Um estudo dos zeros de polinômios ortogonais
na reta real e no círculo unitário e outros
polinômios relacionados

Andrea Piranhe da Silva

Orientador: *Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de
Computação e Matemática Computacional..

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa: 20/06/2005

Visto do Orientador:

USP – São Carlos
Junho/2005

A Deus,
ao Prof. Ranga,
ao querido Júnior,
Dedico

Agradecimentos

Aos professores do Grupo de Pesquisa em Polinômios Ortogonais e Similares da UNESP, campus de São José do Rio Preto, Cleonice, Dimitar e, em especial, Eliana, pela contribuição em minha formação acadêmica e pessoal.

De um modo muito especial, agradeço ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela orientação deste trabalho, pela atenção e confiança dedicadas a mim e, acima de tudo pela amizade.

A todos os professores e funcionários, do DCCE-UNESP de São José do Rio Preto e ICMC-USP de São Carlos, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos de pós-graduação, em especial, Deise pelo companheirismo nos momentos de alegria e de dificuldades.

Às amigas Gilcilene e Dayene, pelo carinho, pelas lágrimas compartilhadas, pelas boas gargalhadas e, por terem permanecido comigo, mesmo diante da distância.

À querida Lupita por participar de um momento tão importante de minha vida.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram.

Ao meu querido esposo Juninho, pelo amor, dedicação e paciência.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais e similares. Inicialmente, consideramos uma relação entre duas seqüências de polinômios ortogonais, onde as medidas associadas estão relacionadas entre si. Usamos esta relação para estudar as propriedades de monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais relacionados a uma medida obtida através da generalização da medida associada a uma outra seqüência de polinômios ortogonais. Apresentamos, como exemplos, os polinômios ortogonais obtidos a partir da generalização das medidas associadas aos polinômios de Jacobi, Laguerre e Charlier.

Em uma segunda etapa, consideramos polinômios gerados por uma certa relação de recorrência de três termos com o objetivo de encontrar limitantes, em termos dos coeficientes da relação de recorrência, para as regiões onde os zeros estão localizados. Os zeros são estudados através do problema de autovalor associado a uma matriz de Hessenberg. Aplicações aos polinômios de Szegő, polinômios para-ortogonais e polinômios com coeficientes complexos não-nulos são consideradas.

Palavras-chave: relação de recorrência de três termos, polinômios ortogonais, medidas relacionadas, zeros de polinômios, problema de autovalor.

Abstract

The main purpose of this work is to study the behavior of the zeros of orthogonal and similar polynomials. Initially, we consider a relation between two sequences of orthogonal polynomials, where the associated measures are related to each other. We use this relation to study the monotonicity properties of the zeros of orthogonal polynomials related with a measure obtained through a generalization of the measure associated with other sequence of orthogonal polynomials. As examples, we consider the orthogonal polynomials obtained in this way from the measures associated with the Jacobi, Laguerre and Charlier polynomials.

We also consider the zeros of polynomials generated by a certain three term recurrence relation. Here, the main objective is to find bounds, in terms of the coefficients of the recurrence relation, for the regions where the zeros are located. The zeros are explored through an eigenvalue representation associated with a Hessenberg matrix. Applications to Szegő polynomials, para-orthogonal polynomials and polynomials with non-zero complex coefficients are considered.

Keywords: three term recurrence relation, orthogonal polynomials, related measures, zeros of polynomials, eigenvalue problem.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Uma visão geral	1
1.2	Nosso envolvimento com polinômios ortogonais e similares	4
2	Medidas relacionadas e polinômios ortogonais	8
2.1	Polinômios ortogonais	8
2.2	Alguns polinômios ortogonais clássicos	10
2.3	Polinômios de Charlier	12
2.4	Frações contínuas e seqüências encadeadas	13
2.5	Propriedades adicionais de polinômios ortogonais	16
2.6	Medidas relacionadas	21
2.7	Aplicação aos polinômios ortogonais generalizados	26
2.8	Exemplos	29
2.8.1	Polinômios de Jacobi Generalizados	29
2.8.2	Polinômios de Laguerre Generalizados	31
2.8.3	Polinômios de Charlier Generalizados	34
3	Zeros de polinômios que obedecem a uma relação de recorrência	35
3.1	Zeros e suas representações como autovalores	35
3.2	Limitantes para os zeros	41
3.3	Polinômios de Szegő e para-ortogonais	52
3.4	Polinômios com coeficientes não nulos	56
3.5	Exemplos	59

4	Considerações finais	66
	Referências Bibliográficas	68

Capítulo 1

Introdução

1.1 Uma visão geral

Os polinômios ortogonais e similares são amplamente utilizados em todas as áreas que envolvem aplicações da Matemática. Citaremos apenas algumas que se beneficiam das propriedades desses polinômios:

- quadraturas numéricas;
- aproximações por mínimos quadrados inclusive série de Fourier;
- aproximações de Padé e teoria de frações contínuas;
- métodos de relaxação em Álgebra Linear;
- aproximações por “splines” [18];
- aproximações que preservam momentos [7];
- regressão polinomial e processo de nascimento e morte (“birth and death”) [25];
- teoria do potencial [33] e
- teoria de códigos [38].

Uma outra aplicação bem interessante dos polinômios ortogonais, conhecidos como polinômios de Jacobi, surgiu como uma parte fundamental da comprovação, dada em 1984 por De Branges (veja [3]), da famosa Conjectura de Bieberbach (proposta em 1916). Esta conjectura tão bonita e simples, que agora é um resultado comprovado, pode ser dada por:

Se a função $f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r$, onde $a_1 = 1$, é analítica e univalente no interior do disco unitário, então $|a_n| \leq n$ para $n \geq 2$. A igualdade acontece somente para as rotações da função de Koebe $z/(1-z)^2 = \sum_{r=1}^{\infty} r z^r$.

Para interpretações interessantes dos zeros de polinômios ortogonais e similares em termos de potências eletrostáticas veja, por exemplo, Stieltjes [41] e Dimitrov e Van Assche [16].

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno definido no espaço vetorial dos polinômios. Então, uma seqüência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde P_n é de grau exatamente n , é chamada uma seqüência de polinômios ortogonais se

$$\langle P_n, P_m \rangle = \gamma_n \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1.1)$$

onde $\gamma_n > 0$ e $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker.

Se o produto interno é dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)d\phi(x),$$

onde $d\phi$ é uma medida positiva num subconjunto da reta real (cuja definição pode ser encontrada no início do Capítulo 2 deste trabalho), então os polinômios ortogonais $\{P_n\}$, que denotaremos por $\{P_n^{(\phi)}\}$, são chamados polinômios ortogonais na reta real ou, simplesmente, polinômios ortogonais reais.

Podemos observar que definir uma seqüência de polinômios ortogonais por $\int P_n^{(\phi)}(x)P_m^{(\phi)}(x)d\phi(x) = \gamma_n \delta_{n,m}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$, é equivalente em defini-la como

$$\int x^s P_n^{(\phi)}(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < n-1, \\ \tilde{\gamma}_n > 0, & s = n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Uma das propriedades mais importantes satisfeitas pelos polinômios ortogonais na reta real é a relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\phi)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\phi)})P_n^{(\phi)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\phi)}P_{n-1}^{(\phi)}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.1.2)$$

com $P_1^{(\phi)}(z) = z - \beta_1^{(\phi)}$, onde $\beta_n^{(\phi)} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $\alpha_n^{(\phi)} > 0$, $n \geq 2$, que se tornou uma ferramenta poderosa para estudá-los. Por exemplo, se a medida é simétrica, isto é, $d\phi(-x) = d\phi(x)$, então os coeficientes $\beta_n^{(\phi)}$ são todos nulos.

Na relação de recorrência (1.1.2) os polinômios são considerados na forma mônica. Agora, se o produto interno em (1.1.1) é dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Gamma} \overline{p(z)} q(z) d\nu(z) = \int_0^{2\pi} \overline{p(e^{i\theta})} q(e^{i\theta}) d\nu(e^{i\theta}),$$

onde $d\phi(\theta) = d\nu(e^{i\theta})$ é uma medida positiva no intervalo $[0, 2\pi]$, então os polinômios ortogonais $\{P_n\}$, denotados por $\{S_n^{(\nu)}\}$, são chamados polinômios ortogonais no círculo unitário (Γ) ou polinômios de Szegő.

Infelizmente, em geral esses polinômios, introduzidos por Szegő, talvez, pela primeira vez em 1939 na primeira versão de seu livro [42], não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Entretanto, eles satisfazem à relação de recorrência

$$S_{n+1}^{(\nu)}(z) = zS_n^{(\nu)}(z) + a_{n+1}^{(\nu)} S_n^{(\nu)*}(z), \quad n \geq 0.$$

Aqui, $S_n^{(\nu)*}(z) = \overline{z^n S_n^{(\nu)}(1/\bar{z})}$ são os polinômios recíprocos e $a_n^{(\nu)} = S_n^{(\nu)}(0)$ são chamados coeficientes de reflexão. Nesta relação de recorrência também estamos considerando os polinômios na forma mônica.

Para aplicações de polinômios de Szegő no estudo de fórmulas de quadratura na reta real veja, por exemplo, [32] e [11]. Há um número considerável de trabalhos sobre a aplicação de polinômios de Szegő no estudo do problema de Análise de Freqüência. Jones e Peterson [23] apresentam um trabalho recente (“survey”) sobre esse assunto.

Quando falamos de polinômios similares aos ortogonais estamos nos referindo à seqüência de polinômios $\{Q_n\}$ que satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.1.3)$$

com $Q_1(z) = z + \beta_1$.

Quando $\beta_n < 0$ e $\alpha_n > 0$ foi mostrado em [24] que existe uma medida especial $d\phi$ (chamada medida forte) tal que $\{Q_n = Q_n^{(\phi)}\}$ satisfaz

$$\int_0^\infty x^{-n+s} Q_n^{(\phi)}(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq n-1, \\ \hat{\gamma}_n > 0, & s = n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

1.2 Nosso envolvimento com polinômios ortogonais e similares

Iniciamos nossos estudos sobre polinômios ortogonais e similares, com o projeto de Iniciação Científica intitulado “Polinômios ortogonais com coeficientes de recorrência periódicos”, com bolsa da FAPESP (proc. no. 98/00647-2), cujo objetivo era familiarizar-me com os conceitos básicos de polinômios ortogonais e, em particular, estudar alguns resultados obtidos em Sri Ranga [39]. Em Berti e Sri Ranga [6] os resultados de [39] foram aprimorados. Os principais resultados de [6] podem ser resumidos da seguinte forma:

Sejam $d\psi_1$ e $d\psi_2$ duas medidas simétricas na reta real tais que

$$cd\psi_2(x) = (1 + qx^2)d\psi_1(x),$$

onde q e c são constantes apropriadas. Sejam $\{P_n^{(\psi_1)}\}$ e $\{P_n^{(\psi_2)}\}$ os polinômios ortogonais associados a essas medidas, com

$$P_{n+1}^{(\psi_1)}(z) = zP_n^{(\psi_1)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\psi_1)}P_{n-1}^{(\psi_1)}(z),$$

$$n \geq 1,$$

$$P_{n+1}^{(\psi_2)}(z) = zP_n^{(\psi_2)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\psi_2)}P_{n-1}^{(\psi_2)}(z),$$

as respectivas relações de recorrência de três termos. Então, existe uma sequência de números positivos $\{\ell_n\}$, com $\ell_0 = 1$, tal que

$$(\ell_n - 1)(\ell_{n-1} + 1) = 4q\alpha_{n+1}^{(\psi_1)}, \quad (\ell_n + 1)(\ell_{n-1} - 1) = 4q\alpha_{n+1}^{(\psi_2)}, \quad n \geq 1.$$

Além disso,

$$P_{n+1}^{(\psi_1)}(z) = P_{n+1}^{(\psi_2)}(z) - \frac{1}{4q}(\ell_n - 1)(\ell_{n+1} - 1)P_n^{(\psi_2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Aplicações consideradas no trabalho [6] incluem estudos de polinômios ortogonais associados a um produto interno do tipo Sobolev que envolve também as derivadas.

Em março de 2000, iniciamos nosso mestrado com uma proposta de projeto intitulado “Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais de Koornwinder”, também com bolsa FAPESP (proc. no. 99/12400-4). Entretanto, durante o tempo em que

estávamos realizando as outras obrigações do mestrado, muitos resultados foram obtidos pelos pesquisadores do grupo de Polinômios Ortogonais e Similares, sediado na UNESP, campus de São José do Rio Preto, que levaram à publicação do artigo Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [8]. Assim, nosso trabalho de pesquisa do mestrado seguiu na direção de polinômios ortogonais no círculo unitário.

Com a transformação $x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$, que foi originalmente considerada por Delsarte e Genin [15], existe uma relação simples entre certos polinômios de Szegő e polinômios ortogonais associados às medidas simétricas definidas no intervalo $[-1, 1]$. Nosso trabalho, então, compreendeu um estudo de polinômios de Szegő usando os resultados obtidos no artigo [6], junto com algumas noções de seqüências encadeadas. Este estudo originou a publicação [10]

C.F. Bracciali, A.P. da Silva e A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Maths.*, 153 (2003), 79-88.

Uma das aplicações encontradas neste trabalho é a obtenção de informações sobre os polinômios Koornwinder-Szegő $S_n^{(\lambda, M, \tau)}$ associados à medida $d\nu(\lambda, M, \tau; z)$ dada por

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(\lambda, M, \tau; e^{i\theta}) = \frac{1}{2M+1} \left\{ 2M f(1) + \frac{c(f, \lambda, \tau)}{c(1, \lambda, \tau)} \right\},$$

onde $c(f, \lambda, \tau) = \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} f(e^{i\theta}) [\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+1/2} [\sin(\theta/2)]^{-1} d\theta$, com $\theta(x) = 2 \arccos(x)$. Aqui, $\lambda > -3/2$, $M \geq 0$ e $0 < \tau \leq 1$. Para os coeficientes de reflexão $S_n^{(\lambda, M, \tau)}(0)$, obtemos $\{g_n(\lambda, M, \tau) = [1 + S_{n+1}^{(\lambda, M, \tau)}(0)]/2\}_{n=0}^\infty$ que satisfaz ao seguinte resultado, associado às seqüências encadeadas:

$$[1 - g_{n-1}(\lambda, M, \tau)] g_n(\lambda, M, \tau) = \frac{\tau^2}{4} \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

com $g_0(\lambda, M, \tau) = \frac{1}{(2M+1)c(1, \lambda, \tau)} \int_0^{2\pi} [\tau \sin(\theta/2)]^{2\lambda+2} d\theta$.

Os resultados encontrados neste trabalho também foram fundamentais no artigo Bracciali, Li e Sri Ranga [9] que trata de uma aplicação ao problema de Análise de Freqüência.

Em março de 2002 iniciamos o doutorado com bolsa da FAPESP (02/00958-5) concedida a partir de junho de 2002 e cujo projeto de pesquisa era intitulado “Seqüências Encadeadas e suas Aplicações nos Estudos de Polinômios Ortogonais”.

As pesquisas desenvolvidas desde então seguiram em duas direções interessantes que estão descritas, respectivamente, nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho.

No Capítulo 2, estudamos o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais associados a uma medida $d\phi_1$ utilizando polinômios ortogonais associados a uma outra medida $d\phi_0$ tal que

$$cd\phi_0(x) = (x - q)d\phi_1(x),$$

onde c e q são constantes apropriadas. Este trabalho resultou no artigo [37]

A.P. da Silva, A. Sri Ranga e T.G. Vazquez, Monotonicity of the zeros of orthogonal polynomials through related measures, *J. Math. Anal. Appl.*, aceito.

Neste trabalho, estabelecemos, entre outros, o seguinte resultado.

Sejam N e κ tais que $0 \leq N < \infty$ e $\kappa < a$. Seja a medida positiva $d\phi^{(\kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x)d\phi^{(\kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(\kappa) + \frac{\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (1.2.1)$$

onde $\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[p] = \int_a^b p(x)(x - \kappa)^{-1}d\phi(x)$ e $d\phi$ é uma medida determinada em $[a, b]$ com $-\infty < a < b \leq \infty$. Sejam $x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os zeros do polinômio ortogonal $P_n^{(\phi, \kappa, N)}$ de grau n associado a esta medida. Se $N > 0$, então $x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)}$, para $0 \leq r \leq n$, é uma função crescente de κ , desde que κ varie no intervalo $(-\infty, \tilde{\kappa}^{(\phi, N)})$, onde

$$\tilde{\kappa}^{(\phi, N)} = a - \frac{\sqrt{[N(\beta_2^{(\phi)} - a) - (\beta_1^{(\phi)} - a)]^2 - 4Nv_1^{(\phi)}(a) - [N(\beta_2^{(\phi)} - a) - (\beta_1^{(\phi)} - a)]}}{2N}.$$

Aqui, $v_1^{(\phi)}(a) = [(\beta_1^{(\phi)} - a)(\beta_2^{(\phi)} - a) - \alpha_2^{(\phi)}] > 0$.

Em relação ao Capítulo 3, o trabalho desenvolvido foi além de nossa expectativa, resultando no artigo [36]

A.P. da Silva e A. Sri Ranga, Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra and its Applications*, 397 (2005), 299-324.

O objetivo inicial aqui era considerar um estudo sobre os polinômios de Szegő (polinômios ortogonais no círculo unitário) a partir de uma relação de recorrência do tipo (1.1.3), satisfeita pelos polinômios similares aos ortogonais. Como já mencionamos, nem todos os polinômios de Szegő satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Entretanto, na prática, encontramos uma grande classe de polinômios de Szegő com esta propriedade, porém com os coeficientes β_n e α_n números complexos.

O trabalho do Capítulo 3, em princípio, é baseado no problema de autovalor da matriz

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta_1 = \beta_1$ e $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 2, 3, \dots, n$.

Os estudos realizados neste capítulo serviram também para obter informações sobre os zeros de polinômios cujos coeficientes são diferentes de zero. Por exemplo, foi mostrado o seguinte resultado:

$$\text{Dado o polinômio } P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k, \text{ sejam } |\beta| > 0 \text{ e } t_k = \frac{b_{k+1}}{b_k} \text{ tais que}$$

$$|t_k - \beta| \leq \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com ϵ um número positivo. Então, todos os zeros de P_n estão no anel

$$\zeta \left(|\beta| - \frac{4n\sigma_n}{n+1} \epsilon \right) \leq |z| \leq |\beta| + \frac{4n\sigma_n}{n+1} \epsilon,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. Aqui

$$\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \sin \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| \right\} \leq \sqrt{n(n+1)/2}.$$

Capítulo 2

Medidas relacionadas e polinômios ortogonais

O principal objetivo deste capítulo é o estudo do comportamento dos zeros de polinômios ortogonais definidos em relação a uma medida positiva que depende de parâmetros.

Inicialmente, daremos algumas noções básicas sobre medidas para podermos definir sequência de polinômios ortogonais. Daremos, também, algumas informações sobre os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e Laguerre e, ainda, os polinômios ortogonais de Charlier. Além disso, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre frações contínuas e seqüências encadeadas.

As principais fontes bibliográficas sobre os polinômios ortogonais são os livros de Chihara [13], Krylov [27] e Szegő [42].

2.1 Polinômios ortogonais

Seja ϕ , definida na reta real $\mathbb{R}$, uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento, então $d\phi$ representa uma medida (medida positiva) em $\mathbb{R}$. Consideramos ainda, que os momentos, definidos por

$$\mu_r^{(\phi)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\phi(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

existem para todo r inteiro.

O conjunto de pontos de aumento $E^{(\phi)}$ de ϕ é o suporte da medida $d\phi$. Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, onde $w(x) \geq 0$ em $E^{(\phi)}$, mas não identicamente nula, w é chamada de função peso. Denotemos por $I^{(\phi)}$ o menor intervalo fechado que contém o suporte $E^{(\phi)}$. Dizemos que $d\phi$ é uma medida no intervalo fechado I se $I^{(\phi)} \subseteq I$. Assim, por exemplo, podemos escrever $\int_I f(x)d\phi(x)$ ou $\int_{I^{(\phi)}} f(x)d\phi(x)$ no lugar de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\phi(x)$.

