ABORDAGENS INTERATIVAS PARA O
PROBLEMA DE CORTES DE PEÇAS IRREGULARES
BIDIMENSIONAIS

Maxwell Adolpho Orlandi

orientador : Dr. Marcos Nereu Arenales

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em "Ciências de Computação e Matemática Aplicada e Computacional".

São Carlos
novembro/1992

A minha esposa,

Regina;

aos meus pais,

Lázaro e Vilma;

as minhas irmãs,

Cássia e Veridiana;

a vó Ângela e tia Zilá;

e ao Fabinho e Valdemir.

"Nunca lhe dão
um desejo sem também
lhe darem
o poder de realizá-lo."

Richard Bach

"Não existe
um problema que
não ofereça uma dádiva
para você.
Você procura os problemas
porque precisa das dádivas
por eles oferecidas."

Richard Bach

A DEUS

... que incomparável e inconfundível
na sua infinita bondade, compreendeu os
meus anseios e me deu a necessária coragem
para atingir o meu objetivo.

Um agradecimento especial
ao orientador Marcos que não mediu
esforços em me auxiliar, tornando
ainda mais agradável o desenvol-
vimento deste projeto; a Capes e
Fapesp pelos auxílios financeii-
ros recebidos e a todos que
direta ou indiretamente contribuíram
para o meu trabalho.

RESUMO

O problema de cortes irregulares consiste em determinar a melhor maneira de cortar placas retangulares para produzir peças irregulares. Cada peça deve ser produzida para atender a uma demanda pré-definida. A perda total de material deve ser minimizada. A estratégia de resolução consiste em agrupar peças irregulares em módulos retangulares e definir padrões de corte regulares. A partir de então, define-se um padrão de corte irregular. O modelo de geração de colunas de Gilmore e Gomory foi utilizado.

ABSTRACT

The irregular two-dimensional cutting problem consists in determining the best way of cutting large rectangles in order to provide irregular pieces. A previous defined demand of each piece has to be satisfied. The objective is to minimize the total waste. The solving strategy consists in gathering irregular pieces into a rectangular module and then define regular cutting patterns. After that, one defines a irregular cutting pattern using CAD tools. The Gilmore & Gomory's model of column generating was used.

ÍNDICE

Capítulo 1 - Introdução.

1.1. Problema de Corte	1.
1.2. Classificação dos Problemas de Corte	1.
1.3. Padrão de Corte	5.
1.4. Tipos de Corte Bidimensional	5.
1.5. Geração de Padrões de Corte Bidimensionais	11.
1.6. Sistemas de Apoio à Produção	13.
1.7. Objetivos Pretendidos com a Pesquisa	14.

Capítulo 2 - Formulação Matemática.

2.1. Modelo Matemático Bidimensional	16.
2.2. Geração de Colunas	19.
2.3. Considerações Finais	23.

Capítulo 3 - Geração de Padrões de Corte Regulares Bidimensionais.

3.1. Considerações Iniciais	25.
3.2. Programação Dinâmica	26.
3.2.1. Programação Dinâmica por Haims e Freeman [10].....	27.
3.2.2. Programação Dinâmica por Beasley [5].....	33.
3.2.2.1. Redução dos Cortes	34.
3.2.2.2. Fórmulas Recursivas	38.
3.3. Representação em Grafo-E/OU	38.
3.4. Considerações Finais	40.

Capítulo 4 - Geração de Padrões de Corte Irregulares
Bidimensionais - Abordagem Semi-Automática.

4.1. Considerações Iniciais	42.
4.2. Módulos Retangulares	43.
4.3. Heurísticas - Geração Semi-automática	46.
4.3.1. Heurística ($\Delta L, \Delta W$)	48.
4.3.2. Heurística de Prioridades	51.
4.4. Considerações Finais	55.

Capítulo 5 - Implementações e Resultados Computacionais.

5.1. Considerações Iniciais	56.
5.2. Sistemas Computacionais	56.
5.3. Exemplo de Problema de Cortes Irregulares	58.
5.3.1. Resultados Computacionais com Heurística ($\Delta L, \Delta W$)	61.
5.3.2. Resultados Computacionais com Heurística de Prioridades	65.
5.3.3. Resultados Computacionais com Heurística Híbrida	70.
5.3.4. Outros testes	73.
5.3.4.1. Execução com Todos os Padrões de Cortes Gerados pelas Três Heurísticas	73.
5.3.4.2. Execução sem Intervenção do Operador ..	73.

Capítulo 6 - Conclusões e Considerações Finais

Bibliografia	78.
--------------------	-----

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.

1.1. PROBLEMA DE CORTE

O problema de corte (*Cutting Problem*) tem sido amplamente estudado e discutido por pesquisadores da área de Otimização, devido ao vasto horizonte em que pode ser aplicado e, também, devido aos bons resultados que se tem encontrado em tentativas de solucioná-lo.

Por conveniência ou padronização por parte dos fornecedores, peças maiores são cortadas para a obtenção de peças menores que estão dentro de especificações pré-determinadas.

Considere um conjunto de peças menores que devam ser obtidas, em quantidades previamente estabelecidas, cortando-se peças maiores. O problema de corte consiste em determinar como cortar as peças maiores, de forma a atender as demandas das peças menores, da melhor maneira possível; por exemplo, a minimização da perda de material.

Associado ao problema de corte, encontra-se o problema da determinação das dimensões das peças maiores que deverão ser cortadas. O problema citado é conhecido como Problema da Classificação (*Assortment Problem*) e, é encontrado principalmente em indústrias auto-suficientes na fabricação das peças maiores. Este problema não será discutido neste trabalho, atendo-se apenas aos cortes.

1.2. CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE

Os problemas de corte são classificados de acordo com as formas das peças produzidas e também de acordo com as dimensões das mesmas.

Problemas de cortes regulares são aqueles onde as peças produzidas e as perdas de material possuem formas retangulares e problemas de cortes irregulares produzem peças e perdas de quaisquer formas; as figuras 1.1.a e 1.1.b apresentam problemas de cortes regulares e cortes irregulares respectivamente. Em geral, as peças maiores são produzidas em formas retangulares tanto para problemas de cortes regulares como problemas de cortes irregulares devido a sua facilidade de tratamento; uma exceção a esta afirmação provém da indústria de calçados onde as peças de couro animal são totalmente irregulares. Neste trabalho as atenções estarão voltadas para casos onde as peças maiores são de formas retangulares.

fig. 1.1.a - cortes regulares.

fig. 1.1.b - cortes irregulares.

a parte hachurada representa perdas de material

Quando apenas uma das dimensões das peças maiores e das peças produzidas tem importância na determinação dos cortes trata-se de problema de corte unidimensional. Aplicações do problema de corte unidimensional encontram-se na indústria de papel, indústria têxtil, fabricação de tubos metálicos e de PVC, barras de ferro, entre outros. Nestes exemplos, são fabricados grandes rolos correspondendo às peças maiores e obtém-se as peças desejadas

fazendo-se cortes nos rolos. Gilmore e Gomory [8] propuseram um procedimento computacional para o problema levando-se em consideração as restrições de demanda e, para a determinação dos cortes, introduziram um algoritmo lexicográfico que se apresentou extremamente eficiente. Arcaro [4] também tratou o problema unidimensional apresentando alternativas para a indústria de papel, explorando como objetivo a maximização do lucro obtido com a venda das unidades menores.

O problema de corte bidimensional é definido pela relevância de duas das dimensões das peças na determinação dos cortes. Indústria de móveis, indústria de vidro, chapas de aço, são exemplos de problemas de cortes regulares bidimensionais e, indústria de roupas, construção naval, juntas de motores, calçados, são exemplos onde se aplicam problemas de cortes irregulares bidimensionais.

Análogo ao caso bidimensional, o problema de corte tridimensional considera as três dimensões das peças na determinação dos cortes. Cortes tridimensionais são encontrados em problemas de carregamento de paletes e contêineres de navios e meios de transporte em geral. Observe que retirar partes de uma peça maior é o processo inverso ao de agrupar peças menores para a obtenção da mesma. Portanto, o problema de carregamento pode ser tratado como problema de corte. Recentemente, Morábito [15] tratou o problema do empacotamento para carregamento de paletes e contêineres utilizando buscas no grafo-E-OU.

Problemas multidimensionais também aparecem com certa frequência na prática. Considere um Problema de Alocação de Tarefas onde estão disponíveis por dia de trabalho, R_1 recursos do tipo 1, R_2 recursos do tipo 2, ..., R_m recursos do tipo m, e T horas. Um conjunto de n tarefas independentes devem ser executadas consumindo-se r_{1i} recursos do tipo 1, r_{2i} recursos do tipo 2, ..., r_{mi} recursos do tipo m, e t_i horas de trabalho com $i = 1, \dots, n$. A decisão a ser tomada sobre o problema consiste em determinar a maneira mais eficiente de alocar as n tarefas nos dias de trabalho

de forma a minimizar o número de dias gastos. Considerando-se m recursos, o problema teria solução no espaço R^{m+1} .

A figura 1.2 representa um Problema de Alocação de Tarefas simplificado, onde se considera apenas um único recurso. As coordenadas R (recurso qualquer) e T (tempo em horas) podem ser interpretadas como sendo respectivamente a largura e o comprimento de uma peça maior bidimensional, onde as peças maiores representam os dias de trabalho. Analogamente, as peças menores são definidas pelas coordenadas r_i e t_i , $i = 1, \dots, n$. Portanto, minimizar o número de dias de trabalho gastos tem o mesmo efeito que minimizar o número de peças maiores cortadas. A parte hachurada representa a ociosidade do recurso, o que corresponderia à perda de material em problemas de corte. (veja Morábito [15])

fig 1.2 - Problema de Alocação de Tarefas.

1.3. PADRÃO DE CORTE

Entende-se por padrão de corte, a forma como as peças maiores podem ser cortadas para a produção das peças menores destinadas aos clientes, que pode ser representado pelo vetor $a^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, onde a_i representa o número de peças demandadas i produzidas pelo padrão, e m é o número de tipos de peças menores demandadas.

1.4 TIPOS DE CORTE BIDIMENSIONAL

Classificam-se os tipos de corte bidimensional entre cortes regulares e cortes irregulares.

Os cortes regulares são definidos pela produção de novos retângulos quando se corta retângulos maiores. Dentro da classificação de cortes regulares tem-se cortes guilhotinados onde cada corte realizado produz dois novos retângulos e, cortes não-guilhotinados caso contrário. As figuras 1.3.a e 1.3.b representam padrões de corte guilhotinado e não-guilhotinado respectivamente.

fig. 1.3.a - Padrão de corte guilhotinado.

fig. 1.3.b - Padrão de corte não-guilhotinado.

Classificam-se ainda cortes regulares guilhotinados como estagiados e multi-estagiados. Cada estágio em cortes regulares guilhotinados é definido por cortes em uma mesma direção e, o estágio imediatamente posterior é determinado por cortes perpendiculares aos cortes do estágio anterior. Um padrão de corte guilhotinado N-estágios permite cortes até o n-ésimo estágio, enquanto que um padrão de corte guilhotinado multi-estagiado ou não-estagiado, não é restrito ao número de estágios. Um padrão de corte guilhotinado 5-estágios está sendo representado pela figura 1.4, onde o número do estágio está anotado ao lado do corte.

Os padrões de corte regulares podem ser também classificados como padrões de corte homogêneos quando são formados por apenas um tipo de peça regular e, heterogêneos quando são formados por combinações de peças regulares diferentes.

fig. 1.4 - Padrão de corte guilhotinado 5-estágios.

Os padrões de corte irregulares também possuem suas classificações. Antes de descrevê-las, faz-se necessária a introdução de alguns conceitos importantes.

Os problemas de cortes irregulares podem ser transformados em problemas de cortes regulares quando se agrupam peças irregulares no interior de retângulos como descrito por Haims e Freeman [10].

Os retângulos que contém em seu interior arranjos de peças irregulares são referenciados como módulos retangulares ou apenas módulos.

Define-se um módulo simples quando se forma um retângulo contendo apenas uma peça irregular como mostrado na figura 1.5.a.

