = 1 - \gamma$$

onde $\chi_{2r}^2(\gamma/2)$ e $\chi_{2r}^2(1 - \gamma/2)$ são percentis da distribuição Quiquadrado com $2r$ graus de liberdade, dados por: $P\{X \leq \chi_{2r}^2(1 - \gamma/2)\} = 1 - \gamma/2$ e $P\{X \leq \chi_{2r}^2(\gamma/2)\} = \gamma/2$.

Portanto, um *intervalo de credibilidade* $100(1 - \gamma)\%$ para θ_1 condicionado aos dados é dado por:

$$ic(\theta_1) = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \chi_{2r}^2(1 - \gamma/2)} ; \frac{2 \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \chi_{2r}^2(\gamma/2)} \right] \quad (3.11)$$

Capítulo 4

Planejamento de Experimentos

Neste capítulo será apresentado um estudo sobre planejamento de experimentos para os testes de sobrevivência acelerados. Considerando k níveis de stress e um conjunto de dados observados, tem-se por objetivo encontrar o número necessário de falhas para um nível adicional de stress. Através deste estudo de planejamento, também é possível determinar o número de níveis de stress que devem ser considerados.

O interesse da indústria está voltado para experimentos com custo menor. Isto é, associando-se um custo operacional a cada unidade que falha, o custo total do experimento envolve o número total de falhas. Assim, torna-se importante estimar o número necessário (*mínimo*) de falhas.

Estando interessado em adicionar um nível de stress V_{k+1} ao seu experimento, o pesquisador fixa o comprimento do intervalo de credibilidade, por exemplo um intervalo de comprimento máximo igual à L , associado a uma probabilidade $(1 - \gamma)$. Portanto, deseja - se encontrar o número necessário de falhas, r_{k+1} , usando a informação dos dados observados.

4.1 Planejamento Seqüencial

Considerando o parâmetro β conhecido, o conjunto de dados observados em uma primeira etapa do experimento, é denotado por *dados 1*, onde o número total de itens colocados em teste é $n = n_1 + \dots + n_k$, o número total de falhas obtidas é $r = r_1 + \dots + r_k$ para os k níveis de stress $V_1, \dots, V_k$ fixados e as estatísticas $A_1, \dots, A_k$,

onde $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{j,i} + (n_i - r_i)t_{r_i,i}$ para $i = 1, \dots, k$ são valores já determinados (Capítulos 1 e 2) e por isso, conhecidos nesta etapa.

Suponha que baseado nos *dados 1*, o pesquisador encontre um intervalo de credibilidade de comprimento L_1 associado à probabilidade $(1 - \gamma)$, onde L_1 é maior do que um comprimento desejado L ($L < L_1$).

Da análise feita a partir dos *dados 1*, foi obtida a densidade a posteriori para α :

$$\Pi(\alpha | \text{dados1}) = \frac{(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)^r \alpha^{-(r+1)}}{\Gamma(r)} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\alpha} \right\}, \quad \alpha > 0$$

e a posteriori para θ_1 :

$$\Pi(\theta_1 | \text{dados1}) = \frac{(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)^r}{\Gamma(r) V_1^{\beta r} \theta_1^{r+1}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \theta_1} \right\}, \quad \theta_1 > 0$$

dadas respectivamente em (3.8) e (3.9).

Numa segunda etapa do experimento, assuma que os dados foram coletados num nível adicional de stress V_{k+1} com n_{k+1} unidades obtendo r_{k+1} falhas, e a estatística:

$$A_{k+1} = \sum_{j=1}^{r_{k+1}} t_{j,(k+1)} + (n_{k+1} - r_{k+1})t_{r_{k+1},k+1}$$

Nesta segunda etapa considere como priori para α a densidade a posteriori para α baseada nos dados 1. Ou seja, a informação obtida através de uma primeira análise passa agora a ser incorporada como densidade a priori *atualizando* a densidade a posteriori baseada nos *dados 2*. Assim, a priori $\Pi(\alpha)$ é dada por $\Pi(\alpha | \text{dados1})$ (ver (3.8)).

A função de verossimilhança para α baseada nos dados 2 é dada da mesma maneira considerando os conceitos de estatística de ordem e de função de verossimilhança. Nesta segunda etapa, tendo apenas um nível adicional V_{k+1} , $L(\alpha | \text{dados2})$ é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha | \text{dados2}) &= f(t_{j,k+1}; \lambda_{k+1}) S^{(n_{k+1} - r_{k+1})}(t_{r_{k+1},k+1}; \lambda_{k+1}) \\ &= \lambda_{k+1}^{r_{k+1}} \exp \{-\lambda_{k+1} A_{k+1}\} \\ &= \left(\frac{V_{k+1}^\beta}{\alpha} \right)^{r_{k+1}} \exp \left\{ -\frac{V_{k+1}^\beta A_{k+1}}{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Para a construção de um intervalo de credibilidade para θ_1 , com o nível adicional de stress V_{k+1} com r_{k+1} falhas, a mesma linha de raciocínio anterior é seguida, isto é, pela técnica de transformação de variáveis, verifica-se que a *densidade a posteriori para θ_1 baseada nos dados 2* onde $\theta_1 = \alpha/V_1^\beta$ isto é, $\alpha = \theta_1 V_1^\beta$ e $|d\alpha/d\theta_1| = V_1^\beta$, é dada por:

$$\Pi(\theta_1 | \text{dados2}) = \frac{(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)^{r+r_{k+1}}}{V_1^{\beta(r+r_{k+1})} \theta_1^{(r+r_{k+1})} \Gamma(r+r_{k+1})} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \right\}, \quad \theta_1 > 0$$

Portanto,

$$X | \text{dados} = 2 \frac{\sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \sim \chi_{2(r+r_{k+1})}^2 \quad (4.2)$$

Um intervalo de credibilidade para θ_1 adicionando o nível de stress V_{k+1} , com probabilidade $(1 - \gamma)$ é dado por:

$$P \left\{ \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(\gamma/2) \leq X \leq \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(1 - \gamma/2) \right\} = 1 - \gamma$$

isto é,

$$P \left\{ \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(\gamma/2) \leq 2 \frac{\sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta}{\theta_1 V_1^\beta} \leq \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(1 - \gamma/2) \right\} = 1 - \gamma$$

Portanto, um *intervalo de credibilidade* $100(1 - \gamma)\%$ para θ_1 baseado nos dados 1 e 2, é dado por:

$$ic(\theta_1) = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(1 - \gamma/2)} ; \frac{2 \sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta}{V_1^\beta \chi_{2(r+r_{k+1})}^2(\gamma/2)} \right]$$

O comprimento deste intervalo é dado por:

$$L = \frac{2(\sum_{i=1}^{k+1} A_i V_i^\beta)}{V_1^\beta} \left\{ \frac{1}{\chi_{2(r+r_{k+1})}^2(\gamma/2)} - \frac{1}{\chi_{2(r+r_{k+1})}^2(1 - \gamma/2)} \right\} \quad (4.3)$$

4.2 Determinação de r_{k+1}

Suponha que os dados 1 são conhecidos e que o pesquisador tenha especificado um comprimento L para o intervalo de credibilidade para θ_1 , associado à probabilidade

$(1 - \gamma^*)$. O objetivo nesta etapa é estimar o número necessário de falhas no segundo estágio do experimento.

Considerando um coeficiente de confiança $100(1 - \gamma^*)\%$ e observando o fato que A_{k+1} é uma variável aleatória, quer-se encontrar r_{k+1} de (4.3) tal que,

$$P \left\{ \frac{2(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + A_{k+1} V_{k+1}^\beta) a(r_{k+1})}{V_1^\beta} \leq L \right\} = 1 - \gamma^* \quad (4.4)$$

onde β e L são especificados anteriormente, $V_1, \dots, V_{k+1}$ são níveis de stress fixados e:

$$\begin{cases} r &= \sum_{i=1}^k r_i \text{ é fixo} \\ A_{k+1} &= \sum_{j=1}^{r_{k+1}} t_{j,r_{k+1}} + (n_{k+1} - r_{k+1}) t_{r_{k+1},k+1} \\ a(r_{k+1}) &= (\chi_{2(r+r_{k+1})}^2(\gamma/2))^{-1} - (\chi_{2(r+r_{k+1})}^2(1 - \gamma/2))^{-1} \end{cases}$$

Escrevendo $B = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta$, tem-se:

$$P \left\{ \frac{2(B + A_{k+1} V_{k+1}^\beta) a(r_{k+1})}{V_1^\beta} \leq L \right\} = 1 - \gamma^*$$

Note que se

$$\frac{2(B + A_{k+1} V_{k+1}^\beta) a(r_{k+1})}{V_1^\beta} \leq L$$

então, $B + A_{k+1} V_{k+1}^\beta \leq L V_1^\beta / 2a(r_{k+1})$

$$\text{Portanto, } A_{k+1} \leq \left\{ \frac{L V_1^\beta}{2a(r_{k+1})} - B \right\} / V_{k+1}^\beta$$

Resultado 4.1 Considerando a função densidade (2.1) e a estatística $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{r_i,i}$, $i = 1, \dots, k$, então:

$$\frac{2A_i}{\theta_i} \sim \chi_{2r_i}^2$$

onde $\theta_i = \frac{1}{\lambda_i}$.

(ver por exemplo, Lawless, 1982).

Em particular, considere aqui, o parâmetro θ_{k+1} e o nível de stress $k + 1$.
Então,

$$\frac{2A_{k+1}}{\theta_{k+1}} \sim \chi_{2r_{k+1}}^2$$

onde $\theta_{k+1} = \frac{\alpha}{V_{k+1}^\beta}$. Ou seja,

$$Y = \frac{2A_{k+1}V_{k+1}^\beta}{\alpha} \sim \chi_{2r_{k+1}}^2 \quad (4.5)$$

Como $A_{k+1} \leq \frac{1}{V_{k+1}^\beta} \left\{ \frac{LV_1^\beta}{2a(r_{k+1})} - B \right\}$, então:

$$Y \leq \frac{2}{\alpha} \left\{ \frac{LV_1^\beta}{2a(r_{k+1})} - B \right\}$$

Portanto, para determinar r_{k+1} , deve-se achar r_{k+1} , tal que:

$$P \left\{ Y \leq \frac{2}{\alpha} \left(\frac{LV_1^\beta}{2a(r_{k+1})} - B \right) \right\} \cong 1 - \gamma^* \quad (4.6)$$

onde $(1 - \gamma^*)$ é fixado e $Y \sim \chi_{2r_{k+1}}^2$ dado em (4.5).

