UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Solução numérica do modelo de Stokes-Brinkman para escoamentos em meios porosos

Anna Caroline Felix Santos de Jesus

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Anna Caroline Felix Santos de Jesus

Solução numérica do modelo de Stokes-Brinkman para escoamentos em meios porosos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
Fevereiro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F316s Felix Santos de Jesus, Anna Caroline
 Solução numérica do modelo de Stokes-Brinkman
 para escoamentos em meios porosos / Anna Caroline
 Felix Santos de Jesus; orientador Fabrício Simeoni
 de Sousa. -- São Carlos, 2021.
 106 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Ciências de Computação e Matemática
 Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

 1. Escoamento em meios porosos. 2. Modelo de
 Darcy. 3. Modelo de Stokes. 4. Modelo de Stokes-
 Brinkman. 5. Escoamento Bifásico. I. Simeoni de
 Sousa, Fabrício, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Anna Caroline Felix Santos de Jesus

**Numerical solution of the Stokes-Brinkman model for porous
media flows**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in
accordance with the requirements of the Computer
and Mathematical Sciences Graduate Program, for
the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa

USP – São Carlos
February 2021

Para Maria, Sebastião e Karine.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Maria e Sebastião, por todo apoio e dedicação.

À minha irmã, Karine, pelos momentos de muita alegria e descontração.

Ao meu orientador, Fabrício Simeoni, pela oportunidade, paciência e seu valioso tempo para orientar cada etapa deste trabalho.

Aos professores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) e meus colegas do Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), código de financiamento 001, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2018/13028-4, pelo apoio financeiro. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade da autora e não necessariamente refletem a visão da FAPESP e da CAPES.

“O mundo é b3o, Sebast33o!”
(Nando Reis)

RESUMO

JESUS, A. C. F. S. DE. **Solução numérica do modelo de Stokes-Brinkman para escoamentos em meios porosos**. 2021. 106 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Em escoamentos em meios porosos, especialmente os provenientes de problemas de extração de petróleo, o modelo de Darcy é amplamente utilizado quando a escala de referência do escoamento é muito maior que a escala da estrutura de poros do meio poroso. Na presença de canais livres ou em domínio com alta porosidade (como em fraturas no material poroso, por exemplo), o modelo de Stokes-Brinkman é mais adequado, sendo um intermediário entre o modelo de Darcy puro e a solução direta na escala do poro através das equações de Stokes. Este trabalho propõe a simulação numérica do modelo de Stokes-Brinkman para escoamentos em meios porosos, com o objetivo de investigar os limites dessa modelagem, os desafios numéricos na sua discretização e apresentar uma nova abordagem para escoamento bifásico (água e óleo) em meios porosos heterogêneos. O modelo bifásico proposto consiste em equações de pressão-velocidade (assumindo o fluxo de Stokes-Brinkman) acopladas a uma equação hiperbólica não linear que governa o balanço de massa (equação de saturação).

Palavras-chave: Escoamento em meios porosos, Modelo de Darcy, Modelo de Stokes, Modelo de Stokes-Brinkman, Escoamento Bifásico.

ABSTRACT

JESUS, A. C. F. S. DE. **Numerical solution of the Stokes-Brinkman model for porous media flows**. 2021. 106 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In porous media flows, specially those arising from petroleum exploration, the Darcy model is largely employed, which is suitable when the domain scale is much larger than the pore scale structure of the porous material. When free channels or high-porosity media are considered (such as fractures in the porous material, for instance), the Stokes-Brinkman model is more adequate, as an intermediate model between Darcy and direct solution in the pore scale modelled by the Stokes equations. This work is concerned about the numerical solution of the Stokes-Brinkman modeling porous media flow. We investigate the limits of this formulation, the numerical challenges in its discretization and a new approach for two-phase flow (water and oil) in heterogeneous porous media. The proposed model consists of pressure-velocity equations (assuming the Stokes-Brinkman flow) coupled to a non-linear hyperbolic equation that governs the mass balance (saturation equation).

Keywords: Flow in Porous Media, Darcy Model, Stokes Model, Stokes-Brinkman Model, Two Phase Flow.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Reservatório do Pré-Sal no Brasil.	28
Figura 2 – Volume de referência em um meio poroso.	30
Figura 3 – Caracterização das fases em um deslocamento bifásico.	31
Figura 4 – Esquema do experimento de Henry Darcy sobre fluxo de água através do filtro de areia.	40
Figura 5 – Esquema de fratura de rocha.	41
Figura 6 – Representação esquemática de fraturas em poço de perfuração.	42
Figura 7 – O domínio global Ω que consiste na região do fluido Ω_f e na região do meio poroso Ω_p , separado pela interface Γ	43
Figura 8 – Perfil de velocidade ao usar um modelo Darcy-Stokes (modelo de duplo domínio) com condição de contorno Beavers & Joseph e modelo de Stokes-Brinkman (modelo de domínio único).	46
Figura 9 – Discretização do domínio Ω	47
Figura 10 – Malha deslocada.	48
Figura 11 – Volume de controle para balanço de massa.	49
Figura 12 – Volume de controle para o balanço da quantidade de movimento em x.	51
Figura 13 – Volume de controle para o balanço da quantidade de movimento em y.	53
Figura 14 – Exemplos de volumes de controle com contorno.	54
Figura 15 – Decaimento do erro com a redução do tamanho h , em escala $\log \times \log$ para o caso Stokes ($\mu' = 1$ e $\mu = 0$).	58
Figura 16 – Decaimento do erro com a redução do tamanho h , em escala $\log \times \log$ para o Caso Darcy ($\mu' = 0$ e $\mu = 1$).	59
Figura 17 – Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica.	60
Figura 18 – (a) Permeabilidade do canal em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.	61
Figura 19 – (a) Permeabilidade em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.	62

Figura 20 – (a) Permeabilidade do tipo vuggs escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.	62
Figura 21 – Permeabilidade adimensional em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade.	65
Figura 22 – (a) Comportamento GMRES: Monitoramento resíduo e (b) transição entre os regimes.	65
Figura 23 – Desenvolvimento do campo de velocidade para diferentes valores de Da .	66
Figura 24 – Comportamento GMRES: Monitoramento do resíduo.	67
Figura 25 – Distribuição dos autovalores para cada número Da .	69
Figura 26 – Três distribuições de permeabilidade: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade, regiões azuis correspondem a de baixa permeabilidade.	69
Figura 27 – Zona de transição entre os regimes limites.	70
Figura 28 – Comportamento do GMRES à medida que Da aumenta, para valores no intervalo centrado centrado em $Da = 1$. As curvas azul, vermelho, verde referem-se a geometria inclusões conectadas, inclusões e espuma aberta, respectivamente.	70
Figura 29 – Magnitude do campo de velocidade.	71
Figura 30 – Magnitude do campo de velocidade.	71
Figura 31 – Características do domínio Ω .	72
Figura 32 – Solução na malha fina com 220×60 volumes finitos para a camada superior SPE10.	73
Figura 33 – Solução na malha fina 220×60 para a camada superior SPE10.	73
Figura 34 – Comportamento de $f_\alpha(S)$, $\alpha = w, o$ para diferentes valores de M e $S \in [0, 1]$.	77
Figura 35 – Volume de controle para a equação de transporte.	86
Figura 36 – Representação do esquema em volumes finitos.	87
Figura 37 – Esquema para o problema (8.11).	88
Figura 38 – Campo de velocidade, colorido pela magnitude, para diferentes valores de Da .	89
Figura 39 – Perfis de saturação para o problema <i>quarter of the five-spot</i> homogêneo em uma malha 100×100 com $\zeta = 0$.	89
Figura 40 – Perfis de saturação para o problema <i>quarter of the five-spot</i> homogêneo em uma malha 100×100 com $\zeta = 1$.	89
Figura 41 – Permeabilidade adimensional em escala logarítmica ($\mathbf{K}^* = 1/K_{\max}\mathbf{K}$).	90
Figura 42 – Magnitudes dos campos de velocidade para o caso Stokes-Brinkman (à esquerda) e para o Darcy (à direita).	91
Figura 43 – Campos de velocidades colorido pela magnitude para diferentes valores de Da .	92

Figura 44 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para o caso Darcy $\zeta = 0$ (à esquerda) e para o caso regularizado de Stokes-Brinkman com $\zeta = 1$ e $Da = 1$ (à direita) sobre a camada 36 do SPE10.	93
Figura 45 – Curvas de produção de óleo para a 36 ^a camada do SPE10.	94
Figura 46 – Campos de permeabilidade camada 74 (à esquerda) e camada 54 (à direita).	94
Figura 47 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para diferentes valores Da no instante $T_{VPI} = 0.16$ referente a camada 74 do SPE10.	95
Figura 48 – Curvas de produção de óleo para a 74 ^a camada do SPE10.	95
Figura 49 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para diferentes valores Da no instante $T_{VPI} = 0.27$ referente a camada 54 do SPE10.	96
Figura 50 – Curvas de produção de óleo para a 54 ^a camada do SPE10.	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Estudo de convergência dos erros $\ P_{exata} - P\ _{L^\infty}$ e $\ U_{exata} - U\ _{L^\infty}$	58
Tabela 2	– Estudo de convergência dos erros $\ P_{exata} - P\ _{L^1}$ e $\ U_{exata} - U\ _{L^1}$	59
Tabela 3	– Estudo de convergência dos erros $\ P_{exata} - P\ _{L^2}$ e $\ U_{exata} - U\ _{L^2}$	59
Tabela 4	– Relação entre o número de condicionamento da matriz de coeficientes do sistema $\kappa(\mathbf{A})$ e o número de iterações do GMRES.	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Organização da Monografia	26
2	ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS	27
2.1	Propriedades Físicas Básicas	27
2.1.1	<i>Propriedades dos Fluidos</i>	28
2.1.2	<i>Rocha Reservatório</i>	29
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	33
3.1	Preliminares	33
3.2	Equações Governantes	34
3.2.1	<i>Conservação da Massa</i>	34
3.2.2	<i>Equação do Balanço da Quantidade de Movimento</i>	35
3.3	As Equações de Stokes	37
3.3.1	<i>Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes</i>	37
3.3.2	<i>Fluxo de Stokes ou Fluxo Rastejante</i>	38
3.3.3	<i>Aplicações das Equações de Stokes</i>	39
3.4	A Lei de Darcy	39
4	O MODELO DE STOKES-BRINKMAN	41
4.1	O modelo de Darcy-Stokes	43
4.2	O modelo de Stokes - Brinkman: Uma formulação Unificada	44
5	O MÉTODO NUMÉRICO	47
5.1	O Método dos Volumes Finitos	47
5.1.1	<i>Discretização do Modelo de Stokes-Brinkman</i>	48
5.1.1.1	<i>Discretização da equação de conservação da massa</i>	48
5.1.1.2	<i>Discretização da equação de Stokes-Brinkman</i>	50
5.1.1.3	<i>Tratamento das condições de contorno</i>	53
6	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	57
6.1	Verificação com Solução Manufaturada	57
6.1.1	<i>Caso Stokes</i>	57
6.1.2	<i>Caso Darcy</i>	58

6.1.3	<i>Caso Stokes-Brinkman</i>	59
6.2	Estudo empírico de convergência	60
6.3	Adimensionalização	63
6.3.1	<i>GRMES</i>	64
6.3.2	<i>Caso Heterogêneo Anisotrópico</i>	64
6.3.3	<i>Caso Homogêneo Isotrópico</i>	66
6.4	Convergência do Método GRMES	67
6.5	Corroboração com resultados da literatura	71
6.5.1	<i>Escoamento em uma cavidade (Lid-driven cavity)</i>	71
6.5.2	<i>Simulação SPE10</i>	72
7	O MODELO REGULARIZADO DE STOKES-BRINKMAN PARA ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM MEIOS POROSOS	75
7.1	Formulação do modelo matemático bifásico	75
8	O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS PARA O MODELO BIFÁ- SICO REGULARIZADO	85
8.1	O método IMPES	85
8.1.1	<i>Resultados e discussões</i>	88
9	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	101

INTRODUÇÃO

O fluxo acoplado entre meios porosos e regiões de fluxo livre é observado em vários domínios industriais, ambientais e médicos de interesse: por exemplo, na modelagem de transporte de contaminantes em áreas costeiras, rio ou bacias; em aplicações de bioengenharia, onde oxigenadores de sangue e dispositivos de hemodiálise são baseados no transporte de substâncias químicas da corrente sanguínea principal nas artérias através de uma membrana porosa (DISCACCIATI; QUARTERONI, 2009); fluxo através de filtros de óleo (ILIEV; LAPTEV, 2004); fraturas presentes em reservatórios de petróleo (SAGHIR *et al.*, 2001; GOLFIER; LASSEUX; QUINTARD, 2015).

Embora a presença de fraturas seja uma característica de praticamente todo reservatório de petróleo elas aparecem com maior frequência em reservatórios carbonáticos. As fraturas podem criar permeabilidade onde antes não existia e formar caminhos adicionais para soluções de lixiviação ou cimentação. Em reservatórios carbonáticos com baixa permeabilidade, como é o caso do Oriente Médio, fraturas são essenciais para a produção de óleo (AKBAS, 2005).

Reservatórios carbonáticos são comumente compostos principalmente por calcários e dolomitas (carbonatos de cálcio e magnésio) que podem conter elevados volumes de óleo e gás natural em muitas bacias sedimentares (LUIS *et al.*, 2019). Apesar de apresentarem uma composição química relativamente simples, estes reservatórios são altamente heterogêneos em todas as escalas. Os minerais carbonatados encontrados nesses reservatórios são propensos às mudanças químicas, principalmente a dissolução, criando características macroscópicas dos poros como pequenas cavidades e grandes cavernas. Este fenômeno de dissolução, capaz de alterar significativamente a escala e geometria do reservatório desde a escala de milímetros até a de quilômetros, é conhecido como carstificação (AHR *et al.*, 2005). Além disso, a deformação mecânica das frágeis rochas de carbonato geram fraturas naturais que podem ou não conectar essas cavidades e cavernas. Estima-se que reservatórios naturalmente fraturados representam mais de 50% dos reservatórios existentes e contribuem em grande medida para a produção

mundial de petróleo e gás. Esses reservatórios altamente heterogêneos possuem uma rede complexa de várias famílias de fraturas com diferentes distribuições espaciais (AHMED, 2010).

Embora o aumento da produção de petróleo e gás a partir de reservatórios carbonáticos possa não ser a única solução para atender à demanda atual de energia, é evidente que suas características permitem afirmar que estes reservatórios desempenham um papel cada vez mais importante na indústria do petróleo.

Segundo Beltrao *et al.* (2009) ao longo dos últimos anos, tem ocorrido um crescente interesse em reservatórios do tipo carbonático principalmente no Brasil, com os reservatórios do Pré-sal.

De acordo com Riccomini, Sant'AnnaLucy e Tassinari (2012) o Pré-sal constitui a maior descoberta petrolífera mundial dos últimos cinquenta anos. O petróleo do pré-sal está alojado em reservatórios situados abaixo de extensa e espessa camada de sal que ocorre na região costa-afora do Espírito Santo até Santa Catarina, em águas profundas e ultraprofundas, localizados sob 3 a 4 km de rochas abaixo do fundo marinho. A área de abrangência dos reservatórios do pré-sal distribui-se essencialmente pelas bacias sedimentares de Santos e Campos, situadas na margem continental brasileira.

Os reservatórios de petróleo costumam ser modelados fisicamente como um meio poroso através do qual fluidos derivados principalmente de hidrocarbonetos escoam a baixas velocidades (hipótese de Stokes). A modelagem matemática é realizada por um conjunto de equações diferenciais parciais baseadas nas leis de conservação de massa e quantidade de movimento. De modo geral, tais equações descrevem as relações existentes entre as variáveis do escoamento, comumente fluxo e pressão, em função das propriedades físicas da rocha-reservatório, dos fluidos e das propriedades físicas relativas à interação entre a rocha e os fluidos.

Para determinados tipos de reservatórios, como os carbonáticos que podem conter cavidades e/ou fraturas, surge o questionamento quanto à aplicabilidade da lei de Darcy. Para tais situações onde o escoamento tenderia a um fluxo livre, as equações de (Navier-)Stokes poderiam ser mais indicadas para modelar o sistema.

No âmbito de estratégias de soluções mais eficientes ao invés de adotar modelos clássicos, como o de Darcy-Stokes, o modelo de Stokes-Brinkman é amplamente aceito como um modelo adequado para problemas de escoamentos em meios heterogêneos caracterizados por alta permeabilidade. A utilização do modelo de Stokes-Brinkman surge como uma alternativa intermediária, entre resolver um escoamento na escala do poro com um modelo puramente de Stokes com condições de contorno aplicadas em geometrias complexas, e um modelo de Darcy, adequado apenas para escalas bem maiores que a escala do poro, e que não leva em consideração a estrutura geométrica do meio poroso. Entretanto, sua aplicação ainda tem sido restrita ao fluxo em estado estacionário e para uma única fase.

Devido à abordagem de Stokes-Brinkman apresentar uma modelagem simplificada,

facilita a simulação de fluxo e é menos custosa computacionalmente, sendo uma alternativa eficaz para obter informações sobre as principais características do fluxo e também das propriedades do meio poroso.

A necessidade de se compreender e modelar os fenômenos físicos envolvidos em meios porosos na presença de canais, fraturas e *vuggs* é motivada principalmente pelo fato de que simuladores de reservatórios comerciais atuais não contemplam de maneira mais precisa os efeitos do escoamento para estes casos. As simulações são amplamente utilizadas pela indústria de petróleo e se tornaram o principal instrumento para avaliar a eficiência de recuperação e a viabilidade econômica de novas perfurações de petróleo.

As simulações de reservatórios dizem respeito à resolução dos sistemas lineares obtidos pela discretização das equações que modelam o escoamento. É comum resolver tais sistemas numericamente. A aplicação do método numérico, como o dos volumes finitos, acarreta em um ou mais sistema equações lineares ou possivelmente não-lineares que são de grande porte e esparsos.

Segundo [Christie \(1996\)](#) modelos geológicos de reservatórios podem apresentar problemas da ordem de 10^8 incógnitas, o que dá origem a sistema linear de grande porte. Ademais, é sabido na literatura que o fato de representarem fenômenos físicos complexos, tais equações são, em geral, mal condicionados do ponto de vista de álgebra linear. Isso é verificado especialmente quando o contraste de permeabilidade K_{max}/K_{min} é muito alto.

[Dogru et al. \(2011\)](#) afirmam que a solução eficiente dos sistemas lineares representa um grande desafio em termos de recursos computacionais, sendo que até 90 % do tempo de simulação pode ser consumido na solução de sistemas lineares esparsos. Complicações desse tipo motivam a busca por métodos mais eficientes de resolução, como por exemplo, pré-condicionadores mais inteligentes como o desenvolvido por [Hasal \(2016\)](#) e a utilização de programação paralela, dentre outras soluções.

Em relação ao escoamento bifásico (água e óleo) em reservatórios carstificados ou que possuem alto contraste de permeabilidade, ainda há poucos trabalhos na literatura que utilizam o modelo de Stokes-Brinkman.

O presente trabalho tem como objetivo a correta discretização do modelo de Stokes-Brinkman através de métodos dos volumes finitos conservativos, e sua solução numérica para escoamentos monofásicos e bifásicos. Os principais desafios numéricos a serem atacados provêm do mal condicionamento dos sistemas lineares resultantes da discretização, quando o contraste de permeabilidade do problema aumenta. Além disso, esbarramos na dificuldade de propor modificações para que modelo de escoamento bifásico baseado nas equações de Stokes-Brinkman incorpore a velocidade total como variável primária a fim de reduzir a complexidade computacional e garantir uma boa implementação do método IMPES.

Este projeto está no escopo do projeto de *P&D* intitulado “Métodos multiescala para a simulação numérica de reservatórios de petróleo”, financiado pela ANP/Petrobras, coordenado pelo Prof. Dr. Fabrício Simeoni de Sousa, e em execução no ICMC/USP, como parte das atividades do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiado pelo programa CEPID da FAPESP.

