SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 22.04.2003

Assinatura: *Ana Paula André F. de*

Métodos de pontos interiores aplicados ao fluxo de carga ótimo utilizando coordenadas cartesianas[†]

ADRIANO THOMAZ

Orientador:

PROF. DR. AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos

Abril/2003

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Aurelio R. de O.

Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

Marinho G. de A. Filho

Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno

Leonardo Nepomuceno

Para Irene (*em memória*)

Agradecimentos

À Deus por estar sempre comigo e iluminar meu caminho.

Ao meu orientador Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira, pela amizade, pela confiança depositada no desenvolvimento deste trabalho, por acreditar em mim e estar sempre disposto a me ajudar com paciência e dedicação.

À meus pais Arlete e Eduardo, pelo amor, carinho, que sempre priorizaram minha educação e acreditaram em mim, me apoiando e auxiliando para que eu pudesse realizar meus trabalhos e sonhos.

Aos professores Geraldo Roberto Martins da Costa, Secundino Soares Filho, e especialmente para Selma H. Vasconcelos Arenales, Marcos Nereu Arenales e Artur Darezzo Filho.

À Fernanda pelo apoio, amizade, amor e compreensão.

À Marília, Cecília, Edson, e de todos da família pelo total apoio e compreensão.

Aos amigos Tatiana, Stélio, Michelle, Priscilla e Renata pelo incentivo. Aos amigos do Laboratório de Otimização do ICMC-USP, Silvio, Ricardo, Fabiano, Jelder, Carla, Gecirlei, Fabrizio, Lilian, em especial para André, Cecília, Glaucia e Kelly.

Aos funcionários do ICMC-USP que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.

À todos os meus amigos de São Carlos.

À FAPESP pela credibilidade e apoio financeiro.

E finalmente a todos que colaboraram indiretamente na realização deste trabalho.

Resumo

Os métodos de pontos interiores primal-dual e preditor-corretor são desenvolvidos para o problema de fluxo de potência ótimo AC e a estrutura matricial resultante é estudada. Foi adotada a representação do problema através de coordenadas cartesianas das tensões uma vez que neste modelo a Hessiana do problema é constante e a expansão em Taylor é exata para o termo de ordem dois. Além disso, o cálculo do termo de correção do método preditor-corretor pode ser feito de forma menos custosa computacionalmente. Por outro lado, a vantagem em se trabalhar com coordenadas polares, que modelam mais facilmente os limites de magnitude de tensão, perde importância devido ao tratamento de desigualdades eficiente proporcionado pelos métodos de pontos interiores, permitindo uma revisão dos procedimentos geralmente adotados. Assim, a utilização de coordenadas cartesianas surge como uma abordagem natural, pois apresenta uma formulação mais simples que as coordenadas polares. A aplicação do método de Newton às condições de otimalidade leva a um método de pontos interiores primal-dual específico para este modelo. As condições de otimalidade por sua vez podem ser obtidas através da função lagrangiana do problema onde as restrições de desigualdade são representadas por funções de barreira logarítmicas das variáveis de folga. Antes da aplicação do método, o número de variáveis do problema é reduzido através da eliminação de variáveis duais livres, que serão calculadas no final. Esta redução não altera a estrutura esparsa do problema. O sistema linear resultante pode então ser reduzido a duas vezes a quantidade do número de barras da rede de transmissão. Além disso, a matriz resultante é simétrica em estrutura. Esta característica pode ser explorada de forma eficiente reduzindo o esforço computacional por iteração.

Abstract

The primal-dual interior point methods are developed to the AC optimal power flow and the resulting matricial structure is studied. The representation of the tensions through cartesian coordinates is adopted, once that Hessian of the problem is constant and the expansion in Taylor is accurate for the second order term. The advantage of working with polar coordinates, that easily model the tension magnitudes, lose importance due to the efficient treatment of inequalities proportionated by the interior point methods. These methods are developed applying Newton's methods to the optimality conditions of the problem. Before the application of the method, the number of variables of the problem is reduced through the elimination of free dual variables. This reduction does not modify the sparse pattern of the problem. The linear system obtained can be reduced to the dimension of twice the number of buses. Moreover, such matrix is symmetric in structure. This feature can be explored reducing the computational effort per iteration.

Conteúdo

Introdução	1
1 Métodos de Pontos Interiores	3
1.1 Aspectos Gerais	3
1.2 Problemas Lineares	4
1.3 Método de Newton para Uma Variável	5
1.4 Método de Newton para Várias Variáveis	5
1.5 Método Primal-Dual Afim Escala	6
1.6 Método Preditor-Corretor	9
1.7 Cálculo das Direções nos Métodos de Pontos Interiores	11
2 Fluxo de Carga	13
2.1 Aspectos Gerais	13
2.2 Formulação do Problema	14
2.3 Modelagem	15
2.3.1 Linhas de Transmissão	15
2.3.2 Fluxos de Potência Ativa e Reativa	16
2.4 Formulação Matricial	17
3 Problema de Fluxo de Carga Ótimo AC	21
3.1 Motivação	21
3.2 Formulação do Problema	22
3.2.1 Problema Relaxado	23
3.3 Simplificação da Matriz Hessiana	24

4	Desenvolvimento do Método	25
4.1	Metodologia	25
4.2	Função Barreira Logarítmica	26
4.3	A Função Lagrangiana	27
4.4	Eliminação de Variáveis Livres y	31
4.5	Método de Pontos Interiores Primal-Dual	32
4.5.1	Direções de Newton	34
4.6	Método Preditor-Corretor	35
4.7	Detalhes de Implementação	36
4.7.1	Considerações Iniciais	36
4.7.2	Atualização das Variáveis	36
4.7.3	Cálculo do Comprimento do Passo	36
4.7.4	Redução do Parâmetro de Barreira	37
4.7.5	Critério de Convergência	37
4.7.6	Ponto Inicial	39
5	Resolução do Sistema Linear	41
5.1	Estrutura Matricial	45
6	Resultados Computacionais	47
6.1	Implementação e Ambiente	47
6.2	Sistemas	48
6.3	BAR3	49
6.3.1	Análises	50
6.3.2	Tensão	51
6.3.3	Potência Ativa	51
6.3.4	Normas Residuais Relativas	53
6.3.5	Fluxo e Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão	54
6.4	IEEE30	55
6.4.1	Análises	55
6.4.2	Tensão	56

6.4.3	Potência Ativa	57
6.4.4	Normas Residuais Relativas	58
6.4.5	Fluxo e Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão	59
7	Conclusões	65
8	Propostas Futuras	67
	Bibliografia	69
	Apêndice	
	Relatórios de Saída da Implementação	

Lista de Figuras

6.1	<i>Tensão nas barras - BAR3 (L-D)</i>	52
6.2	<i>Geração de potência ativa - BAR3 (L-D)</i>	53
6.3	<i>Normas residuais relativas - BAR3 (L-D)</i>	53
6.4	<i>Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão - BAR3 (L-D)</i>	54
6.5	<i>Tensão nas barras - IEEE30 (L-D)</i>	56
6.6	<i>Geração de potência ativa - IEEE30 (L-D)</i>	58
6.7	<i>Normas residuais relativas - IEEE30 (L-D)</i>	59
6.8	<i>Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão - IEEE30 (L-D)</i>	59
6.9	<i>Perda de potência ativa nas linhas de transmissão - IEEE30 (L-D)</i>	60
6.10	<i>Fluxos nas linhas - IEEE30 (L-E: limite 1,0 pu)</i>	61
6.11	<i>Fluxos nas linhas - IEEE30 (L-E: limite 0,5 pu)</i>	61
6.12	<i>Perda nas linhas de transmissão - IEEE30 (L-E: limite 1,0 pu)</i>	64
6.13	<i>Perda nas linhas de transmissão - IEEE30 (L-E: limite 0,5 pu)</i>	64

Lista de Tabelas

6.1	<i>Limites de tensão</i>	48
6.2	<i>Custos e limites de geração</i>	49
6.3	<i>Iterações, função objetivo, tempo e flops – BAR3</i>	50
6.4	<i>Valor do erro e gap de complementaridade relativo – BAR3</i>	51
6.5	<i>Tensão nas barras – BAR3</i>	51
6.6	<i>Geração de potência ativa – BAR3</i>	52
6.7	<i>Fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão – BAR3</i>	54
6.8	<i>Iterações, função objetivo, tempo e flops – IEEE30</i>	55
6.9	<i>Valor do erro e gap de complementaridade relativo – IEEE30</i>	56
6.10	<i>Tensão nas barras – IEEE30</i>	57
6.11	<i>Geração de potência ativa – IEEE30</i>	58
6.12	<i>Fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão – IEEE30</i>	62
6.13	<i>Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão – IEEE30 (L-E)</i>	63

Introdução

O problema de fluxo de potência ótimo (ou fluxo de carga ótimo) é um problema de programação não-linear de grande porte não convexo. Torna-se complicado na prática pela presença de um grande número de variáveis discretas. Dada sua importância no planejamento e operação de sistemas de potência os problemas de fluxo de potência ótimo têm sido assunto de intensa pesquisa.

As redes elétricas estão atualmente operando muito carregadas, assim as ferramentas de planejamento e operação precisam trabalhar com problemas com alto grau de não-linearidade no comportamento do sistema.

Resolver problemas de fluxo de potência ótimo eficientemente de maneira não-linear é um tópico muito complexo. Uma técnica mais recentemente utilizada para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo de grande porte AC é a dos métodos de pontos interiores [14, 20]. Uma estrutura de dados bem elaborada e o uso eficiente de técnicas de esparsidade tornam estes métodos muito atrativos.

Uma característica comum desses trabalhos é que problemas de programação não-linear têm sido resolvidos eficientemente pelos métodos de pontos interiores para programação não-linear derivados da abordagem de função barreira logarítmica. Essa abordagem foi introduzida por Frisch [5], e desenvolvida como uma ferramenta para programação não-linear por Fiacco e McCormick [4]. Embora tenha sido desenvolvida para resolver problemas de programação não-linear em geral, foi no campo da programação linear que sua excelente eficiência computacional foi primeiramente demonstrada e amplamente aceita [1, 10, 13].

Capítulo 1

Métodos de Pontos Interiores

1.1 Aspectos Gerais

Desde 1985, pesquisas sobre métodos de pontos interiores passaram por imponente expansão, ambos em teoria e prática computacional. Derivações de métodos de pontos interiores estão sendo estendidas para resolver todas as classes de problema de otimização, desde linear até não-linear e de convexos até não-convexos, sendo o último sem garantia com relação a sua convergência. Da mesma forma, os métodos de pontos interiores estão também sendo aplicados para resolver todos os tipos de problemas práticos. Sistemas de potência é uma dessas áreas onde eles estão sendo aplicados extensivamente. Devido ao tamanho e características especiais desses problemas, os métodos de pontos interiores têm-se mostrado uma alternativa viável especialmente para os problemas com alto grau de não-linearidade [8, 23, 27].

Vamos apresentar inicialmente os métodos de pontos interiores para programação linear, as deduções desses métodos para problemas de fluxo de potência ótima não-lineares serão mostradas mais adiante.

1.2 Problemas Lineares

Neste capítulo vamos adotar a seguinte forma, denominada padrão, para o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^t x \\ &\text{sujeito a} && Ax = b \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

onde, $A \in \Re^{m \times n}$ com posto m e os vetores coluna x , c e b tem a dimensão apropriada. O dual desse problema é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && b^t y \\ &\text{sujeito a} && A^t y + z = c \\ &&& z \geq 0. \end{aligned}$$

Um ponto é dito interior quando todas as variáveis estão estritamente dentro de seus limites. Um ponto interior é factível quando todas as restrições são satisfeitas, ou seja, o ponto x^0 , onde, $Ax^0 = b$ com $x^0 > 0$ é um ponto interior factível. As condições de otimalidade dos problemas primal e dual são formadas pela:

factibilidade primal

$$\begin{aligned} b - Ax &= 0 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

factibilidade dual

$$\begin{aligned} c - A^t y - z &= 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

e condições de complementaridade [9, 24]:

$$x_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

ou seja:

$$XZe = 0,$$

onde X é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor x , Z é a matriz diagonal formada pelos elementos do vetor z e e é o vetor unitário, $e^t = (1, 1, \dots, 1)$. O método de pontos interiores primal-dual pode ser desenvolvido através aplicação do método de Newton às condições de otimalidade.

1.3 Método de Newton para Uma Variável

O método de Newton para uma variável busca zeros de uma função resolvendo equações da forma $\phi(x) = 0$. Este método pode ser deduzido aplicando a série de Taylor a $\phi(x)$ em torno de x^0 , obtendo:

$$\phi(x) = \phi(x^0) + \phi'(x^0)(x - x^0) + \dots$$

Ignorando os termos de ordem superior temos $\phi(x) = 0$:

$$-\frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} = x - x^0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)} + x^0,$$

obtendo assim o processo iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)},$$

onde: $\alpha^k = -\frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)}$ é a direção de Newton.

Este processo pode ser repetido até que uma tolerância estabelecida seja satisfeita.

1.4 Método de Newton para Várias Variáveis

O método de Newton para várias variáveis tem como objetivo encontrar os zeros de sistemas de equações da seguinte forma: seja, $f(x) = 0$, um conjunto de funções não-lineares $\phi_i(x)$ onde $\phi_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

O método de Newton pode ser deduzido aplicando a série de Taylor para cada $\phi_i(x)$ em

torno de x^0 , obtendo:

$$\phi_i(x) = \phi_i(x^0) + [\nabla \phi_i(x^0)]^t (x - x^0) + \dots,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, onde:

$$\nabla \phi_i(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i(x^0)}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i(x^0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Ignorando os termos de ordem superior temos:

$$[\nabla \phi_i(x^0)]^t (x - x^0) \approx -\phi_i(x^0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Onde definimos agora o Jacobiano no ponto x^0 :

$$J(x^0) = \begin{pmatrix} \nabla \phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \nabla \phi_n(x^0) \end{pmatrix}^t \quad \text{e} \quad f(x^0) = \begin{pmatrix} \phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \phi_n(x^0) \end{pmatrix}.$$

Podemos resumir assim o método de Newton:

Dado x^0 ,

Para $k = 0, 1, \dots$

$$d^k \approx -J(x^k)^{-1} f(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

até convergir.

1.5 Método Primal-Dual Afim Escala

Este método encontra a solução dos problemas primal e dual aplicando variantes do método de Newton às condições de otimalidade, e modificando o tamanho do passo para manter os pontos interiores. Vamos escrever as condições de otimalidade da seguinte forma:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax + b \\ A^t y + z - c \\ XZe \end{pmatrix} = 0.$$

Aplicando o método de Newton neste sistema de equações não-lineares obtemos:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x^0, y^0, z^0) + (J(x^0, y^0, z^0))^{-1} f(x^0, y^0, z^0) \\ &= (x^0, y^0, z^0) + d^0.\end{aligned}$$

Seja:

$$-f(x^0, y^0, z^0) = - \begin{pmatrix} Ax^0 - b \\ A^t y^0 + z^0 - c \\ X^0 Z^0 e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix} \equiv r^0.$$

A direção do método de Newton aplicado às equações $f(x, y, z)$ torna-se:

$$J(x^0, y^0, z^0)d^0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \\ d_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix},$$

logo:

$$d^0 = \begin{pmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \\ d_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix}.$$

Podemos assim resumir o método de pontos interiores primal-dual a fim escala [15]:

Dado um ponto interior (x^0, y^0, z^0) onde $(x^0, z^0) > 0$,

Para $k = 0, 1, \dots$

$$r_p^k = -Ax^k + b$$

$$r_d^k = -A^t y^k - z^k + c$$

$$r_a^k = -X^k Z^k e$$

$$d^k = J^{-1}(x^k, y^k, z^k)r^k$$

calcule o tamanho do passo primal α_p^k e dual α_d^k

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k d_x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k d_y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k d_z^k$$

até convergir.

O critério de convergência usado nesse método é baseado nas condições de otimalidade:

$$\left| \frac{x^t z}{1 + c^t x + b^t y} \right| \leq \epsilon,$$

$$\frac{\|b - Ax\|}{1 + \|b\|} \leq \epsilon,$$

$$\frac{\|c - A^t y - z\|}{1 + \|c\|} \leq \epsilon,$$

onde ϵ é a tolerância desejada.

O tamanho do passo α_p^k , α_d^k é calculado da seguinte forma, primeiramente calculamos:

$$\rho_p^k = \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{dx_i^k} \right\}, \quad (1.1)$$

$$\rho_d^k = \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right\}. \quad (1.2)$$

Os valores ρ_p^k e ρ_d^k representam o tamanho de passo máximo tal que a primeira variável de x e z se anulam respectivamente.

Logo, o tamanho do passo α_p^k e α_d^k será multiplicado por $\tau \in (0,1)$:

$$\begin{cases} \alpha_p^k = \min(1, \rho_p^k) \\ \alpha_d^k = \min(1, \rho_d^k), \end{cases} \quad (1.3)$$

o que garante que nenhuma variável de x ou z será anulada.

Os métodos afim-escala tem uma desvantagem importante, eles permitem que as variáveis (x, z) se aproximem de seus limites muito rapidamente. Conseqüentemente as direções calculadas são muito distorcidas e o método converge lentamente, pois $x_i z_i \approx 0$. Para evitar que isto ocorra é acrescentada uma perturbação (μ) na condição de complementaridade $x_i z_i = 0$. Em seu lugar consideramos $x_i z_i = \mu$ ou seja, o método primal-dual resolve o seguinte sistema de equações não-lineares a cada iteração:

$$\begin{cases} b - Ax^k = 0 \\ c - A^t y^k - z^k = 0 \\ \mu^k e - X^k Z^k e = 0, \end{cases}$$

onde μ^k é um parâmetro que varia a cada iteração $\mu^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. As únicas alterações do problema primal-dual clássico em relação ao método afim-escala são a substituição de r_a^k por $r_c^k = \mu^k - X^k Z^k e$ e o cálculo da perturbação $\mu^k = \beta^k \frac{\gamma^k}{n}$, onde $\gamma = x^t z$

representa o gap de dualidade se x e z são factíveis [26], $\beta \in (0,1)$ e $\frac{\gamma^k}{n}$ seria uma “medida” da distância média de um ponto ótimo. O Jacobiano permanece o mesmo.

1.6 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor é o método de pontos interiores mais utilizado na prática, pois obtém os melhores resultados práticos e tem convergência quadrática considerando a resolução dos dois sistemas lineares como uma única iteração. Este método utiliza uma direcção com três componentes [26]:

- direcção afin-escala;
- direcção de centragem (β);
- direcção de correção que compensa a aproximação linear do método de Newton, $(x + d_x)^t(z + d_z) = d_x^t d_z$.

No método preditor-corretor calcula-se primeiro a direcção afin-escala ($\tilde{d} = d_{\tilde{x}}, d_{\tilde{y}}, d_{\tilde{z}}$):

$$\begin{cases} Ad_{\tilde{x}} = r_p \\ A^t d_{\tilde{y}} + d_{\tilde{z}} = r_d \\ Zd_{\tilde{x}} + Xd_{\tilde{z}} = r_a = -XZe. \end{cases} \quad (1.4)$$

Usando o mesmo Jacobiano encontra-se em seguida a direcção perturbada no ponto:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z) + (d_{\tilde{x}}, d_{\tilde{y}}, d_{\tilde{z}}),$$

ou seja:

$$\begin{cases} Ad_{\tilde{x}} = r_p = b - A_{\tilde{x}} = b - A(x + d_x) = 0 \\ A^t d_{\tilde{y}} + d_{\tilde{z}} = r_d = 0 \\ Zd_{\tilde{x}} + Xd_{\tilde{z}} = \mu e - (X + D_{\tilde{x}})(Z + D_{\tilde{z}})e = \mu e - D_{\tilde{x}}D_{\tilde{z}}e, \end{cases}$$

onde, μe é a centragem e $(X + D_{\tilde{x}})(Z + D_{\tilde{z}})$ é a correção não-linear. A direcção utilizada será a soma das duas direcções:

$$\begin{cases} d_x = d_{\tilde{x}} + d_x \\ d_y = d_{\tilde{y}} + d_y \\ d_z = d_{\tilde{z}} + d_z. \end{cases}$$

Logo, (d_x, d_y, d_z) podem ser calculados diretamente somando os dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} A(d_{\bar{x}} + d_{\hat{x}}) = r_p \\ A^t(d_{\hat{y}} + d_{\bar{y}}) + d_{\bar{z}} + d_{\hat{z}} = r_d \\ Z(d_{\bar{x}} + d_{\hat{x}}) + X(d_{\bar{z}} + d_{\hat{z}}) = r_a + \mu c - D_{\bar{x}}D_{\bar{z}}c, \end{cases}$$

ou seja, $\hat{d} = (d_{\hat{x}}, d_{\hat{y}}, d_{\hat{z}})$ nunca é calculada.