Pelo fato do parâmetro α ser desconhecido, pode-se usar um estimador de α . Por exemplo, considere a moda da densidade a posteriori para α baseada nos dados 1. Como a densidade a posteriori é dada por:

$$\Pi(\alpha | \text{dados1}) = \frac{\alpha^{-(r+1)}}{\Gamma(r)} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta \right\}^r \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{\alpha} \right\},$$

a maximização desta equação fornece um estimador pontual de α dado pela *moda a posteriori*:

$$\text{de } \frac{d \ln \Pi(\alpha | \text{dados1})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\tilde{\alpha}} = 0 \quad \text{tem-se} \quad -(r+1) + \frac{B}{\alpha} = 0$$

Portanto, a *moda* $\tilde{\alpha}$ é dada por,

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{r+1} \quad (4.7)$$

Assim, usando (4.6) encontra-se o número necessário de falhas r_{k+1} para um nível adicional de stress V_{k+1} , com um intervalo de credibilidade $100(1 - \gamma^*)\%$ para θ_1 com comprimento L.

Capítulo 5

Densidades Preditivas

Neste capítulo será apresentado um estudo sobre densidades preditivas com aplicações em controle de qualidade e planejamento de experimentos em testes acelerados. Assuma que os tempos de sobrevivência dos componentes observados têm distribuição Exponencial e a relação entre o parâmetro da distribuição de vida e o stress é dada pelo Modelo de Lei de Potência Inversa.

O uso de densidades preditivas pode ser de grande interesse prático, principalmente na área de confiabilidade (ver por exemplo Geisser, 1982).

Considerando o teste de sobrevivência acelerado descrito no Capítulo 2, a densidade preditiva para uma observação futura em um nível i de stress V é determinada nesta secção. Inferências sobre observações futuras serão obtidas a partir da densidade preditiva encontrada.

Resultado 5.1 *Sejam $T_1, \dots, T_m$ variáveis com função densidade conhecida, associada aos parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_p$ pertencente ao espaço paramétrico Θ , onde $T_j > 0$ representa o tempo de sobrevivência da j -ésima observação, $j = 1, \dots, m$. A densidade preditiva para uma observação futura T_{m+1} , é dada por:*

$$f(t_{m+1} | t_1, \dots, t_m) = \int_{\Theta} f(t_{m+1} | \theta_1, \dots, \theta_p) \Pi(\theta_1, \dots, \theta_p | t_1, \dots, t_m) d\theta_1 \dots d\theta_p \quad (5.1)$$

isto é, $f(t_{m+1} | t_1, \dots, t_m) = E\{f(t_{m+1} | \theta_1, \dots, \theta_p)\}$

onde $f(t_{m+1} | \theta_1, \dots, \theta_p)$ é a função densidade de T_{m+1} e $\Pi(\theta_1, \dots, \theta_p | t_1, \dots, t_m)$ é a densidade a posteriori dos parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_p$.

(ver por exemplo, Aitchison & Dunsmore, 1975).

Para o caso em estudo, considere o experimento descrito no Capítulo 2: n_i itens são submetidos a um teste sob condições aceleradas de stress V_i , até a obtenção de r_i falhas. Os tempos de sobrevivência dos itens, t_{ij} , $j = 1, \dots, r_i$ e $i = 1, \dots, k$ têm distribuição Exponencial (2.1) e a relação entre o parâmetro da distribuição de vida λ_i e o stress V_i do Modelo de Lei de Potência Inversa (2.2) é dada por $\theta_i = \frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Assumindo uma priori de Jeffreys para os parâmetros α e β do modelo (2.2), $\Pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha}$, α e $\beta \in \Theta$, onde $\Theta = \{(\alpha, \beta) : \alpha > 0 \text{ e } -\infty < \beta < \infty\}$, a densidade a posteriori para α e β encontrada em (3.2) é dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta \mid \text{dados}) \propto \alpha^{-(r+1)} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta r_i} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\alpha} \right\}$$

Observe que $f(t_{(n+1)i} \mid \alpha, \beta)$ é dada por:

$$f(t_{(n+1)i} \mid \alpha, \beta) = \frac{V_i^{\beta}}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{V_i^{\beta}}{\alpha} t_{(n+1)i} \right\}$$

Portanto, a função densidade preditiva para uma observação $T_{(n+1)i}$ (ver (5.1)), em um nível i do stress V é dada por:

$$\begin{aligned} f^i(t_{(n+1)i} \mid \text{dados}) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{V_i^{\beta}}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{V_i^{\beta}}{\alpha} t_{(n+1)i} \right\} \alpha^{-(r+1)} \\ &\times \sum_{i=1}^k V_j^{\beta r_j} \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^k A_j V_j^{\beta}}{\alpha} \right\} d\alpha d\beta \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} V_i^{\beta} \prod_{j=1}^k V_j^{\beta r_j} \left[\int_0^{\infty} \alpha^{-(r+2)} \right. \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left(V_i^{\beta} t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^{\beta} \right) \right\} d\alpha \left. \right] d\beta \end{aligned}$$

Pelo Resultado (3.1), tem-se:

$$f^i(t_{(n+1)i} \mid \text{dados}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_i^{\beta} \prod_{j=1}^k V_j^{\beta r_j}}{\{V_i^{\beta} t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^{\beta}\}^{r+1}} d\beta \quad (5.2)$$

Reescrevendo (5.2) de maneira conveniente, o Método de Laplace pode ser aplicado:

$$f^i(t_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh(\beta)} d\beta$$

onde $nh(\beta) = -\beta \ln V_i - \beta \sum_{j=1}^k r_j \ln V_j + (r+1) \ln \{V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta\}$

Pelo Método de Laplace, a *densidade preditiva* para $T_{(n+1)i}$ é dada por:

$$f^i(t_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) \propto \frac{\{nh''(\hat{\beta})\}^{-\frac{1}{2}} V_i^{\hat{\beta}} \prod_{j=1}^k V_j^{\hat{\beta} r_j}}{\left\{V_i^{\hat{\beta}} t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^{\hat{\beta}}\right\}^{r+1}}, \quad t_{(n+1)i} > 0 \quad (5.3)$$

onde $\hat{\beta}$ que maximiza $-nh(\beta)$ é tal que satisfaça a igualdade:

$$\ln V_i + \sum r_j \ln V_j = (r+1) \frac{[(\ln V_i) V_i^{\hat{\beta}} t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^{\hat{\beta}} \ln V_j]}{\left[V_i^{\hat{\beta}} t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^{\hat{\beta}}\right]}$$

e $nh''(\hat{\beta})$ é dado por:

$$(r+1) \left\{ \frac{V_i^\beta (\ln V_i)^2 t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta (\ln V_j)^2 - (V_i^\beta (\ln V_i) t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \ln V_j)^2}{(V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta)} \right\}$$

Assumindo que o *parâmetro* β *seja conhecido*, (ver Capítulo 3, secção 3.2), a densidade a priori de Jeffreys para α é dada por $\Pi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$. Assim, a densidade a posteriori para α é dada por,

$$\Pi(\alpha | \text{dados}) = \frac{\left\{\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta\right\}^r}{\Gamma(r)} \alpha^{-(r+1)} \exp \left\{ \frac{-\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta}{\alpha} \right\}, \quad \alpha > 0$$

(ver (3.8)).

Portanto, por (5.1), tem-se que:

$$\begin{aligned}
f^i(t_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) &= \int_0^\infty \frac{V_i^\beta \left\{ \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right\}^r}{\alpha \Gamma(r)} \alpha^{-(r+1)} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left[V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right] \right\} d\alpha \\
&= \frac{V_i^\beta \left\{ \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right\}^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \alpha^{-(r+2)} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left[V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right] \right\} d\alpha
\end{aligned}$$

Usando o Resultado (3.1) e como $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$, a *função densidade preditiva para uma observação futura em um nível i do stress V , $T_{(n+1)i}$ assumindo β conhecido*, é dada por:

$$f^i(t_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) = \frac{r V_i^\beta \left\{ \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right\}^r}{\left\{ V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right\}^{r+1}}, \quad t_{(n+1)i} > 0 \quad (5.4)$$

Isto é, $T_{(n+1)i} | T_1, \dots, T_n$ tem uma *distribuição de Pareto*.

Escrevendo $C = \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta$, a densidade (5.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f^i(t_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) = \frac{r \left(\frac{C}{V_i^\beta} \right)^r}{\left\{ t_{(n+1)i} + \frac{C}{V_i^\beta} \right\}^{r+1}}, \quad t_{(n+1)i} > 0 \quad (5.5)$$

Usando a técnica de transformação de variáveis, ou seja, definindo, $Y_{n+1} = b + T_{n+1}$, $a = r$ e $b = C/V_i^\beta$, tem-se:

$$f(y_{n+1} | t_1, \dots, t_n) = \frac{ab^a}{y_{n+1}^{a+1}}, \quad y > b \quad (5.6)$$

Observe em (5.6), que a função densidade preditiva para Y_{n+1} tem, para $a > 1$,

$$E(Y_{n+1} | t_1, \dots, t_n) = \frac{ab}{a-1}$$

e para $a > 2$

$$\text{var}(Y_{n+1} | t_1, \dots, t_n) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

Assim, considerando o tempo de sobrevivência $t_{(n+1)i}$ em um nível de stress V_i , tem-se que:

$$E^i(T_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) = \frac{\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta}{(r-1)V_i^\beta} \quad (5.7)$$

$$\text{Var}^i(T_{(n+1)i} | t_1, \dots, t_n) = \frac{r \left(\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right)^2}{(r-1)^2(r-2)V_i^{2\beta}}, \quad (5.8)$$

para $i = 1, \dots, k$.

5.1 Densidades Preditivas em Controle de Qualidade

Uma aplicação de *densidades preditivas* pode ser dada em Engenharia, na área de *controle de qualidade*.

O pesquisador interessado em adquirir componentes fabricados por uma indústria, deseja saber se o componente satisfaz ou não as especificações do projeto. Para verificar se um processo está sob controle, o engenheiro retira uma amostra, de cada lote, dos componentes fabricados e verifica se as peças atendem às especificações do pesquisador.

Usualmente, para minimizar o custo e o tempo do experimento, testes com níveis de stress acelerados são aplicados por um período de tempo P_i .

Assumindo β conhecido, considere a densidade preditiva dada em (5.5). Fixando uma probabilidade $(1 - \gamma)$ e um nível i de stress V , um valor de P_i pode ser encontrado, satisfazendo:

$$P_i \{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = 1 - \gamma \quad (5.9)$$

Da mesma forma, fixando-se o período de tempo P_i de aplicação do stress, o valor de V_i pode ser encontrado, tal que satisfaça a equação (5.9), isto é,

$$P_i \{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = \int_{P_i}^{\infty} f^i(t_{(n+1)i} \mid \text{dados}) dt_{(n+1)i} \quad (5.10)$$

Daí,

$$P_i \{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = \int_{P_i}^{\infty} \frac{V_i^\beta \left[\sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right]^r}{\left\{ V_i^\beta t_{(n+1)i} + \sum_{j=1}^k A_j V_j^\beta \right\}^{r+1}} dt_{(n+1)i}$$

ou ainda, substituindo a forma simplificada encontrada em (5.6), tem-se que,

$$P_i \{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = r \left(\frac{C}{V_i^\beta} \right)^r \int_{P_i}^{\infty} \frac{dt_{(n+1)i}}{\left\{ t_{(n+1)i} + \frac{C}{V_i^\beta} \right\}^{r+1}}$$

onde $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta$.