1.1 Organização da Monografia

Esta monografia está organizada nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 2:** São apresentados as características básicas de um meio poroso, sobretudo nos concentramos nas características dos reservatórios de petróleo com o objetivo de contextualizar o leitor na área de simulação de reservatórios.
- **Capítulo 3:** São apresentadas as equações responsáveis pela modelagem do escoamento em meios porosos e fluxo livre.
- **Capítulo 4:** Neste capítulo, buscou-se convencer o leitor da importância de se utilizar o modelo de Stokes-Brinkman no lugar daquele que é comumente empregado, o de Darcy-Stokes.
- **Capítulo 5:** É apresentada a discretização das equações estacionárias de Stokes-Brinkman via o método dos volumes finitos.
- **Capítulo 6:** São apresentados alguns experimentos numéricos realizados com o objetivo de validar o método dos volumes finitos implementado.
- **Capítulo 7:** São apresentados os conceitos envolvidos na modelagem dos escoamentos bifásicos em meios porosos. O modelo proposto é obtido a partir do clássico modelo de Darcy
- **Capítulo 8:** São apresentados os métodos numéricos e experimentos que incluem: comparações com resultados da literatura, simulações em meios porosos realísticos com perfis de saturação e curvas de produção.
- **Capítulo 9:** São apresentadas as principais contribuições e considerações finais deste trabalho.

ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Neste capítulo apresenta-se uma breve exposição dos principais conceitos de meios porosos, mais especificamente, sobre reservatórios de petróleo. As propriedades mencionadas neste capítulo serão importantes na construção do modelo matemático.

2.1 Propriedades Físicas Básicas

Por um meio poroso queremos dizer um material que consiste em uma matriz sólida com vazios interconectados. Supomos que a matriz sólida seja rígida ou sofra pequena deformação. A interconexão dos vazios (os poros) permite o fluxo de um ou mais fluidos através do material. (NIELD; BEJAN, 2006, 1.1).

Seguindo essa definição, podemos encontrar muitos exemplos de meios porosos naturais como, por exemplo, areia de praia, arenito, calcário, pão de centeio, madeira ou pulmão humano, e exemplos de meios porosos sintéticos como lenços, fraldas, roupas, filtros de carvão ativado, filtros de óleo e etc.

Reservatórios de petróleo são meios porosos naturais constituídos por rochas sedimentares onde se encontram hidrocarbonetos em estado líquido ou gasoso, que recebem as designações gerais de petróleo e gás natural, respectivamente.

Rochas carbonáticas são um tipo de rocha sedimentar cuja composição primária são os carbonatos. Muitas teorias foram desenvolvidas por geólogos para compreender a formação e caracterização das rochas carbonáticas. Estas rochas apresentam como componentes mineralógicos a calcita (CaCO_3), dolomita [$\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$] e aragonita (CaCO_3), além de minerais secundários como anidrita, gipsita, siderita, quartzo, argilominerais, pirita, óxidos e sulfatos (AHR *et al.*, 2005). Tais componentes foram depositadas naturalmente em ambientes marinhos ou continentais de águas claras, cálidas e rasas, também podem se formar pela erosão ou lixiviação e posterior

transporte do material carbonático de zonas de dissolução a zonas de precipitação que leva à sedimentação destas rochas em camadas paralelas e horizontais (ACOCELLA; ACOCELLA; TURRINI, 2010).

Reservatórios carbonáticos são submetidas a diversos esforços provenientes de diferentes origens. Dependendo das condições de soterramento, diagênese e composição mineralógica da rocha, esses esforços podem fraturá-la, gerando heterogeneidades em diversas escalas. A maior reserva de petróleo do Brasil, o Pré-Sal, é formada por rochas carbonáticas e apresentam alta heterogeneidade, como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Reservatório do Pré-Sal no Brasil.

Fonte: Estrella (2010).

O principal objetivo da simulação de reservatórios é prever o desempenho futuro de um reservatório e encontrar técnicas que permitirão otimizar a recuperação de alguns dos hidrocarbonetos (CHEN; HUAN; MA, 2006). Dessa forma, para estudar o problema do escoamento em reservatórios de petróleo é importante conhecer a natureza da rocha e as propriedades físicas dos fluidos que a preenchem, além das propriedades de interação rocha-fluido.

2.1.1 Propriedades dos Fluidos

A matéria existe em três estados: sólido, líquido e gasoso. Os fluidos compreendem as fases líquida e gasosa da matéria (FOX; MCDONALD; LEYLEGIAN, 2014). Uma das características que diferem os sólidos dos fluidos é a capacidade que de suportar forças que provocam a uma tensão de cisalhamento aplicada, que tende a mudar sua forma. Um sólido resiste à tensão de cisalhamento aplicada deformando-se mas sua deformação não aumenta continuamente com o tempo, enquanto que *fluido* é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento, por menor que ela seja (ÇENGEL; CIMBALA, 2004).

Nesta seção, relembra-se os conceitos básicos sobre as propriedades dos fluidos e do escoamento que serão constantemente mencionadas no decorrer deste trabalho.

A *massa específica*, ρ_α , de um fluido é a razão entre a massa do fluido, m_α , e o seu volume, V_α , isto é,

$$\rho_\alpha = \frac{m_\alpha}{V_\alpha}.$$

A *viscosidade*, μ_α , de um fluido é a propriedade que mede a resistência de um fluido em escoar.

Um fluido é dito *incompressível* quando sua massa específica é constante ou sua variação ao longo do escoamento é desprezível. Nesta trabalho, considera-se apenas fluxos de fluidos incompressíveis.

O fluxo *estacionário* refere-se à condição em que as propriedades do fluido em um ponto no sistema não mudam com o tempo. Caso contrário, o fluxo é dito *transiente*.

As propriedades dos fluidos devem ser determinadas, de preferência, através de experimentos realizados em laboratórios. Em algumas situações isso se torna inviável devido a motivos econômicos ou operacionais. Para esses casos, utiliza-se ferramentas numéricas que determinam de forma aproximada as propriedades dos fluidos (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

2.1.2 Rocha Reservatório

Assim como as informações das propriedades dos fluidos, as informações das propriedades das rochas constituem-se em fatores decisivos para o estudo do comportamento dos reservatórios de petróleo.

O petróleo, após ser gerado e ter migrado, é eventualmente acumulado em uma rocha que é chamada de reservatório. Esta rocha pode ter qualquer origem ou natureza, mas para se constituir em um reservatório deve apresentar espaços vazios no seu interior (porosidade), e que estes vazios estejam interconectados, conferindo-lhe característica de permeabilidade (THOMAS, 2011).

Informações sobre as propriedades das rochas constituem fatores decisivos para o estudo do comportamento de reservatórios de petróleo. As propriedades macroscópicas relevantes para a modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos são a porosidade e a permeabilidade.

A *porosidade* geralmente denotada pela letra grega ϕ , é um valor adimensional que mede a capacidade de armazenamento de fluidos. Considerando um certo volume de referência em um meio poroso, a porosidade ϕ , denota a fração do volume total do meio que é ocupado pelo espaço vazio (HURTADO, 2005), ou seja,

$$\phi = \frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_p + V_s},$$

onde V_p e V_s são o volume vazio e o volume ocupado pela matriz sólida, respectivamente, em um dado volume de referência, como representado na Figura 2.

Figura 2 – Volume de referência em um meio poroso.

Fonte: [Hurtado \(2005\)](#).

Em meios naturais a porosidade normalmente não excede 0,6. Os valores de porosidade comum são 0,43 a 0,54 para o solo, 0,02 a 0,07 para o concreto ou 0,17 a 0,49 para os filtros de cigarro ([NIELD; BEJAN, 2006](#)).

A *permeabilidade* (absoluta), denotada por **K**, é uma medida da capacidade da rocha de transmitir um único fluido em certas condições. Embora a unidade S.I. para permeabilidade seja m^2 , ela é comumente representada em Darcy (*D*) ou milli-Darcy (*mD*). A definição precisa de 1D ($\approx 0.987 \cdot 10^{-12} m^2$) envolve a transmissão de um fluido de 1 *cp* ($10^{-3} Pa \cdot s$) através de uma rocha homogênea a uma velocidade de 1 *cm/s* devido a um gradiente de pressão de 1 *atm/cm*. Traduzido para as condições do reservatório, 1D é uma permeabilidade relativamente alta.

Em geral, **K** é um tensor, o que significa que a permeabilidade nas diferentes direções depende da permeabilidade nas outras direções. Dizemos que o meio é *isotrópico* (em oposição a anisotrópico) se **K** pode ser representado como uma função escalar, por exemplo, se a permeabilidade horizontal é igual à permeabilidade vertical. Além disso, devido às transições entre diferentes formações rochosas, a permeabilidade pode variar rapidamente ao longo de várias ordens de magnitude, variações locais na faixa de 1 mD a 10 D não são incomuns em um campo típico.

Segundo [Chen, Huan e Ma \(2006\)](#) em um reservatório fraturado a permeabilidade pode variar de um milidarcy (mD) na matriz a milhares de mD nas fraturas, podendo alterar significativamente os caminhos de fluxo no meio e, portanto, deve ser modelada com precisão. Algumas rochas, como os folhetos e carbonatos são normalmente porosas mas impermeáveis e podem vir a se constituir reservatórios quando se apresentam naturalmente fraturados.

A *saturação*, S_α , de um fluido em um meio poroso é a razão entre o volume do fluido e o volume dos poros, ou seja,

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p}.$$

Em um escoamento bifásico, a fase que adere com maior facilidade à superfície sólida do meio poroso é chamada de *fase molhante*. A outra fase é chamada de *não-molhante*. Exemplos

de fase molhante e de fase não molhante são a água e o óleo (Figura 3). Esta caracterização das fases está intimamente ligada à definição de pressão capilar. Devido à curvatura e à tensão superficial da interface entre as duas fases, a pressão no fluido molhante é menor do que no fluido não-molhante. A *pressão capilar*, p_c , é dada por

$$p_c = p_o - p_w, \quad (2.1)$$

onde p_o é a pressão do fluido não-molhante (óleo) e p_w é a pressão do fluido molhante (água).

Figura 3 – Caracterização das fases em um deslocamento bifásico.

Fonte: Hurtado (2005).

Os dois fluidos, molhante (w) e não-molhante (o), juntos ocupam os espaços vazios, implicando na relação

$$S_w + S_o = 1. \quad (2.2)$$

Mesmo que as fases não se misturem realmente, para a modelagem em macroescala, assumimos que todas as fases podem estar presentes no mesmo local. A permeabilidade experimentada por uma fase depende da saturação das demais fases naquele local específico, bem como da interação das fases com as paredes dos poros. Assim, introduzimos uma propriedade chamada *permeabilidade relativa*, denotada por $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_\alpha(\mathbf{x}))$ que é um número adimensional que indica o grau com que a presença de outras fases prejudica o escoamento da fase α .

Se o meio estiver saturado pelos fluidos a capacidade de transmissão de um desses fluidos chama-se *permeabilidade efetiva*,

$$\mathbf{K}_\alpha(S_\alpha(\mathbf{x})) = k_{r\alpha}(S_\alpha(\mathbf{x}))\mathbf{K}. \quad (2.3)$$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A formulação matemática para descrever o escoamento em reservatórios de petróleo envolve a resolução de um conjunto de equações diferenciais parciais baseadas nas leis de conservação de massa e quantidade de movimento. Tais equações descrevem as relações existentes entre variáveis do escoamento que são comumente a pressão e a velocidade. Neste capítulo, apresenta-se os fundamentos e origens das principais equações de fluxo que regem a física do problema do escoamento onde regiões de meios porosos e de fluxo livre coexistem, desenvolvendo os equacionamentos que serão utilizados como base para a sequência do trabalho.

3.1 Preliminares

Começamos por definir um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com fronteira regular $\partial\Omega$. Para funções escalares $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e funções vetoriais $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, os seguintes operadores são definidos:

Gradiente

$$[\nabla u]_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

$$[\nabla \mathbf{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{1, \dots, d\},$$

Divergência

$$[\nabla \cdot \mathbf{u}]_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

onde o índice repetido significa somatório.

Laplaciano

$$[\nabla^2 \mathbf{u}]_i = [\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}]_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

A dinâmica dos fluidos é regida por leis de conservação clássicas, baseado na hipótese de que o fluido é um meio contínuo. Se entende por meio contínuo um conjunto de partículas (neste caso, formando partes de um fluido) que é estudado macroscopicamente, isto é, sem considerar as possíveis descontinuidades existentes no nível microscópico (nível molecular). Admite-se que não existem descontinuidades entre as partículas de forma que a descrição matemática do problema e suas propriedades podem ser feitas utilizando funções contínuas.

3.2 Equações Governantes

A fim de derivar as formulações matemáticas das leis de conservação correspondentes, consideramos um volume de controle V fechado do domínio fluido, que é fixado no espaço e no tempo em um sistema de coordenadas euleriano. O contorno de V é uma superfície orientável S , com o vetor unitário $\mathbf{n}$ normal à S apontando do interior de V para o exterior. Neste sistema os valores das propriedades como, por exemplo, da velocidade, são determinados em pontos específicos do espaço.

3.2.1 Conservação da Massa

O princípio da conservação de massa diz que na ausência de fonte ou sorvedouros, toda a massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou se acumular neste mesmo volume sendo expresso como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (3.1)$$

onde ρ é a massa específica e $\mathbf{u}$ é o vetor de velocidade do fluido. A integral de superfície na [Equação 3.1](#) pode ser convertida em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência de Gauss 1, enunciado a seguir.

Teorema 1 (Teorema da Divergência de Gauss). Seja V um subdomínio limitado de Ω , com fronteira $S = \partial V$ e $\mathbf{F}$ um campo vetorial diferenciável. Então

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Reescrevendo a [Equação 3.1](#) tem-se

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Como V é arbitrário, devemos ter

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.2)$$

Expandindo os termos da Equação 3.2 temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.3)$$

onde $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ é a chamada derivada material de ρ .

A Equação 3.2 é conhecida como equação da continuidade. Se o fluido é incompressível, a massa específica ρ é constante em relação ao espaço e ao tempo, isto é $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ e como $\rho \neq 0$, tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.4)$$

que é a condição de incompressibilidade para o campo de fluxo.

3.2.2 Equação do Balanço da Quantidade de Movimento

A equação da conservação de balanço de quantidade de movimento linear, também denominada equação de momento, é obtida aplicando-se a segunda lei de Newton: A taxa de variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula é igual a resultante das forças que agem sobre essa superfície. Matematicamente isso leva a

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.5)$$

onde a notação $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ denota o tensor $[u_i u_j]$, $i, j = 1, \dots, d$, $\mathbf{f}$ é a força do corpo e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões. Usando o Teorema da Divergência de Gauss 1, a Equação 3.5 é reescrita como

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot [\rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] dV = \int_V (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV. \quad (3.6)$$

Da Equação 3.6, novamente usa-se o argumento de que o volume V é arbitrário para obter

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

e, por análise vetorial,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Agrupando os termos,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Supondo a conservação de massa, a equação de balanço da quantidade de movimento é dado por

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.7)$$

ou em termos da derivada material,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.8)$$

Para fluidos newtonianos, a relação constitutiva para o tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau},$$

onde $p = p(\mathbf{x}, t)$ representa o campo de pressão do escoamento, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões viscosas dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (3.9)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica e λ o coeficiente volumétrico do fluido.

Devido à condição de incompressibilidade (3.4), pode-se escrever

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}.$$

O tensor $\mathbf{D}$ é denominado *tensor de deformação* e, segundo o modelo newtoniano, é expresso por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.10)$$

Assim, utilizando o tensor de tensões newtoniano, calcula-se o divergente do tensor de tensões totais

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)].$$

Deste modo, a equação de conservação da quantidade de movimento pode ser expressa como

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 é uma das equações governantes mais frequentemente encontradas na dinâmica de fluidos, conhecida como a equação de Navier-Stokes.

3.3 As Equações de Stokes

George Gabriel Stokes, em 1845, obteve o sistema de equações formado por (3.11) e (3.4), considerando a viscosidade μ constante. Stokes (1845) em seu artigo, diz que tais equações são aplicáveis para a determinação do movimento da água em tubulações e canais no cálculo do efeito de fricção nos movimentos de marés e ondas. Ainda em seu artigo, Stokes (1845) afirma que para baixas velocidades adota-se $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$ na Equação 3.11 resultando em

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.12)$$

As equações assim simplificadas são aplicáveis por exemplo, para determinar o movimento do pêndulo que oscila na água e também movimento de um pêndulo que oscila no ar, pois neste caso pode-se, com quase nenhum erro, negligenciar a compressibilidade do ar.

3.3.1 Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes

Com o intuito de analisar os efeitos dos parâmetros na solução, a Equação 3.11 e Equação 3.4 são frequentemente estudadas em sua forma adimensional. Dependendo dos parâmetros adotados a constante de adimensionalização obtida, que é o número de Reynolds, caracteriza o regime de escoamento. As variáveis adimensionais são definidas de acordo com a seguinte expressão (FORTUNA, 2000):

$$\text{Grandeza adimensional} = \frac{\text{Grandeza dimensional}}{\text{Valor de referência com a mesma dimensão}}.$$

Para a equação de Navier-Stokes adota-se

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_0}, \quad t^* = \frac{t}{T_0}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}}{f_0}, \quad (3.13)$$

e os operadores adimensionais

$$\nabla^* = L_0 \nabla \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = T_0 \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.14)$$

com

$$T_0 = \frac{L_0}{U_0}, \quad p_0 = \frac{\mu}{T_0} \quad \text{e} \quad f_0 = \frac{\mu}{L_0 T_0}. \quad (3.15)$$

Aqui L_0 , U_0 e T_0 são, respectivamente, valores de referência de comprimento, velocidade e tempo.

Substituindo os valores adimensionais indicados por $*$ em (3.13) e (3.14) na Equação 3.11, segue

$$\rho \left(\frac{U_0}{T_0} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U_0^2}{L} \nabla^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{p_0}{L_0} \nabla^* p^* - \frac{U_0}{L_0^2} \nabla^* \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{*\top})] = \frac{\mu}{L_0 T_0} \mathbf{f}^*.$$

Das relações apresentadas em (3.15) vem

$$\rho \frac{U_0^2}{L_0} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \frac{\mu U_0}{L_0^2} \left\{ \nabla^* p^* - \nabla^* \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{*\top})] \right\} = \frac{\mu U_0}{L_0^2} \mathbf{f}^*.$$

Multiplicando ambos os membros da última equação por $\frac{L_0^2}{\mu U_0}$ obtemos

$$\rho \frac{U_0 L_0}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* \right) + \nabla^* p^* - \nabla^* \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{*\top})) = \mathbf{f}^*. \quad (3.16)$$

Por outro lado, para a equação de conservação de massa (3.4) é fácil de verificar que

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0.$$

As informações sobre o fluxo estão contidas em seus parâmetros característicos, como a viscosidade μ , valores para o comprimento L_0 , a velocidade U_0 e a massa específica ρ . Após experimentos exaustivos em 1883, Osborne Reynolds descobriu que o regime de escoamento depende principalmente da relação entre as forças inerciais (cinéticas) e as forças viscosas do fluido (de atrito) desenvolvidas quando um fluido escoar sob um estado de tensão. Essa relação é o número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu}.$$

Eliminando os asteriscos da Equação 3.16 e usando a definição do número de Reynolds, tem-se a equação de Navier-Stokes na forma adimensionalizada,

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)] &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3.2 Fluxo de Stokes ou Fluxo Rastejante

As equações incompressíveis de Stokes são derivadas das equações incompressíveis de Navier-Stokes e trata de fluxos rastejantes que movem-se lentamente ao redor do corpo à medida que a viscosidade torna o fluxo estacionário. Isso sugere descartar inteiramente o termo $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ das equações de Navier-Stokes. Esta linearização resulta nas ditas equações de Stokes para o caso estacionário

$$\begin{aligned} \nabla p - \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)] &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Supondo que a viscosidade $\mu(\mathbf{x}, t) = \mu$ é constante, o termo viscoso passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top))]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \\ &= \mu [\nabla^2 \mathbf{u}]_i. \end{aligned}$$

E assim, obtemos as seguintes equações de Stokes

$$\nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.19)$$

[Stokes \(1851\)](#) encontrou a primeira solução para um problema desse tipo ao resolver o problema da força de arrasto experimentada por uma esfera em um fluxo dominado pela dissipação viscosa.