Um módulo composto é definido por um retângulo contendo combinação de duas ou mais peças irregulares. Um módulo composto homogêneo é constituído por apenas um tipo de peça irregular, enquanto que combinação de dois ou mais tipos de peças irregulares determina um módulo composto heterogêneo. As figuras 1.5.b e 1.5.c representam módulos compostos homogêneo e heterogêneo respectivamente.

fig. 1.5.a - Módulos simples; a parte hachurada representa perdas de material.

fig. 1.5.b - Módulo composto homogêneo.

fig. 1.5.c - Módulo composto heterogêneo.

Com a heurística de agrupar peças irregulares em módulos retangulares, pode-se considerar os seguintes padrões de corte irregulares :

a) *homogêneo* : padrão de corte constituído por apenas um tipo de módulo simples ou apenas um tipo de módulo composto homogêneo. Pode-se considerar ainda como padrão de corte homogêneo aquele formado com módulos simples e compostos homogêneos desde que ambos os tipos de módulos contenham o mesmo tipo de peça irregular. Um padrão de corte irregular homogêneo está sendo mostrado pela figura 1.6.

b) *semi-homogêneo* : padrão de corte constituído por apenas um tipo de módulo composto heterogêneo. A figura 1.7 representa um padrão de corte irregular semi-homogêneo.

c) *heterogêneo* : padrão de corte constituído por combinação de dois ou mais tipos de módulos retangulares diferentes onde dois ou mais tipos de peças irregulares aparecem no padrão como mostrado na figura 1.8.

fig. 1.6 - Padrão de corte irregular homogêneo.

fig. 1.7 - Padrão de corte irregular semi-homogêneo.

fig 1.8 - Padrão de corte irregular heterogêneo.

1.5. GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS

A resolução de problemas de corte é fortemente dependente da maneira de se gerar eficientemente os padrões de corte, pois em geral o problema da determinação dos padrões de corte é de natureza combinatorial e dificilmente será obtida uma solução ótima. Deve-se portanto, buscar heurísticas capazes de proporcionar a obtenção de boas soluções.

A obtenção de padrões de corte regulares bidimensionais restringe-se apenas à geração automática com algoritmos capazes de fornecer boas soluções. Vários autores trataram o problema de cortes regulares bidimensionais, sendo alguns deles especificados a seguir.

Gilmore e Gomory [9] utilizaram Programação Dinâmica na tentativa de solucionar o problema referenciado e, mais tarde a mesma técnica foi utilizada por Haims e Freeman [10], embora estes dois últimos tiveram como problema original a determinação de cortes irregulares.

Herz [11] mais tarde abordou o mesmo problema criando um conjunto de discretizações no retângulo representante da peça maior, onde os elementos deste conjunto representavam os possíveis cortes. Mais tarde Beasley [5] introduziu uma heurística que limitava o número de elementos do conjunto de discretizações de Herz para tratar problemas grandes.

Adamowicz e Albano [1] abordaram o problema utilizando a heurística de criar faixas contendo um único tipo de peça regular, e obtiveram boas soluções resolvendo-se o problema onde as faixas passaram a ser as novas peças regulares. O método de resolução utilizado apresenta bons resultados computacionais principalmente quando as peças a serem cortadas são extremamente grandes em relação às peças produzidas.

Morábito [12] e Morábito et al. [13] trataram o problema regular bidimensional guilhotinado utilizando como ferramenta de resolução uma busca em grafo-E/OU (*And/Or-Graph*) ou hipergrafo (*hipergraph*) e, fizeram uso do conjunto de discretizações de Herz [11] para determinar possíveis cortes.

Com relação à obtenção de padrões de corte irregulares bidimensionais, encontram-se na literatura três formas diferentes de gerá-los; geração manual, automática e semi-automática.

A geração manual necessita de um operador projetista que tenta visualmente, encontrar a melhor disposição das peças menores sobrepostas às peças maiores. Este procedimento tem fornecido bons resultados em relação aos objetivos propostos, mas possui o inconveniente de altos gastos em relação ao tempo computacional. Farley [7] propôs um sistema de geração manual de padrões de corte via sistemas CAD (*Computer-Aided Design*), onde a geração de padrões de corte aparece como uma das fases do planejamento de produção de uma indústria têxtil.

A segunda forma de se obter padrões de corte irregulares bidimensionais, é a geração automática, onde algoritmos refinados têm sido propostos com o intuito de aliviar o esforço do operador projetista, contribuindo consideravelmente para uma substancial diminuição do tempo computacional. Alguns autores especificados a seguir se utilizaram da geração automática de padrões de corte e apresentaram bons resultados comparativos entre soluções encontradas e tempo computacional.

Haims e Freeman [10] agruparam peças irregulares no interior de retângulos e resolveram o problema como se fosse de cortes regulares onde a geração automática é empregada.

Albano e Sapuppo [3] não recorreram a módulos retangulares e propuseram um sistema computacional onde se busca avaliar as possíveis combinações das peças irregulares escolhendo como critério de alocação de uma peça, aquela combinação com as peças já alocadas que proporcionar a menor perda à esquerda, ou seja, quando tenta-se alocar uma peça irregular supõe-se um corte vertical imaginário na peça maior que origine dois retângulos tal que o retângulo à direita seja sem alocação e, escolhe-se a situação onde a perda no retângulo à esquerda é a menor dentre todas as situações possíveis. As situações diferentes são geradas por rotações da peça menor que se deseja colocar.

Dagli e Tatoglu [6] também não recorreram à estratégia da

criação de módulos retangulares e trataram o problema de determinar padrões de cortes irregulares bidimensionais estabelecendo prioridades para cada peça irregular através de informações de Programação Linear. Inicialmente é feita uma avaliação de possíveis acoplamentos entre as duas peças irregulares de maior prioridade decidindo-se em favor da situação que proporcionar a menor área retangular. Com a nova peça formada pela descrição acima testa-se agora seu melhor acoplamento com a terceira peça irregular de maior prioridade e assim por diante até que todas as peças tenham sido avaliadas ou a peça maior tenha sido totalmente alocada.

A terceira forma de se obter padrões de corte irregulares bidimensionais, combina geração automática e geração manual. Após obtida uma solução automática, o operador se incumbe de interativamente com o sistema, melhorar a solução obtida. Esta forma de gerar padrões de corte irregulares é conhecida como geração semi-automática de padrões de corte. Albano [2] tratou o problema propondo um sistema computacional que partindo-se de módulos retangulares já determinados, encontra soluções preliminares determinadas através de resoluções de problemas regulares e, aceita refinamentos interativos por parte do operador. O sistema proposto por Albano é iterativo, ou seja, após encontrada uma solução, fica a critério do operador determinar quais partes da peça maior apresentam alocações que lhe pareçam aceitáveis e, para as partes não satisfatórias, busca-se uma nova solução.

1.6. SISTEMAS DE APOIO À PRODUÇÃO

Com o intuito de auxiliar a determinação dos padrões de corte, tem sido introduzido nos sistemas de resolução de problemas de cortes irregulares, sistemas gráficos conhecidos como CADS (*Computer-Aided Design System*).

Os padrões de corte produzidos são armazenados em dispositivos

de memória secundária, como por exemplo discos rígidos, para eventuais utilizações posteriores. Para as indústrias que se utilizam do corte manual, o CADS fornece cópias dos padrões de corte para a visualização humana e, para indústrias que se utilizam do corte automático, o CADS produz informações capazes de controlar automaticamente as máquinas cortantes. O processo onde juntamos CADS e corte automático é chamado CAD-CAM (*Computer-Aided Manufacturing*), e não será objeto deste estudo.

A utilização dos sistemas CAD não está restrita apenas à recomposição do(s) padrão(ões) de corte determinado(s) durante a resolução do problema proposto, mas também servindo de ferramenta na determinação dos cortes realizados quando da utilização da geração manual como feito por Farley [7] e geração semi-automática.

1.7. OBJETIVOS PRETENDIDOS COM A PESQUISA

O objetivo principal desta pesquisa é absorver conhecimentos sobre problemas de cortes irregulares bidimensionais e sistemas computacionais afins existentes em bibliografia e, propor sistemas computacionais alternativos que tratem computacionalmente o problema.

Os sistemas computacionais alternativos que se pretende propor irão abordar o problema de cortes irregulares bidimensionais com restrições de demanda. Para determinar os padrões de corte será explorada a geração semi-automática. Uma solução automática será obtida agrupando-se peças irregulares no interior de módulos retangulares e a partir destes, resolve-se o problema de cortes regulares bidimensionais. As melhoras interativas proporcionadas na solução automática obtida serão feitas através da utilização de CADS (mais precisamente o software AUTOCAD).

No capítulo 2 será estudada a formulação matemática para o problema de corte proposta por Gilmore e Gomory [8], bem como os critérios matemáticos adotados para a determinação de padrões de

corte que realmente proporcionem ganhos à solução do problema.

No capítulo 3 serão estudados métodos de resolução de problemas de cortes regulares bidimensionais como Programação Dinâmica e buscas no grafo-E/OU sendo que pelo menos um deles será implementado e utilizado pelo sistema computacional que se pretende propor.

O capítulo 4 tratará da geração semi-automática de padrões de corte irregulares bidimensionais, onde vamos sugerir heurísticas que podem auxiliar a determinação de padrões de corte.

Finalmente no capítulo 5 será apresentada a descrição dos sistemas computacionais implementados bem como a maneira de se utilizar o CADS (AUTOCAD) na determinação dos padrões de corte. Neste capítulo serão apresentados também, resultados computacionais obtidos e as devidas conclusões constatadas durante o desenvolvimento deste projeto de pesquisa.

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.

2.1. MODELO MATEMÁTICO BIDIMENSIONAL

Gilmore e Gomory [8] inicialmente formularam o problema de corte com restrições de demanda como um modelo de Programação Linear, onde se busca diminuir os gastos de material resultante dos cortes. Estes autores apresentaram também o desenvolvimento teórico que determina como deve ser feita a geração de padrões de corte e incorporação dos mesmos por parte do conjunto de restrições do problema. No capítulo que segue, pretende-se estudar o modelo matemático proposto por Gilmore e Gomory bem como o processo de geração de padrões de corte para o problema de cortes irregulares bidimensional.

O objetivo a ser explorado neste estudo será a minimização das perdas de material ocorridas quando se corta peças maiores em combinações de m diferentes tipos de peças menores irregulares, considerando-se apenas um tipo de peça maior retangular cujas dimensões de comprimento e largura são L e W respectivamente. Outros objetivos podem ser explorados, como feito na literatura, onde foram propostos minimização do número de peças maiores cortadas, a maximização dos lucros, etc.

A decisão do problema é determinar qual o número de vezes que cada padrão de corte será utilizado na solução de mínima perda, correspondendo ao vetor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, com n definindo o número de padrões de corte e de forma a atender às demandas das peças menores.

A perda de material para o k -ésimo padrão de corte, pode ser definida por :

$$p_k = L.W - \sum_{i=1}^m A_i \cdot a_{ik} = A - \sum_{i=1}^m A_i \cdot a_{ik}$$

onde

- A : área da peça maior;
 A_i : área da peça irregular do tipo i ;
 a_{ik} : número de peças irregulares do tipo i obtidas no padrão de corte k , que é representado pelo vetor $[a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}]$;
 p : vetor $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ das perdas para os n padrões de corte.

A figura 2.1.b mostra um padrão de corte irregular para uma peça maior retangular de dimensões de comprimento e largura iguais a 43 e 28 respectivamente, formado por combinações das peças irregulares especificadas pela figura 2.1.a onde a perda de material é 292.9381305 e o vetor que representa o padrão de corte é $[24, 16, 4]^T$.

$$A_1 = 28.27433388 \quad A_2 = 12.56637061 \quad A_3 = 7.853981634$$

fig. 2.1.a - Peças irregulares.

fig. 2.1.b - Padrão de corte irregular.

Seja x_k o número de peças maiores cortadas segundo o padrão de corte k e uma demanda de peças irregulares $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ que deve ser satisfeita. O problema de corte é definido por (Gilmore e Gomory [8]):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_k p_k x_k \\ (2.1.1) \quad & \text{s.a.} \quad b_i(1-\tau_i) \leq \sum_k a_{ik} x_k \leq b_i(1+\tau_i), \quad i = 1, \dots, m. \\ & x_k \geq 0 \text{ e inteiro,} \end{aligned}$$

onde τ_i é uma fração de tolerância para a peça i , isto é, qualquer quantidade da peça i no intervalo $[b_i(1-\tau_i), b_i(1+\tau_i)]$ será aceita pelo cliente. [Define-se $(b_l)_i = b_i(1-\tau_i)$ e $(b_u)_i = b_i(1+\tau_i)$ correspondendo à demanda inferior e demanda superior respectivamente.]