Considerando $P_i \{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = 1 - \gamma$, o resultado da integração acima é dado por:

$$\left(\frac{C}{V_i^\beta} \right)^r \left(\frac{1}{P_i + \frac{C}{V_i^\beta}} \right)^r = 1 - \gamma \quad (5.11)$$

A partir de (5.10), é possível então determinar os valores de P_i ou V_i , assumindo β conhecido, que satisfaçam (5.6) ou (5.9) respectivamente. Assim,

- (i) Fixando-se um nível i de stress V , o período de tempo P_i a ser aplicado no stress V_i é dado por:

$$P_i = \frac{C \left[1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{r}} \right]}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{r}} V_i^\beta} \quad (5.12)$$

- (ii) Fixando-se o período P_i de aplicação do stress, o nível V_i é dado por:

$$V_i = \left\{ \frac{C(1 - (1 - 1/\gamma)^{\frac{1}{r}})}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{r}} P_i} \right\}^{1/\beta} \quad (5.13)$$

Para os valores P_i e V_i encontrados satisfazendo $P^i\{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = 1 - \gamma$, é possível estabelecer um critério para o teste de controle de qualidade.

Observar m componentes submetidos a um teste de sobrevivência sob o nível de stress V_i durante um período de tempo P_i .

Definindo:

$\gamma^i = P^i\{T_{(n+1)i} \leq P_i \mid \text{dados}\}$, considere o teste de hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma^i \leq \gamma \text{ (o processo está sob controle)} \\ H_1 : \gamma^i > \gamma \text{ (o processo está fora de controle)} \end{cases}$$

Seja X o número de componentes que falharam ($X \leq m$) durante o teste. Assumindo $X \sim b(m; \gamma^i)$, tem-se:

$$X \stackrel{a}{\sim} N\{m\gamma^i; m\gamma^i(1 - \gamma^i)\},$$

ou seja, pelo Teorema do Limite Central, quando n cresce, a distribuição Binomial tende à curva normal. Em geral, pode-se considerar que se $m\gamma \geq 5$ e $m(1 - \gamma) \geq 5$, então m já é suficientemente grande para se utilizar a aproximação da distribuição Binomial para a distribuição Normal. Alguns autores porém, sugerem $m\gamma \geq 10$ e $m(1 - \gamma) \geq 10$ ou ainda $m\gamma \geq 15$ e $m(1 - \gamma) \geq 15$ (ver por exemplo, Bickel & Doksum, 1977).

Então, um critério para o teste de controle de qualidade é dado por:

o processo está fora de controle se $Z \geq Z_\alpha$, onde

$$Z = \frac{(X - m\gamma)}{\sqrt{m\gamma(1 - \gamma)}} \stackrel{a}{\sim} N\{0, 1\},$$

α é o nível de significância e Z_α é tal que $P[Z \geq Z_\alpha] = \alpha$.

Assumindo β desconhecido, a densidade preditiva aproximada pelo Método de Laplace, dada em (5.3) e métodos numéricos podem ser usados. Conseqüentemente, os valores V_i e P_i podem ser encontrados satisfazendo $P^i\{T_{(n+1)i} > P_i \mid \text{dados}\} = (1 - \gamma)$.

Capítulo 6

Análise Bayesiana assumindo uma Distribuição de Weibull para os tempos de sobrevivência

A distribuição de Weibull tem grande aplicabilidade em modelos de sobrevivência, pois representa um modelo apropriado para descrever a confiabilidade e o sistema de falha de componentes, quando estes apresentam variações em suas taxas de falha.

Em problemas práticos, é possível verificar se os tempos de vida dos componentes apresentam variações na taxa de falha, ou se esta se mantém constante no decorrer do tempo de uso. Ou seja, é possível verificar se a distribuição do tempo de falha dos itens pode ser ajustada à distribuição de Weibull, levando-se em consideração uma forte dependência do risco de falha sobre o fator tempo, ou se pode ser ajustada à distribuição Exponencial, onde apresentam constância na taxa de falha ou ainda, pequenas variações que podem ser consideradas constantes.

Um método alternativo às análises gráficas (ver por exemplo Nelson, 1972), é apresentado neste capítulo para verificar a melhor distribuição ajustada para os tempos de sobrevivência dos componentes.

Considere um teste de sobrevivência acelerado em um planejamento com censuras do Tipo II, onde são aplicados nos itens, k valores de stress $V_i, i = 1, 2, \dots, k$, como descrito no Capítulo 2. O comportamento de falha desses componentes é especificado pela distribuição de Weibull.

Seja então, $f(t; \lambda_i^*, p)$, a *função densidade de probabilidade* da variável aleatória tempo de falha, $T > 0$, para um nível i de stress V , dada por:

$$f(t; \lambda_i^*, p) = \begin{cases} \lambda_i^* p (\lambda_i^* t)^{p-1} \exp\{-(\lambda_i^* t)^p\} & \lambda_i^* > 0, t > 0 \text{ e } p > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $\theta_i^* = \frac{\Gamma(1+1/p)}{\lambda_i^*}$ é o tempo médio de sobrevivência dos componentes para $i = 1, 2, \dots, k$ e p , chamado *parâmetro de forma*, é comum a todos os níveis.

Considerando o Modelo de Lei de Potência Inversa (ver Introdução), a relação existente entre o parâmetro da distribuição do tempo de sobrevivência dos componentes em estudo e a variável stress desse modelo, é dada por:

$$\frac{1}{\lambda_i^*} = \frac{\alpha}{V_i^\beta} \quad (6.2)$$

onde α e $\beta \in \Theta$ e $i = 1, 2, \dots, k$.

A função densidade (6.1) especifica a *função distribuição* $F(t)$,

$$F(t) = P[T \leq t] = 1 - \exp\{-(\lambda_i^* t)^p\}$$

e a *função de Confiabilidade*,

$$S(t) = 1 - F(t) = \exp\{-(\lambda_i^* t)^p\},$$

como definidas no Capítulo 2.

Pela definição de *função Risco*, $h(t)$, verifica-se que a função densidade de Weibull tem taxa de falha dada por:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda_i^* p (\lambda_i^* t)^{p-1}$$

Note que a distribuição Exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull, quando o parâmetro p é igual a 1. Então, testar o ajuste da distribuição Exponencial aos dados, é equivalente a estimar o parâmetro p na distribuição de Weibull e verificar se está muito próximo de 1, isto é, $p \cong 1$.

A função de verossimilhança para os parâmetros λ_i^* e p , com dados censurados pelo esquema de censura do Tipo II e sob um nível i do stress V , é dada por:

$$L_i(\lambda_i^*, p) = \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}; \lambda_i^*, p) S^{(n_i - r_i)}(t_{ir_i}; \lambda_i^*, p)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{r_i} (\lambda_i^* p (\lambda_i^* t_{ij})^{p-1}) \exp \{ -(\lambda_i^* t_{ij})^p \} (\exp \{ -(\lambda_i^* t_{ir_i})^p \})^{n_i - r_i} \\
&= (\lambda_i^*)^{pr_i} p^{r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \{ -(\lambda_i^*)^p \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p \} (\exp \{ -(\lambda_i^*)^p t_{ir_i}^p \})^{n_i - r_i} \\
&= (\lambda_i^*)^{pr_i} p^{r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \{ -(\lambda_i^*)^p \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \} \\
&\times \exp \{ -(\lambda_i^*)^p (\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p) \}
\end{aligned}$$

Definindo $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p$, tem-se que,

$$L(\lambda_i^*, p) = (\lambda_i^*)^{pr_i} p^{r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \{ -(\lambda_i^*)^p A_i(p) \}$$

Assumindo k níveis aleatorizados de stress $V_1, V_2, \dots, V_k$, a função de verossimilhança para λ_i^* e p , é dada por:

$$L(\lambda_i^*, p) = \prod_{i=1}^k \left[(\lambda_i^*)^{pr_i} p^{r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \{ -(\lambda_i^*)^p A_i(p) \} \right]$$

Considerando a relação (6.2),

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \beta, p) &= \prod_{i=1}^k \left[\left(\frac{V_i^\beta}{\alpha} \right)^{pr_i} p^{r_i} \left(\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \left\{ -\left(\frac{V_i^\beta}{\alpha} \right)^p A_i(p) \right\} \right] \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i^\beta}{\alpha} \right)^{pr_i} p^{\sum_{i=1}^k r_i} \left\{ \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right\} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^k \left(\frac{V_i^\beta}{\alpha} \right)^p A_i(p) \right\} \\
&= \frac{p^r}{\alpha^{pr}} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i} \right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p} \right\} \quad (6.3)
\end{aligned}$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número total de falhas para $i = 1, 2, \dots, k$.

6.1 Análise Bayesiana assumindo α , β e p desconhecidos

Nesta secção assumamos que o pesquisador não tem conhecimento à priori a respeito da distribuição dos parâmetros α , β e p . Assumindo α e β parâmetros independentes de p , a *Regra Multiparamétrica de Jeffreys* (ver por exemplo, Box & Tiao, 1973), determina uma priori não-informativa para os parâmetros α e β , e considere uma priori localmente uniforme para p .

Assim, a densidade a priori pode ser escrita como segue:

$$\Pi(\alpha, \beta, p) = \Pi(\alpha, \beta | p) \Pi_0(p)$$

ou ainda,

$$\Pi(\alpha, \beta, p) \propto \{ \det I(\alpha, \beta | p) \}^{1/2} \Pi_0(p) \quad (6.4)$$

onde $I(\alpha, \beta | p)$ é a Matriz de Informação de Fisher dado p , dada por:

$$I(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}\right\} & E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}\right\} \\ E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha}\right\} & E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}\right\} \end{pmatrix}$$

onde l é o logaritmo da função de verossimilhança (6.3), isto é, $l(\alpha, \beta, p) = \ln L(\alpha, \beta, p)$, dado por:

$$l(\alpha, \beta, p) = r \ln p - rp \ln \alpha + \beta p \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln t_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p} \quad (6.5)$$

Sem assumir qualquer tipo de relação com a variável stress, Cohen (1965) encontra estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse, onde os dados seguem distribuição de Weibull com dois parâmetros, considerando vários esquemas amostrais.

Note que se $p = 1$, a distribuição Exponencial é obtida e a expressão (6.5) é equivalente à expressão (2.6) encontrada no Capítulo 2.

Resultado 6.1 *Seja T uma variável aleatória com distribuição de Weibull, isto é,*

$$T \sim Wei(t; \lambda^*, p)$$

onde p é o parâmetro de forma, $\lambda^* > 0$, $p > 0$ e $t \geq 0$. Então,

$$T^p \sim \text{Exp}\{\lambda\}$$

ou seja, T^p tem distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = (\lambda^*)^p$

(ver por exemplo, Lawless, 1982).