Para $I^{(\phi)}$, temos as seguintes possibilidades:

$$1) I^{(\phi)} = [a, b]; \quad 2) I^{(\phi)} = (-\infty, \infty); \quad 3) I^{(\phi)} = [a, \infty); \quad 4) I^{(\phi)} = (-\infty, b],$$

onde o suporte está contido em um intervalo finito no caso 1, o menor intervalo que contém o suporte é a reta real inteira no caso 2 e o menor intervalo que contém o suporte é uma semi-reta real nos casos 3 e 4.

Definição 2.1. Dizemos que $\{P_n^{(\phi)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$, se

$$i) P_n^{(\phi)} \text{ é de grau exatamente } n, \text{ isto é, se } P_n^{(\phi)}(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k \text{ então } a_{n,n} \neq 0;$$

$$ii) \langle P_n^{(\phi)}, P_m^{(\phi)} \rangle = \int_{I^{(\phi)}} P_n^{(\phi)}(x) P_m^{(\phi)}(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n^{(\phi)}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Se $\rho_n^{(\phi)} = 1$, $n \geq 0$, dizemos que $\{P_n^{(\phi)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortonormais e, quando $a_{n,n} = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\{P_n^{(\phi)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos.

Definição 2.2. Dada a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{(\phi)}\}_{n=0}^{\infty}$, definimos os polinômios mônicos associados a $P_n^{(\phi)}$ por

$$O_n^{(\phi)}(z) = \frac{1}{\rho_0^{(\phi)}} \int_{I^{(\phi)}} \frac{P_n^{(\phi)}(z) - P_n^{(\phi)}(x)}{z - x} d\phi(x), \quad n \geq 0.$$

Os polinômios associados $O_n^{(\phi)}$ são polinômios de grau $n - 1$.

Os seguintes resultados são bem conhecidos.

A) Os zeros de $P_n^{(\phi)}$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo $I^{(\phi)}$. Os zeros de $P_{n-1}^{(\phi)}$ se entrelaçam com os zeros de $P_n^{(\phi)}$. Além disso, os zeros de $O_{n-1}^{(\phi)}$ são reais, distintos, pertencem ao intervalo $I^{(\phi)}$ e se entrelaçam com os zeros de $O_n^{(\phi)}$.

Assim, o intervalo $I^{(\phi)}$ também é chamado de verdadeiro intervalo de ortogonalidade dos polinômios $\{P_n^{(\phi)}\}$.

B) Os polinômios $\{P_n^{(\phi)}\}$ e $\{O_n^{(\phi)}\}$ satisfazem às seguintes relações de recorrência, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(\phi)}(z) &= (z - \beta_{n+1}^{(\phi)})P_n^{(\phi)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\phi)}P_{n-1}^{(\phi)}(z), \\ O_{n+1}^{(\phi)}(z) &= (z - \beta_{n+1}^{(\phi)})O_n^{(\phi)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\phi)}O_{n-1}^{(\phi)}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (2.1.1)$$

com $P_0^{(\phi)}(z) = 1$, $P_1^{(\phi)}(z) = z - \beta_1^{(\phi)}$, $O_0^{(\phi)}(z) = 0$ e $O_1^{(\phi)}(z) = 1$, onde os coeficientes $\beta_n^{(\phi)} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n+1}^{(\phi)} > 0$, $n \geq 1$, são dados por

$$\beta_n^{(\phi)} = \frac{1}{\rho_{n-1}^{(\phi)}} \int_{I^{(\phi)}} x P_{n-1}^{(\phi)}(x) P_{n-1}^{(\phi)}(x) d\phi(x) \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\phi)} = \frac{\rho_n^{(\phi)}}{\rho_{n-1}^{(\phi)}}, \quad n \geq 1.$$

2.2 Alguns polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara [13], os polinômios de Laguerre, Hermite e Jacobi (incluindo os casos especiais de Tchebichef, Legendre e Gegenbauer), são chamados de polinômios ortogonais clássicos. Nesta seção, consideraremos algumas propriedades básicas dos polinômios de Jacobi e Laguerre. Para isso, apresentemos, primeiramente, a definição da função especial Gama.

Definição 2.3. A função gama foi definida por Euler, em 1729, da seguinte forma

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^x \left(\frac{k}{k+x} \right) \right] \quad \text{para } x \neq 0, -1, -2, \dots$$

A função gama também pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0,$$

de onde facilmente mostramos que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à medida $d\phi^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, onde $\alpha, \beta > -1$. Denotemos os polinômios mônicos de Jacobi por $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Através da fórmula de Rodrigues, podem ser definidos por

$$k_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}], \quad (2.2.1)$$

onde $k_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}$.

Os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta)}$ satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) d\phi^{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} n! \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+2)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta)}$ é dada por

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha, \beta)}) P_n^{(\alpha, \beta)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.2.2)$$

com $P_0^{(\alpha, \beta)}(z) = 1$, $P_1^{(\alpha, \beta)}(z) = z - \beta_1$ e

$$\beta_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta - 1)^2 - 1}, \quad n \geq 1,$$

$$\alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2[(2n+\alpha+\beta)^2-1]},$$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios mônicos de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$, com relação à medida $d\phi^{(\alpha)}(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, onde $\alpha > -1$. Através da fórmula de Rodrigues, podem ser definidos por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios mônicos de Laguerre é

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n!\Gamma(n+\alpha+1), & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para estes polinômios é dada por

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha)})L_n^{(\alpha)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha)}L_{n-1}^{(\alpha)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.2.3)$$

com $L_0^{(\alpha)}(z) = 1$, $L_1^{(\alpha)}(z) = z - \beta_1$, onde

$$\beta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(\alpha + n), \quad n \geq 1.$$

2.3 Polinômios de Charlier

Os polinômios mônicos de Charlier, denotados por $C_n^{(\alpha)}$, podem ser definidos, através da fórmula do tipo Rodrigues, por

$$C_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \alpha^{-1} \Gamma(x+1) \Delta^n \left[\frac{\alpha^x}{\Gamma(x-n+1)} \right],$$

com $\alpha > 0$, onde Δ^n é o operador de diferenças definido recursivamente por

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x), \\ \Delta^n f(x) &= f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \binom{n}{2} f(x+n-2) - \dots + (-1)^n f(x). \end{aligned}$$

Os polinômios mônicos de Charlier satisfazem à relação de ortogonalidade

$$\int_0^\infty C_n^{(\alpha)}(x)C_m^{(\alpha)}(x)d\phi_C^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^\infty C_n^{(\alpha)}(r)C_m^{(\alpha)}(r)\frac{e^{-\alpha}\alpha^r}{r!} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \alpha^n n!, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

onde $\phi_C^{(\alpha)}$ é uma função escada com saltos $\frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!}$ em $x = 0, 1, 2, \dots$

A relação de recorrência de três termos para $C_n^{(\alpha)}$ é dada por

$$C_{n+1}^{(\alpha)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha)})C_n^{(\alpha)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha)}C_{n-1}^{(\alpha)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.3.1)$$

com $C_0^{(\alpha)}(z) = 1$, $C_1^{(\alpha)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha)}$, onde

$$\beta_n^{(\alpha)} = n + \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n\alpha, \quad n \geq 1.$$

2.4 Frações contínuas e seqüências encadeadas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (2.4.1)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências arbitrárias de números complexos (ou funções complexas). Uma fração contínua pode ser finita ou infinita. Consideremos a seqüência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\ &\vdots \\ C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

C_n , que é uma fração contínua finita, é chamado de n-ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (2.4.1).

Neste trabalho, adotamos as seguintes notações para as frações contínuas (2.4.1) e (2.4.2), respectivamente,

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots$$

e

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Da relação (2.4.2), podemos escrever $C_n = \frac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Note que $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ e $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$. Deste modo, podemos demonstrar o resultado a seguir.

Lema 2.1. *Sejam as seqüências $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ tais que*

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (2.4.3)$$

com $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$. Então, o n -ésimo convergente C_n da fração contínua (2.4.1), dado por (2.4.2), satisfaz $C_n = A_n/B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração: Mostremos por indução. Facilmente podemos mostrar para $n = 1$. Suponhamos que (2.4.3) seja válido para $n \leq k$ e mostremos que vale para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}}}} \\ &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k^*}}} = C_k^*, \end{aligned}$$

onde $b_k^* = b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$. Logo, C_k^* é o k -ésimo convergente da fração contínua

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k^*} + \dots}}.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos

$$C_k^* = \frac{A_k + (a_{k+1}/b_{k+1})A_{k-1}}{B_k + (a_{k+1}/b_{k+1})B_{k-1}} = \frac{b_{k+1}A_k + a_{k+1}A_{k-1}}{b_{k+1}B_k + a_{k+1}B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

■

As fórmulas dadas por (2.4.3) são conhecidas por fórmulas de Wallis, onde A_n é chamado o n -ésimo numerador parcial e B_n é o n -ésimo denominador parcial da fração contínua.

Segundo Chihara [14], as seqüências encadeadas surgiram dos estudos de E.B. Van Vleck sobre certas frações contínuas, cuja teoria foi formalizada por Wall [45].

Definição 2.4. Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada seqüência encadeada positiva (ou simplesmente seqüência encadeada) se existir uma segunda seqüência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} i) \quad & 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1, \\ ii) \quad & a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

A seqüência $\{g_k\}$ é chamada seqüência de parâmetros para $\{a_n\}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

A teoria de seqüências encadeadas fornece uma ferramenta poderosa para estudar os polinômios ortogonais a partir dos coeficientes da relação de recorrência de três termos. Por exemplo, temos o seguinte resultado para $I^{(\phi)}$, o verdadeiro intervalo de ortogonalidade dos polinômios ortogonais $\{P_n^{(\phi)}(x)\}$.

Lema 2.2. Seja $a_n^{(\phi)}(c) = \left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi)}}{(c - \beta_n)(c - \beta_{n+1})} \right\}$, $n \geq 1$. Então,

A) $I^{(\phi)} \subseteq [a, \infty)$ se, e somente se, $\beta_n^{(\phi)} > a$, $n \geq 1$, e $\{a_n^{(\phi)}(c)\}$ é uma seqüência encadeada para qualquer $c < a$;

B) $I^{(\phi)} \subseteq (-\infty, b]$ se, e somente se, $\beta_n^{(\phi)} < b$, $n \geq 1$, e $\{a_n^{(\phi)}(c)\}$ é uma seqüência encadeada para qualquer $c > b$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada no livro de Chihara [13].

Denotemos por $X^{(\phi)} = (-\infty, \infty) \setminus I^{(\phi)}$ o complemento do intervalo $I^{(\phi)}$ em $(-\infty, \infty)$. Do mesmo modo, $Z^{(\phi)} = \overline{\mathbb{C}} \setminus I^{(\phi)}$, onde $\overline{\mathbb{C}}$ é o plano complexo estendido. O fecho de $X^{(\phi)}$ dentro da reta real será denotado por $\tilde{X}^{(\phi)}$. Por exemplo, se $I^{(\phi)} = [a, b]$, como $X^{(\phi)} = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, então $\tilde{X}^{(\phi)} = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$, ou seja, os pontos extremos de $I^{(\phi)}$ são pontos de $\tilde{X}^{(\phi)}$, mas $\pm\infty$ não o são.

Como consequência do Lema 2.2, temos que

A) $a_n^{(\phi)}(c)$ é uma seqüência encadeada se $c \in \tilde{X}^{(\phi)}$.

B) $I^{(\phi)}$ é um intervalo finito se, e somente se, ambas as seqüências $\{\beta_n^{(\phi)}\}$ e $\{\alpha_n^{(\phi)}\}$ são limitadas.

Uma contribuição recente obtida por Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga em [8] é o seguinte resultado. Dada a seqüência encadeada $a_n^{(\phi)}(c) = \left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi)}}{(c - \beta_n^{(\phi)})(c - \beta_{n+1}^{(\phi)})} \right\}$, a

seqüência $\{g_n^{(\phi)}(c, t)\}$, dada por

$$g_n^{(\phi)}(c, t) = \frac{P_{n-1}^{(\phi)}(z) - t(c - \beta_1^{(\phi)})O_{n-1}^{(\phi)}(c) - \alpha_{n+1}^{(\phi)}}{P_n^{(\phi)}(c) - t(c - \beta_1^{(\phi)})O_n^{(\phi)}(c) - \alpha_{n+1}^{(\phi)}}, \quad n \geq 1, \quad (2.4.5)$$

é uma seqüência de parâmetros para qualquer t tal que $0 < t \leq 1/G^{(\phi)}(c)$. A função $G^{(\phi)}(z)$ será definida em (2.5.5).

2.5 Propriedades adicionais de polinômios ortogonais

Da relação de recorrência (2.1.1) e do Lema 2.1 (fórmulas de Wallis), obtemos

$$\frac{O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} = \frac{1}{(z - \beta_1^{(\phi)})} - \frac{\alpha_2^{(\phi)}}{(z - \beta_2^{(\phi)})} - \frac{\alpha_3^{(\phi)}}{(z - \beta_3^{(\phi)})} - \cdots - \frac{\alpha_n^{(\phi)}}{(z - \beta_n^{(\phi)})}. \quad (2.5.1)$$

O seguinte teorema faz parte dos estudos associados ao famoso *problema de momento*, considerado por muitos matemáticos famosos como Stieltjes, Hamburger, Hausdorff, M. Riesz, R. Nevanlinna, etc.

Teorema 2.1 (Stieltjes-Hamburger-Hausdorff). *Suponha que $d\phi$ é uma medida determinada (cuja definição será esclarecida abaixo). Então, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} \text{ converge uniformemente para } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi(x)$$

em todo subconjunto compacto de $Z^{(\phi)}$.

A demonstração deste teorema é bastante extensa. Por esta razão, daremos apenas um esboço com o intuito de esclarecer alguns fatos importantes.

Como $P_n^{(\phi)}(z) = (z - x_{n,1})(z - x_{n,2}) \cdots (z - x_{n,n})$, onde $x_{n,n} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n,1}$ são os zeros de $P_n^{(\phi)}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} &= \frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{(z - x_{n,1}) \cdots (z - x_{n,n})} = \frac{\lambda_{n,1}}{(z - x_{n,1})} + \frac{\lambda_{n,2}}{(z - x_{n,2})} + \cdots + \frac{\lambda_{n,n}}{(z - x_{n,n})} \\ &= \frac{\lambda_{n,1}(z - x_{n,2}) \cdots (z - x_{n,n}) + \cdots + \lambda_{n,n}(z - x_{n,1}) \cdots (z - x_{n,n-1})}{(z - x_{n,1}) \cdots (z - x_{n,n})}. \end{aligned}$$

Para $z = x_{n,r}$, obtemos

$$\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(x_{n,r}) = \lambda_{n,r}(x_{n,r} - x_{n,1}) \cdots (x_{n,r} - x_{n,r-1})(x_{n,r} - x_{n,r+1}) \cdots (x_{n,r} - x_{n,n}).$$

Portanto,

$$\lambda_{n,r} = \frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(x_{n,r})}{P_n^{(\phi)'}(x_{n,r})}.$$

onde $P_n^{(\phi)'}$ representa a derivada de $P_n^{(\phi)}$. Podemos, então, escrever

$$\frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(x_{n,r}) / P_n^{(\phi)'}(x_{n,r})}{(z - x_{n,r})} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{(z - x_{n,r})}. \quad (2.5.2)$$

Mostremos que $\lambda_{n,r} > 0$, $r = 1, \dots, n$. Seja

$$T_n(z) = O_n^{(\phi)}(z) P_{n-1}^{(\phi)}(z) - P_n^{(\phi)}(z) O_{n-1}^{(\phi)}(z).$$

Substituindo as relações de recorrência de $P_n^{(\phi)}$ e $O_n^{(\phi)}$ em T_n repetidas vezes, encontramos

$$T_n(z) = \alpha_n^{(\phi)} \alpha_{n-1}^{(\phi)} \cdots \alpha_2^{(\phi)} > 0.$$

Através da derivada da relação de recorrência para os polinômios $P_n^{(\phi)}$, obtemos

$$\begin{aligned} R_n(z) &= P_n^{(\phi)'}(z) P_{n-1}^{(\phi)}(z) - P_{n-1}^{(\phi)'}(z) P_n^{(\phi)}(z) = [P_{n-1}^{(\phi)}(z)]^2 + \alpha_n^{(\phi)} R_{n-1}(z) \\ &= \cdots = [P_{n-1}^{(\phi)}]^2 + \alpha_n^{(\phi)} [P_{n-2}^{(\phi)}]^2 + \cdots + \alpha_n^{(\phi)} \cdots \alpha_3^{(\phi)} [P_1^{(\phi)}]^2 + \alpha_n^{(\phi)} \cdots \alpha_2^{(\phi)}. \end{aligned}$$

Logo, $R_n(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$0 < \frac{T_n(x_{n,r})}{R_n(x_{n,r})} = \frac{O_n^{(\phi)}(x_{n,r})}{P_n^{(\phi)'}(x_{n,r})} = \frac{\lambda_{n,r}}{\mu_0^{(\phi)}}.$$

Mas, $\mu_0^{(\phi)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(x) > 0$. Portanto, $\lambda_{n,r} > 0$.

Como $P_n^{(\phi)}$ é um polinômio de grau n e $O_n^{(\phi)}$ é um polinômio de grau $n-1$, então, em (2.5.2), temos que

$$\frac{\mu_0^{(\phi)} (z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_0)}{z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \cdots + d_0} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{z - x_{n,r}}.$$

Multiplicando por z ambos os lados da igualdade acima e aplicando o limite para $z \rightarrow \infty$, temos

$$\mu_0^{(\phi)} = \sum_{r=1}^n \lambda_{n,r}.$$

Consideremos a sequência de funções escada $\{\phi_n\}$ definida por

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n,n}, \\ \sum_{r=1}^s \lambda_{n,n-r+1}, & x_{n,n-s+1} < x < x_{n,n-s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, n-1, \\ \mu_0^{(\phi)}, & x_{n,1} \leq x, \end{cases}$$

para $n \geq 1$. Assim,

$$\sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{z - x_{n,r}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi_n(x).$$

Este resultado segue da definição da integral de Stieltjes (veja, por exemplo, Widder [46]). Logo,

$$\frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi_n(x).$$

Pelo resultado conhecido por Teorema de Gromer-Hamburger ou Teorema de Helly (veja, por exemplo, Shohat e Tamarkin [35]), existe uma subsequência n_k tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^{(\phi)} O_{n_k}^{(\phi)}(z)}{P_{n_k}^{(\phi)}(z)} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi_{n_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\psi_k(x),$$

onde ψ_k é uma função não-decrescente em $(-\infty, \infty)$. A convergência é uniforme em todo subconjunto compacto de $Z^{(\phi)}$.

Podemos verificar que $d\psi_k$ representa uma medida em $\mathbb{R}$ cujos polinômios ortogonais são exatamente $\{P_n^{(\phi)}\}$. Há possibilidade de existirem subsequências n_k diferentes associadas, no limite, com medidas $d\psi_k$ diferentes. Entretanto, se a medida considerada $d\phi$ é determinada, então todas as subsequências convergem para o mesmo limite, ou seja, $\psi_k = \phi$. Isto significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^{(\phi)} O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi(x), \quad z \in Z^{(\phi)}.$$

Uma condição necessária e suficiente para que uma medida $d\phi$ seja determinada é que, para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^{(\phi)} [O_n^{(\phi)}(z) - c O_{n-1}^{(\phi)}(z)]}{P_n^{(\phi)}(z) - c P_{n-1}^{(\phi)}(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi(x)$$

uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $Z^{(\phi)}$. Isso significa, em outras palavras, que a solução do problema de momento associado é única.

As medidas clássicas de Jacobi, Hermite, Laguerre e, também, a medida associada aos polinômios de Charlier são exemplos de medidas determinadas.

Seja $G_n^{(\phi)}(z) = \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)}$, $n \geq 0$. Então $G_0^{(\phi)}(z) = 0$, $G_1^{(\phi)}(z) = 1$ e, de (2.5.1), podemos escrever

$$G_n^{(\phi)}(z) = \frac{1}{1} \cdots \frac{a_1^{(\phi)}(z)}{1} - \frac{a_2^{(\phi)}(z)}{1} - \cdots - \frac{a_{n-1}^{(\phi)}(z)}{1}, \quad n \geq 2, \quad (2.5.3)$$

onde $a_n^{(\phi)}(z) = \alpha_{n+1}^{(\phi)} / [(z - \beta_n^{(\phi)})(z - \beta_{n+1}^{(\phi)})]$, $n \geq 1$.

