UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS - ICMSC

PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL
GUILHOTINADO NÃO-ESTAGIADO
E IRRESTRITO

SILVANA AP. BORSETTI GREGÓRIO VIDOTTI

orientador: Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências: áreas - Ciências de Computação e Matemática Computacional.

São Carlos - 1993

`À minha Família.

Ao Ecio, com amor.

"No meu coração
Um foco de luz
Seduz a razão
De repente a visão da esperança !"

(Eduardo Gudín - Costa Netto)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos pelo carinho, apoio e confiança sempre presentes.

Ao Ecio, pela paciência, carinho e amor demonstrados durante estes anos, o que contribuiu sensivelmente para realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales pela orientação e apoio na preparação deste trabalho.

Aos Profs. Dr. Reinaldo Morábito Neto e João Batista Ernesto de Moraes pelo apoio técnico.

À família Zucchi Vidotti pelo incentivo.

À Plácida e ao Marcos pelo apoio e incentivo.

À UNESP, pela viabilização deste trabalho, bem como pelo apoio financeiro parcial.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro parcial.

À Deus, à Aparecida e ao Antônio, pelo apoio espiritual.

Aos colegas da Faculdade de Filosofia e Ciências - UNESP / Câmpus de Marília, da Faculdade de Ciências - UNESP/Câmpus de Bauru, e à todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

O objetivo geral deste estudo é o de trabalhar o problema de corte bidimensional guilhotinado irrestrito e não-estagiado. Para tanto, foram revistas regras e heurísticas a serem utilizadas e foi sugerida uma combinação da regra de simetria com a heurística de geração dos pontos de cortes possíveis. Uma abordagem em grafo-E/OU, com a utilização de uma estratégia híbrida, que combina as técnicas "Hill-Climbing" e "Depth-First" para a busca em grafo, foi utilizada para a resolução do problema. Finalmente, foram comparados os resultados obtidos com resultados apresentados na literatura.

Palavras-chave: problema de corte bidimensional, padrão de corte guilhotinado irrestrito e não-estagiado, grafo-E/OU.

The general purpose of this study is to deal with the non-staged unconstrained guilhotined cutting problem. For this, rules and heuristics in use are reviewed and a combination between simmetry rule and possible cuttings points generation heuristics is suggested. An AND/OR-graph approach, with used a hibrid strategy that combines Hill-Climbing and Depth-First techniques, in order to search the graph, was used to solve this problem. Finally, results from this study and results presented in the literature are compared.

Key-words: two-dimensional cutting problem, non-staged
unconstrained guilhotined cutting pattern,
AND/OR-graph.

SUMÁRIO

	Introdução	1
1	Histórico	3
2	Conceitos básicos	8
2.1.	Definição dos problemas de cortes	8
2.2.	Problemas relacionados	11
2.2.1.	Problema de Empacotamento	11
2.2.2.	Problema de Carregamento de Veículos	12
2.2.3.	Problema de Alocação de Tarefas	12
2.2.4.	Outros problemas	12
3.	Classificação dos problemas de corte	13
3.1.	Dimensão	13
3.1.1.	Problema Unidimensional	13
3.1.2.	Problema Bidimensional	14
3.1.3.	Problema Tridimensional	15
3.1.4.	Problema M+0,5-dimensional	16
3.1.5.	Problema Multidimensional	17
3.2.	Formato da figura	18
3.2.1.	Forma	18
3.2.2.	Tamanho	19
3.2.3.	Orientação	19
3.3.	Agrupamento	20
3.4.	Disponibilidade	20
3.5.	Padrão de corte	21
3.5.1.	Restrição de distância de corte	21
3.5.2.	Restrição de orientação	22
3.5.3.	Restrição de frequência	22
3.5.4.	Tipo de corte	22
3.6.	Forma de alocação	24
3.6.1.	Alocação por seleção de objetos	25
3.6.2.	Alocação por seleção de itens	25
3.7.	Objetivos	25
3.8	Tipologia de Dyckhoff	26

4	Problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito	31
4.1.	Descrição	31
4.2.	Redução de cortes possíveis	33
4.2.1.	Discretização	33
4.3.	Eliminação de padrões equivalentes	35
4.3.1.	Simetria	35
4.3.2.	Ordenação	36
4.3.3.	Exclusão	37
4.4.	Limitantes inferiores e superiores	38
4.5.	Heurísticas	39
4.5.1.	Discretização de Beasley	39
4.5.2.	Limitantes heurísticos	40
4.6.	Fórmula recursiva de Beasley	40
4.7.	Fórmula de Christofides e Whitlock	41
5.	Representação em grafo E/OU	43
5.1.	Conceitos básicos	43
5.2.	Estratégias de busca	46
5.2.1.	Busca em Largura-primeiro	47
5.2.2.	Busca em Profundidade-primeiro	47
5.2.3.	Busca da Escalada	48
5.2.4.	Busca pelo Melhor-primeiro	48
5.2.5.	Busca híbrida	49
6.	Resultados computacionais	54
6.1.	Discretização	54
6.2.	Procedimento HC_DF2	57
6.2.1.	Combinação da regra de simetria com a heurística de Beasley	57
6.2.2.	Parâmetros	59
7.	Conclusões	66
	Referências bibliográficas	67

FIGURAS

2.1.a.	Objetos	8
2.1.b.	Ítems	8
2.1.c.	Solução para o problema	9
3.1.1.	Padrão de corte unidimensional	14
3.1.2.	Padrão de corte bidimensional	15
3.1.3.	Padrão de corte tridimensional	15
3.1.4.a.	Padrão de corte 1,5-dimensional	16
3.1.4.b.	Padrão de corte 2,5-dimensional	16
3.2.1.	Figuras regulares e irregulares	18
3.5.4.a.	Padrões de cortes guilhotinados e não guilhotinados	23
3.5.4.b.	Padrão de corte 3-estagiado	24
4.1.	Padrões de cortes dados por $(1,0,3,2,0)$	32
4.2.	Padrão de cortes homogêneos	34
4.3.1.	Duplicação de padrões - simetria	35
4.3.2.	Duplicação de padrões - ordenação	36
4.3.3.	Exclusão da peça i	37
5.1.a.	Sequência de cortes sobre A	43
5.1.b.	Padrão de cortes sobre A	44
5.2.5.	Estratégias de buscas híbridas	49

TABELAS

3.1. Dimensão dos problemas	17
3.2. Problemas associados a combinação de tipos	29
6.1. Exemplo apresentado por Beasley	55
6.2. Soluções para o problema de Beasley	58
6.3. Variações dos parâmetros - HC_DF2	60
6.4. Exemplos gerados aleatoriamente	61
6.5. Soluções para os problemas aleatórios	62
6.6. Soluções dos problemas aleatórios (L,W)= (1000,1000)	63
6.7. Exemplo apresentado em Morábito et al. (1991)	64
6.8. Soluções dos problemas aleatórios da tabela 6.7	64

GRÁFICOS

6.1. Heurística de Beasley x Escolha aleatória	55
6.2. Heurística de Beasley x Escolha aleatória restrita	56

INTRODUÇÃO

Um problema de corte consiste em cortar um objeto em pequenos itens, de modo a otimizar uma função objetivo, como por exemplo, minimizar a perda de material. Para a resolução deste tipo de problema foram propostas, por vários autores, diferentes abordagens e restrições.

O objetivo deste estudo é trabalhar o problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, que consiste em cortar uma placa retangular em peças pré-determinadas de maneira a maximizar o valor total peças produzidas.

Avalia-se a heurística de discretização de Beasley (1985a) e apresenta-se uma nova escolha dos pontos de discretizações de cortes possíveis, finalizando com a comparação dos resultados computacionais.

No capítulo 1, introduz-se um breve histórico dos problemas de cortes apresentados na literatura.

Conceitos básicos dos problemas de cortes e alguns problemas relacionados a estes, são apresentados no capítulo 2.

Uma classificação de problemas de cortes, bem como uma tipologia para tais problemas, proposta por Dyckhoff (1990), com a finalidade de unificar os diferentes usos de notações na literatura e concentrar pesquisas em tipos especiais de problemas, são apresentadas no capítulo 3.

Uma descrição formal de um problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, bem como regras e heurísticas a serem consideradas na resolução de referido problema, são apresentadas no capítulo 4.

Uma abordagem em grafo-E/OU proposta por Morábito et al.(1989), com a utilização da estratégia de busca híbrida "Hill-Climbing" e "Depth-First - Backtracking", para a geração dos padrões de cortes para o problema estudado é apresentada no capítulo 5.

No capítulo 6, são comparados os resultados obtidos com resultados apresentados na literatura. Finalmente, uma conclusão é apresentada no capítulo 7.

1. HISTÓRICO

Os problemas de cortes têm sido estudados por inúmeros pesquisadores de várias áreas do conhecimento, ao longo das últimas décadas.

Entre os primeiros trabalhos estão o de Kantorovick, que apresentou em 1939 uma formulação matemática para o Problema Unidimensional, e o de Brooks et al. - 1940, com a elaboração de um método para o corte de peças retangulares, citados em Dyckhoff(1990); e o de Paull e Wallter (1955), com a modelagem do problema unidimensional como um problema de programação matemática.

Problemas com a mesma estrutura lógica foram enfocados na literatura de maneiras diferentes. Como exemplos, temos o problema de corte de estoque e o da perda de apara, o de empacotamento de caixas (bins) e o da mochila. Tal fato provavelmente ocorreu em virtude de os pesquisadores serem de diferentes áreas do conhecimento como: Engenharia, Matemática, Ciência da Computação, etc., e das aplicações serem para vários tipos de indústrias.

Eisemann (1957) denominou o Problema Unidimensional como Problema da Apara, enquanto Gilmore e Gomory (1961) enfocaram tal problema como Problema de Corte de Estoque.

Problemas de corte de estoque unidimensionais podem ser resolvidos por programação linear. Geralmente, os problemas práticos envolvem milhões de variáveis de decisão, tornando inviável a sua resolução por meio de programação linear. Preocupados com isto, Gilmore e Gomory (1961) desenvolveram um procedimento que supera a dificuldade básica dada pelo problema de inúmeros padrões de cortes, dado em programação linear pelo problema de geração de muitas colunas. Tal procedimento envolve a

cada iteração do algoritmo Simplex, a solução de um problema auxiliar conhecido como Problema da Mochila, o que permitiu um aumento significativo no número de variáveis para o problema, pois estas foram consideradas implicitamente.

Gilmore e Gomory (1963) descreveram uma adaptação e aplicação do método por eles anteriormente desenvolvido (1961) para o problema específico da aparas de papel. Mudanças foram apresentadas na formulação, para uma maior flexibilidade da demanda, fazendo com que ela pertencesse a um intervalo aceitável pelo cliente, e o algoritmo foi adaptado para que pudesse ser utilizado para outras situações como cortes de tubo de metal, aço ou rolo de papel, celofane, etc. Vale salientar que este algoritmo continua sendo um dos bons algoritmos para problemas de cortes de estoque unidimensional.

Procedimentos heurísticos, baseados no conceito de redução do problema, foram apresentados por Haessler (1971) e Tilanus e Gerhardt (1976), juntamente com idéias de penalização e aplicações para as indústrias de papel e aço.

Em 1965, Gilmore e Gomory estudaram os problemas de corte de estoque bidimensional e multidimensional, tendo como objetivo a minimização do número de placas de estoque a serem utilizadas para atender a demanda requerida. Apresentaram ainda um algoritmo para geração de padrões de cortes guilhotinados 2(3)-estagiados e irrestritos.

Um algoritmo recursivo de busca em grafo foi apresentado por Herz (1972) para o problema bidimensional, e sua implementação fornece rapidez na solução do problema de corte de estoque irrestrito e guilhotinado. Ele utilizou discretizações dos possíveis pontos de cortes e limitantes para a busca em grafo, além de comparar este método com os outros dois métodos apresentados anteriormente por Gilmore e Gomory (1966).