Observando que:

$$E\{A_i(p)\} = E\left\{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{r_i,i}^p\right\} = r_i \alpha^p / V_i^{\beta p},$$

as esperanças das derivadas segundas de $l(\alpha, \beta, p)$ em relação à α, β e p , são dadas por:

$$E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2}\right\} = \frac{rp^2}{\alpha^2}$$

$$E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}\right\} = E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha}\right\} = -\frac{p^2 \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i}{\alpha}$$

$$E\left\{-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}\right\} = p^2 \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2$$

Portanto, a Matriz de informação de Fisher é dada por:

$$I(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} rp^2/\alpha^2 & -(p^2 \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)/\alpha \\ -(p^2 \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)/\alpha & p^2 \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 \end{pmatrix}$$

No cálculo do determinante de $I(\alpha, \beta | p)$, isto é, $\det I(\alpha, \beta | p)$, note que a expressão $r \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 - (\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i)^2$ é constante em relação aos parâmetros. Assim,

$$\det I(\alpha, \beta | p) \propto \frac{p^4}{\alpha^2}$$

Considere também, uma Priori de Jeffreys localmente uniforme para p , dada por:

$$\Pi_0(p) \propto \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

Portanto, uma priori não - informativa para α , β e p , usando (6.4), é dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta, p) \propto \frac{1}{p} \sqrt{\frac{p^4}{\alpha^2}}$$

ou seja,

$$\Pi(\alpha, \beta, p) \propto \frac{p}{\alpha}, \quad \alpha \text{ e } \beta \in \Theta \text{ e } p > 0 \quad (6.6)$$

Determinada então $\Pi(\alpha, \beta, p)$, a densidade a posteriori conjunta para esses parâmetros é dada por:

$$\Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) = \frac{\Pi(\alpha, \beta, p) L(\alpha, \beta, p)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Pi(\alpha, \beta, p) L(\alpha, \beta, p) d\alpha dp d\beta}$$

ou ainda,

$$\Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) \propto \Pi(\alpha, \beta, p) L(\alpha, \beta, p)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) &\propto \frac{p}{\alpha} \left(\frac{p^r}{\alpha^{pr}} \right) \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i} \right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p} \right\} \\ &\propto \frac{p^{r+1}}{\alpha^{pr+1}} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i} \right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p} \right\} \quad (6.7) \end{aligned}$$

onde α e $\beta \in \Theta$ e $p > 0$. Assim, a densidade a posteriori marginal para p é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi(p \mid \text{dados}) &\propto \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) d\beta d\alpha \\ &\propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i} \exp \left\{ -\frac{V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p} \right\} d\beta d\alpha \quad (6.8) \end{aligned}$$

Usando o *Método de Laplace para aproximações de integrais*, apresentado no Apêndice B, a expressão $\Pi(p \mid \text{dados})$ dada acima, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Pi(p \mid \text{dados}) \propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \{ -nh(\alpha, \beta) \} d\alpha d\beta$$

onde $-nh(\alpha, \beta) = -(pr + 1) \ln \alpha + \beta p \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)/\alpha^p$.

Então,

$$\int \exp\{-nh(\alpha, \beta)\} d\beta d\alpha \approx \sqrt{2\pi} \{ \det(nD^2 h(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \}^{-1/2} \exp\{-nh(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\}$$

onde

$$\begin{cases} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \text{ maximiza } -nh(\alpha, \beta) \\ D^2 h(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \text{ é a Matriz Hessiana de } h \text{ calculada no ponto } (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \end{cases}$$

Os valores $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ são encontrados resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial(-nh(\alpha, \beta))}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial(-nh(\alpha, \beta))}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} -(pr + 1)/\alpha + p \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)/\alpha^{p+1} = 0 \\ p \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \ln V_i = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \left(p \sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) / (pr + 1) \right)^{1/p} \\ p / \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i = (pr + 1) \sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) / \sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) \end{cases} \quad (6.9)$$

Através de métodos iterativos, é possível encontrar os valores $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ para cada p fixado.

Portanto, a *densidade a posteriori marginal* para p , aproximada pelo Método de Laplace, é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi(p \mid \text{dados}) &\propto p^{r+1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \{ \det(nD^2 h(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \}^{-1/2} \exp\{-nh(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\} \\ &\propto \frac{(pr + 1)^{r-1} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p r_i} \right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) e^{-(pr+1)/p}}{\left(\sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) \right)^r B(p, \hat{\beta})}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde $p > 0$ e

$$B(p, \hat{\beta}) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) (\ln V_i)^2}{\sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p)} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) \ln V_i}{\sum_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p)} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (6.11)$$

Através da maximização de (6.10), torna-se possível encontrar um estimador pontual para p , por exemplo, a *moda a posteriori de p* , $\tilde{p}$.

Note que, de maneira análoga à densidade a posteriori marginal para p , o Método de Laplace pode ser usado para encontrar a densidade a posteriori marginal para α ou β .

Assumindo a partir dessa análise, o parâmetro p conhecido, estimado através da moda da densidade a posteriori e usando o Resultado (6.1), $T^{\tilde{p}}$ tem distribuição Exponencial. Portanto, para os dados transformados, os resultados das análises anteriores, dados nos Capítulos 2 e 3, podem ser considerados.

6.2 Posteriori Conjunta Marginal para θ_1^* e p : $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$

Nesta secção, assumindo o parâmetro p desconhecido, ou seja, considerando os tempos de sobrevivência originais, é possível encontrar a densidade a posteriori para o parâmetro de interesse θ_1^* e p conjuntamente, a partir da densidade a posteriori conjunta para α, β e p . A partir da densidade a posteriori conjunta para os parâmetros α, β e p , $\Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados})$ ver (6.7), considerando que os dados têm distribuição de Weibull e o parâmetro λ_i^* desta distribuição está relacionado com o Modelo de Lei de Potência Inversa, $1/\lambda_i^* = \alpha/V_i^\beta$, pode-se encontrar a densidade a posteriori conjunta marginal para θ_1^* e p , onde θ_i^* é o tempo médio de sobrevivência dos itens com distribuição de Weibull em um nível i de stress V , dado por:

$$\theta_i^* = \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\lambda_i^*},$$

para $i = 1, 2, \dots, k$.

A densidade a posteriori conjunta para α, β e p é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) &\propto \frac{p^{n+1}}{\alpha^{pn+1}} \left[\prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \right] \left[\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right] \\ &\times \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}}{\alpha^p} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \begin{cases} \alpha \text{ e } \beta \in \Theta \text{ e } p > 0 \\ A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{r_i,i}^p \\ r = \sum_{i=1}^k r_i \text{ é o número total de observações para } k \text{ amostras e } i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

O tempo médio de sobrevivência dos componentes com distribuição de Weibull, num nível de stress i , é dado por $\theta_i^* = \Gamma(1 + 1/p)/\lambda_i^*$ e portanto, o tempo médio de sobrevivência dos itens nas condições normais de funcionamento é dado por,

$$\theta_1^* = \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\lambda_1^*} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{\lambda_1^*} = \frac{\alpha}{V_1^\beta}$$

Usando a técnica de transformação de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_1^* V_1^\beta / \Gamma(1 + 1/p), \\ \beta = \beta \\ p = p \end{cases}$$

e a matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \partial\alpha/\partial\theta_1^* & \partial\alpha/\partial\beta & \partial\alpha/\partial p \\ \partial\beta/\partial\theta_1^* & \partial\beta/\partial\beta & \partial\beta/\partial p \\ \partial p/\partial\theta_1^* & \partial p/\partial\beta & \partial p/\partial p \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{V_1^\beta}{\Gamma(1 + 1/p)} & \frac{\theta_1^* V_1^\beta \ln V_1}{\Gamma(1 + 1/p)} & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Portanto, } \det(J) = \frac{V_1^\beta}{\Gamma(1 + 1/p)}.$$

A partir da transformação de variáveis, a densidade a posteriori conjunta para θ_1^*, β e p é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta_1^*, \beta, p) &\propto \frac{p^{pr+1}}{\left(\frac{\theta_1^* V_1^\beta}{\Gamma(1+1/p)}\right)^{pr+1}} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i}\right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1}\right) \\
&\times \frac{V_1^\beta}{\Gamma(1+1/p)} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}}{\left(\frac{\theta_1^* V_1^\beta}{\Gamma(1+1/p)}\right)^p} \right\} \\
&\propto \frac{p^{r+1}}{(\theta_1^*)^{pr+1}} \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{V_1^\beta}\right)^{pr} \left(\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i}\right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1}\right) \\
&\times \exp \left\{ -\left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\theta_1^*}\right)^p \sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta p} \right\} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

onde $\theta_1^* > 0$, $-\infty < \beta < \infty$ e $p > 0$.

A densidade a posteriori marginal conjunta para θ_1^* e p , é dada por:

$$\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\theta_1^*, p, \beta \mid \text{dados}) d\beta \quad \text{ou seja,}$$

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados}) &= \frac{p^{r+1}}{(\theta_1^*)^{pr+1}} (\Gamma(1+1/p))^{pr} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i}}{V_1^{\beta pr}} \exp \left\{ -\left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\theta_1^*}\right)^p \sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta p} \right\} d\beta
\end{aligned}$$

Usando o Método de Laplace para aproximações de integrais (ver, por exemplo, Tierney & Kadane, 1986), a densidade $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$ reescrita de forma adequada é dada por:

$$\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados}) \propto \frac{p^{r+1}}{(\theta_1^*)^{pr+1}} (\Gamma(1+1/p))^{pr} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_{\theta_1^*, p}(\beta)} d\beta$$

onde $-nh_{\theta_1^*, p}(\beta) = \beta p \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - \beta pr \ln V_1 - \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\theta_1^*}\right)^p \sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta p}$

Assim, pelo Método de Laplace, a densidade a posteriori marginal conjunta para θ_1^* e p obtida é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados}) &\propto p^r (\theta_1^*)^{-p(r-1/2)-1} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \left(\Gamma(1 + \frac{1}{p}) \right)^{p(r-1/2)} \\
&\times \exp \left\{ p \hat{\beta} \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - p \hat{\beta} r \ln V_1 - \left(\frac{\Gamma(1+\frac{1}{p})}{\theta_1^*} \right)^p \sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\frac{V_i}{V_1} \right)^{\hat{\beta} p} \right\} \\
&\times \left[\sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\ln \frac{V_i}{V_1} \right)^2 \left(\frac{V_i}{V_1} \right)^{\hat{\beta} p} \right]^{-1/2} \quad (6.13)
\end{aligned}$$

onde $\theta_1^* > 0$, $p > 0$ e $\hat{\beta}$ é dado por:

$$\left(\frac{\theta_1^*}{\Gamma(1 + \frac{1}{p})} \right)^p \left(\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \ln V_1 \right) = \sum_{i=1}^k A_i(p) \left(\frac{V_i}{V_1} \right)^{\hat{\beta} p} \ln \left(\frac{V_i}{V_1} \right) \quad (6.14)$$

Usando a densidade a posteriori conjunta para θ_1^* e p dada em (6.13), é possível fazer inferências sobre os dois parâmetros θ_1^* e p . Por exemplo, é possível construir contornos de credibilidade para θ_1^* e p ou ainda, determinar a moda a posteriori da densidade (6.13).