3.3.3 Aplicações das Equações de Stokes

As equações de fluxo de Stokes fornecem soluções úteis para descrever o movimento de pequenas partículas em sistemas micro e nanofluídicos, uma vez que essas partículas são geralmente bem aproximadas por geometrias simples (por exemplo, esferas). Mencionamos aqui duas aplicações das equação de Stokes que têm solução analítica:

- Equação de Hagen–Poiseuille: refere-se ao fluxo viscoso acionado por pressão através de um tubo de seção transversal circular.
- Equação plana de Poiseuille ou de Hele-Shaw: para microcanais largos e rasos de profundidades uniformes.

Para o leitor interessado em alguma dessas duas aplicações as referências indicadas são [Kirby \(2010, seção 8.2\)](#) e [Massey e Ward-Smith \(2006, seção 6.2\)](#).

3.4 A Lei de Darcy

As equações governantes para o fluxo monofásico de um fluido (um componente único ou uma mistura homogênea) em um meio poroso, especificamente para um reservatório de petróleo, são dadas pela conservação da massa juntamente com a lei de Darcy ([CHEN; HUAN; MA, 2006](#)).

[Darcy \(1856\)](#) ao estudar problemas de tratamento de água através de filtros de areia da cidade de Dijon (França), cujo aparelho utilizado é mostrado esquematicamente na [Figura 4](#), encontrou a relação dada por

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z), \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{K}$ é a permeabilidade absoluta do meio poroso, μ é a viscosidade, g é a magnitude da aceleração da gravidade e z mede a profundidade do meio poroso abaixo de um dado nível de

referência. Em geral é comum assumir que $\mathbf{K}$ é um tensor diagonal,

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}.$$

Se $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$ o meio poroso é dito isotrópico, ou seja, suas propriedades mecânicas são as mesmas em todas direções, caso contrário, é dito anisotrópico (AZIZ, 1979).

Figura 4 – Esquema do experimento de Henry Darcy sobre fluxo de água através do filtro de areia.

Fonte: Rosa, Carvalho e Xavier (2006).

O modelo de Darcy para escoamento em meios porosos é expresso pelo seguinte sistemas de equações:

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= q \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

onde $\mathbf{f}$ são as forças que atuam no fluido, mais comumente os efeitos de gravidade. A função q é um termo fonte, descrevendo, por exemplo, poços de injeção e produção em um reservatório de água subterrânea ou óleo. As condições de contorno para este problema podem ser do tipo Dirichlet ($p = p_D$ sobre $\partial\Omega_D$) ou do tipo Neumann ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} = g_N$ em $\partial\Omega_N$).

Uma das principais desvantagens da Lei de Darcy está no fato de ela não ser consistente com as condições de não - escorregamento comumente prescritas nas paredes do domínio de fluxo ou interfaces entre diferentes seções, que tem efeitos sobre a velocidade de fluxo perto da parede. Portanto, nos casos em que se espera que os efeitos de parede no regime de fluxo sejam significativos, a equação de Darcy, que é apenas consistente com o deslizamento perfeito nos limites sólidos, não pode prever perfis de velocidade e pressão adequadamente e modelos alternativos como a equação de Stokes-Brinkman precisam ser considerados (PARVAZINIA; NASSEHI; GHOREISHY, 2006).

O MODELO DE STOKES-BRINKMAN

Como visto no [Capítulo 2](#), na indústria petrolífera os reservatórios de petróleo são representados por meios porosos, que podem ou não apresentar fraturas. Estas constituem domínios nos quais uma região porosa é situada adjacente a uma região de fluxo livre (veja a [Figura 5](#)). O estudo da interface entre essas duas regiões, denominada interface fluido-porosa, tem grande importância pelo fato de ser uma região de transição de propriedades do domínio e condições para o escoamento de um fluido.

Figura 5 – Esquema de fratura de rocha.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em alguns processos como, por exemplo, a perfuração de poços petrolíferos, alguns fenômenos importantes podem ocorrer, envolvendo o escoamento do poço para o reservatório (fuga de fluido de perfuração) e do reservatório para o poço (influxos de óleo) ou perda de fluido de perfuração ([THOMAS, 2011](#)). A presença de fraturas na formação rochosa pode ocasionar a fuga de fluido de perfuração. O processo é ilustrado na [Figura 6](#).

Figura 6 – Representação esquemática de fraturas em poço de perfuração.

Fonte: Cook *et al.* (2011).

No entanto, apesar da importância de fraturas em rochas reservatórios, Nelson (2001) afirma que, na indústria de petróleo, a tendência é ignorar a presença e o efeito de fraturas naturais durante o maior tempo possível nos reservatórios. Os problemas de se ignorar as fraturas incluem:

- Perda muitas vezes irreparável do fator de recuperação;
- Padrões de recuperação primária inadequados para a recuperação secundária;
- Gasto de capital ineficiente durante o desenvolvimento;
- Perfuração de poços de enchimento desnecessários;
- Avaliação indevida de oportunidades econômicas.

Alguns modelos têm sido propostos para a abordagem do problema de coexistência do fluxo de meio poroso com fluxo livre. Na Seção 4.1 apresenta-se a abordagem padrão para modelar esses tipos de problemas que consiste no acoplamento da equação de Darcy e a equação de Stokes, denominada abordagem de dois domínios. O domínio majoritariamente poroso é governado pela equação de Darcy e o domínio majoritariamente de fluxo livre é governado pela equação de Stokes, sendo a interface a região mais crítica para a análise.

Por outro lado, na Seção 4.2 apresenta-se o modelo de Stokes-Brinkman, que fornece uma alternativa aos modelos de Darcy-Stokes, denominada abordagem de domínio único.

4.1 O modelo de Darcy-Stokes

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) tal que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_p$, onde Ω_f representa a região de fluxo livre e Ω_p a região de meio poroso. Suponha que essas regiões não se sobrepõem, isto é, $\overline{\Omega_f} \cap \overline{\Omega_p} = \Gamma$ e $\Omega_f \cap \Omega_p = \emptyset$. Denote $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_f} \cup \overline{\Omega_p}$ e $\mathbf{n}_f$ e $\mathbf{n}_p$ os vetores normais unitários em $\partial\Omega_f$ e Ω_p , respectivamente, e $\boldsymbol{\tau}_i$ os vetores tangenciais unitários na interface Γ . Aqui $\mathbf{n}_p = -\mathbf{n}_f$ em Γ . Os domínios e a interface entre eles estão esquematizados na [Figura 7](#).

Figura 7 – O domínio global Ω que consiste na região do fluido Ω_f e na região do meio poroso Ω_p , separado pela interface Γ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

O problema de acoplamento Darcy-Stokes, reside em determinar os valores para as pressões p_f e p_p e as velocidades do fluido ($\mathbf{u}_f$, $\mathbf{u}_p$) na região de fluxo livre (f) e na região de meio poroso (p) tal que

$$\begin{aligned}
 \mu \nabla^2 \mathbf{u}_f + \nabla p_f &= \mathbf{f}_f & \text{em } \Omega_f, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u}_f &= 0 & \text{em } \Omega_f, \\
 \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_p + \nabla p_p &= \mathbf{f}_p & \text{em } \Omega_p, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u}_p &= 0 & \text{em } \Omega_p.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Devido à diferença de ordem entre as duas equações a aplicação da abordagem de Darcy-Stokes apresenta uma complicação na modelagem da interface Γ ([SHAVIT et al., 2002](#)). Sendo assim, condições de contorno adicionais devem ser especificadas entre a região de fluxo livre e a região de meio porosos. Para especificar corretamente tais condições de contorno é necessário o conhecimento detalhado da localização e extensão da interface. Além disso, a continuidade da conservação de massa e quantidade de movimento através da interface deve ser satisfeita. Geralmente, a modelagem da interface é feita explicitamente pela equação de Beavers-Joseph ([BEAVERS; JOSEPH, 1967](#)).

O trabalho de [Taylor \(1971\)](#) mostrou que a condição Beavers-Joseph pode ser deduzida da equação de Stokes-Brinkman. No escopo deste texto não pretendemos aprofundar esta teoria e recomendamos ao leitor interessado o trabalho de [Auriault \(2010\)](#).

4.2 O modelo de Stokes - Brinkman: Uma formulação Unificada

Casos particulares de meios porosos são caracterizados por baixo volume de sólidos, e consequentemente altas porosidades, por exemplo, reservatórios fraturados ou *vuggy*, lã mineral e espumas industriais (LAZAROV; MAO, 2017). Para meios porosos com essa característica a lei de Darcy não apresenta conformidade com dados experimentais. Uma extensão do modelo de Darcy, o modelo de Stokes-Brinkman é usualmente considerado para modelar a alta porosidade do meio poroso ou impor condições de não deslizamento em paredes sólidas.

Brinkman (1947) em seu estudo original, sugere a seguinte modificação da lei de Darcy (3.20) pela adição de um termo viscoso da equação de Stokes

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [\mu'(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)] + \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Neste sistema de equações, p e $\mathbf{u}$ são as incógnitas, representando respectivamente os campos de pressão e velocidade do escoamento. Tais equações modelam o escoamento incompressível de um fluido com viscosidade μ com um tensor de permeabilidade $\mathbf{K}$ sob ação de uma força de corpo $\mathbf{f}$. O parâmetro μ' é a chamada viscosidade efetiva do fluido, que depende das propriedades do meio poroso e, por esta razão, não se espera que a viscosidade efetiva seja a mesma que a viscosidade μ do fluido.

Dependendo do tipo de meio poroso, simulações numéricas mostraram que a viscosidade efetiva pode ser menor (KOPLIK; LEVINE; ZEE, 1983) ou maior (MARTYS; BENTZ; GARBOCZI, 1994) que a viscosidade dinâmica do fluido μ . Uma escolha comum para a viscosidade efetiva é $\mu' = \mu$. Um exemplo de modelo mais elaborado adota μ' dependente da porosidade ϕ do meio poroso, como apontado por Lundgren (1972). Além disso, Auriault (2009) comenta que μ' tende para o valor μ quando a porosidade tende à unidade.

Para o caso em que as viscosidades são consideradas constantes temos

$$-\mu' \nabla^2 \mathbf{u} + \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (4.3)$$

A equação (4.2) é conhecida na literatura como a equação de Brinkman (EFENDIEV; ESPEDAL, 2010), Darcy-Brinkman (GOLFIER; LASSEUX; QUINTARD, 2015) ou de Darcy-Stokes-Brinkman (LAMICHHANE, 2013).

O experimento realizado por Brinkman (1947) é semelhante ao realizado por Darcy. A principal diferença é que H. C. Brinkman considerou que as partículas sólidas não estariam tão próximas quanto no experimento realizado por Darcy acarretando em uma proporção de espaços vazios maiores, isto é, uma maior permeabilidade.

A principal vantagem do modelo de Stokes-Brinkman é a capacidade de passar do regime de Darcy para o regime de Stokes e por este motivo o modelo é mais adequado para modelar materiais muito porosos e domínios com rachaduras ou canais de fluxo.

Observe que a [Equação 4.2](#) é matematicamente equivalente à equação de Stokes (3.18) e à equação de Darcy (3.20) da seguinte maneira:

1. Para altas permeabilidade temos que o fluxo é dominado pela equação de Stokes:

$$\mathbf{K} \rightarrow \infty \implies \begin{cases} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} \rightarrow 0, \\ \nabla p \rightarrow -\mu' \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \end{cases}$$

válida para meios onde ocorre fluxo livre.

2. Para baixas permeabilidades

$$\mathbf{K} \rightarrow 0 \implies \begin{cases} |\mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}| \gg |-\mu' \nabla^2 \mathbf{u}|, \\ \nabla p \rightarrow \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{f}, \end{cases}$$

válidos para meios porosos convencionais.

Além disso, formalmente obtemos o modelo de Darcy adotando $\mu' = 0$ na [Equação 4.2](#). Para esse sistema a condição de contorno mais simples e usual é

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad (4.4)$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{\tilde{n}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{\tilde{n}} \quad (\text{se } \mu' = 0) \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad (4.5)$$

tal que a condição de compatibilidade seja satisfeita, isto é, se substituirmos a equação (4.4) em (4.3) devemos ter

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{\tilde{n}} \, dS = 0.$$

[Auriault \(2009\)](#) destaca que uma vantagem prática da equação de Stokes-Brinkman é o fato de que por ser uma pequena modificação da equação de Stokes, aplicações e ferramentas analíticas dedicadas ao problema de Stokes são usadas, realizando apenas pequenas modificações.

Para problemas que incluem a modelagem de domínios livres e porosos juntos, alguns autores, por exemplo, [Pal \(2012\)](#) e [Popov et al. \(2009\)](#) já utilizam o modelo de Stokes-Brinkman como um substituto para o modelo de Darcy-Stokes evitando uma modelagem especial para a interface, permitindo uma transição suave entre a região porosa e de fluxo livre, tratando todo o sistema como um único domínio contínuo.

Segundo [Jamal et al. \(2018\)](#) as equações de Darcy-Stokes, juntamente com uma condição de contorno, modelam uma velocidade de deslizamento no contorno e, em seguida, uma mudança

brusca na velocidade de Darcy na região porosa. No entanto, este fenômeno não é preciso, pois a velocidade de fluxo livre diminui gradualmente dentro do meio poroso até se tornar igual à velocidade de Darcy. Este efeito pode ser modelado com precisão usando a equação de Stokes-Brinkman como mostrado na [Figura 8](#).

Figura 8 – Perfil de velocidade ao usar um modelo Darcy-Stokes (modelo de duplo domínio) com condição de contorno Beavers & Joseph e modelo de Stokes- Brinkman (modelo de domínio único).

Fonte: [Jamal et al. \(2018\)](#).

[Popov, Efendiev e Qin \(2009\)](#) ao modelar o problema de simulações de fluxo de reservatórios carstificados onde cavidades e cavernas são embutidos em uma rocha porosa e conectados através de redes de fratura em múltiplas escalas, relatam a dificuldade em respeitar a conservação de massa e o balanço de momento através da interface. Eles concluem que o uso do modelo de Stokes-Brinkman é uma maneira natural de modelar realisticamente as condições do reservatório.

[Golfier, Lasseux e Quintard \(2015\)](#) fazem uma comparação entre as duas abordagens, de domínio único e de duplo domínio e concluem que a equivalência entre elas depende de uma correspondência entre os coeficientes presentes em ambos os equacionamentos. Embora apresentem resultados divergentes para determinadas condições, na prática as duas abordagens são extremamente próximas.

Outras aplicações do modelo de Stokes-Brinkman incluem o escoamento em reservatórios carbonáticos ([PAL; WALTER, 2010](#)); o escoamento em aquíferos ([CHEN; GUNZBURGER; WANG, 2010](#); [JAMAL et al., 2018](#)); e o escoamento em filtros de óleo ([LAKDAWALA; STARIKOVICIUS, 2013](#));

O MÉTODO NUMÉRICO

Em geral, as equações que governam um modelo matemático de um reservatório não podem ser resolvidas analiticamente. Dentre as diversas abordagens numéricas para o sistema de equações diferenciais que compõem o modelo matemático, o método dos volumes finitos é o mais difundido em simulação de reservatórios pelo fato de também atender ao princípio da conservação de massa em nível local. Neste capítulo apresentaremos a correta discretização do método dos volumes finitos para a equação de Stokes-Brinkman.

5.1 O Método dos Volumes Finitos

Para a aplicação do método dos volumes finitos subdividimos o domínio contínuo Ω , cujo tamanho é $L_x \times L_y$, em N_x volumes de controle na direção x e N_y na direção y . O tamanho de cada volume de controle Ω_i é $h_x \times h_y = \frac{L_x}{N_x} \times \frac{L_y}{N_y}$, como mostrado na [Figura 9](#). As aproximações das equações diferenciais são realizadas através da integração das mesmas sobre cada volume de controle considerado.

Figura 9 – Discretização do domínio Ω .

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.1 Discretização do Modelo de Stokes-Brinkman

A discretização do modelo estacionário de Stokes-Brinkman dado pelo sistema (5.1) é realizada em uma malha deslocada. As velocidades são armazenadas nas faces do volume de controle, enquanto que as incógnitas de pressão são armazenadas nos pontos nodais, como mostrado na Figura 10.

$$\begin{aligned} -\mu'\nabla^2\mathbf{u} + \mu\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Figura 10 – Malha deslocada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.1.1 Discretização da equação de conservação da massa

Considere o volume de controle Ω_i em destaque mostrado na Figura 11. Para obter uma discretização dos volumes finitos integramos a equação de conservação de massa sobre Ω_i e aplicamos o Teorema da Divergência de Gauss:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_i \, d\Gamma = 0. \quad (5.2)$$

Antes de aproximarmos o valor da integral (5.2), consideremos a decomposição das componentes do contorno de Ω_i , isto é $\partial\Omega_i = \Gamma_N + \Gamma_S + \Gamma_E + \Gamma_W$, onde Γ_N , Γ_S , Γ_E e Γ_W representam as componentes norte, sul, leste e oeste de $\partial\Omega_i$, respectivamente. Com isso temos

$$\int_{\partial\Omega_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_N \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_S \, d\Gamma + \int_{\Gamma_E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_E \, d\Gamma + \int_{\Gamma_W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_W \, d\Gamma, \quad (5.3)$$

sendo $\mathbf{\check{n}}_N = (0, 1)$, $\mathbf{\check{n}}_S = (0, -1)$, $\mathbf{\check{n}}_E = (1, 0)$ e $\mathbf{\check{n}}_W = (-1, 0)$.

Figura 11 – Volume de controle para balanço de massa.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada integral do lado direito de (5.3) pode ser expressa em coordenadas cartesianas bidimensional como sendo

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_j d\Gamma = \int_{\Gamma_j} (u n_x + v n_y) d\Gamma. \quad (5.4)$$

Sendo assim, aproximamos cada integral do lado direito de (5.3) como segue

$$\int_{\Gamma_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_N d\Gamma = \int_{\Gamma_N} v(x, y_N) dx = \int_{X_i}^{X_{i+1}} v(x, Y_{j+1}) dx \approx V_{i,j+1} h_i, \quad (5.5)$$

$$\int_{\Gamma_S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_S d\Gamma = \int_{\Gamma_S} -v(x, y_S) dx = - \int_{X_i}^{X_{i+1}} v(x, Y_j) dx \approx -V_{ij} h_i, \quad (5.6)$$

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_E d\Gamma = \int_{\Gamma_E} u(x_E, y) dy = \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} u(X_{i+1}, y) dy \approx U_{i+1,j} h_j, \quad (5.7)$$

$$\int_{\Gamma_W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_W d\Gamma = \int_{\Gamma_W} -u(x_W, y) dy = - \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} u(X_i, y) dy \approx -U_{ij} h_j. \quad (5.8)$$

onde $h_i = (X_{i+1} - X_i)$ e $h_j = (Y_{j+1} - Y_j)$. Somando as equações (5.5) - (5.8) obtemos a discretização da equação de conservação de massa,

$$(U_{i+1,j} - U_{ij})h_j + (V_{i,j+1} - V_{ij})h_i = 0, \quad (5.9)$$

Multiplicando a equação (5.9) por $1/h_i h_j$ teremos

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{ij}}{h_i} + \frac{V_{i,j+1} - V_{ij}}{h_j} = 0.$$

Em forma matricial, incorporando as condições de contorno ao vetor de incógnitas, temos

$$\underline{\underline{D_x}} u + \underline{\underline{D_y}} v = 0.$$

5.1.1.2 Discretização da equação de Stokes-Brinkman

Reescreve-se a equação de momento de Stokes-Brinkman de uma maneira mais conveniente (forma diferencial) à aplicação do Teorema da Divergência de Gauss. A equação reescrita fica sendo

$$\nabla \cdot (-\mu' \nabla \mathbf{u} + p \mathbf{1}) + \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (5.10)$$

Para a aplicação do método dos volumes finitos consideraremos a malha deslocada para as componentes da velocidade correspondentes. Integrando a equação (5.10) no volume Ω_i correspondente e usando o Teorema da Divergência obtêm-se

$$\int_{\partial\Omega_i} (-\mu' \nabla \mathbf{u} + p \mathbf{1}) \cdot \check{\mathbf{n}}_i d\Gamma + \int_{\Omega_i} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega_i} \mathbf{f} d\Omega.$$

ou

$$-\int_{\partial\Omega_i} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_i d\Gamma + \int_{\partial\Omega_i} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_i d\Gamma + \int_{\Omega_i} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega_i} \mathbf{f} d\Omega. \quad (5.11)$$

Realizando uma decomposição das componentes do contorno de Ω_i , como feita para equação de conservação de massa, teremos para a equação (5.11)

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\Omega_i} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_i d\Gamma = & -\int_{\Gamma_N} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_N d\Gamma - \int_{\Gamma_S} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_S d\Gamma - \int_{\Gamma_E} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_E d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_W} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_W d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_i} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_i d\Gamma = & \int_{\Gamma_N} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_N d\Gamma + \int_{\Gamma_S} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_S d\Gamma + \int_{\Gamma_E} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_E d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_W} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_W d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na direção - x, as integrais do lado direito da equação (5.12) e (5.13), em coordenadas cartesianas, são escritas como

$$\left(-\int_{\Gamma_j} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{n}}_j d\Gamma \right)_x = -\int_{\Gamma_j} \left(\mu' \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \mu' \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (5.14)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} p \mathbf{1} \cdot \check{\mathbf{n}}_j d\Gamma = \int_{\Gamma_j} (p n_x + p n_y) d\Gamma. \quad (5.15)$$

Para este caso, utilizamos o volume de controle indicado na [Figura 12](#).