Lema 2.3. Para qualquer $z \in \tilde{X}^{(\phi)}$,

$$v_n^{(\phi)}(z) = (\beta_n^{(\phi)} - z)(\beta_{n+1}^{(\phi)} - z) - \alpha_{n+1}^{(\phi)} > 0, \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.2, temos que $\{a_n^{(\phi)}(z)\}$ é uma sequência encadeada positiva para $z \in \tilde{X}^{(\phi)}$. Deste modo,

$$0 < a_n^{(\phi)}(z) = \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi)}}{(\beta_n^{(\phi)} - z)(\beta_{n+1}^{(\phi)} - z)} < 1.$$

O que comprova o resultado do teorema. ■

Para $G_n^{(\phi)}$, os seguintes resultados são válidos

$$G_n^{(\phi)}(z) - G_{n-1}^{(\phi)}(z) = \frac{\alpha_2^{(\phi)} \alpha_3^{(\phi)} \cdots \alpha_n^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)}, \quad n \geq 2. \quad (2.5.4)$$

$$G_n^{(\phi)}(z) = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^{(\phi)} \alpha_3^{(\phi)} \cdots \alpha_j^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{j-1}^{(\phi)}(z) P_j^{(\phi)}(z)},$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} G_n^{(\phi)}(z) - G_{n-1}^{(\phi)}(z) &= \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})O_n^{(\phi)}(z)}{P_n^{(\phi)}(z)} - \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})O_{n-1}^{(\phi)}(z)}{P_{n-1}^{(\phi)}(z)} \\ &= \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-1}^{(\phi)}(z)P_n^{(\phi)}(z)} [O_n^{(\phi)}(z)P_{n-1}^{(\phi)}(z) - O_{n-1}^{(\phi)}(z)P_n^{(\phi)}(z)] \\ &= \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})\alpha_n^{(\phi)}}{P_{n-1}^{(\phi)}(z)P_n^{(\phi)}(z)} [O_{n-1}^{(\phi)}(z)P_{n-2}^{(\phi)}(z) - O_{n-2}^{(\phi)}(z)P_{n-1}^{(\phi)}(z)] \\ &= \cdots = \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})\alpha_n^{(\phi)}\alpha_{n-1}^{(\phi)}\cdots\alpha_2^{(\phi)}}{P_{n-1}^{(\phi)}(z)P_n^{(\phi)}(z)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Então, para $n > 2$,

$$\begin{aligned} G_n^{(\phi)}(z) &= \frac{\alpha_2^{(\phi)} \alpha_3^{(\phi)} \cdots \alpha_n^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)} + G_{n-1}^{(\phi)}(z) = \cdots = \\ &= \frac{\alpha_2^{(\phi)} \cdots \alpha_n^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)} + \frac{\alpha_2^{(\phi)} \cdots \alpha_{n-1}^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-2}^{(\phi)}(z) P_{n-1}^{(\phi)}(z)} \\ &\quad + \cdots + \frac{\alpha_2^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_1^{(\phi)}(z) P_2^{(\phi)}(z)} + G_1^{(\phi)}(z) \\ &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^{(\phi)} \alpha_3^{(\phi)} \cdots \alpha_j^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{j-1}^{(\phi)}(z) P_j^{(\phi)}(z)}. \end{aligned}$$

Seja, também, $G^{(\phi)}$ definido, em $Z^{(\phi)}$, por

$$G^{(\phi)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{(\phi)}(z) = \frac{(z - \beta_1^{(\phi)})}{\mu_0^{(\phi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\phi(x). \quad (2.5.5)$$

Lema 2.4. Para qualquer $z \in \tilde{X}^{(\phi)}$, $\{G_n^{(\phi)}\}$ é uma seqüência crescente, isto é,

$$1 < G_2^{(\phi)}(z) < \cdots < G_n^{(\phi)}(z) < \cdots < G^{(\phi)}(z). \quad (2.5.6)$$

Demonstração: Para $G_n^{(\phi)}(z) > G_{n-1}^{(\phi)}(z)$, basta mostrarmos (veja (2.5.4)) que

$$\frac{\alpha_2^{(\phi)} \alpha_3^{(\phi)} \cdots \alpha_n^{(\phi)} (z - \beta_1^{(\phi)})}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)} > 0, \quad n \geq 2.$$

Já sabemos que $\alpha_n^{(\phi)} > 0$ para $n \geq 2$. Vamos, então, analisar o sinal de $\frac{z - \beta_1^{(\phi)}}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)}$, $n \geq 2$. Como $P_1^{(\phi)}(z) = z - \beta_1^{(\phi)}$, temos que $\beta_1^{(\phi)}$ é zero de $P_1^{(\phi)}$ e, então, $\beta_1^{(\phi)} \in I^{(\phi)}$. Mas, como $z \in \tilde{X}^{(\phi)}$, ou seja, $z \notin I^{(\phi)}$, temos os seguintes casos:

(i) Se $z > \beta_1^{(\phi)}$, então $z - \beta_1^{(\phi)} > 0$ e sabemos, ainda, que $P_n^{(\phi)}(z) > 0$, para $n \geq 1$.

Portanto,

$$\frac{z - \beta_1^{(\phi)}}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)} > 0.$$

(ii) Se $z < \beta_1^{(\phi)}$, então $z - \beta_1^{(\phi)} < 0$. Mas, se $P_n^{(\phi)}(z) > 0$, então $P_{n-1}^{(\phi)}(z) < 0$ ou, ainda, se $P_n^{(\phi)}(z) < 0$, então $P_{n-1}^{(\phi)}(z) > 0$. Assim, $P_n^{(\phi)}(z) P_{n-1}^{(\phi)}(z) < 0$, $n \geq 2$. Portanto,

$$\frac{z - \beta_1^{(\phi)}}{P_{n-1}^{(\phi)}(z) P_n^{(\phi)}(z)} > 0.$$

Logo, $G_n^{(\phi)}(z) > G_{n-1}^{(\phi)}(z)$, $n > 2$, para $z \in \tilde{X}^{(\phi)}$. Conseqüentemente,

$$1 < G_2^{(\phi)}(z) < \cdots < G_n^{(\phi)}(z) < \cdots < G^{(\phi)}(z),$$

pois $G_1^{(\phi)}(z) = 1$. ■

2.6 Medidas relacionadas

Estudar as semelhanças entre as propriedades de duas seqüências de polinômios ortogonais, cujas medidas estão relacionadas entre si de alguma forma, tem sido assunto de pesquisa bastante explorado. Estudar o comportamento dos zeros e coeficientes associados a uma dessas seqüências de polinômios ortogonais, ou até mesmo gerar numericamente uma dessas seqüências de polinômios ortogonais a partir das informações conhecidas sobre a outra, tem sido muito gratificante. Neste sentido, um dos resultados bem conhecido é o seguinte teorema, atribuído a Ismail [19].

Teorema 2.2 (Markoff-Ismail). *Seja $w(x) = w(x, \kappa)$ uma função peso no interior do intervalo $I^{(\phi)}$, que depende do parâmetro $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$. Consideremos, também, que as derivadas parciais $w_\kappa(x, \kappa)$ existem e são contínuas no interior de $I^{(\phi)}$ para $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ e que as integrais*

$$\int_{I^{(\phi)}} x^r w_\kappa(x, \kappa) d\phi(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots, 2n-1,$$

convergem uniformemente em todo subintervalo fechado $\kappa' \leq \kappa \leq \kappa''$ do intervalo aberto (κ_1, κ_2) . Se os zeros de $P_n^{(\tilde{\phi})}(x)$, n -ésimo polinômio ortogonal associado à medida $d\tilde{\phi}(x) = w(x, \kappa) d\phi(x)$, são denotados por $x_{n,n}^{(\kappa)} < \dots < x_{n,2}^{(\kappa)} < x_{n,1}^{(\kappa)}$, então o r -ésimo zero, $x_{n,r}^{(\kappa)}$ (para um valor fixo de r), é uma função crescente (decrescente) de κ se w_κ/w é uma função crescente (decrescente) de x , para $x \in I^{(\phi)}$.

A demonstração deste teorema quando, $d\phi(x) = dx$, é devido a A. Markoff e pode ser encontrada em Szegő [42, p. 115].

Nesta seção, nosso objetivo é considerar as seqüências de polinômios ortogonais associados às medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$, definidas em $(-\infty, \infty)$, relacionadas por

$$c d\phi_0(x) = (x - q) d\phi_1(x). \quad (2.6.1)$$

Temos duas possibilidades para os suportes $E^{(\phi_0)}$ e $E^{(\phi_1)}$ dessas medidas:

- 1) $E^{(\phi_1)} = E^{(\phi_0)}$, onde os valores de c e q são tais que $(x - q)/c$ é finito e positivo no menor intervalo que contém este suporte comum;
- 2) $E^{(\phi_1)} = E^{(\phi_0)} \cup \{\kappa\}$, onde os valores de c e q são tais que $q = \kappa$ e $(x - \kappa)/c$ é finito e não-negativo no menor intervalo que contém ambos os suportes.

Expressando $P_n^{(\phi_1)}$ como uma combinação linear dos polinômios $\{P_n^{(\phi_0)}\}$, obtemos

$$P_n^{(\phi_1)}(z) = P_n^{(\phi_0)}(z) + b_{n-1}P_{n-1}^{(\phi_0)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.6.2)$$

onde

$$b_{n-1} = \frac{\rho_n^{(\phi_1)}}{c \rho_{n-1}^{(\phi_0)}}, \quad n \geq 1, \quad (2.6.3)$$

com $\rho_0^{(\phi)} = \mu_0^{(\phi)}$ e $\rho_n^{(\phi)} = \int_{I^{(\phi)}} [P_n^{(\phi)}(x)]^2 d\phi(x) = \alpha_{n+1}^{(\phi)} \alpha_n^{(\phi)} \cdots \alpha_2^{(\phi)} \mu_0^{(\phi)}$, $n \geq 1$.

Os resultados dos dois próximos lemas podem ser encontrados em Belmechi [4], Marcellán e Petronilho [29] e Maroni [30]. Entretanto, as demonstrações apresentadas aqui são devidas a Berti, Bracciali e Sri Ranga [5].

Lema 2.5. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que (2.6.1) vale. Então, os coeficientes de conexão b_n da relação (2.6.2) satisfazem*

$$(i) \quad b_n/b_{n-1} = \alpha_{n+2}^{(\phi_1)}/\alpha_{n+1}^{(\phi_0)};$$

$$(ii) \quad b_n - b_{n-1} = \beta_{n+1}^{(\phi_0)} - \beta_{n+1}^{(\phi_1)};$$

$$(iii) \quad (\beta_{n+1}^{(\phi_1)} - \beta_n^{(\phi_0)})b_{n-1} = \alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - \alpha_{n+1}^{(\phi_1)},$$

para $n > 1$, onde $b_0 = \beta_1^{(\phi_0)} - \beta_1^{(\phi_1)} = \alpha_2^{(\phi_1)}/(\beta_1^{(\phi_1)} - q)$.

Demonstração: O resultado (i) segue de (2.6.3). De (2.6.2) e da relação de recorrência (2.1.1) para $P_n^{(\phi_0)}$, obtemos

$$P_n^{(\phi_1)}(z) = \left[1 + \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{(\phi_0)}}(z - \beta_{n+1}^{(\phi_0)}) \right] P_n^{(\phi_0)}(z) - \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{(\phi_0)}} P_{n+1}^{(\phi_0)}(z), \quad n \geq 1.$$

Substituindo esta relação e (2.6.2) em (2.1.1) para $P_n^{(\phi_1)}$ e, então, usando o resultado (i) deste lema, temos

$$P_{n+1}^{(\phi_0)}(z) = [z - (\beta_{n+1}^{(\phi_1)} + b_{n-1} - b_{n-1})] P_n^{(\phi_0)}(z) + [b_{n-1}(\beta_n^{(\phi_0)} - \beta_{n+1}^{(\phi_1)}) - \alpha_{n+1}^{(\phi_1)}] P_{n-1}^{(\phi_0)}(z),$$

para $n > 1$. Deste modo, comparando este resultado com a relação de recorrência (2.1.1) para $P_n^{(\phi_0)}$, chegamos aos resultados (ii) e (iii). As condições iniciais são facilmente estabelecidas de (2.6.2) e (2.6.3). ■

Lema 2.6. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que (2.6.1) vale. Então,*

$$\frac{\alpha_{n+2}^{(\phi_1)}}{b_n} - \beta_{n+1}^{(\phi_1)} + b_{n-1} = \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi_0)}}{b_{n-1}} - \beta_{n-1}^{(\phi_0)} + b_n = -q.$$

Conseqüentemente, os coeficientes b_n , $n \geq 1$, podem ser gerados por

$$b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{(\phi_1)}}{q + \beta_{n-1}^{(\phi_1)} - b_{n-1}} \quad \text{ou} \quad b_n = (\beta_{n+1}^{(\phi_0)} - q) - \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi_0)}}{b_{n-1}},$$

com b_0 dado como no Lema 2.5.

Demonstração: Do item (i) do Lema 2.5, segue que

$$b_n \alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - b_{n-1} \alpha_{n+2}^{(\phi_0)} = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{(\phi_1)} - \alpha_{n+2}^{(\phi_0)}), \quad n \geq 1.$$

Aplicando o resultado (iii) do Lema 2.5, temos

$$b_n \alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - b_{n-1} \alpha_{n+2}^{(\phi_0)} = b_{n-1} b_n (\beta_{n+1}^{(\phi_0)} - \beta_{n+2}^{(\phi_1)}), \quad n \geq 1,$$

que é equivalente a

$$b_n (\alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{(\phi_0)}) = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{(\phi_0)} - b_n \beta_{n+2}^{(\phi_1)}), \quad n \geq 1.$$

Como $\beta_{n+2}^{(\phi_1)} = \beta_{n+2}^{(\phi_0)} - b_{n+1} + b_n$, $n \geq 0$, do item (ii) do lema anterior, obtemos

$$b_n (\alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{(\phi_0)}) = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{(\phi_0)} - b_n \beta_{n+2}^{(\phi_0)} + b_n b_{n+1}) - b_{n-1} b_n^2, \quad n \geq 1.$$

Isto mostra que $[\alpha_{n+1}^{(\phi_0)} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{(\phi_0)} + b_{n-1} b_n] / b_{n-1}$ é uma constante para $n \geq 1$. Para encontrar o valor desta constante, de (ii) e (iii) do Lema 2.5, temos que

$$\frac{\alpha_2^{(\phi_0)} - b_0 \beta_2^{(\phi_0)} + b_0 b_1}{b_0} = \frac{\alpha_2^{(\phi_0)} - b_0 \beta_2^{(\phi_1)} + b_0^2}{b_0} = \frac{\alpha_2^{(\phi_1)} - b_0 \beta_1^{(\phi_0)} + b_0^2}{b_0}.$$

Deste modo, usando as condições iniciais do Lema 2.5, podemos mostrar que o lado direito da igualdade anterior é igual a $-q$.

Finalmente, também de (ii) e (iii) do Lema 2.5,

$$\alpha_{n+2}^{(\phi_1)} - b_n(\beta_{n+1}^{(\phi_1)} - b_{n-1}) = \alpha_{n+2}^{(\phi_0)} - b_n(\beta_{n+2}^{(\phi_0)} - b_{n+1}),$$

concluindo, assim, a demonstração. $\blacksquare$

Na próxima seção, estudaremos o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais associados a uma classe especial de medidas que dependem de parâmetros. Para tal estudo, além dos resultados apresentados acima, precisaremos também dos seguintes resultados.

Lema 2.7. *Sejam $q_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ e $q_{n-1}(x) = (x - y_1) \cdots (x - y_{n-1})$ polinômios com zeros reais e que se entrelaçam, isto é,*

$$x_n < y_{n-1} < x_{n-1} < \cdots < y_1 < x_1.$$

Então, para qualquer constante c real, o polinômio

$$Q(x) = q_n(x) + c q_{n-1}(x)$$

tem n zeros reais $\xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1$ que se entrelaçam com os zeros de $q_n(x)$ e $q_{n-1}(x)$. Mais precisamente,

(i) se $c < 0$, então

$$x_1 < \xi_1,$$

$$x_r < \xi_r < y_{r-1}, \quad r = 2, \dots, n;$$

(ii) se $c > 0$, então

$$y_r < \xi_r < x_r, \quad r = 1, \dots, n-1, \quad \text{e} \quad \xi_n < x_n;$$

(iii) Além disso, cada ξ_r é uma função decrescente de c .

Demonstração: Para $c = 0$, temos que $Q(x) = q_n(x)$ e, então, $\xi_r = x_r$, $r = 1, \dots, n$.

Suponhamos $c < 0$. Logo, como $Q(x_r) = c q_{n-1}(x_r)$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{sign}(Q(x_r)) = -\text{sign}(q_{n-1}(x_r)) = (-1)(-1)^{r-1} = (-1)^r$$

e, como $Q(y_{r-1}) = q_n(y_{r-1})$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{senal}(Q(y_{r-1})) = \text{senal}(q_n(y_{r-1})) = (-1)^{r-1}.$$

Conseqüentemente, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_{r-1} , $r = 2, \dots, n$. Então, $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 2, \dots, n$, satisfazendo $x_r < \xi_r < y_{r-1}$. Temos, ainda, que $Q(x_1) = cq_{n-1}(x_1) < 0$ e, então, quando $x \rightarrow \infty$, $q_n(x)$ vai mais rápido para o infinito que $q_{n-1}(x)$. Assim, $Q(x)$ vai para o infinito. Logo, existe ξ_1 tal que $\xi_1 > x_1$ e, portanto, (i) está provado.

Suponhamos, agora, que $c > 0$. Então, como $Q(x_r) = cq_{n-1}(x_r)$, temos

$$\text{senal}(Q(x_r)) = \text{senal}(q_{n-1}(x_r)) = (-1)^{r-1}, \quad r = 1, \dots, n-1$$

e, como $Q(y_r) = q_n(y_r)$,

$$\text{senal}(Q(y_r)) = \text{senal}(q_n(y_r)) = (-1)^r, \quad r = 1, \dots, n-1.$$

Portanto, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_r , $r = 1, \dots, n-1$. Então, $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 1, \dots, n-1$, onde $y_r < \xi_r < x_r$. Temos, ainda, que $Q(x_n) = cq_{n-1}(x_n)$. Assim,

- se n for par, $Q(x_n) < 0$ e, ainda, quando $x \rightarrow -\infty$, $Q(x)$ vai para o infinito.

Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$;

- se n for ímpar, $Q(x_n) > 0$ e, então, quando $x \rightarrow -\infty$, $Q(x)$ vai para $-\infty$. Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$.

Portanto, existe $\xi_n < x_n$ para todo n . Deste modo, (ii) está demonstrado.

Mostremos, agora, a monotonicidade dos zeros de $Q(x)$ com respeito a c . Seja

$$Q_c(x) = q_n(x) + (c + \epsilon)q_{n-1}(x),$$

com $\epsilon \geq 0$. Sejam os zeros de $Q_c(x)$, satisfazendo $\xi_n(\epsilon) < \dots < \xi_1(\epsilon)$. Podemos notar que $\xi_r = \xi_r(0)$ e, como $Q(x) = q_n(x) + cq_{n-1}(x)$, temos

$$Q_c(x) = Q(x) + \epsilon q_{n-1}(x).$$

Devido à propriedade de entrelaçamento entre y_r e ξ_r , como $\epsilon > 0$, podemos usar o item (ii) do teorema, de onde concluímos que $\xi_r(\epsilon) < \xi_r$, $r = 1, \dots, n$. Portanto, temos que ξ_r é uma função decrescente de c e, deste modo, (iii) está provado. ■
Esse resultado pode ser encontrado em [8].

Lema 2.8. *Seja $\int_a^\infty f(x, y) d\phi(x)$ convergente quando $y_1 \leq y \leq y_2$. Seja, também, $\int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d\phi(x)$ uniformemente convergente em $y_1 \leq y \leq y_2$. Então, para $y_1 \leq y < y_2$,*

$$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) d\phi(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d\phi(x).$$

A prova deste lema (para $d\phi(x) = dx$) pode ser encontrada, por exemplo, em Ferrar [17] e Widder [46].