Definindo-se as variáveis de folga, o problema pode ser escrito por :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_k p_k x_k \\ (2.1.2) \quad & \text{s.a.} \quad \sum_k a_{ik} x_k + s = b_u \\ & 0 \leq s \leq b_u - b_l \end{aligned}$$

onde $a_k = [a_{1k} \ a_{2k} \ \dots \ a_{mk}]^T$ e $s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$.

O problema acima pode ser resolvido por métodos de Programação Linear, em especial o método simplex, mesmo sabendo que o número de peças maiores cortadas para cada padrão de corte deva ser inteiro. Relaxar esta restrição de integralidade é válido se a quantidade demandada for suficientemente grande e arredondar a solução é uma estratégia aceitável. Na formulação do problema representada por (2.1.2), a restrição de integralidade já foi abolida. Para alguns

problemas, integralidade não é restrição (veja Arcaro [4]).

2.2. GERAÇÃO DE COLUNAS

Suponha conhecidos n padrões de corte e considere uma partição básica (B, N) obtida da matriz dos coeficientes do problema (2.1.2), onde B representa a matriz das colunas básicas e N a matriz das colunas não-básicas. Uma solução para o problema é obtida pela resolução do sistema linear

$$(B, N).x = B.x_B + N.x_N = b_u,$$

cuja solução geral é

$$x_B = B^{-1}.b_u - B^{-1}.N.x_N.$$

Para o problema de corte (2.1.2) os valores das variáveis representadas por x_N são iguais a 0, ou ainda o limite superior se alguma variável de folga s_i é não-básica no limite superior.

A função objetivo pode ser restrita a apenas soluções que satisfaçam as restrições, substituindo as variáveis básicas pelas não-básicas.

Sejam $\hat{x}_N$ o valor das variáveis não-básicas e

$$\hat{x}_B = B^{-1}.b_u - B^{-1}.N.\hat{x}_N$$

o valor das variáveis básicas para a solução corrente.

A estratégia simplex consiste em perturbar a solução básica alterando apenas um valor das variáveis não-básicas. Suponha que $\hat{x}_N = 0$ (variável não-básica no limite inferior. O outro caso, $\hat{x}_{N_j} = s_i = (b_u)_i - (b_1)_i$ segue de forma análoga).

Estratégia simplex :

$$x_{N_j} = \hat{x}_{N_j} + \varepsilon$$

$$x_{N_k} = \hat{x}_{N_k}, \quad k = 1, \dots, n-m, \quad k \neq j.$$

As variáveis básicas são, então, alteradas para :

$$x_B = \hat{x}_B - B^{-1} \cdot a_{N_j} \cdot \varepsilon$$

e a função objetivo para esta nova solução vale :

$$f(x) = f(\hat{x}) + r_j \cdot \varepsilon$$

com $r_j = p_{N_j} - \lambda^T \cdot a_{N_j}$, onde $\lambda^T = p_B^T \cdot B^{-1}$ é o vetor multiplicador simplex.

Observando a expressão da função objetivo acima, conclui-se que para o problema de minimização, deve-se procurar a coluna não-básica que possui o valor $r_j = p_{N_j} - \lambda^T \cdot a_{N_j}$ mais negativo para torná-la básica.

O valor r_j pode ser expressado em função da área das peças menores irregulares e também da área da peça maior em questão, como a seguir :

$$r_j = p_{N_j} - \lambda^T \cdot a_{N_j} = A - \sum_{i=1}^m (A_i + \lambda_i) \cdot a_{iN_j} = A - \sum_{i=1}^m \Lambda_i \cdot a_{iN_j}$$

onde $\Lambda_i = A_i + \lambda_i$, $i = 1, \dots, m$.

Uma consideração importante é que esta coluna procurada pode não fazer parte do conjunto de padrões de corte já existentes, e

sim será obtida resolvendo-se o seguinte sub-problema :

$$(2.2.1) \quad \max \quad \sum_{i=1}^m \Lambda_i \cdot a_i$$

tal que $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ defina um padrão de corte.

O sub-problema acima que consiste em determinar um bom padrão de corte é conhecido como Problema de Corte Bidimensional e por sua semelhança e forma de tratamento será referenciado neste texto como Problema da Mochila (*knapsack Problem*) Bidimensional. Como mencionado no capítulo anterior dificilmente será obtida a solução ótima para o problema da mochila bidimensional. Uma exceção a esta afirmação surge no problema de cortes regulares bidimensional 2-estágios, onde a solução ótima é encontrada resolvendo-se $(m+1)$ problemas da mochila unidimensional, como tratado por Gilmore e Gomory [9].

Caso o padrão de corte obtido resolvendo-se o problema da mochila proporcione coeficiente r_j não-negativo, o problema original (2.1.2) estará resolvido e a solução procurada será dada por $(\hat{x}_B, \hat{x}_N)$.

Em particular, os padrões de corte homogêneos possuem grande importância para o problema em questão (2.1.2) e podem ser determinados facilmente. Isto pode ser visto facilmente através do exemplo dado a seguir.

Um padrão de corte irregular bidimensional homogêneo representado pela figura 2.2.b formado por colocação de módulos retangulares simples contendo uma peça irregular do tipo 1 e dimensões 6 e 6 como mostrado na figura 2.2.a, para uma peça maior retangular de dimensões de comprimento e largura iguais a 43 e 25 respectivamente, é representado por

$$a = [0, \dots, \lfloor 43/6 \rfloor, \lfloor 25/6 \rfloor, \dots, 0]^T$$

onde a operação $\lfloor . \rfloor$ denota divisão inteira.

fig. 2.2.a - Módulo retangular simples.

fig. 2.2.b - Padrão de corte irregular homogêneo.

Além da facilidade de obtenção, o aspecto mais importante em se considerar padrões de corte homogêneos é a certeza de se ter uma solução inicial para o problema, pois a matriz formada pelas m colunas que representam os m padrões de corte homogêneos é matriz diagonal, formando-se assim uma partição básica, pré-requisito para a resolução do problema (2.1.2) por Programação Linear.

2.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formulação matemática proposta por Gilmore e Gomory [8] e aqui representada por (2.1.2) é geral e abrange todos os problemas de corte independentemente das formas das peças menores produzidas e das dimensões das mesmas. Esta formulação, portanto, também representa o problema de cortes irregulares bidimensional e pode ser utilizada com sucesso nesta pesquisa se o problema for resolvido por Programação Linear.

Os padrões de corte irregulares homogêneos que representam uma solução inicial, devem ser determinados antes do início da resolução do problema para que seus vetores representantes formem o conjunto de restrições iniciais para o problema. Caso desejado, os padrões de corte semi-homogêneos também podem fazer parte da solução inicial.

Os demais padrões de corte, ou seja, os padrões de corte irregulares heterogêneos serão obtidos resolvendo-se o sub-problema da mochila irregular bidimensional (2.2.1) iterativamente e seus vetores representantes serão acrescentados ao conjunto de restrições do problema à medida que forem sendo determinados. Como as peças irregulares serão agrupadas em módulos retangulares, a mochila irregular bidimensional pode ser resolvida como sendo uma mochila regular bidimensional.

No capítulo seguinte serão estudadas técnicas de obtenção de padrões de corte regulares bidimensionais, ou seja, as atenções estarão voltadas para a resolução do problema da mochila regular bidimensional que se entende ser um sub-ítem da mochila irregular

bidimensional.

CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE REGULARES BIDIMENSIONAIS

3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A resolução do problema da mochila regular bidimensional se constitui em um item importante não somente quando se deseja resolver problemas de cortes regulares bidimensionais, mas também quando se tem por objetivo resolver problemas de cortes irregulares bidimensionais, pois uma estratégia, já mencionada, bastante comum em problemas de cortes irregulares consiste em criar módulos retangulares contendo peças irregulares.

Neste capítulo pretende-se estudar técnicas de resolução de problemas da mochila regular bidimensional como Programação Dinâmica e buscas no grafo-E/OU, sendo que pelo menos uma das duas técnicas será implementada com o intuito de gerar uma solução preliminar por meio de módulos retangulares. As técnicas de resolução de problemas da mochila regular bidimensional foram amplamente discutidas em Morábito [15] e fazem parte deste texto com o objetivo de um texto mais completo. O texto referente a este capítulo será desenvolvido com a preocupação de determinar padrões de corte onde supõe-se que as peças maiores e as peças menores (finais ou módulos retangulares) são regulares.

A peça maior regular que será cortada tem dimensões de comprimento e largura iguais a L e W respectivamente e as p peças menores têm dimensões de comprimento e largura iguais a l_i e w_i , $i = 1, \dots, p$. O valor econômico v_i da peça menor regular do tipo i determina o ganho de produzi-la e, este valor é definido em função da área da peça regular mais a i -ésima componente do vetor multiplicador simplex (veja item 2.2); se o problema for de cortes irregulares, o valor v_i é definido em função da área das peças irregulares que estão contidas no módulo retangular e em função das componentes do vetor multiplicador simplex. Com a definição das características das peças maiores e menores, buscar-se-á um padrão

de corte regular que maximize o valor total, o qual é definido pela soma dos valores das peças que compõem o padrão de corte.

3.2 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Programação Dinâmica aplicada ao problema da mochila regular bidimensional consiste em analisar possíveis cortes em uma peça maior com dimensões de comprimento e largura representadas pelo par (L,W) , pressupondo que todos retângulos de dimensões menores que (L,W) já tenham sido otimizados. Alguns autores como Gilmore e Gomory [9], Beasley [5], Haims e Freeman [10] e Albano [2] estudaram Programação Dinâmica na tentativa de solucionar seus problemas, onde nas duas últimas referências acima foi utilizada a heurística da criação de módulos retangulares, para o tratamento do caso irregular.

A cada estágio da Programação Dinâmica aplicada ao problema da mochila regular bidimensional, é encontrada a melhor alocação para retângulos menores que (L,W) correspondendo a retângulos (x,y) definidos como retângulos intermediários.

A Programação Dinâmica induz ao uso de fórmulas recursivas ou às vezes fórmulas iterativas. Seja a função $F(x,y)$ chamada de Função Valor Econômico, igual ao valor objetivo ótimo encontrado para o retângulo intermediário (x,y) . Associado à função F , para cada (x,y) encontra-se o vetor de alocação $A(x,y) = [A(x,y)_1, A(x,y)_2, \dots, A(x,y)_p]$, onde $A(x,y)_k$ é o número de peças retangulares do tipo k na melhor alocação para o retângulo intermediário (x,y) .

A seguir serão vistas duas maneiras diferentes de se utilizar a Programação Dinâmica na tentativa de solucionar o problema de cortes regulares bidimensional, uma proposta por Haims e Freeman [10] e a outra proposta por Beasley [5].

3.2.1 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA POR HAIMS E FREEMAN [10]

Haims e Freeman como já mencionado anteriormente introduziram a heurística da criação de módulos retangulares como uma forma de tratar o caso de cortes irregulares bidimensionais, e propuseram um procedimento heurístico alternativo para se resolver o problema de cortes regulares bidimensionais através de Programação Dinâmica.

Algumas restrições foram adicionadas ao problema para facilitar a determinação de um padrão de corte no sentido de aliviar o esforço computacional, tais como :

1) a orientação dos retângulos em relação à peça maior será fixada sem permissão de rotações;

2) cada retângulo será colocado em algum canto dos retângulos intermediários;

Com estas restrições será determinado um padrão de corte regular bidimensional guilhotinado não-estagiado sem garantias de que este padrão seja solução ótima guilhotinada não-estagiada, pois o item 2 exclui as soluções onde o retângulo pode ser colocado nas demais posições do retângulo intermediário. Esta restrição caso necessário, pode ser eliminada buscando-se assim solução ótima embora com esforço computacional muito maior. O algoritmo referente ao método de Haims e Freeman [10] está detalhado a seguir.