Figura 12 – Volume de controle para o balanço da quantidade de movimento em x.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A fim de simplificar a notação definimos $h_j = (Y_{j+1} - Y_j)$, $\hat{h}_j = (\hat{Y}_{j+1} - \hat{Y}_j)$, $h_i = (X_{i+1} - X_i)$ e $\hat{h}_i = (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i)$. Aproxima-se a integral do termo viscoso (5.14) como segue

$$\left(- \int_{\Gamma_N} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}_N d\Gamma \right)_x = - \int_{\Gamma_N} \mu' \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_N dx = - \mu' \int_{\hat{X}_{i-1}}^{\hat{X}_i} \frac{\partial u}{\partial y}(x, Y_{j+1}) dx \approx - \mu' \left(\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\hat{h}_j} \right) \hat{h}_{i-1}, \quad (5.16)$$

$$\left(- \int_{\Gamma_S} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}_S d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_S} \mu' \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_S dx = \mu' \int_{\hat{X}_{i-1}}^{\hat{X}_i} \frac{\partial u}{\partial y}(x, Y_j) dx \approx \mu' \left(\frac{U_{ij} - U_{i,j-1}}{\hat{h}_{j-1}} \right) \hat{h}_{i-1}, \quad (5.17)$$

$$\left(- \int_{\Gamma_E} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}_E d\Gamma \right)_x = - \int_{\Gamma_E} \mu' \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_E dy = - \mu' \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(\hat{X}_i, y) dy \approx - \mu' \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{ij}}{h_i} \right) h_j, \quad (5.18)$$

$$\left(- \int_{\Gamma_W} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}_W d\Gamma \right)_x = \int_{\partial\Gamma_W} \mu' \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_W dy = \mu' \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(\hat{X}_{i-1}, y) dy \approx \mu' \left(\frac{U_{ij} - U_{i-1,j}}{h_{i-1}} \right) h_j. \quad (5.19)$$

Somando as equações (5.16) - (5.19) temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega_j} - \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}_j d\Gamma \right)_x &\approx - \mu' \frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_{j-1}} U_{i,j-1} - \mu' \frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_j} U_{i,j+1} - \mu' \frac{h_j}{h_{i-1}} U_{i-1,j} - \mu' \frac{h_j}{h_i} U_{i+1,j} \\ &\quad + \mu' \left(\frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_{j-1}} + \frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_j} + \frac{h_j}{h_{i-1}} + \frac{h_j}{h_i} \right) U_{ij}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Por outro lado, aproximamos a integral (5.29) da seguinte maneira

$$\left(\int_{\Gamma_N} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_N d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_N} p(x, y_N) dx = \int_{\hat{X}_{i-1}}^{\hat{X}_i} \overbrace{p(x, Y_{j+1})}^{=0} dx = 0, \quad (5.21)$$

$$\left(\int_{\Gamma_S} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_S d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_S} -p(x, y_S) dx = - \int_{\hat{X}_{i-1}}^{\hat{X}_i} \overbrace{p(x, Y_j)}^{=0} dx = 0, \quad (5.22)$$

$$\left(\int_{\Gamma_E} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_E d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_E} p(x_E, y) dy = \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} p(\hat{X}_i, y) dy \approx P_{ij} h_j, \quad (5.23)$$

$$\left(\int_{\Gamma_W} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_W d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_W} -p(x_W, y) dy = - \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} p(\hat{X}_{i-1}, y) dy \approx -P_{i-1,j} h_j. \quad (5.24)$$

Somando as equações (5.21) - (5.24) obtém-se

$$\left(\int_{\partial\Omega_i} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_i d\Gamma \right)_x \approx (P_{ij} - P_{i-1,j}) h_j. \quad (5.25)$$

O termo de Darcy e o lado direito da equação (5.11) são simplesmente aproximados pela regra de integração do ponto médio

$$\int_{\Omega_i} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} d\Omega \approx \mu K_x U_{ij} \hat{h}_{i-1} h_j, \quad (5.26)$$

e

$$\int_{\Omega_i} \mathbf{f} d\Omega \approx f_{x_{ij}} \hat{h}_{i-1} h_j, \quad (5.27)$$

onde $K_x = \frac{2}{\frac{1}{K_{i+1,j}} + \frac{1}{K_{i,j}}}$ é média harmônica adotada como uma maneira de aproximar o valor da permeabilidade que eventualmente pode ser descontínua na face do volume de controle.

Na direção - y as integrais do lado direito da equação (5.12) e (5.13) são expressas por

$$\left(- \int_{\Gamma_j} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_j d\Gamma \right)_y = - \int_{\partial\Gamma_j} \left(\mu' \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \mu' \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) d\Gamma, \quad (5.28)$$

e

$$\left(\int_{\Gamma_j} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_j d\Gamma \right)_y = \int_{\Gamma_j} (p n_x + p n_y) d\Gamma. \quad (5.29)$$

Procedendo de maneira inteiramente análoga ao que foi feito para a direção - x, para a direção - y obtêm-se as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega_i} -\mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_i d\Gamma \right)_y &\approx -\mu' \frac{h_i}{h_{j-1}} V_{i,j-1} - \mu' \frac{h_i}{h_j} V_{i,j+1} - \mu' \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_{i-1}} V_{i-1,j} - \mu' \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_i} V_{i+1,j} \\ &+ \mu' \left(\frac{h_i}{h_{j-1}} + \frac{h_i}{h_j} + \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_{i-1}} + \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_i} \right) V_{ij}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\left(\int_{\partial\Omega_i} p \mathbf{1} \cdot \mathbf{\check{n}}_i d\Gamma \right)_y \approx (P_{ij} - P_{i,j-1}) h_i, \quad (5.31)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} d\Omega \right)_y \approx \mu K_y V_{ij} h_i \hat{h}_{j-1}, \quad (5.32)$$

e

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{f} d\Omega \approx f_{yij} \right)_y h_i \hat{h}_{j-1}, \quad (5.33)$$

onde $K_y = \frac{2}{\frac{1}{K_{i,j+1}} + \frac{1}{K_{i,j}}}$ é média harmônica adotada. O volume de controle adotado é mostrado na [Figura 13](#).

Figura 13 – Volume de controle para o balanço da quantidade de movimento em y.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.1.3 Tratamento das condições de contorno

Ao impor condições de contorno do tipo Dirichlet para a velocidade foi utilizado apenas metade do volume de controle. Veja o exemplo de dois casos na [Figura 14](#). As seguintes mudanças para as contribuições das faces são necessárias:

- Na direção x, para os volumes localizados ao

Norte

$$\left(- \int_{\Gamma_N} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}}_N d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_N} -\mu' \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_N dx \approx -\mu' \left(\frac{U_N - U_{ij}}{\hat{h}_j/2} \right) \hat{h}_{i-1} = 2\mu' \frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_j} (U_{ij} - U_N),$$

Sul

$$\left(- \int_{\Gamma_S} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S d\Gamma \right)_x = \int_{\Gamma_S} \mu' \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_S dx \approx -\mu' \left(\frac{U_{ij} - U_S}{\hat{h}_{j-1}/2} \right) \hat{h}_{i-1} = 2\mu' \frac{\hat{h}_{i-1}}{\hat{h}_{j-1}} (U_{ij} - U_S),$$

- Na direção y, para os volumes ao

Leste

$$\left(- \int_{\Gamma_E} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_E d\Gamma \right)_y = \int_{\Gamma_E} -\mu' \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_E dy \approx -\mu' \left(\frac{V_E - V_{ij}}{\hat{h}_i/2} \right) \hat{h}_{j-1} = 2\mu' \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_i} (V_{ij} - V_E),$$

Oeste

$$\left(- \int_{\Gamma_W} \mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_W d\Gamma \right)_y = \int_{\Gamma_W} -\mu' \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_W dy \approx \mu' \left(\frac{V_{ij} - V_W}{\hat{h}_{i-1}/2} \right) \hat{h}_{j-1} = 2\mu' \frac{\hat{h}_{j-1}}{\hat{h}_{i-1}} (V_{ij} - V_W),$$

onde U_N, U_S, V_E e V_W são conhecidos.

Figura 14 – Exemplos de volumes de controle com contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para visualizar o conjunto completo de equações e por questões de simplificações, considera-se a malha com espaçamento uniforme, isto é, $h_x = h_i = h_{i-1} = \hat{h}_i = \hat{h}_{i-1}$ e $h_y = h_j = h_{j-1} = \hat{h}_j = \hat{h}_{j-1}$. Assim, reescrevendo as equações (5.20) - (5.26) segue

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega_j} -\mu' \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j d\Gamma \right)_x &\approx -\mu' h_x h_y \left[\left(\frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} - U_{i,j+1}}{h_y^2} \right) + \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} - U_{i+1,j}}{h_x^2} \right) \right] \\ &= -\mu' h_x h_y \underline{\underline{L}}_x \underline{\underline{u}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega_i} p \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i d\Gamma \right)_x &\approx (P_{ij} - P_{i-1,j}) h_y \frac{h_x}{h_x} = h_x h_y \left(\frac{P_{ij} - P_{i-1,j}}{h_x} \right). \\ &= h_x h_y \underline{\underline{G}}_x p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega_i} \mu \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} d\Omega \right)_x &\approx \mu K_x U_{ij} h_x h_y \\ &= \mu \underline{K_x} \underline{u} h_x h_y, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{f} d\Omega \right)_x &\approx f_{xij} h_x h_y \\ &= \underline{f_x} h_x h_y. \end{aligned}$$

Procede-se de maneira inteiramente análoga para as equações (5.30) - (5.33).

Após multiplicar as equações por $1/h_x h_y$ o conjunto completo de equações em forma matricial é, portanto,

$$\begin{aligned} -\mu' \underline{L} \underline{u} + \underline{G_x} \underline{p} + \mu \underline{K_x} \underline{u} &= \underline{f_x} \\ -\mu' \underline{L} \underline{v} + \underline{G_y} \underline{p} + \mu \underline{K_y} \underline{v} &= \underline{f_y} \\ \underline{D_x} \underline{u} + \underline{D_y} \underline{v} &= 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

ou alternativamente,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \tag{5.35}$$

onde

$$\mathbf{M} = -\mu' \mathbf{L} + \mu \mathbb{K},$$

e $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{D}$ representam as formas discretizadas para os operadores laplaciano, gradiente e divergência, respectivamente. Já $\mathbb{K}$ é a matriz diagonal com os valores das médias harmônica. No bloco $\mathbf{Z}$ é feita a desingularização para o campo de pressão, uma vez que a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ é singular e a pressão fica determinada a menos de uma constante C . De fato, se p é uma solução então $p + C$ também é, uma vez que, $\nabla(p + C) = \nabla p$. Além disso, no vetor $\mathbf{U}$ foram incluídos os valores conhecidos nas fronteiras para a velocidade adicionando uma diagonal unitária à matriz $\mathbf{M}$.

A implementação foi realizada com o software MATLAB e o sistema linear resolvido com o comando da barra invertida. No Octave ou MATLAB, este operador engloba vários algoritmos para manipular diferentes tipos de matrizes de entrada. Assim, a matriz de entrada é diagnosticada e um caminho de execução é selecionado de acordo com suas características.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresenta-se alguns experimentos numéricos obtidos com a implementação do método dos volumes finitos para as equações estacionárias de Stokes-Brinkman. Inicialmente serão apresentados problemas simplificados e que possui solução analítica a fim de validar o método implementado. Em seguida, apresenta-se estudos empíricos de convergência para campos de permeabilidades heterogêneos com diferentes geometrias e contrastes. Ao final do capítulo o modelo de Stokes-Brinkman é analisado em sua forma adimensional a fim de investigar os limites dessa modelagem.

6.1 Verificação com Solução Manufaturada

Na presente seção apresenta-se alguns experimentos numéricos utilizou-se o método de soluções manufaturadas.

6.1.1 Caso Stokes

Para o modelo de Stokes, $\mu' = 1$ e $\mu = 0$, adotou-se as condições de não-penetração ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) no contorno de Ω , $[0, 1] \times [0, 1]$. A solução exata, é dada por (JUNPING; WANG; YE, 2009),

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ -\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p = x^2 + y^2. \quad (6.1)$$

Não é difícil ver que as seguintes condições são satisfeitas por esse vetor de velocidades:

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{\partial\Omega} \neq 0.$$

Na Tabela 1 são apresentados os resultados para este teste de verificação usando a norma L^∞ . O gráfico do decaimento do erro em função de h usando diferentes normas é mostrado na Figura 15 e observa-se uma convergência de ordem h^2 tanto para a pressão quanto para a velocidade.

Tabela 1 – Estudo de convergência dos erros $\|P_{exata} - P\|_{L^\infty}$ e $\|U_{exata} - U\|_{L^\infty}$

$h = h_x = h_y$	Erro Pressão	O	Erro Velocidade	O
1/10	1.26637e-01	0.000000	3.92081e-02	0.000000
1/20	4.01607e-02	1.656842	1.10353e-02	1.829029
1/40	1.11520e-02	1.848486	2.93379e-03	1.911287
1/80	2.92024e-03	1.933138	7.53197e-04	1.961666
1/160	7.45832e-04	1.969165	1.90598e-04	1.982496

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 15 – Decaimento do erro com a redução do tamanho h , em escala $\log \times \log$ para o caso Stokes ($\mu' = 1$ e $\mu = 0$).

Fonte: Dados da pesquisa.

6.1.2 Caso Darcy

Para o teste realizado, os coeficientes de permeabilidade e viscosidade são constantes e iguais a 1 ($K = 1$, $\mu = 1$). A viscosidade efetiva adotada é $\mu' = 0$. Os resultados numéricos são comparados com a solução exata. Para a velocidade e pressão exata, considerou-se as seguintes expressões (HANSBO; JUNTUNEN, 2009):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos(x) \sinh(y) \\ \sin(x) \cosh(y) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p = -\sin(x) \sinh(y) - (\cos(1) - 1)^2.$$

Nas Tabelas 2 e 3 estão organizados os resultados obtidos. O gráfico do decaimento do erro em função de h usando diferentes normas é mostrado na Figura 16 observa-se uma convergência de ordem h^2 tanto para a pressão quanto para a velocidade na norma de $L^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$.

Tabela 2 – Estudo de convergência dos erros $\|P_{exata} - P\|_{L^1}$ e $\|U_{exata} - U\|_{L^1}$

$h = h_x = h_y$	Erro Pressão	O	Erro Velocidade	O
1/10	2.88273e-04	0.000000	1.73639e-04	0.000000
1/20	9.49401e-05	1.602347	4.49571e-05	1.949471
1/40	2.94677e-05	1.687885	1.14056e-05	1.978814
1/80	8.80103e-06	1.743389	2.87045e-06	1.990388
1/160	2.55885e-06	1.782179	7.19886e-07	1.995437

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 3 – Estudo de convergência dos erros $\|P_{exata} - P\|_{L^2}$ e $\|U_{exata} - U\|_{L^2}$

$h = h_x = h_y$	Erro Pressão	O	Erro Velocidade	O
1/10	3.06098e-04	0.000000	2.14887e-04	0.000000
1/20	9.84039e-05	1.637205	5.93508e-05	1.856236
1/40	3.01718e-05	1.705516	1.60655e-05	1.885298
1/80	8.94902e-06	1.753397	4.29801e-06	1.902227
1/160	2.59074e-06	1.788368	1.14036e-06	1.914175

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 16 – Decaimento do erro com a redução do tamanho h , em escala $\log \times \log$ para o Caso Darcy ($\mu' = 0$ e $\mu = 1$).

(a) Convergência para a pressão

(b) Convergência para a velocidade

Fonte: Dados da pesquisa.

6.1.3 Caso Stokes-Brinkman

Consideramos o domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, viscosidades $\mu' = \mu = 1$ e permeabilidade homogênea $K = 1$. A função $\mathbf{f}$ e as condições de contorno de Dirichlet são escolhidas de modo

que a solução exata seja (CARVALHO, 2017):

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} z'(y) \cos(x) \\ z(y) \sin(x) \end{pmatrix}, \quad \text{onde } z(y) = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi y) - 2$$

e

$$p(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

Na Figura 17 tem-se o estudo de convergência para a pressão (Figura 17a) e para a velocidade (Figura 17b) através da comparação com a solução exata utilizando diferentes normas e observa-se ordem $O(h^2)$ de convergência.

Figura 17 – Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica.

Fonte: Dados da pesquisa.

6.2 Estudo empírico de convergência

Ainda há discussões em andamento sobre a validade e a aplicação das equações de Stokes-Brinkman como um modelo de fluxos em meios porosos com valores mais elevados da porosidade (AURIAULT, 2009; DURLOFSKY; BRADY, 1987). No entanto, o sistema de equações de Stokes-Brinkman é um modelo conveniente de fluxos em meios porosos altamente heterogêneos contendo obstáculos, canais, fraturas, cavidades e outras características geofísicas (LAZAROV; MAO, 2017). Diante desse fato, para o estudo empírico de convergência do método implementado, considerou-se campos de permeabilidades artificiais, heterogêneos, de alto contraste para representar diferentes geometrias (canais, fraturas e *vugs*) para um domínio bidimensional $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. A condição de contorno que será utilizada para todos os casos é do tipo Dirichlet $\mathbf{u} = (1, 0)$ e para as viscosidades adotou-se $\mu' = \mu = 0,001$. O estudo

empírico de convergência consiste em gerar soluções em malhas grossas e comparar os resultados obtidos com uma solução gerada numa malha mais refinada.

O primeiro campo de permeabilidade considerado, fabricado pelo grupo de pesquisa (ROCHA *et al.*, 2018), possui alto contraste ($K_{max}/K_{min} \sim 10^8$) marcado por um canal pronunciado como mostrado na Figura 18a. O estudo empírico de convergência foi realizado calculando soluções em malhas de 20^2 , 40^2 , 80^2 , 160^2 e 320^2 . Depois de obtidas as soluções dos métodos dos volumes finitos, verificou-se a convergência em norma $L^2(\Omega)$ comparando-as com a solução de referência gerada a partir de uma malha 640^2 . A magnitude do campo de velocidade obtido para uma malha de 640^2 é mostrado na Figura 18b. O gráfico do decaimento do erro em função de h usando a norma $L^2(\Omega)$ é ilustrada na Figura 18c e permite concluir que o método implementado é de ordem $O(h^2)$ tanto para a pressão quanto para a velocidade.