Substituindo as direções, temos:

$$\begin{cases} Ad_x = r_p \\ A^td_y + d_z = r_d \\ Zd_x + Xd_z = r_a + \mu c - D_{\bar{x}}D_{\bar{z}}c + r_s. \end{cases} \quad (1.5)$$

O cálculo da perturbação μ^k é função da direção afin. Quanto melhor a direção menor será a perturbação e vice-versa. Sejam:

$$\begin{aligned} \mu^k &= \beta^k \frac{\gamma^k}{n}, \\ \tilde{\gamma}^k &= (x^k + \tilde{\alpha}_p^k d_{\bar{x}}^k)^t (z^k + \tilde{\alpha}_d^k d_{\bar{z}}^k), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_p^k$ e $\tilde{\alpha}_d^k$ são os tamanhos dos passos em relação aos problemas primal e dual respectivamente. São calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_p^k &= \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{\tilde{x}_i^k}{d\tilde{x}_i^k} \right\}, \\ \tilde{\rho}_d^k &= \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{\tilde{z}_i^k}{d\tilde{z}_i^k} \right\}, \end{aligned}$$

sendo:

$$\tilde{\alpha}_p^k = \min(1, \tau \tilde{\rho}_p^k) \text{ e } \tilde{\alpha}_d^k = \min(1, \tau \tilde{\rho}_d^k), \text{ com } \tau \in (0, 1).$$

onde:

$$\beta^k = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\gamma}^k}{\gamma^k} \right)^3, & \text{se } \gamma^k > 1 \\ \frac{\gamma^k}{\sqrt{n}}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A escolha da direção de centragem quando $\gamma^k \leq 1$ é baseada em razões técnicas e são mostradas em [22]. Podemos resumir o método preditor-corretor da seguinte forma:

Dados $\tau \in (0, 1)$, (x^0, y^0, z^0) tal que $(x^0, z^0) > 0$,

Para $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
r_p^k &= b - Ax^k \\
r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\
r_s^k &= -X^k Z^k e \\
\text{calcule } \tilde{d}^k \text{ e } \tilde{\alpha}_p^k, \tilde{\alpha}_d^k \\
\tilde{\gamma}^k &= (x^k + \tilde{\alpha}_p^k d_x^k)^t (z^k + \tilde{\alpha}_d^k d_z^k) \\
\mu^k &= \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^2 \frac{\tilde{\gamma}}{\alpha} \\
r_s^k &= \mu^k e + r_s^k - D_{\tilde{x}^k} D_{\tilde{z}^k} e \\
\text{calcule } d^k \text{ e } \alpha_p^k, \alpha_d^k \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k d_x^k \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k d_y^k \\
z^{k+1} &= z^k + \alpha_d^k d_z^k
\end{aligned}$$

até convergir.

O critério de convergência é o mesmo do método primal-dual afim escala. O método resolve dois sistemas utilizando a mesma matriz.

1.7 Cálculo das Direções nos Métodos de Pontos Interiores

O sistema linear (1.5) tem dimensão $2n + m$. Este sistema pode ser reduzido à dimensão m através das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
d_y &= (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}r_d - AZ^{-1}r_s), \\
d_x &= D^{-1}(A^t d_y - r_d + X^{-1}r_s), \\
d_z &= X^{-1}(r_s - Z d_x).
\end{aligned}$$

Essas simplificações também são válidas para os métodos primal-dual afim escala e clássico. A única alteração será do resíduo r_s . O esforço maior, portanto, está no cálculo de d_y , onde uma matriz simétrica definida positiva deve ser decomposta a cada iteração. Usualmente é utilizada a decomposição de Cholesky [6] na resolução deste sistema linear.

Capítulo 2

Fluxo de Carga

2.1 Aspectos Gerais

O cálculo de fluxo de carga (ou fluxo de potência) em uma rede de energia elétrica consiste na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de interesse. Nesse tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, significando que a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas. Em geral, para esse cálculo, utiliza-se métodos computacionais específicos desenvolvidos para a resolução do sistema.

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos: os que estão ligados entre um nó qualquer e o nó-terra, como é o caso dos geradores, cargas, reatores e capacitores; e os que estão ligados entre dois nós quaisquer da rede, como é o caso de linhas de transmissão, transformadores e defasadores. Os geradores e cargas são considerados como a parte externa do sistema, e são modelados através de injeções de potências nos nós da rede. A parte interna do sistema é constituída pelos demais componentes [16].

As equações do fluxo de carga são obtidas impondo-se a conservação das potências ativa e reativa em cada barra (nó) da rede, isto é, a potência líquida injetada deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes internos que têm esta barra como uma de seus terminais. Isso equivale a impor a Primeira Lei de Kirchhoff. A Segunda Lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência

nos componentes internos como funções das tensões (estados) de suas barras terminais.

2.2 Formulação do Problema

Na formulação mais simples, a cada barra da rede são associadas quatro variáveis, sendo que a tensão será representada neste trabalho em coordenadas cartesianas:

r_k representa a parte real da tensão;

s_k representa a parte imaginária da tensão;

P_k representa a geração líquida (geração menos carga) de potência ativa;

Q_k representa a injeção líquida de potência reativa.

O conjunto de equações do problema do fluxo de carga é formado por duas equações para cada barra, cada uma delas representando o fato de as potências ativas e reativas injetadas em uma barra serem iguais à soma dos fluxos correspondentes que deixam a barra através de linhas de transmissão, transformadores, etc, (Primeira Lei de Kirchhoff) e pode ser expresso matematicamente como segue:

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(r_k, s_k, r_m, s_m), \\ Q_k + Q_k^{\text{sh}}(v_k) &= \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(r_k, s_k, r_m, s_m), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde:

$k = 1, \dots, NB$, sendo NB o número de barras da rede;

Ω_k representa o conjunto das barras vizinhas da barra k ;

v_k representa o módulo da tensão da barra k ;

P_{km} representa o fluxo de potência ativa no ramo $k - m$;

Q_{km} representa o fluxo de potência reativa no ramo $k - m$;

Q_{km}^{sh} representa o componente da injeção de potência reativa devida ao elemento *shunt* da barra k ($Q_k^{\text{sh}} = b_k^{\text{sh}} v_k^2$, sendo b_k^{sh} a susceptância *shunt* ligada à barra k).

As expressões (2.1) consideram a seguinte convenção de sinais: as injeções líquidas de potência são positivas quando entram na barra (geração) e negativas quando saem da barra (carga); os fluxos de potência são positivos quando saem da barra e negativos quando entram; para os elementos *shunt* das barras é adotada a mesma convenção que para as injeções.

O conjunto de inequações, que fazem parte do problema do fluxo de carga, é formado, entre outras, pelas restrições nas magnitudes das tensões nas barras de carga e pelos limites nas injeções de potência reativa nas barras de controle de reativos:

$$\begin{aligned} v_k^{\min} &\leq v_k \leq v_k^{\max}, \\ Q_k^{\min} &\leq Q_k \leq Q_k^{\max}. \end{aligned}$$

2.3 Modelagem

Não estamos considerando os transformadores defasadores, pois algumas matrizes do sistema, como a matriz admitância, podem se tornar assimétricas, o que nos impossibilita algumas considerações e propriedades importantes para a resolução do sistema (veja Capítulo 5). A consideração de transformadores defasadores no modelo é trivial.

2.3.1 Linhas de Transmissão

O modelo equivalente π de uma linha de transmissão é definido por três parâmetros [16]: a resistência série r_{km} ; a reatância série x_{km} ; e a susceptância *shunt* b_{km}^{sh} . A impedância do elemento série é dada por:

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km}, \quad (2.2)$$

onde j é nesta representação a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$), enquanto a admitância série:

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = z_{km}^{-1} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j \frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}, \quad (2.3)$$

ou seja, a condutância série g_{km} e a susceptância série b_{km} são dadas por:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad \text{e} \quad b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}. \quad (2.4)$$

Quando o modelo π representa uma linha de transmissão têm-se r_{km} e x_{km} positivos, o que implica g_{km} positivo e b_{km} negativo (tipo indutivo). Já o elemento b_{km}^{sh} é positivo, pois o *shunt* é do tipo capacitivo.

A corrente I_{km} é formada de uma componente série e uma componente *shunt*, e pode ser calculada a partir das tensões fasoriais terminais E_k e E_m , e dos parâmetros do modelo equivalente π :

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{\text{sh}}E_k, \quad (2.5)$$

onde:

$$E_k = r_k + js_k \quad \text{e} \quad E_m = r_m + js_m. \quad (2.6)$$

Analogamente, a corrente I_{mk} é dada por:

$$I_{mk} = y_{mk}(E_m - E_k) + jb_{km}^{\text{sh}}E_m. \quad (2.7)$$

2.3.2 Fluxos de Potência Ativa e Reativa

As expressões dos fluxos de potência ativa P_{km} e potência reativa Q_{km} podem ser obtidas a partir dos modelos apresentados na seção 2.3.1, conforme será mostrado a seguir.

Sabemos que a corrente I_{km} em uma linha de transmissão é dada por (2.5). Substituindo por (2.3) e (2.6) temos:

$$\begin{aligned} I_{km} &= y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{\text{sh}}E_k \\ &= (r_k + js_k - r_m - js_m)(g_{km} + jb_{km}) + jb_{km}^{\text{sh}}(r_k + js_k) \\ &= r_k g_{km} + jr_k b_{km} + js_k g_{km} - s_k b_{km} - r_m g_{km} - jr_m b_{km} - js_m g_{km} + s_m b_{km} \\ &\quad + jr_k b_{km}^{\text{sh}} - s_k b_{km}^{\text{sh}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O fluxo de potência complexa correspondente é:

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km} \\ &= (r_k - js_k) [(r_k + js_k - r_m - js_m)(g_{km} + jb_{km}) + jb_{km}^{\text{sh}}(r_k + js_k)] \\ &= r_k^2 g_{km} - r_k r_m g_{km} + r_k s_m b_{km} + s_k^2 g_{km} - s_k s_m g_{km} - r_m s_k b_{km} \\ &\quad - j(-r_k^2 b_{km} + r_k r_m b_{km} + r_k s_m g_{km} - s_k^2 b_{km} + s_k s_m b_{km} - r_m s_k g_{km} \\ &\quad - r_k^2 b_{km}^{\text{sh}} - s_k^2 b_{km}^{\text{sh}}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os fluxos P_{km} e Q_{km} são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação complexa, resultando:

$$P_{km} = r_k^2 g_{km} + r_k r_m g_{km} + r_k s_m b_{km} + s_k^2 g_{km} + s_k s_m g_{km} + r_m s_k b_{km}, \quad (2.10)$$

$$Q_{km} = -r_k^2 b_{km} + r_k r_m b_{km} + r_k s_m g_{km} - s_k^2 b_{km} + s_k s_m b_{km} - r_m s_k g_{km} - (r_k^2 b_{km}^{\text{sh}} + s_k^2 b_{km}^{\text{sh}}). \quad (2.11)$$

Os fluxos P_{mk} e Q_{mk} são obtidos de forma análoga:

$$P_{mk} = r_m^2 g_{km} + r_m r_k g_{km} + r_m s_k b_{km} + s_m^2 g_{km} + s_m s_k g_{km} + r_k s_m b_{km}, \quad (2.12)$$

$$Q_{mk} = -r_m^2 b_{km} + r_m r_k b_{km} + r_m s_k g_{km} - s_m^2 b_{km} + s_m s_k b_{km} - r_k s_m g_{km} - (r_m^2 b_{km}^{\text{sh}} + s_m^2 b_{km}^{\text{sh}}). \quad (2.13)$$

As perdas de potência ativa e reativa na linha são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} P_{km} + P_{mk} &= g_{km} (r_k^2 + s_k^2 + r_m^2 + s_m^2 - 2r_k r_m - 2s_k s_m), \\ Q_{km} + Q_{mk} &= b_{km} (-r_k^2 - s_k^2 - r_m^2 - s_m^2 + 2r_k r_m + 2s_k s_m) \\ &\quad + b_{km}^{\text{sh}} (-r_k^2 - s_k^2 - r_m^2 - s_m^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4 Formulação Matricial

A injeção líquida de corrente na barra k pode ser obtida aplicando-se a Primeira Lei de Kirchhoff para esse modelo:

$$I_k + I_k^{\text{sh}} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad (k = 1, \dots, NB). \quad (2.15)$$

A corrente I_{km} em uma linha de transmissão é dada pela seguinte expressão:

$$I_{km} = (y_{km} + j b_{km}^{\text{sh}}) E_k + (-y_{km}) E_m. \quad (2.16)$$

A corrente I_{km} pode ser posta, numa forma geral [16]:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + j b_{km}^{\text{sh}}) E_k + (-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m, \quad (2.17)$$

sendo que, para linhas de transmissão, $a_{km} = 1$ e $\varphi_{km} = 0$; para transformadores em-fase, $b_{km}^{\text{sh}} = 0$ e $\varphi_{km} = 0$; e defasadores puros, $b_{km}^{\text{sh}} = 0$ e $a_{km} = 1$, e os defasadores com $a_{km} \neq 1$

são representados com um defasador puro ($a_{km} = 1$) em série com um transformador em-fase ($\varphi_{km} = 0$).

Considerando I_{km} dado em (2.17) a expressão de I_k (2.15) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$I_k = \left[j b_k^{\text{sh}} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{\text{sh}} + a_{km}^2 y_{km}) \right] E_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m. \quad (2.18)$$

Esta expressão, para $k = 1, \dots, NB$, pode ser representada na forma matricial:

$$\underline{I} = Y \underline{E}, \quad (2.19)$$

onde:

$\underline{I}$ representa o vetor das injeções de corrente, cujas componentes são I_k ($k = 1, \dots, NB$);

$\underline{E}$ representa o vetor das tensões nodais, cujas componentes são E_k ;

$Y = G + jB$ representa a matriz admitância nodal.

Os elementos da matriz Y , considerando os valores para linhas de transmissão, são:

$$\begin{aligned} Y_{km} &= -y_{km}, \\ Y_{kk} &= j b_k^{\text{sh}} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{\text{sh}} + a_{km}^2 y_{km}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Em geral, essa matriz é esparsa, pois $Y_{km} = 0$ sempre que entre as barras k e m não existirem linhas. Como não estamos considerando a presença de transformadores defasadores, a matriz Y é simétrica, assim como G e B . Aproveitamos essa propriedade na modelagem (ver Seção 2.3) e na resolução do sistema (ver Seção 5.1).

A injeção de corrente I_k , que é a k -ésima componente do vetor $\underline{I}$, pode ser colocada na forma:

$$I_k = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m = \sum_{m \in K} Y_{km} E_m, \quad (2.21)$$

em que K é o conjunto de todas as barras m adjacentes à barra k , inclusive a própria, ou seja, o conjunto K é formado pelos elementos do conjunto Ω_k mais a própria barra k .

Considerando-se que $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ e $E_m = r_m + js_m$, a expressão (2.21) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$I_k = \sum_{m \in K} (G_{km} + jB_{km}) (r_m + js_m). \quad (2.22)$$

A injeção de potência complexa S_k é:

$$S_k^* = P_k - jQ_k = E_k^* I_k. \quad (2.23)$$

Substituindo-se (2.22) em (2.23) e considerando-se que $E_k^* = r_k - js_k$, obtém-se:

$$S_k^* = (r_k - js_k) \sum_{m \in K} (G_{km} + jB_{km}) (r_m + js_m). \quad (2.24)$$

As injeções de potência ativa e reativa podem ser obtidas identificando-se as partes real e imaginária da expressão (2.24):

$$P_k = \sum_{k \in K} (r_k G_{km} r_m - r_k B_{km} s_m + s_k G_{km} s_m + s_k B_{km} r_m), \quad (2.25)$$

$$Q_k = \sum_{k \in K} (-s_k B_{km} s_m - r_k G_{km} s_m - r_k B_{km} r_m + s_k G_{km} r_m), \quad (2.26)$$

generalizando para a forma matricial:

$$p = RGr + SGs + SBr - RBs, \quad (2.27)$$

$$q = SGr - RGs - RBr - SBs, \quad (2.28)$$

onde:

p representa o vetor de geração de potência ativa, cujas componentes são P_k ;

q representa o vetor de geração de potência reativa, cujas componentes são Q_k ;

r representa o vetor da parte real das tensões, cujas componentes são r_k ;

s representa o vetor da parte imaginária das tensões, cujas componentes são s_k ;

R representa a matriz diagonal de r ;

S representa a matriz diagonal de s ;

G representa a matriz de condutância;

B representa a matriz de susceptância.

Esta notação matricial será utilizada na formulação do problema de fluxo de carga ótimo AC (ver Seção 3.2).

A notação das variáveis nesses primeiros capítulos é a mesma utilizada nos livros e artigos citados anteriormente, pois são fundamentadas para que se tenha uma leitura didática e compreensiva. A partir do próximo capítulo, apresentaremos uma notação diferente para algumas variáveis. Esta mudança se deve à alguns conflitos de nomes de variáveis devido a tradução do texto para a implementação computacional. Para que não haja quaisquer dúvidas na leitura dos capítulos seguintes, detalharemos as representações utilizadas nas próximas equações quando necessário.

Capítulo 3

Problema de Fluxo de Carga Ótimo AC

O problema de fluxo de carga ótimo AC é um dos mais importantes na área de sistemas de potência, servindo como base para diversas outras aplicações. Uma dificuldade que este problema apresenta é instabilidade numérica proveniente dos métodos de solução tradicionais. Os métodos de pontos interiores trouxeram à tona uma nova linha de pesquisa na área de sistemas de potência [8, 14, 18, 17, 19, 20, 23, 25, 27].

Esses métodos são reconhecidos atualmente por sua robustez [14, 20]. Além disso, o tratamento eficiente de desigualdades permite uma revisão dos procedimentos geralmente adotados. Assim, a utilização de coordenadas cartesianas surge como uma abordagem natural pois apresenta uma formulação muito mais simples que as coordenadas polares.

3.1 Motivação

A tensão (complexa) da barra ($\underline{E}$) é definida em coordenadas cartesianas como:

$$\underline{E} = r + js,$$

onde r e s são os componentes real e imaginário de ($\underline{E}$) respectivamente.

Optou-se pela utilização de coordenadas cartesianas para as tensões pois desta forma, tanto as restrições do problema como as funções objetivos porventura adotadas são

quadráticas. Conseqüentemente, as matrizes do problema são mais fáceis de trabalhar e o cálculo do termo de correção do método preditor-corretor pode ser feito de forma menos custosa do ponto de vista computacional. Outra vantagem é que a Hessiana do problema é constante e a expansão em Taylor é exata para o termo de ordem dois.

Tensões na forma cartesiana são usadas por exemplo, para explorar a idéia de um multiplicador ótimo que melhora a convergência do fluxo de carga para estudos de estimativa do estado do sistema de potência [23].

Finalmente, a vantagem em se trabalhar com coordenadas polares, que modelam mais facilmente os limites de magnitude de tensão, perde importância devido ao tratamento de desigualdades eficiente proporcionado pelos métodos de pontos interiores [14, 20].

3.2 Formulação do Problema

O problema de fluxo de carga ótimo com coordenadas cartesianas pode então ser escrito da seguinte forma, onde as equações são dadas pela formulação do fluxo de carga apresentado anteriormente e pela representação do fluxo entre as linhas de transmissão e as inequações representam a canalização de variáveis.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}p^T H p + c^T p \\
 &\text{sujeito a} \quad RGr + SGs + SBr - RBs = p - l_p \\
 &\quad \quad \quad SGr - RGs - RBr - SBs = q - l_q \\
 &\quad \quad \quad v^{\min} \leq r^2 + s^2 \leq v^{\max} \\
 &\quad \quad \quad f_{km} = g_{km}(r_k^2 + s_k^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k) \\
 &\quad \quad \quad p^{\min} \leq p \leq p^{\max} \\
 &\quad \quad \quad q^{\min} \leq q \leq q^{\max} \\
 &\quad \quad \quad f^{\min} \leq f \leq f^{\max},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde:

G representa a matriz de condutância;

B representa a matriz de susceptância;

p representa a geração de potência ativa;

q representa a geração de potência reativa;
 f_{km} representa o fluxo de potência ativa da linha k para a linha m ;
 H matriz diagonal representando o termo quadrático do custo de geração;
 c representa a componente linear do custo de geração;
 l_p representa as demandas de potência ativa;
 l_q representa as demandas de potência reativa;
 $v^{\min}$ e $v^{\max}$ são os limites de tensão ao quadrado;
 $p^{\min}$ e $p^{\max}$ são os limites de geração de potência ativa;
 $q^{\min}$ e $q^{\max}$ são os limites de geração de potência reativa;
 $f^{\min}$ e $f^{\max}$ são os limites de fluxo de potência ativa.

A minimização das perdas na geração é utilizada como critério de otimização. Estas perdas podem ser modeladas como uma função quadrática separável tanto para geradores térmicos representando os custos, como hidrelétricos representando as perdas [21]. Vale ressaltar que outras funções objetivo podem ser adotadas sem muitas alterações no desenvolvimento apresentado a seguir.

3.2.1 Problema Relaxado

Podemos considerar o problema de fluxo de carga ótimo sem explicitar as restrições de limite de fluxo de potência ativa entre as linhas de transmissão. Essa restrição podem ser controladas implicitamente pelo limite de geração de potência ativa. A formulação a seguir representa o problema de fluxo de carga ótimo relaxando as restrições e limites relacionados com fluxo de potência ativa entre as linhas de transmissão.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \frac{1}{2}p^tHp + c^tp \\
 &\text{sujeito a} && RGr + SGs + SBr - RBs = p - l_p \\
 &&& SGr - RGs - RBr - SBs = q - l_q \\
 &&& v^{\min} \leq r^2 + s^2 \leq v^{\max} \\
 &&& p^{\min} \leq p \leq p^{\max} \\
 &&& q^{\min} \leq q \leq q^{\max},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Com o objetivo de simplificar a implementação computacional, essa formulação

será utilizada para o desenvolvimento de um método específico para esse problema, que será mostrado em paralelo com a dedução do método para o problema (3.1). Todas as etapas e operações realizadas no método serão executadas e mostradas para ambas formulações.

3.3 Simplificação da Matriz Hessiana

No mesmo espírito de obter Hessianas mais fáceis de trabalhar utilizando as coordenadas cartesianas, optou-se por acrescentar a restrição:

$$r^2 + s^2 = v,$$

onde v representa o quadrado da magnitude da tensão. Assim, as equações:

$$v^{\min} \leq r^2 + s^2 \leq v^{\max} \quad \text{e}$$

$$f_{km} = g_{km}(r_k^2 + s_k^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k),$$

são substituídas por:

$$v^{\min} \leq v \leq v^{\max} \quad \text{e}$$

$$f_{km} = g_{km}(v^2 - r_k r_m - s_k s_m) + b_{km}(r_k s_m - r_m s_k),$$

transformando um conjunto de restrições em canalização de variáveis e simultaneamente, simplificando outro conjunto de restrições.

Apesar deste modelo conter um conjunto adicional de variáveis e restrições, as derivadas são mais simples e a Hessiana obtida no desenvolvimento dos métodos de pontos interiores mais esparsa. Não se pode, entretanto, afirmar de antemão se este modelo leva a um método mais eficiente que o modelo inicial, uma vez que as iterações dos métodos desenvolvidos para ambos modelos geram direções diferentes [12]. É necessário realizar experimentos computacionais comparando as duas opções para determinar qual seria o melhor modelo.