Dyson e Gregory (1974) apresentaram uma heurística para o sequenciamento dos padrões de corte, utilizando programação linear para a resolução do problema de corte bidimensional de vidro, porém chegaram a conclusão de que o sequenciamento de padrões não foi satisfatório para o caso específico.

Um algoritmo de busca em árvore para problemas bidimensionais guilhotinados e restrito foi apresentado por Christofides e Whitlock (1977). Eles utilizaram técnicas de programação dinâmica para a resolução do problema, além de utilizarem o problema de transporte como limitante superior para o processo de busca. Os resultados indicam que o algoritmo é um procedimento eficaz na resolução de problemas de tamanho médio.

Modificações no algoritmo de Gilmore e Gomory foram propostas por Haessler (1980) visando a ampliação da função objetivo para além da minimização de perda de material.

Um estudo do problema de corte de estoque bidimensional irrestrito, nas versões estagiado e não-estagiado, foi apresentado por Beasley (1985a), sendo utilizada a formulação de programação dinâmica e heurísticas para problemas de tamanho grande.

O problema de gerar padrões de cortes ortogonais não-guilhotinados e restritos foi modelado matematicamente por Beasley (1985b) como um programa linear 0-1. Este propôs ainda, um método "Branch-and-Bound" para resolvê-lo, com auxílio da relaxação Lagrangeana. Devido ao número elevado de restrições e variáveis envolvidas, o autor recorreu a soluções heurísticas.

Arcaro (1988) propôs modificações para o modelo de corte de estoque unidimensional de Gilmore e Gomory, que vieram a melhorar as características das soluções geradas. Tais modificações foram feitas no conjunto de restrições e na função objetivo, ao invés de minimização de perda de material, a maximização dos lucros, por julgar ser este o objetivo real das

empresas. Estudou especificamente o problema de corte de bobinas de papel.

Morábito (1989) revisou e propôs modificações em algumas técnicas de resolução aplicadas ao problema de corte de estoque bidimensional, além de apresentar uma nova representação do problema de geração de padrões de cortes em grafo-E/OU.

O periódico "European Journal of Operations Research" publicou, em 1990, um número especial com enfoque em problemas de cortes de estoque e de empacotamento. Entre os artigos desta edição pode-se destacar os que tratam especificamente do problema de corte como o de Dyckhoff (1990), que apresenta uma tipologia integrando as várias espécies de problemas de cortes e empacotamento, tendo como propósito a unificação das diferentes notações na literatura, e o artigo de Dagli (1990), que apresenta uma arquitetura de sistema baseado em conhecimento, para a geração de padrões de cortes para a resolução do problema de corte de estoque.

Ainda no periódico (op. cit), uma outra abordagem foi apresentada por Ferreira et al. (1990), com enfoque a problemas aplicados à indústria de ferro e aço, objetivando o planejamento de cortes de rolos em duas fases. O trabalho de Sweeney e Haessler (1990), para problemas bidimensionais de corte de rolos com múltiplos graus de qualidade, e o de Farley (1990), aplicado a indústria de lona, com algoritmo heurístico que envolve uma forma modificada do algoritmo 3-estagiado de Gilmore-Gomory combinado com técnicas de programação inteira, também merecem destaque.

Heurísticas para o sequenciamento de padrões de corte foram apresentadas por Yen (1991) para problemas de cortes de vidro.

Morábito e Arenales (1991, 1992a) trataram do problema de corte bidimensional guilhotinado de tamanho grande,

discutiram a heurística proposta por Beasley (1985a) e a possibilidade de impor como heurística o corte 2-estagiado, como limitante no processo de resolução.

Morábito et al. (1992) propuseram uma estrutura de grafo-E/OU para a representação da solução do problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito. O método heurístico de busca em grafo apresentado combina as estratégias de busca "Depth-First" e "Hill-Climbing". Estenderam esta abordagem de representação do problema em um grafo-E/OU para o problema de corte bidimensional estagiado e restrito (Morábito e Arenales, 1992b), bem como para o problema de empacotamento de contêineres (Morábito, 1992).

2. CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são introduzidas noções básicas dos problemas de cortes, bem como apresentados alguns problemas relacionados ao tema.

2.1. Definição dos problemas de cortes

Genericamente, Problemas de Cortes consistem em cortar objetos a fim de produzir itens requeridos em quantidades pré-determinadas, de maneira a otimizar, isto é, maximizar ou minimizar determinados objetivos. Problemas de Cortes podem ser encontrados, por exemplo, no corte de papel, madeira, vidro, plástico, tecido, couro, aço, bem como no carregamento de paletes e contêineres.

A figura 2.1.a ilustra objetos (retângulos maiores) que se encontram disponíveis em estoque para a produção de itens (retângulos menores) pré-determinados - figura 2.1.b.

figura 2.1.a - Objetos

figura 2.1.b - Ítems

figura 2.1.c - Solução para o problema

Cortar objetos a fim de produzir itens é análogo a combinar itens em objetos, e esta combinação é denominada padrão de corte. A figura 1.c ilustra padrões de cortes para objetos da figura 1.a, utilizando itens da figura 1.b.

A área hachurada representa a sobra de material, denominada apara, resultante deste padrão de corte.

A melhor solução será dada pelo melhor padrão de corte, segundo um objetivo estabelecido, que geralmente corresponde a preencher o maior espaço possível dos objetos.

Um possível objetivo, quando os objetos são idênticos, poderia ser o de minimizar a quantidade de objetos a serem utilizados na produção de todos os itens pré-determinados. Considera-se, neste caso, que o conjunto de objetos em estoque seja suficiente para produzir todos os itens requeridos; como sub-produto tem-se uma seleção de objetos a serem cortados a fim de produzirem itens requeridos. Um problema com tal objetivo é denominado Problema de Corte de Estoque.

Em contraposição ao problema anterior, se o conjunto de objetos em estoque não fosse suficiente para produzir todos os itens requeridos, seria definido um outro problema, cujo objetivo passaria a ser o de maximizar o valor total de itens escolhidos, utilizando para tanto todos os objetos, onde a cada item associa-se um valor unitário.

Considerando-se que cada item tem um valor associado ao espaço ocupado por ele, pode-se dizer que a solução ótima para o problema é dada pelo máximo espaço ocupado pelos itens. Neste caso, tem-se como sub-produto uma seleção de itens a serem produzidos.

Supondo-se um problema em que os objetos a serem cortados possuam uma única dimensão de corte na determinação da solução, temos que o universo de soluções para o problema é restrito a combinações geométricas dos itens ao longo da única dimensão relevante desses objetos. Este tipo de problema é tratado na literatura por Problema de Corte Unidimensional. Exemplificando, tem-se o corte de tubos de PVC, barras de ferro, bobinas de papel, etc.

O exemplo da figura 2.1. é um caso particular do Problema de Corte em que os objetos e os itens possuem formas retangulares, e podem ser cortados ao longo do comprimento e da largura, o que implica em duas dimensões relevantes para a determinação do problema.

Tal problema é denominado Problema de Corte Bidimensional, e seu universo de soluções consiste nas combinações geométricas dos itens ao longo do comprimento e da largura dos objetos. Exemplos são encontrados no corte de madeira, vidro, papel, etc.

Analogamente, pode-se denominar Problema de Corte Tridimensional ao problema em que três das dimensões são relevantes para determinação da solução. Portanto, as combinações geométricas dos itens ao longo das três dimensões relevantes representam o universo de soluções. Como exemplo, tem-se o corte de blocos de espuma.

Genericamente, classifica-se um problema em função de suas dimensões relevantes. Uma classificação mais detalhada dos

Problemas de Cortes é exibida no Capítulo 3. A seguir, são apresentados alguns problemas relacionados com o Problema de Corte.

2.2. Problemas relacionados

A estrutura lógica dos problemas de corte possui características básicas dadas pelos objetos e itens definidos geometricamente e pela combinação dos itens dentro dos objetos. Problemas com estas mesmas características, com dimensões espaciais (comprimento, largura e altura), ou ainda não espaciais (peso e tempo) são descritos abaixo.

2.2.1. Problema de Empacotamento

Analogamente ao problema de cortes, pode-se pensar em empacotar (arranjar) itens dentro de objetos, de maneira a minimizar o volume total dos objetos necessários para empacotar todos os itens, ou ainda minimizar o número de objetos a serem utilizados.

Este problema é comumente conhecido na literatura como Problema de Empacotamento. Exemplos podem ser encontrados no empacotamento de caixas ("bins"), no carregamento de paletes e no carregamento de contêineres.

Tal analogia foi inicialmente percebida por Gilmore e Gomory (1965) ao enfocarem que o empacotamento de caixas em vagões ferroviários poderia ser visto como cortar paralelepípedos pequenos a partir de paralelepípedos grandes.

Por serem considerados análogos, são tratados como problemas de corte ou problemas de corte/empacotamento. Para um

estudo mais aprofundado sobre os Problemas de Empacotamento consultar Morábito (1992).

2.2.2. Problema do Carregamento de Veículos

Este problema foi apresentado por Eilon e Christofides (1971) e consiste em minimizar o número de veículos a serem utilizados no transporte de uma certa quantidade de carga, tendo como restrições os critérios de lotação e de peso permitidos para cada veículo.

2.2.3. Problema de Alocação de Tarefas

O problema de alocação de tarefas consiste em minimizar o número de dias de trabalho necessários ao desenvolvimento de n tarefas, que utilizam m_i unidades de mão-de-obra e t_i horas de trabalho, $i=1, \dots, n$, em uma fábrica com M unidades de mão-de-obra e T horas disponíveis por dia. Ao considerar outros recursos, este problema torna-se multidimensional.

2.2.4. Outros problemas

Outros problemas relacionados com o Problema de Cortes foram citados em Dyckhoff (1990) e em Morábito (1992). Por exemplo, os problemas de Balanceamento de Linha de Montagem, Programação de Multi-Processador, Orçamento de Capital, Alocação de Memória no Computador e Alocação de Arquivos.

3. CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE

Uma primeira classificação dos problemas de corte foi feita na seção 2.1, e tinha como sub-produtos a seleção de objetos a serem cortados e a seleção de itens a serem produzidos.

A seguir, é apresentada uma classificação detalhada dos problemas de cortes, considerando a dimensão, formato, agrupamento, disponibilidade, padrão de corte e forma de alocação de itens em objetos, além dos objetivos dos problemas. Dyckhoff (1990) apresentou uma efetiva comparação dos problemas de corte/empacotamento e sugeriu uma notação reduzida para os diversos casos apresentados na literatura.

3.1 Dimensão

Normalmente os Problemas de Corte/Empacotamento são apresentados na forma tridimensional do espaço Euclidiano, mas nem sempre as três dimensões espaciais (comprimento, largura e altura) são significativas na resolução dos problemas. Por isso, estes problemas são classificados em função de suas dimensões relevantes.

As dimensões de um problema podem ser espaciais, do tipo comprimento, largura e altura, e/ou não espaciais, como peso (cf. Dantzig, 1957; Eilon e Christofides, 1971), tempo (cf. Coffman et al., 1978) e financeira (cf. Lorie e Savage, 1955; Martello e Tohl, 1980), citadas em Dyckhoff (1990).

3.1.1. Problema Unidimensional

No problema unidimensional somente uma dimensão é

significativa na determinação da solução. Exemplos podem ser encontrados nos cortes de barras de aço, tubos de PVC, bobinas de papel ou aço, etc..

A figura 3.1.1 representa um padrão de corte no qual o objeto de comprimento L deverá ser cortado em itens, ao longo do comprimento, produzindo assim itens de dimensão l_i , $i=1, \dots, m$, onde m representa o número de tipos diferentes de itens a serem produzidos. Como tem-se uma única dimensão relevante para a determinação do problema, pode-se denominar este padrão como sendo um padrão de corte unidimensional.

figura 3.1.1
Padrão de corte unidimensional

3.1.2. Problema Bidimensional

No problema bidimensional, duas dimensões são relevantes na determinação da solução. Cita-se como exemplos o corte de placas de vidro, madeira e papel, com altura (espessura) constante.