Passo 1 : Reorganizar os retângulos de tal forma que

$$\frac{v_1}{a_1} > \frac{v_2}{a_2} > \dots > \frac{v_p}{a_p},$$

onde $a_i = l_i \cdot w_i$ é a área do retângulo menor i . Em caso de empate, os autores sugeriram escolher em favor do retângulo de maior v_i .

A ordenação acima é importante, pois neste método proposto por Haims e Freeman [10] determina-se p padrões de corte, sendo que os padrões de corte 1, 2, ..., $p-1$ são padrões de corte auxiliares e o p -ésimo padrão é o padrão de corte procurado. Esta idéia ficará

mais clara nos próximos passos.

Considere a função $F_i(x,y)$ como sendo a Função Valor Econômico para o i -ésimo padrão de corte auxiliar, considerando-se apenas colocações de peças do tipo 1 ao tipo 1, no retângulo intermediário (x,y) . Analogamente para o Vetor de Alocação $A_i(x,y)$. Inicialmente os valores para

$$\begin{aligned} F_0(x,y) &= 0 & \forall x,y \\ F_i(0,0) &= 0 & \forall i \\ F_i(x,0) &= 0 & \forall x, \forall i \\ F_i(0,y) &= 0 & \forall y, \forall i \end{aligned}$$

e os correspondentes valores para os vetores de alocação são nulos.

Passo 2 : Calcular os valores de $F_i(x,y)$. Para os retângulos intermediários tal que $x < l_1$ e/ou $y < w_1$, $F_i(x,y) = 0$ e $A_i(x,y) = 0$ e, para o retângulo intermediário (x,y) tal que $x = l_1$ e $y = w_1$, $F_i(x,y) = v_1$ e $A_i(x,y) = (1,0,\dots,0)$.

Para os valores onde $x > l_1$ e $y > w_1$ o retângulo do tipo 1 é alocado com combinações de retângulos remanescentes (como mostrado na figura 3.1) :

- 1) A, B + C : corte guilhotinado horizontal em $y - w_1$;
- 2) A + B, C : corte guilhotinado vertical em l_1 .

A situação de retângulos remanescentes A, B, C pode ser descartada, pois é resultante de cortes nas outras duas situações.

fig. 3.1 - Alocação do retângulo menor do tipo 1.

Portanto o valor de $F_1(x,y)$ para todos os retângulos intermediários (x,y) tal que $x > l_1$ e $y > w_1$ é

$$F_1(x,y) = \max \{ \begin{array}{l} 1) v_1 + F_1(x-l_1, w_1) + F_1(x, y-w_1), \\ 2) v_1 + F_1(x-l_1, y) + F_1(l_1, y-w_1), \\ 3) F_0(x,y) \end{array} \}$$

e o correspondente vetor de alocação é

$$A_1(x,y) = \{ \begin{array}{l} 1) e_1 + A_1(x-l_1, w_1) + A_1(x, y-w_1), \\ 2) e_1 + A_1(x-l_1, y) + A_1(l_1, y-w_1), \\ 3) A_0(x,y) \end{array} \}$$

onde $e_1^T = (1, 0, \dots, 0)$. Observe que inicialmente procura-se um padrão de corte contendo apenas peças regulares do tipo 1.

Passo 3 : Os demais padrões de corte correspondendo aos padrões 2, 3, ..., p são determinados cada um em função do padrão de corte auxiliar imediatamente anterior. Faça $i = 2$ e vá para o passo 4.

Passo 4 : Para cada padrão de corte auxiliar i calcular os valores de $F_i(x,y)$ e $A_i(x,y)$ para todos os retângulos intermediários (x,y) . O par (x,y) varia de $(1,1)$ a (L,W) da seguinte forma : y varia de 1 a W e x varia de 1 a L para cada y . A decisão sobre as alocações recaem sobre os cinco casos que serão vistos a seguir.

a) Para os valores $x < l_1$ e/ou $y < w_1$ como mostrado pela

figura 3.2.a

$$F_1(x, y) = F_{1-1}(x, y)$$

$$A_1(x, y) = A_{1-1}(x, y).$$

Vá para o passo 5.

b) Para $x = l_1$ e $y = w_1$ como mostrado pela figura 3.2.b

$$F_1(x, y) = \max \{ \begin{array}{l} 1) v_1 \\ 2) F_{1-1}(x, y) \end{array} \} \text{ e}$$

$$A_1(x, y) = \{ \begin{array}{l} 1) e_1 \\ 2) A_{1-1}(x, y) \end{array} \}.$$

Vá para o passo 5.

c) Para $x = l_1$ e $y > w_1$ existe um retângulo remanescente como mostrado pela figura 3.2.c e

$$F_1(x, y) = \max \{ \begin{array}{l} 1) v_1 + F_1(l_1, y-w_1) \\ 2) F_{1-1}(x, y) \end{array} \} \text{ e}$$

$$A_1(x, y) = \{ \begin{array}{l} 1) e_1 + A_1(l_1, y-w_1) \\ 2) A_{1-1}(x, y) \end{array} \}.$$

Vá para o passo 5.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

fig. 3.2 - Avaliação do retângulo intermediário (x,y) com a colocação do retângulo menor (l_i, w_i) .

d) Para $x > l_1$ e $y = w_1$ existe um retângulo remanescente como mostrado pela figura 3.2.d com

$$F_1(x, y) = \max \{ \begin{array}{l} 1) v_1 + F_1(x-l_1, w_1) \\ 2) F_{1-1}(x, y) \end{array} \} \quad \text{com}$$

$$A_1(x, y) = \{ \begin{array}{l} 1) e_1 + A_1(x-l_1, w_1) \\ 2) A_{1-1}(x, y) \end{array} \}.$$

Vá para o passo 5.

e) Para a situação mostrada pela figura 3.2.e com $x > l_1$ e $y > w_1$ existem as situações de retângulos remanescentes

- 1) A+B, C : corte vertical em l_1 ;
- 2) A, B+C : corte horizontal em $y - w_1$.

A avaliação para o retângulo intermediário (x, y) é então dada por

$$F_1(x, y) = \max \{ \begin{array}{l} 1) v_1 + F_1(x-l_1, y) + F_1(l_1, y-w_1) \\ 2) v_1 + F_1(x-l_1, w_1) + F_1(x, y-w_1) \\ 3) F_{1-1}(x, y) \end{array} \} \quad \text{e}$$

$$A_1(x, y) = \{ \begin{array}{l} 1) e_1 + A_1(x-l_1, y) + A_1(l_1, y-w_1) \\ 2) e_1 + A_1(x-l_1, w_1) + A_1(x, y-w_1) \\ 3) A_{1-1}(x, y) \end{array} \}.$$

Vá para o passo 5.

Passo 5 : As dimensões do retângulo intermediário (x,y) são incrementadas como segue :

a) Se x for menor que L, adicione 1 a x e vá para o passo 4; caso contrário vá para o item b).

b) Se y for menor que W, adicione 1 a y, reinicialize x com o valor 1 e vá para o passo 4; caso contrário vá para o passo 6.

Passo 6 : Adicione 1 a i. Se $i \leq p$, vá para o passo 4; se $i > p$ todos os retângulos menores já foram alocados no padrão de corte procurado e o algoritmo terminou. O padrão de corte procurado é o p-ésimo padrão de corte auxiliar.

A implementação proposta por Haims e Freeman [10] é demasiadamente custosa do ponto de vista computacional, pois é necessário calcular p-1 padrões de corte auxiliares para posteriormente calcular o p-ésimo padrão de corte auxiliar que é o padrão de corte procurado. Além disso, deve-se manter as informações de alocação do último padrão de corte auxiliar a cada determinação de um novo padrão de corte auxiliar, aumentando-se com isso a quantidade de informações armazenadas.

A seguir será estudada a abordagem de Programação Dinâmica usada por Beasley [5] que tinha como objetivo resolver problemas de cortes regulares bidimensionais. Nesta nova maneira de se utilizar Programação Dinâmica são exploradas particularidades do problema com o intuito de aliviar o esforço computacional.

3.2.2 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA POR BEASLEY [5]

Beasley propôs um método exato baseado em Programação Dinâmica que produz padrões de corte regulares guilhotinados bidimensionais não-estagiados ótimos. Antes de apresentar as fórmulas recursivas de Beasley é necessário estudar algumas maneiras de reduzir as avaliações de corte e a forma como Beasley trata o caso de

problemas grandes propondo um método heurístico.

3.2.2.1 - REDUÇÃO DOS CORTES

DISCRETIZAÇÃO

As posições na peça maior onde serão efetuados os cortes para determinar padrões de corte regulares bidimensionais, fazem parte de um conjunto restrito de candidatos a possíveis cortes. Herz [11] mostrou que o corte regular guilhotinado bidimensional pode ser restrito ao conjunto das combinações lineares inteiras não-negativas das dimensões dos retângulos menores. Assim, o corte vertical pode ser reduzido ao seguinte conjunto :

$$L = \{ x / x = \sum_{i \in N} \alpha_i \cdot l_i \leq L - \min \{l_j\}, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \}$$

(3.2.2.1.1)

onde o conjunto N contém os índices dos retângulos menores.

Analogamente, o corte horizontal pode ser reduzido ao seguinte conjunto :

$$W = \{ y / y = \sum_{i \in N} \gamma_i \cdot w_i \leq W - \min \{w_j\}, \gamma_i \geq 0 \text{ e inteiro} \}$$

(3.2.2.1.2)

Embora tendo-se a possibilidade de somente avaliar os possíveis pontos de corte definidos pelos elementos de L e W em contraposição a avaliar um conjunto maior de pontos aleatórios para cortes na peça maior, ainda o esforço computacional pode ser demasiadamente grande caso os conjuntos L e W apresentem um número grande de elementos, inviabilizando assim a resolução do problema.

HEURÍSTICA DE BEASLEY [5]

Beasley sugeriu uma heurística que limita os conjuntos L e W para no máximo M elementos, onde M é um valor pré-determinado. A determinação do conjunto L pela heurística de Beasley é descrita da seguinte forma (a determinação do conjunto W é análoga) :

passo 1 :

Construa o conjunto L dos possíveis pontos de corte guilhotinado vertical através da definição (3.2.2.1.1) onde todos os retângulos menores são considerados, ou seja, $N = \{1, \dots, p\}$. Represente por $|L|$ o número de elementos de L .

passo 2 :

Enquanto $|L| > M$, faça

i) determine $j / l_j = \min \{l_i, i \in N\}$;

ii) redefina $N \leftarrow N - \{j\}$;

iii) com o novo conteúdo de N reconstrua L através da definição (3.2.2.1.1).

Embora a heurística de Beasley [5] torne viável a resolução de problemas grandes, quanto maior for o número de possíveis cortes descartados, maior será a possibilidade de perda da solução ótima procurada. Em Morábito e Arenales [14], exemplos foram dados onde padrões de corte de fácil obtenção, como 2-estágios, podem ser perdidos.

DUPLICAÇÕES

Além de avaliar somente pontos candidatos a possíveis cortes, evitar duplicações de corte também reduz o esforço computacional.

Simetria.

Dois pontos x_1 e x_2 do conjunto L (para o conjunto W a explicação é análoga) são considerados causadores de duplicação se $x_1 \neq x_2$ e os cortes sobre cada um destes pontos produzem retângulos semelhantes. A figura 3.3.a representa um caso de duplicação onde o corte vertical em x_1 produz os mesmos retângulos que o corte vertical em $x_2 = L - x_1$. Nesta situação é conveniente e suficiente não avaliar cortes em x_2 evitando-se assim um maior esforço computacional. Evitam-se duplicações de cortes verticais analisando-se cortes somente nos pontos de L que são menores ou iguais à metade do comprimento do retângulo avaliado (para cortes horizontais o procedimento é análogo).

Ordenacao.

Outro caso onde ocorre duplicações de corte é o mostrado pela figura 3.3.b. Neste exemplo, os cortes verticais para produzir retângulos de comprimento x_1 e x_2 estão sendo efetuados de duas maneiras diferentes, onde no primeiro caso são efetuados cortes nos pontos x_1 e x_1+x_2 respectivamente e, no segundo caso os dois cortes são efetuados nos pontos x_2 e x_1+x_2 . Evita-se duplicações de corte neste caso, se houver uma ordenação sobre os retângulos menores, como por exemplo, ordenação por ordem crescente de seus comprimentos e, após efetuado um corte produzindo um retângulo de comprimento x_1 , os demais cortes devem produzir somente retângulos de comprimento maior que x_1 .