Capítulo 4

Desenvolvimento do Método

4.1 Metodologia

As técnicas utilizadas para este problema são específicas de programação não-linear, diferentemente das técnicas utilizadas em programação linear (Capítulo 1). A aplicação do método de Newton às condições de otimalidade leva a um método de pontos interiores primal-dual específico para este modelo. As condições de otimalidade por sua vez podem ser obtidas através da função lagrangiana do problema onde as restrições de desigualdade são representadas por funções de barreira logarítmicas das variáveis de folga.

Para simplificar o desenvolvimento do método, vamos considerar um problema onde cada barra pode gerar potência ativa e reativa e está diretamente conectada a todas as outras barras. Desta forma, a representação do fluxo entre as linhas pode ser escrita da seguinte forma:

$$f = VG - RGR - SGS + RBS - SBR.$$

Uma vez desenvolvido o método, basta considerar os elementos de f que representam linhas de transmissão existentes no sistema em estudo preservando assim a esparsidade do problema.

Na prática é muito comum resolver problemas desconsiderando os fluxos nas linhas de transmissão, pois as restrições têm utilidade somente para verificar as capacidades das linhas. Esta representação do modelo pode ser facilmente alterada caso não existam muitas linhas carregadas. A implementação computacional feita neste trabalho

é baseada na representação do modelo para o problema relaxado, isto é, sem as restrições de fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão. O desenvolvimento do método é similar para ambos os problemas.

Com o objetivo de reduzir o número de variáveis do problema, antes de construir a função lagrangiana, vamos fazer uma mudança de variáveis de tal forma que todos os limites inferiores das variáveis canalizadas sejam anulados. O modelo adotado pode ser então escrito da seguinte forma, onde as variáveis de folga para os limites superiores também são acrescentadas:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \phi(p) \\
 &\text{sujeito a} && RGr + SGs + SBr - RBs - p = -l_p \\
 & && SGr - RGs - RBr - SBs - q = -l_q \\
 & && VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f = l_f \\
 & && r^2 + s^2 - v = l_v \\
 & && p + s_p = p^{\max} \\
 & && q + s_q = q^{\max} \\
 & && f + s_f = f^{\max} \\
 & && v + s_v = v^{\max} \\
 & && (p, q, f, v, s_p, s_q, s_f, s_v) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\phi(p) = \frac{1}{2}p^tHp + c^tp$ e, por abuso de notação, utilizamos os mesmos símbolos para representar os vetores antes e depois das mudanças de variáveis.

4.2 Função Barreira Logarítmica

Estamos trabalhando com um problema não-linear, por isso não tomamos o problema dual de (4.1) como em programação linear, mas utilizamos técnicas específicas para esse tipo de problema.

No problema (4.1), as restrições de desigualdade são as condições de não-negatividade. Para tratar dessas restrições nos métodos de pontos interiores, utiliza-se

funções de barreira logarítmica [9, 26] que são incorporadas à função objetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & \phi(p) - \mu^k \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\
 \text{sujeito a} \quad & RGr + SGs + SBr - RBs - p = -l_p \\
 & SGr - RGs - RBr - SBs - q = -l_q \\
 & VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f = l_f \\
 & r^2 + s^2 - v = l_v \\
 & p + s_p = p^{\max} \\
 & q + s_q = q^{\max} \\
 & f + s_f = f^{\max} \\
 & v + s_v = v^{\max},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $x = (p, q, f, v, s_p, s_q, s_f, s_v)$, n é a dimensão do vetor x e $\mu^k > 0$ é o parâmetro de barreira que é monotonicamente decrescente e converge para zero durante o progresso das iterações. A sequência de parâmetros $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ gera uma sequência de sub-problemas dados por (4.2) e, sob suposições de regularidade [4], como $\mu^k \downarrow 0$ a sequência $\{x(\mu^k)\}_{k=0}^{\infty}$ de soluções de (4.2) aproxima-se de x^* , um mínimo local de (4.1) [23].

4.3 A Função Lagrangiana

A função lagrangiana L das restrições de igualdade do problema (4.2) é dada por [9]:

$$L(r, s, x, l) = \phi(p) - \mu^k \sum \ln(x_i) + l^t L_d(x), \tag{4.3}$$

onde $l^t = (y_p, y_q, y_f, y_v, w_p, w_q, w_f, w_v)$ representa os multiplicadores de Lagrange (ou variáveis duais) e,

$$L_d(x) = \begin{pmatrix} RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p \\ SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q \\ VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f \\ r^2 + s^2 - v - l_v \\ p + s_p - p^{\max} \\ q + s_q - q^{\max} \\ f + s_f - f^{\max} \\ v + s_v - v^{\max} \end{pmatrix}.$$

Um mínimo local de (4.2) é expresso em termos de um ponto estacionário de L , tendo que satisfazer as condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), $\nabla_{(r,s,x,l)} L = 0$, ou seja, $\nabla_l L = L_d(x) = 0$ e:

$$\begin{aligned} \nabla_p L &= Hp + c - \mu P^{-1}c - y_p + w_p, \\ \nabla_q L &= -\mu Q^{-1}c - y_q + w_q, \\ \nabla_f L &= -\mu F^{-1}c - y_f + w_f, \\ \nabla_v L &= Gy_f - \mu V^{-1}c - y_v + w_v, \\ \nabla_r L &= \nabla_r L_p^t y_p + \nabla_r L_q^t y_q + \nabla_r L_f^t y_f + 2Ry_v, \\ \nabla_s L &= \nabla_s L_p^t y_p + \nabla_s L_q^t y_q + \nabla_s L_f^t y_f + 2Sy_v, \\ \nabla_{s_p} L &= -\mu S_p^{-1}c + w_p, \\ \nabla_{s_q} L &= -\mu S_q^{-1}c + w_q, \\ \nabla_{s_f} L &= -\mu S_f^{-1}c + w_f, \\ \nabla_{s_v} L &= -\mu S_v^{-1}c + w_v, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} L_p &= RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p, \\ L_q &= SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q, \\ L_f &= VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f, \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned}\nabla_r L_p^t &= GR + \text{diag}(Gr) + BS - \text{diag}(Bs), \\ \nabla_r L_q^t &= GS - \text{diag}(Gs) - BR - \text{diag}(Br), \\ \nabla_s L_p^t &= GS + \text{diag}(Gs) - BR + \text{diag}(Br), \\ \nabla_s L_q^t &= -GR + \text{diag}(Gr) - BS - \text{diag}(Bs).\end{aligned}$$

E para $\nabla_r L_f^t$ e $\nabla_s L_f^t$ considere o termo $\tilde{L} = RCS$ onde C é uma matriz constante. Então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial r_i} &= \begin{bmatrix} \text{diag}(Ce_{i-1}S_{i-1}) \\ \text{diag}(Ce_iS_i) \\ \text{diag}(Ce_{i+1}S_{i+1}) \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial s_i} &= \begin{bmatrix} (CE_{i-1})^t R \\ (CE_i)^t R \\ (CE_{i+1})^t R \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde $E_i = \text{diag}(e_i)$, $i = 1, \dots, NB$.

Com isso podemos construir as expressões de $\nabla_r L_f^t$ e $\nabla_s L_f^t$, pois L_f é composto de combinações de termos similares a $\tilde{L}$, se ignorarmos aqueles independentes de r e s . Além dessas relações, devemos ter $x \geq 0$ o que implica $(w_p, w_q, w_f, w_v) \geq 0$.

Para obter um método estritamente primal-dual resta ainda definir as variáveis de folga duais:

$$\begin{aligned}z_p &= \mu P^{-1}e, \\ z_q &= \mu Q^{-1}e, \\ z_f &= \mu F^{-1}e, \\ z_v &= \mu V^{-1}e.\end{aligned}$$

Estas variáveis também são não-negativas por definição.

Finalmente, reescalando os conjuntos de equações referentes às condições de complementaridade obtemos o seguinte sistema não-linear que corresponde às condições

de otimalidade de primeira ordem do problema (4.1):

$$\begin{pmatrix}
 RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p \\
 SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q \\
 VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f \\
 r^2 + s^2 - v - l_v \\
 p + s_p - p^{\max} \\
 q + s_q - q^{\max} \\
 f + s_f - f^{\max} \\
 v + s_v - v^{\max} \\
 -\mu c + Pz_p \\
 -\mu c + Qz_q \\
 -\mu c + Fz_f \\
 -\mu c + Vz_v \\
 Hp + c - z_p - y_p + w_p \\
 -z_q - y_q + w_q \\
 -z_f - y_f + w_f \\
 Gy_f - z_v - y_v + w_v \\
 \nabla_r L_p^l y_p + \nabla_r L_q^l y_q + \nabla_r L_f^l y_f + 2Ry_v \\
 \nabla_s L_p^l y_p + \nabla_s L_q^l y_q + \nabla_s L_f^l y_f + 2Sy_v \\
 -\mu c + S_p w_p \\
 -\mu c + S_q w_q \\
 -\mu c + S_f w_f \\
 -\mu c + S_v w_v
 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

com $(x, t) \geq 0$ onde $t = (z_p, z_q, z_f, z_v, w_p, w_q, w_f, w_v)$.

4.4 Eliminação de Variáveis Livres y

É possível aplicar o método de pontos interiores primal-dual diretamente ao sistema linear (4.5), no entanto, parece ser mais aconselhável eliminar as variáveis y do sistema antes da aplicação do método, seguindo as técnicas de preprocessamento utilizadas na programação linear [7]. As variáveis y podem ser eliminadas trivialmente através das equações:

$$\begin{aligned} y_p &= Hp + c - z_p + w_p, \\ y_q &= w_q - z_q, \\ y_f &= w_f - z_f, \\ y_v &= Gy_f - z_v + w_v = Gy_f + \bar{y}_v. \end{aligned}$$

Estas eliminações podem ser feitas porque as variáveis duais y são irrestritas. Além disso, uma vez que estas eliminações são triviais, a estrutura esparsa do sistema linear não se altera.

É importante notar que um método de pontos interiores aplicado ao sistema (4.5) sem a eliminação de y é diferente de um método aplicado ao mesmo sistema não-linear eliminando as variáveis y . É necessária uma comparação numérica entre os dois métodos para determinar se existe uma diferença significativa entre ambos no que diz respeito ao número de iterações para obtenção da convergência uma vez que o esforço computacional por iteração é praticamente o mesmo.

Com a eliminação de y (4.5) se resume ao seguinte sistema não-linear:

$$\left(\begin{array}{c} RGr + SGs + SBr - RBs - p + l_p \\ SGr - RGs - RBr - SBs - q + l_q \\ VG - RGR - SGS + RBS - SBR - f - l_f \\ r^2 + s^2 - v - l_v \\ p + s_p - p^{\max} \\ q + s_q - q^{\max} \\ f + s_f - f^{\max} \\ v + s_v - v^{\max} \\ -\mu c + Pz_p \\ -\mu c + Qz_q \\ -\mu c + Fz_f \\ -\mu c + Vz_v \\ \nabla_r L_p^t(Hp + c - z_p + w_p) + \nabla_r L_q^t(w_q - z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^t(w_f - z_f) + 2R(w_v - z_v) \\ \nabla_s L_p^t(Hp + c - z_p + w_p) + \nabla_s L_q^t(w_q - z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^t(w_f - z_f) + 2S(w_v - z_v) \\ -\mu c + S_p w_p \\ -\mu c + S_q w_q \\ -\mu c + S_f w_f \\ -\mu c + S_v w_v \end{array} \right) = 0 \quad (4.6)$$

com $(x, t) \geq 0$, onde:

$$\tilde{\nabla}_r L_f^t = \nabla_r L_f^t + 2RG, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\nabla}_s L_f^t = \nabla_s L_f^t + 2SG. \quad (4.8)$$

4.5 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Dada uma classe de problemas, a forma padrão para desenvolver um método de pontos interiores consiste na aplicação do método de Newton [2] às condições de otimalidade, desconsiderando as restrições de capacidade.

A convergência do método a uma solução é obtida partindo-se de um ponto

estritamente positivo e nunca permitindo que estas variáveis se tornem negativas. Este controle é realizado através do tamanho do passo. O método resultante é essencialmente um método primal-dual específico para esta classe de problemas [3].

O método de pontos interiores primal-dual para o problema (4.1) consiste portanto, na aplicação do método de Newton a (4.6) desconsiderando as restrições de não-negatividade $(x, t) \geq 0$. Esta aplicação resulta no seguinte método:

Método 4.1 (Método de Pontos Interiores)

Dados $(x^0, t^0) > 0$ e (r^0, s^0) livres.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, faça:

(1) Escolha $\beta^k \in (0, 1)$ e faça $\mu^k = \beta^k \left(\frac{\gamma^k}{n} \right)$ onde, $\gamma^k = (x^k)^t t^k$ e n é a dimensão do vetor x .

(2) Calcule as direções de Newton Δx^k e Δt^k .

(3) Calcule o tamanho do passo para permanecer em um ponto interior

$$\alpha_p^k = \frac{-\tau^k}{\min_i \left\{ \frac{\Delta x_i^k}{x_i^k} \right\}} \quad e \quad \alpha_d^k = \frac{-\tau^k}{\min_i \left\{ \frac{\Delta t_i^k}{t_i^k} \right\}} \quad \text{para } \tau^k \in (0, 1) \quad e$$

$$\alpha^k = \min \{1, \alpha_p^k, \alpha_d^k\}.$$

(4) Calcule o novo ponto

$$(x^{k+1}, t^{k+1}) = (x^k, t^k) + \alpha^k (\Delta x^k, \Delta t^k).$$

Os parâmetros β e τ e o ponto inicial serão discutidos mais adiante. Deve-se adotar um tamanho de passo igual para as variáveis primais e duais devido à natureza quadrática do problema que como consequência contém restrições onde aparecem variáveis primais e duais simultaneamente. A escolha do valor para μ^k foi a princípio tomada baseando-se em programação linear, onde foram obtidos excelentes resultados computacionais (ver Introdução), mas é interessante escolher μ^k de forma dinâmica e apropriada para cada tipo de problema. Temos como proposta para um futuro trabalho, o estudo desses parâmetros para este problema não-linear específico, objetivando a eficiência computacional dos métodos implementados (ver Capítulo 8).

4.5.1 Direções de Newton

As direções de Newton são definidas pelo seguinte sistema linear¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\ -\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\ -\Delta f + G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\ -\Delta v + 2R \Delta r + 2S \Delta s = r_4 \\ \Delta p + \Delta s_p = r_5 \\ \Delta q + \Delta s_q = r_6 \\ \Delta f + \Delta s_f = r_7 \\ \Delta v + \Delta s_v = r_8 \\ Z_p \Delta p + P \Delta z_p = r_9 \\ Z_q \Delta q + Q \Delta z_q = r_{10} \\ Z_f \Delta f + F \Delta z_f = r_{11} \\ Z_v \Delta v + V \Delta z_v = r_{12} \\ \nabla_r L_p^l (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_r L_q^l (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^l (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2R(\Delta w_v - \Delta z_v) + M \Delta r + N \Delta s = r_{13} \\ \nabla_s L_p^l (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_s L_q^l (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^l (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2S(\Delta w_v - \Delta z_v) - N \Delta r + M \Delta s = r_{14} \\ W_p \Delta s_p + S_p \Delta w_p = r_{15} \\ W_q \Delta s_q + S_q \Delta w_q = r_{16} \\ W_f \Delta s_f + S_f \Delta w_f = r_{17} \\ W_v \Delta s_v + S_v \Delta w_v = r_{18} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} M &= GY_p + Y_p G - (BY_q + Y_q B) + GY_f + 2\tilde{Y}_v, \\ N &= BY_p - Y_p B + GY_q - Y_q G + BY_f, \end{aligned}$$

e os resíduos de r_1 a r_{18} são dados pela aplicação do ponto corrente (x, t) ao lado esquerdo do sistema de equações (4.6) com o sinal trocado.

¹O índice k representando o número da iteração será desconsiderado de agora em diante para evitar uma notação muito carregada.

4.6 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor resolve dois sistemas lineares para encontrar as direções [13]. Primeiramente é calculada a *direção afim* $(\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{t})$ resolvendo o sistema linear (4.9) com $\mu = 0$. Em seguida, μ é calculado e o seguinte sistema linear é resolvido, obtendo-se a direção desejada $(\Delta x, \Delta t)$ [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\ -\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\ -\Delta f + G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\ -\Delta v + 2R \Delta r + 2S \Delta s = r_4 \\ \Delta p + \Delta s_p = r_5 \\ \Delta q + \Delta s_q = r_6 \\ \Delta f + \Delta s_f = r_7 \\ \Delta v + \Delta s_v = r_8 \\ Z_p \Delta p + P \Delta z_p = \tilde{r}_9 \\ Z_q \Delta q + Q \Delta z_q = \tilde{r}_{10} \\ Z_f \Delta f + F \Delta z_f = \tilde{r}_{11} \\ Z_v \Delta v + V \Delta z_v = \tilde{r}_{12} \\ \nabla_r L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_r J_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2R(\Delta w_v - \Delta z_v) + M \Delta r + N \Delta s = r_{13} \\ \nabla_s L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_s L_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2S(\Delta w_v - \Delta z_v) - N \Delta r + M \Delta s = r_{14} \\ W_p \Delta s_p + S_p \Delta w_p = \tilde{r}_{15} \\ W_q \Delta s_q + S_q \Delta w_q = \tilde{r}_{16} \\ W_f \Delta s_f + S_f \Delta w_f = \tilde{r}_{17} \\ W_v \Delta s_v + S_v \Delta w_v = \tilde{r}_{18} \end{array} \right.$$

onde $\tilde{r}_i$ contém a soma entre o resíduo afim r_i , incluindo o valor calculado de μ , e a correção não-linear da i -ésima equação ($\Delta P \Delta z_p$ para $i = 9$, etc). O cálculo do valor de μ para o método preditor-corretor será definido na próxima seção.

4.7 Detalhes de Implementação

Nesta seção serão discutidos os detalhes de implementação dos métodos de pontos interiores desenvolvidos, com exceção da resolução do sistema linear que será discutida mais adiante. A implementação computacional desse trabalho foi feita para o método primal-dual aplicado ao problema relaxado, pois para o objetivo desse trabalho, não havia necessidade de restringir o fluxo de potência ativa nas linhas de transmissão. O acréscimo dessas restrições na implementação fazem parte de uma proposta futura (ver Capítulo 8).

4.7.1 Considerações Iniciais

Para a implementação foram utilizados alguns parâmetros e variáveis, como a precisão, representada por ϵ , o número de barras de geração NG , número de barras com limites de geração de potência reativa NH e também representamos o número total de barras por NB .

4.7.2 Atualização das Variáveis

As novas variáveis primais e duais são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha^k \Delta x \\ t^{k+1} &= t^k + \alpha^k \Delta t, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde o escalar $\alpha^k \in (0, 1]$ é o parâmetro de comprimento do passo.

4.7.3 Cálculo do Comprimento do Passo

O comprimento máximo do passo α^k é determinado por:

$$\begin{aligned} \alpha_p^{k,\max} &= \min_{\Delta x_i^k < 0} \left\{ \frac{-x_i^k}{\Delta x_i^k} \right\}, \\ \alpha_d^{k,\max} &= \min_{\Delta t_i^k < 0} \left\{ \frac{-t_i^k}{\Delta t_i^k} \right\}, \\ \alpha^k &= \min \{ \tau \alpha_p^{k,\max}; \tau \alpha_d^{k,\max}; 1, 0 \}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

O escalar $\tau \in (0, 1)$ é um fator de segurança para assegurar que o próximo ponto satisfará as condições estritas de positividade. Um valor comum utilizado em programação linear é de 0,99995 [10]. O valor utilizado na implementação foi $\tau = 0,9$. Note que na descrição do Método (4.1), o cálculo do comprimento do passo é realizado de uma forma diferente da apresentada nessa seção. A forma utilizada no método é uma forma mais econômica de se calcular o passo, ambas levam ao mesmo resultado.

4.7.4 Redução do Parâmetro de Barreira

O resíduo das condições de complementaridade γ , chamado *gap de complementaridade*, na k -ésima iteração é:

$$\gamma^k = (x^k + \Delta x^k)^t (t^k + \Delta t^k). \quad (4.12)$$

A sequência $\{\gamma^k\}_{k=0}^{\infty}$ deve convergir pra zero, e a relação entre γ^k e μ^k , implícita nas condições de KKT, sugerem que μ^k poderia ser reduzido baseado numa diminuição prevista do gap de complementaridade, como:

$$\mu^{k+1} = \beta^k \frac{\gamma^k}{2 \cdot (NG + NH)}. \quad (4.13)$$

O parâmetro $\beta^k \in (0, 1)$ é chamado de *parâmetro de centralização* e é interpretado como segue. Se $\beta^k = 1$, as condições de KKT definem uma direção de centralização, um passo de Newton em direção ao ponto na trajetória da barreira. Por outro lado, $\beta^k = 0$ temos o passo de Newton puro, conhecido como direção afin-escala. Para redução do μ^k e melhorar a centralização, β^k é dinamicamente escolhido como $\beta^k = \max\{0, 95\beta^{k-1}; 0, 1\}$, com $\beta^0 = 0,2$.