A figura 3.1.2 representa um Padrão de Corte Bidimensional em que o objeto de dimensões (L, W) foi cortado em itens de dimensões (l_i, w_i) , $i=1, \dots, m$. Neste caso as dimensões relevantes para os cortes são o comprimento e a largura, enquanto que a altura é constante.

figura 3.1.2
Padrão de corte bidimensional

3.1.3. Problema Tridimensional

No problema tridimensional, três dimensões são significativas na determinação da solução. Como exemplo, suponha que um objeto de dimensões (L, W, H) deva ser cortado em m itens pré-determinados de dimensões (l_i, w_i, h_i) , $i=1, \dots, m$.

Alguns problemas tridimensionais, ao serem resolvidos, são reduzidos a problemas bidimensionais, como é o caso do Problema de Carregamento de Paletes que comumente é resolvido como um problema bidimensional de arranjar camadas de itens tridimensionais de mesma altura sobre o palete.

A figura 3.1.3 representa um padrão de corte para um problema tridimensional.

figura 3.1.3
Padrão de corte tridimensional

3.1.4. Problema $[M + (0,5)]$ -Dimensional

No problema $[M+(0,5)]$ -dimensional, $M \geq 1$: inteiro, temos $(M+1)$ dimensões relevantes na resolução do problema, porém M dimensões são fixas e a dimensão restante é variável. Um exemplo 1,5-dimensional é dado pelo corte de uma bobina de papel com largura fixa e comprimento variável, que pode ser calculado em função dos itens requeridos.

A figura 3.1.4.a ilustra um padrão de corte de um problema 1,5-dimensional no qual a largura W é fixa e o comprimento L é variável.

figura 3.1.4.a

Padrão de corte 1,5-dimensional

Um exemplo 2,5-dimensional é dado por um paralelepípedo de espuma de altura e largura conhecidas e comprimento a ser determinado em função dos itens requeridos, como colchões, tavesseiros ou almofadas.

A figura 3.1.4.b exibe um padrão de corte 2,5-dimensional com as dimensões de largura W e altura H fixas e o comprimento L variável.

figura 3.1.4.b

Padrão de corte 2,5-dimensional

3.1.5 Problema Multidimensional

Considera-se como multidimensional o problema em que mais de três dimensões são relevantes na determinação da solução. Neste tipo de problema pelo menos uma das dimensões é não espacial.

Exemplificando tem-se o Problema de Alocação de Tarefas que consiste em minimizar o número de dias necessários ao desenvolvimento de n tarefas pré-definidas, utilizando R_{ij} recursos do tipo j por dia de trabalho, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$.

A tabela 3.1 sintetiza a classificação dos problemas quanto as dimensões relevantes, bem como os exemplos mais comumente enfocados.

tabela 3.1
Dimensão dos problemas

Problema	Dimensões Relevantes Fixas	Dimensões Relevantes Variáveis	Exemplos (cortes/em-pacotamento)
<i>Unidimensional</i>	comprimento		barra de aço tubo de PVC
<i>Bidimensional</i>	comprimento largura		papel, vidro, aço, madeira
<i>Tridimensional</i>	comprimento largura altura		palete, contêiner caixas (bins)
<i>1,5-dimensional</i>	largura	comprimento	bobina de papel, tecido
<i>2,5-dimensional</i>	largura altura	comprimento	bloco de espuma
<i>Multidimensional</i>	tempo de produção, mão-de obra, tempo de máquina, energia		alocação de tarefas

3.2. Formato da Figura

Uma das principais características dos problemas de cortes é o formato das figuras dos objetos e itens. Esta característica está diretamente relacionada com a dimensionalidade dos objetos e itens, uma vez que o formato é definido pela representação geométrica da figura no espaço de dimensões relevantes.

Pode-se configurar uma figura por sua forma, tamanho e orientação.

3.2.1. Forma

As figuras são classificadas, quanto a forma, em regulares e irregulares.

Uma figura é dita regular quando pode ser expressa por poucos parâmetros, como é o caso dos retângulos, paralelepípedos e círculos. A grande maioria dos problemas de cortes encontrados na literatura utilizam este tipo de forma. Uma figura regular pode ainda ser do tipo retangular (por exemplo, uma placa retangular e um paralelepípedo), ou não retangular (por exemplo, figura circular).

Problemas de cortes com figuras irregulares não são estudados com frequência, e quando são apresentados, dizem respeito a indústrias específicas, como de couro, tecido ou metal.

Figuras regulares

Figuras irregulares

figura 3.2.1

3.2.2. Tamanho

As figuras de objetos e de itens podem possuir a mesma forma e no entanto podem variar em seus tamanhos. Algumas figuras de tamanhos diferentes podem ser consideradas idênticas, pela translação ou pela mudança de escala em torno das dimensões relevantes ao problema.

3.2.3 Orientação

Figuras de objetos e itens congruentes, isto é, de mesma forma e tamanho, podem diferir quanto a sua orientação. Pode-se considerar os seguintes casos, em que:

- toda a orientação é permitida: os objetos e itens com figuras congruentes são considerados idênticos;
- a orientação é fixa: objetos e itens de figuras congruentes são diferenciados, exceto aqueles que se tornam idênticos por meio de uma translação;
- a orientação permitida é de no máximo 90 graus: somente são considerados idênticos os objetos e itens de mesma figura.

Exemplo de problema com orientação de objetos e itens pode ser encontrado no corte de uma placa de madeira, no qual as peças retangulares a serem produzidas devam ter as fibras na mesma direção da placa.

Para uma simplificação, figuras de objetos e itens são chamadas de objetos e itens, respectivamente.

3.3 Agrupamento

O problema de cortar objetos a fim de produzir itens pode ser visto como agrupar itens em objetos. O agrupamento de itens em objetos depende fundamentalmente da forma e do número de figuras permitidas.

Pode haver casos em que todos os objetos e itens possuam formas diferentes, e casos em que todos os objetos e itens possuam a mesma forma. Em ambos os casos pode-se ter muitos ou poucos objetos e itens diferentes.

O agrupamento dos objetos pode ocorrer considerando um único objeto, objetos idênticos ou objetos diferentes, agrupamentos estes exemplificados pelos problemas da mochila, empacotamento de bin, além do clássico problema do corte de estoque bidimensional, respectivamente.

O agrupamento de itens ocorre quando existem itens congruentes, muitos itens de muitos formatos diferentes, poucos itens de formatos diferentes, muitos itens de relativamente poucos formatos diferentes (não congruentes), exemplificados pelos problemas de carregamento de paletes, empacotamento de bin, carregamento de veículos e problema de corte de estoque.

3.4 Disponibilidade

Uma outra característica para os problemas de corte é dada pela disponibilidade de objetos e itens. Ela refere-se aos limites inferiores e superiores de suas quantidades, ao sequenciamento de produção, e ainda à data em que um objeto ou item foi ou será cortado/empacotado.

Pode-se interpretar o número de objetos e itens a serem considerados como um limite superior de disponibilidade para o processo do corte/empacotamento. Em alguns casos, o limite inferior é idêntico ao limite superior, como por exemplo, no problema da Mochila em que um único objeto pode ser cortado em itens. Reciprocamente, no problema do corte de estoque todos os itens requeridos devem ser produzidos.

Limites inferiores e superiores não idênticos podem representar uma certa tolerância mínima e máxima, respectivamente. Em muitos casos reais de corte, os clientes aceitam uma tolerância na produção dos itens requeridos.

Propriedades adicionais são obtidas pelo sequenciamento de produção dos objetos e dos itens, ou ainda quando se determina um tempo de execução. Por exemplo, uma barra de aço pode ser cortada ainda incandescente, ou após um certo período de tempo.

Pode-se ainda considerar como restrições a data e o tempo em que um objeto ou item foi ou será cortado/empacotado. No carregamento de contêineres, dependendo do produto, é de fundamental importância a separação dos itens por data de vencimento.

3.5. Padrão de Corte

Para a construção de um padrão de corte, pode-se considerar quatro classes de restrições, dadas pela distância de corte, orientação, frequência de ocorrência e tipo de corte.

3.5.1. Restrição de distância de corte

Esta restrição é considerada quando se fizer necessária

uma distância mínima ou máxima entre cortes que dividem os objetos. Como exemplo temos o corte de vidro em que dois cortes não podem ser produzidos a menos de uma certa distância.

3.5.2. Restrição de Orientação

A restrição de orientação pré-determinada de itens ou de objetos devem ser consideradas. O problema do corte de madeira é um exemplo típico de problema com esta restrição. Tal tipo de restrição está melhor definido em 3.2.3.

3.5.3. Restrição de Frequência

Esta restrição considera o índice de frequência de itens no padrão, especialmente a combinação de itens diferentes. Como exemplo, suponha um problema em que um determinado item tenha um limite de ocorrência em cada padrão.

3.5.4. Tipo de Corte

Os processos de corte geralmente estão restritos a tecnologia dos equipamentos de corte, o que leva a uma restrição dos possíveis padrões de cortes a serem produzidos. O tipo de corte utilizado é de fundamental importância na resolução do problema.

Um grande número de trabalhos encontrados na literatura refere-se a cortes do tipo reto, para objetos e itens na forma retangular ou de blocos. Alguns problemas com cortes curvos são encontrados em Albano-Sapuppo(1980), Sarin (1983), e Farley (1988). Exemplos ocorrem nas indústrias de tecidos e discos.

Os cortes retos podem ser classificados em ortogonais e

não-ortogonais. Os cortes ortogonais produzem itens a partir do corte paralelo a um dos lados do objeto.

Os cortes ortogonais podem ainda ser classificados como cortes guilhotinados e cortes não guilhotinados. Os cortes não guilhotinados são produzidos por equipamentos que, após o início do corte, permitem a interrupção do processo de corte, antes de alcançar o outro lado do objeto, e a partir daí conduz a um corte perpendicular ao então produzido. Este tipo de corte pode ser encontrado no corte de chapas metálicas para a indústria automobilística.

O corte guilhotinado é muito utilizado nas indústrias de papel, móveis e vidro, devido a sua simplicidade e as restrições dos equipamentos de corte utilizados. Neste processo o corte é produzido sobre um objeto, resultando duas partes do objeto, menores e adjacentes. Isto é, o corte inicia-se de um lado do objeto e atravessa em linha reta até o lado oposto, de forma ortogonal.

Padrão de corte guilhotinado

Padrão de corte não guilhotinado

figura 3.5.4.a

Chama-se de estágio a produção de um certo número de cortes guilhotinados numa mesma direção sobre os objetos ou sobre partes dos objetos, resultantes do estágio anterior. Os cortes produzidos em um estágio são perpendiculares ao cortes produzidos no estágio antecedente.

Devido a restrição de equipamento, ou do manuseio de objetos intermediários, alguns processos limitam o número máximo de estágios permitidos em um padrão de corte. Por isso, os cortes guilhotinados são classificados ainda como cortes estagiados e não-estagiados.

Os processos com limite N de estágios de corte são denominados cortes N -estagiados.

figura 3.5.4.b
Padrão de corte 3-estagiado

3.6. Forma de Alocação

Um problema de corte de estoque consiste em cortar objetos em estoque a fim de produzir itens encomendados. Este mesmo problema pode ser como uma de maneira de alocar itens em objetos.

Dados objetos e itens, pode-se distinguir claramente se uma seleção de itens ou se todos os itens podem ser associados a padrões correspondentes (não triviais). O problema clássico do Corte de Estoque é exemplo de associação de todos os itens a uma

seleção apropriada de objetos, enquanto que o problema da mochila trabalha com a seleção de itens a serem combinados em um padrão não trivial para o objeto.

A alocação de figura de itens em objetos é dada em função de seu formato e número de itens permitidos.

Pode-se ter dois tipos de alocação de itens requeridos em objetos estocados:

- alocação por seleção de objetos
- alocação por seleção de itens.