A ordenação é respeitada somente dentro dos estágios, pois quando muda-se de cortes verticais para cortes horizontais ou vice-versa, deve-se observar que todos os retângulos podem ser novamente obtidos em outros cortes.

Exclusao.

Alguns pontos do conjunto L e W devem ser excluídos na determinação da solução para alguns retângulos intermediários. Considere a situação mostrada pela figura 3.4 onde procura-se encontrar uma boa alocação para o retângulo intermediário localizado no canto superior esquerdo da peça maior; a parte

hachurada corresponde à parte da peça maior que já foi alocada. Nesta situação é necessário não utilizar os pontos do conjunto L e W que foram gerados em combinações lineares onde aparecem o retângulo que ultrapassa as dimensões do retângulo intermediário.

fig. 3.3 - Casos de duplicação de cortes.

fig. 3.4 - Caso de exclusão de cortes.

3.2.2.2 - FÓRMULAS RECURSIVAS

O melhor valor objetivo para o retângulo intermediário (x,y) considerando-se apenas os padrões de corte regulares homogêneos é dado por

$$H(x,y) = \max \{ v_i \lfloor x/l_i \rfloor \lfloor y/w_i \rfloor, \quad i = 1, \dots, m' \}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

O valor objetivo para o retângulo intermediário (x,y) dado por $F(x,y)$ é obtido em função do melhor padrão de corte homogêneo para (x,y) e em função dos possíveis cortes verticais e horizontais, ou seja,

$$F(x,y) = \max \{ \begin{aligned} &H(x,y); & (3.2.2.2.1) \\ &[F(x_1,y) + F(\lfloor x-x_1 \rfloor_L, y), \quad x_1 \in L, \quad x_1 \leq x/2]; & (3.2.2.2.2) \\ &[F(x, y_1) + F(x, \lfloor y-y_1 \rfloor_W), \quad y_1 \in W, \quad y_1 \leq y/2] & (3.2.2.2.3) \end{aligned} \}$$

$$x \in L \cup \{L\}, \quad y \in W \cup \{W\},$$

onde $\lfloor x \rfloor_L = \max \{0, x_1 \text{ tal que } x_1 \leq x, x_1 \in L\}$. Análogo para $\lfloor x \rfloor_W$.

Se os conjuntos L e W forem totalmente gerados, a solução encontrada será ótima; caso contrário, se utilizada a heurística de Beasley [5] de limitar os conjuntos L e W para no máximo M elementos, não haverá garantias da otimalidade da solução.

3.3 - REPRESENTAÇÃO EM GRAFO-E/OU

Morábito [12] e Morábito et al [13] propuseram um método exato para o problema da mochila regular bidimensional guilhotinada não-estagiada (sem restrição ao número de estágios de corte) baseado em buscas no grafo-E/OU ou hipergrafo. Cada nó do grafo representa um retângulo intermediário sujeito a cortes, onde o nó

raiz representa a peça maior bidimensional. Os nós finais representam os retângulos que não mais devem ser cortados correspondendo a padrões de corte regulares homogêneos. As opções de corte (pontos dos conjuntos L e W) em um retângulo intermediário representado por um nó qualquer formam os arcos-OU. Cada arco-OU tem dois componentes que apontam para dois novos nós representando os retângulos produzidos pelo corte, definindo assim um arco-E. A figura 3.5 representa uma ramificação em um retângulo de dimensões (x,y) com cortes verticais em x_1 e x_2 e cortes horizontais em y_1 e y_2 e o padrão de corte homogêneo.

fig. 3.5 - Ramificação de um nó.

A exemplo do método de Beasley [5] para evitar duplicações de cortes verticais (para cortes horizontais a explicação é análoga) em buscas no grafo-E/OU é preciso analisar os pontos de possíveis cortes verticais pertencentes ao conjunto L que sejam menores ou iguais à metade do comprimento do retângulo intermediário e também, utilizar ordenação sobre os retângulos menores. Outra providência que deve ser tomada é excluir os cortes provenientes de combinações de retângulos cujas dimensões ultrapassam as dimensões do retângulo intermediário.

O grafo-E/OU anteriormente definido pode ser utilizado para visualizar a fórmula recursiva de Beasley [5]. Na figura 3.5 um arco-OU é representado pelas opções de cortes verticais (indicadas por um v sobre os arcos) e horizontais (indicadas por um h sobre os arcos) e, observando as fórmulas recursivas de Beasley nota-se que o mesmo arco-OU é gerado pelas opções (3.2.2.2.2) das fórmulas recursivas que representam os cortes verticais e pelas opções (3.2.2.2.3) que representam os cortes horizontais. O melhor padrão de corte homogêneo (indicado por H no grafo) se apresenta como um limitante inferior na decisão sobre qual a melhor opção de corte componente do arco-OU.

3.4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste capítulo foi citado que os métodos de resolução do problema da mochila regular bidimensional aqui tratados com o intuito de um texto mais completo, foram amplamente discutidos em Morábito [15], onde foram constatadas vantagens em favor do método de buscas em grafo-E/OU com relação à qualidade das soluções encontradas e tempo computacional. Com base em Morábito resolvemos utilizar como método de resolução do problema da mochila regular bidimensional buscas no grafo-E/OU para determinar uma solução preliminar aos refinamentos proporcionados pelo operador.

No capítulo seguinte estudaremos o problema da mochila irregular bidimensional com proposição de heurísticas que podem

contribuir com a obtenção de bons padrões de corte irregulares bidimensionais quando se utiliza a geração semi-automática de padrões de corte.

CAPÍTULO 4 - GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE IRREGULARES BIDIMENSIONAIS - ABORDAGEM SEMI-AUTOMÁTICA

4.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo discutiremos uma forma de se obter padrões de corte irregulares bidimensionais através da utilização da geração semi-automática de padrões de corte irregulares. Relembrando as definições do capítulo 1 sobre geração de padrões de corte irregulares tem-se geração manual onde o operador projetista determina manualmente o padrão de corte através de sistemas gráficos, geração automática onde programas de computador fornecem uma solução e, geração semi-automática que consiste de refinamentos interativos por parte do operador nas soluções automáticas obtidas. Os motivos pelos quais se entende que a abordagem semi-automática pode apresentar vantagens sobre as demais formas de geração de padrões de corte irregulares são redução do tempo computacional em relação à geração manual, pois no momento das intervenções do operador uma solução preliminar já estará disponível e em relação à geração automática é a possibilidade de promover melhoras na solução.

As soluções preliminares obtidas automaticamente podem ser determinadas por qualquer algoritmo de obtenção de padrões de corte regulares bidimensionais como por exemplo Programação Dinâmica ou buscas no grafo-E/OU, discutidas no capítulo anterior, desde que as peças irregulares sejam agrupadas em módulos retangulares. Após a determinação automática de um padrão de corte irregular, são necessárias ferramentas gráficas como por exemplo CADs (*Computer-Aided Design System*) responsáveis pelo desenho do padrão de corte irregular gerado e também, para o auxílio nos refinamentos interativos proporcionados pelo operador.

Com as considerações acima, o problema da mochila irregular

bidimensional compreende três fases : criação dos módulos retangulares, problema da mochila regular bidimensional e refinamentos interativos. Neste capítulo serão tecidos comentários sobre duas das fases acima citadas, sendo que a segunda que compreende o problema da mochila regular bidimensional já foi tratada no capítulo anterior.

fig. 4.1 - Fases da geração de padrões de corte irregulares bidimensionais.

4.2 - MÓDULOS RETANGULARES

No capítulo 1 foram introduzidos os conceitos de módulos retangulares simples que são aqueles que contém apenas uma peça irregular, módulos retangulares compostos homogêneos formados por duas ou mais peças irregulares iguais e módulos retangulares compostos heterogêneos que contém duas ou mais peças irregulares diferentes.

Considere um conjunto de p módulos retangulares contendo peças irregulares; este conjunto determinado antes do início da resolução do problema (2.1.2) deve conter todos os módulos simples e um número suficiente de módulos compostos que garantam pouca

perda se possível. A razão para se considerar todos os módulos simples consiste da preocupação em se gerar padrões de corte homogêneos garantindo sempre uma solução inicial para o problema e, desde que os módulos simples possuem dimensões menores que os módulos compostos eles podem ser alocados em espaços reduzidos; os padrões de corte semi-homogêneos também podem fazer parte da solução inicial do problema caso desejado. O conjunto de módulos retangulares pode ser aumentado iterativamente durante a execução do problema (2.1.2) caso necessário.

Um módulo k de dimensões l_k e w_k , comprimento e largura respectivamente, contém α_{1k} peças irregulares do tipo 1, α_{2k} peças irregulares do tipo 2, ... e, α_{mk} peças irregulares do tipo m . O valor econômico v_k , do módulo retangular k no problema da mochila regular, bidimensional é dado por :

$$v_k = \sum_{i=1}^m (\max\{0, A_i + \lambda_i\}) \cdot \alpha_{ik}$$

onde, como definido anteriormente (capítulo 2, item 2.2), A_i é a área da peça irregular do tipo i e λ_i é a i -ésima componente do vetor multiplicador simplex. A figura 4.2 mostra um conjunto de peças irregulares sendo agrupadas em módulos retangulares onde $A_1 = 9\pi$ e $A_2 = 32.0$.

módulo 1	módulo 2	módulo 3
$(l_1 = 6.0$ $w_1 = 6.0)$	$(l_2 = 10.0$ $w_2 = 5.0)$	$(l_3 = 10.0$ $w_3 = 10.0)$

$\alpha_{11} = 1$ $\alpha_{12} = 0$ $v_1 = 9\pi + \lambda_1$	$\alpha_{21} = 0$ $\alpha_{22} = 1$ $v_2 = 32.0 + \lambda_2$	$\alpha_{13} = 1$ $\alpha_{23} = 2$ $v_3 = 9\pi + 64.0 + \lambda_1$ $+ 2\lambda_2$

fig. 4.2 - Formação de módulos retangulares.

Após a determinação de um novo padrão de corte, a recuperação da coluna correspondente no problema original (2.1.2) não é feita de forma trivial. O vetor $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]$ representa a solução regular encontrada com β_k definindo a quantidade de módulos k nesta solução. O padrão de corte irregular procurado é então dado pela coluna

$$(4.2.1) \quad \left[\sum_{k=1}^p \alpha_{1k} \cdot \beta_k, \sum_{k=1}^p \alpha_{2k} \cdot \beta_k, \dots, \sum_{k=1}^p \alpha_{mk} \cdot \beta_k \right].$$

A figura 4.3 mostra um padrão corte irregular considerando-se os módulos retangulares exemplificados pela figura 4.2. Neste exemplo existem três módulos retangulares ($p = 3$) que devem ser combinados em uma peça maior de dimensões (42,31), onde o primeiro é módulo simples contendo somente uma peça irregular do tipo 1, o segundo também é módulo simples contendo somente uma peça irregular do tipo 2 e o terceiro é módulo composto heterogêneo contendo uma peça irregular do tipo 1 e duas do tipo 2. Resolvendo-se o problema da mochila regular bidimensional por buscas em grafo-E/OU, encontrou-se a solução abaixo desenhada com oito ($\beta_1 = 8$) módulos 1, um ($\beta_2 = 1$) módulo 2 e nove ($\beta_3 = 9$) módulos 3. A solução irregular obtida através de (4.2.1) contém dezessete peças irregulares do tipo 1 e dezenove peças irregulares do tipo 2, e a coluna que representa esta solução no problema original (2.1.2) é então : $[17,19]^T$.

fig. 4.3 - Padrão de corte irregular.

4.3 - HEURÍSTICAS - Geração Semi-Automática

Durante os estudos e implementação do sistema computacional para o problema da mochila irregular bidimensional, observou-se que, dependendo da irregularidade das peças menores, movimentos de aproximação das peças irregulares levariam a sobras na peça maior, ou seja, partes da peça maior ficariam sem utilização como mostrado pelas figuras 4.4.a que representa a solução automática encontrada para o problema e 4.4.b que representa a solução da figura 4.4.a rearranjada.