4.7.5 Critério de Convergência

As iterações do método são consideradas terminadas quando:

$$erro = \max\{\nu_n^k, \hat{\gamma}^k\} \leq \epsilon, \quad (4.14)$$

sendo ν_n^k em função das normas relativas dos resíduos e $\hat{\gamma}^k$ o gap relativo à função objetivo, que são calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nu_n^k &= \max \left\{ \frac{\|rp^k\|}{np^k}, \frac{\|rq^k\|}{nq^k}, \frac{\|rv^k\|}{nv}, \frac{\|rsp^k\|}{npu}, \frac{\|rsq^k\|}{nqu}, \frac{\|rsv^k\|}{nvu}, \frac{\|rr^k\|}{nc}, \frac{\|rs^k\|}{nc} \right\}, \\ \hat{\gamma}^k &= \left| \frac{\gamma^k}{1 + |2 \cdot \phi(p^k)|} \cdot \frac{1}{nnn} \right| \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 10^{-3}, \\ np^k &= 1 + \|p^k\| + \|r^k\| + \|s^k\|, \\ nq^k &= 1 + \|q^k\| + \|r^k\| + \|s^k\|, \\ nv &= 1 + \|v^{\min^2}\|, \\ npu &= 1 + \|p^{\max}\|, \\ nqu &= 1 + \|q^{\max}\|, \\ nvu &= 1 + \|v^{\max}\|, \\ nc &= 1 + \|H + c\|, \\ nnn &= 2 \cdot (NG + NH + NB), \end{aligned}$$

e os resíduos:

$$\begin{aligned} rp &= p + l_p - RGr - SGs - SBr + RBs, \\ rq &= q + l_q - SGr + RGs + RBr + SBs, \\ rv &= v^{\min^2} - r^2 - s^2 + v, \\ rsp &= p^{\max} - p - s_p, \\ rsq &= q^{\max} - q - s_q, \\ rsv &= v^{\max} - v - s_v, \\ rr &= -2Ry_v - \nabla_r L_p^t y_p - \nabla_r L_q^t y_q, \\ rs &= -2Sy_v - \nabla_s L_p^t y_p - \nabla_s L_q^t y_q. \end{aligned}$$

4.7.6 Ponto Inicial

O ponto inicial apresentado a seguir é o mesmo utilizado no modelo DC [18], acrescidas as variáveis relacionadas ao modelo reativo:

$$\begin{aligned}
 p = s_p = \frac{p^{\max}}{2}, & \quad z_p = w_p = e, \\
 q = s_q = \frac{q^{\max}}{2}, & \quad z_q = w_q = e, \\
 f = s_f = \frac{f^{\max}}{2}, & \quad z_f = w_f = e, \\
 v = s_v = \frac{v^{\max}}{2}, & \quad z_v = w_v = e, \\
 r = s_r = \sqrt{\frac{r^{\max}}{2}}. &
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Tomou-se a princípio esses valores para utilização na implementação, mas devido ao resultado insatisfatório das variáveis nas iterações e a não convergência do método, procurou-se outra forma para determinar pontos iniciais.

Na literatura especializada é comum também encontrar inicialização das variáveis com valores unitários, o que também foi realizado na implementação desse trabalho, obtendo-se resultados melhores que os anteriores mas ainda assim o método não convergiu, devido à natureza altamente não-linear do problema.

Outra forma para se obter pontos iniciais é utilizar o resultado das variáveis do problema de fluxo de carga, que geralmente fornece bons indicadores do estado do sistema.

Capítulo 5

Resolução do Sistema Linear

A matriz dos sistemas lineares dos métodos primal-dual e preditor-corretor é a mesma. Portanto a discussão desta seção se restringirá ao sistema (4.9). Este sistema linear pode ser resolvido diretamente. No entanto, é mais vantajoso reduzir a dimensão do sistema através da eliminação das variáveis de folga sem modificar sua estrutura esparsa [23]. Primeiramente substituímos as variáveis de folga primais:

$$\Delta s_p = r_5 - \Delta p,$$

$$\Delta s_q = r_6 - \Delta q,$$

$$\Delta s_f = r_7 - \Delta f,$$

$$\Delta s_v = r_8 - \Delta v,$$

obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\ -\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\ -\Delta f + G \Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\ -\Delta v + 2R \Delta r + 2S \Delta s = r_4 \\ Z_p \Delta p + P \Delta z_p = r_9 \\ Z_q \Delta q + Q \Delta z_q = r_{10} \\ Z_f \Delta f + F \Delta z_f = r_{11} \\ Z_v \Delta v + V \Delta z_v = r_{12} \\ \nabla_r L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_r L_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_r L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2R(\Delta w_v - \Delta z_v) + M \Delta r + N \Delta s = r_{13} \\ \nabla_s L_p^t (H \Delta p - \Delta z_p + \Delta w_p) + \nabla_s L_q^t (\Delta w_q - \Delta z_q) + \tilde{\nabla}_s L_f^t (\Delta w_f - \Delta z_f) + \\ \quad 2S(\Delta w_v - \Delta z_v) - N \Delta r + M \Delta s = r_{14} \\ -W_p \Delta p + S_p \Delta w_p = r_{15} - W_p r_5 \\ -W_q \Delta q + S_q \Delta w_q = r_{16} - W_q r_6 \\ -W_f \Delta f + S_f \Delta w_f = r_{17} - W_f r_7 \\ -W_v \Delta v + S_v \Delta w_v = r_{18} - W_v r_8. \end{array} \right.$$

Eliminando agora as variáveis de folga duais:

$$\begin{aligned} \Delta z_p &= P^{-1}(r_9 - Z_p \Delta p), \\ \Delta z_q &= Q^{-1}(r_{10} - Z_q \Delta q), \\ \Delta z_f &= F^{-1}(r_{11} - Z_f \Delta f), \\ \Delta z_v &= V^{-1}(r_{12} - Z_v \Delta v), \\ \Delta w_p &= S_p^{-1}(r_{15} + W_p(\Delta p - r_5)), \\ \Delta w_q &= S_q^{-1}(r_{16} + W_q(\Delta q - r_6)), \\ \Delta w_f &= S_f^{-1}(r_{17} + W_f(\Delta f - r_7)), \\ \Delta w_v &= S_v^{-1}(r_{18} + W_v(\Delta v - r_8)), \end{aligned}$$

o sistema linear se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s = r_1 \\ -\Delta q + \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s = r_2 \\ -\Delta f + G\Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s = r_3 \\ -\Delta v + 2R\Delta r + 2S\Delta s = r_4 \\ \nabla_r L_p^t D_p \Delta p + \nabla_r L_q^t D_q \Delta q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \Delta f + 2RD_v \Delta v + M\Delta r + N\Delta s = r_a \\ \nabla_s L_p^t D_p \Delta p + \nabla_s L_q^t D_q \Delta q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \Delta f + 2SD_v \Delta v - N\Delta r + M\Delta s = r_b, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} D_p &= P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p + H, \\ D_q &= Q^{-1}Z_q + S_q^{-1}W_q, \\ D_f &= F^{-1}Z_f + S_f^{-1}W_f, \\ D_v &= V^{-1}Z_v + S_v^{-1}W_v, \\ r_a &= r_{13} + \nabla_r L_p^t r_p + \nabla_r L_q^t r_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t r_f + 2Rr_v, \\ r_b &= r_{14} + \nabla_s L_p^t r_p + \nabla_s L_q^t r_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t r_f + 2Sr_v, \\ r_p &= P^{-1}r_9 + S_p^{-1}(W_p r_5 - r_{15}), \\ r_q &= Q^{-1}r_{10} + S_q^{-1}(W_q r_6 - r_{16}), \\ r_f &= F^{-1}r_{11} + S_f^{-1}(W_f r_7 - r_{17}), \\ r_v &= V^{-1}r_{12} + S_v^{-1}(W_v r_8 - r_{18}). \end{aligned}$$

Somente inversas de matrizes diagonais são envolvidas nestas substituições. As substituições de variáveis encontradas na literatura terminam neste ponto e o equivalente ao sistema (5.1) é resolvido. No entanto, a eliminação das variáveis de geração ativa e reativa, fluxo de potência e tensão:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \nabla_r L_p \Delta r + \nabla_s L_p \Delta s - r_1, \\ \Delta q &= \nabla_r L_q \Delta r + \nabla_s L_q \Delta s - r_2, \\ \Delta f &= G\Delta v + \nabla_r L_f \Delta r + \nabla_s L_f \Delta s - r_3, \\ \Delta v &= 2R\Delta r + 2S\Delta s - r_4, \end{aligned} \quad (5.2)$$

resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{rr} \Delta r + A_{rs} \Delta s = \tilde{r}_a \\ A_{sr} \Delta r + A_{ss} \Delta s = \tilde{r}_b, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_{rr} &= M + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f (\nabla_r L_f + 2GR) + 4RD_v R, \\
A_{rs} &= N + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f (\nabla_s L_f + 2GS) + 4RD_v S, \\
A_{sr} &= -N + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f (\nabla_r L_f + 2GR) + 4SD_v R, \\
A_{ss} &= M + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f (\nabla_s L_f + 2GS) + 4SD_v S, \\
\hat{r}_a &= r_a + \nabla_r L_p^t D_p r_1 + \nabla_r L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2RD_v r_4, \\
\hat{r}_b &= r_b + \nabla_s L_p^t D_p r_1 + \nabla_s L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2SD_v r_4.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Devido à simetria das matrizes G e B (ver Seção 2.3):

$$\begin{aligned}
\nabla_r L_f + 2GR &= \tilde{\nabla}_r L_f, \\
\nabla_s L_f + 2GS &= \tilde{\nabla}_s L_f,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

substituímos (5.5) em (5.4) temos:

$$\begin{aligned}
A_{rr} &= M + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \tilde{\nabla}_r L_f + 4RD_v R, \\
A_{rs} &= N + \nabla_r L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_r L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f \tilde{\nabla}_s L_f + 4RD_v S, \\
A_{sr} &= -N + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_r L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_r L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \tilde{\nabla}_r L_f + 4SD_v R, \\
A_{ss} &= M + \nabla_s L_p^t D_p \nabla_s L_p + \nabla_s L_q^t D_q \nabla_s L_q + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f \tilde{\nabla}_s L_f + 4SD_v S, \\
\hat{r}_a &= r_a + \nabla_r L_p^t D_p r_1 + \nabla_r L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_r L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2RD_v r_4, \\
\hat{r}_b &= r_b + \nabla_s L_p^t D_p r_1 + \nabla_s L_q^t D_q r_2 + \tilde{\nabla}_s L_f^t D_f (r_3 + Gr_4) + 2SD_v r_4.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Estas últimas substituições (5.2) alteram a estrutura matricial do sistema de forma mais radical. A esparsidade dos blocos matriciais envolvidos é, até antes desta última transformação (5.3), determinada pelas linhas da rede de transmissão onde cada linha corresponde a um elemento não nulo nas matrizes envolvidas. Uma vez que os novos blocos matriciais são formados por produtos dos blocos anteriores, eles correspondem a uma rede onde novas linhas surgem entre barras que se encontram a uma distância de comprimento dois na rede original.

Essa abordagem parece ser indicada para sistemas reais, pois o enchimento da matriz é relativamente pequeno e como veremos a seguir, a matriz do sistema linear (5.3) tem propriedades interessantes.

5.1 Estrutura Matricial

O sistema de equações linear (5.3) pode ser mais facilmente estudado ao ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_r L_p^t & 0 \\ 0 & \nabla_s L_p^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_p & D_p \\ D_p & D_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_r L_p & 0 \\ 0 & \nabla_s L_p \end{pmatrix} + \right. \\ & \quad \begin{pmatrix} \nabla_r L_q^t & 0 \\ 0 & \nabla_s L_q^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_q & D_q \\ D_q & D_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_r L_q & 0 \\ 0 & \nabla_s L_q \end{pmatrix} + \\ & \quad \left. \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_r L_f^t & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}_s L_f^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_f & D_f \\ D_f & D_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_r L_f & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}_s L_f \end{pmatrix} + \right. \\ & \quad \left. 4 \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_v & D_v \\ D_v & D_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_a \\ \tilde{r}_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cada um dos quatro últimos blocos matriciais do lado esquerdo deste sistema linear é simétrico semidefinido positivo. O primeiro bloco é antissimétrico e é positivo definido, se e somente se, M é uma matriz definida positiva pois [6]:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^t M a + b^t M b,$$

para quaisquer vetores a e b de dimensão apropriada.

Não existe garantia que a matriz M seja definida positiva mas por outro lado a existência de quatro blocos matriciais semidefinidos positivos indica que esta matriz deve permanecer numericamente estável ao longo das iterações dos métodos de pontos interiores em comparação com a matriz do sistema linear (5.1). Além disso, embora não seja uma matriz simétrica, sua estrutura esparsa é simétrica, proporcionando a resolução do sistema linear de forma mais eficiente que para matrizes assimétricas em geral.

Capítulo 6

Resultados Computacionais

6.1 Implementação e Ambiente

A implementação desse projeto foi feita inicialmente em MATLAB versão 5.3.0 (R11), pois permitiu facilidade de manipulação com as matrizes e variáveis, sem preocupação com reserva e endereçamento de memória, entre outras vantagens. Mas a grande desvantagem dessa implementação em MATLAB foi que ela não explorou a estrutura esparsa desses problemas. Devido principalmente à esse fato e também o alto grau de não-linearidade, ocorreram muitos problemas para a convergência do programa. Precisou-se encontrar ajustes muito finos nos parâmetros para que as condições de otimalidade e complementaridade do problema fossem satisfeitas, fazendo com que os resíduos primais e duais estivessem dentro de um limite com uma precisão consideravelmente satisfatória. Essa busca por parâmetros fora feita combinando pontos iniciais, valores iniciais para o parâmetro de barreira, parâmetro de centralização e até mesmo no cálculo do passo, através de mudança no valor do fator de segurança. Realizou-se extensivos testes computacionais, utilizando várias combinações de parâmetros para poder definir quais seriam utilizadas, e quais eram as melhores escolhas para cada sistema.

Os testes foram realizados em um computador com processador i686, clock de 1700GHz, memória RAM de 512MB, utilizando o sistema operacional FreeBSD-Unix.

Todos os resultados e valores utilizados tanto para realização dos testes, como para a apresentação, são dados em pu, exceto algumas variáveis que não estão convertidas

para a base do sistema em questão, nesse caso será feita a declaração da grandezas das mesmas.

6.2 Sistemas

Foram realizados testes com vários sistemas, com características e estruturas diferentes. Apresentaremos nesse capítulo os resultados computacionais extraídos de testes em dois sistemas:

- BAR3 – 3 barras e 3 ramos;
- IEEE30 – 30 barras e 41 ramos.

O sistema BAR3 é um sistema de testes que foi criado exclusivamente para obter melhores ajustes no programa, pois o ponto inicial utilizado foi proveniente do resultado do problema de fluxo de carga, o que geralmente é um ponto razoável. Como consequência, conseguiu-se estudar melhores alternativas para os valores iniciais dos parâmetros e suas atualizações.

O sistema IEEE30 é um problema já conhecido e utilizado por pesquisadores da área de sistemas de potência para testes computacionais. Encontra-se experimentos e resultados utilizando esse sistema em grande parte de documentos técnicos e artigos em revistas especializadas.

Para a realização dos testes utilizou-se esquemas com valores diferentes para os limitantes de tensão nas barras, pois dessa forma poderia-se analisar com mais detalhes o comportamento do sistema sob um forte controle e restrição, e isso pode ser realizado devido a uma boa estrutura do modelo. Os esquemas utilizados são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: *Limites de tensão*

limite	L-A	L-B	L-C	L-D	L-E*
inferior	0,90	0,94	0,98	0,99999	0,97
superior	1,10	1,06	1,02	1,00001	1,03

Os limites L-E foram utilizados para testes somente no sistema IEEE30. Testes no sistema IEEE30 com o esquema L-E foram feitos para demonstrar que os fluxos de potência ativa nas linhas podem ser controlados limitando a geração de potência ativa em cada barra, sem a necessidade de inclusão dessas restrições. Sendo assim, poderia-se gerar uma implementação baseada no modelo para o problema relaxado (3.2), para isso utilizou-se diferentes limites superiores, veja na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Custos e limites de geração

sistema	$\frac{1}{2}H$	$p^{\max}$
BAR3	0,5	1,0
IEEE30	0,5	0,5 e 1,0

Utiliza-se uma unidade monetária imaginária, sem atribuição de moeda. Considera-se o limite $p^{\max}$ para cada barra geradora de potência ativa. Foram feitos testes com dois valores para $p^{\max}$ no sistema IEEE30 acima apresentados. O objetivo desses testes foi verificar mudanças nos valores do fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão e quanto seriam representativas essas alterações. Nas seções seguintes serão feitas análises que melhor demonstram esses testes.

Os resultados dos testes realizados nos sistemas BAR3 e IEEE30 são apresentados nas seções seguintes através de tabelas, onde pode-se realizar uma comparação dos valores obtidos para os esquemas utilizados, como o número de iterações para a convergência do método, o valor da função objetivo e o $\hat{\gamma}$ - gap de complementaridade relativo à esse valor, tempo total gasto e número de operações de ponto flutuante realizadas durante a execução (flops).

6.3 BAR3

O sistema BAR3 é consideravelmente pequeno em relação à outros sistemas de testes. A resolução desse sistema serviu como referência em relação à implementação do método para comparações futuras como o sistema IEEE30, pois possui um bom comportamento e seus parâmetros foram consideravelmente mais simples de definir. Outro fator

importante foi o ponto inicial, obtido através da resolução do problema de fluxo de carga, o que nos permite um bom ponto de operação inicial para o sistema. Primeiramente utilizado, o sistema BAR3 forneceu dados importantes para uma avaliação do método implementado com a dedução matemática do modelo. Nesse momento criou-se também em paralelo uma implementação em linguagem C com apenas alguns módulos, principalmente o inicial, para efeito comparativo com a implementação existente em termos de estrutura e resultados, a fim de procurar um melhor ajuste.

Nas seções seguintes serão apresentados os resultados dos valores para tensão, geração de potência ativa, função objetivo e a norma residual relativa à esse valor, fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão. Analisou-se o sistema BAR3 com a aplicação de todos os esquemas. Gráficamente priorizou-se o esquema L-D, onde foi possível um controle maior sobre as tensões.

6.3.1 Análises

O programa convergiu para todos os esquemas, o que de certa forma permite um controle desejável para a tensão nas barras. Nota-se também que o tempo computacional para a resolução desse sistema foi muito pequeno. Estão também dispostos na Tabela 6.3 o número de iterações necessárias e o número de operações realizadas para a convergência do método, onde o ϵ utilizado foi 10^{-3} .

Tabela 6.3: *Iterações, função objetivo, tempo e flops – BAR3*

esquema	iterações	ϕ	tempo [s]	flops
L-A	5	0,379	0,015	14053
L-B	5	0,379	0,015	14053
L-C	6	0,379	0,015	16812
L-D	6	0,379	0,016	16812

Nos esquemas L-A, L-B e L-C, o valor do *erro* é dado pelo valor do $\tilde{\gamma}$, pois nesses casos as condições de otimalidade foram primeiramente satisfeitas, veja Tabela 6.4. A partir da restrição máxima nos limites da tensão, no esquema L-D, pode-se observar

que o $\hat{\gamma}$ foi melhor do que os outros esquemas, pois há um ajuste melhor nos valores das outras variáveis do sistema. Obteve-se um aumento no *erro*, mas ainda está dentro do limite desejado, compensando de certa forma essa imposição de valores para tensão.

Tabela 6.4: *Valor do erro e gap de complementaridade relativo - BAR3*

esquema	<i>erro</i>	$\hat{\gamma}$
L-A	$0,6650 \times 10e-3$	$0,6650 \times 10e-3$
L-B	$0,7415 \times 10e-3$	$0,7415 \times 10e-3$
L-C	$0,3155 \times 10e-3$	$0,3155 \times 10e-3$
L-D	$0,7188 \times 10e-3$	$0,2393 \times 10e-3$

6.3.2 Tensão

A tensão nas barras obtida ao final das iterações para o sistema BAR3, utilizando os esquemas acima citados, podem ser observadas na Tabela 6.5, onde a barra 1 é a barra de referência do sistema.

Tabela 6.5: *Tensão nas barras - BAR3*

barra	L-A	L-B	L-C	L-D
1*	1,015	1,009	1,005	1,000
2	1,012	1,005	1,002	1,000
3	1,001	0,995	0,995	1,000

No gráfico da Figura 6.1 pode-se ter uma visualização da evolução da tensão nas barras através das iterações para o esquema L-D, onde a tensão nas barras estão fora dos limites no ponto inicial e são forçadas a 1,0 pu.

6.3.3 Potência Ativa

A geração de potência ativa é feita somente nas barras de geração do sistema. Como a proposta inicial de implementação e testes eram para serem realizadas em um

Figura 6.1: Tensão nas barras – BAR3 (L-D)

sistema simples, então estabeleceu-se que no sistema BAR3, todas as barras poderiam gerar potência ativa. Os resultados finais das iterações podem ser vistos na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Geração de potência ativa – BAR3

barras	L-A	L-B	L-C	L-D
1	0,501	0,501	0,501	0,498
2	0,512	0,513	0,512	0,518
3	0,494	0,494	0,495	0,491

A geração de potência nas barras para o esquema L-D estão mostradas no gráfico da Figura 6.2, onde as barras inicialmente possuem valores de potência baixos, pois o problema de fluxo de carga não considera as condições de otimalidade. Ao longo das iterações esses valores são ajustados em conjunto com as outras variáveis para que as condições de otimalidade e complementaridade sejam atendidas, mantendo também os pontos interiores.

Figura 6.2: Geração de potência ativa BAR3 (L-D)

6.3.4 Normas Residuais Relativas

As normas residuais relativas à função objetivo são utilizadas para testar a convergência do método, são também indicadores de desempenho da implementação. Utiliza-se esses valores para detectar e indicar possíveis direções erradas, pontos iniciais ruins ou até mesmo parâmetros não apropriados para o sistema. No gráfico da Figura 6.3 pode-se notar os valores decrescendo para zero, atendendo assim as restrições de igualdade e desigualdades do problema (3.2).

Figura 6.3: Normas residuais relativas BAR3 (L-D)

6.3.5 Fluxo e Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão

A importância de se analisar esses valores consiste em evitar sobrecarga das linhas, pois essas têm limitações físicas que deverão ser respeitadas para que não haja interrupções na distribuição da carga. Em alguns trabalhos nessa área, as perdas nas linhas de transmissão são consideradas como função objetivo. Esses resultados são apresentados neste trabalho apenas como uma ilustração. Na Tabela 6.7 mostra-se os valores para o fluxo e para as perdas de potência ativa nas linhas.

Tabela 6.7: *Fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão - BAR3*

linha		fluxo	fluxo	perdas
(índice)	(k-m)	(k-m)	(m-k)	
1	1-2	0,1854	-0,1844	$0,1034 \times 10e-2$
2	1-3	0,4596	-0,4532	$0,6337 \times 10e-2$
3	3-2	-0,1807	0,1824	$0,1667 \times 10e-2$

Os fluxos são melhores visualizados através do gráfico da Figura 6.4.