3.6.1. Alocação por seleção de objetos

No problema de seleção de objetos, parte-se do princípio de que o conjunto de objetos é suficiente para agrupar todos os itens requeridos. Então, um sub-conjunto de objetos será selecionado para agrupar todos os itens.

3.6.2. Alocação por seleção de itens

Analogamente à seleção de objetos, o problema de seleção de itens consiste em determinar um sub-conjunto de itens para utilizar todos os objetos em estoque.

3.7. Objetivos

Os objetivos dos problemas do corte/empacotamento devem ser expressos, tanto quanto possível, nas funções objetivos dos modelos de corte/empacotamento. Considera-se um objetivo como um critério a ser maximizado ou minimizado.

Pode-se ter objetivos dos mais diversos tipos, entre eles destacam-se:

- maximização da produtividade, que pode ser dada pela maximização de itens a serem produzidos, a minimização dos objetos utilizados no atendimento da demanda, a minimização de perda de material, ou ainda a minimização de perda percentual, todos relacionados com a eficiência técnica do processo de corte.
- minimização do custo ou a maximização do lucro, relacionados com a eficiência econômica do processo de corte.

3.8. Tipologia de Dyckhoff

Com o intuito de unificar os diferentes usos na literatura e concentrar pesquisas futuras sobre diferentes tipos de problemas de corte/empacotamento, Dyckhoff (1990) apresentou uma tipologia global fundamentada na estrutura lógica de tais problemas.

Segundo Dyckhoff a estrutura lógica comum aos problemas de corte/empacotamento é determinada:

- (i) pela existência de dois grupos básicos cujos elementos definem um conjunto geométrico de formas fixas (figuras dos objetos e itens) em uma ou mais dimensões espaciais:
 - o estoque denominado objeto.
 - listas de volumes ordenados chamados de itens.
- (ii) pela geração de padrões, combinações geométricas de itens em objetos. Figuras que ocorrem no padrão, não associadas a itens, são usualmente tratadas como aparas.

Para a elaboração desta tipologia foram consideradas quatro características de classificação dos problemas de corte/empacotamento, bem como suas divisões em tipos principais.

A primeira característica considerada foi a dimensão do problema, em virtude de sua complexidade estar envolvida pela geometria das figuras dos objetos e itens (cf. 3.1). As dimensões consideradas foram Unidimensional, Bidimensional, Tridimensional e Multidimensional.

A segunda característica é dada pela forma de alocação das figuras dos itens e dos objetos, sendo considerada a seleção de objetos (V - do alemão "Veladeproblem"), e a seleção de itens (B - do alemão "Beladeproblem"), (cf 3.6).

O agrupamento de objetos é a terceira característica, e considera problemas com somente um objeto (O - do inglês "One"), com todos os objetos idênticos (I - do inglês "Identical") e com todos os objetos de figuras diferentes (D - do inglês "Different"), (cf 3.3).

A quarta característica é dada pelo agrupamento de itens com distinções para problemas com todas as figuras congruentes (C - do inglês "Congruent"), com poucas figuras diferentes (F - do inglês "Few"), com muitas figuras diferentes (M - do inglês "Many"), e com muitos itens com relativamente poucas figuras diferentes (R - do inglês "Relatively"), (cf. 3.3).

Os diferentes tipos de problemas de corte/empacotamento podem ser denotados pela quádrupla de símbolos $\alpha/\beta/\gamma/\delta$, correspondentes respectivamente, a dimensão, forma de alocação, agrupamento de objetos, e agrupamento de itens. As quatro características, bem como seus principais tipos são mostrados a seguir:

α - Dimensão do problema

- 1 - Unidimensional
- 2 - Bidimensional
- 3 - Tridimensional
- N - Multidimensional

β - Forma de alocação

- B - Todos os objetos e uma seleção de itens
- V - Todos os itens e uma seleção de objetos

γ - Agrupamento de objetos

- O - somente um objeto
- I - objetos de figuras idênticas
- D - objetos de figuras diferentes

δ - Agrupamento de itens

- C - todos os itens de figuras congruentes
- F - poucos itens de figuras diferentes
- M - muitos itens de muitas figuras diferentes
- R - muitos itens de relativamente poucas figuras diferentes (não congruentes)

Pela combinação das características consideradas para a tipologia temos 96 tipos diferentes ($4 \times 2 \times 3 \times 4$) de problemas de corte/empacotamento.

O problema do corte de estoque bidimensional, comumente estudado, é representado por $2/V/I/R$, sendo $\alpha = 2$, $\beta = V$, $\gamma = I$ e $\delta = R$, o que significa problema bidimensional que considera a seleção de objetos de figuras idênticas, para a produção de muitos itens de relativamente poucas figuras diferentes.

A fim de exemplificar a aplicação desta tipologia, a tabela 3.2 associa problemas de cortes/empacotamento encontrados na literatura às suas representações simplificadas, como combinação dos tipos característicos. A ausência de um símbolo na

quádrupla $\alpha/\beta/\gamma/\delta$ significa que todos os tipos da característica não apresentada são possíveis ao problema.

tabela 3.2.
Problemas associados a combinação de tipos

Problema	Notação
Mochila (clássico)	1/B/O/
Mochila	/B/O/
Corte de Estoque (clássico)	1/V/I/R
Corte de Estoque bidimensional	2/V/I/R
Corte de Estoque	1/ / /
	2/ / /
	3/ / /
Empacotamento de Bins (clássico)	1/V/I/M
Empacotamento de Bins bidimensional	2/V/D/M
Empacotamento de Bins (dual)	1/B/O/M
Carregamento de Paletes	2/B/O/
	2/V/I/M
Carregamento de Contêineres	3/V/I/
	3/B/O/
Carregamento de Veículos (clássico)	1/V/I/F
	1/V/I/M
Alocação de Tarefas	N/V/I/

Como pode-se perceber pela notação, os problemas da Mochila (clássico), do Carregamento de Paletes e do Carregamento

de Contêineres diferem apenas na característica de dimensionalidade, enquanto que os problemas clássicos do Corte de Estoque, do Empacotamento de Bins, e do Carregamento de Veículos pertencem a mesma combinação de tipos quando consideradas somente as três primeiras características.

Diferenças entre problemas com mesma notação podem existir, uma vez que esta notação reduzida determina apenas tipos gerais, cada um deles envolvendo uma variedade de problemas ainda distintos. Como exemplo, os agrupamentos de objetos e itens não diferenciam as formas das figuras regulares das figuras irregulares. Diferenças referem-se as características e tipos não considerados nesta tipologia.

Para uma abrangência maior dos problemas do corte e empacotamento, esta tipologia poderia ser estendida com a inclusão de novas características e tipos, mas Dyckhoff, em virtude da grande variedade de problemas, sugere a utilização de um segundo nível de classificação para um tipo específico de problema a ser estudado.

4. PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL GUILHOTINADO NÃO-ESTAGIADO E IRRESTRITO

O problema de corte bidimensional, que será objeto de estudo neste trabalho, consiste em cortar objetos (no caso, uma placa retangular) a fim de produzir itens (peças retangulares), de modo a otimizar uma função objetivo (por exemplo, minimização de apara).

Diferentes abordagens e restrições para o problema foram propostas na literatura por vários autores. Pode-se citar os trabalhos de Gilmore e Gomory (1965), Beasley (1985a), Morábito (1989, 1992), e Morábito et al (1989,1991,1992a), entre outros.

Neste trabalho de dissertação, estudou-se o problema do corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito - 2/B/O/, e foram exploradas soluções obtidas pela abordagem em grafo-E/OU com estratégia de busca híbrida "Depth-First/Hill-Climbing", com combinação de várias heurísticas.

4.1. Descrição

O problema consiste em cortar um objeto retangular de comprimento e largura (L,W) , em m itens retangulares (l_i, w_i) , com valores de utilidades v_i , $i=1, \dots, m$, de modo a maximizar a soma dos valores de utilidade dos itens cortados.

Um padrão de corte para o problema é dado por $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $a_i \geq 0$ e inteiro, $i=1, \dots, m$, se for possível produzir a_i itens do tipo i , pelo processo de corte do objeto (L,W) .

Um padrão de corte dado por $(1,0,3,2,0)$ corresponde a

produção de um item do tipo 1, 3 itens do tipo 3, 2 itens do tipo 4, e nenhum item dos tipos 2 e 5.

Figura 4.1

Padrões de cortes dados por $(1,0,3,2,0)$

A figura 4.1 ilustra diferentes padrões de cortes dados pelo mesmo vetor $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ que são chamados de padrões de cortes equivalentes.

O problema pode ser assim descrito:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad f = \sum_{i=1}^m v_i a_i \\ &\text{sujeito a que } (a_1, \dots, a_m) \\ &\text{seja um padrão de corte bidimensional} \\ &\text{guilhotinado para o objeto } (L, W) \end{aligned} \quad (1)$$

A solução ótima para o problema (1) é dada pelo padrão de corte de valor utilitário máximo.

Se o problema é restrito à produção máxima de b_i quantidades de itens (l_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, então o problema consiste em:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad f = \sum_{i=1}^m v_i a_i \\ &\text{sujeito a que } (a_1, \dots, a_m) \\ &\text{seja um padrão de corte bidimensional} \\ &\text{guilhotinado para o objeto } (L, W) \\ &\text{e} \quad 0 \leq a_i \leq b_i, \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

Se há demanda a ser atendida na produção de itens, os problemas (1) ou (2) são utilizados para a geração de colunas para o programa linear proposto por Gilmore e Gomory e v_i , $i=1, \dots, m$ são funções dos multiplicadores de Lagrange do Método Simplex. Para maiores detalhes consultar Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965) e Morábito (1989).

Herz (1972) propôs um método exato, utilizando a estratégia Backtracking. Porém, para problemas grandes esta abordagem torna-se inviável computacionalmente, em virtude de produzir uma explosão combinatorial dos possíveis padrões de corte.

Para problemas grandes, Beasley (1985a), utilizando programação dinâmica, sugere uma heurística para eliminação de alguns possíveis cortes, o que reduz o universo de soluções. Esta heurística pode ser aplicada ao procedimento de Herz, bem como às buscas em grafo-E/OU que serão vistas a seguir, propostas por Morábito et al. (1989, 1992), e Morábito e Arenales (1991, 1992a).

4.2. Redução de cortes possíveis

A seguir, são definidas regras que reduzem a produção de cortes sobre um retângulo genérico.

4.2.1. Discretização

Herz (1972) demonstrou que cortes guilhotinados podem ser representados, sem perda de otimalidade, por combinações lineares não negativas das dimensões dos itens, isto é, os possíveis cortes ao longo do comprimento L e largura W podem ser representados pelos elementos dos conjuntos X e Y , de possíveis discretizações do objeto (L, W) , definidos por:

$$X = \{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot l_i, 1 \leq x \leq L - \min \{l_i\}, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i=1, \dots, m \}$$

e

$$Y = \{ y \mid y = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 1 \leq y \leq W - \min \{w_i\}, \beta_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i=1, \dots, m \}$$

O referido autor demonstrou que para qualquer padrão de corte sobre (L, W) , existe um outro padrão de corte com valor maior ou igual a este e com todos os cortes em X e Y . Isto reduz os exames envolvidos no procedimento de resolução para o processo finito de percorrer X e Y .

Denomina-se padrão de corte canônico ao padrão com todos os cortes em X e Y , e padrão de corte homogêneo ao padrão canônico com apenas um tipo de item (l_i, w_i) , $i=1, \dots, m$.

Figura 4.2.

Padrão de cortes homogêneos

Dependendo das dimensões do objeto (L, W) e dos itens (l_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, isto é, se as razões L/l_i e W/w_i são muito pequenas, o número de elementos de X e Y pode chegar a milhões, o que torna o método exato, para percorrer os conjuntos X e Y , inadequado.

Fórmulas recursivas para a construção dos conjuntos X e

Y foram propostas por Beasley (1985), e Christofides e Whitlock (1977).