2.7 Aplicação aos polinômios ortogonais generalizados

Seja $d\phi$ uma medida determinada com $I^{(\phi)} = [a, b]$ ou $I^{(\phi)} = [a, \infty)$. Sabe-se que quando $I^{(\phi)} = [a, b]$, a medida é determinada. Sejam os números reais N e κ tais que $0 \leq N < \infty$ e $\kappa < a$ (ou, excepcionalmente, $\kappa \leq a$). Sejam $P_n^{(\phi, \kappa, N)}$ os polinômios ortogonais mônicos associados à medida $d\phi^{(\kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(\kappa) + \frac{\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (2.7.1)$$

onde p é um polinômio qualquer e

$$\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[p] = \int_{I^{(\phi)}} \frac{p(x)}{(x - \kappa)} d\phi(x).$$

Aqui, $\kappa = a$ somente se $\mathcal{M}^{(\phi, a)}[1]$ é convergente.

Quando $N > 0$, a medida $d\phi^{(\kappa, N)}$ tem um salto no ponto κ . Em (2.7.1), a medida é escrita de forma que o valor do salto em κ é $N/(N+1)$ e sua massa total é igual a 1, ou seja, $\mu_0^{(\phi, \kappa, N)} = 1$.

Agora, se tomarmos $d\phi_1 = d\phi^{(\kappa, N)}$ em (2.6.1), com $q = \kappa$ e, por exemplo, $c = a - \kappa + 1$, para $d\phi_0$ obtemos

$$\int p(x) d\phi_0(x) = \frac{1}{(N+1)(a - \kappa + 1)\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]} \int_{I^{(\phi)}} p(x) d\phi(x).$$

Observe que $d\phi_0$ é a medida $d\phi$, dada aqui com a massa total

$$\mu_0^{(\phi_0)} = \frac{\mu_0^{(\phi)}}{(N+1)(a - \kappa + 1)\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]},$$

onde $\mu_0^{(\phi)} = \int_{I^{(\phi)}} d\phi(x)$.

Seja a relação de recorrência para $\{P_n^{(\phi, \kappa, N)}\}$

$$P_{n+1}^{(\phi, \kappa, N)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\phi, \kappa, N)})P_n^{(\phi, \kappa, N)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\phi, \kappa, N)}P_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)}(z),$$

para $n \geq 1$, com $P_0^{(\phi, \kappa, N)} = 1$ e $P_1^{(\phi, \kappa, N)}(z) = z - \beta_1^{(\phi, \kappa, N)}$.

De (2.6.2),

$$P_n^{(\phi, \kappa, N)}(z) = P_n^{(\phi)}(z) + b_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)}P_{n-1}^{(\phi)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.7.2)$$

onde, de (2.6.3), $\text{sign}(b_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)}) = \text{sign}(a - \kappa + 1) = 1$, $n \geq 1$. Além disso, do Lema 2.5,

$$\alpha_{n+2}^{(\phi, \kappa, N)} = \alpha_{n+1}^{(\phi)} \frac{b_n^{(\phi, \kappa, N)}}{b_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)}}, \quad \beta_{n+1}^{(\phi, \kappa, N)} = \beta_{n+1}^{(\phi)} - b_n^{(\phi, \kappa, N)} + b_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)},$$

para $n \geq 1$, com $\alpha_2^{(\phi, \kappa, N)} = b_0^{(\phi, \kappa, N)}(\beta_1^{(\phi)} - b_0^{(\phi, \kappa, N)} - \kappa)$ e $\beta_1^{(\phi, \kappa, N)} = \beta_1^{(\phi)} - b_0^{(\phi, \kappa, N)}$. Os coeficientes $\{b_n^{(\phi, \kappa, N)}\}$ podem ser gerados por

$$b_n^{(\phi, \kappa, N)} = (\beta_{n+1}^{(\phi)} - \kappa) - \frac{\alpha_{n+1}^{(\phi)}}{b_{n-1}^{(\phi, \kappa, N)}}, \quad n \geq 1, \quad (2.7.3)$$

com

$$b_0^{(\phi, \kappa, N)} = \beta_1^{(\phi)} - \beta_1^{(\phi, \kappa, N)} = \beta_1^{(\phi)} - \kappa - \frac{\mu_0^{(\phi)}}{(N+1)\mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]}. \quad (2.7.4)$$

Se $\kappa < a$, então, para $G_n^{(\phi)}(z)$ e $G^{(\phi)}(z)$ definidos como em (2.5.4) e (2.5.5), obtemos, do Lema 2.4,

$$1 < G_2^{(\phi)}(\kappa) < \dots < G_n^{(\phi)}(\kappa) < \dots < G^{(\phi)}(\kappa) - \frac{(\beta_1^{(\phi)} - \kappa)}{\mu_0^{(\phi)}} \mathcal{M}^{(\phi, \kappa)}[1]. \quad (2.7.5)$$

Esse resultado também vale para $\kappa = a$ uma vez que $\mathcal{M}^{(\phi, a)}[1]$ é convergente.

Teorema 2.3. *Sejam $x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)}$ e $x_{n,r}^{(\phi)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os respectivos zeros de $P_n^{(\phi, \kappa, N)}$ e $P_n^{(\phi)}$ organizados em ordem decrescente. Então, os seguintes resultados valem:*

- (1) $x_{n-1,r}^{(\phi)} < x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)} < x_{n,r}^{(\phi)}$, $r = 1, \dots, n-1$ e $\kappa < x_{n,n}^{(\phi, \kappa, N)} < x_{n,n}^{(\phi)}$;
- (2) $x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de N ;
- (3) se $N = 0$ então $x_{n,r}^{(\phi, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ ;

(4) se $N > 0$ então $x_{n,r}^{(\phi,\kappa,N)}$ é uma função crescente de κ para $\kappa \in (-\infty, \tilde{\kappa}^{(\phi,N)}]$, onde

$$\tilde{\kappa}^{(\phi,N)} = a - \frac{\sqrt{[N(\beta_2^{(\phi)} - a) - (\beta_1^{(\phi)} - a)]^2 + 4Nv_1^{(\phi)}(a)} - [N(\beta_2^{(\phi)} - a) - (\beta_1^{(\phi)} - a)]}{2N}.$$

Aqui, $v_1^{(\phi)}(a) = [(\beta_1^{(\phi)} - a)(\beta_2^{(\phi)} - a) - \alpha_2^{(\phi)}] > 0$.

Demonstração: Como $\text{sign}(b_{n-1}^{(\phi,\kappa,N)}) = 1$, a aplicação da parte (ii) do Lema 2.7 para a relação (2.7.2) fornece a parte (1) deste teorema.

Agora, se $\kappa < a$ (ou $\kappa \leq a$), então $\mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1]$ é positivo e, portanto, de (2.7.4), $b_0^{(\phi,\kappa,N)}$ é uma função crescente de N . Assim, de (2.7.3), $b_n^{(\phi,\kappa,N)}$ é uma função crescente de N para qualquer $n \geq 0$. Aplicando o resultado da parte (iii) do Lema 2.7, obtemos a parte (2).

Para obter a parte (3), note que $\{P_n^{(\phi,\kappa,0)}\}$ pode ser considerada como a sequência dos polinômios ortogonais associados a $(\kappa - x)^{-1}d\phi(x)$ e definidos em $I^{(\phi)}$. Portanto, o resultado segue da aplicação do Teorema 2.2 (Teorema de Markoff-Ismail).

Agora, para obter a parte (4) deste teorema, de (2.7.4),

$$\frac{\partial b_0^{(\phi,\kappa,N)}}{\partial \kappa} = -1 + \frac{\mu_0^{(\phi)}}{(N+1)(\mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1])^2} \frac{\partial \mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1]}{\partial \kappa}.$$

Portando, para valores de κ tais que $a - \kappa \geq \epsilon > 0$, do Lema 2.8, segue que

$$\frac{\partial b_0^{(\phi,\kappa,N)}}{\partial \kappa} = -1 + \frac{\mu_0^{(\phi)}}{(N+1)(\mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1])^2} \int_{I^{(\phi)}} \frac{1}{(x - \kappa)^2} d\phi(x).$$

Disso, obtemos

$$\frac{\partial b_0^{(\phi,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{\mu_0^{(\phi)}}{(N+1)(a - \kappa)\mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1]}.$$

De (2.7.5), como $G_2^{(\phi)}(\kappa) < \frac{\beta_1^{(\phi)} - \kappa}{\mu_0^{(\phi)}} \mathcal{M}^{(\phi,\kappa)}[1]$, temos que

$$\frac{\partial b_0^{(\phi,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{(\beta_1^{(\phi)} - \kappa)}{(N+1)(a - \kappa)G_2^{(\phi)}(\kappa)}.$$

Mas, de (2.5.3),

$$G_2^{(\phi)}(\kappa) = \frac{(\beta_1^{(\phi)} - \kappa)(\beta_2^{(\phi)} - \kappa)}{(\beta_1^{(\phi)} - \kappa)(\beta_2^{(\phi)} - \kappa) - \alpha_2^{(\phi)}},$$

então,

$$\frac{\partial b_0^{(\phi, \kappa, N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{(\beta_1^{(\phi)} - \kappa)(\beta_2^{(\phi)} - \kappa) - \alpha_2^{(\phi)}}{(N+1)(a - \kappa)(\beta_2^{(\phi)} - \kappa)}.$$

Observando os valores de κ para os quais o lado direito da inequação acima é não-positivo, encontramos o intervalo $(-\infty, \tilde{\kappa}^{(\phi, N)}]$ onde isso vale. Dentro desse intervalo, temos, então, que $b_0^{(\phi, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ . Conseqüentemente, de (2.7.3), também dentro desse intervalo, temos que $b_n^{(\phi, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ para todo $n > 0$. Portanto, da parte (iii) do Lema 2.7, a parte (4) do teorema segue. Finalmente, $v_1^{(\phi)}(a) = [(\beta_1^{(\phi)} - a)(\beta_2^{(\phi)} - a) - \alpha_2^{(\phi)}] > 0$ segue do Lema 2.3. ■

2.8 Exemplos

Nesta seção, aplicaremos os resultados do Teorema 2.3 em três exemplos. Os exemplos foram escolhidos de modo que abrangessem medidas contínuas em intervalos finito e semi-infinito e, também, medidas discretas.

2.8.1 Polinômios de Jacobi Generalizados

Sejam os números reais N e κ tais que $0 \leq N < \infty$ e $|\kappa| > 1$ (ou, excepcionalmente, $|\kappa| \geq 1$). Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ associados à medida $d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(\kappa) + \frac{\mathcal{M}_J^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}_J^{(\alpha, \beta, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (2.8.1)$$

onde p é um polinômio qualquer e

$$\mathcal{M}_J^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p] = \int_{-1}^1 p(x) \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{x - \kappa} dx.$$

Aqui, se $|\kappa| > 1$, então $\alpha > -1$, $\beta > -1$, se $\kappa = 1$, então $\alpha > 0$, $\beta > -1$ e, se $\kappa = -1$, então $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

Quando $|\kappa| = 1$, os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ são casos particulares dos polinômios de Koornwinder [26].

Podemos, então, estudar os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ usando os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$, lembrando que, quando mônicos, satisfazem a relação de recorrência (2.2.2),

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha, \beta)})P_n^{(\alpha, \beta)}(z) + \alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta)}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $P_0^{(\alpha, \beta)} = 1$ e $P_1^{(\alpha, \beta)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha, \beta)}$, onde

$$\begin{aligned} \beta_n^{(\alpha, \beta)} &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta - 1)^2 - 1}, \\ \alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)^2[(2n + \alpha + \beta)^2 - 1]}. \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (2.8.2)$$

A aplicação do Teorema 2.3 fornece o seguinte resultado.

Corolário 2.3.1. *Sejam $x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ e $x_{n,r}^{(\alpha, \beta)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os respectivos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ organizados em ordem decrescente. Então, valem os resultados:*

(1) *Se $\kappa > 1$ (ou $\kappa \geq 1$), então*

$$x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} < \kappa \quad \text{e} \quad x_{n,r}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} < x_{n-1,r-1}^{(\alpha, \beta)}, \quad r = 2, \dots, n.$$

(2) *Se $\kappa < -1$ (ou $\kappa \leq -1$), então*

$$x_{n-1,r}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} < x_{n,r}^{(\alpha, \beta)}, \quad r = 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \kappa < x_{n,n}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} < x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}.$$

(3) *Se $\kappa > 1$ (ou $\kappa \geq 1$), então $x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função crescente de N .*

(4) *Se $\kappa < -1$ (ou $\kappa \leq -1$), então $x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de N .*

(5) *Se $N = 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ .*

(6) *Se $N > 0$ então $x_{n,r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função crescente de κ para κ variando no intervalo $(-\infty, \tilde{\kappa}^{(\alpha, \beta, N)}]$ ou no intervalo $[\tilde{\kappa}^{(\alpha, \beta, N)}, \infty)$, onde*

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}^{(\alpha, \beta, N)} &= 1 + \frac{\sqrt{[N(1 - \beta_2^{(\alpha, \beta)}) - (1 - \beta_1^{(\alpha, \beta)})]^2 + 4Nv_1^{(\alpha, \beta)}(1) - [N(1 - \beta_2^{(\alpha, \beta)}) - (1 - \beta_1^{(\alpha, \beta)})]}}{2N}, \\ \tilde{\kappa}^{(\alpha, \beta, N)} &= -1 - \frac{\sqrt{[N(1 + \beta_2^{(\alpha, \beta)}) - (1 + \beta_1^{(\alpha, \beta)})]^2 + 4Nv_1^{(\alpha, \beta)}(-1) - [N(1 + \beta_2^{(\alpha, \beta)}) - (1 + \beta_1^{(\alpha, \beta)})]}}{2N}. \end{aligned}$$

Aqui, $v_1^{(\alpha, \beta)}(z) = [(\beta_1^{(\alpha, \beta)} - z)(\beta_2^{(\alpha, \beta)} - z) - \alpha_2^{(\alpha, \beta)}]$ e, portanto, $v_1^{(\alpha, \beta)}(\pm 1) > 0$.

Demonstração: Os resultados das partes (2) e (4) seguem do Teorema 2.3 (partes (1) e (2), respectivamente). Também, os resultados das partes (5) e (6), que correspondem aos possíveis valores negativos de κ , seguem do Teorema 2.3 (partes (3) e (4), respectivamente).

Para obter os outros resultados do corolário, observemos que

$$\begin{aligned} \int p(x) d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(x) &= \frac{1}{N+1} \left\{ N\tilde{p}(-\kappa) + \frac{\mathcal{M}_I^{(\beta, \alpha, -\kappa)}[\tilde{p}]}{\mathcal{M}_I^{(\beta, \alpha, -\kappa)}[1]} \right\} \\ &= \int \tilde{p}(x) d\phi^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)}(x), \end{aligned}$$

onde $\tilde{p}(-x) = p(x)$. Portanto, $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(x) = P_n^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)}(-x)$, $n \geq 1$. Além disso, através da fórmula de Rodrigues (2.2.1), podemos observar que $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\beta, \alpha)}(-x)$ e, de (2.8.2), $\beta_n^{(\alpha, \beta)} = -\beta_n^{(\beta, \alpha)}$ para $n \geq 1$.

Portanto, para $\kappa \geq 1$, da parte (2) desse corolário,

$$x_{n-1, r}^{(\beta, \alpha)} < x_{n, r}^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)} < x_{n, r}^{(\beta, \alpha)}, \quad 1 \leq r < n \quad \text{e} \quad -\kappa < x_{n, n}^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)} < x_{n, n}^{(\alpha, \beta)}.$$

Como $x_{n, r}^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)} = -x_{n, n-r+1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ e $x_{n, r}^{(\beta, \alpha)} = -x_{n, n-r+1}^{(\alpha, \beta)}$ para $1 \leq r \leq n$, obtemos a parte (1).

Agora, da parte (4), se $\kappa \geq 1$, então $x_{n, r}^{(\beta, \alpha, -\kappa, N)}$ é uma função decrescente de N . Portanto, $x_{n, r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função crescente de N , o que prova a parte (3) do corolário.

Para mostrar a parte (5) quando $\kappa \geq 1$, temos, da parte (3) do Teorema 2.3, que $x_{n, r}^{(\beta, \alpha, \tilde{\kappa}, N)}$ é uma função decrescente de $\tilde{\kappa} = -\kappa$. Portanto, $x_{n, r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ .

Finalmente, usando a parte (6) deste corolário para $\kappa < -1$, temos que $x_{n, r}^{(\beta, \alpha, \tilde{\kappa}, N)}$ é uma função crescente de $\tilde{\kappa} = -\kappa$ para $\tilde{\kappa} \in (-\infty, \tilde{\kappa}^{(\beta, \alpha, N)}]$. Logo, obtemos que $x_{n, r}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ é uma função crescente de κ para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(\alpha, \beta, N)}, \infty)$. ■

2.8.2 Polinômios de Laguerre Generalizados

Sejam os números reais N e κ tais que $0 \leq N < \infty$ e $\kappa > 0$ (ou, excepcionalmente, $\kappa \geq 0$). Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ associados à medida $d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(-\kappa) + \frac{\mathcal{M}_L^{(\alpha, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}_L^{(\alpha, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (2.8.3)$$

onde p é qualquer polinômio e

$$\mathcal{M}_L^{(\alpha, \kappa)}[p] = \int_0^\infty p(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x + \kappa} dx.$$

Aqui, se $\kappa > 0$ então $\alpha > -1$ e, se $\kappa = 0$ então $\alpha > 0$. Logo, podemos estudar os zeros de $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ usando os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, lembrando que, na forma mônica, satisfazem à relação de recorrência (2.2.3),

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha)})L_n^{(\alpha)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha)}L_{n-1}^{(\alpha)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)} = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha)}$, onde

$$\beta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(n + \alpha), \quad n \geq 1. \quad (2.8.4)$$

Aplicando o Teorema 2.3 com κ substituído por $-\kappa$, obtemos o corolário enunciado a seguir.

Corolário 2.3.2. *Sejam $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os zeros de $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $L_n^{(\alpha)}$, respectivamente, organizados em ordem decrescente. Então, os seguintes resultados valem:*

- (1) $x_{n-1,r}^{(\alpha)} < x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, \dots, n-1$ e $-\kappa < x_{n,n}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,n}^{(\alpha)}$;
- (2) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de N para $N \in [0, \infty)$;
- (3) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, 0)}$ é uma função crescente de κ para $\kappa \in (0, \infty)$;
- (4) se $N > 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)}, \infty)$,

onde

$$\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)} = \frac{\sqrt{[N(3 + \alpha) - (1 + \alpha)]^2 + 4N(2 + \alpha)(1 + \alpha)} - [N(3 + \alpha) - (1 + \alpha)]}{2N}.$$

Observação 2.1. *O Corolário 2.3.2 também pode ser obtido através dos resultados do Corolário 2.3.1, usando a propriedade assintótica*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}(z) = L_n^{(\alpha)}(z), \quad (2.8.5)$$

com $\tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \left(\frac{1 - 1}{2^n} \right) P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2z}{\beta} \right)$.

De fato, através da relação de recorrência para os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(1 - 2\beta^{-1}z)$, podemos escrever

$$\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z) = \left(z - \frac{\beta}{2}(1 - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)})\right) \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) - \left(\frac{\beta^2}{4}\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\right) \tilde{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n \beta^n}{2^n} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{2z}{\beta}\right)$.

Podemos verificar (2.8.5) através dos coeficientes da relação de recorrência acima.

De (2.8.2) e (2.8.4), temos

$$\frac{\beta^2}{4}\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} \frac{\beta^2(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2[(2n+\alpha+\beta)^2-1]}.$$

Mas,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta^2(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2[(2n+\alpha+\beta)^2-1]} = 1$$

e, então,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{4}\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)}.$$

Do mesmo modo, temos que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2}(1 - \beta_n^{(\alpha,\beta)}) = \beta_n^{(\alpha)}$.