Capítulo 7

Dois Exemplos

7.1 Um Exemplo com a Distribuição Exponencial

As análises clássica e Bayesiana discutidas nos Capítulos 2 e 3 são ilustradas neste capítulo, por meio de um exemplo com dados gerados (ver Achcar e Dias, 1990).

Usando o Modelo de Lei de Potência Inversa (2.2) com $\alpha = 500$, $\beta = 0.8$ e 5 níveis de stress $V_i, i = 1, \dots, 5$, uma amostra aleatória com distribuição Exponencial (2.1), de tamanho n_i com r_i falhas foi gerada para cada nível V_i . Os dados obtidos, que representam o tempo de sobrevivência dos itens testados, estão apresentados na tabela abaixo:

i	V_i	θ_i	n_i	r_i	Observações Não - Censuradas
1	10	79.24	30	5	6 8 10 12 14
2	20	45.52	30	8	4 5 5 6 8 8 9 14
3	30	32.90	30	12	2 3 3 5 6 7 7 8 8 9 10 17
4	40	26.14	30	18	3 3 4 5 6 6 8 9 10 10 12 12 13 14 14 14 15 24
5	50	21.87	30	22	2 3 4 5 5 8 8 8 9 10 12 13 14 14 15 18 18 18 19 20 20 27

Tabela 1: Dados gerados com $\alpha = 500$ e $\beta = 0.8$

O ajuste da distribuição Exponencial aos dados, é verificada através de uma análise gráfica baseada no estimador Produto Limite de Kaplan & Meier. A escolha deste estimador não - paramétrico é justificada pelas suas boas propriedades. (ver Kaplan &

Meier, 1958).

A relação linear entre $\ln\{-\ln \hat{S}(t_{ij})\}$ e $\ln t_{ij}$ para $j = 1, \dots, n_i$ e $i = 1, \dots, k$, onde $\hat{S}(t)$ é o estimador Produto - Limite de Kaplan & Meier, indica o possível ajuste dos dados à distribuição Exponencial. Esta linearidade é verificada para as 5 amostras (ver Figuras 7.1 - 7.5).

Figura 7.1: Amostra 1

Figura 7.2: Amostra 2

Figura 7.3: Amostra 3

Figura 7.4: Amostra 4

Figura 7.5: Amostra 5

Assumindo que os tempos gerados têm distribuição Exponencial, a adequabilidade do Modelo de Lei de Potência Inversa aos dados, é verificada da seguinte forma: de (2.2) tem-se que,

$$\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha},$$

e a relação linear $\ln \lambda_i = -\ln \alpha + \beta \ln V_i$.

Considerando $\hat{\lambda}_i = r_i/A_i$ o estimador de máxima verossimilhança para λ_i , para cada nível de stress, a relação linear entre $\ln \hat{\lambda}_i$ e $\ln V_i$ indica a adequabilidade do modelo (2.2) aos dados (ver Figura 7.6).

Para os dados t_{ij} , $j = 1, \dots, r_i$ e $i = 1, \dots, 5$ o logaritmo da função de verossimilhança para α e β (ver 2.6), é dada por:

$$l(\alpha, \beta) = 228.7575\beta - 65 \ln \alpha - \frac{\sum_{i=1}^5 A_i V_i^\beta}{\alpha}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança, (ver 2.7) são dados por:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 502.0524 \\ \hat{\beta} = 0.8003 \end{cases}$$

Figura 7.6: Gráfico de $\ln(\lambda_i)$ versus $\ln(V_i)$

O estimador de máxima verossimilhança para θ_1 (tempo médio de sobrevivência sob as condições normais de uso) é dado por:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{\alpha}}{V_1^{\hat{\beta}}} = 79.5150$$

A matriz de Informação de Fisher para α e β (ver (2.10)), calculada em $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, é dada por:

$$I(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0.000258 & -0.455645 \\ -0.455645 & 818.749806 \end{pmatrix}$$

Usando o Resultado (2.2), os estimadores de máxima verossimilhança têm distribuição Normal Assintótica dada em (2.8). Assim,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \stackrel{L}{\sim} N \{ (\alpha, \beta) ; I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \}$$

onde $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é dada por:

$$I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 232204.6 & 129.22 \\ 129.22 & 0.07314 \end{pmatrix}$$

A partir de (2.11), os intervalos com 90% de confiança para α e β encontrados são dados por:

$$ic(\alpha) = [-288.2244 ; 1292.3292]$$

$$ic(\beta) = [0.3568 ; 1.2438]$$

e pelo Método Delta, usando a distribuição Normal Assintótica (2.13), um intervalo com 90% de confiança para θ_1 dado em (2.14) é:

$$ic(\theta_1) = [33.6654 ; 125.4033]$$

Note que ao usar a Teoria da Aproximação Assintótica para os parâmetros α e β , o intervalo para α não *respeita* o intervalo de validade do parâmetro ($\alpha > 0$) sendo ainda muito grande, e pelo Método Delta, o intervalo encontrado para θ_1 pode ser considerado grande.

Assumindo α e β parâmetros desconhecidos e a priori de Jeffreys (3.1), a densidade a posteriori marginal para β dada em (3.3) é:

$$\Pi(\beta | \text{dados}) \propto \frac{\{2.23 \times 10^{99}\}^\beta}{\{400(10^\beta) + 367(20^\beta) + 391(30^\beta) + 470(40^\beta) + 486(50^\beta)\}^{65}}$$

onde $-\infty < \beta < \infty$ (ver Figura 7.7).

Figura 7.7: Densidade a Posteriori Marginal para β

O estimador pontual para β , a moda a posteriori, encontrada em (3.4), é dada por:

$$\tilde{\beta} \cong 0.8$$

A densidade a posteriori marginal para $\theta_1 = \alpha/V_1^\beta$ dada em (3.7) usando o Método de Laplace para aproximação de integrais é mostrada na Figura 7.8.

Figura 7.8: Densidade a Posteriori Marginal para θ_1

Observando a Figura 7.8, uma reparametrização pode ser aplicada em θ_1 , para se obter uma forma conhecida da densidade $\Pi(\theta_1 | \text{dados})$ e portanto, mais simples para se construir um intervalo de credibilidade para o parâmetro de interesse. Considerando a reparametrização $\delta_1 = \ln \theta_1$, o gráfico da densidade a posteriori marginal para δ_1 , $\Pi(\delta_1 | \text{dados})$ (ver Apêndice C), mostrado na Figura 7.9, indica que através dessa transformação, a aproximação Normal para a posteriori de δ_1 pode ser usada (ver Capítulo 2). Um intervalo com 90% de credibilidade para δ_1 é dado por: $[3.7999 ; 4.9534]$.

Figura 7.9: Densidade a Posteriori Marginal para $\delta_1 = \ln \theta_1$

Para o parâmetro de interesse $\theta_1 = e^{\delta_1}$, um intervalo com 90% de credibilidade é dado por [44.6967 ; 141.6558] , que é diferente do intervalo [33.6654 ; 125.4033] encontrado usando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança para α e β .

Uma análise gráfica no contorno da função de verossimilhança de α e β mostra que esta aproximação não é boa (ver Figura 7.10). O contorno não apresenta uma forma elíptica, indicando que para este caso, a aproximação Normal para os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ não é adequada.

Figura 7.10: Contorno da Função de Verossimilhança para α e β

Assumindo β conhecido, ou seja $\beta = 0.8$, a forma da densidade a posteriori marginal para θ_1 dada em (3.9) é mostrada na Figura 7.11. Então, usando (3.11), o intervalo com 90% de credibilidade encontrado é dado por: [65.6824 ; 98.9963]. A moda a posteriori da densidade para θ_1 dada em (3.10) é:

$$\tilde{\theta}_1 = 78.28$$

O intervalo de credibilidade para θ_1 , assumindo β conhecido, tem comprimento $L_1 = 33.3199$.

É possível aplicar os resultados do Capítulo 4 neste exemplo, para planejar um experimento com testes acelerados. Supor que o pesquisador tenha interesse em obter um comprimento do intervalo com 90% de credibilidade dado por $L = 32$ (isto é, menor do que $L_1 = 33.3199$ obtido acima). Assim, ele quer estimar o número necessário de unidades num nível adicional de stress, $V_6 = 60$.

Figura 7.11: Densidade a Posteriori Marginal para θ_1 com β conhecido

De (4.6) com $r = 65$, $1 - \gamma = 0.90$ e $L = 32$ fixados, é possível encontrar valores de $1 - \gamma^*$ para vários valores de r_6 (número de falhas no nível $V_6 = 60$). Estes valores são dados na Tabela 2.

r_6	$1 - \gamma^*$
2	0.06
3	0.30
4	0.45
5	0.54
6	0.62
7	0.65
8	0.75
9	0.78
10	0.81
11	0.84
12	0.87
13	0.90
14	0.91
15	0.92
16	0.94
17	0.95

Tabela 2: Confiança observada ($1 - \gamma^*$) para diferentes valores de r_6

Assim, observa-se que se $1 - \gamma^* = 0.90$ é fixado, o pesquisador precisa acrescentar $r_6 = 13$ unidades no nível adicional de stress $V_6 = 60$.

Considere os resultados obtidos no Capítulo 5 e suponha β conhecido, ou seja $\beta = 0.8$ (ver Capítulo 3, secção 3.2). Neste exemplo, a função densidade preditiva para uma observação futura em um nível i de stress V , dada em (1.4), é:

$$f^i(t_{(n+1)i}|t_1, \dots, t_n) = \frac{65V_i^{0.8}(32598.967)^{65}}{\{V_i^{0.8}t_{(n+1)i} + 32598.967\}^{66}}, \quad t_{(n+1)i} > 0.$$

As expressões de esperança e variância de $T_{(n+1)i}$, dadas em (1.7) e (1.8) respectivamente, são dadas por:

$$E^i(T_{(n+1)i}|t_1, \dots, t_n) = \frac{32598.967}{64V_i^{0.8}}$$

$$Var^i(T_{(n+1)i}|t_1, \dots, t_n) = \frac{65(32598.967)^2}{(64)^2(63)V_i^{1.6}}$$

Para os 5 níveis de stress assumidos neste exemplo, os momentos de $f^i(t_{(n+1)i}|t_1, \dots, t_n)$ são dados na Tabela 3.

i	V_i	$E^i(T_{(n+1)i} dados)$	$Var^i(T_{(n+1)i} dados)$	$\sqrt{Var^i(T_{(n+1)i} dados)}$
1	10	80.7279	6723.8890	81.9993
2	20	46.3660	2218.0562	47.0962
3	30	33.5218	1159.3819	34.0497
4	40	26.6303	731.6857	27.0497
5	50	22.2765	511.9983	22.6274

Tabela 3: Momentos da Variável $T_{(n+1)i}$

Assumindo $\beta = 0.8$ conhecido, pela Tabela 1 tem-se que $r = 65$ e $C = \sum_{j=1}^5 A_j V_j^{0.8} = 32598.967$.