4.3. Eliminação de padrões equivalentes

A seguir são definidas algumas regras que podem ser utilizadas no processo de resolução do problema, para a eliminação de ocorrências de padrões de cortes equivalentes.

4.3.1. Simetria

Supondo que um objeto (x,y) seja cortado em x_1 , $x_1 \in X$, produzindo $(x-x_1,y)$ e (x_1,y) . Supondo x_2 , $x_2 \in X$ tal que $x_2 = x - x_1$.

Então, pode-se produzir um corte em (x,y) dado por (x_2,y) e $(x-x_2,y)$, o que resulta uma duplicação dada por $(x-x_1,y)$ e (x_2,y) , onde $x_2 = x - x_1$, conforme figura 4.3.1.

figura 4.3.1. Duplicação de padrões - simetria

Se $x_2 \notin X$, pode-se tomar o maior elemento de X , menor que x_2 , e qualquer padrão obtido pelo corte em x_1 poderá ser obtido pelo novo corte.

Isto pode ser evitado, sem perda de otimalidade, simplesmente limitando os cortes sobre um retângulo (x,y) , em $\lfloor x/2 \rfloor$ e $\lfloor y/2 \rfloor$.

Desta forma, os conjuntos de discretizações podem ser definidos por:

$$X(x,y) = \{ x_1 \mid x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot l_i, 1 \leq x_1 \leq \lfloor x/2 \rfloor, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \}$$

e

$$Y(x,y) = \{ y_1 \mid y_1 = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 1 \leq y_1 \leq \lfloor y/2 \rfloor, \beta_i \geq 0 \text{ e inteiro} \}$$

onde, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

4.3.2. Ordenação

Christofides e Whitlock (1977) observaram que os processos de corte sobre um retângulo podem conduzir às construções de padrões idênticos de maneiras diferentes, ocorrendo assim uma duplicação do processo de corte.

figura 4.3.2
Duplicação de padrões - ordenação

Para a não duplicação do processo de corte, sem perda de otimalidade, os referidos autores sugeriram que fosse feita uma ordenação arbitrária nos cortes. Por exemplo, se um retângulo (x,y) sofre um corte vertical em x_1 , $x_1 \in X$, então todos os cortes verticais subsequentes sobre $(x-x_1,y)$ e (x,y) devem ser maiores ou iguais a x_1 .

4.3.3. Exclusão

Seja (x_1,y) produzido a partir de (x,y) , $x_1 \in X$. A exclusão da peça (l_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, pode ser dada, se $w_i > y$, uma vez que não é possível produzir (l_i, w_i) a partir de (x_1,y) , como mostra a figura 4.3.3.

figura 4.3.3

Exclusão da peça i ($w_i > y$)

Considerando a exclusão, redefinimos:

$$X(x,y) = \{ x_1 \mid x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot l_i, 1 \leq x_1 \leq \lfloor x/2 \rfloor, (w_i > y \Rightarrow \alpha_i = 0), \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i=1, \dots, m \}$$

Supondo (x, y_1) produzido a partir de (x,y) $y_1 \in Y$, redefine-se analogamente,

$$Y(x,y) = \{ y_1 \mid y_1 = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 1 \leq y_1 \leq \lfloor y/2 \rfloor, (l_i > x \Rightarrow \beta_i = 0), \beta_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i=1, \dots, m \}$$

4.4. Limitantes Inferiores e Superiores

Suponha um objeto de dimensões (x,y) . Considere,

$$I(x,y) = \{ i \mid l_i \leq x, w_i \leq y, i=1, \dots, m \}$$

o conjunto de todos os possíveis itens a serem produzidos em (x,y) .

Um limitante inferior $\mathcal{L}$ para o valor da solução ótima de (x,y) pode ser dado pelo padrão de corte homogêneo para (x,y) , isto é, o valor $\mathcal{L}(x,y)$ corresponde a uma solução trivial que consiste em preencher (x,y) com itens (x_i, y_i) , $i \in I(x,y)$.

Portanto,

$$\mathcal{L}(x,y) = \max \{ v_i \cdot \lfloor x/l_i \rfloor \cdot \lfloor y/w_i \rfloor, i \in I(x,y) \}$$

Um limitante superior facilmente computável pode ser dado por relaxar o problema, considerando-se apenas as áreas dos itens i cuja solução é dada por:

$$\mathcal{U}(x,y) = (x \cdot y) \cdot \max \{ v_i / (l_i \cdot w_i), i \in I(x,y) \}$$

Seja $V(x,y)$ o melhor valor encontrado para o objeto (x,y) até o momento. Suponha que (x,y) possa ser cortado em $x_1 \in X(x,y)$, de modo a produzir (x_1, y) e $(x-x_1, y)$.

Se $V(x,y) \geq \mathcal{U}(x_1, y) + \mathcal{U}(x-x_1, y)$ então a geração de nós não é necessária. No entanto, se $V(x,y) < \mathcal{L}(x_1, y) + \mathcal{L}(x-x_1, y)$, então $V(x,y)$ é atualizado para o valor de $\mathcal{L}(x_1, y) + \mathcal{L}(x-x_1, y)$.

4.5. Heurísticas

Pode-se ainda, utilizar heurísticas para diminuir o número de cortes sobre um objeto (retângulo) a serem considerados.

4.5.1. Discretização de Beasley

Para problemas em que os conjuntos X e Y de discretizações sobre o objeto (L,W) são muito grandes, Beasley (1985a) propôs uma heurística que limita o número de elementos em X e Y .

Seja M um limitante da cardinalidade de X , isto é $|X| \leq M$ (M limitado pela capacidade computacional). O procedimento heurístico para redefinição de X é dado por:

- (1) Seja $D = \{1, 2, \dots, m\}$, o conjunto que representa as m peças demandadas.
 - (2) $X = \{ x \mid x = \sum_{i \in D} \alpha_i \cdot l_i, 1 \leq x \leq L - \min_{j \in D} \{l_j\}, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \}$
 - (3) Se $|X| > M$ então
 - $l_j = \min \{ l_i, i \in D \}$
 - $D = D - [j]$
 - Vá para (2)Senão
- Saia com o X atual.

Este procedimento elimina a cada passo o item i com menor comprimento l_i do conjunto D , até que o conjunto X tenha um certo número de elementos aceitável para a resolução do problema.

Analogamente, redefine-se o conjunto Y .

Com a consideração desta heurística no procedimento de resolução do problema, não se pode garantir que a solução encontrada seja a solução ótima.

4.5.2. Limitantes heurísticos

Limitantes heurísticos foram propostas por Morábito et al (1992) para eliminação de cortes, em função dos limitantes inferiores e superiores discutidos em 4.4, da seguinte maneira:

Sejam α e β parâmetros previamente definidos.

Se,

$$\alpha (U(x_1, y) + U(x-x_1, y)) \leq Z(x, y)$$

ou

$$\beta (Z(x_1, y) + Z(x-x_1, y)) \leq Z(x, y)$$

então, este corte sobre (x, y) não precisa ser produzido. Isto é, se $(U(x_1, y) + U(x-x_1, y))$ ou se $(Z(x_1, y) + Z(x-x_1, y))$ não for muito maior do que $Z(x, y)$, este pode ser um indicativo de que este corte sobre (x, y) não é tão promissor, o que implica em descartá-lo.

4.6. Fórmula recursiva de Beasley

A fórmula recursiva de Beasley (1985a), baseado em programação dinâmica para encontrar a solução ótima do problema bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, é dada por:

Sejam

$F(x, y)$: valor da função objetivo de (x, y)

e

$H(x,y) = \max \{v_i \cdot \lfloor x/l_i \rfloor \cdot \lfloor y/w_i \rfloor, i=1, \dots, m\}$:
o melhor padrão de corte homogêneo para (x,y) .

Então,

$$F(x,0) = F(0,y) = 0 \quad \forall x, \forall y$$

$$F(x,y) = \max \{ H(x,y); \\ \{ F(x_1,y) + F(\lfloor x-x_1 \rfloor_x, y), x_1 \in X, x_1 \leq x-1 \}; \\ \{ F(x,y_1) + F(x, \lfloor y-y_1 \rfloor_y), y_1 \in Y, y_1 \leq y-1 \} \}$$

$$x \in X \cup \{L\}, y \in Y \cup \{W\}$$

onde,

$$\lfloor x \rfloor_x = \max \{0, x_1 \mid x_1 \leq x, x_1 \in X\}$$

$$\lfloor y \rfloor_y = \max \{0, y_1 \mid y_1 \leq y, y_1 \in Y\}$$

A deficiência do método reside no fato de que se os conjuntos X e Y , a serem considerados na aplicação do procedimento recursivo, não forem completamente gerados, isto é, forem limitados por um certo valor M (capacidade de máquina), a solução ótima pode não estar representada em $X \times Y$, o que conduzirá a uma solução quase ótima.

Morábito et al (1992) mostraram que este procedimento, com a redução de X e Y , pode perder soluções simples, encontradas por exemplo pelo algoritmo 2-estagiado.

4.7. Fórmula de Christofides e Whitlock

Christofides e Whitlock (1977) propuseram uma fórmula recursiva para a construção de X e Y em qualquer retângulo $(x,y) \in (L,W)$. Inicialmente, ela é aplicada apenas em (L,W) e depois os conjuntos X e Y são construídos para qualquer $(x,y) \in (L,W)$.

Supondo-se, sem perda de generalidade, que as m peças estão na ordem não-decrescente $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$.

Então,

$$F_i(x_1) = \min \{ F_{i-1}(x_1); \\ \max \{ w_i; \min \{ F_i(x_1 - \rho l_i), 1 \leq \rho \leq \lfloor x_1 / l_i \rfloor \text{ e } \rho \text{ inteiro} \} \} \\ l_i \leq x_1 \leq \lfloor L/2 \rfloor \\ F_i(x_1) = F_{i-1}(x_1), x_1 < l_i$$

onde,

$$F_i(0) = 0, i=0, \dots, m \\ F_0(x_1) = \infty, x_1=1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor \\ \lfloor x \rfloor: \text{maior inteiro menor ou igual a } x$$

Seja $F_i(x_1)$ finito, correspondente a mínima entre as máximas larguras dos itens (peças) $1, 2, \dots, i$ que combinados os seus comprimentos produzem x_1 , isto é,

$$F_i(x_1) = \min \{ F_{i-1}(x_1); \max \{ w_j | \alpha_j > 0, j=1, \dots, i \} \}$$

O conjunto $X(x, y)$ pode ser construído para qualquer (x, y) , determinado $F_m(x_1)$. Se $F_m(x_1) \leq y$ então $x_1 \in X(x, y)$.

Assim, o conjunto de discretizações X é dado por:

$$X(x, y) = \{ x_1 | x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot l_i, 1 \leq x_1 \leq \lfloor x/2 \rfloor \text{ e } F_m(x_1) \leq y, \alpha_i \geq 0 \\ \text{e inteiro} \}$$

Analogamente, uma função $G_i(y_1)$ similar a $F_i(x_1)$ pode ser dada por:

$$Y(x, y) = \{ y_1 | y_1 = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 1 \leq y_1 \leq \lfloor y/2 \rfloor \text{ e } G_m(y_1) \leq x, \beta_i \geq 0 \\ \text{e inteiro} \}$$

5. REPRESENTAÇÃO EM GRAFO-E/OU

A utilização de grafo-E/OU para representação de problemas, bem como a utilização de estratégias de buscas em grafo para a resolução de problemas, são métodos e técnicas utilizados na área de Inteligência Artificial.

A seguir, é introduzida uma abordagem em grafo-E/OU, para representar o melhor padrão de corte para o problema bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, como caminhos completos do grafo.

5.1. Conceitos básicos

Supondo o problema de cortar um objeto, no presente caso uma placa retangular (L, W), com a finalidade de produzir itens, peças retangulares (l_i, w_i). A solução para tal problema é dada pelo padrão de corte guilhotinado que maximizar a soma das áreas das peças cortadas.