De (2.7.2), podemos escrever

$$\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}(z) = \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) - \frac{\beta}{2}b_{n-1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}(z) = \frac{(-1)^n \beta^n}{2^n} P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}\left(1 - \frac{2z}{\beta}\right)$. De (2.7.3) e com κ substituído por $1 + 2\beta^{-1}\kappa$, obtemos

$$-\frac{\beta}{2}b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = \frac{\beta}{2}(1 - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}) + \kappa - \frac{\frac{\beta^2}{4}\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)}}{-\frac{\beta}{2}b_{n-1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}, \quad n \geq 1.$$

Fazendo $\beta \rightarrow \infty$, temos

$$\tilde{b}_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = \beta_{n+1}^{(\alpha)} + \kappa - \frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha)}}{\tilde{b}_{n-1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}, \quad n \geq 1,$$

com

$$\tilde{b}_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = \beta_1^{(\alpha)} + \kappa + \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)\mathcal{M}_L^{(\alpha,\kappa)}[1]},$$

onde $\tilde{b}_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\beta}{2}b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}\right)$. Portanto, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}(z) = L_n^{(\alpha,\kappa,N)}(z)$. ■

2.8.3 Polinômios de Charlier Generalizados

Sejam os números reais N e κ tais que $0 \leq N < \infty$ e $\kappa > 0$. Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $C_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ associados à medida $d\psi^{(\alpha, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\psi^{(\alpha, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(-\kappa) + \frac{\mathcal{M}_C^{(\alpha, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}_C^{(\alpha, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (2.8.6)$$

onde p é um polinômio qualquer e

$$\mathcal{M}_C^{(\alpha, \kappa)}[p] = \int_0^\infty p(x) \frac{1}{x + \kappa} d\phi_C^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^\infty p(r) \frac{1}{r + \kappa} \frac{e^{-\alpha} \alpha^r}{r!}.$$

Aqui, $\alpha > 0$. É conhecido que a medida discreta $d\phi_C^{(\alpha)}$ é determinada e que os polinômios ortogonais associados $C_n^{(\alpha)}$ satisfazem (veja (2.3.1))

$$C_{n+1}^{(\alpha)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha)})C_n^{(\alpha)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha)}C_{n-1}^{(\alpha)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $C_0^{(\alpha)} = 1$ e $C_1^{(\alpha)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha)}$, onde

$$\beta_n^{(\alpha)} = n + \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n\alpha, \quad n \geq 1.$$

Estes são os polinômios de Charlier, vistos no Capítulo 2. Agora, Aplicando o Teorema 2.3 com κ substituído por $-\kappa$, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.3. *Sejam $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os zeros de $C_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $C_n^{(\alpha)}$, respectivamente, organizados em ordem decrescente. Então, seguem os resultados:*

- (1) $x_{n-1,r}^{(\alpha)} < x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, \dots, n-1$ e $-\kappa < x_{n,n}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,n}^{(\alpha)}$;
- (2) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de N para $N \in [0, \infty)$;
- (3) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, 0)}$ é uma função crescente de κ para $\kappa \in (0, \infty)$;
- (4) se $N > 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)}, \infty)$,

onde

$$\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)} = \frac{\sqrt{[N(\alpha + 1) - \alpha]^2 + 4N\alpha^2} - [N(\alpha + 1) - \alpha]}{2N}.$$

Capítulo 3

Zeros de polinômios que obedecem a uma relação de recorrência

Neste capítulo, estudaremos o comportamento dos zeros dos polinômios Q_m gerados pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

com $Q_0 = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos α_m e β_m são tais que $\alpha_{m+1} \neq 0$ e $\beta_m \neq 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$. O objetivo principal é encontrar limitantes para as regiões onde os zeros estão localizados, em função dos coeficientes da relação de recorrência. Os zeros serão estudados através do problema de autovalores associado a uma matriz de Hessenberg. Como casos especiais deste estudo, consideraremos os polinômios de Szegő, os polinômios conhecidos como para-ortogonais e os polinômios $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ com coeficientes complexos $b_k \neq 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Os resultados provenientes deste capítulo foram publicados este ano no artigo [36].

3.1 Zeros e suas representações como autovalores

A relação de recorrência (3.1) foi estudada por muitos autores quando

$$\alpha_{m+1} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_m < 0 \quad \text{para} \quad m \geq 1. \quad (3.1.1)$$

Citamos o artigo de Jones, Thron e Waadeland [24], como a motivação inicial para o estudo deste caso especial de relação de recorrência (3.1). Nele foi considerado o problema de momento forte (*strong moment problem*). Para uma referência mais recente, citamos o trabalho [40], no qual nos baseamos para desenvolver esta seção.

Da relação de recorrência (3.1), temos imediatamente que $Q_m(0) = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m \neq 0$, $m \geq 1$. Além disso, como (3.1) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \alpha_2 z &= (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z), \\ \alpha_{m+1} z &= (z + \beta_{m+1})\frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)}, \quad m \geq 2, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

obtemos o seguinte resultado

Lema 3.1. *Para todo $m \geq 1$, os polinômios consecutivos Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum.*

Demonstração: A prova deste lema é feita por indução. Seja $\omega \in \mathbb{C}$ um zero de Q_1 e Q_2 , ou seja, $Q_1(\omega) = Q_2(\omega) = 0$. Então, $\alpha_2\omega = 0$. Como $\alpha_2 \neq 0$ e $\omega = 0$ não é zero de nenhum Q_m , chegamos a uma contradição. Portanto, $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ não têm zero em comum.

Agora, seja $m \geq 2$ e suponha que Q_{m-1} e Q_m não tenham zeros em comum. Se $Q_m(\omega) = 0$, então $Q_{m-1}(\omega) \neq 0$ e, de (3.1.2),

$$Q_{m+1}(\omega) = -\alpha_{m+1}\omega Q_{m-1}(\omega) \neq 0.$$

Isto mostra que Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum. ■

Teorema 3.1. *Os zeros de Q_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_1 = 0$.

Demonstração: De (3.1), podemos escrever

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z + \beta_n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Então,

$$Q_n(z) = \det(z\mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n),$$

onde $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ são, respectivamente, as matrizes $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_n \end{bmatrix}.$$

Note que, como $\mathbf{A}_n$ é não-singular,

$$Q_n(z) = \det(\mathbf{A}_n) \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n).$$

Como $\det(\mathbf{A}_n) = 1$ e

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que Q_n é o polinômio característico (mônico) associado à matriz de Hessenberg inferior $\mathbf{H}_n = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n$. Isto completa a demonstração do teorema. ■

Podemos escrever, também, $Q_n(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1}) \det(\mathbf{A}_n)$. Portanto, Q_n é o polinômio característico associado à matriz $\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1}$ e, ainda, à matriz $(\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})^T =$

$(\mathbf{A}_n^{-1})^T \mathbf{B}_n^T$. Isto significa que os zeros de Q_n são, também, os autovalores da matriz de Hessenberg superior

$$(\mathbf{A}_n^{-1})^T \mathbf{B}_n^T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & -\beta_n \end{bmatrix},$$

onde $\gamma_m = \alpha_{m+1} - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots$.

No restante desta seção, faremos um estudo detalhado sobre a representação dos autovalores associados à matriz $\mathbf{H}_n$. Baseados no recente trabalho de Sri Ranga e Van Assche [40], faremos uma análise similar àquela desenvolvida pelos autores, mas com as hipóteses feitas sobre os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios Q_m como em (3.1) e mais a hipótese de que os autovalores $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, de $\mathbf{H}_n$ (isto é, os zeros de Q_n) são distintos.

Sejam $\hat{Q}_m(z) = (\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{m+1})^{-1} Q_m(z)$ e $\tilde{Q}_m(z) = z^{-m} Q_m(z)$, $1 \leq m \leq n$, e $\hat{Q}_0(z) = \tilde{Q}_0(z) = Q_0(z)$. Então, a relação de recorrência (3.1) para $m = 1, 2, \dots, n-1$ pode ser dada de duas formas diferentes

$$z[-\hat{Q}_{m-1}(z) + \hat{Q}_m(z)] = -\beta_{m+1} \hat{Q}_m(z) + \alpha_{m+2} \hat{Q}_{m+1}(z), \quad 1 \leq m \leq n-1$$

e

$$z[\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] = \alpha_{m+1} \tilde{Q}_{m-1}(z) - \beta_{m+1} \tilde{Q}_m(z), \quad 1 \leq m \leq n-1,$$

com $z[\hat{Q}_0(z)] = -\beta_1 \hat{Q}_0(z) + \alpha_2 \hat{Q}_1(z)$ e $z[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] = -\beta_1 \tilde{Q}_0(z)$. Na forma matricial, essas relações podem ser escritas, respectivamente, como

$$z\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z) + \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(z) \mathbf{e}_n \quad (3.1.3)$$

e

$$z\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z\tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T, \quad (3.1.4)$$

onde $\mathbf{e}_n$ é a n -ésima coluna da matriz identidade $n \times n$,

$$\hat{\mathbf{b}}(z) = [\hat{Q}_0(z), \hat{Q}_1(z), \dots, \hat{Q}_{n-1}(z)]^T \text{ e } \tilde{\mathbf{b}}(z) = [\tilde{Q}_0(z), \tilde{Q}_1(z), \dots, \tilde{Q}_{n-1}(z)]^T.$$

Conseqüentemente, de (3.1.3), como $z_{n,j}$ são também zeros de $\hat{Q}_n(z)$, temos

$$z_{n,j} \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}) = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}),$$

ou seja, $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ é um autovetor à direita de $\mathbf{H}_n = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n$ associado ao autovalor $z_{n,j}$. Além disso, como supomos que $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são distintos, os correspondentes autovetores à direita $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$, são todos linearmente independentes.

Agora, de (3.1.4) e como $z_{n,j}$ são também zeros de $\tilde{Q}_n(z)$, de modo análogo concluímos que

$$z_{n,j} \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{B}_n.$$

Logo,

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T z_{n,j} = [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n,$$

ou seja, o vetor $\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ é um autovetor à esquerda de $\mathbf{H}_n$ associado ao autovalor $z_{n,j}$. Embora não seja aqui relevante, talvez seja mais apropriado dizer que $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$, onde $\tilde{\mathbf{c}}(z) = \overline{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z)}$, é um autovetor à esquerda de $\mathbf{H}_n$, pois neste caso, temos $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})^* \mathbf{H}_n = \tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})^* z_{n,j}$. Aqui, $*$ representa o transposto conjugado. Novamente, existem n autovetores à esquerda linearmente independentes $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$, associados aos n autovalores distintos $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

É conhecido que o autovetor à esquerda e o autovetor à direita associados a autovalores diferentes são ortogonais. A multiplicação de (3.1.3), avaliado em w , à direita por $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T$ e a multiplicação de (3.1.4) à esquerda por $\hat{\mathbf{b}}(w)$ nos fornecem os seguintes sistemas

$$w \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T + \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \quad (3.1.5)$$

e

$$z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z \tilde{Q}_n(z) \hat{\mathbf{b}}(w) \mathbf{e}_n^T. \quad (3.1.6)$$

Sabemos que o traço de uma matriz quadrada, representado por $\text{tr } \mathbf{A}$, é a soma dos elementos da diagonal principal. Como $\text{tr } \mathbf{AB} = \text{tr } \mathbf{BA}$, subtraindo o traço de (3.1.6)

do traço de (3.1.5), temos

$$\begin{aligned} (w - z) \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{b}}(w)\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n) &= \operatorname{tr}(\alpha_{n+1}\tilde{Q}_n(w)\mathbf{e}_n\tilde{\mathbf{b}}(z)^T) - \operatorname{tr}(z\tilde{Q}_n(z)\tilde{\mathbf{b}}(w)\mathbf{e}_n^T) \\ &= \alpha_{n+1}\tilde{Q}_n(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) - z\tilde{Q}_n(z)Q_{n-1}(w). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} \left\{ \tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z) \right\} \tilde{Q}_m(w) &+ \tilde{Q}_{n-1}(z)\tilde{Q}_{n-1}(w) \\ &= \frac{z\tilde{Q}_n(z)\tilde{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1}\tilde{Q}_n(w)\tilde{Q}_{n-1}(z)}{z - w}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Esta relação é uma espécie da fórmula de Cristoffel-Darboux. O termo do lado esquerdo desta fórmula pode ser identificado como $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{b}}(w) = \tilde{\mathbf{c}}(z)^* \tilde{\mathbf{b}}(w)$ e isto confirma a ortogonalidade do autovetor à esquerda $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$ e do autovetor à direita $\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,k})$ quando $j \neq k$. Em (3.1.7), fazendo $w \rightarrow z$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} \left\{ \tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z) \right\} \tilde{Q}_m(z) &+ \tilde{Q}_{n-1}(z)\tilde{Q}_{n-1}(z) \\ &= \alpha_{n+1}\tilde{Q}'_n(z)\tilde{Q}_{n-1}(z) - z\tilde{Q}_n(z)\tilde{Q}'_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Assim, para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$,

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]_j^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,k})^T [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})] = \lambda_{n,j}^{-1} \delta_{j,k}, \quad (3.1.8)$$

onde $\lambda_{n,j}^{-1} = \alpha_{n+1}\tilde{Q}'_n(z_{n,j})\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})$ e $\delta_{j,k}$ é o delta de Kronecker. Como os zeros de Q_n são simples (distintos) e, do Lema 3.1, Q_n e Q_{n-1} não têm zeros em comum, então $\lambda_{n,j} \neq 0$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, podemos dizer que as duas seqüências finitas $\{\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$ e $\{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$ são biortogonais.

Se definirmos $\mathbf{P}_n$, matriz não-singular $n \times n$, por

$$\mathbf{P}_n = \left[\frac{\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,1})}{\alpha_{n+1}\tilde{Q}'_n(z_{n,1})}, \frac{\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,2})}{\alpha_{n+1}\tilde{Q}'_n(z_{n,2})}, \dots, \frac{\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,n})}{\alpha_{n+1}\tilde{Q}'_n(z_{n,n})} \right], \quad (3.1.9)$$

então sua inversa (a matriz que satisfaz $\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{P}_n = \mathbf{I}_n$) é

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \left[\frac{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,1})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,1})}, \frac{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,2})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,2})}, \dots, \frac{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,n})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,n})} \right]^T, \quad (3.1.10)$$

pois, de (3.1.8),

$$\frac{[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})} \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})}{\alpha_{n+1} \tilde{Q}'_n(z_{n,j})} = \delta_{j,k}.$$

Se $\hat{p}_{k,j}$ e $\tilde{p}_{k,j}$ são os elementos da k -ésima linha e j -ésima coluna das matrizes $\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{P}_n^{-1}$, respectivamente, então

$$\hat{p}_{k,j} = \frac{\tilde{Q}_{k-1}(z_{n,j})}{\alpha_{n+1} \tilde{Q}'_n(z_{n,j})} \quad \text{e} \quad \tilde{p}_{k,j} = \frac{\tilde{Q}_{j-1}(z_{n,k}) - \tilde{Q}_j(z_{n,k})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,k})}. \quad (3.1.11)$$

Como $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})$ é o autovetor à direita de $\mathbf{H}_n$ e $\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ é o autovetor à esquerda de $\mathbf{H}_n$, temos

$$\mathbf{H}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = z_{n,k} \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \mathbf{H}_n = [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T z_{n,j}. \quad (3.1.12)$$

Então, multiplicando (3.1.12) por $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})$ à direita,

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = z_{n,j} [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}).$$

Logo, de (3.1.8),

$$\frac{[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})} \mathbf{H}_n \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})}{\alpha_{n+1} \tilde{Q}'_n(z_{n,j})} = z_{n,j} \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, com as matrizes $\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{P}_n^{-1}$, podemos escrever o problema do autovalor associado a $\mathbf{H}_n$ como

$$\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{H}_n \mathbf{P}_n = \mathbf{\Xi}_n, \quad (3.1.13)$$

onde $\mathbf{\Xi}_n$ é a matriz diagonal contendo os autovalores $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$.

3.2 Limitantes para os zeros

Nosso objetivo nesta seção é encontrar limitantes, em função dos coeficientes da relação de recorrência (3.1), para as regiões onde os zeros estão localizados. Para tal, precisaremos de um resultado clássico da teoria da Álgebra Linear, dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.2 (Teorema de Gerschgorin). *Cada autovalor λ (real ou complexo) de uma matriz $\mathbf{B}$, $n \times n$, satisfaz a pelo menos uma das desigualdades,*

$$|\lambda - b_{jj}| \leq r_j, \quad \text{onde } r_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |b_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja, cada autovalor pertence a pelo menos um dos discos com centro b_{jj} e raio r_j no plano complexo, onde b_{ij} são os elementos da matriz $\mathbf{B}$.

A prova deste resultado pode ser encontrado, por exemplo, em Noble e Daniel [31, p. 317].

Primeiramente, definimos a região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, onde $\lambda_2 \geq \lambda_1$ e $\tau > 0$, por

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \tau, \lambda_1 - \sqrt{\tau^2 - y^2} \leq x \leq \lambda_2 + \sqrt{\tau^2 - y^2}\}.$$

Seja $\mathbf{D}_\delta$ a matriz diagonal $n \times n$ com diagonal $(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$, $\delta \neq 0$. Então, os autovalores de $\mathbf{H}_n$, definida de acordo com o Teorema 3.1, são os mesmos que o da matriz $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n \mathbf{D}_\delta^{-1}$, dada por

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 \delta^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 \delta & \eta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 \delta^{n-3} & \eta_2 \delta^{n-4} & \cdots & \alpha_{n-1} \delta^{-1} & 0 \\ \eta_1 \delta^{n-2} & \eta_2 \delta^{n-3} & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \delta^{-1} \\ \eta_1 \delta^{n-1} & \eta_2 \delta^{n-2} & \cdots & \eta_{n-1} \delta & \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_1 = 0$. Deste modo, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Para todo $n \geq 2$, sejam $\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$ e $\eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$. Sejam*

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}}, \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)} + \alpha_n^M}.$$

Então, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão no disco $|z| \leq \hat{\rho}_n$, onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Se η_k , $k = 1, 2, \dots, n$, são todos reais, então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão no interior da região $W(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$, onde

$$\eta_{n,1} = \min\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \eta_{n,2} = \max\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\} \quad e$$

$$\tilde{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(\eta_{n,1} - \eta_n^M)} + \alpha_n^M}{2(|\eta_{n,1}| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Suponha que $0 < \delta < 1$. Pelo Teorema 3.2 (Teorema de Gerschgorin), temos que os autovalores da matriz $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n \mathbf{D}_\delta^{-1}$, isto é, da matriz $\mathbf{H}_n$, estão em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$, onde $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ é o disco fechado com centro η_k e raio $\rho_k(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}$. Lembramos que $\alpha_1 = 0$. Mas,

$$\rho_1(\delta) = |\eta_1| \sum_{r=1}^{n-1} \delta^r = |\eta_1| \delta \sum_{r=0}^{n-2} \delta^r < |\eta_1| \delta \sum_{r=0}^{\infty} \delta^r = |\eta_1| \frac{\delta}{1-\delta} = \tilde{\rho}_1(\delta)$$

e, analogamente para $2 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho_k(\delta) &\leq \frac{\delta}{1-\delta} |\eta_k| + \frac{1}{\delta} |\alpha_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M \\ &= -\eta_n^M + \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M, \end{aligned}$$

onde $\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$ e $\eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$. Assim, todos $\Delta_k^{(n)}(\delta)$, $2 \leq k \leq n$, estão no disco

$$|z| \leq \tilde{\rho}_n(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M$$

e, além disso, $\Delta_1^{(n)}(\delta)$ está no disco $|z| < \hat{\rho}_1(\delta) = \frac{1}{1-\delta} |\eta_1|$. Escolhemos o valor de δ que minimiza $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\}$. Este valor será d_2 ou d_1 dependendo de $\eta_n^M \ll |\eta_1|$, ou não. Isto fornece a primeira parte do teorema.

Para obter a próxima parte, note que o disco $\Delta_1^{(n)}(\delta)$ está no interior do disco $|z - \eta_1| < \hat{\rho}_1(\delta)$ e, para qualquer k , $2 \leq k \leq n$, o disco $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ está no interior do disco $|z - \eta_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta)$. Escolhemos para δ o valor que minimiza $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\}$, ou seja, d_3 ou d_1 dependendo de $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ ou não. Como os centros η_k de todos os discos $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ estão sobre uma reta (neste caso a reta real), obtemos a última parte do teorema para o polinômio Q_n .

Finalmente, como o zero de $Q_1(z)$ é η_1 , ele certamente está em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$. Se p é tal que $1 < p < n$, então os autovalores de H_p (isto é, os zeros de Q_p) estão em $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta)$. Como $\Delta_k^{(p)}(\delta) \subset \Delta_k^{(n)}(\delta)$ para $1 \leq k \leq p$, observe que os zeros de Q_p estão todos em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$. Portanto, os resultados do teorema também são válidos para os polinômios Q_k , $1 \leq k < n$. ■

Teorema 3.4 (Saff e Varga). *Sejam α_{k+1} e β_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ números reais positivos. Seja*

$$\tau = \min\{-\eta_k = \beta_k - \alpha_k : k = 1, 2, \dots, n\},$$

com $\alpha_1 = 0$. Então, se $\tau > 0$, a região parabólica

$$\mathcal{P}^+(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau + x), x > -\tau\},$$

não contém zeros dos polinômios $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$.