No exemplo ilustrado pelas figuras 4.4.a e 4.4.b o número que corresponde ao tipo de peça irregular está indicado em cada primeira ocorrência da peça na figura 4.4.a. A área da peça maior (43,28) é $A = 1204$ e as áreas das peças irregulares são $A_1 = 12.56637061$, $A_2 = 28.27433388$ e $A_3 = 7.853981634$. Como a solução em termos de peças irregulares é $[16,4,44]^T$, a área aproveitada da peça maior é $A_{ap} = 659.7344572$ o que corresponde a uma perda de material de aproximadamente 45.20%; observe que a perda para os dois casos figura 4.4.a e 4.4.b é a mesma. A solução poderia ser melhorada se o retângulo de sobra (região não hachurada) na figura 4.4.b fosse mantido em estoque tornando-se um novo tipo de peça maior; neste caso o retângulo útil teria dimensões (36.38,28) e a nova perda seria da ordem de aproximadamente 35.23%. Mas esta atitude não é recomendável, pois aumentar o número de diferentes tipos de peças maiores dificulta o tratamento computacional do problema e às vezes podem ser produzidos retângulos de sobra que contribuem para o aumento da perda de material e não podem ser mais aproveitados.

Para contornar o problema de produzir bons padrões de corte sem retângulos de sobras, sugerimos dois caminhos que podem ser seguidos para melhorar a utilização da peça maior, sendo eles a Heurística ($\Delta L, \Delta W$) e a Heurística de Prioridades que serão vistas a seguir.

(a)

(b)

fig. 4.4 - Geração semi-automática sem introdução de heurísticas.

4.3.1 - HEURÍSTICA ($\Delta L, \Delta W$)

A heurística ($\Delta L, \Delta W$) fundamenta-se em encontrar coeficientes ΔL e ΔW de acréscimo nas dimensões da peça maior (L, W), na tentativa de se obter soluções automáticas para a nova peça maior ($L.(1+\Delta L), W.(1+\Delta W)$) que sejam boas soluções para (L, W) após a intervenção do operador. As figuras 4.5.a e 4.5.b mostram respectivamente um padrão de corte irregular para uma peça maior retangular (37,21) e peças irregulares das figuras 4.4.a e 4.4.b obtido através da heurística ($\Delta L, \Delta W$) e a mesma solução refinada com valores apropriados para os coeficientes de acréscimo $\Delta L = 0.09$ e $\Delta W = 0.15$ onde a solução irregular é $[18, 0, 36]^T$, a área aproveitada é $A_{ap} = 508.9380098$ e a perda de material no padrão de corte procurado da figura 4.5.b é aproximadamente 34.50%.

Os coeficientes ΔL e ΔW são totalmente dependentes de cada problema e portanto difíceis de serem estimados inicialmente, necessitando que sejam atualizados iterativamente; enquanto os coeficientes ΔL e ΔW não forem adequados, deve-se diminuir seus valores caso não se consiga trazer todas as peças irregulares para o interior da peça maior ou, aumentar seus valores caso todas as peças irregulares forem trazidas com folgas na peça maior. A figura 4.6 mostra o algoritmo computacional que trata o problema de cortes irregulares onde utilizamos a heurística ($\Delta L, \Delta W$).

Uma nota que vale registro é que durante os refinamentos interativos, novos módulos retangulares podem ser sugeridos como o destacado por um pequeno retângulo na figura 4.5.b. Se desejado, o sistema computacional pode aceitar a incorporação de novos módulos retangulares durante a resolução do problema, ou apenas, os módulos sugeridos podem ser incorporados nas resoluções futuras do problema.

(a)

(b)

fig. 4.5 - Geração semi-automática com Heurística ($\Delta L, \Delta W$).

fig. 4.6 - Sistema computacional para cortes irregulares bidimensionais com Heurística ($\Delta L, \Delta W$).

4.3.2 - HEURÍSTICA DE PRIORIDADES

Quando se deseja evitar o processo iterativo ocasionado pela heurística $(\Delta L, \Delta W)$, pode-se melhorar a utilização da peça maior colocando-se novas peças irregulares nos espaços de folga dentro de alguns critérios que proporcionem melhoras à solução. Estabelecendo-se prioridades para cada peça irregular, torna-se fácil para o operador determinar quais peças podem ser colocadas nos espaços vazios e quais peças já alocadas podem ser retiradas do padrão de corte sendo determinado.

Considere a partição básica (B, N) na matriz formada pelo conjunto dos n padrões de corte já determinados, como feito no capítulo 2. Uma coluna (padrão de corte) não-básica (coluna da matriz N) pode fazer parte do conjunto representado pelas colunas básicas (matriz B) se for trocada por uma coluna de B proporcionando melhoras à função objetivo (estratégia simplex). O critério para decidir sobre esta troca de uma coluna básica por uma coluna não-básica recai sobre o conteúdo do vetor custo relativo r das variáveis não-básicas

$$r = p_N - p_B^T \cdot B^{-1} \cdot N = p_N - \lambda^T \cdot N,$$

onde para o problema de minimização deve-se escolher a coluna não-básica j tal que $r_j = \min \{r_i, i \text{ pertencente aos índices não-básicos}\} < 0$, para torná-la básica.

Como mencionado no capítulo 2, a coluna procurada pode não-fazer parte da matriz N e sim ser obtida através da resolução do problema da mochila irregular bidimensional (2.2.1) e, como procura-se através da inclusão de novas peças irregulares melhorar o padrão de corte sendo gerado, deve-se pesquisar as mudanças no valor r_j quando se coloca novas peças irregulares.

Seja $\hat{a}_j = [\hat{a}_{1j}, \hat{a}_{2j}, \dots, \hat{a}_{mj}]^T$ a coluna que representa o padrão de corte gerado automaticamente e suponha que o processo de aproximação das peças irregulares tenha sido aplicado resultando em

sobras no padrão de corte como o mostrado anteriormente pela figura 4.4.b. Uma perturbação pode ser feita na coluna $\hat{a}_j$ por Δa_j com componentes Δa_{ij} , $i = 1, \dots, m$, desde que esta perturbação melhore o valor do coeficiente r_j . Então perturbando a coluna $\hat{a}_j$ por Δa_j obtém-se o novo valor da componente r_j já em função das áreas das peças irregulares envolvidas da seguinte maneira :

$$\begin{aligned} r_j &= A - \sum_{i=1}^m (A_i + \lambda_i) \cdot a_{ij} = A - \sum_{i=1}^m (A_i + \lambda_i) \cdot (\hat{a}_{ij} + \Delta a_{ij}) \\ &= \hat{r}_j - \sum_{i=1}^m (A_i + \lambda_i) \cdot \Delta a_{ij}. \end{aligned}$$

Observando a expressão acima concluímos que melhoras são obtidas no coeficiente r_j se priorizarmos a colocação da peça irregular do tipo i que tiver o maior valor $(A_i + \lambda_i)$ ou, como A_i é sempre positivo, priorizar a peça irregular do tipo i que tiver o mais alto valor positivo λ_i . Caso não seja possível a colocação de mais peças irregulares tipo i , dois caminhos podem ser seguidos, sendo eles a colocação de uma outra peça irregular que apresente a componente do vetor λ positiva ou a retirada de alguma peça irregular que tenha a componente do vetor λ negativa (em alguns casos, apenas componente positiva mas com valor pequeno) para a colocação da peça irregular i .

Define-se por peça irregular de alta prioridade aquela peça irregular que possui alto valor positivo λ_i . Analogamente, define-se por peça irregular de baixa prioridade aquela que possui baixo valor positivo λ_i ou valor negativo λ_i . A importância em se determinar peças irregulares de baixa prioridade como mencionado no parágrafo anterior e aqui deve estar fixado, é que se pode desejar a retirada de uma peça irregular de baixa prioridade para a colocação de uma peça irregular de alta prioridade caso o espaço para a colocação da peça de alta prioridade seja insuficiente. Algumas peças irregulares de baixa prioridade aparecem na solução preliminar devido ao fato de pertencerem a um módulo retangular heterogêneo juntamente com alguma peça irregular de alta

prioridade, o que aumenta o valor objetivo do módulo retangular.

O operador projetista responsável pelas melhoras interativas na solução, estando de posse das informações sobre as prioridades das peças irregulares pode decidir sobre quais peças devem ser introduzidas e quais devem ser retiradas da solução. A figura 4.7 mostra o padrão de corte irregular bidimensional obtido pela heurística de prioridades partindo-se da solução da figura 4.4.b onde no momento da geração deste padrão de corte irregular os valores para $\lambda_1 = 5.965544$, $\lambda_2 = 0.080096$ e $\lambda_3 = 7.096018$.

fig. 4.7 - Geração semi-automática pela Heurística de Prioridades.

Para a geração do padrão de corte irregular acima desenhado, as peças irregulares do tipo 1 e do tipo 3 são consideradas peças de alta prioridade, enquanto a peça irregular do tipo 2 é considerada de baixa prioridade. Nesta solução obtida pela heurística de prioridades optamos por acrescentar 6 peças irregulares do tipo 1, 11 peças irregulares do tipo 3 e a quantidade de peças irregulares do tipo 2 ficou inalterada. O vetor $[22, 4, 55]^T$ representa o padrão de corte irregular da figura 4.7 com

área aproveitada $A_{ap} = 821.5264788$ e perda de material aproximada da ordem de 31.77%. A função objetivo para o problema da mochila que anteriormente (figura 4.4) valia 1067.728337 ocasionando um custo relativo (peça maior é (43,28)) igual a 136.271663, agora tem o valor 1343.369821 ocasionando um custo relativo igual a -139.369821. Observe que melhoras na solução são proporcionadas quando o custo relativo do padrão de corte gerado é negativo.

O algoritmo correspondente à resolução do problema de cortes irregulares bidimensionais com Heurística de Prioridades está sintetizado pela figura 4.8.

fig. 4.8 - Sistema computacional para cortes irregulares bidimensionais com Heurística de Prioridades.

4.4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um assunto que agora volta a ser comentado é com relação à solução inicial. Além dos padrões de corte homogêneos necessários para garantir a factibilidade do problema, poderia ser interessante guardar alguns padrões de corte heterogêneos obtidos em resoluções anteriores e torná-los integrantes da solução inicial caso o operador os considere bons padrões de corte em se tratando de perda de material. Embora não implementado com o intuito de mostrar comparações entre as heurísticas através de resultados computacionais que representem a primeira execução para cada heurística discutida neste capítulo, esta melhora deve ser parte integrante do sistema computacional, pois evita a produção de padrões de corte anteriormente determinados.

Outro fator que merece destaque é a construção de módulos retangulares. Entendemos que quanto maior for o número de módulos retangulares mais chances de boas soluções termos e, criar módulos retangulares durante a execução do problema é bastante importante. Novamente, esta melhora não será incorporada à implementação visando comparações entre as heurísticas propostas.

No próximo e último capítulo serão apresentados alguns resultados computacionais que visam mostrar entre outras coisas : a possibilidade de boa utilização dos sistemas computacionais que estamos propondo para resolução do problema de cortes irregulares bidimensionais, um com Heurística $(\Delta L, \Delta W)$ e outro com Heurística de Prioridades e, uma terceira alternativa compreendendo um sistema computacional com a união das duas heurísticas estudadas.

CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÕES E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

5.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As implementações dos sistemas computacionais que compreendem as heurísticas discutidas no capítulo anterior, foram realizadas em linguagem C e microcomputador AT-286 em ambiente DOS 3.0.

Basicamente, as implementações compreendem : i) resolução de programas lineares pelo método simplex, ii) método de resolução de problemas da mochila regular bidimensional por buscas em grafo-E/OU, iii) geração semi-automática de padrões de corte irregulares bidimensionais e, iv) ambiente gráfico. Os três primeiros itens já foram discutidos em capítulos anteriores enquanto a parte gráfica foi implementada para suportar o software AUTOCAD. O procedimento computacional adotado para a obtenção dos desenhos relativos aos padrões de corte irregulares bidimensionais, compreende a criação de arquivos em disco de forma que estes arquivos possam ser recuperados pelo software AUTOCAD.

Neste capítulo, apresentamos resultados computacionais referentes a um exemplo arbitrariamente criado, obtidos pelas implementações realizadas.