Figura 6.4: *Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão - BAR3 (L-D)*

6.4 IEEE30

O IEEE30 é um sistema utilizado e aceito pelos pesquisadores na área como um problema para realização de testes em implementações dos métodos desenvolvidos. Devido principalmente à não exploração de sua estrutura esparsa de forma adequada pela implementação feita em MATLAB, a utilização de pontos e parâmetros iniciais baseados em programação linear e migrados para programação não-linear, o método desenvolvido neste trabalho teve dificuldades para convergência. A solução foi atribuir o valor de ϵ para 10^{-1} e realizar ajustes nos parâmetros para que pudessem compensar essas desvantagens. Outra mudança foi no limite máximo de geração de potência ativa para os esquemas L-C e L-D, que estava sendo utilizado 1,0 pu e foi reduzido para 0,5 pu. O resultado dessas ações foram satisfatórios e conseguiu-se realizar os mesmos testes que foram feitos para o sistema BAR3.

6.4.1 Análises

Pode-se observar que o programa convergiu para todos os esquemas, nota-se também que o tempo computacional para a resolução desse sistema foi muito pequeno. Estão também dispostos na Tabela 6.8 o número de iterações necessárias e o número de operações realizadas para a convergência do método.

Tabela 6.8: *Iterações, função objetivo, tempo e flops - IEEE30*

esquema	iterações	ϕ	tempo [s]	flops
L-A	4	0,901	0,047	98906
L-B	4	0,899	0,047	98594
L-C	6	0,450	0,078	146187
L-D	10	0,718	0,125	245115
L-E	4	0,898	0,047	98435

Para o sistema IEEE30, veja Tabela 6.9, os esquemas de limites L-A, L-B, L-D e L-E, resultaram valores de *erro* muito próximos. Ao passo que os valores de $\hat{\gamma}$ ficaram

bastante reduzidos nos esquemas L-C e L-D em comparação com os outros, resultado de uma maior restrição nos limites de tensão e geração de potência ativa nas barras.

Tabela 6.9: *Valor do erro e gap de complementaridade relativo – IEEE30*

esquema	erro	$\hat{\gamma}$
L-A	$0,9697 \times 10e-1$	$0,8532 \times 10e-1$
L-B	$0,9774 \times 10e-1$	$0,8331 \times 10e-1$
L-C	$0,8341 \times 10e-1$	$0,1957 \times 10e-1$
L-D	$0,9104 \times 10e-1$	$0,2169 \times 10e-3$
L-E	$0,9607 \times 10e-1$	$0,7986 \times 10e-1$

6.4.2 Tensão

A tensão nas barras obtida ao final das iterações para o sistema IEEE30, utilizando os esquemas acima citados, podem ser observadas na Tabela 6.10, onde a barra 1 é a barra de referência do sistema.

No gráfico da Figura 6.5 pode-se ter uma visualização da evolução da tensão nas barras através das iterações para o esquema L-D, onde inicialmente estão fora dos limites e são forçadas a 1,0 pu pela restrição imposta pelo esquema.

Figura 6.5: *Tensão nas barras - IEEE30 (L-D)*

Tabela 6.10: *Tensão nas barras IEEE30*

barra	L-A	L-B	L-C	L-D	L-E	barra	L-A	L-B	L-C	L-D	L-E
1*	1,005	1,000	0,996	1,000	0,999	16	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
2	1,011	1,006	1,009	1,000	1,004	17	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
3	1,006	1,002	1,000	1,000	1,001	18	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
4	1,007	1,003	0,999	1,000	1,001	19	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
5	0,998	0,995	1,000	1,000	0,993	20	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
6	1,006	1,002	0,998	1,000	1,001	21	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
7	1,008	1,006	1,000	1,000	1,005	22	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
8	1,006	1,003	1,002	1,000	1,001	23	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
9	1,001	0,997	0,991	1,000	0,996	24	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
10	1,007	1,003	1,001	1,000	1,001	25	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
11	1,012	1,008	1,010	1,000	1,005	26	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
12	1,002	0,998	0,991	1,000	0,996	27	1,006	1,002	1,001	1,000	1,001
13	1,012	1,008	1,010	1,000	1,006	28	1,006	1,002	1,000	1,000	1,001
14	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000	29	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000
15	1,005	1,001	1,000	1,000	1,000	30	1,005	1,002	1,000	1,000	1,000

6.4.3 Potência Ativa

Os resultados finais da injeção de potência ativa nas barras de geração podem ser vistos na Tabela 6.11.

A geração de potência nas barras para o esquema L-D estão mostradas no gráfico da Figura 6.6, onde as barras inicialmente possuem valores próximos à fronteira da região de factibilidade. Ao longo das iterações esses valores são ajustados em conjunto com as outras variáveis evitando que essas ultrapassem os limites dessa região.

Tabela 6.11: Geração de potência ativa - IEEE30

barra	L-A	L-B	L-C	L-D	L-E
1	0,549	0,548	0,384	0,480	0,544
2	0,563	0,562	0,391	0,478	0,559
5	0,555	0,555	0,394	0,488	0,553
8	0,536	0,537	0,383	0,496	0,540
11	0,543	0,543	0,386	0,497	0,544
13	0,542	0,542	0,386	0,495	0,542

Figura 6.6: Geração de potência ativa - IEEE30 (L-D)

6.4.4 Normas Residuais Relativas

As normas residuais iniciais possuem valores altos, causado pelo ponto inicial de operação obtido do resultado do programa de fluxo de carga, que somente está relacionado com as igualdades do problema, por isso as normas residuais referentes a rp e rq são praticamente zero na inicialização e permanecem inalteradas ao longo das iterações, ao contrário de rr e rs que representam as restrições canalizadas incorporadas no problema. No gráfico da Figura 6.7 pode-se notar que esses valores decrescem para zero, atendendo dessa forma todas as restrições do problema.

Figura 6.7: Normas residuais relativas IEEE30 (L-D)

6.4.5 Fluxo e Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão

Na Tabela 6.12 mostra-se os valores para o fluxo e para as perdas de potência ativa nas linhas resultado da utilização do esquema L-D.

Os fluxos e perdas para o sistema IEEE30 são melhores visualizados através dos gráficos das Figuras 6.8 e 6.9 respectivamente.

Figura 6.8: Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão IEEE30 (L-D)

Figura 6.9: Perda de potência ativa nas linhas de transmissão IEEE30 (L-D)

O objetivo dos testes para o esquema L-E foram para visualizar o controle nos limites de transmissão exercido pelo limite máximo de geração de potência ativa. Na Tabela 6.13 exibe-se os fluxos nas linhas para cada limite máximo de geração de potência ativa.

Pode-se notar que devido à esse controle no limite máximo de potência a ser gerada, os valores dos fluxos quando tendem a diminuir conforme esse limite. O gráficos das Figuras 6.10 e 6.11 mostram o comportamento dos fluxos de potência ativa nas linhas submetidos à $p^{\max} = 1,0$ pu e $p^{\max} = 0,5$ pu respectivamente, onde pode-se também notar que para o primeiro limite, o valor do fluxo de potência ativa na linha 13, entre as barras 11 e 9 é de 1,295 pu. Para o segundo limite houve uma redução significativa desse valor para 0,8249 pu. Conseqüentemente as perdas também são reduzidas, veja nos gráficos das Figuras 6.12 e 6.13.

Figura 6.10: Fluxos nas linhas - IEEE30 (L-E: limite 1,0 pu)

Figura 6.11: Fluxos nas linhas - IEEE30 (L-E: limite 0,5 pu)

Tabela 6.12: *Fluxos e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão IEEE30*

linha		fluxo (k-m)	fluxo (m-k)	perdas
(índice)	(k-m)			
1	1-2	0,2773	-0,2757	$0,1580 \times 10e-2$
2	1-3	0,6163	-0,6084	$0,7894 \times 10e-2$
3	2-4	0,1346	-0,1338	$0,8671 \times 10e-3$
4	3-4	0,01214	-0,01213	$0,8653 \times 10e-5$
5	2-5	0,3287	-0,3237	$0,4998 \times 10e-2$
6	2-6	0,1465	-0,1455	$0,1014 \times 10e-2$
7	4-6	0,05061	-0,05057	$0,3313 \times 10e-4$
8	5-7	-0,1338	0,1346	$0,8755 \times 10e-3$
9	6-7	0,02033	-0,0203	$0,2332 \times 10e-4$
10	6-8	-0,0375	0,03759	$0,8915 \times 10e-4$
11	6-9	-0,004969	0,004971	$0,1411 \times 10e-5$
12	6-10	-0,006363	0,006366	$0,2343 \times 10e-5$
13	9-11	-1,128	1,166	$0,3795 \times 10e-1$
14	9-10	-0,002997	0,002998	$0,2588 \times 10e-6$
15	4-12	0,006619	-0,006618	$0,1312 \times 10e-5$
16	12-13	-0,1264	0,1264	0,0
17	12-14	0,0001006	-0,0001006	0,0
18	12-15	0,0001957	-0,0001957	0,0
19	12-16	0,0004284	-0,0004284	0,0
20	14-15	0,0004809	-0,0004809	0,0
21	16-17	0,00166	-0,00166	0,0
22	15-18	0,0006443	-0,0006443	0,0
23	18-19	0,00066	-0,0006599	$0,2946 \times 10e-7$
24	19-20	0,0002488	-0,0002488	$0,5675 \times 10e-8$
25	10-20	-0,003928	0,003929	$0,1977 \times 10e-6$
26	10-17	-0,002434	0,002434	$0,6968 \times 10e-7$
27	10-21	-0,001511	0,001511	$0,2730 \times 10e-7$
28	10-22	-0,001972	0,001972	$0,4599 \times 10e-7$
29	21-22	-0,000101	0,000101	$0,5191 \times 10e-9$
30	15-23	0,00022	-0,00022	0,0
31	22-24	-0,001035	0,001036	$0,1179 \times 10e-6$
32	23-24	0,0006103	-0,0006103	$0,2374 \times 10e-7$
33	24-25	-0,004222	0,004223	$0,7945 \times 10e-6$
34	25-26	$-0,8774 \times 10e-4$	$0,8774 \times 10e-4$	$0,6175 \times 10e-8$
35	25-27	-0,000811	0,0008111	$0,1091 \times 10e-6$
36	28-27	0,001998	-0,001997	$0,1360 \times 10e-5$
37	27-29	-0,0003001	0,0003001	$0,2478 \times 10e-7$
38	27-30	-0,0003371	0,0003372	$0,3129 \times 10e-7$
39	29-30	-0,0001232	0,0001232	$0,1250 \times 10e-8$
40	8-28	0,03509	-0,03502	$0,6595 \times 10e-4$
41	6-28	-0,0134	0,01341	$0,1098 \times 10e-4$

Tabela 6.13: *Fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão -- IEEE30 (L-E)*

linha		$p^{\max} = 1,0\text{pu}$		$p^{\max} = 0,5\text{pu}$	
(índice)	(k-m)	fluxo (k-m)	fluxo (m-k)	fluxo (k-m)	fluxo (m-k)
1	1-2	0,2653	-0,2633	0,2101	-0,2086
2	1-3	0,764	-0,7513	0,3111	-0,3089
3	2-4	0,1819	-0,1803	0,03618	-0,03608
4	3-4	0,002921	-0,00292	0,001214	-0,001213
5	2-5	0,2976	-0,2937	0,3086	-0,3043
6	2-6	0,1888	-0,1871	0,04099	-0,04087
7	4-6	0,02981	-0,0298	0,0211	-0,02109
8	5-7	-0,07824	0,07861	-0,2142	0,2164
9	6-7	0,01214	-0,01209	0,007306	-0,007285
10	6-8	-0,04871	0,04886	-0,008198	0,008202
11	6-9	0,006581	-0,006546	0,0127	-0,0126
12	6-10	-0,0018	0,0018	-0,003307	0,003309
13	9-11	-1,249	1,295	-0,8071	0,8249
14	9-10	-0,01776	0,01784	-0,03383	0,03412
15	4-12	0,0537	-0,05348	0,06653	-0,0661
16	12-13	-0,1371	0,1371	-0,08364	0,08364
17	12-14	$8,035 \times 10\text{e-}5$	$-8,035 \times 10\text{e-}5$	$-7,935 \times 10\text{e-}5$	$7,935 \times 10\text{e-}5$
18	12-15	0,0001576	-0,0001576	$-2,874 \times 10\text{e-}5$	$2,874 \times 10\text{e-}5$
19	12-16	0,000241	-0,000241	$1,335 \times 10\text{e-}5$	$-1,335 \times 10\text{e-}5$
20	14-15	0,0003924	-0,0003924	0,0002575	-0,0002575
21	16-17	0,0009372	-0,0009372	0,0004455	-0,0004455
22	15-18	0,0003466	-0,0003466	0,0001403	-0,0001403
23	18-19	0,0003171	-0,0003171	0,000172	-0,000172
24	19-20	$9,612 \times 10\text{e-}5$	$-9,612 \times 10\text{e-}5$	$3,217 \times 10\text{e-}5$	$-3,217 \times 10\text{e-}5$
25	10-20	0,00112	-0,001118	0,003946	-0,003943
26	10-17	0,001404	-0,001403	0,004055	-0,004052
27	10-21	0,00256	-0,002559	0,004657	-0,004654
28	10-22	0,002552	-0,002551	0,004726	-0,004723
29	21-22	$-2,199 \times 10\text{e-}6$	$2,199 \times 10\text{e-}6$	$1,431 \times 10\text{e-}5$	$-1,431 \times 10\text{e-}5$
30	15-23	0,0003485	-0,0003485	0,0001394	-0,0001394
31	22-24	-0,0002451	0,0002451	-0,0004046	0,0004047
32	23-24	0,0004571	-0,0004571	-0,0002384	0,0002386
33	24-25	0,001662	-0,001662	0,001871	-0,001871
34	25-26	$3,872 \times 10\text{e-}5$	$-3,872 \times 10\text{e-}5$	$3,284 \times 10\text{e-}5$	$-3,284 \times 10\text{e-}5$
35	25-27	-0,0001071	0,0001071	-0,0005873	0,0005875
36	28-27	-0,0004143	0,0004143	-0,0003777	0,0003777
37	27-29	0,0009882	-0,0009881	0,002101	-0,0021
38	27-30	0,001003	-0,001003	0,002113	-0,002112
39	29-30	$4,54 \times 10\text{e-}5$	$-4,54 \times 10\text{e-}5$	$3,735 \times 10\text{e-}5$	$-3,735 \times 10\text{e-}5$
40	8-28	0,07074	-0,07048	0,009063	-0,009059
41	6-28	-0,0003932	0,0003933	-0,002026	0,002027

Figura 6.12: Perda nas linhas de transmissão – IEEE30 (L-E: limite 1,0 pu)

Figura 6.13: Perda nas linhas de transmissão – IEEE30 (L-E: limite 0,5 pu)

Capítulo 7

Conclusões

Os resultados indicam que os métodos de pontos interiores são promissores para esta classe de problemas.

Pode-se observar que as iterações do método são rápidas. Esta velocidade é obtida através da redução do sistema linear via eliminação de variáveis, resultando em um sistema cuja dimensão corresponde a duas vezes o número de barras do problema original.

É importante salientar que a utilização de coordenadas cartesianas contribuiu para o desenvolvimento do método fornecendo Jacobianas menos complexas e contribuindo também para a exploração mais eficiente da estrutura matricial resultante.

A estrutura da modelagem permitiu a imposição de fortes restrições à algumas variáveis sem o aumento do tempo e operações de ponto flutuante, contribuindo para um melhor resultado no gap relativo e mantendo o erro dentro do limite desejável.

Conseguiu-se obter bons resultados nas perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, mesmo não sendo o objetivo do modelo utilizado. Esse resultado mostra de certa forma que não seria preciso alterações significativas no desenvolvimento apresentado neste trabalho para se adotar outras funções objetivo.

Os problemas de convergência do método ocorreram devido à não-linearidade do problema de fluxo de carga ótimo AC, dificultando a escolha de parâmetros e pontos iniciais adequados. A utilização de pontos iniciais resultantes do problema de fluxo de carga estão relacionadas apenas com as equações de fluxo de carga, sendo necessário ajustes referentes às outras restrições do problema.

Estes métodos podem ser implementados para resolver problemas de grande porte e problemas sob condições mais restritas. Para isso é necessário um melhor aproveitamento da estrutura esparsa dos problemas e também um estudo mais detalhado sobre a obtenção de parâmetros e pontos iniciais adequados.

Capítulo 8

Propostas Futuras

Uma proposta para a continuidade desse projeto é a tradução desta implementação para uma linguagem de computação mais poderosa, onde pudessem ser exploradas, a estrutura esparsa do problema e as características da matriz do sistema linear resultante tais como, ser estruturalmente simétrica e ter uma estrutura originada de uma rede de transmissão, considerando transformadores defasadores. Juntamente com essa implementação, a criação de uma estrutura de dados eficiente, reduzindo dessa forma o número de operações realizadas e o tempo computacional.

Outra modificação seria adicionar outras características ao modelo, tais como tratamento de limites de transmissão de potência ativa e diferentes funções objetivo, de forma a obter uma implementação robusta, eficiente e que possa representar sistemas de potência reais.

Existe a possibilidade de algumas mudanças no desenvolvimento do método apresentado neste trabalho, como a não eliminação das variáveis livres y_s e também a não criação das variáveis de folga z_s . Em alguns trabalhos nessa área, pode-se encontrar interpretações econômicas do problema através dos resultados das variáveis livres, o que também pode ser estudado posteriormente.

Bibliografia

- [1] I. ADLER, M. G. C. RESENDE, G. VEIGA, AND N. KARMAKAR, *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Mathematical Programming, 44 (1989), pp. 297-335.
- [2] J. E. DENNIS AND R. B. SCHNABEL, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [3] A. S. EL-BAKRY, R. A. TAPIA, T. TSUCHIYA, AND Y. ZHANG, *On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, 89 (1996), pp. 507-541.
- [4] A. V. Fiacco AND G. P. McCORMICK, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley, New York, 1968.
- [5] K. R. FRISCH, *The logarithmic potential method of convex programming*, memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.
- [6] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations Third Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996.
- [7] J. GONDZIO, *Presolve analysis of linear programming prior to applying an interior point method*, ORSA Journal on Computing, 9 (1997), pp. 73-91.
- [8] S. GRANVILLE, *Optimal reactive power dispatch through interior point methods*, IEEE Transactions on Power Systems, 9 (1994), pp. 136-146.
- [9] D. G. LUENBERGER, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, 1984.

- [10] I. J. LUSTIG, R. E. MARSTEN, AND D. F. SHANNO, *Computational experience with a primal-dual interior-point method for linear programming*, Linear Algebra Appl., 152 (1991), pp. 191-222.
- [11] —, *On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming*, SIAM J. Optimization, 2 (1992), pp. 435-449.
- [12] J. M. MARTINEZ AND L. T. SANTOS, *Some new theoretical results on recursive quadratic programming algorithms*, Journal of Optimization Theory and Applications, 97 (1998), pp. 435-454.
- [13] S. MEHROTRA, *On the implementation of a primal-dual interior point method*, SIAM Journal on Optimization, 2 (1992), pp. 575-601.
- [14] J. A. MOMOH, M. E. EL-HAWARY, AND R. ADAPA, *A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II Newton, linear programming and interior point methods*, IEEE Transactions on Power Systems, 14 (1999), pp. 105-111.
- [15] R. D. C. MONTEIRO, I. ADLER, AND M. G. C. RESENDE, *A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension*, Mathematics of Operations Research, 15 (1990), pp. 191-214.
- [16] A. J. MONTICELLI, *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Edgard Blücher, São Paulo, 1983.
- [17] A. R. L. OLIVEIRA, L. NEPOMUCENO, AND S. SOARES, *Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches*, Trabalho submetido à Electrical Power & Energy Systems, (2001).
- [18] —, *Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches*, Aceito para publicação, IEEE Transactions on Power Systems, (2003).
- [19] A. R. L. OLIVEIRA AND S. SOARES, *Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo*, Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática, em

CD-ROM, Florianópolis, SC, aceito para publicação na SBA: Controle & Automação na condição de artigo convidado, (2000), pp. 790-795.

- [20] V. H. QUINTANA, G. L. TORRES, AND J. MEDINA-PALOMO, *Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes*, IEEE Transactions on Power Systems, 15 (2000), pp. 170-176.
- [21] S. SOARES AND C. T. SALMAZO, *Minimum loss predispach model for hydroelectric systems*, IEEE Transactions on Power Systems, 12 (1997), pp. 1220-1228.
- [22] R. A. TAPIA AND Y. ZHANG, *Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited*, Journal of Optimization Theory and Applications, 73 (1992), pp. 229-242.
- [23] G. L. TORRES AND V. H. QUINTANA, *An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates*, IEEE Transactions on Power Systems, 13 (1998), pp. 1211-1218.
- [24] R. J. VANDERBEI, *Linear Programming Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1996.
- [25] H. WEI, H. SASAKI, J. KUBOKEWA, AND R. YOKOYAMA, *An interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure*, IEEE Transactions on Power Systems, 13 (1998), pp. 870-877.
- [26] S. J. WRIGHT, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.
- [27] Y. Q. WU, A. S. DEBS, AND R. E. MASTERN, *A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows*, IEEE Transactions on Power Systems, 9 (1994), pp. 876-883.

Apêndice

Relatórios de Saída da Implementação

Nesse anexo do trabalho são mostrados os relatórios de saída que foram gerados pela execução do programa para os sistemas BAR3 e IEEE30, utilizando os esquemas para limites de tensão conforme descrito anteriormente. Esses relatórios contém valores iniciais de parâmetros e os resultados provenientes da última iteração executada.