O processo de corte guilhotinado sobre a placa produz exatamente dois novos retângulos, que devem ser cortados até que sejam obtidas as peças requeridas. A figura 5.1.a ilustra uma sequência de corte sobre uma placa $A = (L, W)$.

figura 5.1.a - Sequência de cortes sobre A

Inicialmente, um corte guilhotinado vertical aplicado sobre $A = (L,W)$ produziu os retângulos B e C. Supondo B e C retângulos intermediários que não representam as peças a serem produzidas, então um processo de corte sobre eles foi aplicado, independentemente. Aplicando um corte vertical sobre B, foram produzidos D e E, sendo que D representa uma peça a ser produzida, e E um retângulo a ser cortado. Um corte horizontal foi aplicado em E, e dois retângulos F e G que representam peças a serem produzidas foram gerados. Finalmente, um corte vertical foi executado em C, produzindo os retângulos finais H e I.

A sequência de cortes sobre A produziu o seguinte padrão de corte para o problema:

figura 5.1.b

Padrão de cortes sobre A

Denomina-se nó um retângulo a ser cortado, isto é, um problema a ser resolvido; nó inicial ou nó raiz a placa (L,W) a ser cortada, ou o problema original a ser resolvido; nós intermediários aos retângulos intermediários a serem cortados; e nós finais ou nós folhas aos retângulos que representam peças (l_i, w_i) a serem produzidas, ou uma apara resultante do processo de corte.

A ação de cortar um determinado nó é representada por um arco, denominado arco-E, que interliga o nó cortado com seus sucessores.

O conjunto de nós e arcos é denominado grafo. Um grafo é dito direcionado ou dígrafo quando os arcos apontam para os nós, mostrando a relação existente entre os nós. A figura 5.1.a ilustra um grafo direcionado, com nó inicial A, nós intermediários B, C, E, e nós finais D, F, G, H e I.

Se um arco é direcionado do nó x para o nó x_1 , então o nó x_1 é chamado sucessor ou filho de x e o nó x é chamado pai de x_1 .

Além disso, se um grafo tiver alternativas de decomposição dos problemas, esta representação é indicada por arcos-OU.

Chamou-se de grafo-E/OU a estrutura que contém arcos do tipo E e arcos do tipo OU. A figura 5.1.a representa um grafo-E/OU com apenas uma opção de corte para o nó A. O número de arcos-OU que emanam de um nó corresponde ao grau de ramificação deste nó.

Nota-se que a aplicação de um corte em um nó decompõe este nó em dois novos nós sucessores. Portanto, a solução de um nó é dada pela união das soluções de seus nós sucessores. Este processo de decomposição é considerado pela área de Inteligência Artificial como Redução do Problema, e a estrutura de representação mais comumente utilizada vem sendo o grafo-E/OU.

A sequência de arcos $a_1 a_2 \dots a_k$, que interliga seus respectivos nós sucessivamente, é dita caminho com comprimento k , $k > 1$, e sua representação é um subgrafo-E/OU. Num grafo-E/OU, um caminho é dado pela escolha de um único arco-E, e a partir de cada sucessor escolhe-se novamente um único arco-E. O caminho que

começa no nó inicial e termina em nós finais é denominado caminho completo. Note que a figura 5.1.a ilustra um caminho completo para A.

O valor de um caminho completo é dado pela soma dos valores dos nós, sendo que se um nó final representa uma peça (l_i, w_i) a ser produzida, então, o seu valor é v_i . Senão o valor é zero.

Pode-se dizer que para todo padrão de corte existe um caminho completo no grafo-E/OU correspondente. Então, o problema de encontrar o melhor padrão de corte consiste em buscar no grafo-E/OU o melhor caminho completo, isto é, o caminho completo de maior valor, no caso de maximização.

A profundidade de um nó no grafo é dada pela profundidade de seu nó pai somado com um, sendo que a profundidade do nó inicial é zero (por exemplo, na figura 5.1.a a profundidade do nó F é 3), enquanto que a profundidade de um grafo é dada pelo valor da profundidade do nó mais distante do nó raiz.

Denomina-se árvore-E/OU ao grafo-E/OU cujos nós têm um único pai, exceto o nó inicial. A figura 5.1.a, representa uma árvore-E/OU.

5.2. Estratégias de Busca

Um grafo pode ser representado implícita ou explicitamente, porém a representação explícita para grafos com muitos nós é praticamente inviável. Na tentativa de sanar este problema, usa-se uma busca no grafo-E/OU que consiste em explicitar (gerar) apenas uma parte do grafo, o suficiente para exibir pelo menos um caminho completo.

Pearl (1984), ao se referir ao processo de busca, denomina nó expandido ao nó com todos os seus sucessores já gerados, e nó explorado ao nó com apenas alguns sucessores gerados. Durante a busca pode-se ter:

- nós expandidos,
- nós explorados, mas não expandidos,
- nós gerados, mas não explorados,
- nós ainda não gerados.

Uma estratégia de busca consiste em gerar nós, a partir do nó inicial, utilizando-se regras, de maneira a obter uma solução para o problema.

As regras básicas de geração de nós podem ser classificadas em regras informadas, que escolhem um nó pelo uso de informações colhidas durante o processo de busca, e regras não informadas, que determinam *a priori* a ordem de escolha do nó a ser resolvido.

Como exemplos de estratégias que utilizam regras informadas tem-se os procedimentos de busca "Hill-Climbing" e "Best-First", enquanto que o "Depth-First" e "Breadth-First" são exemplos de estratégias com regras não-informadas.

5.2.1. Busca em Largura-primeiro - "*Breadth-First search*"

A busca em largura-primeiro, consiste em expandir os nós mais próximos ao nó inicial. Isto é, expandir os nós na ordem em que foram gerados.

5.2.2 Busca em Profundidade-primeiro - "*Depth-First search*"

A busca em profundidade-primeiro consiste em expandir primeiro os nós mais recentemente gerados, isto é, uma vez

expandido o nó inicial é escolhido o primeiro nó filho (por convenção o mais a esquerda), e este é expandido, ignorando momentaneamente os outros nós gerados. Segue-se desta maneira até encontrar uma solução para o problema ou até encontrar um nó final. Neste caso ocorre um retorno ao nó mais recentemente gerado, e novamente é escolhido o nó mais a esquerda e o processo continua analogamente.

"Backtracking"

Uma importante variação da busca em profundidade-primeiro é a estratégia backtracking, que ao invés de expandir, consiste em explorar os nós mais recentemente gerados.

5.2.3. Busca da Escalada - *"Hill-Climbing search"*

A busca da escalada emprega a estratégia de tentar obter a solução ótima pela escolha dos nós que parecem ser mais promissores, isto é, depois de expandido um nó, é escolhido o melhor nó dentre todos os seus sucessores para ser expandido, descartando todos os demais.

5.2.4. Busca pelo Melhor-primeiro - *"Best-First search"*

A estratégia de busca pelo melhor-primeiro examina, a cada passo do processo, todos os nós gerados até o momento e expande o mais promissor. Este método combina as vantagens da busca em Profundidade-primeiro e da busca em Largura-primeiro.

Para um estudo mais aprofundado sobre os procedimentos de busca, geralmente utilizados em Inteligência Artificial, consultar Kivita (1988), Nilsson (1971), Pearl (1984), Rich (1983), e Shiray e Tsujii (1988).

5.2.5. Busca híbrida

Segundo Pearl (1984), caracterizando-se as estratégias de busca "Depth-First - Backtracking" (DF), "Best-First" (BF) e "Hill-Climbing" (HC) ao longo das dimensões:

- Recuperação (R): grau de retomada a novos caminhos previamente suspensos,
- Alcance (A): número de alternativas consideradas em cada escolha de um caminho,

nota-se que estas se encontram em três pontos extremos de uma região contínua de técnicas de busca, como mostra a figura 5.2.5.

Figura 5.2.5
Estratégias de buscas híbridas

Ao longo da dimensão de Recuperação encontra-se em um extremo o "Hill-climbing", que não permite a recuperação de caminhos suspensos, e num outro extremo tem-se o "Depth-first - backtracking" e "Best-first", em que as escolhas dos caminhos são provisórias.

Considerando a dimensão de Alcance, encontra-se no extremo de caminhos recém gerados os métodos "Hill-Climbing" e "Depth-First - Backtracking", e no outro extremo o "Best-First" que examina a cada escolha a totalidade de caminhos disponíveis.

A área hachurada representa as combinações possíveis de características destas três estratégias de buscas. Tais combinações são denominadas estratégias de buscas híbridas.

Pode-se dizer que as estratégias de busca DF e BF encontram a solução ótima para um problema, se a solução existir. Porém, dependendo do problema, DF pode consumir muito tempo computacional e BF pode consumir muita memória. Já o HC pode consumir pouca memória e pouco tempo, porém não pode garantir que a solução ótima será encontrada.

Preocupados com o fato de que problemas de cortes possam conduzir a uma resolução com tempo computacional elevado e muito consumo de memória, Morábito et al (1989, 1991, 1992, 1992a), propuseram um algoritmo de busca híbrida, que combina as estratégias de busca "Hill-Climbing" e "Depth-First - Backtracking", denominado HC_DF. Tal procedimento utiliza pouca memória e permite encontrar rapidamente uma boa solução para um problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, isto é, o melhor padrão de corte.

Encontrar o melhor padrão de corte para o problema consiste em gerar uma parte de um grafo-E/OU, até que o nó inicial seja resolvido. Diz-se que um nó x está resolvido se:

- (i) for um nó final;
- (ii) todos os sucessores de x estiverem resolvidos;
- (iii) a condição $\mathcal{L}(x)=\mathcal{U}(x)$ for satisfeita (Seção 4.4).

Pearl (1974) e Nilsson (1971) apresentaram definições diferentes para o nó resolvido, porém esta é a mais adequada para descrever o algoritmo adiante.

Para uma simplificação, utiliza-se árvore-E/OU ao invés de grafo-E/OU, pois são mais simples de serem geradas, uma vez que cada nó recém gerado é único, isto é, supõe-se que ele não tenha sido gerado anteriormente e que não será gerado novamente.

De maneira geral, exibe-se a seguir os algoritmos de busca em grafo-E/OU (árvore), utilizando as estratégias "Depth-First - Backtracking" (DF) e HC_DF, com profundidade limite (Depth) *a priori* definida.

Algoritmo DF

Coloque o nó inicial, denominado s , em OPEN.

Enquanto OPEN não estiver vazio e s não estiver *resolvido*, faça:

Examine o nó do topo de OPEN e chame-o de (x_1, x_2) .

Se a profundidade de (x_1, x_2) for igual a depth, então:

remova (x_1, x_2) de OPEN.

Senão,

Se x_1 não estiver *resolvido*, então:

Se x_1 já estiver expandido, então:

rotule x_1 *resolvido*.

Senão,

gere um novo par de sucessores de x_1 .

Chame-o (x_1', x_2') . Coloque-o no topo de OPEN.

Disponha um ponteiro de (x_1', x_2') para (x_1, x_2)

Verifique se x_1' e x_2' estão *resolvidos*.

Senão,

Se x_2 não estiver *resolvido* e se a melhor solução encontrada até o momento para o pai de (x_1, x_2)

puder ser superada, então:

Se x_2 já estiver expandido, então:

rotule x_2 *resolvido*.

Senão,

Gere um novo par de sucessores de x_2 .

Chame-o (x_1', x_2') . Coloque-o no topo de OPEN.

Disponha um ponteiro de (x_1', x_2') para (x_1, x_2) .

Verifique se x_1' e x_2' estão *resolvidos*.

Senão,

Atualize o pai de (x_1, x_2) com a melhor solução encontrada até o momento. Remova (x_1, x_2) de OPEN.

Note que OPEN é uma lista que contém os nós explorados, mas não expandidos, e os nós gerados, mas não explorados.

Algoritmo HC_DF

Defina a profundidade limite (depth) para as árvores-E/OU a serem geradas.