Considerando $1 - \gamma = 0.80$ e $V_i = 30$, P_i encontrado (de (5.12)) é dado por $P_i = 7.3777$. Num teste de controle de qualidade, m unidades são colocadas num nível de stress $V_i = 30$ durante o período de tempo $P_i = 7.38$ e observa-se o número X de falhas. A linha de produção está fora de controle se a hipótese $H_o : \gamma^i \leq 0.20$ for rejeitada, onde $\gamma^i = P_i\{T_{(n+1)i} \leq P_i | dados\}$ num nível de significância estipulado α . Isto é, a linha de produção está fora de controle se $X \geq 0.20m + 0.40Z_\alpha\sqrt{m}$.

Outra possibilidade é fixar um período de tempo $P_i = 20$, $1 - \gamma = 0.80$ e encontrar um nível de stress V_i (de (5.13)) dado por $V_i = 8.6246$.

Observar que o critério descrito para controle de qualidade é muito flexível em termos das escolhas de V_i e P_i para minimizar tempo e custo dos testes (ver Achcar, 1990).

7.2 Um Exemplo com a Distribuição de Weibull

Os resultados obtidos no Capítulo 6 referente à análise Bayesiana, são aplicados, nesta secção, em um conjunto de dados (ver Tabela 4) sob um teste de sobrevivência acelerado, introduzido por Nelson (1972). Esses dados são supostos terem distribuição de Weibull (6.1), e a relação entre o parâmetro da distribuição de vida λ^* e a variável stress V , é dada pelo Modelo de Lei de Potência Inversa (6.2). Isto foi verificado graficamente por Nelson (1972).

Os dados (ver Tabela 4), representam os tempos de ruptura de um material isolante, e são considerados sete níveis de voltagem.

i	V_i	n_i	Tempos Observados
1	26	3	5.79 1579.52 2323.70
2	28	5	68.85 108.29 110.29 426.07 1067.60
3	30	11	7.74 17.05 20.46 21.02 22.66 43.40 47.30 139.07 144.12 175.88 194.90
4	32	15	0.27 0.40 0.69 0.79 2.75 3.91 9.88 13.95 15.93 27.80 53.24 82.85 89.29 100.58 215.10
5	34	19	0.19 0.78 0.96 1.31 2.78 3.16 4.15 4.67 4.85 6.50 7.35 8.01 8.27 12.06 31.75 32.52 33.91 36.71 72.89
6	36	15	0.35 0.59 0.96 0.99 1.69 1.97 2.07 2.58 2.71 2.90 3.67 3.99 5.35 13.77 25.50
7	38	8	0.09 0.39 0.47 0.73 0.74 1.13 1.40 2.38

Tabela 4: Tempos de vida de um material isolante

Note que este conjunto de dados foi coletado usando um esquema de amostragem completa. Ou seja, considerando k níveis de uma variável stress $V_i, i = 1, 2, \dots, k$ onde os tempos de sobrevivência têm distribuição de Weibull, uma amostra de n_i unidades é

colocada em teste, para cada nível V_i . O experimento termina quando todas as observações falham.

Para os tempos de sobrevivência $t_{ij}, j = 1, \dots, n_i$ e $i = 1, \dots, 7$, o logaritmo da função de verossimilhança (6.5) é:

$$l(\alpha, \beta, p) = 76 \ln p - 76p \ln \alpha + 265.68884\beta p \\ + (p-1) \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{n_i} \ln t_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^7 V_i^{\beta p} A_i(p)}{\alpha^p}$$

onde $A_i(p) = \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}^p$ (considerando o esquema de amostras completas).

Considerando a priori de Jeffreys (6.6), a densidade a posteriori marginal para p (dada em (6.10)) aproximada pelo Método de Laplace, é dada por,

$$\Pi(p|\text{dados}) \propto \frac{(76p+1)^{75} \left(\prod_{i=1}^7 V_i^{\hat{\beta} p n_i} \right) \left(\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{p-1} \right) e^{-(76p+1)/p}}{\left(\sum_{i=1}^7 V_i^{\hat{\beta} p} A_i(p) \right)^{76} B(p, \hat{\beta})},$$

onde $p > 0$ e $B(p, \hat{\beta})$ é dada em (6.11) (ver Figura 7.12).

Figura 7.12: Densidade a Posteriori Marginal para p

Observando a Figura 7.12, pode-se verificar que a moda da densidade a posteriori para p , é dada por:

$$\tilde{p} = 0.86$$

e um intervalo com 95% de credibilidade para p é dado por: $[0.74 ; 0.99]$

Assumindo p conhecido através da moda $\tilde{p}$, os resultados da análise Bayesiana, vistas no Capítulo 3, podem ser considerados, pois os dados $t_{ij}^{\tilde{p}}, i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n_i$ têm distribuição Exponencial.

Assim, para os tempos de sobrevivência $t_{ij}^{0.86}, i = 1, \dots, 7$ e $j = 1, \dots, n_i$, o logaritmo da função de verossimilhança para α e β , (2.6), é dado por:

$$l(\alpha, \beta) = 265.68884\beta - 76\ln\alpha - \frac{\sum_{i=1}^7 A_i V_i^\beta}{\alpha}$$

Assumindo α e β desconhecidos e a priori de Jeffreys (3.1), a densidade a posteriori marginal para β , ver (3.3) é dada por:

$$\Pi(\beta|dados) \propto \frac{\prod_{i=1}^7 V_i^{\beta n_i}}{(\sum_{i=1}^7 A_i V_i^\beta)^{76}}, \quad -\infty < \beta < \infty$$

O gráfico de $\Pi(\beta | dados)$ é mostrado na Figura 7.13.

A moda da densidade a posteriori para β dada na Figura (7.13), é dada por:

$$\tilde{\beta} \cong 15.01$$

A densidade a posteriori marginal para $\theta_1 = \alpha/V_1^\beta$ dada em (3.7) (ver Figura 7.14), usando o Método de Laplace para aproximações de integrais, é dada por:

$$\Pi(\theta_1|dados) \propto \frac{[h''(\hat{\beta})]^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^7 V_i^{\hat{\beta} n_i}}{(\theta_1^{77}) (26^{76} \hat{\beta})} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^7 A_i V_i^{\hat{\beta}}}{\theta_1 26^{\hat{\beta}}} \right\}, \quad \theta_1 > 0$$

Observando a Figura 7.14, uma reparametrização pode ser aplicada. De maneira análoga ao Exemplo 1, considere a reparametrização $\delta_1 = \ln\theta_1$ (ver Apêndice C).

O gráfico da densidade a posteriori marginal para δ_1 , $\Pi(\delta_1|dados)$, mostrado na Figura 7.15, indica que a aproximação Normal para a posteriori de δ_1 pode ser usada.

Figura 7.13: Densidade a Posteriori Marginal para β

Figura 7.14: Densidade a Posteriori Marginal para θ_1 com β desconhecido

Figura 7.15: Densidade a Posteriori Marginal para $\delta_1 = \ln \theta_1$

Um intervalo com 90% de credibilidade para δ_1 é dado por: [5.60714 ; 6.60675]. Para $\theta_1 = e^{\delta_1}$ como parâmetro de interesse, um intervalo com 90% de credibilidade para θ_1 , é dado por: [272.36416 ; 740.07386]. Observar que θ_1 é o tempo médio de sobrevivência para os itens submetidos ao nível usual de stress $V_1 = 26$, considerando os dados transformados $t_{ij}^{0.86}, i = 1, \dots, 7$ e $j = 1, \dots, n_i$.

7.2.1 Densidade a Posteriori Conjunta para θ_1^* e p :

$$\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$$

Nesta subsecção, considerando os resultados da secção 6.2, é possível analisar o comportamento dos parâmetros θ_1^* e p , conjuntamente, através da densidade $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$.

A densidade a posteriori conjunta para θ_1^*, β e p , dada em (6.12) é:

$$\begin{aligned} \Pi(\theta_1^*, \beta, p \mid \text{dados}) &\propto \frac{p^{n+1}}{(\theta_1^*)^{pn+1}} \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{26^\beta} \right)^p \left(\prod_{i=1}^7 V_i^{\beta p n_i} \right) \left(\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{p-1} \right) \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\theta_1^*} \right)^p \sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\frac{V_i}{26} \right)^\beta \right\} \end{aligned}$$

para $\theta_1^* > 0$, $p > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

A densidade a posteriori marginal para θ_1^* e p , reescrita de forma conveniente, usando o Método de Laplace (ver Apêndice B) é dada por:

$$\begin{aligned}\Pi(\theta_1^*, p | \text{dados}) &\propto \frac{p^{77}}{(\theta_1^*)^{76p+1}} \left[\Gamma(1 + \frac{1}{p}) \right]^{76p} \left[\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{p-1} \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh_{\theta_1^*, p}(\beta)} d\beta\end{aligned}$$

onde $-nh_{\theta_1^*, p}(\beta) = 18.07350\beta p - \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\theta_1^*} \right)^p \sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\frac{V_i}{26} \right)^{\beta p}$

e $\hat{\beta}$ que maximiza $-nh(\beta)$ é tal que satisfaça:

$$18.07350 \left(\frac{\theta_1^*}{p(1 + \frac{1}{p})} \right)^p = \sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\frac{V_i}{26} \right)^{\hat{\beta} p} \left(\ln \left(\frac{V_i}{26} \right) \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Pi(\theta_1^*, p | \text{dados}) &\propto \frac{p^{77}}{(\theta_1^*)^{76p+1}} \left(\Gamma(1 + \frac{1}{p}) \right)^{76p} \left(\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{p-1} \right) \\ &\times (nh''(\hat{\beta}))^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \hat{\beta} p \sum_{i=1}^7 n_i \ln V_i - 247.61534 \hat{\beta} p \right. \\ &\left. - \left(\frac{\Gamma(1+\frac{1}{p})}{(\theta_1^*)} \right)^p \sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\frac{V_i}{26} \right)^{\hat{\beta} p} \right\}, \quad \theta_1^* > 0 \text{ e } p > 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\Pi(\theta_1^*, p | \text{dados}) &\propto p^{76} (\theta_1^*)^{-p(\frac{75}{2}) - 1} \left(\Gamma(1 + \frac{1}{p}) \right)^{p\frac{75}{2}} \left(\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{n_i} t^{p-1} \right) \\ &\times \left[\sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\ln \frac{V_i}{26} \right)^2 \left(\frac{V_i}{26} \right)^{\hat{\beta} p} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \hat{\beta} p \sum_{i=1}^7 r_i \ln V_i \right. \\ &\left. - 247.6153 \hat{\beta} p - \left(\frac{\Gamma(1+\frac{1}{p})}{\theta_1^*} \right)^p \sum_{i=1}^7 A_i(p) \left(\frac{V_i}{26} \right)^{\hat{\beta} p} \right\}\end{aligned}$$

(ver (6.13)).