BAR3 – Esquema L-A

```
-----
Carga Ativa   = 1.500000      Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 0.299700      Capacidade = 0.599400

Limites de tensão (L-A)
vmin  = 0.90000
vmax  = 1.10000

Valores e Parâmetros iniciais
ng     = 3
nh     = 3
m      = 3
nnn    = 18
phi    = 0.0131
mi     = 15.0000
beta   = 0.2000
gamarel= 0.3495
erro   = 0.7857

<<<< Iteração 5 >>>>
Variáveis
-----
p  = 0.5008  0.5124  0.4941
q  = 0.1213  0.1231  0.1296
v  = 0.2210  0.2138  0.1919
r  = 0.6680  0.7103  0.7646
s  = 0.7647  0.7206  0.6460
sp = 0.4992  0.4876  0.5059
sq = 0.0785  0.0767  0.0702
sv = 0.1790  0.1862  0.2081
zp = 0.0023  0.0024  0.0022
zq = 0.0092  0.0091  0.0088
zv = 0.0048  0.0050  0.0056
wp = 0.0023  0.0022  0.0024
wq = 0.0170  0.0166  0.0173
wv = 0.0071  0.0068  0.0059
```

Direções

```

dp = 0.0018 -0.0103 0.0090
dq = 0.0023 0.0016 0.0008
dv = 0.0061 0.0060 0.0049
dr = -0.0002 0.0006 0.0017
ds = 0.0034 0.0027 0.0004
dsp = -0.0018 0.0103 -0.0090
dsq = -0.0023 -0.0016 -0.0008
dsv = -0.0061 -0.0060 -0.0049
dzp = -0.0063 -0.0059 -0.0068
dzq = -0.0176 -0.0181 -0.0193
dzv = -0.0153 -0.0158 -0.0171
dwp = -0.0065 -0.0070 -0.0060
dwq = -0.0762 -0.0763 -0.0794
dwv = -0.0186 -0.0181 -0.0159

```

Resíduos

```

rp = -0.0000 -0.0000 0.0000
rq = -0.0000 -0.0000 -0.0000
rv = -0.0000 -0.0000 -0.0000
rr = -0.0007 -0.0000 0.0005
rs = 0.0008 0.0003 -0.0012
rsp = 0.0000 0.0000 0.0000
rsq = 0.0000 0.0000 0.0000
rsv = 0.0000 0.0000 0.0000
rzp = -0.0031 -0.0032 -0.0032
rzq = -0.0020 -0.0022 -0.0025
rzv = -0.0032 -0.0032 -0.0031
rwp = -0.0032 -0.0032 -0.0032
rwq = -0.0064 -0.0061 -0.0057
rwv = -0.0036 -0.0036 -0.0035

```

Normas

```

norm(rp)/np = 0.0000
norm(rq)/nq = 0.0000
norm(rv)/nv = 0.0000
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0003
norm(rs)/nc = 0.0005

```

Variáveis Livres

```

yp = 0.5009 0.5123 0.4943
yq = 0.0078 0.0075 0.0085
yv = 0.0023 0.0018 0.0003

```

Parâmetros

```

mi = 0.0012
beta = 0.1548
erro = 0.0007
gamarel = 0.0007

```

Resultados

```

Função Objetivo= 0.379

```

```

iterações = 5
tempo = 0.015
flops = 14053

```

BAR3 -- Esquema L-B

```
-----
Carga Ativa   = 1.500000   Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 0.299700   Capacidade = 0.599400
-----
```

```
Limites de tensão (L-B)
vmin  = 0.96000
vmax  = 1.04000
```

Valores e Parâmetros iniciais

```
ng    = 3
nh    = 3
m     = 3
nnn   = 18
phi   = 0.0131
mi    = 15.0000
beta  = 0.2000
gamarel = 0.3495
erro  = 0.6527
```

<<<< Iteração 5 >>>>

Variáveis

```
-----
p  = 0.5004  0.5137  0.4933
q  = 0.1152  0.1210  0.1388
v  = 0.0911  0.0850  0.0670
r  = 0.7054  0.7457  0.7973
s  = 0.7178  0.6712  0.5942
sp = 0.4996  0.4863  0.5067
sq = 0.0846  0.0788  0.0610
sv = 0.0689  0.0750  0.0930
zp = 0.0034  0.0037  0.0034
zq = 0.0140  0.0139  0.0128
zv = 0.0183  0.0198  0.0268
wp = 0.0036  0.0033  0.0036
wq = 0.0232  0.0236  0.0273
wv = 0.0270  0.0243  0.0184
```

Direções

```
-----
dp = 0.0035 -0.0123  0.0091
dq = 0.0029  0.0015 -0.0008
dv = 0.0014  0.0011 -0.0006
dr = 0.0016  0.0017  0.0021
ds = -0.0020 -0.0027 -0.0056
dsp = -0.0035  0.0123 -0.0091
dsq = -0.0029 -0.0015  0.0008
dsv = -0.0014 -0.0011  0.0006
dzp = -0.0100 -0.0111 -0.0098
dzq = -0.0444 -0.0415 -0.0370
dzv = -0.0550 -0.0599 -0.0888
dwp = -0.0109 -0.0093 -0.0110
dwq = -0.0766 -0.0771 -0.0908
dwv = -0.0815 -0.0734 -0.0531
```

Resíduos

```
-----
rp = -0.0000 -0.0000  0.0000
rq =  0.0000  0.0000 -0.0001
rv = -0.0000 -0.0000 -0.0000
rr = -0.0003 -0.0001  0.0003
rs =  0.0007  0.0004 -0.0011
rsp = 0.0000  0.0000 -0.0000
rsq = 0.0000  0.0000 -0.0000
rsv = 0.0000  0.0000  0.0000
rzp = -0.0049 -0.0060 -0.0046
rzq = -0.0048 -0.0049 -0.0052
rzv = -0.0048 -0.0049 -0.0061
rwp = -0.0056 -0.0043 -0.0058
rwq = -0.0070 -0.0063 -0.0054
rwv = -0.0059 -0.0057 -0.0049
```


Normas

```
norm(rp)/np = 0.0000
norm(rq)/nq = 0.0000
norm(rv)/nv = 0.0000
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0002
norm(rs)/nc = 0.0005
```

Variáveis Livres

```
yp = 0.5006 0.5133 0.4936
yq = 0.0092 0.0097 0.0146
yv = 0.0087 0.0045 -0.0084
```

Parâmetros

```
mi = 0.0017
beta = 0.1548
erro = 0.0010
gamarel = 0.0010
```

Resultados

```
Função Objetivo= 0.379
```

```
iterações = 5
tempo = 0.015
flops = 14053
```

BAR3 -- Esquema L-C

```
-----
Carga Ativa   = 1.500000   Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 0.299700   Capacidade = 0.599400
```

```
Limites de tensão (L-C)
vmin  = 0.98000
vmax  = 1.02000
```

Valores e Parâmetros iniciais

```
ng      = 3
nh      = 3
m       = 3
nnn     = 18
phi     = 0.0131
mi      = 15.0000
beta    = 0.2000
gamarel = 0.3495
erro    = 0.6110
```

<<<< Iteração 6 >>>>

Variáveis

```
-----
p  = 0.5008  0.5119  0.4947
q  = 0.1085  0.1183  0.1488
v  = 0.0487  0.0435  0.0299
r  = 0.7078  0.7484  0.8015
s  = 0.7130  0.6663  0.5899
sp = 0.4992  0.4881  0.5053
sq = 0.0913  0.0815  0.0510
sv = 0.0313  0.0365  0.0501
zp = 0.0011  0.0011  0.0011
zq = 0.0049  0.0046  0.0038
zv = 0.0107  0.0122  0.0191
wp = 0.0011  0.0011  0.0011
wq = 0.0064  0.0069  0.0103
wv = 0.0193  0.0159  0.0108
```

Direções

```
-----
dp = 0.0018 -0.0051  0.0034
dq = 0.0017  0.0005 -0.0008
dv = 0.0008  0.0006 -0.0003
dr = 0.0102  0.0095  0.0089
ds = -0.0092 -0.0100 -0.0120
dsp = -0.0018  0.0051 -0.0034
dsq = -0.0017 -0.0005  0.0008
dsv = -0.0008 -0.0006  0.0003
dzp = -0.0034 -0.0040 -0.0033
dzq = -0.0154 -0.0144 -0.0118
dzv = -0.0357 -0.0398 -0.0696
dwp = -0.0038 -0.0032 -0.0039
dwq = -0.0215 -0.0238 -0.0378
dwv = -0.0612 -0.0518 -0.0335
```

Resíduos

```
-----
rp = -0.0001 -0.0000  0.0001
rq = 0.0000  0.0000 -0.0001
rv = -0.0002 -0.0002 -0.0002
rr = -0.0000 -0.0000  0.0001
rs = 0.0001  0.0001 -0.0002
rsp = 0.0000  0.0000  0.0000
rsq = 0.0000  0.0000  0.0000
rsv = 0.0000  0.0000  0.0000
rzp = -0.0017 -0.0021 -0.0016
rzq = -0.0016 -0.0017 -0.0018
rzv = -0.0017 -0.0017 -0.0021
rwp = -0.0019 -0.0015 -0.0020
rwq = -0.0020 -0.0020 -0.0019
rwv = -0.0020 -0.0020 -0.0017
```

Normas

```

norm(rp)/np = 0.0000
norm(rq)/nq = 0.0000
norm(rv)/nv = 0.0001
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0000
norm(rs)/nc = 0.0001

```

Variáveis Livres

```

yp = 0.5008 0.5119 0.4948
yq = 0.0016 0.0023 0.0065
yv = 0.0086 0.0038 -0.0083

```

Parâmetros

```

mi = 0.0006
beta = 0.1470
erro = 0.0003
gamarel = 0.0003

```

Resultados

```

Função Objetivo= 0.379

```

```

iterações = 6
tempo = 0.015
flops = 16812

```

BAR3 -- Esquema L-D

```
-----
Carga Ativa   = 1.500000    Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 0.299700    Capacidade = 0.599400
```

```
Limites de tensão (L-D)
vmin  = 0.99999
vmax  = 1.00001
```

```
Valores e Parâmetros iniciais
ng     = 3
nh     = 3
m      = 3
nnn    = 18
phi    = 0.0131
mi     = 15.0000
beta   = 0.2000
gamarel= 0.3495
erro   = 0.5706
```

```
<<<< Iteração 6 >>>>
```

```
Variáveis
```

```
-----
p  = 0.4980  0.5180  0.4914
q  = 0.0820  0.1125  0.1801
v  = 0.0000  0.0000  0.0000
r  = 0.6583  0.7038  0.7659
s  = 0.7528  0.7104  0.6429
sp = 0.5020  0.4820  0.5086
sq = 0.1178  0.0873  0.0197
sv = 0.0000  0.0000  0.0000
zp = 0.0008  0.0009  0.0008
zq = 0.0048  0.0036  0.0021
zv = 18.4037 18.4154 18.4792
wp = 0.0009  0.0007  0.0009
wq = 0.0035  0.0047  0.0466
wv = 18.4580 18.4570 18.3886
```

```
Direções
```

```
-----
dp = 0.0077 -0.0172  0.0103
dq = 0.0006  0.0002  0.0041
dv = -0.0000 -0.0000 -0.0000
dr = -0.0002  0.0001  0.0029
ds = -0.0002 -0.0004 -0.0038
dsp = -0.0075  0.0174 -0.0101
dsq = -0.0006 -0.0002 -0.0041
dsv = -0.0000 -0.0000 -0.0000
dzp = -0.0032 -0.0034 -0.0031
dzq = -0.0199 -0.0147 -0.0082
dzv = 1.4593  1.4777  1.2580
dwp = -0.0034 -0.0030 -0.0034
dwq = -0.0158 -0.0222 -0.1231
dwv = 1.3203  1.3856  1.4856
```

```
Resíduos
```

```
-----
rp = 0.0000  0.0000 -0.0000
rq = -0.0000  0.0000 -0.0001
rv = -0.0000 -0.0000 -0.0000
rr = -0.0008 -0.0008  0.0014
rs = 0.0007  0.0008 -0.0017
rsp = 0.0000 -0.0000  0.0000
rsq = 0.0000  0.0000 -0.0000
rsv = 0.0000  0.0000  0.0000
rzp = -0.0015 -0.0019 -0.0015
rzq = -0.0016 -0.0016 -0.0014
rzv = -0.0006 -0.0003 -0.0002
rwp = -0.0017 -0.0013 -0.0018
rwq = -0.0019 -0.0019 -0.0036
rwv = -0.0001 -0.0004 -0.0006
```

Normas

```
norm(rp)/np = 0.0000
norm(rq)/nq = 0.0000
norm(rv)/nv = 0.0000
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0007
norm(rs)/nc = 0.0007
```

Variáveis Livres

```
yp = 0.4981 0.5178 0.4915
yq = -0.0013 0.0011 0.0446
yv = 0.0544 0.0416 -0.0906
```

Parâmetros

```
mi = 0.0004
beta = 0.1470
erro = 0.0007
gamarel = 0.0002
```

Resultados

```
Função Objetivo= 0.379
```

```
iterações = 6
tempo = 0.016
flops = 16812
```

IEEE30 -- Esquema L-A

```
-----
Carga Ativa   = 2.834000   Capacidade = 6.000000
Carga Reativa = 2.282000   Capacidade = 2.800000
```

```
Limites de tensão (L-A)
vmin  = 0.90000
vmax  = 1.10000
```

```
Valores e Parâmetros iniciais
```

```
ng    = 6
nh    = 5
m     = 30
nnn   = 82
phi   = 0.0013
mi    = 15.0000
beta  = 0.2000
gamarel= 0.5895
erro  = 23.2387
```

```
<<<< Iteração 4 >>>>
```

```
Variáveis
```

```
-----
p  = 0.5488  0.5629  0.5548  0.5360  0.5428  0.5423
q  = 0.5757  0.5309  0.3098  0.1414  0.1572
v  = 0.1999  0.2112  0.2013  0.2038  0.1870  0.2024
    0.2070  0.2029  0.1919  0.2031  0.2134  0.1936
    0.2150  0.1993  0.1991  0.1993  0.2001  0.1997
    0.1997  0.1999  0.2001  0.2000  0.1997  0.2006
    0.1998  0.1997  0.2014  0.2020  0.1997  0.1997
r  = 0.5444  0.5627  0.5861  0.5867  0.5944  0.5864
    0.5883  0.5789  0.5834  0.5866  0.4955  0.5838
    0.5267  0.5855  0.5854  0.5855  0.5857  0.5856
    0.5856  0.5857  0.5857  0.5857  0.5856  0.5859
    0.5857  0.5856  0.5861  0.5863  0.5856  0.5856
s  = 0.8448  0.8395  0.8174  0.8184  0.8024  0.8177
    0.8192  0.8234  0.8135  0.8180  0.8821  0.8142
    0.8647  0.8165  0.8164  0.8165  0.8168  0.8167
    0.8167  0.8167  0.8168  0.8168  0.8167  0.8170
    0.8167  0.8166  0.8174  0.8176  0.8167  0.8166
sp = 0.4512  0.4371  0.4452  0.4640  0.4572  0.4577
sq = 0.3243  0.2691  0.1902  0.1586  0.1428
sv = 0.2001  0.1888  0.1987  0.1962  0.2130  0.1976
    0.1930  0.1971  0.2081  0.1969  0.1866  0.2064
    0.1850  0.2007  0.2009  0.2007  0.1999  0.2003
    0.2003  0.2001  0.1999  0.2000  0.2003  0.1994
    0.2002  0.2003  0.1986  0.1980  0.2003  0.2003
zp = 0.3364  0.2993  0.3118  0.3792  0.3545  0.3469
zq = 0.2029  0.2961  0.5767  1.1093  1.1403
zv = 1.1264  0.9854  1.1989  1.1514  1.0732  1.1731
    1.2480  1.1212  1.2134  1.1213  1.0479  1.1664
    1.0337  1.1908  1.1946  1.1912  1.1745  1.1845
    1.1833  1.1799  1.1734  1.1756  1.1837  1.1651
    1.1809  1.1837  1.1490  1.1386  1.1826  1.1830
wp = 0.6972  0.7649  0.7324  0.6351  0.6695  0.6787
wq = 1.1709  1.2724  1.5754  1.9799  2.0338
wv = 1.2439  1.4083  1.1686  1.2178  1.2361  1.1946
    1.0916  1.2476  1.1571  1.2488  1.3378  1.1995
    1.3607  1.1769  1.1732  1.1765  1.1932  1.1832
    1.1843  1.1878  1.1943  1.1920  1.1840  1.2027
    1.1867  1.1839  1.2192  1.2302  1.1850  1.1846
```

```
Direções
```

```
-----
dp  = 0.0372  0.0469  0.0439  0.0264  0.0326  0.0348
dq  = 0.0744  0.0500  0.0229  0.0135  0.0108
dv  = 0.0023  0.0077 -0.0009  0.0006  0.0088 -0.0002
    -0.0067  0.0026  0.0001  0.0023  0.0044  0.0022
    0.0045 -0.0002 -0.0003 -0.0002  0.0005  0.0000
    0.0001  0.0002  0.0005  0.0004  0.0001  0.0008
    0.0002  0.0001  0.0014  0.0017  0.0001  0.0001
dr  = 0.0061  0.0085  0.0090  0.0094  0.0076  0.0087
```

	0.0053	0.0085	0.0090	0.0095	0.0058	0.0097
	0.0068	0.0089	0.0089	0.0089	0.0090	0.0089
	0.0089	0.0089	0.0090	0.0090	0.0089	0.0090
	0.0087	0.0087	0.0090	0.0092	0.0086	0.0086
ds =	-0.0032	-0.0017	-0.0076	-0.0069	-0.0007	-0.0069
	-0.0083	-0.0049	-0.0070	-0.0059	-0.0014	-0.0061
	-0.0021	-0.0070	-0.0071	-0.0070	-0.0067	-0.0068
	-0.0068	-0.0067	-0.0066	-0.0067	-0.0068	-0.0064
	-0.0065	-0.0065	-0.0060	-0.0061	-0.0065	-0.0065
dsp =	-0.0372	-0.0469	-0.0439	-0.0264	-0.0326	-0.0348
dsq =	-0.0744	-0.0500	-0.0229	-0.0135	-0.0108	
dsv =	-0.0023	-0.0077	0.0009	-0.0006	-0.0088	0.0002
	0.0067	-0.0026	-0.0001	-0.0023	-0.0044	-0.0022
	-0.0045	0.0002	0.0003	0.0002	-0.0005	-0.0000
	-0.0001	-0.0002	-0.0005	-0.0004	-0.0001	-0.0008
	-0.0002	-0.0001	-0.0014	-0.0017	-0.0001	-0.0001
dzp =	-1.8821	-1.8338	-1.8823	-1.9050	-1.8935	-1.8895
dzq =	-2.0116	-2.1594	-3.3884	-5.4015	-5.4187	
dzv =	-4.0550	-4.1169	-4.1783	-4.1102	-4.8984	-4.0999
	-3.8003	-4.1964	-4.1514	-4.1387	-4.1841	-4.2282
	-4.0955	-4.1687	-4.1729	-4.1706	-4.1717	-4.1657
	-4.1666	-4.1684	-4.1722	-4.1715	-4.1662	-4.1641
	-4.1682	-4.1661	-4.1628	-4.1483	-4.1670	-4.1667
dwp =	-1.9403	-1.9707	-1.9291	-1.9315	-1.9355	-1.9363
dwq =	-2.0416	-2.3733	-3.3920	-5.4201	-5.3787	
dvw =	-4.2775	-4.1962	-4.1528	-4.2230	-3.6068	-4.2339
	-4.5946	-4.1341	-4.1862	-4.1913	-4.1349	-4.1133
	-4.2305	-4.1631	-4.1588	-4.1611	-4.1601	-4.1661
	-4.1652	-4.1633	-4.1596	-4.1602	-4.1655	-4.1675
	-4.1636	-4.1656	-4.1684	-4.1825	-4.1648	-4.1651

Residuos

rp =	0.0003	-0.0006	0.2675	0.0769	-0.0005	0.3898
	-0.3686	-0.0002	0.5359	-0.0787	0.0000	0.4489
	-0.0000	-0.0666	-0.0891	-0.0400	-0.0845	-0.0324
	-0.0946	-0.0195	-0.1682	0.0057	-0.0319	-0.0890
	0.0021	-0.0349	-0.0030	0.0434	-0.0231	-0.1054
rq =	0.3035	0.0001	-0.0478	0.1623	0.0001	0.1297
	-0.1503	0.0003	0.1999	0.1298	0.0001	0.2850
	0.0002	-0.0253	-0.0395	-0.0278	-0.0445	-0.0098
	-0.0333	-0.0015	-0.0976	0.0110	-0.0158	-0.0270
	0.0039	-0.0229	0.0741	0.0980	-0.0074	-0.0179
rv =	-0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0001	-0.0002
	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0001	-0.0002
	-0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002
	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002
	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002
rr =	-0.0044	0.0089	-0.0003	-0.0001	0.0045	-0.0023
	-0.0064	0.0021	0.0027	0.0009	-0.0025	-0.0003
	0.0012	-0.0001	-0.0002	-0.0001	-0.0002	0.0000
	-0.0000	-0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0000	0.0001
	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	-0.0000
rs =	-0.0015	0.0071	-0.0008	-0.0033	0.0153	-0.0107
	-0.0108	0.0096	-0.0043	-0.0004	0.0044	-0.0026
	0.0026	0.0002	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
	0.0001	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
	0.0001	0.0001	0.0001	-0.0017	0.0001	0.0001
rsp =	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rsq =	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rsv =	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rzp =	-0.8934	-0.8619	-0.8805	-0.9198	-0.9042	-0.8933
rzq =	-0.8710	-0.9356	-0.8957	-0.6165	-0.7328	
rzv =	-0.7910	-0.8046	-0.8492	-0.8324	-0.8278	-0.8316
	-0.8410	-0.8291	-0.7958	-0.8205	-0.8550	-0.7989
	-0.8422	-0.8326	-0.8336	-0.8329	-0.8307	-0.8314
	-0.8313	-0.8311	-0.8306	-0.8309	-0.8314	-0.8288
	-0.8312	-0.8314	-0.8266	-0.8231	-0.8313	-0.8313
rwp =	-1.0323	-1.0653	-1.0449	-1.0055	-1.0213	-1.0321

```

rwq = -1.0253  -0.9177  -0.8222  -1.0191  -0.8960
rwv = -0.8767  -0.8615  -0.8171  -0.8340  -0.8371  -0.8348
      -0.8238  -0.8372  -0.8720  -0.8459  -0.8103  -0.8683
      -0.8236  -0.8338  -0.8328  -0.8335  -0.8356  -0.8350
      -0.8350  -0.8353  -0.8357  -0.8355  -0.8350  -0.8376
      -0.8351  -0.8350  -0.8398  -0.8433  -0.8351  -0.8350