Figura 18 – (a) Permeabilidade do canal em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

O próximo campo de permeabilidade considerado também possui alto contraste ($K_{max}/K_{min} \sim 10^7$), mostrado na Figura 19a. O campo de permeabilidade é inspirado no trabalho de Fadlelmula *et al.* (2015), que estimou fraturas em uma amostra rochosa por meio de microtomografia computadorizada de raios-X (CT) e técnicas de processamento de imagens. Cabe ressaltar que neste trabalho não foi utilizado nenhum tratamento especial de modelagem para fratura, a intenção foi de apenas considerar um campo artificial altamente heterogêneo para realizar o estudo de convergência, calculando as soluções em malhas de 64^2 , 128^2 e 256^2 . A malha de referência é 512^2 . A magnitude do campo de velocidade obtido para esta malha é mostrado na Figura 19b. O gráfico do decaimento do erro em função de h usando a norma $L^2(\Omega)$ é ilustrada na Figura 19c e novamente obtemos uma ordem $O(h^2)$ tanto para a pressão quanto para a velocidade.

Figura 19 – (a) Permeabilidade em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

O último campo de permeabilidade considerado (veja Figura 20a) proposto por Mu e Zhu (2010) representa um meio poroso com regiões de *vugs* conectadas por fraturas, cujo contraste é $K_{max}/K_{min} \sim 10^{10}$. O estudo empírico de convergência foi realizado calculando soluções em malhas de 50^2 , 100^2 e 200^2 . A solução de referência foi gerada a partir de uma malha 400^2 . A magnitude desse campo de velocidade é mostrado na Figura 20b. O gráfico do decaimento do erro em função de h usando a norma $L^2(\Omega)$ é ilustrada na Figura 20c e confirmamos que o método é de segunda ordem mesmo para esse contraste de permeabilidade exagerado.

Figura 20 – (a) Permeabilidade do tipo *vugs* escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica, para a pressão e para a velocidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se, a partir dessas figuras, que, nos campos de velocidades exibidos temos uma difusividade representando uma transição mais suave entre as regiões de maior e menor permeabilidade.

6.3 Adimensionalização

Nesta seção propõe-se a adimensionalização das equações de Stokes-Brinkman com o objetivo de caracterizar o escoamento em termos de uma grandeza adimensional.

Desconsiderando os efeitos gravitacionais, definimos as seguintes variáveis adimensionais

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \mathbf{K}^* = \frac{1}{K_{max}} \mathbf{K} \quad (6.2)$$

e o operador adimensional

$$\nabla^* = L \nabla, \quad (6.3)$$

com

$$p_0 = \frac{LU\mu}{K_{max}}. \quad (6.4)$$

Aqui L e U são, respectivamente, valores de referência de comprimento e velocidade e K_{max} é o maior valor de entrada do tensor de permeabilidade.

Substituindo os valores adimensionais indicados por $*$ em (6.2) e (6.3) na [Equação 4.2](#), segue

$$-\mu' \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \mu \frac{U}{K_{max}} \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{u}^* + \mu \frac{U}{K_{max}} \nabla^* p^* = 0$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por $\frac{K_{max}}{\mu U}$ obtém-se

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\mu'}{\mu} \frac{K_{max}}{L^2}\right) \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* &= 0, \\ -\mathcal{A} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $\mathcal{A} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{K_{max}}{L^2} = \frac{\mu'}{\mu} Da$. Este número adimensional generaliza o número de Darcy ($Da = K_{max}/L^2$) para casos em que a viscosidade efetiva e a viscosidade do fluido não sejam da mesma ordem.

Veja que quando $\mathcal{A}$ for pequeno a equação (6.5) atua no regime de Darcy, e quando for significativo, a equação de Stokes-Brinkman distancia-se de Darcy e portanto o número adimensional $\mathcal{A}$ é fundamental para delimitar numericamente quando é ou não significativo a utilização da equação de Stokes-Brinkman para o escoamento.

No entanto, mesmo que valores não desprezíveis para o número de Darcy (Da) sejam considerados, alguns autores ainda discutem a partir de que porosidade haveria uma coerência física em se modelar o fluxo com a equação de Stokes-Brinkman. A formulação de Stokes-Brinkman para meios porosos deixaria de ser consistente para porosidades abaixo de 0,6 (NIELD; KUZNETSOV, 2013).

6.3.1 GRMES

Modelos geológicos de reservatórios podem apresentar problemas da ordem de 10^8 incógnitas, o que dá origem a um sistema linear de grande porte e matrizes esparsas (CHRISTIE, 1996). Ademais, é sabido na literatura que o fato de representarem fenômenos físicos complexos, resultam geralmente em sistemas mal condicionados do ponto de vista da álgebra linear. Isso é verificado especialmente quando o contraste de permeabilidade K_{max}/K_{min} é muito alto.

Neste contexto, uma das consequências da adimensionalização das equações de Stokes-Brinkman recai sobre o impacto que o contraste de permeabilidade ou o comprimento do meio poroso tem sobre o método numérico escolhido para resolver o sistema linear oriundo da discretização. Nesta seção, o principal interesse é avaliar o comportamento do método iterativo para diferentes valores do parâmetro adimensional.

O Método Residual Mínimo Generalizado (GMRES - *Generalized Minimal Residual*), é um método iterativo usado na obtenção da solução numérica de um sistema não-simétrico de equações lineares. O método foi proposto por Saad e Schultz, em 1986 (SAAD; SCHULTZ., 1986).

Se nenhuma reinicialização for usada, o GMRES (como qualquer ortogonalização dos métodos do subespaço de Krylov) encontra a solução em no máximo N iterações. Sendo assim, o GMRES não pode fazer infinitas iterações, por isso deve-se estabelecer uma determinada tolerância para o resíduo.

Uma vez que a matriz dos coeficientes, obtida a partir da discretização das EDPs empregando o método dos volumes finitos, é não-simétrica utilizou-se do GMRES para obter a solução do sistema linear. Simula-se dois casos (heterogêneo e homogêneo), a fim de avaliar o comportamento do GMRES para o modelo adimensional. Para ambas as simulações adotou-se $N_x = N_y = 20$, resultando em uma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de dimensão 1240, tolerância $tol = 10^{-6}$ para o resíduo e o máximo de iterações permitida é $maxit = 1240$.

6.3.2 Caso Heterogêneo Anisotrópico

No primeiro caso, considera-se o problema heterogêneo anisotrópico ($K_{xx} \neq K_{yy}$) para o domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Os parâmetros de entrada são: viscosidades $\mu' = \mu = 1$, o que acarreta em $\mathcal{A} = Da$, o termo de força é $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e a condição de contorno é do tipo Dirichlet

$\mathbf{g} = (1, 0)$ sobre $\partial\Omega$. O campo de permeabilidade heterogêneo adimensional é de alto contraste, (em $x \sim 10^5$ e em $y \sim 10^6$), conforme mostrado na Figura 21.

O comportamento do resíduo é mostrado na Figura 22a. Observa-se que quando o número de Darcy (Da) é pequeno, $Da < 1$, o número de iterações é elevado, o que é explicado pela influência do tensor de permeabilidade. À medida que o número de Da aumenta o termo $\nabla^2 \mathbf{u}$ passa a ter mais influência sobre o escoamento, tendendo para um regime de fluxo livre.

Figura 21 – Permeabilidade adimensional em escala logarítmica: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 22b estima-se a zona de influência do equacionamento de Stokes-Brinkman, permitindo inferir que a transição entre o regime puramente Darcy e puramente Stokes acontece para valores de Da próximos à unidade. Na Figura 23 observa-se o desenvolvimento do campo de velocidade para diferentes números de Da onde é evidenciado a transição para os extremos.

Figura 22 – (a) Comportamento GMRES: Monitoramento resíduo e (b) transição entre os regimes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 23 – Desenvolvimento do campo de velocidade para diferentes valores de Da .

Fonte: Dados da pesquisa.

6.3.3 Caso Homogêneo Isotrópico

No caso homogêneo e isotrópico tem-se $K_{xx} = K_{yy} = 1$. O domínio para a simulação e os outros parâmetros de entrada são os mesmos do caso anterior. Na [Figura 24](#) observa-se uma queda no número de iterações, como era esperado devido à falta da heterogeneidade. Entretanto, há uma oscilação no número de iterações quando o número Da aproxima-se da unidade, uma vez que o termo $\nabla^2 \mathbf{u}$ começa a influenciar o equacionamento tornando a obtenção da solução do sistema linear mais difícil.

Figura 24 – Comportamento GMRES: Monitoramento do resíduo.

Fonte: Dados da pesquisa.

6.4 Convergência do Método GRMES

Dados os dois casos apresentados construiu-se as Tabelas 4a e 4b com as informações sobre o comportamento do GMRES em termos do número de condicionamento da matriz de coeficientes ($\kappa(\mathbf{A})$) e a sua relação com o número Da . Observa-se que à medida que o número Da aumenta o número de condicionamento da matriz também aumenta. Em contrapartida, para o caso heterogêneo anisotrópico, o número de iterações para atingir o resíduo aumenta, para valores elevados de $\kappa(\mathbf{A})$. No caso homogêneo e isotrópico o número de iterações varia.

A princípio, este resultado parece contradizer a teoria da álgebra linear. Sabe-se que quando o número de condicionamento é alto indica que o problema não tem boas condições para ser tratado numericamente, isto é, o sistema linear fica cada vez mais mal posto, deteriorando a convergência dos métodos iterativos. Então, o que poderia explicar este comportamento do GMRES?

Uma vez que o GMRES é aplicado a matrizes que não possuem simetria, a principal desvantagem é não poder utilizar a decomposição espectral para decompor a matriz $\mathbf{A}$ em qualquer caso. Por outro lado, se $\mathbf{A}$ é diagonalizável, temos $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$, sendo $\mathbf{V}$ uma matriz que pode ter componentes complexos. Tal argumento é usado para provar os Teoremas 2 e 3.

Teorema 2. Seja $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$, não-singular e diagonalizável. Seja $\mathbf{x}_k$ a k -ésima iteração do GMRES. Então, para todo $\bar{p}_k \in \mathbb{P}_k$

$$\frac{\|\mathbf{r}_k\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \leq \kappa(\mathbf{V}) \min_{\bar{p}_k \in \mathbb{P}_k} \max_{z \in \sigma(\mathbf{A})} |\bar{p}_k(z)|.$$

Aqui $\mathbf{r}_k$ é o resíduo da k -ésima iteração, $\bar{p}_k$ é chamado de polinômio residual e $\sigma(\mathbf{A})$ o conjunto dos autovalores de $\mathbf{A}$.

Tabela 4 – Relação entre o número de condicionamento da matriz de coeficientes do sistema $\kappa(\mathbf{A})$ e o número de iterações do GMRES.

(a) Caso Heterogêneo			(b) Caso Homogêneo		
Da	$\kappa(\mathbf{A})$	Iterações	Da	$\kappa(\mathbf{A})$	Iterações
10^{-5}	$5.76110 \cdot 10^8$	1154	10^{-5}	$5.32600 \cdot 10^3$	183
10^{-4}	$5.76191 \cdot 10^8$	1154	10^{-4}	$5.21531 \cdot 10^3$	208
10^{-3}	$5.76986 \cdot 10^8$	1154	10^{-3}	$4.78073 \cdot 10^3$	261
10^{-2}	$5.84419 \cdot 10^8$	1149	10^{-2}	$6.16354 \cdot 10^3$	313
10^{-1}	$6.43460 \cdot 10^8$	997	10^{-1}	$4.77961 \cdot 10^4$	166
10^0	$1.03837 \cdot 10^9$	821	10^0	$3.24945 \cdot 10^6$	223
10^1	$4.38194 \cdot 10^9$	607	10^1	$3.20180 \cdot 10^8$	93
10^2	$6.35553 \cdot 10^{10}$	341	10^2	$3.19705 \cdot 10^{10}$	38
10^3	$3.50124 \cdot 10^{12}$	123	10^3	$3.19657 \cdot 10^{12}$	40
10^4	$3.22691 \cdot 10^{14}$	69	10^4	$3.19653 \cdot 10^{14}$	42
10^5	$3.19956 \cdot 10^{16}$	68	10^5	$3.19652 \cdot 10^{16}$	43

Fonte: Dados da pesquisa.

O resultado do Teorema 2, veja a demonstração em [Saad e Schultz. \(1986\)](#), fornece um limitante superior em função do número de condição da matriz $\mathbf{V}$. No entanto, o número de iterações está relacionado à distribuição dos autovalores. Dois exemplos, que podem ser encontrados em [Trefethen e Bau \(1997\)](#) mostram que o GMRES converge com um número baixo de iterações mesmo para $\mathbf{V}$ mal condicionada. Este resultado é formalizado pelo próximo teorema.

Teorema 3. Suponha que existam v autovalores de $\mathbf{A}$ com parte real não negativa e que os outros autovalores estão agrupados em um círculo centrado em $C > 0$ com raio $R < C$. Então

$$\min_{p \in \mathbb{P}_N, p(0)=1} \max_{z \in \sigma(\mathbf{A})} |\bar{p}_k(z)| \leq \left(\frac{R}{C}\right)^{N-v} \left(\frac{D}{d}\right)^v, \quad (6.6)$$

onde $D = \max_{i=1, \dots, v, j=v+1, \dots, N} |\lambda_i - \lambda_j|$ e $d = \min_{i=1, \dots, v} |\lambda_i|$.

A demonstração do Teorema 3 é encontrada em [Saad e Schultz. \(1986\)](#). Sendo assim, o raio de convergência do GMRES depende da distribuição dos autovalores de $\mathbf{A}$ no plano complexo. Para uma convergência rápida, os autovalores devem estar agrupados e distantes da origem, esse fato é evidenciado na [Figura 25](#). Conclui-se que a disposição dos autovalores é mais importante do que o número de condicionamento da matriz.

Figura 25 – Distribuição dos autovalores para cada número Da .

Fonte: Dados da pesquisa.

Os últimos experimentos testam a sensibilidade do GMRES em relação à distribuição das heterogeneidades.

Considerou-se três geometrias, seguindo trabalho de [Lazarov e Mao \(2017\)](#). A [Figura 26a](#) representa um meio com algumas inclusões longas que imitam materiais porosos fibrosos conectados. Já a [Figura 26b](#) apresenta um meio poroso com inclusões isoladas e globalmente conectadas com baixa permeabilidade. Por fim, a [Figura 26c](#) mostra a permeabilidade de um corte bidimensional de espumas abertas. Neste exemplo, as regiões de baixa permeabilidade estão principalmente desconectadas.

Figura 26 – Três distribuições de permeabilidade: regiões vermelhas denotam alta permeabilidade, regiões azuis correspondem a de baixa permeabilidade.

Fonte: [Lazarov e Mao \(2017\)](#).

A zona de influência do operador de Stokes é mostrada na [Figura 27](#), onde confirma-se, experimentalmente, que a transição entre o regime puramente Darcy e puramente Stokes acontece para valores de Da próximos à unidade, independentemente da geometria.

Figura 27 – Zona de transição entre os regimes limites.

Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, na [Figura 28](#) observa-se que no limite Darcy há uma oscilação no número de iterações. Por outro lado, para valores $Da > 10^3$, quando não interessa mais a distribuição da geometria nos campos de permeabilidade, mantém-se o número de iterações. Conclui-se então que o comportamento do GMRES é mais sensível à geometria do meio no regime de Darcy.

Em todos os casos analisados a distribuição dos autovalores seguem o mesmo padrão mostrado na [Figura 25](#), indicando que mesmo que o problema torne-se mal condicionado à medida que Da aumenta, a convergência do método iterativo GMRES será determinada pela distribuição dos autovalores da matriz do sistema.

Figura 28 – Comportamento do GMRES à medida que Da aumenta, para valores no intervalo centrado centrado em $Da = 1$. As curvas azul, vermelho, verde referem-se a geometria inclusões conectadas, inclusões e espuma aberta, respectivamente.

Fonte: Dados da pesquisa.

6.5 Corroboração com resultados da literatura

6.5.1 Escoamento em uma cavidade (*Lid-driven cavity*)

Após os testes para verificar a convergência do limite de Stokes com solução manufaturada, apresentamos nessa seção o problema de escoamento em uma cavidade, ou *Lid-driven cavity*, inspirado no trabalho [Araya et al. \(2017\)](#).

Realizou-se o estudo sobre um domínio quadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, para o problema de Stokes ($\mathbf{K} = 0$) e o modelo de Stokes-Brinkman ($\mathbf{K} = 10^3$ e $\mu' = 1$). Para esta simulação $N_x = N_y = 128$, $\mathbf{f} = 0$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em todo o contorno, exceto no limite superior, onde é imposto $\mathbf{u} = (1, 0)$. Em ambos os casos $\mu = 1$. Os resultados obtidos são mostrados na [Figura 29](#) e concordam qualitativamente com os resultados de [Araya et al. \(2017\)](#), conforme mostrado na [Figura 30](#).

Figura 29 – Magnitude do campo de velocidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 30 – Magnitude do campo de velocidade.

Fonte: [Araya et al. \(2017\)](#).

6.5.2 Simulação SPE10

O próximo exemplo considera um campo de permeabilidades realístico do projeto SPE10 (<http://www.spe.org/web/csp>) fornecido pela Sociedade de Engenheiros de Petróleo (Society of Petroleum Engineers-SPE) para a realização de simulações em reservatórios de petróleo (CHRISTIE; BLUNT, 2001). O benchmark SPE10 fornece dados de permeabilidade em uma amostra 3D. As 35 camadas superiores representam um ambiente próximo à costa com porosidade relativamente baixa e as 50 camadas inferiores apresentam canais pronunciados.

Adotou-se um coeficiente de permeabilidade 2D isotrópico heterogêneo $\mathbf{K}$ seguindo Araya *et al.* (2017), obtido da camada superior das 85 camadas no projeto SPE10. O domínio $\Omega = (0, 1200) \times (0, 2200)$, é dividido em 220 células na direção vertical e 60 células na horizontal ($N_x = 60$ e $N_y = 220$), as viscosidades adotadas são $\mu = \mu' = 0,3$ e o tensor de permeabilidade $\mathbf{K}$, em escala logarítmica, é mostrado na Figura 31b.

Por motivos de implementação utilizou-se uma condição de saída um pouco diferente de Araya *et al.* (2017). Sendo assim, prescrevemos as condições de contorno de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 1)$ na entrada e na saída e as condições $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $x = 0$ e $x = 1200$ conforme representado na Figura 31a.

Figura 31 – Características do domínio Ω .

(a) Esquema da condição de contorno.

(b) Permeabilidade em escala logarítmica.

Fonte: Dados da pesquisa.

Dado que a unidade dos valores de entrada do tensor de permeabilidade heterogêneo é mD tem-se $K_{max} = 4,6475 \cdot 10^3 mD$ onde $1D = 9,869233 \cdot 10^{-13} m^2$ e sendo a unidade de comprimento do domínio ft , $1ft = 0,3048m$, estima-se o número de Da para esta simulação, nas unidades do S.I.

$$\mathcal{A} = \frac{0,3 (4,6475 \cdot 10^3) \times (10^{-3} \cdot 9,869233 \cdot 10^{-13} m^2)}{0,3 (1200 \times 0,3048m)^2} = 1,0201 \cdot 10^{-17}.$$

O valor obtido é da ordem de 10^{-17} indicando que o modelo de Stokes-Brinkman atua no regime de Darcy. A solução de malha fina para o campo de velocidade e pressão são mostrados nas Figuras 32a e 32b, respectivamente. Observamos que os resultados, apesar da diferença na condição de saída, são qualitativamente comparáveis, conforme mostrado na Figura 33.

Figura 32 – Solução na malha fina com 220×60 volumes finitos para a camada superior SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33 – Solução na malha fina 220×60 para a camada superior SPE10.