Este teorema está demonstrado em Saff e Varga [34].

No próximo resultado, mostramos algumas propriedades sobre os zeros dos polinômios Q_n , quando os α_n são positivos e todos os β_n são iguais a uma constante também positiva. A demonstração deste teorema, quando $\beta_n = 1$, é dada em [10].

Teorema 3.5. *Sejam $\beta_k = \beta > 0$ e $\alpha_{k+1} > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Então, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, são distintos (exceto para um possível zero duplo $z = \beta$) e estão em $\mathcal{C}(\beta) \cup (0, \infty)$, onde*

$$\mathcal{C}(\beta) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Em particular, se $\{\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}\}_{k=1}^{n-1}$ é uma sequência encadeada positiva, então todos os zeros são distintos e estão no círculo aberto $\mathcal{C}(\beta)$.

Demonstração: Seja a transformação

$$x = x(\beta; z) = \frac{1}{2}(\beta^{-1/2}z^{1/2} + \beta^{1/2}z^{-1/2}).$$

Então os polinômios $P_k(x) = (4\beta z)^{-k/2}Q_k(z)$, $0 \leq k \leq n$, satisfazem $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}P_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (3.2.2)$$

Destes resultados, podemos provar que os zeros de P_k são reais, distintos e simétricos com relação à origem. Se escrevermos $P_{2k}(x) = \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k,j}^2)$ e $P_{2k+1}(x) = x \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k+1,j}^2)$, então, de $Q_k(z) = (4\beta z)^{k/2} P_k(x(\beta; z))$, temos que

$$Q_{2k}(z) = \prod_{j=1}^k [(z - z_{2k,j})(z - \beta^2/z_{2k,j})],$$

$$Q_{2k+1}(z) = (z + \beta) \prod_{j=1}^k [(z - z_{2k+1,j})(z - \beta^2/z_{2k+1,j})],$$

onde $z_{k,j}/\beta = (2x_{k,j}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1)}$. Conseqüentemente, se $x_{k,j}^2 < 1$, então $z_{k,j}$ e $\beta^2/z_{k,j}$ são pares conjugados de zeros de Q_k no círculo $\mathcal{C}(\beta)$ e, se $x_{k,j}^2 > 1$, então eles são dois zeros positivos de Q_k . Deste modo, concluímos que os zeros de Q_k estão no círculo $\mathcal{C}(\beta)$ ou na reta real positiva. Se $z = \beta$ é um zero de Q_k , então ele é um zero de multiplicidade 2.

Agora, suponhamos que $\{\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}\}_{k=1}^{n-1}$ é uma seqüência encadeada positiva. Então, de (3.2.2), como $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta x^2} = \frac{P_k(x)}{xP_{k+1}(x)}(1 - \frac{P_{k+1}(x)}{xP_k(x)})$, pelo Lema 2.2 temos que todos os zeros de P_k , $1 \leq k \leq n$, estão em $(-1, 1)$. Portanto, neste caso, todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão no círculo aberto $\mathcal{C}(\beta)$. ■

O próximo resultado ainda considera β_n uma constante positiva, mas agora para casos particulares de α_n , que continua positivo. Na verdade, este resultado considera casos especiais do teorema anterior.

Corolário 3.5.1. *Seja $\beta_k = \beta > 0$, $1 \leq k \leq n$. As seguintes propriedades são verdadeiras:*

(1) *se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$, $1 \leq k \leq n-1$, então todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão em $\mathcal{C}(\beta)$;*

(2) *em particular, para $\epsilon > 0$, se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta - \epsilon$, $1 \leq k \leq n-1$, então os zeros de qualquer Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão sobre o arco de $\mathcal{C}(\beta)$ que está fora da região parabólica*

$$\mathcal{P}^+(\epsilon) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\epsilon(\epsilon + x), x > -\epsilon\};$$

(3) *novamente, se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$, $1 \leq k \leq n-1$, seja $\kappa_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\alpha_{k+1}/\beta}$. Então, todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão sobre o arco aberto*

$$\mathcal{C}(\beta, \theta_n) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, \theta_n < \theta < 2\pi - \theta_n\},$$

onde $\theta_n = 2 \arccos(\kappa_n \cos(\frac{\pi}{n+1}))$;

(4) para $\epsilon > 0$, suponha que $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta + \epsilon$, $1 \leq k \leq n-1$. Se Q_n têm zeros fora de $\mathcal{C}(\beta)$, então eles estão no intervalo $(\beta^2/b, b)$, onde $b = (\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2$.

Demonstração: Como $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$, então $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \leq \frac{1}{4} < 1$. Podemos encontrar uma sequência $\{g_k\}$ tal que $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} = (1 - g_{k-1})g_k$ com $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_k < 1$, $k = 1, \dots, n$. Isto é fácil de verificar, se tomarmos, por exemplo, $g_0 = 0$. Logo, $\{\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}\}$ é uma sequência encadeada e, então, pelo Teorema 3.5 segue a parte (1) do corolário.

Agora, como $\beta_k = \beta > 0$ e $\alpha_{k+1} > 0$, $k = 1, \dots, n$, então pelo Teorema 3.5, os zeros de Q_k estão sobre $\mathcal{C}(\beta) \cup (0, \infty)$. Mas, se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta - \epsilon$, para $\epsilon > 0$, então

$$\epsilon \leq \min\{\beta_k - \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n\},$$

com $\alpha_1 = 0$. Logo, como $\epsilon > 0$, pelo Teorema 3.4 (Teorema de Saff e Varga) temos que os zeros de Q_k estão fora da região

$$\mathcal{P}^+(\epsilon) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\epsilon(\epsilon + x), \quad x > -\epsilon\}.$$

Portanto, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão sobre o arco de $\mathcal{C}(\beta)$ que está fora da região parabólica $\mathcal{P}^+(\epsilon)$.

Para obtermos a terceira parte deste corolário, consideremos os polinômios $P_k(x) = (4\beta z)^{-k/2} Q_k(z)$, onde $x = x(\beta; z) = \frac{1}{2}(\beta^{-1/2} z^{1/2} + \beta^{1/2} z^{-1/2})$. Como já foi mostrado, eles satisfazem à relação de recorrência

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$. Conseqüentemente, de Ismail e Li [20, Teor. 2 e 3], os zeros de $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão no intervalo $(-\hat{x}, \hat{x})$, onde $\hat{x} = \cos(\frac{\pi}{n+1}) \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\alpha_{k+1}/\beta} = \kappa_n \cos(\frac{\pi}{n+1})$. Pela parte (1), já que os zeros de Q_k estão em $\mathcal{C}(\beta)$, então, para $z = \beta e^{i\theta}$ (zero de Q_k), temos que $\theta = \theta(x) = 2 \arccos(x)$, onde x é um zero de P_k . Deste modo, temos que $\theta_n = \theta(\hat{x}) = 2 \arccos(\kappa_n \cos(\frac{\pi}{n+1}))$ e $\theta(-\hat{x}) = 2\pi - \theta_n$. Logo, como os zeros de $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão no intervalo $(-\hat{x}, \hat{x})$, então os zeros de $Q_k(z) = (4\beta z)^{k/2} P_k(x(\beta; z))$, $1 \leq k \leq n$, estão sobre o arco aberto

$$\mathcal{C}(\beta, \theta_n) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, \quad \theta_n < \theta < 2\pi - \theta_n\},$$

onde $\theta_n = 2 \arccos(\kappa_n \cos(\frac{\pi}{n+1}))$.

Para obter a última parte, note que todos os zeros de $P_k(x) = (4\beta z)^{-k/2} Q_k(z)$ estão no intervalo $(-\hat{x}, \hat{x})$, onde $\hat{x} = \cos(\frac{\pi}{n+1}) \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\alpha_{k+1}/\beta}$. Mas, como por hipótese $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta + \epsilon$, $1 \leq k \leq n-1$, então $\max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\alpha_{k+1}/\beta} = \sqrt{(\beta + \epsilon)/\beta}$. Além disso, $-1 \leq \cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq 1$. Logo, os zeros de $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão no intervalo $(-\sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{\beta}}, \sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{\beta}})$. Conseqüentemente, como a aplicação $Q_k(z) = (4\beta z)^{k/2} P_k(x(\beta; z))$ tem zeros $z_{k,j}$ e $\beta^2/z_{k,j}$, onde $z_{k,j}/\beta = (2x_{k,j}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1)}$ (veja prova do Teorema 3.5) e, ainda, como $x_{k,j}^2 > 1$, então esses zeros são positivos e estão no intervalo $(\beta^2/b, b)$, onde $b = (\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2$. ■

A seguir, vamos estudar os zeros de polinômios através da representação de autovalores (3.1.13) associada com a correspondente matriz de Hessenberg.

Teorema 3.6. *Dada a relação de recorrência de três termos (3.1) suponha que todos os zeros $z_{n,j}$ de Q_n (autovalores de $\mathbf{H}_n$) são distintos e que as matrizes $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_n^{-1}$ e $\mathbf{\Xi}_n$ são dadas, respectivamente, pelas equações (3.1.9), (3.1.10) e (3.1.13). Considere a relação de recorrência de três termos perturbada*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.2.3)$$

com $Q_0^\epsilon = 1$ e $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$, onde os números complexos α_m^ϵ e β_m^ϵ são tais que $|\alpha_m^\epsilon - \alpha_m| \leq \epsilon$, $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta_m^\epsilon - \beta_m| \leq \epsilon$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$. Aqui, ϵ é um número positivo.

Seja $\mathbf{H}_n^\epsilon$ a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência (3.2.3) definida de acordo com o Teorema 3.1, cujos autovalores são os zeros do polinômio Q_n^ϵ . Então, para qualquer zero w de Q_n^ϵ ,

$$\min_{1 \leq j \leq n} |w - z_{n,j}| \leq \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma subordinada em $\mathbb{C}^n$.

Demonstração: Se w é igual a algum dos zeros de Q_n , então o resultado é trivial. Conseqüentemente, vamos supor que w não é zero de Q_n . Seja $\mathbf{u}$ o autovetor de $\mathbf{H}_n^\epsilon$ associado ao autovalor w . Logo,

$$\mathbf{H}_n^\epsilon \mathbf{u} - w \mathbf{u} = -(\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n) \mathbf{u}.$$

De (3.1.13), a relação acima pode ser escrita como $\mathbf{P}_n(\Xi_n - w\mathbf{I}_n)\mathbf{P}_n^{-1}\mathbf{u} = -(\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n)\mathbf{u}$ e, assim,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{P}_n(\Xi_n - w\mathbf{I}_n)^{-1}\mathbf{P}_n^{-1}(\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n)\mathbf{u}.$$

Tomando qualquer norma subordinada, temos

$$\|(\Xi_n - w\mathbf{I}_n)^{-1}\|^{-1} \leq \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|.$$

Como a matriz $(\Xi_n - w\mathbf{I}_n)^{-1}$ é diagonal, segue o resultado do teorema. $\blacksquare$

Temos que

$$\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \eta'_1 - \eta_1 & \alpha'_2 - \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta'_1 - \eta_1 & \eta'_2 - \eta_2 & \alpha'_3 - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta'_1 - \eta_1 & \eta'_2 - \eta_2 & \eta'_3 - \eta_3 & \cdots & \alpha'_{n-1} - \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta'_1 - \eta_1 & \eta'_2 - \eta_2 & \eta'_3 - \eta_3 & \cdots & \eta'_{n-1} - \eta_{n-1} & \alpha'_n - \eta_n \\ \eta'_1 - \eta_1 & \eta'_2 - \eta_2 & \eta'_3 - \eta_3 & \cdots & \eta'_{n-1} - \eta_{n-1} & \eta'_n - \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta'_m - \eta_m = (\alpha'_m - \alpha_m) + (\beta'_m - \beta_m)$, $m = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha'_1 = \alpha_1 = 0$. Então, se $|\alpha'_m - \alpha_m| \leq \epsilon$, $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta'_m - \beta_m| \leq \epsilon$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$, com $\epsilon > 0$, temos

$$|\eta'_m - \eta_m| \leq 2\epsilon, \quad m = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad |\eta'_1 - \eta_1| \leq \epsilon.$$

Assim, encontramos os seguintes resultados

$$\|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\|_\infty \leq (2n - 1)\epsilon \quad \text{e} \quad \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\|_1 \leq (2n - 1)\epsilon. \quad (3.2.4)$$

Corolário 3.6.1. *Seja $\beta > 0$ e considere a relação de recorrência de três termos*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.2.5)$$

com $Q_0^\epsilon = 1$ e $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$, onde os números complexos α_m^ϵ e β_m^ϵ são tais que $|\operatorname{Im}(\alpha_m^\epsilon)| \leq \epsilon$, $0 < \operatorname{Re}(\alpha_m^\epsilon) \leq \beta$ para $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ para $m = 1, 2, 3, \dots, n$. Aqui ϵ é um número positivo.

Seja $\mathbf{H}'_n$, definida de acordo com o Teorema 3.1, a matriz de Hessenberg associada à relação (3.2.5), cujos autovalores são os zeros do polinômio Q_n^ϵ . Considere a relação

de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta)Q_m(z) - \operatorname{Re}(\alpha'_{m+1})zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $Q_0 = 1$, $Q_1(z) = z + \beta$. Para esta relação de recorrência, sejam $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{P}_n^{-1}$ as matrizes associadas definidas de acordo com o Teorema 3.1 e as equações (3.1.9) e (3.1.10). Então, todos os zeros de Q_n^c estão no anel

$$\zeta(\beta - \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|) \leq |z| \leq \beta + \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário.

Demonstração: Como os zeros de Q_n são distintos, pelo Teorema 3.6 temos que

$$\min_{1 \leq j \leq n} |z - z_{n,j}| \leq \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|,$$

para qualquer zero z de Q_n^c . Mas, pelo Corolário 3.5.1 parte (1), os zeros de Q_n estão sobre o círculo $|z| = \beta$, que é uma consequência de $0 < \operatorname{Re}(\alpha'_m) \leq \beta$ para $m = 2, 3, \dots, n$. Então, todos os zeros de Q_n^c estão no anel

$$\zeta(\beta - \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|) \leq |z| \leq \beta + \|\mathbf{H}'_n - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. ■

Observação 3.1. Em adição a $|\beta'_m - \beta| \leq \epsilon$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$, a condição $|\operatorname{Im}(\alpha'_m)| \leq \epsilon$ para $m = 2, 3, \dots, n$, também possibilita fazermos uso dos limitantes superiores dados em (3.2.4) se são escolhidas normas apropriadas.

Agora, consideremos o seguinte caso especial de relação de recorrência de três termos para o qual as matrizes $\mathbf{\Xi}_n$, $\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{P}_n^{-1}$ podem ser explicitamente encontradas. Com $\beta > 0$, sejam os polinômios $\{Q_m(\beta; z)\}_{m=0}^n$ dados por

$$Q_{m+1}(\beta; z) = (z + \beta)Q_m(\beta; z) - \beta z Q_{m-1}(\beta; z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $Q_0(\beta; z) = 1$, $Q_1(\beta; z) = z + \beta$. Denotemos a matriz de Hessenberg associada a esta relação de recorrência (dada de acordo com o Teorema 3.1) por $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$.

Temos que $Q_k(\beta; z) = (z^{k+1} - \beta^{k+1})/(z - \beta)$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Os zeros de $Q_n(\beta; z)$ (isto é, os autovalores de $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$) são $z_{n,j} = z_{n,j}^{(\beta)} = \beta e^{i \frac{2j\pi}{n+1}}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\beta; z_{n,j}) &= \beta^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n+1} \right)} e^{i \frac{kj\pi}{n+1}}, \\ \tilde{Q}_k(\beta; z_{n,j}) &= z_{n,j}^k Q_k(\beta; z_{n,j}) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n+1} \right)} e^{-i \frac{kj\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.1.11) os elementos $\hat{p}_{k,j}^{(\beta)}$ e $\tilde{p}_{k,j}^{(\beta)}$ da k -ésima linha e j -ésima coluna das correspondentes matrizes $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{(\beta)}$ e $(\mathbf{P}_n)^{-1} = (\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}$ são, respectivamente,

$$\hat{p}_{k,j}^{(\beta)} = \frac{2i}{n+1} \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) e^{-i \frac{(2n-k)j\pi}{n+1}} \quad \text{e} \quad \tilde{p}_{k,j}^{(\beta)} = e^{-i \frac{2(jn-1)k\pi}{n+1}}. \quad (3.2.6)$$

Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 3.2.

$$\|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_\infty = n,$$

$$\|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_1 = \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_\infty = \frac{2}{n+1} \sigma_n,$$

$$\text{onde } \sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| \right\} \leq \sqrt{n(n+1)/2}.$$

Demonstração: A primeira parte do lema segue diretamente de (3.2.6). Também de (3.2.6),

$$\|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_1 = \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_\infty = \frac{2}{n+1} \sigma_n,$$

com $\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| \right\}$. Através da desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| &\leq \left(\sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^{1/2} \\ &= \left(n \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Mas, $\sum_{j=0}^n e^{i \frac{2kj\pi}{n+1}} = \frac{1 - e^{i \frac{2k(n+1)\pi}{n+1}}}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}} = 0$. Então,

$$\sum_{j=0}^n \cos \left(\frac{2kj\pi}{n+1} \right) = -1,$$

que é equivalente a

$$\sum_{j=0}^n \left(1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right) = -1.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^n \operatorname{sen}^2 \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) = \frac{n+1}{2}.$$

Portanto, $\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left(\frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| \right\} \leq \sqrt{n(n+1)/2}$. ■

Corolário 3.6.2. *Seja $\beta > 0$ e considere a relação de recorrência de três termos*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $Q_0^\epsilon = 1$ e $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$, onde os números complexos α_m^ϵ e β_m^ϵ são tais que $|\alpha_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ para $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ para $m = 1, 2, 3, \dots, n$. Aqui ϵ é um número positivo.

Seja $\mathbf{H}_n^\epsilon$, definida de acordo com o Teorema 3.1, a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência acima, cujos autovalores são os zeros do polinômio Q_n^ϵ . Então, os zeros de Q_n^ϵ estão no anel

$$\zeta \left(\beta - \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \right) \leq |z| \leq \beta + \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. O número σ_n é como no Lema 3.2.

Demonstração: Considere a relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta)Q_m(z) - \beta z Q_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com $Q_0 = 1$, $Q_1(z) = z + \beta$, ou seja, $Q_m(z) = Q_m(\beta; z)$. Então, para esta relação $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$, $\mathbf{P}_n^{(\beta)}$ e $(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}$ são as matrizes associadas. Logo, pelo Corolário 3.6.1,

$$\zeta \left(\beta - \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\| \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\| \right) \leq |z| \leq \beta + \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\| \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|.$$

Portanto, pelo Lema 3.2, os zeros de Q_n^ϵ estão no anel

$$\zeta \left(\beta - \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \right) \leq |z| \leq \beta + \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|. \quad \blacksquare$$

3.3 Polinômios de Szegő e para-ortogonais

Seja $d\nu(z)$ uma medida positiva no círculo unitário. Isto significa que $\nu(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não-decrescente com infinitos pontos de aumento, tal que os momentos

$$\mu_m^{(\nu)} = \int z^m d\nu(z) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\nu(e^{i\theta}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

existem. Consideremos os polinômios de Szegő $\{S_n^{(\nu)}\}$ associados à medida $d\nu(z)$ definido por

$$\int S_n^{(\nu)}(z) \overline{S_m^{(\nu)}(z)} d\nu(z) = 0, \quad n \neq m.$$

Esses polinômios foram introduzidos por Szegő (veja, por exemplo [42]).

Os polinômios de Szegő são conhecidos por satisfazerem a um sistema de relações de recorrência, dados aqui em termos dos polinômios mônicos,

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(\nu)}(z) &= zS_n^{(\nu)}(z) + a_{n+1}S_n^{(\nu)*}(z), \\ \left(1 - |a_{n+1}^{(\nu)}|^2\right) zS_n^{(\nu)}(z) &= S_{n+1}^{(\nu)}(z) - a_{n+1}^{(\nu)}S_{n+1}^{(\nu)*}(z), \end{aligned} \quad n \geq 0, \quad (3.3.1)$$

onde $S_n^{(\nu)*}(z) = z^n \overline{S_n^{(\nu)}(1/\bar{z})}$ são os polinômios recíprocos. Os números $a_n^{(\nu)} = S_n^{(\nu)}(0)$, $n \geq 1$, são conhecidos como os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő.