```

Normas

```

-----
norm(rp)/np  =  0.0970
norm(rq)/nq  =  0.0603
norm(rv)/nv  =  0.0002
norm(rsp)/npu =  0.0000
norm(rsq)/nqu =  0.0000
norm(rsv)/nvu =  0.0000
norm(rr)/nc  =  0.0040
norm(rs)/nc  =  0.0075

```

Variáveis Livres

```

-----
yp =  0.9096  1.0285  0.9753  0.7919  0.8577  0.8741
yq =  0.9680  0.9763  0.9986  0.8706  0.8935
yv =  0.1175  0.4229 -0.0302  0.0665  0.1629
      0.0215 -0.1564  0.1264 -0.0563  0.1275
      0.2899  0.0331  0.3270 -0.0139 -0.0214
      -0.0147  0.0187 -0.0013  0.0010  0.0079
      0.0209  0.0164  0.0003  0.0376  0.0058
      0.0001  0.0702  0.0917  0.0024  0.0017

```

Parâmetros

```

-----
mi      =  0.1600
beta    =  0.2000
erro    =  0.0970
gamarel =  0.0853

```

Resultados

```

-----
Função Objetivo=  0.901

```

```

iterações =  4
tempo      =  0.047
flops      =  98906
-----

```


IEEE30 – Esquema L-B

```
-----
Carga Ativa   = 2.834000   Capacidade = 6.000000
Carga Reativa = 2.282000   Capacidade = 2.800000
```

```
Limites de tensão (L-B)
vmin = 0.96000
vmax = 1.04000
```

Valores e Parâmetros iniciais

```
ng = 6
nh = 5
m  = 30
nnn = 82
phi = 0.0013
mi  = 15.0000
beta = 0.2000
gamarel = 0.5895
erro = 23.2387
```

<<<< Iteração 4 >>>>

Variáveis

```
-----
p = 0.5462  0.5601  0.5539  0.5388  0.5439  0.5421
q = 0.5684  0.5261  0.3093  0.1373  0.1541
v = 0.0762  0.0879  0.0813  0.0816  0.0656  0.0806
    0.0883  0.0811  0.0708  0.0809  0.0903  0.0709
    0.0913  0.0796  0.0795  0.0796  0.0798  0.0797
    0.0797  0.0798  0.0798  0.0798  0.0797  0.0800
    0.0798  0.0797  0.0802  0.0803  0.0797  0.0797
r = 0.5457  0.5644  0.5885  0.5887  0.5971  0.5888
    0.5923  0.5812  0.5859  0.5888  0.4968  0.5857
    0.5281  0.5883  0.5883  0.5884  0.5884  0.5884
    0.5884  0.5884  0.5885  0.5886  0.5885  0.5885
    0.5885  0.5885  0.5886  0.5886  0.5885  0.5885
s = 0.8369  0.8315  0.8107  0.8107  0.7943  0.8099
    0.8119  0.8157  0.8061  0.8102  0.8749  0.8062
    0.8570  0.8097  0.8097  0.8097  0.8097  0.8097
    0.8097  0.8097  0.8097  0.8097  0.8097  0.8098
    0.8097  0.8097  0.8098  0.8099  0.8096  0.8096
sp = 0.4538  0.4399  0.4461  0.4612  0.4561  0.4579
sq = 0.3316  0.2739  0.1907  0.1627  0.1459
sv = 0.0838  0.0721  0.0787  0.0784  0.0944  0.0794
    0.0717  0.0789  0.0892  0.0791  0.0697  0.0891
    0.0687  0.0804  0.0805  0.0804  0.0802  0.0803
    0.0803  0.0802  0.0802  0.0802  0.0803  0.0800
    0.0802  0.0803  0.0798  0.0797  0.0803  0.0803
zp = 0.3288  0.3035  0.2955  0.3503  0.3322  0.3290
zq = 0.2094  0.3251  0.5476  1.1950  1.1645
zv = 3.0773  2.1188  2.8378  2.8567  2.3202  2.9522
    2.9137  2.6546  3.2416  2.7142  2.3665  3.1647
    2.3617  2.8102  2.8190  2.8128  2.7960  2.8000
    2.7997  2.7982  2.7955  2.7969  2.7998  2.7792
    2.7988  2.7997  2.7620  2.7682  2.7994  2.7995
wp = 0.6688  0.7403  0.7136  0.6344  0.6606  0.6629
wq = 1.0996  1.2275  1.5351  1.7709  1.8605
wv = 2.5341  3.6691  2.7602  2.7368  2.7823  2.6329
    2.4184  2.9437  2.4554  2.8873  3.3729  2.5129
    3.4024  2.7893  2.7807  2.7868  2.8034  2.7994
    2.7998  2.8013  2.8040  2.8025  2.7997  2.8203
    2.8006  2.7997  2.8377  2.8317  2.8001  2.8000
```

Direções

```
-----
dp = 0.0336  0.0392  0.0426  0.0285  0.0330  0.0341
dq = 0.0657  0.0365  0.0221  0.0103  0.0089
dv = -0.0017  0.0043 -0.0006 -0.0009  0.0058 -0.0016
    -0.0047  0.0011 -0.0011  0.0005  0.0017 -0.0003
    0.0014 -0.0000 -0.0001 -0.0000  0.0001  0.0000
    0.0001  0.0001  0.0001  0.0001  0.0001  0.0002
    0.0001  0.0001  0.0003  0.0002  0.0001  0.0001
dr = 0.0148  0.0167  0.0209  0.0201  0.0111  0.0174
```

	0.0073	0.0172	0.0181	0.0187	0.0148	0.0192
	0.0166	0.0192	0.0191	0.0190	0.0187	0.0189
	0.0188	0.0187	0.0186	0.0186	0.0189	0.0186
	0.0182	0.0182	0.0181	0.0179	0.0180	0.0180
ds =	-0.0109	-0.0090	-0.0155	-0.0152	-0.0052	-0.0138
	-0.0088	-0.0118	-0.0140	-0.0133	-0.0078	-0.0142
	-0.0097	-0.0140	-0.0139	-0.0139	-0.0136	-0.0137
	-0.0136	-0.0136	-0.0135	-0.0135	-0.0137	-0.0134
	-0.0132	-0.0131	-0.0130	-0.0130	-0.0130	-0.0130
dsp =	-0.0336	-0.0392	-0.0426	-0.0285	-0.0330	-0.0341
dsq =	-0.0657	-0.0365	-0.0221	-0.0103	-0.0089	
dsv =	0.0017	-0.0043	0.0006	0.0009	-0.0058	0.0016
	0.0047	-0.0011	0.0011	-0.0005	-0.0017	0.0003
	-0.0014	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0000
	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0002
	-0.0001	-0.0001	-0.0003	-0.0002	-0.0001	-0.0001
dzp =	-1.9204	-1.7465	-1.9378	-1.9493	-1.9386	-1.9405
dzq =	-2.0504	-1.9166	-3.4499	-5.6385	-5.6744	
dzv =	-9.4644	-9.4659	-9.8928	-9.7436	-14.2437	-9.5738
	-8.1690	-10.1353	-10.1855	-9.8978	-9.6809	-10.5788
	-9.3545	-9.9069	-9.9070	-9.9070	-9.9088	-9.9073
	-9.9075	-9.9080	-9.9090	-9.9086	-9.9074	-9.9070
	-9.9078	-9.9074	-9.9068	-9.8576	-9.9076	-9.9075
dwp =	-2.0222	-2.1936	-1.9911	-1.9999	-2.0049	-2.0014
dwq =	-2.1586	-2.9587	-3.4803	-5.4327	-5.3344	
dvv =	-10.3512	-10.2664	-9.9214	-10.0770	-7.5681	-10.2591
	-12.4955	-9.6811	-9.6800	-9.9156	-10.1700	-9.3522
	-10.5651	-9.9076	-9.9075	-9.9075	-9.9057	-9.9072
	-9.9070	-9.9064	-9.9054	-9.9059	-9.9071	-9.9073
	-9.9067	-9.9070	-9.9074	-9.9568	-9.9069	-9.9069
Resíduos						

rp =	0.0010	-0.0011	0.2480	0.0837	-0.0005	0.3917
	-0.3634	-0.0004	0.5389	-0.0659	-0.0002	0.4607
	-0.0002	-0.0688	-0.0949	-0.0434	-0.0878	-0.0322
	-0.0949	-0.0210	-0.1722	0.0020	-0.0320	-0.0876
	0.0007	-0.0350	-0.0009	0.0425	-0.0237	-0.1058
rq =	0.3179	0.0005	-0.0834	0.1859	0.0003	0.1360
	-0.1803	0.0008	0.1873	0.1612	0.0004	0.3001
	0.0005	-0.0300	-0.0505	-0.0356	-0.0527	-0.0094
	-0.0339	-0.0048	-0.1062	0.0037	-0.0160	-0.0250
	0.0012	-0.0230	0.0768	0.0970	-0.0086	-0.0187
rv =	-0.0004	-0.0004	-0.0007	-0.0006	-0.0002	-0.0005
	-0.0002	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0003	-0.0006
	-0.0004	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0005	-0.0005
	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005
	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005	-0.0005
rr =	-0.0063	0.0506	-0.0006	0.0009	0.0075	-0.0040
	-0.0451	0.0025	-0.0013	0.0006	0.0018	-0.0094
	0.0103	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000
	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0000	0.0000
	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	-0.0000	0.0000
rs =	-0.0026	-0.0080	-0.0031	-0.0082	0.0535	-0.0151
	-0.0168	0.0106	0.0008	-0.0003	-0.0003	0.0051
	-0.0040	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001
	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
	0.0001	0.0001	0.0001	-0.0020	0.0001	0.0001
rsp =	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
rsq =	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rsv =	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rzp =	-0.9191	-0.8404	-0.9092	-0.9381	-0.9258	-0.9192
rzq =	-0.9039	-0.8680	-0.9147	-0.6555	-0.7710	
rzv =	-0.7553	-0.7480	-0.8171	-0.8131	-0.7692	-0.8046
	-0.8049	-0.7990	-0.7451	-0.7902	-0.8399	-0.7574
	-0.8270	-0.7890	-0.7890	-0.7890	-0.7890	-0.7890
	-0.7890	-0.7890	-0.7890	-0.7890	-0.7890	-0.7892
	-0.7890	-0.7890	-0.7894	-0.7881	-0.7890	-0.7890
rwp =	-1.0652	-1.1522	-1.0743	-1.0452	-1.0578	-1.0644

```

rwq = -1.0490 -1.0534 -0.8392 -1.0046 -0.8824
rwv = -0.8315 -0.8372 -0.7680 -0.7715 -0.8112 -0.7802
      -0.7776 -0.7863 -0.8414 -0.7950 -0.7463 -0.8269
      -0.7574 -0.7962 -0.7961 -0.7962 -0.7962 -0.7962
      -0.7962 -0.7962 -0.7962 -0.7962 -0.7962 -0.7959
      -0.7962 -0.7962 -0.7957 -0.7971 -0.7962 -0.7962

```

Normas

```

norm(rp)/np = 0.0975
norm(rq)/nq = 0.0650
norm(rv)/nv = 0.0005
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0203
norm(rs)/nc = 0.0176

```

Variáveis Livres

```

yp = 0.8862 0.9969 0.9719 0.8230 0.8724 0.8760
yq = 0.8901 0.9024 0.9874 0.5759 0.6960
yv = -0.5433 1.5504 -0.0776 -0.1199 0.4621
      -0.3193 -0.4953 0.2891 -0.7862 0.1732
      1.0064 -0.6518 1.0408 -0.0209 -0.0384
      -0.0259 0.0074 -0.0006 0.0001 0.0031
      0.0085 0.0056 -0.0001 0.0412 0.0018
      -0.0000 0.0757 0.0635 0.0007 0.0004

```

Parâmetros

```

mi = 0.1600
beta = 0.2000
erro = 0.0975
gamarel = 0.0813

```

Resultados

```

Função Objetivo= 0.899

```

```

iterações = 4
tempo = 0.047
flops = 98594

```

IEEE30 -- Esquema L-C

```
-----
Carga Ativa  = 2.834000 Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 2.282000 Capacidade = 2.800000
```

```
Limites de tensão (L-C)
vmin = 0.98000
vmax = 1.02000
```

```
Valores e Parâmetros iniciais
ng = 6
nh = 5
m = 30
nnn = 82
phi = 0.0013
mi = 15.0000
beta = 0.2000
gamarel = 0.5895
erro = 23.2387
```

```
<<<< Iteração 6 >>>>
```

```
Variáveis
```

```
-----
p = 0.3842 0.3907 0.3937 0.3830 0.3861 0.3864
q = 0.8161 0.6952 0.4394 0.1660 0.2055
v = 0.0316 0.0578 0.0391 0.0382 0.0389 0.0361
    0.0401 0.0432 0.0219 0.0413 0.0595 0.0225
    0.0601 0.0394 0.0391 0.0393 0.0399 0.0398
    0.0398 0.0399 0.0399 0.0399 0.0398 0.0403
    0.0399 0.0398 0.0398 0.0407 0.0400 0.0399
r = 0.8013 0.8230 0.8215 0.8214 0.8451 0.8211
    0.8248 0.8221 0.8152 0.8229 0.7796 0.8153
    0.7964 0.8221 0.8220 0.8221 0.8224 0.8223
    0.8223 0.8223 0.8224 0.8224 0.8223 0.8225
    0.8224 0.8224 0.8227 0.8225 0.8224 0.8224
s = 0.6073 0.6002 0.5886 0.5877 0.5500 0.5856
    0.5819 0.5899 0.5817 0.5877 0.6558 0.5824
    0.6368 0.5875 0.5873 0.5873 0.5873 0.5874
    0.5874 0.5874 0.5873 0.5873 0.5874 0.5874
    0.5872 0.5872 0.5874 0.5870 0.5871 0.5871
sp = 0.1158 0.1093 0.1063 0.1170 0.1139 0.1136
sq = 0.0839 0.1048 0.0606 0.1340 0.0945
sv = 0.0484 0.0222 0.0409 0.0418 0.0411 0.0439
    0.0399 0.0368 0.0581 0.0387 0.0205 0.0575
    0.0199 0.0406 0.0409 0.0407 0.0401 0.0402
    0.0402 0.0401 0.0401 0.0401 0.0402 0.0397
    0.0401 0.0402 0.0393 0.0400 0.0401 0.0401
zp = 0.0429 0.0464 0.0377 0.0423 0.0407 0.0410
zq = 0.0149 0.0338 0.0377 0.1164 0.0859
zv = 1.7289 0.3220 0.9326 1.0755 0.0784 1.2642
    1.2587 0.6541 2.0531 0.8413 0.4819 1.9718
    0.4703 0.9209 0.9368 0.9253 0.8967 0.9015
    0.9005 0.8987 0.8957 0.8970 0.9011 0.8807
    0.8991 0.9005 0.8645 0.9131 0.9000 0.9002
wp = 0.5734 0.6499 0.6257 0.5663 0.5796 0.5924
wq = 0.8023 0.7686 0.9977 0.3555 0.5285
wv = 0.3751 2.8249 0.8691 0.7388 1.2374 0.5857
    0.2888 1.1748 0.5134 0.9643 2.2644 0.5268
    2.3737 0.8807 0.8658 0.8765 0.9044 0.8996
    0.9007 0.9024 0.9054 0.9041 0.9000 0.9207
    0.9020 0.9006 0.9379 0.8875 0.9011 0.9009
```

```
Direções
```

```
-----
dp = 0.1004 0.0991 0.1067 0.0973 0.1006 0.0974
dq = 0.2007 0.1488 0.1002 0.0501 0.0672
dv = -0.0094 0.0109 -0.0010 -0.0026 0.0226 -0.0053
    -0.0141 0.0046 -0.0083 0.0009 0.0095 -0.0075
    0.0097 -0.0005 -0.0008 -0.0006 0.0001 -0.0000
    0.0000 0.0001 0.0001 0.0001 -0.0000 0.0004
    0.0001 0.0000 0.0007 -0.0004 0.0000 0.0000
dr = 0.0523 0.0619 0.0640 0.0626 0.0580 0.0594
```

	0.0486	0.0622	0.0583	0.0627	0.0599	0.0594
	0.0630	0.0626	0.0623	0.0624	0.0624	0.0625
	0.0624	0.0624	0.0623	0.0623	0.0625	0.0625
	0.0621	0.0621	0.0623	0.0616	0.0620	0.0620
ds =	-0.0949	-0.0937	-0.1081	-0.1076	-0.0870	-0.1054
	-0.0985	-0.1003	-0.1062	-0.1044	-0.0814	-0.1071
	-0.0888	-0.1056	-0.1055	-0.1053	-0.1048	-0.1051
	-0.1050	-0.1049	-0.1047	-0.1047	-0.1051	-0.1047
	-0.1045	-0.1045	-0.1041	-0.1040	-0.1044	-0.1044
dsp =	-0.1004	-0.0991	-0.1067	-0.0973	-0.1006	-0.0974
dsq =	-0.2007	-0.1488	-0.1002	-0.0501	-0.0672	
dsv =	0.0094	-0.0109	0.0010	0.0026	-0.0226	0.0053
	0.0141	-0.0046	0.0083	-0.0009	-0.0095	0.0075
	-0.0097	0.0005	0.0008	0.0006	-0.0001	0.0000
	-0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0000	-0.0004
	-0.0001	-0.0000	-0.0007	0.0004	-0.0000	-0.0000
dzp =	-0.1490	-0.1639	-0.1289	-0.1413	-0.1376	-0.1338
dzq =	-0.0392	-0.1125	-0.1141	-0.5325	-0.4345	
dzv =	-1.9643	-0.8877	-1.7076	-1.8296	-1.2211	-1.8555
	-1.2837	-1.6027	-1.9579	-1.7212	-1.4002	-2.0244
	-1.3692	-1.7457	-1.7413	-1.7448	-1.7564	-1.7535
	-1.7546	-1.7556	-1.7573	-1.7570	-1.7538	-1.7531
	-1.7557	-1.7545	-1.7514	-1.7405	-1.7550	-1.7549
dwp =	-0.2718	-0.2937	-0.2410	-0.2832	-0.2676	-0.2854
dwq =	0.0351	-0.1552	-0.1097	-0.3449	-0.3001	
dvw =	-1.0423	-2.3614	-1.8002	-1.6359	-0.9108	-1.4582
	-1.2945	-1.7861	-1.4212	-1.7854	-1.8757	-1.4138
	-1.8930	-1.7628	-1.7663	-1.7635	-1.7526	-1.7555
	-1.7544	-1.7534	-1.7517	-1.7520	-1.7552	-1.7555
	-1.7533	-1.7544	-1.7562	-1.7678	-1.7540	-1.7541
Resíduos						
~~~~~						
rp =	0.0133	-0.0184	0.0983	-0.0375	0.0042	0.1663
	-0.4638	-0.0075	0.3924	-0.0712	-0.0071	0.3415
	-0.0086	-0.0761	-0.1074	-0.0521	-0.0875	-0.0327
	-0.0949	-0.0208	-0.1716	0.0027	-0.0324	-0.0882
	0.0011	-0.0350	-0.0018	0.0011	-0.0236	-0.1057
rq =	0.4192	0.0066	-0.0685	0.2488	0.0074	0.3406
	-0.0192	0.0099	0.2944	0.1146	0.0055	0.4308
	0.0056	-0.0432	-0.0727	-0.0514	-0.0525	-0.0102
	-0.0339	-0.0045	-0.1053	0.0047	-0.0168	-0.0249
	0.0018	-0.0230	0.0763	0.0831	-0.0083	-0.0185
rv =	-0.0190	-0.0194	-0.0219	-0.0216	-0.0175	-0.0207
	-0.0185	-0.0201	-0.0206	-0.0209	-0.0180	-0.0209
	-0.0192	-0.0211	-0.0211	-0.0210	-0.0209	-0.0210
	-0.0210	-0.0209	-0.0209	-0.0209	-0.0210	-0.0209
	-0.0208	-0.0208	-0.0208	-0.0206	-0.0208	-0.0208
rr =	0.0078	0.2050	-0.0129	-0.0114	0.0038	-0.0488
	-0.1457	0.0277	-0.0251	0.0050	0.0244	-0.0250
	0.0213	0.0012	0.0018	0.0013	-0.0004	0.0001
	-0.0000	-0.0002	-0.0005	-0.0004	0.0001	0.0002
	-0.0002	0.0000	0.0004	0.0016	-0.0001	-0.0000
rs =	0.0350	-0.1030	-0.0269	-0.0256	0.0360	-0.0019
	0.1231	-0.0060	0.0227	-0.0066	-0.0160	0.0208
	-0.0116	-0.0017	-0.0025	-0.0018	0.0005	-0.0002
	0.0000	0.0002	0.0006	0.0005	-0.0001	-0.0002
	0.0002	0.0000	-0.0005	-0.0063	0.0001	0.0001
rsp =	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
rsq =	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
rsv =	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rzp =	-0.0357	-0.0407	-0.0308	-0.0341	-0.0330	-0.0327
rzq =	-0.0199	-0.0538	-0.0331	-0.0517	-0.0498	
rzv =	-0.0997	-0.0366	-0.0698	-0.0783	-0.0139	-0.0852
	-0.0900	-0.0577	-0.0784	-0.0684	-0.0633	-0.0781
	-0.0624	-0.0702	-0.0705	-0.0703	-0.0698	-0.0699
	-0.0699	-0.0698	-0.0698	-0.0698	-0.0699	-0.0695
	-0.0698	-0.0699	-0.0691	-0.0709	-0.0699	-0.0699