5.2 - SISTEMAS COMPUTACIONAIS

São três os sistemas computacionais implementados, os quais são muito semelhantes, diferindo apenas pela heurística utilizada na geração semi-automática de padrões de corte irregulares bidimensionais. Dois deles já foram discutidos no capítulo anterior, com a heurística $(\Delta L, \Delta W)$ onde o esquema computacional está mostrado na figura 4.6 e com a heurística de prioridades mostrado pela figura 4.8. Uma terceira versão combina as duas

heurísticas propostas e chamaremos de heurística híbrida.

A heurística híbrida tem o seguinte princípio : um padrão de corte preliminar é obtido com uma ampliação ($\Delta L, \Delta W$) qualquer e refinado através da heurística de prioridades. Para a geração do próximo padrão de corte, os valores dos coeficientes ΔL e ΔW são aumentados ou diminuídos iterativamente, de acordo com a heurística ($\Delta L, \Delta W$). A figura 5.1 representa o esquema computacional para resolução de problemas de cortes irregulares bidimensionais com heurística híbrida.

fig. 5.1 - Sistema computacional para problemas de cortes irregulares bidimensionais com heurística híbrida.

5.3 - EXEMPLO DE PROBLEMA DE CORTES IRREGULARES

Neste exemplo, gerado arbitrariamente, pretendemos encontrar padrões de corte e suas respectivas quantidades para atender uma demanda definida e que, minimizem a perda total de material. As peças maiores retangulares a serem cortadas têm dimensões de comprimento e largura dadas pelo par (37,21). As peças irregulares menores (já em seus respectivos módulos retangulares simples) são :

peça 1 (módulo 1)	peça 2 (módulo 2)	peça 3 (módulo 3)	peça 4 (módulo 4)

com			
$A_1 = 9.424777961$	$l_1 = 7.0$	$w_1 = 4.0;$	
$A_2 = 12.56637061$	$l_2 = 4.0$	$w_2 = 4.0;$	
$A_3 = 7.853981634$	$l_3 = 3.0$	$w_3 = 6.0;$	
$A_4 = 28.27433388$	$l_4 = 6.0$	$w_4 = 6.0,$	

onde A_i é a área da peça irregular do tipo i ; l_i e w_i são as dimensões do módulo retangular simples que contém a peça irregular do tipo i .

Os padrões de corte irregulares homogêneos que são importantes para gerar uma solução inicial para o problema, serão os mesmos para as três resoluções e foram obtidos manualmente antes do início da resolução do problema. As figuras 5.2.a-d representam os quatro padrões de corte irregulares homogêneos 1-4 respectivamente. Os valores para a perda de material em cada padrão de corte irregular e os vetores que os representam são os seguintes :

$p_1 = 352.8849918$	(45.42%)	$a_1 = [45,0,0,0]^T$
$p_2 = 186.3805811$	(23.99%)	$a_2 = [0,47,0,0]^T$
$p_3 = 305.761102$	(39.35%)	$a_3 = [0,0,60,0]^T$
$p_4 = 211.5133224$	(27.22%)	$a_4 = [0,0,0,20]^T$

padrão de corte homogêneo 1

padrão de corte homogêneo 2

padrão de corte homogêneo 3

padrão de corte homogêneo 4

fig. 5.2 - Padrões de corte irregulares homogêneos.

As peças irregulares possuem as seguintes demandas :

- peça irregular tipo 1 :	3200	(3360)
- peça irregular tipo 2 :	456870	(479713)
- peça irregular tipo 3 :	27000	(28350)
- peça irregular tipo 4 :	12500	(13125)

e, podem ser cortadas com uma tolerância de 5% a mais ou a menos, supondo que este percentual é aceito pelos clientes. Entre parênteses estão denotadas as demandas superiores, ou seja, a demanda original mais 5%. Estes valores são importantes, pois serão limitantes das restrições do problema original.

Com as descrições acima, o problema de cortes irregulares tem inicialmente a forma

$$\begin{array}{rcll}
 \min & f(x) & = & p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 \\
 \\
 \text{s. a.} & 45x_1 & & + s_1 = 3360 \\
 & & 47x_2 & + s_2 = 479713 \\
 & & & 60x_3 + s_3 = 28350 \\
 & & & & 20x_4 + s_4 = 13125
 \end{array}$$

onde p_i e x_i são respectivamente, a perda de material e a quantidade de peças maiores a serem cortadas segundo o i -ésimo padrão de corte. Observe que esta formulação está na forma do problema (2.1.2) descrito no capítulo 2 com as variáveis de folga s_i ; os padrões de corte que serão gerados posteriormente devem ser acrescentados às restrições à medida que forem sendo gerados. As variáveis de folga s_i são canalizadas para os seguintes valores :

$$\begin{array}{rcl}
 0 & \leq & s_1 \leq 320 \\
 0 & \leq & s_2 \leq 45687 \\
 0 & \leq & s_3 \leq 2700 \\
 0 & \leq & s_4 \leq 1250.
 \end{array}$$

Os módulos retangulares compostos que também farão parte da

resolução do problema são

módulo 5

$$l_5 = 5.0$$

$$w_5 = 6.0$$

módulo 6

$$l_6 = 6.0$$

$$w_6 = 6.0$$

módulo 7

$$l_7 = 8.0$$

$$w_7 = 8.0$$

A seguir serão apresentados os valores encontrados para a resolução do problema para cada heurística proposta.

5.3.1 - RESULTADOS COMPUTACIONAIS COM A HEURÍSTICA ($\Delta L, \Delta W$)

Partimos dos quatro padrões de corte irregulares homogêneos e encontramos uma solução gerando mais quatros padrões de corte irregulares através da heurística ($\Delta L, \Delta W$) em aproximadamente 2 horas e 54 minutos; os refinamentos ocuparam quase que totalmente o tempo necessário, sendo insignificante o tempo gasto nas demais partes do sistema computacional em relação ao tempo total. A tabela I mostra as características destes padrões de corte irregulares gerados pela heurística ($\Delta L, \Delta W$) e, seus respectivos desenhos estão em pares nas páginas seguintes, sendo que cada par representa o padrão de corte obtido automaticamente e o mesmo padrão de corte já factibilizado.

Na primeira coluna da tabela I estão indicados os vetores que representam no modelo os padrões de corte gerados pela heurística ($\Delta L, \Delta W$). A segunda coluna indica os valores para os coeficientes ΔL e ΔW que permitiram a factibilização destes padrões de corte. A terceira e quarta colunas indicam respectivamente, as perdas de material e as perdas de material percentuais para cada padrão de corte irregular. O custo relativo apresentado pelos padrões de

corte após cada geração está indicado na quinta coluna e, a última coluna mostra as tentativas de variação dos coeficientes ΔL e ΔW realizadas até que os valores que permitiram factibilização fossem encontrados.

Como critério de parada adotamos o valor não-negativo do custo relativo apresentado pelo padrão de corte gerado, pois apenas padrões de corte com custo relativo negativo proporcionam melhoras à solução. Nas demais execuções do problema o critério de parada foi o mesmo.

	vetor	($\Delta L, \Delta W$)	perda	perda perc.	custo rel.	tentativas
padrão de corte 5	[0,30,27,0]	(0.07,0.04)	187.9513775	24.19%	-68.607422	(0,0) (0.07,0.04) (0.09,0.05) (0.07,0.05) (0.09,0.04) (0.07,0.04)
padrão de corte 6	[0,23,3,10]	(0.07,0.04)	181.6681921	23.38%	-22.960987	(0.07,0.04) (0.09,0.04) (0.07,0.05) (0.07,0.04)
padrão de corte 7	[0,33,23,0]	(0.07,0.04)	181.6681921	23.38%	-7.959827	(0.07,0.04) (0.09,0.04) (0.07,0.04)
padrão de corte 8	[0,45,3,0]	(0.07,0.04)	187.9513775	24.19%	2.875107	(0.07,0.04) (0.09,0.04) (0.07,0.04)

tabela I - Características dos padrões de corte obtidos através da heurística ($\Delta L, \Delta W$).

O oitavo padrão de corte apresentou custo relativo não-negativo e, portanto, decidimos encerrar a resolução do problema pois este último padrão de corte gerado não proporcionou melhoras à solução.

padrão de corte 5 gerado
automaticamente

padrão de corte 5
rearranjado

padrão de corte 6 gerado
automaticamente

padrão de corte 6
rearranjado

padrão de corte 7 gerado
automaticamente

padrão de corte 7
rearranjado

padrão de corte 8 gerado
automaticamente

padrão de corte 8
rearranjado

O resultado final encontrado quando resolvemos o problema de cortes irregulares com geração de colunas por heurística ($\Delta L, \Delta W$) é o seguinte :

$$\begin{aligned}x_1 &= 67.555557 \\x_2 &= 7979.218262 \\x_3 &= 0.0 \\x_4 &= 0.0 \\x_5 &= 0.0 \\x_6 &= 1187.50 \\x_7 &= 960.326111.\end{aligned}$$

Neste momento, os cortes já estão determinados e, portanto, devemos cortar 68 peças maiores pelo padrão de corte 1, 7980 peças maiores pelo padrão de corte 2, 1188 peças maiores pelo padrão de corte 6 e 961 peças maiores pelo padrão de corte 7, requerendo cortes em 10197 peças maiores com perda total de 1901718.161 que em termos de percentual é da ordem de 24.002%.

Observe que adotamos o arredondamento das componentes do vetor x para o valor menor inteiro maior ou igual a cada componente do vetor x . Como o objetivo inicial é a minimização das perdas de material, obtemos soluções satisfazendo a demanda inferior, ou seja, a demanda menos 5% e o arredondamento que utilizamos traz integralidade às variáveis x e neste caso tornando a solução factível e próxima da solução de mínima perda (para os padrões de corte que conseguimos gerar); caso desejado, algoritmos tipo "branch-and-bound" podem ser utilizados para determinar soluções inteiras. Nas demais execuções do problema, adotaremos a mesma estratégia de arredondamento para as componentes do vetor x .

5.3.2 - RESULTADOS COMPUTACIONAIS COM HEURÍSTICA DE PRIORIDADES

Os resultados computacionais com a heurística de prioridades foram obtidos novamente partindo-se apenas dos padrões de corte irregulares homogêneos e, a solução foi determinada após a geração

de mais cinco padrões de corte em aproximadamente 2 horas e 39 minutos; novamente, o tempo gasto nesta resolução é quase que totalmente ocupado pelos refinamentos. A tabela II mostra as características dos padrões de corte gerados que estão em pares nas páginas seguintes. Os valores para as componentes λ_i 's do vetor multiplicador simplex λ que foram valores determinantes na complementação dos padrões de corte pela heurística de prioridades, estão especificados ao lado dos pares de padrões de corte. Nas primeira e segunda colunas estão indicados respectivamente, o vetor que representa o padrão de corte automaticamente gerado por buscas em grafo-E/OU e o vetor que representa o padrão de corte refinado. As demais colunas já apareceram na primeira tabela e possuem os mesmos significados.

	vetor inicial	vetor final	perda	perda perc.	custo rel.
padrão de corte 5	[0,30,24,0]	[1,25,8,8]	164.3894326	21.16%	-67.964561
padrão de corte 6	[0,30,24,0]	[4,30,24,0]	173.8142105	22.37%	-98.824089
padrão de corte 7	[0,30,24,0]	[0,28,25,2]	172.2434142	22.17%	-76.528984
padrão de corte 8	[0,30,24,0]	[0,32,26,0]	170.6726179	21.97%	-7.5068262
padrão de corte 9	[0,30,24,0]	[0,32,26,0]	170.6726179	21.97%	-0.0000002

tabela II - Características dos padrões de corte obtidos através da heurística de prioridades.

padrão de corte 5 gerado
automaticamente

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 7.841888 \\ \lambda_1 &= 3.965544 \\ \lambda_2 &= 5.096018 \\ \lambda_3 &= 10.575666\end{aligned}$$

padrão de corte 5
rearranjado

padrão de corte 6 gerado
automaticamente

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 7.841888 \\ \lambda_1 &= 3.965544 \\ \lambda_2 &= 5.096018 \\ \lambda_3 &= 2.080096\end{aligned}$$

padrão de corte 6
rearranjado

padrão de corte 7 gerado
automaticamente

$$\lambda_0 = -16.844134$$

$$\lambda_1 = 3.965544$$

$$\lambda_2 = 5.096018$$

$$\lambda_3 = 5.168348$$

padrão de corte 7
rearranjado

padrão de corte 8 gerado
automaticamente

$$\lambda_0 = 1.877657$$

$$\lambda_1 = 3.965544$$

$$\lambda_2 = 1.972386$$

$$\lambda_3 = 5.949256$$

padrão de corte 8
rearranjado

padrão de corte 9 gerado
automaticamente

$$\lambda_0 = 3.609999$$

$$\lambda_1 = 3.965544$$

$$\lambda_2 = 1.683662$$

$$\lambda_3 = 6.021441$$

padrão de corte 9
rearranjado

O nono padrão de corte apresentou custo relativo não-negativo e, possui o mesmo desenho do padrão de corte anterior, não proporcionando melhoras à solução.