Fonte: Araya *et al.* (2017).

O MODELO REGULARIZADO DE STOKES-BRINKMAN PARA ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM MEIOS POROSOS

No presente capítulo, apresenta-se a formulação clássica da modelagem matemática para o fluxo bifásico incompressível de fluidos imiscíveis em meios porosos. Também é introduzido um modelo bifásico, adaptado do modelo clássico, utilizando a equação de Stokes-Brinkman, para meios homogêneos e heterogêneos.

7.1 Formulação do modelo matemático bifásico

A lei de Darcy é estabelecida para escoamentos monofásicos, onde a fase que escoa preenche completamente os poros do meio. A sua aplicação para escoamentos bifásicos se dá a partir da hipótese de que a lei é válida para cada uma das fases que escoa

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{\mathbf{K}_\alpha}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha g \nabla Z), \quad \alpha \in \{w, o\}.$$

ou seja, a velocidade de Darcy da fase α está relacionada com o gradiente de pressão ∇p_α através de uma função $\mathbf{K}_\alpha$, que é denominada permeabilidade da fase α (i.e., a permeabilidade efetiva da fase α). Em termos da permeabilidade relativa (2.3) tem-se,

$$\mathbf{u}_\alpha = -\mathbf{K} \frac{k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha g \nabla Z), \quad \alpha \in \{w, o\}.$$

Na versão multifásica da lei de Darcy (em oposição à versão monofásica (3.20)), usa-se as permeabilidades relativas $k_{r\alpha}$ para contabilizar a redução da permeabilidade de cada fase devido à presença das outras fases.

Define-se a mobilidade da fase α como $\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha}$. Ela mede o grau de mobilidade da fase num meio poroso com permeabilidade intrínseca $\mathbf{K}$, ou seja, a facilidade ou a dificuldade

com que uma fase escoa no meio e permite reescrever as velocidades da fase em um meio heterogêneo e obter lei de Darcy modificada (AZIZ, 1979):

$$\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha g \nabla Z), \quad \alpha \in \{w, o\}. \quad (7.1)$$

Para o equacionamento bifásico, equação de continuidade é expressa por:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha. \quad (7.2)$$

Considerando as hipóteses de escoamento isotérmico, e que os efeitos gravitacionais e de pressão capilar das fases imiscíveis são negligenciados. Além disso, a porosidade será constante e as massas específicas das duas fases também, assim a equação da continuidade é reescrita como

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \alpha \in \{w, o\} \quad (7.3)$$

Aqui, as velocidades de fase são denotadas por $\mathbf{u}_w$ e $\mathbf{u}_o$ respectivamente.

Em vista da identidade (2.2), as velocidades de duas fases podem ser somadas para produzir a condição de *incompressibilidade*,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o. \quad (7.4)$$

Denota-se a saturação da água como $S = S_w$ na discussão que segue. A velocidade total é denotada por $\mathbf{u}$ e a pressão global do sistema é dada por $p = p_w = p_o$. Escrevendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$, então

$$\mathbf{u} = -\lambda_T(S) \mathbf{K} \nabla p \quad \text{ou} \quad \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \lambda_T(S) \nabla p = 0, \quad (7.5)$$

onde $\lambda_T(S) = \lambda_w(S) + \lambda_o(S)$ é a mobilidade total.

Para fechar o modelo, devemos também fornecer expressões para as grandezas dependentes da saturação. As permeabilidades relativas consideradas são dadas por (EWING, 1983)

$$\lambda_w(S) = \frac{(S^*)^2}{\mu_w}, \quad \lambda_o(S) = \frac{(1 - S^*)^2}{\mu_o} \quad \text{e} \quad S^* = \frac{S - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}}, \quad (7.6)$$

onde S_{or} é a saturação de óleo irreduzível, ou seja, a menor saturação de óleo que pode ser alcançada pelo deslocamento do óleo pela água e S_{wc} é a saturação de água conata, ou seja, a saturação da água presa nos poros da rocha durante a formação da rocha. Neste trabalho assume-se que $S_{or} = S_{wc} = 0$ e com isso

$$\lambda_T(S) = \lambda_w(S) + \lambda_o(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} = \frac{S^2}{\mu_w} + \frac{(1 - S)^2}{\mu_o}. \quad (7.7)$$

Usando a equação (7.5), o gradiente de pressão em (7.1) pode ser eliminado, levando a

$$\mathbf{u}_w = -\lambda_w(S) \mathbf{K} \nabla p \implies \mathbf{u}_w = \lambda_w(S) \left(\frac{1}{\lambda_T(S)} \mathbf{u} \right) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_T(S)} \mathbf{u}. \quad (7.8)$$

Denota-se a função de fluxo fracionário f_α como

$$f_\alpha(S) = \frac{\lambda_\alpha(S)}{\lambda_T(S)} = \frac{\lambda_\alpha(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_o(S)} \quad \alpha \in \{w, o\}. \quad (7.9)$$

Para a fase aquosa tem-se

$$f_w(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_T(S)} = \frac{MS^2}{MS^2 + (1-S)^2}, \quad (7.10)$$

onde $M = \frac{\mu_o}{\mu_w}$ é o raio de viscosidade. Na Figura 34 temos o gráfico de $f_w(S)$ e $f_o(S)$ para alguns valores de M .

Figura 34 – Comportamento de $f_\alpha(S)$, $\alpha = w, o$ para diferentes valores de M e $S \in [0, 1]$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Definindo $f = f_w$ e para $\phi \equiv 1$, tem-se a equação de Buckley-Leverett,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\mathbf{u}) = 0. \quad (7.11)$$

Combinando a equação de saturação com a condição de incompressibilidade (7.4) e a equação de pressão (7.5), têm-se as equações de evolução para o escoamento bifásico em um meio poroso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \lambda_T(S)\nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Fornecendo condições de contorno e condições iniciais adequadas obtemos um sistema elíptico-hiperbólico que modela o escoamento bifásico de água e óleo, onde a equação de saturação em (7.12) é uma lei de conservação hiperbólica escalar com um coeficiente dado pela velocidade $\mathbf{u}$.

Por outro lado, em meios porosos que apresentam canais, regiões vulgares e regiões com alta permeabilidade e/ou alta porosidade, uma nova abordagem considera uma questão mais fundamental: a lei de Darcy (7.1) está correta? Muitos estudos se concentraram nessa questão e descobriram que a lei de Darcy pode ser inadequada para explicar a dinâmica do escoamento em meios porosos, mesmo para uma única fase (BRINKMAN, 1947). Segundo Coclite *et al.* (2014) o problema de mostrar que modelos bifásicos completos são bem postos podem ser atribuídos às deficiências de modelagem da lei de Darcy.

Várias modificações da lei de Darcy foram propostas como mostrado em Coclite *et al.* (2012). O principal interesse neste trabalho é estudar a modificação realizada por H. C. Brinkman (BRINKMAN, 1947). É sabido na literatura que esta modificação explica a dinâmica do fluxo em meios porosos, melhor do que o modelo de Darcy em muitas situações de interesse, como mostra os trabalho de Krotkiewski *et al.* (2011), Marusic-Paloka, Pazanin e Marusic (2012) e referências contidas neles.

Partindo da modelagem realizada para o caso Darcy, em que as equações do caso monofásico são aplicáveis para duas fases, é natural pensar nas equações de Stokes-Brinkman como

$$-\mu'_\alpha \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha + \mu_\alpha \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{u}_\alpha + \nabla p_\alpha = 0,$$

ou em termos da permeabilidade relativa

$$-\mu'_\alpha \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha + \mu_\alpha \frac{1}{k_{r\alpha}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_\alpha + \nabla p_\alpha = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \neq 0$ tem-se

$$-\mu'_\alpha \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_\alpha + \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha = 0.$$

Observe que $\frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha}$ é um número adimensional e por definição $k_{r\alpha}$ também é.

Assim, as equações que descrevem o escoamento bifásico usando as equações de Stokes-Brinkman e as mesmas hipóteses utilizadas na formulação de Darcy, são

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_w) &= 0, \\ -\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_o) &= 0, \quad (S_o = 1 - S) \\ -\mu'_w \lambda_w(S) \nabla^2 \mathbf{u}_w + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_w + \lambda_w(S) \nabla p &= 0, \\ -\mu'_o \lambda_o(S) \nabla^2 \mathbf{u}_o + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_o + \lambda_o(S) \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o) &= 0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

resultando em um sistema fortemente acoplado.

A análise de Buckley-Leverett é mais complicada para o equacionamento de Stokes-Brinkman, uma vez que não é possível escrever a velocidade de uma das fases em termos da velocidade total e da própria definição de fluxo fracionário, como para o caso Darcy, mostrado na equação (7.8).

Para reduzir o número de incógnitas do problema e escrever em termos da velocidade total $\mathbf{u}$ e pressão global p assume-se que $\mu_\alpha = \mu'_\alpha$. Assim,

$$-k_{r\alpha}\nabla^2\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_\alpha + \lambda_\alpha\nabla p_\alpha = 0$$

Escrevendo as equações de Stokes-Brinkman para cada uma das fases e somamos as duas equações:

$$-k_{rw}\nabla^2\mathbf{u}_w - k_{ro}\nabla^2\mathbf{u}_o + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o) + (\lambda_w + \lambda_o)\nabla p = 0$$

ou

$$-k_{rw}\nabla^2\mathbf{u}_w - k_{ro}\nabla^2\mathbf{u}_o + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \lambda_T\nabla p = 0$$

Observe que esta modelagem inicial não é uma boa alternativa para escrever uma equação em termos apenas da velocidade total e incorporar a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ao novo sistema.

Apesar do modelo de Stokes-Brinkman monofásico ser bem difundido na literatura, poucos são os trabalhos encontrados que abordam a sua extensão para escoamentos bifásicos. Os primeiros a investigarem o tópico em questão foram Coclite *et al.* (2014) que modelaram o problema do escoamento incompressível e imiscível para um meio poroso homogêneo e Bürger *et al.* (2016) que elaboraram a primeira modelagem considerando um campo de permeabilidade heterogêneo.

A partir da formulação matemática realizada para o caso Darcy, Coclite *et al.* (2014) inspirados por H.C. Brinkman (BRINKMAN, 1947) deduziram a seguinte equação de Stokes-Brinkman para a velocidade de cada fase

$$-\zeta\nabla^2\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha(S)\nabla p_\alpha, \quad \alpha \in \{w, o\}. \quad (7.14)$$

sendo ζ um parâmetro escalar pequeno. Observe que a aproximação de Stokes-Brinkman bifásica (7.14) apenas adiciona um termo suavizador à lei de Darcy (7.5).

Somando-se as relações de velocidade de fase (7.14) para ambas as fases w, o e negligenciando a pressão capilar, ou seja, $p_w = p_o = p$, obtemos que a velocidade total $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$ satisfaz,

$$-\zeta\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \lambda_T(S)\nabla p = 0. \quad (7.15)$$

Toda a discussão realizada por Coclite *et al.* (2014) foi feita para um meio poroso homogêneo ($K = 1$). Aplicando o operador de divergência em ambos os membros da equação

(7.15) e usando a hipótese de incompressibilidade (7.4), obtém-se a seguinte equação elíptica para a pressão

$$-\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) = 0. \quad (7.16)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\zeta \nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) \implies -\zeta \underbrace{\nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} + \underbrace{\mathbf{K}^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} = -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) \\ \implies 0 &= -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p). \end{aligned}$$

Combinando a equação (7.16) com a conservação da massa para a fase aquosa (7.3) e com a aproximação de Stokes-Brinkman (7.14) que descreve a velocidade da fase aquosa e a função de fluxo fracionário definida em (7.10) obtemos o seguinte sistema completo

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_w) &= 0, \\ -\zeta \nabla^2 \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_w + \lambda_w(S) \nabla p &= 0, \\ -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) &= 0, \end{aligned} \quad (7.17)$$

que descreve o escoamento bifásico em um meio poroso, obtido a partir da equação de Stokes-Brinkman.

O sistema (7.17) foi então denominado por Coclite *et al.* (2014) como a regularização de Stokes-Brinkman para escoamento bifásico em um meio poroso. Observamos que o sistema Darcy (7.12) pode ser obtido a partir da regularização de Stokes-Brinkman (7.17) definindo $\zeta = 0$ e reescrevendo a velocidade da fase aquosa em termos da função de fluxo fracionário, isto é, se $\zeta = 0$ por (7.8) e (7.9) obtemos

$$\mathbf{u}_w = -\lambda_T(S) f(S) \nabla p \implies f(S) \mathbf{u} = -\lambda_T(S) f(S) \nabla p \implies \mathbf{u} = -\lambda_T(S) \nabla p. \quad (7.18)$$

Além disso, de (7.11) vem

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S) \mathbf{u}) = 0.$$

Por fim, basta acoplar as equações (7.18) e (7.4) para obter o sistema (7.12).

Ao estender a discussão para o caso heterogêneo, nos deparamos com duas possibilidades.

1. Se optarmos por resolver o sistema elíptico-hiperbólico em termos de uma fase, por exemplo, a água (w), mantém-se a equação para a saturação escrita como

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_w = 0$$

e podemos adicionar ao sistema a equação elíptica

$$-\zeta \nabla^2 \mathbf{u}_w + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_w = -\lambda_w(S) \nabla p \quad \text{ou} \quad -\zeta \nabla^2 \mathbf{u}_w + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_w = -\lambda_T(S) f(S) \nabla p$$

Entretanto, não temos condições de usar a hipótese de incompressibilidade, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, com $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$ e obter uma equação que relacione a pressão e a velocidade da fase $\mathbf{u}_w$. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\zeta \nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) \implies -\zeta \underbrace{\nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} + \nabla \cdot (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\lambda_T(S) \nabla p) \\ &\implies \nabla \cdot (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \lambda_T(S) \nabla p) = 0. \end{aligned}$$

2. Optando por escrever o sistema epilítico-hiperbólico em termos da velocidade total $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$ é possível incluir a condição de incompressibilidade, mas não é possível escrever a equação do transporte em termos da velocidade total, sendo possível apenas para o caso Darcy (7.11) devido à relação (7.8).

Na literatura o primeiro trabalho a considerar o escoamento bifásico para um meio poroso heterogêneo usando a equação de Stokes-Brinkman foi proposto por [Bürger et al. \(2016\)](#) e é escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (F(S, \mathbf{u}, \mathbf{x})) &= 0, \\ -\nabla \cdot [\mu(S)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) - p\mathbf{I}] + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u} - S\mathbf{g} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (7.19)$$

onde as incógnitas primárias são a velocidade da mistura $\mathbf{u}$, a saturação S e o campo de pressão p . Aqui, $\mu = \mu(S)$ é uma viscosidade dependente da saturação e

$$F(S, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = f(S)\mathbf{u} + b(S)\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{g}$$

é um vetor de fluxo não linear, $\mathbf{K}$ é o tensor de permeabilidade do meio e $\mathbf{g}$ é a aceleração da gravidade. Além disso, f é definida como em (7.9) e b é escrita como

$$b(S) = f(S)\lambda_w(S)\Delta\rho.$$

Nesta formulação os autores consideram a equação de transporte deduzida a partir da equação de Darcy negligenciando os termos de pressão capilar. A dedução dessa equação encontra-se feita com detalhes em [Helmig et al. \(1997\)](#). Além disso, esta formulação bifásica da equação de Stokes-Brinkman parece não ser verdadeira. Basta observar o dimensionamento da equação. As unidades no S.I. para as grandezas envolvidas no equacionamento da equação elíptica são

$$[\mathbf{u}] = \frac{m}{s}, \quad [\mathbf{K}] = Da = m^2, \quad [p] = Pa, \quad [\mu(S)] = Pa \cdot s, \quad [\mathbf{g}] = \frac{m}{s^2}, \quad [\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

Logo, a análise dimensional do equacionamento é dada por

$$\begin{aligned} -[\nabla \cdot (\mu(S)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top))] + [\nabla p] + [\mathbf{K}^{-1}][\mathbf{u}] - [S][\mathbf{g}] &= 0, \\ \implies \frac{1}{m} \left[Pa \cdot s \frac{1}{m} \left(\frac{m}{s} \right) \right] + \frac{1}{m} Pa + \frac{1}{m^2} \frac{m}{s} + \frac{m}{s^2} &= \frac{Pa}{m} + \frac{Pa}{m} + \frac{1}{m \cdot s} + \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Observe que as somas das grandezas não resulta a mesma unidade.

Por outro lado, a equação seria verdadeira se fosse reescrita como

$$\begin{aligned}
 & -[\nabla \cdot (\mu(S)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top))] + [\nabla p] + [\mu(S)][\mathbf{K}^{-1}][\mathbf{u}] - [S][\rho][\mathbf{g}] = 0, \\
 & \implies \frac{1}{m} \left[Pa \cdot s \frac{1}{m} \left(\frac{m}{s} \right) \right] + \frac{1}{m} Pa + Pa \cdot s \frac{1}{m^2} \frac{m}{s} + \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s^2} = \frac{Pa}{m} + \frac{Pa}{m} + \frac{Pa}{m} + \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s^2} = \frac{N}{m^3}
 \end{aligned}$$

sendo $Pa = N/m^2$ e $N = kg \frac{m}{s^2}$.

Desprezando os efeitos da gravidade neste estudo ainda existe um problema de dimensionamento.

Os autores não entram em detalhes sobre a modelagem da equação elíptica de Stokes-Brinkman e a maneira como esta foi apresentada no artigo não nos dá segurança para adotar tal modelo proposto.

Outro modelo que considera o escoamento bifásico para meios porosos heterogêneos foi proposto por Armiti-Jubere e Rohde (ARMITI; ROHDE, 2019; ARMITI; ROHDE, 2017), dado pelo sistema

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_w) = 0, \\
 & -\mu_{ef} \nabla^2 \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_w + \lambda_w \mathbf{K} \nabla p_w = 0, \\
 & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

onde S_w , $\mathbf{u}_w$ e p_w são a saturação, velocidade e pressão da fase aquosa, $\mu_{ef} > 0$, segundo os autores, é a viscosidade efetiva e $\mathbf{u}$ é a velocidade total das fases.

Novamente, observamos um problema no dimensionamento da equação elíptica. Veja que realizando a análise adimensional segue

$$-[\mu_{ef}][\nabla^2 \mathbf{u}_w] + [\mathbf{u}_w] + [\lambda_w][\mathbf{K}][\nabla p_w] = 0 \implies (Pa \cdot s) \frac{1}{m^2} \frac{m}{s} + \frac{m}{s} + \frac{1}{Pa \cdot s} m^2 \frac{1}{m} Pa = \frac{Pa}{m} + \frac{m}{s} + \frac{m}{s}$$

onde as somas das grandezas não representam a mesma unidade.

Assim, a fim de resolver o sistema em termos da velocidade total $\mathbf{u}$ e incluir a condição de incompressibilidade, baseado nos trabalhos de Coclite *et al.* (2014) e Bürger *et al.* (2016) é proposto o seguinte modelo regularizado de Stokes-Brinkman para escoamentos bifásicos na forma de Buckley-Leverett:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\mathbf{u}) = 0, \\
 & -\zeta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \lambda_T(S) \nabla p = 0, \\
 & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Nesta versão recupera-se o modelo (7.12) fazendo $\zeta = 0$.

O conjunto de equações (7.21) será estudado na forma adimensional para avaliar os impactos que o termo regularizador tem sobre essa nova formulação e de que maneira este parâmetro se relaciona com o contraste de permeabilidade.