```

rwp = -0.1205 -0.1301 -0.1221 -0.1200 -0.1200 -0.1222
rwq = -0.1499 -0.1573 -0.1194 -0.0840 -0.0872
rvv = -0.0356 -0.1130 -0.0706 -0.0615 -0.0891 -0.0519
      -0.0266 -0.0807 -0.0648 -0.0720 -0.0806 -0.0650
      -0.0820 -0.0702 -0.0699 -0.0701 -0.0706 -0.0705
      -0.0705 -0.0705 -0.0706 -0.0705 -0.0705 -0.0709
      -0.0705 -0.0705 -0.0713 -0.0694 -0.0705 -0.0705

```

Normas

```

-----
norm(rp)/np = 0.0814
norm(rq)/nq = 0.0834
norm(rv)/nv = 0.0179
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0762
norm(rs)/nc = 0.0512

```

Variáveis Livres

```

-----
yp = 0.9147 0.9942 0.9818 0.9070 0.9250 0.9379
yq = 0.7874 0.7347 0.9599 0.2391 0.4426
yv = -1.3538 2.5029 -0.0636 -0.3368 1.1590
      -0.6785 -0.9699 0.5207 -1.5396 0.1230
      1.7825 -1.4450 1.9034 -0.0402 -0.0710
      -0.0488 0.0076 -0.0019 0.0002 0.0036
      0.0098 0.0072 -0.0011 0.0401 0.0029
      0.0000 0.0734 -0.0256 0.0011 0.0008

```

Parâmetros

```

-----
mi      = 0.0064
beta    = 0.2000
erro    = 0.0834
gamarel = 0.0196

```

Resultados

```

-----
Função Objetivo= 0.450

```

```

iterações = 6
tempo     = 0.078
flops     = 146187
-----

```

IEEE30 – Esquema L-D

```
-----
Carga Ativa   = 2.834000   Capacidade = 3.000000
Carga Reativa = 2.282000   Capacidade = 2.800000
```

```
Limites de tensão (L-D)
vmin = 0.99999
vmax = 1.00001
```

```
Valores e Parâmetros iniciais
ng   = 6
nh   = 5
m    = 30
nnn  = 82
phi  = 0.0013
mi   = 15.0000
beta = 0.2000
gamarel = 0.5895
erro = 23.2387
```

```
<<<< Iteração 10 >>>>
```

```
Variáveis
```

```
-----
p = 0.4802  0.4781  0.4885  0.4964  0.4971  0.4952
q = 0.3921  0.7123  0.3204  0.0852  0.0769
v = 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
r = 0.8771  0.8856  0.8967  0.8976  0.9113  0.8981
    0.8988  0.8946  0.8981  0.8981  0.8453  0.8980
    0.8633  0.8980  0.8980  0.8981  0.8981  0.8981
    0.8981  0.8981  0.8981  0.8981  0.8981  0.8980
    0.8979  0.8979  0.8977  0.8970  0.8977  0.8977
s = 0.5096  0.4945  0.4761  0.4740  0.4437  0.4721
    0.4684  0.4785  0.4730  0.4733  0.5612  0.4738
    0.5338  0.4738  0.4737  0.4736  0.4734  0.4736
    0.4735  0.4734  0.4733  0.4734  0.4737  0.4736
    0.4739  0.4739  0.4741  0.4744  0.4741  0.4741
sp = 0.0198  0.0219  0.0115  0.0036  0.0029  0.0048
sq = 0.5079  0.0877  0.1796  0.2148  0.2231
sv = 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
zp = 0.0001  0.0002  0.0001  0.0001  0.0001  0.0001
zq = 0.0019  0.0003  0.0010  0.0032  0.0053
zv = 26.3023  13.7606  21.6333  22.9786  22.9358  31.4103
    24.9970  16.2539  22.1274  21.4974  19.8146  22.5879
    19.1605  21.6189  21.6189  21.6189  21.6189  21.6189
    21.6189  21.6189  21.6189  21.6189  21.6189  21.5974
    21.6189  21.6189  21.5799  22.8921  21.6189  21.6189
wp = 0.1499  0.1595  0.2089  0.3989  0.4306  0.4351
wq = 0.0003  0.0036  0.0009  0.0014  0.0009
wv = 17.7984  28.1344  21.6034  20.3368  27.1520  16.8103
    20.8174  30.6828  19.8527  21.7406  22.2182  19.2727
    22.7409  21.6186  21.6186  21.6186  21.6186  21.6186
    21.6186  21.6186  21.6186  21.6186  21.6186  21.6401
    21.6186  21.6186  21.6577  20.5110  21.6186  21.6186
```

```
Direções
```

```
-----
dp = 0.0281  0.0433  0.0292  0.0124  0.0108  0.0131
dq = -0.0002 -0.0157 -0.0082  0.0024  0.0016
dv = -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
    -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
    -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
    -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
    -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
dr = -0.0284 -0.0293 -0.0276 -0.0277 -0.0336 -0.0282
```

```

-0.0309 -0.0287 -0.0284 -0.0288 -0.0272 -0.0285
-0.0272 -0.0287 -0.0287 -0.0287 -0.0288 -0.0289
-0.0289 -0.0289 -0.0289 -0.0289 -0.0289 -0.0290
-0.0293 -0.0295 -0.0293 -0.0286 -0.0295 -0.0295
ds = -0.0514 -0.0502 -0.0594 -0.0585 -0.0412 -0.0551
-0.0443 -0.0533 -0.0570 -0.0574 -0.0518 -0.0585
-0.0550 -0.0585 -0.0583 -0.0581 -0.0576 -0.0581
-0.0579 -0.0578 -0.0574 -0.0574 -0.0580 -0.0575
-0.0570 -0.0571 -0.0565 -0.0550 -0.0566 -0.0566
dsp = -0.0281 -0.0433 -0.0292 -0.0124 -0.0108 -0.0131
dsq = 0.0002 0.0157 0.0082 -0.0024 -0.0016
dsv = -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
dzp = -0.0005 -0.0008 -0.0004 -0.0004 -0.0003 -0.0004
dzq = -0.0074 -0.0010 -0.0035 -0.0139 -0.0224
dzv = -66.8866 -64.5883 -68.1093 -67.9565 -75.3923 -65.9652
-69.2337 -64.5578 -67.0232 -68.1206 -67.2009 -67.7897
-67.9682 -68.1200 -68.1201 -68.1200 -68.1199 -68.1199
-68.1199 -68.1199 -68.1199 -68.1199 -68.1199 -68.1200
-68.1199 -68.1199 -68.1201 -67.9996 -68.1199 -68.1199
dwp = -0.0606 -0.0380 -0.0284 -0.0128 -0.0047 -0.0465
dwq = -0.0013 -0.0439 -0.0042 -0.0050 -0.0031
dvw = -66.8455 -64.5244 -68.1274 -67.9750 -75.0631 -66.0821
-69.5285 -64.4798 -67.0618 -68.1183 -67.1604 -67.7797
-67.9785 -68.1190 -68.1189 -68.1190 -68.1192 -68.1192
-68.1192 -68.1192 -68.1192 -68.1192 -68.1192 -68.1191
-68.1192 -68.1192 -68.1190 -68.0085 -68.1192 -68.1192

Resíduos
-----
rp = -0.0039 0.0035 0.1405 0.0535 0.0188 0.3433
-0.3948 0.0052 0.4990 -0.0586 -0.0045 0.3894

-0.0047 -0.0620 -0.0821 -0.0352 -0.0900 -0.0320
-0.0950 -0.0221 -0.1751 -0.0001 -0.0320 -0.0870
-0.0000 -0.0351 0.0008 -0.0204 -0.0241 -0.1061
rq = 0.1977 0.0012 -0.0419 0.2082 -0.0020 0.1000
-0.0093 0.0032 0.0788 0.2292 0.0018 0.1610
0.0022 -0.0161 -0.0252 -0.0184 -0.0580 -0.0091
-0.0341 -0.0072 -0.1121 -0.0003 -0.0161 -0.0228
-0.0001 -0.0231 0.0805 0.1122 -0.0091 -0.0191
rv = -0.0290 -0.0288 -0.0308 -0.0305 -0.0273 -0.0295
-0.0272 -0.0293 -0.0303 -0.0306 -0.0294 -0.0308
-0.0302 -0.0309 -0.0309 -0.0308 -0.0307 -0.0309
-0.0308 -0.0308 -0.0307 -0.0307 -0.0309 -0.0308
-0.0307 -0.0308 -0.0306 -0.0297 -0.0307 -0.0307
rr = 0.0037 0.1856 -0.0204 -0.0192 -0.0344 -0.0471
-0.0605 0.0228 -0.0238 0.0004 0.0233 -0.0147
0.0138 0.0002 0.0002 0.0002 0.0001 0.0001
0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001
0.0001 0.0001 0.0002 -0.0065 0.0001 0.0001
rs = -0.0291 -0.0623 0.0032 -0.0119 0.1472 -0.0538
-0.0223 0.0550 -0.0346 0.0003 0.0342 -0.0462
0.0453 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001
0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001
0.0001 0.0001 0.0002 -0.0038 0.0001 0.0001
rsp = 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
rsq = 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
rsv = -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
rzp = -0.0002 -0.0003 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0002
rzq = -0.0029 -0.0008 -0.0012 -0.0011 -0.0017
rzv = -0.0014 -0.0012 -0.0015 -0.0015 -0.0026 -0.0011
-0.0010 -0.0018 -0.0019 -0.0015 -0.0011 -0.0021
-0.0009 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015
-0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015
-0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0014 -0.0015 -0.0015

```



```

rwp = -0.0080 -0.0102 -0.0077 -0.0052 -0.0048 -0.0068
rwq = -0.0007 -0.0028 -0.0007 -0.0011 -0.0007 -0.0007
rvv = -0.0016 -0.0017 -0.0015 -0.0016 -0.0008 -0.0019
      -0.0021 -0.0011 -0.0011 -0.0015 -0.0019 -0.0009
      -0.0021 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015
      -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0015
      -0.0015 -0.0015 -0.0015 -0.0016 -0.0015 -0.0015

```

Normas

```

norm(rp)/np = 0.0910
norm(rq)/nq = 0.0497
norm(rv)/nv = 0.0255
norm(rsp)/npu = 0.0000
norm(rsq)/nqu = 0.0000
norm(rsv)/nvu = 0.0000
norm(rr)/nc = 0.0611
norm(rs)/nc = 0.0576

```

Variáveis Livres

```

yp = 0.6300 0.6374 0.6973 0.8953 0.9277 0.9303
yq = -0.0015 0.0034 -0.0001 -0.0019 -0.0045
yv = -8.5038 14.3738 -0.0299 -2.6419 4.2162
      -14.6000 -4.1796 14.4289 -2.2747 0.2433
      2.4036 -3.3152 3.5804 -0.0003 -0.0004
      -0.0003 -0.0002 -0.0002 -0.0002 -0.0002
      -0.0002 -0.0002 -0.0002 0.0427 -0.0002
      -0.0002 0.0779 -2.3811 -0.0002 -0.0002

```

Parâmetros

```

mi = 0.0000
beta = 0.2000
erro = 0.0910
gama = 0.0433
gamarel = 0.0002

```

Resultados

```

Função Objetivo= 0.718

```

```

iterações = 10
tempo = 0.125
flops = 245115

```

IEEE30 – Esquema L-E

```
-----
Carga Ativa   = 2.834000   Capacidade = 6.000000
Carga Reativa = 2.282000   Capacidade = 2.800000
-----
```

```
Limites de tensão (L-E)
vmin  = 0.97000
vmax  = 1.03000
```

```
Valores e Parâmetros iniciais
```

```
ng    = 6
nh    = 5
m     = 30
nnn   = 82
phi   = 0.0013
mi    = 15.0000
beta  = 0.2000
gamarel = 0.5895
erro  = 23.2387
```

```
<<<< Iteração 4 >>>>
```

```
Variáveis
```

```
-----
p  = 0.5441  0.5589  0.5525  0.5404  0.5444  0.5418
q  = 0.5620  0.5250  0.3086  0.1342  0.1515
v  = 0.0562  0.0673  0.0613  0.0612  0.0455  0.0604
    0.0686  0.0609  0.0513  0.0606  0.0695  0.0509
    0.0706  0.0597  0.0596  0.0597  0.0598  0.0598
    0.0598  0.0598  0.0598  0.0598  0.0598  0.0600
    0.0598  0.0598  0.0601  0.0601  0.0598  0.0598
r  = 0.5421  0.5608  0.5845  0.5848  0.5948  0.5854
    0.5906  0.5778  0.5826  0.5852  0.4926  0.5822
    0.5240  0.5848  0.5848  0.5848  0.5850  0.5849
    0.5849  0.5849  0.5850  0.5850  0.5849  0.5850
    0.5850  0.5850  0.5852  0.5852  0.5851  0.5851
s  = 0.8389  0.8332  0.8133  0.8130  0.7955  0.8119
    0.8129  0.8175  0.8083  0.8122  0.8764  0.8084
    0.8587  0.8120  0.8119  0.8119  0.8119  0.8119
    0.8119  0.8119  0.8118  0.8118  0.8119  0.8119
    0.8118  0.8118  0.8119  0.8119  0.8117  0.8117
sp = 0.4559  0.4411  0.4475  0.4596  0.4556  0.4582
sq = 0.3380  0.2750  0.1914  0.1658  0.1485
sv = 0.0638  0.0527  0.0587  0.0588  0.0745  0.0596
    0.0514  0.0591  0.0687  0.0594  0.0505  0.0691
    0.0494  0.0603  0.0604  0.0603  0.0602  0.0602
    0.0602  0.0602  0.0602  0.0602  0.0602  0.0600
    0.0602  0.0602  0.0599  0.0599  0.0602  0.0602
zp = 0.3279  0.3068  0.2897  0.3358  0.3213  0.3204
zq = 0.2200  0.3374  0.5373  1.2622  1.2027
zv = 4.2098  2.6077  3.6934  3.7892  3.0250  3.9424
    3.7176  3.4328  4.3772  3.5646  3.0488  4.3478
    3.0180  3.6657  3.6749  3.6684  3.6525  3.6554
    3.6552  3.6540  3.6520  3.6532  3.6552  3.6343
    3.6546  3.6552  3.6171  3.6366  3.6550  3.6550
wp = 0.6561  0.7344  0.7062  0.6409  0.6621  0.6601
wq = 1.0506  1.2183  1.5142  1.6512  1.7494
wv = 3.1377  5.0976  3.6150  3.5083  3.4801  3.3369
    3.1307  3.8726  3.1272  3.7477  4.5078  3.1540
    4.5971  3.6448  3.6357  3.6421  3.6579  3.6550
    3.6552  3.6563  3.6583  3.6572  3.6552  3.6760
    3.6558  3.6552  3.6935  3.6739  3.6554  3.6553
-----
```

```
Direções
```

```
-----
dp  = 0.0310  0.0346  0.0408  0.0293  0.0328  0.0333
dq  = 0.0586  0.0293  0.0212  0.0083  0.0075
dv  = -0.0018  0.0037  -0.0004  -0.0009  0.0044  -0.0016
    -0.0037  0.0009  -0.0008  0.0003  0.0011  -0.0004
    0.0009  0.0000  -0.0000  0.0000  0.0001  0.0000
    0.0000  0.0000  0.0001  0.0001  0.0000  0.0001
    0.0000  0.0000  0.0001  0.0000  0.0000  0.0000
dr  = 0.0168  0.0180  0.0246  0.0232  0.0081  0.0188
-----
```

	0.0023	0.0186	0.0199	0.0205	0.0162	0.0216
	0.0189	0.0216	0.0214	0.0212	0.0207	0.0210
	0.0208	0.0207	0.0205	0.0205	0.0210	0.0205
	0.0200	0.0200	0.0198	0.0192	0.0197	0.0197
ds =	-0.0122	-0.0101	-0.0177	-0.0171	-0.0041	-0.0146
	-0.0051	-0.0127	-0.0149	-0.0146	-0.0088	-0.0157
	-0.0112	-0.0154	-0.0153	-0.0152	-0.0148	-0.0150
	-0.0149	-0.0148	-0.0146	-0.0146	-0.0150	-0.0146
	-0.0143	-0.0142	-0.0140	-0.0138	-0.0140	-0.0140
dsp =	-0.0310	-0.0346	-0.0408	-0.0293	-0.0328	-0.0333
dsq =	-0.0586	-0.0293	-0.0212	-0.0083	-0.0075	
dsv =	0.0018	-0.0037	0.0004	0.0009	-0.0044	0.0016
	0.0037	-0.0009	0.0008	-0.0003	-0.0011	0.0004
	-0.0009	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0000
	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0001
	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
dzp =	-1.9974	-1.7308	-2.0245	-2.0218	-2.0148	-2.0237
dzq =	-2.1385	-1.8107	-3.5543	-5.9027	-5.9769	
dzv =	-12.6854	-12.3785	-13.2831	-13.0801	-20.6675	-12.7601
	-10.6572	-13.7292	-13.8706	-13.2981	-12.8499	-14.5598
	-12.3156	-13.3036	-13.3033	-13.3035	-13.3049	-13.3041
	-13.3042	-13.3045	-13.3051	-13.3048	-13.3042	-13.3040
	-13.3044	-13.3042	-13.3038	-13.2219	-13.3043	-13.3043
dwp =	-2.1261	-2.4107	-2.0838	-2.1031	-2.1054	-2.0959
dwq =	-2.2837	-3.4782	-3.6112	-5.4808	-5.3517	
dvw =	-13.9032	-14.0915	-13.3249	-13.5328	-9.8602	-13.8829
	-17.6454	-12.8867	-12.8440	-13.3090	-13.8553	-12.3053
	-14.5469	-13.3043	-13.3046	-13.3044	-13.3030	-13.3038
	-13.3037	-13.3034	-13.3029	-13.3032	-13.3038	-13.3039
	-13.3036	-13.3037	-13.3039	-13.3865	-13.3037	-13.3037

Residuos

rp =	0.0010	-0.0011	0.2345	0.0751	-0.0003	0.3843
	-0.3383	-0.0004	0.5404	-0.0641	-0.0002	0.4618
	-0.0002	-0.0688	-0.0952	-0.0436	-0.0884	-0.0321
	-0.0950	-0.0213	-0.1729	0.0014	-0.0320	-0.0874
	0.0005	-0.0350	-0.0007	0.0418	-0.0238	-0.1059
rq =	0.3130	0.0005	-0.0830	0.1919	0.0003	0.1402
	-0.1927	0.0008	0.1791	0.1688	0.0004	0.2975
	0.0006	-0.0301	-0.0511	-0.0359	-0.0540	-0.0093
	-0.0340	-0.0054	-0.1077	0.0027	-0.0160	-0.0247
	0.0008	-0.0230	0.0771	0.0969	-0.0087	-0.0188
rv =	-0.0005	-0.0004	-0.0009	-0.0008	-0.0002	-0.0006
	-0.0002	-0.0005	-0.0006	-0.0006	-0.0004	-0.0007
	-0.0005	-0.0007	-0.0007	-0.0007	-0.0006	-0.0006
	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006
	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006
rr =	-0.0047	0.1156	-0.0011	0.0031	0.0018	-0.0052
	-0.1017	0.0030	-0.0092	0.0004	0.0103	-0.0193
	0.0204	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0001	0.0000
	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0000	0.0000
	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000
rs =	-0.0040	-0.0336	-0.0046	-0.0122	0.0745	-0.0184
	0.0054	0.0117	0.0059	-0.0001	-0.0046	0.0114
	-0.0096	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0001	0.0001	0.0001	-0.0021	0.0001	0.0001
rsp =	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
rsq =	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	
rsv =	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
rzp =	-0.9620	-0.8458	-0.9538	-0.9729	-0.9638	-0.9608
rzq =	-0.9567	-0.8424	-0.9463	-0.6914	-0.8140	
rzv =	-0.7641	-0.7387	-0.8267	-0.8273	-0.7572	-0.8155
	-0.8184	-0.8082	-0.7357	-0.7980	-0.8625	-0.7535
	-0.8457	-0.7936	-0.7934	-0.7936	-0.7940	-0.7939
	-0.7939	-0.7940	-0.7940	-0.7940	-0.7939	-0.7948
	-0.7939	-0.7939	-0.7955	-0.7944	-0.7939	-0.7939
rwp =	-1.1116	-1.2433	-1.1187	-1.0996	-1.1091	-1.1117

```

rwq = -1.0815  -1.1810  -0.8647  -1.0063  -0.8817
rwv = -0.8337  -0.8579  -0.7697  -0.7684  -0.8310  -0.7802
      -0.7737  -0.7885  -0.8608  -0.7984  -0.7340  -0.8401
      -0.7476  -0.8028  -0.8031  -0.8029  -0.8025  -0.8026
      -0.8026  -0.8025  -0.8025  -0.8025  -0.8026  -0.8017
      -0.8025  -0.8026  -0.8009  -0.8021  -0.8025  -0.8026

```

Normas

```

-----
norm(rp)/np  =  0.0961
norm(rq)/nq  =  0.0654
norm(rv)/nv  =  0.0005
norm(rsp)/npu =  0.0000
norm(rsq)/nqu =  0.0000
norm(rsv)/nvu =  0.0000
norm(rr)/nc  =  0.0456
norm(rs)/nc  =  0.0254

```

Variáveis Livres

```

-----
yp =  0.8723  0.9866  0.9691  0.8455  0.8851  0.8816
yq =  0.8307  0.8809  0.9769  0.3889  0.5467
yv = -1.0721  2.4899 -0.0784 -0.2809  0.4551
      -0.6054 -0.5869  0.4398 -1.2500  0.1832
      1.4590 -1.1938  1.5791 -0.0210 -0.0393
      -0.0263  0.0054 -0.0004  0.0000  0.0023
      0.0063  0.0041 -0.0001  0.0417  0.0013
      -0.0000  0.0764  0.0373  0.0005  0.0003

```

Parâmetros

```

-----
mi      =  0.1600
beta    =  0.2000
erro    =  0.0961
gamarel =  0.0799

```

Resultados

```

-----
Função Objetivo=  0.898

```

```

iterações = 4
tempo      =  0.047
flops      = 98435
-----

```