Os coeficientes de reflexão têm a propriedade $|a_n^{(\nu)}| < 1$ para $n \geq 1$. Além disso, os zeros dos polinômios de Szegő estão no disco unitário aberto.

Se os coeficientes de reflexão satisfazem $0 < |a_n^{(\nu)}| < 1$, então os polinômios de Szegő também satisfazem

$$S_{n+1}^{(\nu)}(z) = \left(z + \frac{a_{n+1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}\right) S_n^{(\nu)}(z) - \frac{a_{n+1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} (1 - |a_n^{(\nu)}|^2) z S_{n-1}^{(\nu)}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.3.2)$$

onde $S_1^{(\nu)}(z) = (z + \frac{a_1^{(\nu)}}{a_0^{(\nu)}})$, com $a_0^{(\nu)} = 1$. Conseqüentemente, esses polinômios satisfazem a uma relação de recorrência de três termos da forma (3.1) com $\beta_n = \frac{a_n^{(\nu)}}{a_{n-1}^{(\nu)}}$, e $\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} (1 - |a_n^{(\nu)}|^2)$, $n \geq 1$.

Em 1989, Jones, Njåstad e Thron [21] estudaram os polinômios $S_n^{(\nu)}(z) + \omega_n S_n^{(\nu)*}(z)$, onde $|\omega_n| = 1$, que denominaram de polinômios para-ortogonais. Consideremos dois

casos especiais de polinômios para-ortogonais

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n^{(\nu)}(z) + S_n^{(\nu)*}(z)}{1 + S_n^{(\nu)}(0)} \quad \text{e} \quad (z-1)R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}^{(\nu)}(z) + S_{n+1}^{(\nu)*}(z)}{1 + S_{n+1}^{(\nu)}(0)}, \quad (3.3.3)$$

para $n \geq 0$. Os denominadores são escolhidos de maneira que os polinômios sejam mônicos.

De (3.3.3), temos $2S_n^{(\nu)}(z) = (1 + a_n^{(\nu)})R_n^{(1)}(z) + (1 - a_n^{(\nu)})(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z)$, $n \geq 1$. Mas, de (3.3.1), $(1 - |a_{n+1}^{(\nu)}|^2)zS_n^{(\nu)}(z) = S_{n+1}^{(\nu)}(z) - a_{n+1}^{(\nu)}S_{n+1}^{(\nu)*}(z)$ para $-1 < a_n^{(\nu)} < 1$. Assim, somando e subtraindo $S_n^{(\nu)*}(z) + a_n^{(\nu)}S_n^{(\nu)}(z)$ do lado direito desta igualdade, obtemos

$$2zS_{n-1}^{(\nu)}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \quad (3.3.4)$$

Se $-1 < a_n^{(\nu)} < 1$, então os polinômios mônicos $R_n^{(i)}$, $(i = 1, 2)$ satisfazem $R_0^{(i)} = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z + 1$ e

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - \alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.3.5)$$

com $\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + a_{n+1}^{(\nu)})(1 - a_n^{(\nu)}) > 0$ e $\alpha_{n+1}^{(2)} = (1 - a_{n+1}^{(\nu)})(1 + a_n^{(\nu)}) > 0$, $n \geq 1$. Este último resultado é atribuído a Delsarte e Genin [15]. Note que os coeficientes de reflexão a_n são reais se, e somente se, a medida $d\nu(z)$ satisfaz à simetria $d\nu(1/z) = \overline{d\nu(z)}$. Portanto, se $-1 < a_n < 1$, então os polinômios para-ortogonais $R_n^{(i)}$ satisfazem a uma relação de recorrência da forma (3.1) com $\beta_n = 1$ e $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{(i)}$, $n \geq 1$.

Ainda em [21], Jones, Njåstad e Thron mostraram que os zeros dos polinômios para-ortogonais são distintos e estão no círculo unitário. Verifiquemos isto para as duas seqüências de polinômios para-ortogonais $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ definidos por (3.3.3). Como $-1 < a_n^{(\nu)} < 1$, na relação de recorrência (3.3.5) para esses polinômios, os coeficientes $\{\frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(1)}\}$ e $\{\frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(2)}\}$ são seqüências encadeadas positivas com as respectivas seqüências de parâmetros dadas por $\{g_n^{(1)} = \frac{1-a_n^{(\nu)}}{2}\}$ e $\{g_n^{(2)} = \frac{1+a_{n+1}^{(\nu)}}{2}\}$, isto é,

$$(1 - g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)} = \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(1)}, \quad (1 - g_{n-1}^{(2)})g_n^{(2)} = \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(2)}, \quad (3.3.6)$$

para $n \geq 1$, com $g_0^{(1)} = 0$ e $0 < g_0^{(2)} = 1 - \alpha_2^{(1)} = (1 + a_1^{(\nu)})/2 < 1$. Portanto, do Teorema 3.5, os zeros de $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ são distintos e estão sobre o círculo unitário aberto $\mathcal{C}(1) \equiv \{z : z = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$.

O próximo resultado relaciona os polinômios de Szegő $\{S_n^{(\nu)}\}$ e os polinômios ortogonais $\{P_n^{(i)}\}$ obtidos através de $P_n^{(i)}(x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$, onde

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}).$$

Teorema 3.7. (1) *Seja $d\nu(z)$ uma medida positiva sobre o círculo unitário tal que os polinômios de Szegő associados $\{S_n^{(\nu)}\}$ são reais, isto é, $-1 < S_n^{(\nu)}(0) = a_n^{(\nu)} < 1$ para $n \geq 1$. Sejam*

$$\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + a_{n-1}^{(\nu)})(1 - a_n^{(\nu)}) > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(2)} = (1 - a_n^{(\nu)})(1 + a_{n+1}^{(\nu)}) > 0, \quad n \geq 1.$$

Consideremos as medidas positivas $d\phi^{(1)}$ e $d\phi^{(2)}$ definidas por

$$d\phi^{(1)}(x) = -d\nu(z) \quad \text{e} \quad d\phi^{(2)}(x) = -(1 - x^2)d\phi^{(1)}(x),$$

onde $x = x(z)$. Os suportes de $d\phi^{(1)}$ e $d\phi^{(2)}$ estão em $[-1, 1]$. Então (para $i = 1, 2$), a sequência de polinômios $\{P_n^{(i)}\}$, dada por $P_0^{(i)} = 1$, $P_1^{(i)}(z) = x$ e

$$P_{n+1}^{(i)}(z) = xP_n^{(i)}(z) - \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1,$$

é formada por polinômios ortogonais mônicos com respeito à medida $d\phi^{(i)}$.

(2) *Reciprocamente, sejam $d\phi^{(1)}$ e $d\phi^{(2)}$ duas medidas positivas definidas em $[-1, 1]$ tais que $d\phi^{(2)}(x) = (1 - x^2)d\phi^{(1)}(x)$. Sejam os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(1)}$ e $P_n^{(2)}$ associados a estas medidas satisfazendo $P_{n+1}^{(i)}(x) = xP_n^{(i)}(x) - \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x)$, $n \geq 1$. Então, os coeficientes de reflexão $a_n^{(\nu)} = S_n^{(\nu)}(0)$ dos polinômios de Szegő $S_n^{(\nu)}$ associados à medida positiva $d\nu(z) = -d\phi^{(1)}(x(z))$ satisfazem*

$$a_n^{(\nu)} = 1 - \alpha_{n+1}^{(1)}/(1 + a_{n-1}^{(\nu)}) \quad \text{e} \quad a_{n+1}^{(\nu)} = -1 + \alpha_{n+1}^{(2)}/(1 - a_n^{(\nu)}), \quad n \geq 1,$$

com $a_0^{(\nu)} = 1$. Explicitamente (com $\mu_0^{(i)}$ os momentos de ordem zero associados a $d\phi^{(i)}$),

$$a_{2n-1}^{(\nu)} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{(2)} \alpha_{2n-3}^{(2)} \cdots \alpha_3^{(2)} \mu_0^{(2)}}{\alpha_{2n-1}^{(1)} \alpha_{2n-3}^{(1)} \cdots \alpha_3^{(1)} \mu_0^{(1)}} - 1 \quad \text{e} \quad a_{2n}^{(\nu)} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{(2)} \alpha_{2n-2}^{(2)} \cdots \alpha_2^{(2)}}{\alpha_{2n}^{(1)} \alpha_{2n-2}^{(1)} \cdots \alpha_2^{(1)}} - 1, \quad n \geq 1.$$

Além disso,

$$2zS_{n-1}^{(\nu)}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{(i)}(x(z))$.

A demonstração deste teorema segue de resultados dados em [10] e [47].

Consideremos agora, a relação de recorrência de três termos (3.3.2). Logo, pelo Teorema 3.1, os zeros de $S_n^{(\nu)}$ são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta_r = -a_r^{(\nu)} a_{r-1}^{(\nu)}$, $r = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_r = \frac{a_r^{(\nu)}}{a_{r-1}^{(\nu)}} - a_r^{(\nu)} a_{r-1}^{(\nu)} = \frac{a_r^{(\nu)}}{a_{r-1}^{(\nu)}} [1 - |a_{r-1}^{(\nu)}|^2]$, $r = 2, \dots, n$. Assim, com $\eta_r = -a_r^{(\nu)} \bar{a}_{r-1}^{(\nu)}$, $r = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_r = \frac{a_r^{(\nu)}}{a_{r-1}^{(\nu)}} - a_r^{(\nu)} \bar{a}_{r-1}^{(\nu)}$, $r = 2, \dots, n$, podemos usar o Teorema 3.3 para obter limitantes para os zeros dos polinômios de Szegő. Entretanto, a primeira parte do Teorema 3.3 não fornece um resultado melhor, já que os zeros dos polinômios de Szegő são conhecidos por estarem no interior do disco unitário.

Podemos aplicar também o Teorema 3.4 (Teorema de Saff e Varga) para a relação de recorrência (3.3.2) e, assim, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.8. (1) Suponha que $0 < a_k^{(\nu)} < 1$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Seja

$$\tau = \min\{-\eta_k = a_k^{(\nu)} a_{k-1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Então, a região parabólica

$$\mathcal{P}^+(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau + x), \quad x > -\tau\},$$

não contém zeros de $S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}$.

(2) Suponha que $0 < (-1)^k a_k^{(\nu)} < 1$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Seja

$$\tau = \min\{-a_k^{(\nu)} a_{k-1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Então, a região parabólica

$$\mathcal{P}^-(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau - x), \quad x < \tau\},$$

não contém zeros de $S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}$.

Demonstração: A primeira parte deste teorema é obtida aplicando o Teorema 3.4 para a relação de recorrência (3.3.2). Para obter a segunda parte, precisamos escrever a relação de recorrência (3.3.2) em termos dos polinômios $\{(-1)^n S_n^{(\nu)}(-z)\}$, ou seja,

$$(-1)^{n+1} S_{n+1}^{(\nu)}(-z) = \left(z - \frac{a_{n+1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \right) (-1)^n S_n^{(\nu)}(-z) + \frac{a_{n+1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} (1 - |a_n^{(\nu)}|^2) z (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(\nu)}(-z),$$

para $n \geq 1$. Como, por hipótese, $0 < (-1)^k a_k^{(\nu)} < 1$, os coeficientes da relação acima são positivos. Logo, pelo Teorema 3.4, obtemos o resultado desejado. ■

3.4 Polinômios com coeficientes não nulos

Seja

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k = b_n \sum_{k=0}^n \tilde{b}_k z^k = b_n \tilde{P}_n(z),$$

onde b_k , $k = 0, 1, \dots, n$, são complexos, diferentes de zero e $\tilde{b}_k = \frac{b_k}{b_n}$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Seja

$$t_k = \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\tilde{b}_{k+1}}{\tilde{b}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Temos as seguintes expressões em termos de frações contínuas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[z^{n-1} + \frac{b_{n-1}}{b_n} z^{n-2} + \dots + \frac{b_2}{b_n} z + \frac{b_1}{b_n} \right] \\ = \frac{1}{z + t_1} - \frac{t_1 z}{z + t_2} - \frac{t_2 z}{z + t_3} - \dots - \frac{t_{n-1} z}{z + t_n} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[z^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} z^{n-2} + \dots + \frac{b_1}{b_{n-1}} z + \frac{b_0}{b_{n-1}} \right] \\ = \frac{1}{z + t_n} - \frac{t_{n-1} z}{z + t_{n-1}} - \frac{t_{n-2} z}{z + t_{n-2}} - \dots - \frac{t_1 z}{z + t_1}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Da fração contínua (3.4.1), se considerarmos a sequência de polinômios $\{Q_k^{(1)}\}_{k=0}^n$ gerada por $Q_0^{(1)} = 1$ e $Q_1^{(1)}(z) = z + t_1$ e

$$Q_{k+1}^{(1)}(z) = (z + t_{k+1})Q_k^{(1)}(z) - t_k z Q_{k-1}^{(1)}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

então, pelo Teorema 2.1, $Q_k^{(1)}$ é o denominador do k -ésimo convergente desta fração contínua finita e, em particular, $Q_n^{(1)} = \tilde{P}_n$.

Analogamente, da fração contínua (3.4.2), considerando agora, os polinômios $\{Q_k^{(2)}\}_{k=0}^n$ gerados por $Q_0^{(2)} = 1$ e $Q_1^{(2)}(z) = z + t_n$ e

$$Q_{k+1}^{(2)}(z) = (z + t_{n-k})Q_k^{(2)}(z) - t_{n-k}zQ_{k-1}^{(2)}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

e, novamente usando o Teorema 2.1, concluímos que polinômio $Q_k^{(2)}$ é o denominador do k -ésimo convergente da fração contínua (3.4.2) e, da mesma forma, $Q_n^{(2)} = \tilde{P}_n$. Portanto, usando o Teorema 3.1 para a relação de recorrência de três termos acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Os zeros de P_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} -t_n & t_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t_n & 0 & t_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -t_n & 0 & 0 & \cdots & t_2 & 0 \\ -t_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ -t_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma análise similar à prova do Teorema 3.3 com a matriz acima gera o seguinte teorema.

Teorema 3.10. *Sejam $t_n^M = \max\{|t_k|, k = 1, 2, \dots, n-1\}$ e $\tilde{t}_n^M = \max\{|t_k^{-1}|, k = 2, 3, \dots, n\}$. Para $0 < \delta < 1$, considere os discos*

$$\Delta_{0,1}(\delta) \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tilde{\rho}_1(\delta)\} \quad \text{e} \quad \Delta_{0,2}(\delta) \equiv \{z : |z| \leq \tilde{\rho}_2(\delta)\},$$

onde $\tilde{\rho}_1(\delta) = \delta(1 - \delta)^{-1}|t_n|$ e $\tilde{\rho}_2(\delta) = \delta^{-1}t_n^M$. Então, os zeros do polinômio P_n estão na região $\Delta_{0,1}(\delta) \cup \Delta_{0,2}(\delta)$. Em particular, valem os seguintes resultados:

(1) com $\tau_1 = |t_n| + t_n^M$, os zeros do polinômio P_n estão no disco

$$\Delta_1 \equiv \{z : |z| \leq \tau_1\};$$

(2) com $\tau_2 = \frac{|t_n| - t_n^M + \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}}{3|t_n| + t_n^M - \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}}|t_n|$, os zeros do polinômio P_n estão no disco

$$\Delta_2 \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tau_2\};$$

(3) com $\tau_3 = \frac{1}{2}[\sqrt{(t_n^M)^2 + 4\tilde{t}_n^M|t_n|} + t_n^M]$, os zeros do polinômio P_n estão na união $\Delta_3 \equiv \Delta_{3,1} \cup \Delta_{3,2}$ dos discos

$$\Delta_{3,1} \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tau_3\} \quad \text{e} \quad \Delta_{3,2} \equiv \{z : |z| \leq \tau_3\};$$

(4) com $\tau_4 = [|t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M]^{-1}$, os zeros do polinômio P_n estão fora do disco aberto

$$\tilde{\Delta}_4 \equiv \{z : |z| < \tau_4\}.$$

Demonstração: Da matriz $\mathbf{H}_n$ do Teorema 3.9, os discos $\Delta_{0,1}(\delta)$ e $\Delta_{0,2}(\delta)$ são obtidos aplicando o Teorema 3.2 (Teorema de Gerschgorin) à matriz $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n \mathbf{D}_\delta^{-1}$.

O resultado da parte (1) é obtido escolhendo δ tal que $\tilde{\rho}_1(\delta) + |t_n| = \tilde{\rho}_2(\delta)$. Para demonstrar a parte (2), tomamos δ tal que $\tilde{\rho}_1(\delta) = \tilde{\rho}_2(\delta) + |t_n|$ e, a parte (3), δ tal que $\tilde{\rho}_1(\delta) = \tilde{\rho}_2(\delta)$.

Finalmente, o resultado da parte (4) é obtido como o da parte (1), considerando o polinômio $z^n P_n(1/z)$. Para esse polinômio, temos a seguinte matriz de Hessenberg

$$\begin{bmatrix} -t_1^{-1} & t_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t_1^{-1} & 0 & t_3^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & t_{n-1}^{-1} & 0 \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_n^{-1} \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela parte (1), os zeros de $z^n P_n(1/z)$, dados por $\omega_r = \frac{1}{z_r}$ (onde z_r são os zeros de P_n), estão no disco $|z| \leq |t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M$. Logo,

$$|\omega_r| \leq |t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M = \frac{1}{\tau_4}$$

e, conseqüentemente,

$$|z_r| > \frac{1}{|t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M} = \tau_4.$$

Portanto, os zeros de P_n estão fora do disco aberto

$$\hat{\Delta}_4 \equiv \{z : |z| < \tau_4\}.$$

■

Observação 3.2. As interseções de duas ou mais das regiões dadas em cada parte do teorema acima, geram regiões menores onde todos os zeros do polinômio P_n estão contidos.

Agora, o próximo teorema fornece algumas informações sobre a variação dos zeros quando os coeficientes de um polinômio variam como em uma progressão geométrica.

Teorema 3.11. Seja $|\beta| > 0$ e considere o polinômio $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ tal que as razões

$$t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} \text{ são tais que}$$

$$|t_k - \beta| \leq \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com ϵ um número positivo. Então, todos os zeros de P_n estão no anel

$$\zeta \left(|\beta| - \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon \right) \leq |z| \leq |\beta| + \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon, \quad (3.4.3)$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. O número σ_n é dado como no Lema 3.2.

Demonstração: Se $\beta > 0$, a prova deste teorema segue do Corolário 3.6.2 onde, neste caso,

$$\mathbf{H}_n' - \mathbf{H}_n^{(\beta)} = \begin{bmatrix} -t_n + \beta & t_{n-1} - \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t_n + \beta & 0 & t_{n-2} - \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \cdots & t_2 - \beta & 0 \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_1 - \beta \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente, $\|\mathbf{H}_n' - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|_\infty \leq 2\epsilon$.

Para obtermos o resultado quando $\beta = |\beta|e^{i\theta}$, trabalhamos com o polinômio $\hat{P}_n(z) = P_n(ze^{-i\theta})$ o que completa a demonstração do Teorema. ■

3.5 Exemplos

Exemplo 1. Neste exemplo, analisamos o comportamento dos zeros dos polinômios Q_n para diferentes valores de α_n e β_n na relação de recorrência (3.1).

- A Figura 3.1a mostra os zeros de Q_{20} quando $\beta_n = 1$, $\alpha_{2n} = -0.05$ e $\alpha_{2n+1} = 0.05$ para $n \geq 1$. Como indicado no Teorema 3.3, todos os zeros estão na região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, onde $\lambda_1 = -1.05$, $\lambda_2 = -0.95$ e $\tau \approx 0.50825757$.
- A Figura 3.1b mostra os zeros de Q_{20} quando $\beta_n = 1$, $\alpha_{2n} = 0.05$ e $\alpha_{2n+1} = -0.05$ para $n \geq 1$. Os zeros estão na região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, com $\lambda_1 = -1.05$, $\lambda_2 = -0.95$ e $\tau \approx 0.50825757$.
- A Figura 3.1c mostra os zeros de Q_{20} quando $\beta_1 = \beta_2 = -0.1$, $\beta_{n+2} = 1$ e $\alpha_n = 0.05$ para $n \geq 1$. Todos os zeros estão na região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, onde $\lambda_1 = -0.95$, $\lambda_2 = 0.15$ e $\tau \approx 0.4858899$.
- A Figura 3.1d mostra os zeros de Q_{20} quando $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$, $\beta_{n+2} = -1$ e $\alpha_n = 0.05$ para $n \geq 1$. Novamente, pelo Teorema 3.3, todos os zeros estão na região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, onde $\lambda_1 = -0.10$, $\lambda_2 = 1.05$ e $\tau \approx 0.50825757$.