Uma aproximação para o cálculo da função Gama, $\Gamma(Z)$, onde $Z \in \mathbb{R}$ é dada em Abramowitz & Stegun (1968). Na Figura 7.19, tem-se alguns contornos para os parâmetros $\ln \theta_1^*$ e $\ln p$ obtidos a partir da densidade a posteriori conjunta de $\ln \theta_1^*$ e $\ln p$ (calculada a partir da posteriori conjunta $\Pi(\theta_1^*, p \mid \text{dados})$). É possível, usar a moda da posteriori de $\ln \theta_1^*$ e $\ln p$ para ser considerada como estimadores pontuais de $\ln \theta_1^*$ e $\ln p$ e assim, de θ_1^* e p . Também é possível encontrar intervalos de credibilidade para θ_1^* e p , onde θ_1^* é o tempo médio de sobrevivência dos itens submetidos ao nível usual de stress $V_1 = 26$ com os dados na escala original.

Figura 7.16: Contornos para a Densidade a Posteriori Conjunta para $\ln \theta_1^*$ e $\ln p$

Capítulo 8

Considerações Futuras

Neste estudo, considerando um experimento onde os tempos de sobrevivência têm distribuição Exponencial assumindo um mecanismo de censura do Tipo II, análises clássica e Bayesiana foram desenvolvidas. Na análise Bayesiana, partindo de uma priori não - informativa de Jeffreys, densidades a posteriori marginais para os parâmetros de interesse foram determinadas, usando o Método de Laplace. Uma análise Bayesiana também foi desenvolvida para tempos de sobrevivência com distribuição de Weibull.

Com a aplicação de um método para aproximação de integrais, expressões mais simples foram obtidas para as densidades.

Como seqüência para a pesquisa desenvolvida nesta dissertação de mestrado, alguns itens podem ser destacados para serem estudados num estudo futuro:

1. O uso de métodos de aproximação para integrais requer muito cuidado quanto à precisão dos resultados obtidos. Achcar & Smith (1990), estudaram o efeito de reparametrização para os métodos de Laplace e Família de Pearson e através de exemplos, compararam a precisão desses métodos com as reparametrizações adotadas. O “ problema ” de aproximar integrais pelo Método de Laplace, é que resultados precisos são obtidos quando a forma de densidade se aproxima de uma distribuição Normal. Para amostras pequenas ou moderadas e em particular quando os parâmetros são definidos em intervalos diferentes da reta real, é necessário tomar cuidado na aplicação deste método. O método de aproximação baseado na Família de Pearson, permite usar distribuições tais como as distribuições Gama ou Beta, porém estudada apenas para o caso uniparamétrico.

Estes aspectos motivam um estudo mais detalhado sobre aproximações de integrais considerando diferentes reparametrizações, comparando os resultados obtidos quando à precisão do método aplicado com alguns métodos numéricos (por exemplo, o Método de Simpson). Também, outras distribuições de probabilidade podem ser consideradas.

2. O uso de outras densidades a priori para os parâmetros de interesse. Em aplicações industriais, é comum o uso de densidades a priori informativas em lugar das densidades a priori não - informativas, utilizada neste trabalho, pois muitas vezes os engenheiros têm informações sobre o mecanismo da distribuição dos parâmetros de interesse. Por exemplo, uma possível priori a ser estudada, pode ser dada pela priori conjugada.
3. O desenvolvimento de software para ser usado nas aplicações de testes acelerados nas indústrias.
4. Considerar aplicações do método Bayesiano proposto utilizando dados reais das indústrias.

APÊNDICES

Apêndice A Método Delta

Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , denotada por:

$$X \sim \{\mu ; \sigma^2\}$$

e seja $g(X)$ uma função de X . Expandindo $g(X)$ sobre μ e desprezando as derivadas de ordem superior, tem-se que:

$$g(X) = g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu)$$

então, $g(X)$ terá média e variância dadas por: $g(X) \approx \{g(\mu) ; \sigma^2(g'(\mu))^2\}$

Além disso, se $X \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}$, então, $g(X) \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}$.

Para o *caso multivariado*, em particular para os parâmetros $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, tem-se que:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \sim \{(\alpha, \beta) ; I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\}$$

onde $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ é a Matriz de Variância e Covariância dada em (2.9) .

Expandindo $g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ sobre α e β , tem-se que:

$$g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = g(\alpha, \beta) + (\hat{\alpha} - \alpha) \left[\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] + 2\sigma_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \left[\frac{\partial g}{\partial \beta} \right] + (\hat{\beta} - \beta) \left[\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]$$

Da mesma maneira que para o caso univariado, $g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ terá média e variância dadas por:

$$g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \simeq \left\{ g(\alpha, \beta) ; \sigma_{\alpha}^2 \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right]^2 + 2\sigma_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \left[\frac{\partial g}{\partial \beta} \right] + \sigma_{\beta}^2 \left[\frac{\partial g}{\partial \beta} \right]^2 \right\}$$

Usando o resultado (2.2), do Capítulo 2:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \simeq N \left\{ (\alpha, \beta) ; I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \right\}$$

Logo,

$$g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \simeq N \left\{ g(\alpha, \beta) ; \sigma_{\alpha}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\sigma_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right) + \sigma_{\beta}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)^2 \right\}$$

Apêndice B

Aproximação de Integrais pelo Método de Laplace

Em problemas onde a densidade a posteriori conjunta para um vetor de parâmetros é conhecida, e há interesse em se fazer inferências a respeito de um parâmetro particular, o *Método de Laplace* fornece resultados com boa precisão usando aproximações de integrais para achar a densidade a posteriori marginal e momentos a posteriori para o parâmetro de interesse.

Seja a densidade a posteriori conjunta $\Pi(\theta_1, \dots, \theta_p \mid \text{dados})$ e θ_1 o parâmetro de interesse. A densidade a posteriori marginal para θ_1 dada por:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \int \Pi(\theta_1, \dots, \theta_p \mid \text{dados}) d\theta_2 \dots d\theta_p$$

A densidade a posteriori marginal $\Pi(\theta_1 \mid \text{dados})$ pode ser reescrita na forma:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \int e^{-nh_{\theta_1}(\theta_2, \dots, \theta_p)} d\theta_2 \dots d\theta_p$$

onde $nh_{\theta_1}(\theta_2, \dots, \theta_p) = \ln \Pi(\theta_1, \dots, \theta_p \mid \text{dados})$ é função de $\theta_2, \dots, \theta_p$ para cada valor de θ_1 fixado.

Seja $(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$ o vetor de valores dos parâmetros que maximiza $-nh_{\theta_1}(\theta_2, \dots, \theta_p)$ ($(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$ é a moda a posteriori) e seja $\sigma = \{ \det(D^2 h(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)) \}^{-1/2}$ onde $D^2 h(\theta_2, \dots, \theta_p)$ é a Matriz Hessiana de h calculada em $(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$. Então, a aproximação de Laplace para a densidade a posteriori marginal para θ_1 é dada por:

$$\int \exp \{ -nh_{\theta_1}(\theta_2, \dots, \theta_p) \} d\theta_2 \dots d\theta_p \propto (2\pi)^{p/2} \sigma e^{-nh(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)}$$

Portanto,

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) \propto (2\pi)^{p/2} \sigma e^{-nh(\hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)}$$

Como uma aplicação particular, o Método de Laplace é usado para aproximar a densidade a posteriori marginal do parâmetro de interesse θ_1 , $\Pi(\theta_1 \mid \text{dados})$, determinada no Capítulo 3.

Seja a densidade posteriori marginal para θ_1 , $\theta_1 \in \{\theta_1, \beta : \theta_1 > 0 \text{ e } -\infty < \beta < \infty\}$, dada por:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \int \Pi(\theta_1, \beta \mid \text{dados}) d\beta$$

A densidade $\Pi(\theta_1 \mid \text{dados})$ pode ser reescrita de maneira adequada, tal que:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) = \int e^{-nh_{\theta_1}(\beta)} d\beta$$

onde $nh_{\theta_1}(\beta) = \ln \Pi(\theta_1, \beta \mid \text{dados})$ é função de β para um valor θ_1 fixado.

Seja $\hat{\beta}$ o valor de β que maximiza $-nh_{\theta_1}(\beta)$ ($\hat{\beta}$ é a moda da posteriori) e $\sigma = \{h''(\hat{\beta})\}^{-1/2}$. Então, a aproximação de Laplace para a densidade posteriori marginal para θ_1 é dada por:

$$\int \exp\{-nh_{\theta_1}(\beta)\} d\beta \propto \sqrt{2\pi\sigma n^{-1/2}} \exp\{-nh(\beta)\}$$

Portanto,

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) \propto \sqrt{2\pi\sigma n^{-1/2}} \exp\{-nh(\beta)\}$$

Especificamente, para a densidade encontrada no Capítulo 3, (3.6), tem-se que:

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{V_1^{\beta r}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{\theta_1 V_1^{\beta}}\right\} d\beta$$

Assim,

$$nh_{\theta_1}(\beta) = \beta r V_1 - \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i + \frac{1}{\theta_1 V_1^{\beta}} \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}$$

ou seja,

$$h''_{\theta_1}(\hat{\beta}) = \frac{1}{\theta_1 V_1^{\hat{\beta}}} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} (\ln V_i)^2 - (\ln V_1) \left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \right) \right\} + \ln V_1 \left[\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \ln V_1 \right]$$

Portanto,

$$\Pi(\theta_1 \mid \text{dados}) \propto \frac{1}{\theta_1^{r+1}} [h''(\hat{\beta})]^{-1/2} \frac{1}{V_1^{r\hat{\beta}}} \prod_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} r_i} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}}{\theta_1 V_1^{\hat{\beta}}}\right\}, \quad \theta_1 \geq 0$$

Uma outra aplicação para o Método de Laplace, é a aproximação de integrais para calcular *esperanças* ou *variâncias a posteriori* de uma densidade (ver por exemplo, Achcar, 1989) ou ainda, *densidades preditivas* para observações futuras.

Apêndice C

Densidade a Posteriori Marginal para $\delta_1 = \ln \theta_1$ quando θ_1 e β são desconhecidos, onde os tempos de sobrevivência assumem uma distribuição Exponencial

Assumindo β desconhecido, a densidade a posteriori marginal para θ_1 é dada em (3.7).

Para a construção de um intervalo de credibilidade para o parâmetro de interesse θ_1 , podem ser usados métodos numéricos, ou uma transformação de θ_1 que leve à distribuições próximas da Normal.

Considere a transformação da variável $\delta_1 = \ln \theta_1$ e a densidade a posteriori conjunta para α e β dada em (3.2). Utilizando uma transformação de variáveis, a densidade a posteriori conjunta para θ_1 e β é determinada.

Seja então a transformação de variáveis:

$$\begin{cases} \beta &= \beta \\ \delta_1 &= \ln(\alpha/V_1^\beta), \text{ então, } \alpha = e^{\delta_1} V_1^\beta \end{cases}$$

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \partial\beta/\partial\beta & \partial\beta/\partial\delta_1 \\ \partial\alpha/\partial\beta & \partial\alpha/\partial\delta_1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $\det(J) = e^{\delta_1} V_1^\beta$.