Definimos as seguintes variáveis adimensionais

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{t}^* = \frac{\mathbf{t}}{T}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{P}, \quad \mathbf{K}^* = \frac{1}{K_{max}} \mathbf{K}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda_T(S)}{1/\mu_o}, \quad (7.22)$$

e o operador adimensional

$$\nabla^* = L \nabla, \quad (7.23)$$

com

$$T = \frac{L}{U} \quad \text{e} \quad P = \frac{LU\mu_o}{K_{max}}. \quad (7.24)$$

Aqui L e U são, respectivamente, valores de referência de comprimento e velocidade, K_{max} é o maior valor de entrada do tensor de permeabilidade e μ_o é a viscosidade do óleo. Para adimensionalizar a equação regularizada de Stokes-Brinkman substituímos os valores adimensionais indicados por $*$ em (7.22) e (7.23) na Equação 7.15,

$$-\zeta \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{U}{K_{max}} \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{u}^* + \frac{U}{K_{max}} \lambda^* \nabla^* p^* = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da última equação por $\frac{K_{max}}{U}$ obtém-se

$$-\zeta \left(\frac{K_{max}}{L^2} \right) \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{u}^* + \lambda^* \nabla^* p^* = 0. \quad (7.25)$$

Eliminando os asteriscos e usando as seguintes definições

$$Da = \frac{K_{max}}{L^2}$$

e

$$\lambda^* = \frac{\lambda_T(S)}{1/\mu_o} = \frac{\lambda_w(S) + \lambda_o(S)}{1/\mu_o} = \frac{k_{rw}(S)/\mu_w + k_{ro}(S)/\mu_o}{1/\mu_o} = (\mu_o/\mu_w)k_{rw}(S) + k_{ro}(S) = MS^2 + (1-S)^2,$$

sendo $M = \mu_o/\mu_w$ o raio de viscosidade, tem-se a equação regularizada de Stokes-Brinkman para escoamentos bifásicos na forma adimensionalizada,

$$-\zeta Da \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \lambda(S) \nabla p = 0. \quad (7.26)$$

Por outro lado, a adimensionalização da equação de conservação da massa e do transporte é facilmente realizada e resulta nas mesmas expressões se omitirmos os asteriscos das equações adimensionalizadas,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7.27)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S) \mathbf{u}) = 0. \quad (7.28)$$

O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS PARA O MODELO BIFÁSICO REGULARIZADO

Neste capítulo apresenta-se alguns experimentos numéricos obtidos da implementação do método de volumes finitos para o modelo de Stokes-Brinkman bifásico. Inicialmente, o famoso método IMPES é introduzido e será utilizado para resolver o sistema adimensional proposto e, em seguida, são apresentados os resultados obtidos que incluem: o problema clássico do tipo *quarter of five spot*, perfis de saturação e curvas de produtividade de óleo para campos de permeabilidades realísticos do SPE10 2D.

8.1 O método IMPES

Uma estratégia natural para resolver o sistema acoplado é fazer uma discretização para cada equação e simultaneamente resolver para as incógnitas primárias $\mathbf{u}$, p e $S = S_w$. No entanto, para o modelo proposto que incluem as equações (7.26)-(7.28), esta abordagem é computacionalmente cara, uma vez que agora precisamos resolver um grande sistema não linear de equações por meio de algum procedimento iterativo como, por exemplo, o método de Newton-Raphson. Por outro lado, métodos mais eficientes podem ser desenvolvidos usando a segregação do operador para desacoplar as equações do sistema. Usando uma abordagem sequencial, cada equação é resolvida separadamente e, portanto, pode-se usar métodos diferentes para discretizar as equações fundamentalmente diferentes.

Dentre os possíveis métodos numéricos usados para resolver o sistema gerado pelo conjunto de equações (7.26)-(7.27) e a equação hiperbólica (7.28) para o transporte utiliza-se o esquema Pressão Implícita, Saturação Explícita (*Implicit Pressure, Explicit Saturation - IMPES*), (COATS, 2000), (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2004). Este algoritmo sequencial, originalmente proposto por Sheldon, Jr et al. (1959), tem a vantagem de reduzir substancialmente o tamanho dos sistemas lineares a serem resolvidos, em comparação com um método totalmente implícito.

Em contrapartida, o método é limitado por importantes restrições de estabilidade numérica sobre o tamanho do incremento do passo de tempo.

Para os experimentos deste capítulo um método de segregação sequencial projetado foi utilizado da seguinte maneira: Primeiro, a distribuição de saturação no instante t_n (ou dados iniciais) é usado para calcular os coeficientes dependentes da saturação em (7.26), antes que a equação seja resolvida para pressão global e velocidade total. Então, os valores atualizados da velocidade total em t_n são usados para avaliar a saturação no tempo t_{n+1} . Em seguida, os novos valores de saturação são usados para atualizar os coeficientes dependentes da saturação em (7.26) que é resolvida novamente com a equação de conservação de massa (7.27), e assim por diante. Consequentemente, desenvolve-se esquemas numéricos para (7.26)-(7.27) e (7.28) sem a preocupação com o acoplamento não linear entre os dois.

A discretização espacial para as equações (7.26) e (7.27) é a mesma que foi considerada para a resolução do escoamento monofásico, visto no Capítulo 5. As únicas modificações estão nos coeficientes que acompanham o gradiente da pressão. Por outro lado, na Figura 35 temos o volume de controle e as incógnitas consideradas para a discretização da equação do transporte.

Figura 35 – Volume de controle para a equação de transporte.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o método de volumes finitos para equação de transporte, na forma conservativa, sobre cada volume de controle Ω_i temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} S(\mathbf{x}, t) d\Omega = - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot [f(S(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] d\Omega, \quad (8.1)$$

Pelo teorema da divergência de Gauss segue

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} S(\mathbf{x}, t) d\Omega = - \int_{\partial\Omega_i} f(S(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{\tilde{n}} d\Gamma. \quad (8.2)$$

Fazendo a decomposição por cada face do volume, a integral do lado direito é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} S(\mathbf{x}, t) d\Omega = & - \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}) U_{i+1,j} dy + \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} f(S_{i-\frac{1}{2},j}) U_{i,j} dy \\ & - \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(S_{i,j+1}) V_{i,j+1} dx + \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(S_{i,j-\frac{1}{2}}) V_{i,j} dx. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Integrando (8.3) de t_n até t_{n+1} tem-se

$$h_x h_y S_{i,j}^{n+1} = h_x h_y S_{i,j}^n - \Delta t [h_y (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - h_x (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n)], \quad (8.4)$$

onde

$$F_{i+1,j}^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{Y_j}^{Y_{j+1}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}) U_{i+1,j} dy dt \quad (8.5)$$

e

$$G_{i,j+1}^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(S_{i,j+\frac{1}{2}}) V_{i,j+1} dx dt. \quad (8.6)$$

Na Figura 36 tem-se uma representação das variáveis presentes da discretização considerada.

Sendo assim, para a equação de transporte temos a aproximação

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n - \Delta t \left[\frac{1}{h_x} (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \frac{1}{h_y} (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \right], \quad (8.7)$$

onde

$$F_{i+1,j} = \begin{cases} U_{i+1,j} f(S_{i,j}) & \text{se } U_{i+1,j} > 0, \\ U_{i+1,j} f(S_{i+1,j}) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (8.8)$$

e

$$G_{i,j+1} = \begin{cases} V_{i,j+1} f(S_{i,j}) & \text{se } V_{i,j+1} > 0, \\ V_{i,j+1} f(S_{i,j+1}) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8.9)$$

Figura 36 – Representação do esquema em volumes finitos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A restrição de estabilidade para o passo de tempo Δt é dada a partir da condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) (LEVEQUE, 2002),

$$\Delta t \leq \frac{\min\{\Delta x, \Delta y\}}{\max\{f'(S)\} \max\{|u|, |v|\}}. \quad (8.10)$$

8.1.1 Resultados e discussões

O primeiro experimento numérico realizado com a implementação do método IMPES é descrito pelo problema (8.11) que considera um domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ com uma configuração do tipo a *quarter of the five spot*, isto é, há injeção em uma célula e produção em outra.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\mathbf{u}) &= 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\
 -\zeta Da \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} + \lambda(S) \nabla p &= 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{\tilde{n}} &= g_N \quad t > 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\
 S(0, \mathbf{x}) &= S^0(\mathbf{x}, t = 0), \quad \mathbf{x} \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Como condição inicial considera-se que o reservatório contém apenas óleo $S(\mathbf{x}, 0) = 0$ e a condição de contorno é compatível com a injeção em uma célula. Sendo a célula de injeção a primeira à esquerda e a célula de produção a última à direita, tem-se fluxos unitários impostos nestas e condição de fluxo nulo nas demais células, como esquematizado na Figura 37.

Figura 37 – Esquema para o problema (8.11).

Fonte: Elaborada pelo autor.

O campo de permeabilidade considerado é homogêneo, $\mathbf{K} = K = 1$, e o raio de viscosidade é $M = 10$. Na Figura 38 tem-se o desenvolvimento do campo de velocidade para a configuração do tipo a *quarter of the five spot* com diferentes números de Darcy (Da) para o valor fixo de $\zeta = 1$. A partir de $Da > 10^{-2}$, nota-se a influência do operador de Stokes no escoamento e há o aparecimento de vórtices nos cantos superior direito e no canto inferior esquerdo.

Fixado $Da = 1$ para estudar o impacto do parâmetro regularizador ζ para esse problema em particular. Para produzir o regime puramente Darcy e o regime onde a equação de Stokes-Brinkman passa a ser significativa, adotou-se $\zeta = 0$ e $\zeta = 1$ respectivamente.

Figura 38 – Campo de velocidade, colorido pela magnitude, para diferentes valores de Da .

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas Figuras 39 e 40 tem-se os resultados dos perfis de saturação calculados pelo método IMPES utilizado, numa malha de 100×100 volumes finitos e para diferentes tempos. Para o caso $\zeta = 0$, onde recupera-se o modelo de Darcy, próximo ao injetor as curvas de nível são quase circulares e os perfis obtidos estão de acordo com a literatura (EWING, 1983). Por outro lado, para o caso em que $\zeta = 1$ os perfis de saturação apresentam regiões mais elipsoidais no canto de injeção e a chegada da frente de água é mais rápida ao poço produtor.

Figura 39 – Perfis de saturação para o problema *quarter of the five-spot* homogêneo em uma malha 100×100 com $\zeta = 0$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 40 – Perfis de saturação para o problema *quarter of the five-spot* homogêneo em uma malha 100×100 com $\zeta = 1$.

Fonte: Dados da pesquisa.

O próximo experimento numérico utiliza uma outra configuração para a recuperação de óleo em reservatórios realísticos. O objetivo é avaliar o impacto que as diferentes heterogeneidades presentes dos campo de permeabilidades, especialmente canais e obstáculos, tem sobre a recuperação de óleo contido no reservatório. Os resultados obtidos pela novo modelo proposto é comparado com os resultados da formulação clássica que utiliza o modelo de Darcy.

Mas antes, considera-se uma nova unidade mais tradicional em simulações de reservatório de petróleo que se refere à fração de volume poroso que foi injetada no domínio. O tempo da simulação será considerado em *VPI* (volume poroso injetado ou *PVI - pore volume injected*) (HOU; EFENDIEV, 2009),

$$T_{VPI} = \frac{1}{V_p} \int_0^t \int_{\Omega_{in}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{\check{n}} \, dl \, d\tau \quad (8.12)$$

onde V_p é o total de volume poroso do reservatório, t é o tempo de injeção e $\partial\Omega_{in}$ representa as bordas de injeção com vetor normal unitário $\mathbf{\check{n}}$.

Considere as equações do sistema (8.11) para a 36ª camada 2D do campo de permeabilidades realístico do *SPE10*, que possui notável contraste de permeabilidade, sendo $K_{max}/K_{min} \approx 10^6$, inclusive com um canal de alta permeabilidade pronunciado, veja na Figura 41, sendo frequentemente utilizado nas simulações do grupo de pesquisa.

Figura 41 – Permeabilidade adimensional em escala logarítmica ($\mathbf{K}^* = 1/K_{max}\mathbf{K}$).

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando o domínio adimensional $\Omega = [0, 11/6] \times [0, 1]$ visto que o campo em escala real tem dimensões $[0, 2200 \text{ ft}] \times [0, 1200 \text{ ft}]$ e o domínio computacional foi discretizado por 220×60 células.

Considere que duas camadas de células Ω_{in} e Ω_{out} , cada uma de tamanho 1×60 , estão localizadas nas bordas esquerda e direita de $\Omega = [0, 11/6] \times [0, 1]$, atuando como injetores e produtores. As condições de contorno consideram fluxo imposto da esquerda para a direita e fluxo nulo no topo e na base, isto é, nos lados esquerdo e direito do domínio são dadas condições de fluxo $g_N = 1$ e nos demais são dados condições de fluxo nulo $g_N = 0$, num domínio totalmente preenchido por óleo.

Para esta simulação o número de Darcy utilizando as unidades do S.I., para valores de referência do SPE10, é

$$\frac{K_{max}}{L^2} = \frac{(9,2539 \cdot 10^3) \times (10^{-3} \cdot 9,869233 \cdot 10^{-13} m^2)}{(1200 \times 0,3048 m)^2} = 6,8247 \cdot 10^{-17} \approx O(10^{-17}).$$

indicando que o modelo regularizado de Stokes-Brinkman reproduzirá um escoamento muito similar ao de Darcy.

Os campos de velocidades para os modelos de Darcy $\zeta = 0$ para modelo regularizado de Stokes - Brinkman $\zeta = 1$ são mostrados na mesma escala na [Figura 42](#). Veja que o valor de Da de $O(10^{-17})$ não gera uma perturbação tão expressiva no campo de velocidade. Entretanto, no caso de Darcy $\zeta = 0$ a velocidade dentro do canal tem uma maior magnitude, se comparado ao caso Stokes-Brinkman $\zeta = 1$, o que acarreta de tempo cada vez menores e são necessárias mais iterações para resolver o problema elíptico até o instante de tempo final definido na simulação. Para este problema em particular, a adoção do modelo regularizado de Stokes-Brinkman pode ser mais interessante devido à redução do custo computacional do problema elíptico.

Figura 42 – Magnitudes dos campos de velocidade para o caso Stokes-Brinkman (à esquerda) e para o Darcy (à direita).

Fonte: Dados da pesquisa.

Para verificar a influência da regularização de Stokes-Brinkman, considerou-se o modelo já adimensionalizado, alterando-se artificialmente apenas o número adimensional de Da , isto é, fixando o comprimento do domínio as alterações no número de Da implicam em mudanças no contraste de permeabilidade. Assim, diferentes valores de Da representam diferentes problemas a serem analisados. Na [Figura 43](#) temos os campos de velocidades mostrando a influência que Da tem sobre o escoamento.

Observa-se, a partir dessas figuras, que, como esperado, os campos de velocidades tem intensidade maior no canal de alta permeabilidade, indicando há a tendência do escoamento em passar por esse canal. Além disso, à medida que Da aumenta o modelo torna-se mais difusivo e a velocidade dentro do canal tende a diminuir, devido à influência do operador de Stokes (fluxo livre), representando uma transição mais suave entre as regiões de maior e menor permeabilidade.

Figura 43 – Campos de velocidades colorido pela magnitude para diferentes valores de Da .

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 44 tem-se a comparação dos perfis de saturação calculados pelo método IMPES implementado, em diferentes instantes de tempo. À esquerda temos a solução correspondente ao modelo de Darcy $\zeta = 0$ e à direita os perfis para $\zeta = 1$ com $Da = 1$. Percebe-se de fato que o escoamento ocorre preferencialmente pelo canal de alta permeabilidade.

Para os gráficos de curvas de produção de óleo ou corte de óleo, considera-se que para cada poço de produção a fração correspondente ao óleo no fluido produzido é dada por (HOU; EFENDIEV, 2009)

$$\mathcal{F}(t) = 1 - \frac{\int_{\partial\Omega_{out}} f(S) \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}} \, dl}{\int_{\partial\Omega_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{\check{n}} \, dl}$$

onde $\partial\Omega_{out}$ denota as bordas de produção com vetor normal unitário $\mathbf{\check{n}}$.

Na Figura 45 observa-se que a chegada de água ao poço produtor acontece primeiro para valores de $Da < 1$, devido às maiores magnitudes nos campos de velocidades.

Figura 44 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para o caso Darcy $\zeta = 0$ (à esquerda) e para o caso regularizado de Stokes-Brinkman com $\zeta = 1$ e $Da = 1$ (à direita) sobre a camada 36 do SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os últimos experimentos consideram as camadas 54 e 74 do SPE10, mostradas na Figura 46, que possuem diferentes contrastes e diferentes distribuições de canais mas o mesmo número, a saber,

$$\frac{K_{max}}{L^2} = \frac{(2 \cdot 10^4) \times (10^{-3} \cdot 9,869233 \cdot 10^{-13} m^2)}{(1200 \times 0,3048m)^2} = 1,4750 \cdot 10^{-16} \approx O(10^{-16}).$$

novamente implicando que estamos resolvendo um problema no regime de Darcy.

Novamente, alterando artificialmente o número de Da temos os perfis de saturação mostrados na Figura 49 e Figura 49 para as camadas 74 e 54, respectivamente.

Figura 45 – Curvas de produção de óleo para a 36ª camada do SPE10.

Figura 46 – Campos de permeabilidade camada 74 (à esquerda) e camada 54 (à direita).

Fonte: Dados da pesquisa.

As curvas para a produtividade de óleo correspondentes são apresentadas nas Figuras 48 e 50. Em ambos os experimentos vemos que para $Da = 1$ a frente de água alcança a região produtora mais rápido, em oposição ao exemplo da camada 36. Isto se justifica pelo fato das camadas 54 e 74 possuírem uma maior quantidade de canais de fluxo livre mais concentrados em uma região do campo. Se o comprimento é fixo então $Da = 1$ influencia o constaste de permeabilidade dentro dos canais favorecendo a produção de óleo.

Além disso, as curvas mostradas as curvas apresentadas evidenciam a importância da escolha correta do modelo matemático a ser usado na resolução do problema inverso. Escolher o modelo que não descreva corretamente as regiões de fluxo livre pode gerar uma super ou subestimação das propriedades do meio impactando na previsão de produção de um campo.

Figura 47 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para diferentes valores Da no instante $T_{VPI} = 0.16$ referente a camada 74 do SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 48 – Curvas de produção de óleo para a 74ª camada do SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 49 – Perfis de saturação calculados diretamente na malha 220×60 para diferentes valores Da no instante $T_{VPI} = 0.27$ referente a camada 54 do SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 50 – Curvas de produção de óleo para a 54ª camada do SPE10.

Fonte: Dados da pesquisa.

CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na indústria petrolífera, as dificuldades decorrentes da exploração de petróleo impulsionam o investimento em pesquisas a fim de se obter técnicas cada vez mais precisas e eficazes para aumentar a produção e reduzir os custos operacionais. No caso do Brasil, a descoberta de novas reservas de óleo na camada Pré-Sal representam novos desafios, relacionados principalmente ao custo para o acesso aos reservatórios e dificuldade de obter uma modelagem que seja adequada para as características do mesmo. Sendo assim, os [Capítulo 2](#) e [Capítulo 3](#) são opcionais e seguem a literatura padrão da modelagem em meios porosos utilizando os conceitos aprendidos em um curso de mecânica do contínuo e mecânica dos fluidos computacional.

Para meios porosos altamente heterogêneos, como por exemplo, os reservatórios do Pré-Sal, na presença de canais, fraturas, regiões *vuggs*, surge um questionamento quanto à aplicabilidade do usual modelo de Darcy. Modelos acoplados do tipo Darcy-Stokes são os mais indicados para modelar reservatórios que possuem tais heterogeneidades. Nos últimos anos, o modelo de Stokes-Brinkman vem se mostrando adequado para descrever o escoamento de um fluido em um meio poroso onde regiões porosas e de fluxo livre coexistem. A principal vantagem do modelo de Stokes-Brinkman é que ele transita entre os dois regimes a depender da permeabilidade e da escala de referência na qual o problema é analisado, sem a necessidade de se realizar um tratamento especial para a interface entre os subdomínios. Portanto, no [Capítulo 4](#) buscou-se convencer o leitor da importância de se utilizar o modelo de Stokes-Brinkman no lugar daquele que é comumente empregado, o de Darcy-Stokes.