Seja ROOT uma lista contendo inicialmente apenas o nó inicial.

Enquanto ROOT não estiver vazia, faça:

 Seja *s* o primeiro nó de ROOT.

 Gere uma árvore-E/OU a partir do nó *s*, sem ultrapassar a depth. Utilize para isso o algoritmo "Depth-First - Backtracking" (DF).

 Retire *s* de ROOT.

 Escolha o caminho mais valioso (sub-árvore-E/OU) a partir de *s*, e elimine os demais (estratégia "Hill-Climbing" - HC).

 Se existem nós neste caminho com profundidade igual a depth, e que não sejam nós finais, então:

 Coloque-os em ROOT.

O algoritmo HC_DF será aplicado para resolução do problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito. O processo de busca termina quando o nó inicial, representando a placa (L,W), estiver resolvido.

Note que cada caminho escolhido a partir de *s* corresponde a um sub-caminho do caminho completo, desde o nó inicial até os nós finais. A estratégia "Hill-Climbing" não garante que o caminho completo de maior valor, ou melhor, o padrão de corte com maior valor, seja encontrado para o problema.

Para a eliminação de cortes e exclusão de itens durante o processo de busca, pode-se ainda utilizar regras apresentadas no

capítulo 4, tais como:

- Discretização,
- Simetria, exclusão e ordenação de itens, e
- Limitantes superiores e inferiores.

e ainda heurísticas:

- Discretização de Beasley, e
- Limitantes heurísticos.

A seguir, avalia-se a heurística de discretizações de Beasley (1985a) para a geração de possíveis cortes, comparando-a com um processo de geração aleatório dos conjuntos de discretizações. Além disto, apresenta-se uma proposta de combinação da regra de simetria com a heurística de Beasley (op. cit), e compara-se os resultados obtidos por esta combinação com os resultados apresentados na literatura, e que não consideram tal combinação.

6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os exemplos apresentados a seguir foram executados em microcomputador AT 286 compatível com IBM PC, sem co-processador aritmético, com clock de 16 MHz e 1 Mbyte de RAM.

Para mostrar a performance das heurísticas discutidas no capítulo 5, foram utilizados problemas de cortes bidimensionais guilhotinados não-estagiados e irrestritos encontrados na literatura.

6.1. Discretização

A heurística proposta por Beasley (capítulo 4, seções 2.1 e 5.1) será objeto de atenção especial inicialmente. Esta heurística seleciona um subconjunto do conjunto de discretizações, segundo a regra discutida anteriormente.

A intenção é verificar se o subconjunto escolhido é de fato "inteligente", isto é, se a solução obtida por cortes neste subconjunto é melhor que a solução obtida por um subconjunto aleatório de mesma cardinalidade.

Para determinação dos resultados foi utilizado o procedimento recursivo para percorrer os conjuntos de discretizações, proposto por Morábito (1989).

Escolheu-se o exemplo proposto por Beasley (1985, p.305) - tabela 6.1 para ilustrar o desempenho de sua heurística, para os conjuntos de discretizações ao longo das dimensões da placa. Este exemplo deriva de um problema prático de cortar um placa retangular de dimensões $L=3000$ e $W=3000$, a fim de produzir peças especificadas. O valor de utilidade de cada peça (l_i, w_i) é dado pelo valor $v_i = l_i \cdot w_i$, que corresponde a área da peça. A função

objetivo é dada pela maximização da área das peças produzidas.

Tabela 6.1.
Exemplo apresentado por Beasley

(L,W)	(3000,3000)	$(l_i, w_i) \ i=1, \dots, 32$		
(365, 185)	(520, 205)	(555, 496)	(572,1390)	(690, 447)
(378, 200)	(520, 350)	(555, 659)	(572,1490)	(949, 445)
(410, 165)	(540, 530)	(567, 473)	(572,1590)	(949, 478)
(425, 148)	(549,1413)	(572, 592)	(572,1690)	(970, 463)
(425, 296)	(549,1882)	(572, 975)	(572,1890)	
(439, 116)	(553, 496)	(572,1172)	(610, 625)	
(464,1006)	(555, 755)	(572,1575)	(660, 490)	

O gráfico 6.1 ilustra o desempenho da heurística versus uma escolha aleatória dos pontos de discretizações, para um universo de 30 execuções do problema, ordenadas em ordem ascendentes dos valores obtidos.

gráfico 6.1.
Heurística de Beasley x Escolha aleatória

Percebe-se que o resultado obtido por Beasley é significativamente melhor do que a média dos resultados obtidos pela escolha aleatória dos pontos de discretizações.

O gráfico 6.2. ilustra o desempenho da heurística de Beasley versus uma escolha aleatória restrita ao intervalo de (1000,3000). Tal intervalo foi escolhido pois possuía a maior concentração dos pontos utilizados na heurística de Beasley. Novamente, ordenou-se os resultados para uma melhor visualização.

gráfico 6.2.

Heurística de Beasley x Escolha aleatória restrita

Obteve-se soluções melhores se comparadas com a escolha aleatória irrestrita, porém, ainda assim, soluções piores em média, quando comparadas com o resultado de Beasley.

Como a heurística de Beasley, em comparação com geração aleatória dos conjuntos de discretizações, mostrou-se mais adequada, optou-se por utilizá-la neste trabalho.

6.2 Procedimento HC_DF2

Foi utilizado o algoritmo HC_DF com abordagem em grafo-E/OU para o problema de corte, inicialmente apresentado por Morábito et al (1989), e programado na linguagem Pascal.

6.2.1 Combinação da regra de simetria com a heurística de Beasley

Quando a heurística de descarte de pontos é utilizada, a regra de simetria não é mais válida. Tanto Beasley quanto Morábito, ao determinarem os subconjuntos de discretizações utilizaram o comprimento total, bem como a largura total. Embora a simetria não seja mais válida, propõe-se utilizá-la como heurística, isto é, gerar pontos de discretizações ao longo de $(L/2, W/2)$.

Nas tabelas a seguir designa-se HC_DF1 ao algoritmo com abordagem E/OU encontrado em Morábito et al., e HC_DF2 para o algoritmo HC_DF com a inclusão da regra de simetria na geração dos pontos de discretizações dos conjuntos X e Y , que está sendo proposto.

Comparações também foram feitas com o algoritmo de Beasley, baseado em programação dinâmica, com utilização da heurística para limitar o número máximo de elementos no conjunto de discretizações ao longo de (L, W) .

As melhores soluções (heurísticas) apresentadas para o problema de Beasley estão na Tabela 6.2, onde M representa o limite máximo de pontos de discretizações; $|X|$ e $|Y|$ representam a cardinalidade dos conjuntos de discretizações; α e β são valores para as heurísticas discutidas em (4.5.2); $\#$ nós significa o número de nós analisados; e depth a profundidade de cada árvore E/OU a partir de um nó raiz.

Tabela 6.2.
Soluções para o problema de Beasley

Método	M	X	Y	Depth	α	β	#nós	solução	área ocupada (%)
1	125	125	109	-	-	-	-	8.868.950	98,5224
2	200	182	161	3	0,990	1,000	245	8.944.026	99,3781
3	-	-	-	-	-	-	-	8.997.780	99,9757
4	100	86	93	3	0,999	0,999	163	8.997.780	99,9757

Os métodos 1, 2, 3 e 4 da tabela 6.2 referem-se respectivamente, aos resultados apresentados por Beasley (1985a) com programação dinâmica, Morábito et al (1992) com procedimento HC_DF1, Morábito et al (1992b) com procedimento 2-estagiado e o procedimento HC_DF2 que está sendo proposto.

Ao serem avaliados os parâmetros utilizados nos procedimentos de resolução do problema apresentado por Beasley, percebe-se que alguns destes parâmetros mostram-se significativamente diferentes. Nota-se que:

- (i) Depth = 3 foi utilizado no HC_DF2 para que se pudesse comparar com o resultado do HC_DF1 apresentado por Morábito et al. Porém, para este problema específico, a mesma solução foi encontrada com depth = 1. (Note que o método HC_DF com depth=1, torna-se Hill-climbing puro).
- (ii) Os parâmetros α e β para o HC_DF2 foram obtidos através de avaliações comparativas, utilizando-se o problema em questão, cujas comparações serão apresentadas a seguir. Os valores de

$\alpha=0,99$ e $\beta=1,00$ utilizados em HC_DF1 quando aplicados em HC_DF2 conduzem à um tempo computacional inviável.

(iii) A solução encontrada no HC_DF2 conduz ao melhor resultado para o problema encontrado na literatura até o presente momento. Tal solução fornece uma área ocupada de 99,9757% da área da placa, o que, se comparado ao resultado apresentado por Beasley, nos fornece um aumento de 1,4533% da área ocupada.

(iv) Morábito et al (1992) obtiveram o mesmo resultado apresentado pelo HC_DF2, porém considerando a restrição no padrão de corte de 2-estagiado.

Vale salientar que, mesmo obtendo este resultado por meio de dois enfoques diferentes, dados pelos problemas estagiado e não-estagiado, e tendo uma área ocupada muito grande, não se pode garantir que a solução encontrada é ótima, pois foram utilizadas heurísticas que eliminaram padrões de cortes durante o processo de resolução do problema.

6.2.2. Parâmetros

Para que se pudesse estimar (avaliar) os parâmetros M, Depth, α e β utilizados no procedimento HC_DF2, foi utilizado novamente o exemplo de Beasley (Tabela 6.1) e procedeu-se variações dos parâmetros utilizando-se o algoritmo HC_DF2. Algumas variações estão exibidas na tabela 6.3.

Nota-se na Tabela 6.3 que com os valores de $\alpha=0,99$ e/ou $\beta=0,99$ não é possível encontrar a melhor solução para o problema. Porém, quando $B=0,999$ é utilizado, a melhor solução para o problema é alcançada tanto para $\alpha=0,999$, quanto para $\alpha=1,000$, inclusive gerando o mesmo número de nós. Além disto, as profundidades 2 e 3 conduzem às mesmas soluções, porém isto não é

regra geral pois quanto maior a profundidade, maior é a chance de se obter um padrão melhor.

Outros valores para α e β foram testados, mas os valores apresentados conduzem às melhores soluções.

Tabela 6.3
Variações dos parâmetros - HC_DF2

M	X	Y	Depth	α	β	#nós	solução
100	86	93	2	0,990	0,990	23	8.973.360
			3			23	8.973.360
100	86	93	2	0,990	0,999	97	8.973.360
			3			151	8.973.360
100	86	93	2	0,999	0,990	23	8.973.360
			3			23	8.973.360
100	86	93	2	0,999	0,999	103	8.997.780
			3			163	8.997.780
100	86	93	2	1,000	0,999	103	8.997.780
			3			163	8.997.780
100	86	93	2	1,000	0,990	23	8.973.360
			3			23	8.973.360
200	180	170	2	0,990	0,990	27	8.973.360
			3			27	8.973.360
200	180	170	2	0,990	0,999	147	8.973.360
			3			217	8.973.360
200	180	170	2	0,999	0,990	27	8.973.360
			3			27	8.973.360
200	180	170	2	0,999	0,999	155	8.997.780
			3			235	8.997.780
200	180	170	2	1,000	0,999	155	8.997.780
			3			235	8.997.780
200	180	170	2	1,000	0,990	23	8.973.360
			3			23	8.973.360

Como se está trabalhando com heurísticas, optou-se por utilizar $\alpha = 0,999$ e $\beta = 0,999$, além de $\text{depth} = 3$ e $M = 100$; estes dois últimos em virtude de serem passíveis de comparação com outros exemplos citados na literatura.