O resultado final encontrado quando resolvemos o problema de cortes irregulares com heurística de prioridades é o seguinte :

$$x_1 = 0.0$$

$$x_2 = 8080.505859$$

$$x_3 = 0.0$$

$$x_4 = 0.0$$

$$x_5 = 1484.3750$$

$$x_6 = 388.906250$$

$$x_7 = 0.0$$

$$x_8 = 170.817307.$$

Os valores corrigidos para as quantidades de padrões de corte que devem ser cortados são os seguintes : devemos cortar 8081 peças maiores através do padrão de corte 2, 1485 peças maiores pelo padrão de corte 5, 389 peças maiores pelo padrão de corte 6 e 171

peças maiores pelo padrão de corte 8. O número de peças maiores cortadas é 10126 com uma perda total de 1847058.529 que em termos de percentual de perda é de aproximadamente 23.476%.

5.3.3 - RESULTADOS COMPUTACIONAIS COM HEURÍSTICA HÍBRIDA

Após o início da resolução do problema com utilização dos padrões de corte irregulares homogêneos como solução inicial, geramos mais três padrões de corte irregulares bidimensionais pela heurística híbrida em aproximadamente 1 hora e 17 minutos; novamente, o tempo gasto nesta resolução é quase que totalmente ocupado pelos refinamentos. As características dos três padrões de corte gerados nesta resolução estão especificadas na tabela III e seus desenhos estão nas páginas seguintes. Os valores para λ estão ao lado dos desenhos dos padrões de corte.

	vetor inicial	vetor final	perda	perda perc.	custo rel.	($\Delta L, \Delta W$)
padrão de corte 5	[0,30,24,0]	[0,31,24,1]	170.6726179	21.97%	-85.139366	(0,0)
padrão de corte 6	[0,23,3,10]	[0,24,3,10]	169.1018215	21.76%	-36.473537	(0.07,0.04)
padrão de corte 7	[1,40,17,0]	[4,33,16,0]	198.9469517	25.60%	9.477386	(0.07,0.05)

tabela III - Características dos padrões de corte obtidos através da heurística híbrida.

padrão de corte 5 gerado
automaticamente

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 7.841888 \\ \lambda_1 &= 3.965544 \\ \lambda_2 &= 5.096018 \\ \lambda_3 &= 10.575666\end{aligned}$$

padrão de corte 5
rearranjado

padrão de corte 6 gerado
automaticamente

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 7.841888 \\ \lambda_1 &= 3.965544 \\ \lambda_2 &= 1.548545 \\ \lambda_3 &= 10.575666\end{aligned}$$

padrão de corte 6
rearranjado

padrão de corte 7 gerado
automaticamente

$$\lambda_0 = 7.841888$$

$$\lambda_1 = 3.965544$$

$$\lambda_2 = 1.702442$$

$$\lambda_3 = 6.882144$$

padrão de corte 7
rearranjado

O resultado final encontrado quando resolvemos o problema de cortes irregulares com heurística híbrida é o seguinte :

$$x_1 = 67.555557$$

$$x_2 = 8061.115234$$

$$x_3 = 0.0$$

$$x_4 = 0.0$$

$$x_5 = 931.961975$$

$$x_6 = 1094.303833.$$

Devemos, portanto, cortar 68 peças maiores de acordo com o padrão corte 1, 8062 peças maiores de acordo com o padrão de corte 2, 932 peças maiores de acordo com o padrão de corte 5 e 1095 peças maiores através do padrão de corte 6. Nesta solução o número de

peças maiores cortadas é 10157 com perda total de 1870829.799 e perda percentual de aproximadamente 23.701%.

5.3.4 - OUTROS TESTES

5.3.4.1 - EXECUÇÃO COM TODOS OS PADRÕES DE CORTE GERADOS PELAS TRÊS HEURÍSTICAS

Após realizadas as três execuções para o problema proposto, surgiu a curiosidade de saber qual seria a solução se considerássemos todos os padrões de corte gerados nas três execuções realizadas. Os padrões de corte irregulares homogêneos são novamente considerados como solução inicial e, utilizamos os seguintes padrões de corte irregulares heterogêneos : i) os gerados pela heurística ($\Delta L, \Delta W$) são o quinto e sétimo padrões de corte que estão nas páginas 63 e 64 respectivamente, ii) os gerados pela heurística de prioridades são o quinto, o sétimo e o oitavo que estão nas páginas 67 e 68 respectivamente e, iii) o quinto e sexto padrões de corte irregulares gerados pela heurística híbrida que estão na página 71. Os demais padrões de corte foram excluídos por serem repetidos ou semelhantes aos considerados.

Os resultados finais obtidos neste teste foram os mesmos que os encontrados na resolução do problema com heurística de prioridades.

5.3.4.2 - EXECUÇÃO SEM INTERVENÇÃO DO OPERADOR

Outro teste realizado para o mesmo exemplo prático, foi a execução do problema com geração automática de padrões de corte irregulares. Com este teste pretendemos avaliar a importância da intervenção do operador para a solução final do problema.

Novamente, partimos dos quatro padrões de corte irregulares homogêneos apresentados na página 59 e o sistema computacional gerou automaticamente os seguintes padrões de corte irregulares

heterogêneos :

padrão de corte 5 gerado
automaticamente

padrão de corte 6 gerado
automaticamente

O resultado final para o problema com geração automática de padrões de corte irregulares bidimensionais heterogêneos é :

$$x_1 = 67.555557$$

$$x_2 = 8552.425781$$

$$x_3 = 0.0$$

$$x_4 = 593.75$$

$$x_5 = 1068.75$$

e, utilizando a mesma estratégia de arredondamento das execuções anteriores devemos cortar 68 peças maiores através do padrão de corte 1, 8553 peças maiores pelo padrão de corte 2, 594 peças maiores pelo padrão de corte 4 e 1069 peças maiores através do

quinto padrão de corte, totalizando 10284 peças maiores cortadas com uma perda total de 1969855.945 e perda percentual de aproximadamente 24.652%. O sexto padrão de corte não entrou na solução final pois na sua geração foi atingido o critério de parada.

No próximo capítulo teceremos comentários sobre os pontos que mais chamaram nossa atenção durante o desenvolvimento da pesquisa.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo, pretendemos apresentar algumas conclusões constatadas durante o desenvolvimento da pesquisa e, também, algumas pretensões futuras para estudos em problemas de cortes irregulares bidimensionais.

O agrupamento de peças irregulares em módulos retangulares facilita a obtenção de padrões de corte irregulares bidimensionais automaticamente, pois resolver o problema de cortes regulares bidimensionais é extremamente viável devido à boas ferramentas apresentadas na literatura. Sem a estratégia da criação de módulos retangulares o tratamento computacional se torna praticamente manual.

Utilizando a estratégia da criação de módulos retangulares, concluímos que a geração semi-automática de padrões de corte irregulares bidimensionais se apresenta superior à geração automática quando pensamos em redução de perdas de material em padrões de corte. A eficiência do sistema computacional com geração semi-automática de padrões de corte aumenta à medida que o operador adquire familiaridade com a ferramenta gráfica e, também, familiaridade com as informações necessárias aos refinamentos.

O aumento da eficiência também pode ser obtido pelo armazenamento de novos módulos retangulares sugeridos durante os refinamentos do operador e, pelo armazenamento de padrões de corte obtidos que sejam considerados de boa qualidade em relação à perdas de material. Estas opções não foram implementadas.

As heurísticas que estamos propondo são de fácil implementação e manipulação podendo ser utilizadas para obter soluções para o problema da mochila irregular bidimensional. A heurística de prioridades se mostrou em nossos testes ligeiramente superior as outras duas heurísticas em se tratando de perdas de material e tempo computacional.

Do mesmo modo que surgiu a heurística híbrida como combinação das heurísticas ($\Delta L, \Delta W$) e prioridades, novas heurísticas compostas podem ser sugeridas partindo-se das demais.

Pretendemos ainda, aplicar os sistemas computacionais que estamos propondo em problemas existentes na prática e, comparar os resultados obtidos com as decisões tomadas na fonte geradora.

Outro aspecto a ser considerado, diz respeito ao arredondamento para valores inteiros. Uma idéia poderia ser em se resolver um programa linear inteiro com os padrões de corte finais, usando um método tipo "branch-and-bound".

Por fim, outro assunto de interesse é o planejamento global de produção, onde o problema de cortes irregulares bidimensionais aparece como uma das fases do planejamento operacional.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adamowicz, M. e Albano, A.. "A Solution of the Rectangular Cutting-Stock Problem". *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-6, number 4, april 1976, pp. 302-310.
- [2] Albano, A.. "A Method to Improve Two-Dimensional Layout". *Computer-Aided Design*, vol. 9, number 1, january 1977, pp. 48-52.
- [3] Albano, A. e Sappupo, G.. "Optimal Allocation of Two-Dimensional Irregular Shapes Using Heuristics Search Methods". *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-10, number 5, may 1980, pp. 242-248.
- [4] Arcaro, V. F.. *Recorte de Estoque Unidimensional*. Dissertação de Mestrado, ICMSC - Universidade de São Paulo, 1988.
- [5] Beasley, J. E.. "Algorithms for Unconstrained Two-Dimensional Guillotine Cutting". *Journal of Operational Research Society*, vol. 36, number 4, 1985, pp. 297-306.
- [6] Dagli, C. H. e Tatoglu, M. Y.. "An Approach to Two-Dimensional Cutting Stock Problems". *International Journal of Production Research*, vol. 25, number 2, 1987, pp. 175-190.
- [7] Farley, A. A.. "Mathematical Programming Models for Cutting-Stock Problems in the Clothing Industry". *Journal of Operational Research Society*, vol. 39, number 1, 1988, pp. 41-53.
- [8] Gilmore, P. C. e Gomory, R. E.. "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II". *Operations Research*, vol. 11, 1963, pp. 863-888.
- [9] Gilmore, P. C. e Gomory, R. E.. "Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions". *Operations Research*, vol. 13, 1965, pp. 94-120.

[10] Haims, M. J. e Freeman, H. "A Multistage Solution of the Template-Layout Problem". *IEEE Transaction on Systems Science and Cybernetics*, vol. SSC-6, number 2, april 1970, pp. 145-151.

[11] Herz, J. C.. "Recursive Computational Procedure for Two Dimensional Stock Cutting". *IBM J. Res. Develop.*, vol. 16, september 1972, pp. 462-469.

[12] Morábito, R. N.. *Corte de Estoque Bidimensional*. Dissertação de Mestrado, ICMSC - Universidade de São Paulo, 1989.

[13] Morábito, R. N., Arenales, M. N. e Arcaro, V. F. "An And/Or-Graph Approach for Two-Dimensional Cutting Problems". *European Journal of Operational Research*, vol. 58, 1991, pp. 1-9.

[14] Morábito, R. N., Arenales, M. N.. "On Solving Large Two-Dimensional Guillotine Cutting Problems". *Notas de aula do ICMSC-USP*, número 89, 1991.

[15] Morábito, R. N.. *Uma Abordagem em Grafo-E-OU para o Problema do Empacotamento : Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. Tese de Doutorado, EESC/USP, 1992.

[16] Segenreith and Braga - "Optimal Nesting of General Plane Figures : A Monte Carlo Heuristical Approach". *Comput & Graphics*, vol. 10, number 3, 1986, pp. 229-237.