A densidade a posteriori conjunta para δ_1 e β é dada por:

$$\Pi(\delta_1, \beta \mid \text{dados}) \propto \prod_{i=1}^k \frac{V_i^{\beta r_i}}{e^{\delta_1 r} V_1^{\beta r}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta}{e^{\delta_1} V_1^\beta} \right\}$$

Integrando a equação acima em relação à β , a densidade marginal para δ_1

encontrada é dada por:

$$\Pi(\delta_1 | \text{dados}) = \frac{1}{e^{\delta_1 r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\beta r_i}}{V_1^{\beta r}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta}}{e^{\delta_1} V_1^{\beta}} \right\} d\beta$$

De forma análoga à densidade (3.6), aqui existem dificuldades para resolver analiticamente essa integral. Aplicando o Método de Laplace para aproximação de integrais (ver Apêndice B), $\Pi(\delta_1 | \text{dados})$ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Pi(\delta_1 | \text{dados}) \propto \frac{1}{e^{\delta_1 r}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -nh_{\delta_1}(\beta) \} d\beta$$

onde $nh_{\delta_1}(\beta) = \beta r \ln V_1 - \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i + \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta} / e^{\delta_1} V_1^{\beta}$. Daí,

$$\int \exp \{ -nh(\beta) \} d\beta \approx \sqrt{2\pi\sigma n^{-1/2}} \exp \{ -nh(\hat{\beta}) \}$$

Assim, a *densidade posteriori marginal* para δ_1 , aproximada pelo Método de Laplace, é dada por:

$$\Pi(\delta_1 | \text{dados}) \propto \frac{1}{e^{\delta_1 r}} \{ h''(\hat{\beta}) \}^{-1/2} \frac{\prod_{i=1}^k V_i^{\hat{\beta} r_i}}{V_1^{\hat{\beta} r}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}}{e^{\delta_1} V_1^{\hat{\beta} r}} \right\}$$

Partindo de uma priori de Jeffreys, dada em (3.1), que implica numa priori uniforme em relação a δ_1 e β , a densidade a posteriori conjunta $\Pi(\delta_1, \beta | \text{dados})$ e a função de verossimilhança para δ_1 e β , serão equivalentes.

A função de verossimilhança para δ_1 e β é dada por:

$$L(\delta_1, \beta) \propto \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{V_i^{\beta r_i}}{(e^{\delta_1} V_1^{\beta})^{r_i}} \exp \left[-\frac{A_i V_i^{\beta}}{e^{\delta_1} V_1^{\beta}} \right] \right\},$$

ou seja, $l(\delta_1, \beta) = \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \delta_1 - r \beta \ln V_1 - \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta} / e^{\delta_1} V_1^{\beta}$.

Os estimadores de máxima verossimilhança de (δ_1, β) são dados pela resolução das equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\delta_1, \beta)}{\partial \delta_1} = 0 \\ \frac{\partial l(\delta_1, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \hat{\delta}_1 &= \ln(\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}) - \ln r - \hat{\beta} \ln V_1 \\ \sum_{i=1}^k r_i \ln V_1 - r \ln V_1 &= \left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \ln V_i - \ln V_1 \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \right) / V_1^{\hat{\beta}} e^{\hat{\delta}_1} \end{cases}$$

Usando o resultado (2.2), tem-se que:

$$(\hat{\delta}_1, \hat{\beta}) \stackrel{a}{\sim} N \{ (\delta_1, \beta) ; I^{-1}(\hat{\delta}_1, \hat{\beta}) \}$$

onde $I(\delta, \beta)$ é a Matriz de Informação de Fisher dada por:

$$I(\delta_1, \beta) = \begin{pmatrix} E\{-\partial^2 l / \partial \delta_1^2\} & E\{-\partial^2 l / \partial \delta_1 \partial \beta\} \\ E\{-\partial^2 l / \partial \delta_1 \partial \beta\} & E\{-\partial^2 l / \partial \beta^2\} \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$I(\delta_1, \beta) = \begin{pmatrix} r & r \ln V_1 - \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i \\ r \ln V_1 - \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i & a \end{pmatrix}$$

onde $a = \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 - 2 \ln V_1 \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i + r (\ln V_1)^2$ e portanto,

$$I^{-1}(\hat{\delta}_1, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\delta_1}^2 & \hat{\sigma}_{\delta_1, \beta} \\ \hat{\sigma}_{\beta, \delta_1} & \hat{\sigma}_{\beta}^2 \end{pmatrix}$$

é a Matriz de Variância e Covariância para os parâmetros δ_1 e β .

Como os elementos da Matriz de Informação de Fisher, $I(\delta_1, \beta)$, são *constantes*, os resultados assintóticos obtidos são precisos (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980).

Observe que

$$\hat{\delta}_1 \stackrel{a}{\sim} N \{ \delta_1 ; \hat{\sigma}_{\delta_1}^2 \}$$

Então, um *intervalo de credibilidade* $100(1 - \gamma)\%$ para δ_1 é dado por:

$$ic(\delta_1) = [\hat{\delta}_1 - Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_{\delta_1} ; \hat{\delta}_1 + Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_{\delta_1}]$$

Bibliografia

- ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I.A. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables.* New York, Dover, 1968
- ACHCAR, J.A. Densidades Preditivas em Análise de Sobrevivência In: *Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, 6, Rio de Janeiro, 1984. Atas Rio de Janeiro, IM/UFRJ, 1984 p. 1-7, 1984
- ACHCAR, J.A. Reparametrizations and Laplace Approximations for Posteriori Moments in Binomial Models. *Revista de Matemática e Estatística*, V. 7, p. 73 - 86, 1989
- ACHCAR, J.A. Use of predictive densities in quality control with accelerated life tests assuming a power rule model and an exponential distribution. *São Carlos, ICMSC - USP*, 1990. (Notas do ICMSC - USP, 76)
- ACHCAR, J.A. ; BOLFARINE, H. Predictive Densities in Survival Analysis with a Generalized Gamma Regression Model. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, V. 2, p. 23 - 31, 1988
- ACHCAR, J.A. ; DIAS, T.C.M. Accelerated tests with an Exponential distribution: a Bayesian approach with the power rule model and type II censored data. *São Carlos, ICMSC - USP*, 1990. (Notas do ICMSC - USP, 67)
- ACHCAR, J.A. ; SMITH, A.F.M. Aspects of Reparametrization in Approximate Bayesian Inference In: GEISSER, S. ; HODGES, J. S. et al. *Bayesian and Likelihood Methods In Statistics and Econometrics.* Holanda, Elsevire, 1990. p. 431 - 52. (Statistics in Bayesian Econometrics and Statisticas, 7)
- AITCHINSON, J. ; DUNSMORE, I.R. *Statistical Prediction Analysis.* Cambridge, Cambridge University Press, 1975
- BHATTACHARYA, S.K. *Bayesian Approach to Life Testing and Reliability Estimation.*

- Journal of the American Statistical Association, V. 62, p. 48 - 62, 1967
- BHATTACHARYYA, G.K. ; FRIES, A. *Inverse Gaussian Regression and Accelerated Life Tests In Proceedings of the Special Topics Meeting on Survival Analysis. In: 138th Meeting of the Institute of Mathematics Statistics. Columbus, Ohio, p. 101 - 17, 1981*
- BICKEL, P.J ; DOKSUM, K.A. *Mathematical Statistics. San Francisco, Holden - Day, 1977*
- BOX, G.E.P. ; TIAO, G.C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis. New York: Addison - Wesley, 1973*
- COHEN, A.C. *Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Basead on Complete and Censored Samples. Technometrics, V. 7, N. 4, p. 579 - 88, 1965*
- COX, D.R. ; REID, N. *Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference. Journal Royal Statistical Society, V. 49, N. 1, p. 1 - 39, 1987*
- EPSTEIN, B. ; SOBEL, M. *Life Testing. Journal of the American Statistical Association, V. 48, N. 263, p. 486 - 502, 1953*
- GEISSER, S. *Aspects of the Preditive and Estimative Approachs in the Determination of Probabilities. Biometrics Supplement: Current Topics in Biostatistics and Epidemiology, p. 75 - 85, 1982*
- KAPLAN, E.L. ; MEIER, P. *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. Journal of the American Statistical Association, V. 53, N. 282, p. 457 - 81, 1958*
- KLEIN, J.P. ; BASU, A.P. *Accelerated Life Testes Under Competing Weibull Causes of Failure. University of Missouri - Columbia, Technical Reporter N. 103, 1981*
- KLEIN, J.P. ; BASU, A.P. *Weibull Accelerated Life Tests when there are Competing Causes of Failure. Communications in Statistics - Theory ans Methods, A10(20), p. 2073 - 100, 1981a*
- LAWLESS, J.F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New York, Willey, 1982*
- LEVENBACH, G.J. *Accelerated Life Testing of Capacitors. IRE Transactions, V. 10, p. 9 - 20, 1957*
- MANN, N.R. ; SCHAFFER, R.E. ; SINGPURWALLA, N.D. *Methods for Statistical*

- Analysis of Reliability and Life Data. *New York, Wiley, 1974*
- MILLER, R.G. Survival Analysis. *New York, Wiley, 1981*
- MOOD, A.M. ; GRAYBILL, F.A. ; BOES, D.C. Introduction to the Theory of Statistical. Englewood Cliffs, N.J., McGraw - Hill, 1974
- NELSON, W.B. Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data with the Inverse Power Law Model. *IEEE Transactions on Reliability*, V. R-21, N. 1, p. 2 - 11, 1972
- SINGPURWALLA, N.D. Inference from Accelerated Life Tests When Observations are Obtained from Censored Samples. *Technometrics*, V. 13, N. 1, p. 161 - 70, 1971
- PRESS, S.J. *Bayesian Statistics: Principles , Models and Applications*. New York, Wiley, 1988
- SPROTT, D.A. Maximum Likelihood in Small Samples: Estimation in the Presence of Nuisance Parameters. *Biometrika*, V. 67, p. 515 - 23, 1980
- SPROTT, D.A. Normal Likelihoods and Relation to a Large Sample Theory of Estimations. *Biometrika*, V. 60, p. 457 - 65, 1973
- SPROTT, D.A. ; KALBFLEISH, J.D. Examples of Likelihoods and Comparison with point Estimates and Large Samples Approximations. *Journal of the American Statistical Association*, V. 64, N. 326, p. 468 - 84, 1968
- TIERNEY, L. ; KADANE, J.B. Accurate Approximations for Posteriori Moments and Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, V. 81, N. 393, p. 82 - 6, 1986
- TIERNEY, L. ; KASS, R.E. ; KADANE, J.B. Fully Exponential Laplace Approximations to Expectations and Variances of Nonpositive Functions. *Journal of the American Statistical Association*. V. 84, N. 407 p. 710 - 16, 1989
- ZACKS, S. *The Theory of Statistical Inference*. New York, Willey, 1971
- ZELEN, M. Factorial Experiments in Life Testing. *Technometrics*, V. 1, N. 3, p. 269 - 288, 1959