Cinco exemplos gerados aleatoriamente e apresentados em Morábito et al (1992), exibidos na tabela 6.4, foram comparados com o HC_DF2 e os resultados estão na tabela 6.5.

tabela 6.4.
Exemplos gerados aleatoriamente

Problema (L,W)	1 (100,156)	2 (253,294)	3 (318,473)	4 (501,556)	5 (750,806)
(l_i, w_i)	(27, 32)	(130,130)	(141,128)	(136,113)	(205,163)
$i=1,10$	(16, 50)	(49,134)	(109,151)	(81,177)	(121,257)
	(47, 66)	(45, 52)	(76,142)	(237,237)	(356,343)
	(37, 46)	(64,134)	(204,124)	(184,163)	(276,236)
	(31, 51)	(38,100)	(110,165)	(153,182)	(230,264)
	(47, 51)	(121,146)	(142,168)	(233,183)	(350,266)
	(48, 44)	(48,123)	(82,238)	(241,155)	(361,225)
	(49, 45)	(83, 79)	(169, 75)	(246,160)	(369,232)
	(59, 78)	(42,187)	(165,185)	(296,278)	(445,404)
	(21, 87)	(112, 92)	(162,184)	(103,310)	(155,559)

Novamente, o valor de cada peça (l_i, w_i) é dado por $v_i = l_i \cdot w_i$, $i=1, \dots, m$.

Tabela 6.5.

Soluções para os problemas aleatórios

Problema	Solução ótima	Solução HC_DF1	# nós HC_DF1	Solução HC_DF2	# nós HC_DF2
1	15.024	15.024	741	15.024	11
2	73.176	72.172	159	72.172	3
3	142.817	142.817	1.515	142.817	123
4	265.768	265.768	977	265.768	5
5	577.882	577.882	989	577.882	5

Nota-se que somente a solução ótima do problema 2 não foi encontrada.

Para a obtenção das soluções foram utilizados, pelos dois procedimentos, $\text{depth}=3$ e $M=155$, enquanto que HC_DF1 utilizou $\alpha=0,99$ e $\beta=1,00$ e o HC_DF2 utilizou $\alpha=0,999$ e $\beta=0,999$. Uma evidente diminuição no número de nós gerados na resolução de tais problemas foi alcançada, o que confirma a importância dos parâmetros α e β , bem como da combinação da regra de simetria no conjunto de discretizações. Nota-se que a diminuição no número de nós gerados conduz a uma equivalente diminuição do esforço computacional empregado na resolução dos problemas.

Baseado no fato de que, para o problema prático exibido por Beasley, a solução dada pelo problema 2-estagiado é a mesma encontrada neste trabalho através do HC_DF2, analisou-se o desempenho destes dois enfoques. Utilizou-se os resultados apresentados por Morábito et al (1992a), que considera a geração aleatória de 50 exemplos "grandes" para uma placa de $L=1000$ e $W=1000$, conforme a tabela 6.6.

Tabela 6.6.

Soluções dos problemas aleatórios (L,W)= (1000,1000)

m	Programação Dinâmica	Solução 2-estagiado	Solução HC_DF2
10	98,00	98,26	98,44
20	98,62	99,10	99,20
50	99,07	99,65	99,51
100	99,45	99,88	99,55

Foram considerados, para a resolução através do HC_DF2, $M=100$, $\text{depth}=3$, $\alpha=0,999$ e $\beta=0,999$. Os comprimentos l_i e larguras w_i das peças foram gerados aleatoriamente dentro do intervalo $[0,05L,0,50L]$ e $[0,05W,0,50W]$, respectivamente, com $v_i=l_i \cdot w_i$.

As soluções da tabela 6.6 dizem respeito à média das soluções encontradas para os exemplos gerados, e estão apresentadas pelo percentual de ocupação das placas; m indica a quantidade de peças diferentes a serem produzidas.

Da análise da tabela 6.6 nota-se que, comparando-se as soluções 2-estagiado e HC_DF2, os resultados dependem da quantidade de peças diferentes a serem produzidas. Para problemas com menor número de peças, o HC_DF2 maximiza comparativamente a área ocupada. Inversamente, para problemas com muitas peças, o resultado é melhor no 2-estagiado. Uma comparação entre os valores médios de ocupação das placas resulta em um valor de apenas 0,040%, a favor do 2-estagiado.

Comparando-se os dois algoritmos que utilizam-se da heurística de discretização proposta por Beasley, percebe-se que existe uma melhora significativa da eficiência no HC_DF2, relativamente ao algoritmo baseado em programação dinâmica.

Novamente, uma comparação entre os valores médios de ocupação das placas resulta em um valor de 0,395%, sempre a favor do HC_DF2.

Para ilustrar as conclusões apresentadas a partir da tabela 6.6, é exibido um exemplo publicado em Morábito et al. (1991), gerado aleatoriamente e mostrado na tabela 6.7. Na tabela 6.8 apresenta-se os resultados deste problema.

Tabela 6.7.

Exemplo apresentado em Morábito et al (1991)

(L,W)	(4051,4742)	$(l_i, w_i) \ i=1, \dots, 10$			
(1633,2275)	(1249, 483)	(321, 359)	(277,2231)	(1580, 882)	
(636,1395)	(2026,1573)	(283,1880)	(1103, 632)	(1727, 449)	

Tabela 6.8.

Soluções dos problemas aleatórios da tabela 6.7.

Método	Solução	Área ocupada (%)
Programação Dinâmica	18.410.810	95,841
2-estagiado	18.688.992	97,289
HC_DF2	18.693.342	97,311

Os autores apresentaram a solução obtida pela fórmula recursiva, sendo $M = 100$, implicando em $|X| = 47$ e $|Y| = 80$, e a solução obtida pela limitação do padrão de corte em 2-estágios. O mesmo exemplo foi executado no HC_DF2, com $M = 50$, para que pudesse ser passível de comparação, resultando em $|X|=28$ e $|Y|=33$, com $\alpha = 0,999$ e $\beta = 0,999$, o que conduziu a uma solução melhor do

que às resultantes destes outros procedimentos. (Note que as cardinalidades de X e Y para o HC_DF2 são significativamente menores do que as cardinalidades utilizadas pelo procedimento de programação dinâmica)

7. CONCLUSÕES

O método heurístico de geração dos conjuntos de discretizações, proposto por Beasley (1985a) para problemas de cortes guilhotinado não-estagiado, mostrou-se eficiente, quando comparado com a geração aleatória dos conjuntos de discretizações.

A abordagem em grafo-E/OU, comumente utilizada na área de Inteligência Artificial, com a utilização da estratégia de busca híbrida "Hill-Climbing" e "Depth-First - Backtracking", para a geração de um padrão de corte para o problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado e irrestrito, mostrou-se realmente eficiente.

Outrossim, percebe-se ser possível melhorar a performance do algoritmo HC_DF através da utilização dos parâmetros α e β diferentes daqueles propostos inicialmente por Morábito et al (1992). Indica-se os valores $\alpha = 0,999$ e $\beta = 0,999$.

Finalmente, percebe-se que a combinação da regra de simetria com a heurística de Beasley, reduzindo o intervalo de discretização ao longo de $L/2$ e $W/2$, conduz a resultados computacionais mais eficazes do que a heurística de Beasley ao longo de L e W .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBANO, A., SAPUPPO, G. (1980). Optimal allocation of two dimensional irregular shapes using heuristic search methods. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics. v.10, p.242-8.
- ARCARO, V. (1988). Recorte de estoque unidimensional. São Carlos: ICMSC. 54p. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BEASLEY, J. E. (1985a). A Algorithm for unconstrained two-dimensional guilhotine cutting. Journal of the Operational Research Society. v.36, n.4, p.297-306.
- _____. (1985b). An exact two-dimensional non guilhotine cutting tree search procedure. Operations Research. v.33, p.49-64.
- CHRISTOFIDES, N., WHITLOCK, C. (1977). An algorithm for two-dimensional cutting problems. Operations Research. v.25, n.1, p.30-44.
- DAGLI, C.H.(1990). Knowledge-based systems for cutting stock problems. European Journal of Operational Research. v.44, p.160-6.
- DYCKHOFF, H. et. al. (1985). Trim loss and related problems. Omega. v.1, p.59-72.
- DYCKHOFF, H. A (1990). Typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research. v.44, p.145-59.
- DYSON, R.G., GREGORY, A.S.(1974). The cutting stock problem in the flat glass industry. Operational Research Quartely. v.25,p.41-53

EILON, S., CHRISTOFIDES, N. (1971). The loading problem. Management Science. v.17, p.259-68.

EISEMANN, K (1957). The trim problem. Management Science. v.3, p.279-84.

FARLEY, A.A. (1988). Mathematical programming models for cutting stock problems in the clothing industry. Journal of the Operational Research Society. v.39, p.41-53.

_____. (1990). The cutting stock problem in the canvas industry. European Journal of Operations Research. v.44, p.247-55.

FERREIRA, J.S., NEVES, M.A., FONSECA e CASTRO, P. (1990). A two-phase roll cutting problem. European Journal of Operations Research. v.44, p.185-96.

GILMORE, P.C., GOMORY, R.E. (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem. Operations Research. v.9, p. 849-59.

_____. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem - part II. Operations Research. v.10, p.863-88.

_____. (1965). Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. Operations Research. v.13, p.94-120.

_____. (1966). The theory and computation of Knapsack functions. Operations Research, v.14, p.1045-74.

HAESSLER, R.W. (1971). A heuristic programming solution to a non-linear cutting stock problem. Management Science. v.17B, p.793-802.

- HAESSLER, R. W. (1980). A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. *Operations Research*. v.28, p.1001-5..
- HERZ J.C. (1972). Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal Research and Development*. v.15, p.462-9.
- KVICTA, A.M. (1988). *Resolucion de problemas con inteligencia artificial*. Curitiba: EBAI. 285p.
- MORÁBITO, R.N. (1989). *Corte de estoque bidimensional*. São Carlos: ICMSC, 1989.57p. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo).
- _____. (1992). Uma abordagem em grafo-e-ou para o problema do empacotamento: aplicação ao carregamento de paletes e contêineres. Tese. (Doutorado em Engenharia de Transportes) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MORÁBITO, R. N., ARENALES, M. N., ARCARO V. F. (1989). An And-or-graph representation to generate cutting patterns for the two-dimensional cutting problem. In: *Alio-Euro Workshop on Practical Combinatorial Optimization*. Rio de Janeiro. p.1-20.
- _____. (1992). An And-or-graph approach for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*. v.58, p.263-71.
- MORÁBITO, R.N., ARENALES, M.N. (1991). On solving large two-dimensional guilhotine cutting problems. *Notas do ICMSC*. São Carlos.
- _____. (1992a). On solving large two-dimensional guilhotine cutting problems. Ed. revisada. *Notas do ICMSC*. São Carlos.

- MORABITO, R.N., ARENALES, M.N. (1992b). Staged and constrained two-dimensional cutting problems: a new approach. Notas do ICMSC. São Carlos.
- NILSSON. N.J.(1971). Problem-solving methods in artificial intelligence. New York: McGraw-Hill. 255p.
- PAULL, A.E., WALLTER, J.R. (1955). The trim problem: an application of linear programming to the manufacture of newsprint paper. Econometria. v.23, p.336.
- PEARL, J. (1984). Heuristic: intelligence search strategies for computer problem solving. Addison-Wesley, Reading, MA. 382p.
- RICH, E. (1983). Artificial intelligence, McGraw-Hill, New York.
- SARIN, S. (1983). The mixed disc packing problem: part I. IIEE Transactions. v.15, p.37-45.
- STANTON, R.S. (1977). The cutting stock problem for the stockholder of steel reinforcement bars, Operational Research Quartely. v.13, p.713-9.
- SHIRAI, Y, TSUJII, J. (1988). Inteligencia artificial: conceitos, técnicas e aplicações. Portugal: Europa-América. 178p.
- SWEENEY, P.E., HAESSLER, R.W(1990). One-dimensional cutting stock decisions for rolls with multiple quality grades, European Journal of Operations Research. v.44, p.224-31.
- TILANUS, C.B., GERHARDT, C. (1976). An Application of cutting stock in the steel industry, Operational Research. v.75, p.669-75.
- YEN, B.J. (1991). Heuristics for sequencing cutting patterns, European Journal of Operational Research. v.55, p.183-90.