No [Capítulo 5](#) descreveu-se cuidadosamente como é feita a discretização das equações estacionárias de Stokes-Brinkman via método dos volumes finitos. Para o caso que considera meios porosos heterogêneos há um problema de interface na malha de velocidades correspondentes, o que é corrigido introduzindo a média harmônica dos valores de permeabilidade que compartilham a face em que a integral é calculada.

Apresentou-se no [Capítulo 6](#) alguns experimentos numéricos realizados com o objetivo de

validar o método implementado. Visto que também pode-se recuperar os limites de Darcy ($\mu' = 0$) e de Stokes ($\mu = 0$) através dos valores das viscosidades, por meio de soluções manufaturadas verificou-se que o código implementado é de segunda ordem tanto para a velocidade quanto para a pressão em ambos os limites. Para o caso de Stokes-Brinkman ($\mu' \neq 0$ e $\mu \neq 0$) o método também é de segunda ordem. Considerou-se campos de permeabilidade altamente heterogêneos e artificiais com diferentes contrastes para um estudo empírico de convergência confirmando que o método é de ordem 2.

Este trabalho foi inicialmente pensado para estudar a aplicabilidade do método dos volumes finitos ao modelo de Stokes-Brinkman para meios porosos altamente heterogêneos. Identificou-se desde o início da pesquisa a importância de utilizar um parâmetro que fosse responsável por delimitar uma faixa de valores para os quais o modelo matemático é significativo ($Da \rightarrow 1$). Além de delimitar transição do regime partindo de Darcy, passando por Stokes-Brinkman e chegando no regime de Stokes, foi avaliado também o impacto que Da tem sobre o método iterativo GMRES. À medida que Da aumenta o problema torna-se cada vez mal condicionado mas converge com menos iterações, confirmando que a influência da permeabilidade deteriora a convergência do método iterativo. Ao final do capítulo foi reproduzido o experimento da cavidade referente ao caso Stokes e foi realizada simulações em um campo realístico do SPE10 referente ao limite de Darcy, ou seja, o código implementado permite reproduzir os dois extremos a partir dos parâmetros presente no equacionamento, inclusive em sua forma adimensional.

Entretanto, no decorrer da pesquisa descobriu-se um cenário ainda pouco estudado na literatura, especialmente para o caso heterogêneo que é o estudo do escoamento bifásico (água-óleo) modelado pelo equacionamento de Stokes-Brinkman. Sendo assim, o [Capítulo 7](#) foi motivado pelo interesse da Petrobras em estudar métodos numéricos capazes de descrever a modelagem das formações presentes na camada de Pré-Sal oriundas do processo de dissolução e/ou carstificação. Como o modelo de Stokes-Brinkman vem sendo utilizado para meios porosos com essas características, ao longo desses estudos, a seguinte pergunta foi inevitável: Como estender os conhecimentos obtidos do escoamento monofásico para o escoamento bifásico, especialmente para o caso heterogêneo? Embora o modelo de Stokes-Brinkman monofásico seja bem difundido e consolidado na literatura, há uma certa escassez de estudos nas hipóteses de incompressibilidade e que consideram tensores de permeabilidade heterogêneos.

O maior desafio então foi propor um modelo em termos da velocidade total, pressão global e do tensor de permeabilidade. O modelo matemático proposto adiciona uma perturbação ao modelo de Darcy, chamada de regularização de Stokes-Brinkman ($\zeta \nabla^2 \mathbf{u}$) e foi mantida a equação hiperbólica para o transporte (saturação). No modelo proposto formalmente recupera-se o modelo clássico de Darcy se adotarmos para o valor de regularização $\zeta = 0$.

No [Capítulo 8](#) o modelo regularizado proposto é resolvido com o método IMPES e os experimentos realizados incluem: o clássico problema do tipo *quarter of five spot* para o

meio poroso isotrópico e homogêneo e simulações em meios porosos realísticos altamente heterogêneos do SPE10. Mudanças artificiais para o parâmetro α são feitas para produzir novos problemas em que observou-se de fato perturbações mais significativas no modelo regularizado.

Como as propriedades físicas dos reservatórios não podem ser diretamente medidas por toda a extensão os resultados apresentados neste trabalho abrem novas possibilidades para a resolução do problema inverso para determinar as propriedades do meio. Estas propriedades são utilizadas como parâmetros dos simuladores com o objetivo de prever a produção do reservatórios em diferentes cenários de produção, assim uma modelagem que represente melhor a física do problema se faz necessária

REFERÊNCIAS

ACOCELLA, A.; ACOCELLA, A.; TURRINI, D. **Sienese travertine**. [S.l.]: Alinea, 2010. (I materiali dell'architettura). ISBN 9788860555137. Citado na página [28](#).

AHMED, T. **Reservoir Engineering Handbook**. [S.l.]: Elsevier Science, 2010. ISBN 9780080966670. Citado na página [24](#).

AHR, W.; ALLEN, D.; BOYD, A.; BACHMAN, H.; SMITHSON, T.; CLERKE, E.; GZARA, K.; HASSALL, J.; MURTY, C.; ZUBARI, H.; RAMAMOORTHY, R. Confronting the carbonate conundrum. **Oilfield Review**, v. 17, p. 18–29, 03 2005. Citado nas páginas [23](#) e [27](#).

AKBAS, C. Y. **Determination of flow units for carbonate reservoirs by petrophysical - based methods**. Tese (Doutorado) — Middle East Technical University, Çankaya, 2005. Citado na página [23](#).

ARAYA, R.; HARDER, C.; POZA, A. H.; VALENTIN, F. Multiscale hybrid-mixed method for the stokes and brinkman equations – the method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 324, p. 29–53, 06 2017. Citado nas páginas [71](#), [72](#) e [73](#).

ARMITI, A.; ROHDE, C. On darcy- and brinkman-type models for two-phase flow in asymptotically flat domains. **Computational Geosciences**, 12 2017. Citado na página [82](#).

_____. Existence of weak solutions for a nonlocal pseudo-parabolic model for brinkman two-phase flow in asymptotically flat porous media. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 477, 04 2019. Citado na página [82](#).

AURIAULT, J.-L. On the domain of validity of brinkman's equation. **Transport in Porous Media**, v. 79, p. 215–223, 09 2009. Citado nas páginas [44](#), [45](#) e [60](#).

_____. About the beavers and joseph boundary condition. **Transport in Porous Media**, v. 83, p. 257–266, 06 2010. Citado na página [43](#).

AZIZ, K. **Petroleum Reservoir Simulation**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1979. ISBN 9780853347873, 0853347875. Citado nas páginas [40](#) e [76](#).

BEAVERS, G. S.; JOSEPH, D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 30, p. 197–207, 1967. Citado na página [43](#).

BELTRAO, R. L. C.; SOMBRA, C.; LAGE, A.; NETTO, J. R. F.; HENRIQUES, C. C. D. Ss: Pre-salt santos basin - challenges and new technologies for the development of the pre-salt cluster, santos basin, brazil. 05 2009. Citado na página [24](#).

BRINKMAN, H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. **Journal of Applied Sciences Research**, Vol. Al., p. 27–34, 1947. Citado nas páginas [44](#), [78](#) e [79](#).

- BÜRGER, R.; KUMAR, S.; KUMAR, K. S.; RUIZ-BAIER, R. Discontinuous approximation of viscous two-phase flow in heterogeneous porous media. **Journal of Computational Physics**, v. 321, p. 126 – 150, 2016. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999116301887>>. Citado nas páginas 79, 81 e 82.
- CARVALHO, P. G. S. **Modelagem computacional do escoamento de Stokes e estudo comparativo entre espaços de aproximação**. Campinas: [s.n.], 2017. Citado na página 60.
- CHEN, N.; GUNZBURGER, M.; WANG, X. Asymptotic analysis of the differences between the stokes–darcy system with different interface conditions and the stokes–brinkman system. **Journal of Mathematical Analysis and Applications - J MATH ANAL APPL**, v. 368, p. 658–676, 08 2010. Citado na página 46.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN 978-1-60119-013-0, 978-0-89871-606-1. Citado nas páginas 28, 30 e 39.
- CHRISTIE, M. Upscaling for reservoir simulation. **Journal of Petroleum Technology - J PETROL TECHNOL**, v. 48, p. 1004–1010, 11 1996. Citado nas páginas 25 e 64.
- CHRISTIE, M.; BLUNT, M. Tenth spe comparative solution project: A comparison of upscaling techniques. **PE Reservoir Eval. Eng**, v. 4, p. 308–317., 2001. Citado na página 72.
- COATS, K. A note on impes and some impes-based simulation models. **SPE Journal - SPE J**, v. 5, p. 245–251, 09 2000. Citado na página 85.
- COCLITE, G.; KARLSEN, K.; MISHRA, S.; RISEBRO, H. A hyperbolic-elliptic model of two-phase flow in porous media - existence of entropy solutions. **International Journal of Numerical Analysis and Modeling**, v. 9, 01 2012. Citado na página 78.
- COCLITE, G.; MISHRA, S.; RISEBRO, H.; WEBER, F. Analysis and numerical approximation of brinkman regularization of two-phase flows in porous media. **Computational Geosciences**, v. 18, p. 637–659, 10 2014. Citado nas páginas 78, 79, 80 e 82.
- COOK, J.; GROWCOCK, F.; GUO, Q.; HODDER, M.; OORT, E. van. **Stabilizing the Wellbore to Prevent Lost Circulation**. [S.l.], 2011. Citado na página 42.
- DARCY, H. **Les fontaines publiques de la ville de Dijon. application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d’eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d’eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitume**. [S.l.]: Dalmont, 1856. Citado na página 39.
- DISCACCIATI, M.; QUARTERONI, A. Navier-stokes/darcy coupling: Modeling, analysis, and numerical approximation. **Revista Matemática Complutense**, v. 22, 07 2009. Citado na página 23.
- DOGRU, A.; FUNG, L.; MIDDYA, U.; AL-SHAALAN, T. M.; BYER, T.; HOY, H.; HAHN, W.; AL-ZAMEL, N.; PITA, J. A.; HEMANTHKUMAR, K.; MEZGHANI, M.; MANEA, A. New frontiers in large scale reservoir simulation. **Society of Petroleum Engineers - SPE Reservoir Simulation Symposium 2011**, v. 2, 01 2011. Citado na página 25.

DURLOFSKY, L.; BRADY, J. Analysis of the brinkman equation as a model for flow in porous media. **The Physics of fluids**, American Institute of Physics, v. 30, n. 11, p. 3329–3341, 1987. Citado na página 60.

EFENDIEV, G. Q. L. B. P. P. Y.; ESPEDAL, M. An efficient upscaling process based on a unified fine-scale multi-physics model for flow simulation in naturally fracture carbonate karst reservoirs. In: . [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 44.

ESTRELLA, G. **Pre-Salt Production Development in Brazil**. [S.l.], 2010. Citado na página 28.

EWING, R. **The Mathematics of Reservoir Simulation**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983. (Frontiers in Applied Mathematics). ISBN 9780898711929. Citado nas páginas 76 e 89.

FADLELMULA, M.; FRAIM, M.; HE, J.; KILLOUGH, J. Discrete fracture-vug network modeling in naturally fractured vuggy reservoirs using multiple-point geostatistics: A micro-scale case. In: . [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 61.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica do Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. 1. ed. [S.l.]: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2000. ISBN 85-314-0526-2. Citado na página 37.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; LEYLEGIAN, J. C. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8 ed. ed. [S.l.]: LTC, 2014. ISBN 978-85-216-2583-4. Citado na página 28.

GOLFIER, F.; LASSEUX, D.; QUINTARD, M. Investigation of the effective permeability of vuggy or fractured porous media from a darcy-brinkman approach. **Computational Geosciences**, v. 19, p. 63–78, 02 2015. Citado nas páginas 23, 44 e 46.

HANSBO, P.; JUNTUNEN, M. Weakly imposed dirichlet boundary conditions for the brinkman model of porous media flow. **Applied Numerical Mathematics**, v. 59, p. 1274–1289, 06 2009. Citado na página 58.

HASAL, M. Two level preconditioner of steady stokes–brinkman equation with jumps in coefficients. **AIP Conference Proceedings**, v. 1738, n. 1, p. 360003, 2016. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4952136>>. Citado na página 25.

HELMIG, R. *et al.* **Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997. Citado na página 81.

HOU, T.; EFENDIEV, Y. **Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications**. 1. ed. Springer-Verlag New York, 2009. (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences 4). ISBN 0387094954, 978-0-387-09495-3, 978-0-387-09496-0. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=521757E27DB62E8FC45C9E17036B54A3>>. Citado nas páginas 90 e 92.

HURTADO, F. S. V. **Uma formulação de volumes finitos baseada em elementos para a simulação do deslocamento bifásico imiscível em meios porosos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Citado nas páginas 29, 30 e 31.

ILIEV, O.; LAPTEV, V. On numerical simulation of flow through oil filters. **Computing and Visualization in Science**, v. 6, p. 139–146, 03 2004. Citado na página 23.

- JAMAL, M. S.; AWOTUNDE, A., A.; ABDULRAHEEM; ABDULAZEEZ; AL-YOUSEF; Y., H.; AL-MOUHAMED; A., M.; FAIRAG; A., F. Assessment of unsteady brinkman's model for flow in karst aquifers. **Arabian Journal of Geosciences**, v. 12, n. 1, p. 12, 2018. ISSN 1866-7538. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12517-018-4160-8>>. Citado nas páginas 45 e 46.
- JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 3, p. 50–64, 09 2004. Citado na página 85.
- JUNPING, W.; WANG, Y.; YE, X. A robust numerical method for stokes equations based on divergence-free h (div) finite element methods. **SIAM J. Scientific Computing**, v. 31, p. 2784–2802, 01 2009. Citado na página 57.
- KIRBY, B. **Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in Microfluidic Devices**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521119030,9780521119030. Citado na página 39.
- KOPLIK, J.; LEVINE, H.; ZEE, A. Viscosity renormalization in the brinkman equation. **The Physics of Fluids**, v. 26, n. 10, p. 2864–2870, 1983. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.864050>>. Citado na página 44.
- KROTKIEWSKI, M.; LIGAARDEN, I.; LIE, K. A.; SCHMID, D. W. On the importance of the stokes-brinkman equations for computing effective permeability in karst reservoirs. **Communications in Computational Physics**, v. 10, p. 1315–1332, 08 2011. Citado na página 78.
- LAKDAWALA, O. I. Z.; STARIKOVICIUS, V. On a numerical subgrid upscaling algorithm for stokes-brinkman equations. **Fraunhofer ITWM**, v. 65, 02 2013. Citado na página 46.
- LAMICHHANE, B. A new finite element method for darcy-stokes-brinkman equations. **ISRN Computational Mathematics**, v. 2013, p. 1–4, 01 2013. Citado na página 44.
- LAZAROV, G. K. R.; MAO, Y. Geometric multigrid for darcy and brinkman models of flows in highly heterogeneous porous media: A numerical study. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 310, p. 174 – 185, 2017. Citado nas páginas 44, 60 e 69.
- LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Citado na página 87.
- LUIS, J.; ALVES, J. L.; , C. ; , U. ; LÚCIA, C.; COELHO, L.; BAUD, P.; JR, N. O. G.; WONG, T.-f.; , S. . Estabilidade de poços em rochas carbonáticas. 02 2019. Citado na página 23.
- LUNDGREN, T. S. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 51, n. 2, p. 273–299, 1972. Citado na página 44.
- MARTYS, N.; BENTZ, D. P.; GARBOCZI, E. J. Computer simulation study of the effective viscosity in brinkman's equation. **Physics of Fluids**, v. 6, n. 4, p. 1434–1439, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.868258>>. Citado na página 44.
- MARUSIC-PALOKA, E.; PAZANIN, I.; MARUSIC, S. Comparison between darcy and brinkman laws in a fracture. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, p. 7538–7545, 03 2012. Citado na página 78.

MASSEY, B.; WARD-SMITH, J. **Mechanics of Fluids**. 8. ed. [S.l.]: Taylor and Francis, 2006. ISBN 0-203-41352-0. Citado na página 39.

MU, M.; ZHU, X. Decoupled schemes for a non-stationary mixed stokes-darcy model. **Math. Comput.**, v. 79, p. 707–731, 04 2010. Citado na página 62.

NELSON, R. Evaluating fractured reservoirs: Introduction. In: NELSON, R. A. (Ed.). **Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs (Second edition)**. Second edition. Woburn: Gulf Professional Publishing, 2001. p. 1 – 100. ISBN 978-0-88415-317-7. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978088415317750004X>>. Citado na página 42.

NIELD, D.; KUZNETSOV, V. An historical and topical note on convection in porous media. **Journal of Heat Transfer**, v. 135, p. 061201, 06 2013. Citado na página 64.

NIELD, D. A.; BEJAN, A. **convection in porous media**. 3rd ed. ed. [S.l.]: Springer, 2006. ISBN 0387290966,9780387290966. Citado nas páginas 27 e 30.

PAL, M. A unified approach to simulation and upscaling of single-phase flow through vuggy carbonates. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 69, p. 1096–1123, 06 2012. Citado na página 45.

PAL, M. S. L. I. M. K. K. L.; WALTER, D. S. On the stokes–brinkman equations for modeling flow in carbonate reservoirs. **ECMOR 2010 - 12th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery**, 09 2010. Citado na página 46.

PARVAZINIA, M.; NASSEHI, R. J. W. V.; GHOREISHY, M. H. R. Finite element modelling of flow through a porous medium between two parallel plates using the brinkman equation. **Transport in Porous Media**, v. 63, p. 71–90, 2006. Citado na página 40.

POPOV, P.; EFENDIEV, Y.; QIN, G. Multiscale modeling and simulations of flows in naturally fractured karst reservoirs. **Communications in Computational Physics**, v. 6, n. 1, p. 162–184, 2009. Citado na página 46.

POPOV, P.; QIN, G.; BI, L.; EFENDIEV, Y.; EWING, R. E.; LI, J. Multiphysics and multiscale methods for modeling fluid flow through naturally fractured carbonate karst reservoirs. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering - SPE RESERV EVAL ENG**, v. 12, p. 218–231, 04 2009. Citado na página 45.

RICCOMINI, C.; SANT’ANNALUCY; TASSINARI, C. Pré-sal: geologia e exploração. **Revista USP**, n. 95, p. 33–42, nov. 2012. Disponível em: <<http://www.revistas.usp.br/revusp/article/view/52236>>. Citado na página 24.

ROCHA, F. F.; PIRES, V. A.; SOUSA, F. S. de; BUSCAGLIA, G. C. Precisão de métodos de volumes finitos para a solução da equação de buckley-leverett. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018. Citado na página 61.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatórios de Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Citado nas páginas 29 e 40.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. **SIAM Journal on scientific and statistical computing**, v. 7, p. 856–869, 1986. Citado nas páginas 64 e 68.

SAGHIR, M.; NEJAD, M.; VAZIRI, H.; ISLAM, M. Modeling of heat and mass transfer in a fractured porous medium. **International Journal of Computational Fluid Dynamics**, Taylor & Francis, v. 15, n. 4, p. 279–292, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10618560108970034>>. Citado na página 23.

SHAVIT, U.; BAR-YOSEF, G.; ROSENZWEIG, R.; ASSOULINE, S. Modified brinkman equation for a free flow problem at the interface of porous surfaces: The cantor-taylor brush configuration case. **Water Resources Research - WATER RESOUR RES**, v. 38, 12 2002. Citado na página 43.

SHELDON, J.; JR, W. C. *et al.* One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. **Transactions of the AIME**, Society of Petroleum Engineers, v. 216, n. 01, p. 290–296, 1959. Citado na página 85.

STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 8, p. 287–319, 1845. Citado na página 37.

_____. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 9, 1851. Citado na página 39.

TAYLOR, G. I. A model for the boundary condition of a porous material. part 1. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 49, n. 2, p. 319–326, 1971. Citado na página 43.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2011. ISBN 85-7193-046-5. Citado nas páginas 29 e 41.

TREFETHEN, L. N.; BAU, D. **Numerical Linear Algebra**. [S.l.]: Society for Industrial Mathematics, 1997. Citado na página 68.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering)**. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2004. ISBN 0072472367,9780072472363. Citado na página 28.