Figura 3.1: Zeros do polinômio Q_{20} gerados pela relação de recorrência (3.1) com quatro combinações diferentes para as seqüências $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$.

Exemplo 2. Sejam $p > 0$ e $q > 0$ tais que $\sqrt{p} + \sqrt{q} \leq 1$. Considere os polinômios de Szegő $S_n^{(p,q)}$ associados à medida de probabilidade $d\nu(z)$, onde

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(e^{i\theta}) = & \frac{B(p,q)}{A(p,q)} f(1) + \frac{1}{2\pi A(p,q)} \int_{\theta(b)}^{\theta(a)} f(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{b^2 - \cos^2(\theta/2)} \sqrt{\cos^2(\theta/2) - a^2}}{|\sin(\theta)|} d\theta \\ & + \frac{\Delta(q-p)}{A(p,q)} f(-1) + \frac{1}{2\pi A(p,q)} \int_{2\pi - \theta(a)}^{2\pi - \theta(b)} f(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{b^2 - \cos^2(\theta/2)} \sqrt{\cos^2(\theta/2) - a^2}}{|\sin(\theta)|} d\theta, \end{aligned}$$

com $\theta(x) = 2 \arccos(x)$, $\Delta(x)$ é igual a 0 para $x \leq 0$ e igual a x para $x > 0$, $a = |\sqrt{p} - \sqrt{q}|$, $b = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, $B(p,q) = \sqrt{1-b^2} \sqrt{1-a^2}$ e $A(p,q) = [1 - (p-q) + B(p,q)]/2$.

Observe que, se $q > p$, a medida tem um salto no ponto $z = -1$. Além disso, se $\sqrt{p} + \sqrt{q} < 1$, então a medida tem um salto no ponto $z = 1$. Esse salto desaparece quando $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 1$.

Foi mostrado em [10] que os coeficientes de reflexão satisfazem

$$S_{2n-1}^{(p,q)}(0) = -B(p,q) - (p-q) \quad \text{e} \quad S_{2n}^{(p,q)}(0) = -B(p,q) + (p-q),$$

para $n \geq 1$.

Supondo p e q tais que $(p-q) > B(p,q)$, então os coeficientes de reflexão $a_n = S_n^{(p,q)}(0)$ satisfazem $(-1)^n a_n > 0$, para $n \geq 1$. Deste modo, podemos aplicar o Teorema 3.8 para analisar os zeros de $S_n^{(p,q)}$.

A desigualdade $(p-q) > B(p,q)$ significa também, que $p > q$ e, portanto, a medida associada não tem salto no ponto $z = -1$.

Além de considerarmos $(p-q) > B(p,q)$, restringimos também p e q tais que $\sqrt{p} - \sqrt{q} = a$ para um dado a , onde $0 < a < 1$. Isto significa que o suporte da medida está dentro do arco $\{z : z = e^{i\theta}, -2 \arccos(a) \leq \theta \leq 2 \arccos(a)\}$. Temos ainda, que esta escolha para p e q limita seus valores por

$$\frac{1}{2}(a + \sqrt{1-a^2}) < \sqrt{p} \leq \frac{1}{2}(1+a) \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{p} - a = \sqrt{q}. \quad (3.5.1)$$

Por exemplo, se tomarmos $a = 0.6$, então

$$0.7 < \sqrt{p} \leq 0.8 \quad \text{e} \quad \sqrt{q} = \sqrt{p} - 0.6.$$

Para uma escolha particular de p e q em (3.5.1), do Teorema 3.8 obtemos que os zeros dos polinômios de Szegő $S_n^{(p,q)}$, para todo $n \geq 1$, estão fora da região parabólica

$$\mathcal{P}^-(\tau) \doteq \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau - x), x < \tau\},$$

onde $\tau = a^2b^2 - (1 - a^2)(1 - b^2)$, $a = \sqrt{p} - \sqrt{q}$ e $b = \sqrt{p} + \sqrt{q}$.

Com $a = 0.6$, a escolha $\sqrt{p} = 0.8$ e $\sqrt{q} = 0.2$ fornece os polinômios de Szegő $S_n^{(0.64, 0.04)}$, onde $S_{2n-1}^{(0.64, 0.04)}(0) = -0.6$ e $S_{2n}^{(0.64, 0.04)}(0) = 0.6$ para $n \geq 1$. Observe que, neste caso, $b = 1$ e, conseqüentemente, a medida não tem salto no ponto $z = 1$. O suporte da medida está destacado sobre o círculo unitário dado na Figura 3.2a.

Os polinômios $S_n^{(0.64, 0.04)}$, $n \geq 1$, devem ter todos os seus zeros fora da região parabólica $\mathcal{P}^-(0.36)$. Na Figura 3.2a, ilustramos este caso para o polinômio $S_{10}^{(0.64, 0.04)}$.

Tomando, novamente, $a = 0.6$, a escolha $\sqrt{p} = 0.75$ e $\sqrt{q} = 0.15$ fornece os polinômios de Szegő $S_n^{(0.75^2, 0.15^2)}$, onde $S_{2n-1}^{(0.75^2, 0.15^2)}(0) \approx -0.8887119$ e $S_{2n}^{(0.75^2, 0.15^2)}(0) \approx 0.191288$, para $n \geq 1$. O suporte da medida está destacada sobre o círculo unitário dado na Figura 3.2b. A medida tem salto no ponto $z = 1$.

Os polinômios $S_n^{(0.75^2, 0.15^2)}$, $n \geq 1$, devem ter todos os seus zeros fora da região parabólica $\mathcal{P}^-(0.17)$. Como mostra a Figura 3.2b, isto é verdade para o polinômio $S_{10}^{(0.75^2, 0.15^2)}$. Esclarecemos que o zero de $S_{10}^{(0.75^2, 0.15^2)}$ que está muito próximo a $z = 1$ é, aproximadamente, 0.999991502995.

Figura 3.2: (a) Zeros de $S_{10}^{(0.64, 0.04)}$ localizados fora da região parabólica $\mathcal{P}^-(0.36)$. (b) Zeros de $S_{10}^{(0.75^2, 0.15^2)}$ localizados fora da região parabólica $\mathcal{P}^-(0.17)$.

Exemplo 3. Consideremos os polinômios de Szegő com $a_n = q^n$, $n \geq 1$, onde $0 \leq q < 1$. De (3.3.2), quando $q > 0$, esses polinômios (denotados por $S_n^{(q)}$) satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$S_{n+1}^{(q)}(z) = (z + q)S_n^{(q)}(z) - q(1 - q^{2n})zS_{n-1}^{(q)}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.5.2)$$

com $S_1^{(q)}(z) = z + q$.

Considere os polinômios para-ortogonais $R_n^{(1,q)} = R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2,q)} = R_n^{(2)}$ definidos por (3.3.3). Esses polinômios satisfazem

$$\begin{aligned} R_{n+1}^{(1,q)}(z) &= (z + 1)R_n^{(1,q)}(z) - (1 + q^{n-1})(1 - q^n)zR_{n-1}^{(1,q)}(z), \\ R_{n+1}^{(2,q)}(z) &= (z + 1)R_n^{(2,q)}(z) - (1 - q^n)(1 + q^{n+1})zR_{n-1}^{(2,q)}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (3.5.3)$$

com $R_1^{(1,q)}(z) = R_1^{(2,q)}(z) = z + 1$. Portanto, do Teorema 3.7, os polinômios $P_n^{(1,q)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1,q)}(z)$, $n \geq 1$, onde $x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$, satisfazem

$$P_{n+1}^{(1,q)}(x) = xP_n^{(1,q)}(x) - \frac{1}{4}(1 + q^{n-1})(1 - q^n)P_{n-1}^{(1,q)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_1^{(1,q)}(x) = x$. Essa relação de recorrência mostra que (veja [1, 2]) os polinômios $\{P_n^{(1,q)}\}$ são certos polinômios de Al-Salam-Chihara, ortogonais com relação à medida

$$d\phi^{(1,q)}(x) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} h(x, q^{1/2}) h(x, -q^{1/2}) dx,$$

definida em $[-1, 1]$, onde $h(x, c) = \prod_{k=0}^\infty [1 - 2cxq^k + c^2q^{2k}]$ e $(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^\infty (1 - aq^k)$. Portanto, ainda do Teorema 3.7, obtemos que

$$\int_{\mathcal{C}} S_n^{(q)}(z) \overline{S_m^{(q)}(z)} d\nu^{(q)}(z) = 0, \quad n \neq m,$$

onde $d\nu^{(q)}(e^{i\theta}) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} (q^{1/2}e^{i\theta/2}, q^{1/2}e^{-i\theta/2}; q)_\infty (-q^{1/2}e^{i\theta/2}, -q^{1/2}e^{-i\theta/2}; q)_\infty d\theta$. Podemos escrever, também,

$$d\nu^{(q)}(z) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} (qz; q^2)_\infty (qz^{-1}; q^2)_\infty \frac{dz}{2iz}.$$

Note que $\{\frac{1}{4}(1 + q^{n-1})(1 - q^n)\}_{n=1}^\infty$ e $\{\frac{1}{4}(1 - q^n)(1 + q^{n+1})\}_{n=1}^\infty$ são seqüências encaeadas positivas com seqüências de parâmetros $\{\frac{1}{2}(1 - q^n)\}_{n=0}^\infty$ e $\{\frac{1}{2}(1 + q^{n+1})\}_{n=0}^\infty$, respectivamente. Conseqüentemente, de (3.5.3) e do Teorema 3.5, todos os zeros de $R_n^{(j,q)}$ estão sobre o círculo unitário aberto $\mathcal{C}(1) \equiv \{z : z = e^{i\theta}, \theta < \theta < 2\pi\}$.

Como $(1 - q^{2n}) < (1 + q^{n-1})(1 - q^n)$ para $n \geq 1$, a sequência $\{\frac{1}{4}(1 - q^{2n})\}_{n=1}^{\infty}$ também é uma sequência encadeada positiva. Portanto, de (3.5.2) e do Teorema 3.5, todos os zeros de $S_n^{(q)}$ estão sobre o círculo aberto $\mathcal{C}(q) \equiv \{z : z = qe^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$.

Além disso, em (3.5.2), temos $q(1 - q^{2n}) \leq q - q^{2m-1}$ para $1 \leq n \leq m-1$. Portanto, da parte (2) do Corolário 3.5.1, os zeros de qualquer $S_n^{(q)}$, $1 \leq n \leq m$, devem estar sobre o arco do círculo $\mathcal{C}(q)$ que está fora da região parabólica $\mathcal{P}^+(q^{2m-1})$.

Também em (3.5.3), para $R_n^{(2,q)}$ temos, por exemplo, $(1 - q^n)(1 + q^{n+1}) < (1 - q^{2m-1})$ para $1 \leq n \leq m-1$. Portanto, da parte (2) do Corolário 3.5.1, os zeros de qualquer $R_n^{(2,q)}$, $1 \leq n \leq m$, devem estar sobre o arco do círculo $\mathcal{C}(1)$ que está fora da região parabólica $\mathcal{P}^+(q^{2m-1})$.

Esses resultados são confirmados através das Figuras 3.3a e 3.3b onde, os zeros de $S_{10}^{(q)}$ e os zeros de $R_{10}^{(2,q)}$ estão ilustrados para $q = 0.9$ e $q = 0.8$, respectivamente. Os zeros de $R_{10}^{(2,q)}$, indicados por pequenos círculos, estão sobre o círculo unitário e os zeros de $S_{10}^{(q)}$, indicados por pequenos quadrados, estão sobre um círculo com raio q . Estes zeros estão fora da região parabólica $\mathcal{P}^+(q^{19})$.

Figura 3.3: Zeros de $S_{10}^{(q)}$ (indicados pelos quadrados) e zeros de $R_{10}^{(2,q)}$ (indicados pelos círculos), quando (a) $q = 0.9$ e (b) $q = 0.8$.

Exemplo 4. Seja $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$, onde $|b_k| = 2^k$, $k = 0, 1, \dots, n$. De acordo com a parte (1) do Teorema 3.10, todos os zeros de P_n devem estar no disco $\Delta_1 \equiv \{|z| \leq 1\}$. Claramente isto é verdade se $b_k = 2^k$, $k = 0, 1, \dots, n$, já que os zeros de P_n estão todos sobre o círculo $|z| = 1/2$.

As Figuras 3.4a e 3.4b mostram os zeros de P_n para duas outras escolhas de $\{b_k\}$ satisfazendo à condição $|b_k| = 2^k$ e são comparados com os resultados dados pelo Teorema 3.10. Nessas figuras, o círculo maior é a fronteira da região Δ_2 , o círculo intermediário, a fronteira de Δ_1 e o círculo menor é a fronteira da região $\tilde{\Delta}_4 \equiv \{|z| < 0.25\}$.

Na Figura 3.4a os zeros de P_{20} são dados quando $b_k = 2^k$, $k = 2, \dots, 18$ e $b_0 = -i$, $b_1 = 2i$, $b_{19} = 2^{19}i$ e $b_{20} = -2^{20}i$. Os zeros estão na interseção das 4 regiões dadas pelo Teorema 3.10.

Na Figura 3.4b os zeros de P_{20} são dados quando $b_k = 2^k$, $k = 1, \dots, 19$, $b_0 = -1$ e $b_{20} = -2^{20}$. Novamente os zeros de P_{20} estão na interseção de todas as regiões dadas pelo Teorema 3.10. Esclarecemos que o zero próximo à fronteira do disco Δ_1 vale aproximadamente 0.99999857, enquanto que, o zero próximo a fronteira do disco $\tilde{\Delta}_4$ tem o valor aproximado de 0.25000036. Isto indica que os resultados (parte (1) e parte (4)) do Teorema 3.10 são satisfeitos.

Figura 3.4: Os zeros de P_{20} quando $|b_k| = 2^k$, $k = 0, 1, \dots, 20$.

Capítulo 4

Considerações finais

Como já mencionamos, uma das propriedades mais importantes dos polinômios ortogonais e similares é a relação de recorrência de três termos, que se tornou uma ferramenta poderosa para estudá-los. Um importante resultado, freqüentemente atribuído ao matemático francês Favard (enunciado por ele em 1935), pode ser enunciado da seguinte forma:

Dadas as seqüências de números $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$, se

$$\beta_n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} > 0, \quad n \geq 1,$$

então existe uma medida $d\phi$ tal que os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n = P_n^{(\phi)}\}$ associadas a esta medida satisfazem à relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.1)$$

com $P_0 = 1$ e $P_1(x) = (x - \beta_1)$.

Este resultado, previamente conhecido por vários matemáticos, é parte fundamental das soluções dos famosos problemas de momentos (veja Teorema 2.1), que deram origem a vários resultados fundamentais da matemática moderna, inclusive as integrais de Stieltjes. Desde então, muitas contribuições voltadas à obtenção de informações sobre a medida $d\phi$ a partir dos coeficientes α_n e β_n foram obtidas, incluindo os zeros dos polinômios $\{P_n^{(\phi)}\}$ e as fórmulas de quadratura associadas.

A partir do artigo de Jones, Thron e Waadeland [24], publicado em 1980, surgiu

uma nova vertente de trabalhos focada na relação de recorrência

$$Q_{n+1}(x) = (x + \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}xQ_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.2)$$

com $Q_0 = 1$ e $Q_1(x) = (x + \beta_1)$, com os coeficientes satisfazendo

$$\beta_n < 0, \quad \alpha_{n+1} > 0, \quad n \geq 1. \quad (4.3)$$

O trabalho de nossa autoria descrito no Capítulo 3, envolve um estudo sobre o comportamento dos zeros de polinômios Q_n obtidos através da relação de recorrência (4.2), mas com condições diferentes daquelas dadas em (4.3). Evidentemente, este estudo pode ainda ter continuidade com a obtenção de muitos resultados novos.

Em [28], Leopold apresenta novas relações entre duas famílias de polinômios definidos por relações de recorrência de três termos do tipo (4.1). Essas relações permitiram ao autor estudar de que modo algumas propriedades de uma família de polinômios ortogonais são afetadas quando os coeficientes da relação de recorrência são perturbados. A maioria dos métodos existentes na literatura são eficazes para pequenas perturbações. O novo método mostrado nesse artigo permite resolver o problema de perda de informações no caso de grandes perturbações. Acreditamos que um estudo semelhante ao desenvolvido por Leopold [28], mas agora direcionado para os polinômios gerados pela relação de recorrência do tipo (4.2), seria bastante interessante.

Uma nova família de polinômios, chamados de polinômios γ_n -simétricos, foram introduzidos por Delsarte e Genin (veja, por exemplo, [15]) e são construídos através dos polinômios de Szegő, inclusive com coeficientes complexos, cujos zeros se entrelaçam no círculo unitário. É interessante observar que esses polinômios também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos do tipo (4.2). Em [12], Bunse-Gerstner e He interpretam esses polinômios em termos dos polinômios característico de certas matrizes de Hessenberg. É interessante verificar se existe alguma relação entre os polinômios γ_n -simétricos e os polinômios para-ortogonais considerados no Capítulo 3. Também seria interessante considerar um estudo sobre os zeros dos polinômios γ_n -simétricos.

Referências Bibliográficas

- [1] W.A. Al-Salam, T.S. Chihara, Convolutions of orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **7** (1976), 16-28.
- [2] R.A. Askey, M.E.H. Ismail, *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **49** (1984).
- [3] A. Baernstein II, D. Drasin, P. Duren, A. Marden (Editors), The Bieberbach Conjecture, in proceedings of the Symposium on the Occasion of the proof, Mathematical Surveys and Monographs, editora AMS, Providence, RI, 1986.
- [4] S. Belmehdi, *Formes linéaires et polynômes orthogonaux semi-classiques de classe $s = 1$. Description et classification*, Thèse d'Etat, Université P. et M. Curie, Paris, 1990.
- [5] A.C. Berti, C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, Orthogonal Polynomials Associated with Related Measures and Sobolev Orthogonal Polynomials, *Numer. Algorithms*, **34** (2003), 203-216.
- [6] A.C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Appl. Numer. Math.*, **39** (2001), 127-149.
- [7] B. Bojanov, A. Sri Ranga, Moment preserving approximations by kernels, in Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation, B. Berndt & F. Gesztesy, eds., *Contemp. Math.*, **236** (1999), 57-70.

- [8] C.F. Bracciali, D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain Sequences and Symmetric Generalized Orthogonal Polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, **143** (2002), 95-106.
- [9] C.F. Bracciali, X. Li, A. Sri Ranga, Real orthogonal polynomials in frequency analysis, *Math. Comp.*, **74** (2005), 341-362.
- [10] C.F. Bracciali, A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, **153** (2003), 79-88.
- [11] R. Bressan, S.F. Menegasso, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on $[-1,1]$, *Rocky Mountain J. Math.*, **33** (2003), 567-584.
- [12] A. Bunse-Gerstner, C.Y. He, On a sturm sequence of polynomials for unitary Hessenberg matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **16** (1995), 1043-1055.
- [13] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [14] T.S. Chihara, The parameters of a chain sequence, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 775-780.
- [15] P. Delsarte, Y. Genin, The split Levinson algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, **34** (1986), 470-478.
- [16] D.K. Dimitrov, W. Van Assche, Lamé differential equations and electrostatic, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128** (2000), 3621-3628.
- [17] W.L. Ferrar, *Integral Calculus*, Oxford Univ. Press, London, 1958.
- [18] W. Gautschi, Orthogonal polynomials - Constructive theory and applications, *J. Comput. Appl. Math.*, 12 & 13 (1985), 61-76.
- [19] M.E.H. Ismail, *Monotonicity of zeros of orthogonal polynomials*, in: "q-Series and Partitions", (D. Stanton, Ed.), 177-190, Springer-Verlag, New York, 1989.

- [20] M.E.H. Ismail, X. Li, Bound on the extreme zeros of orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115** (1992), 131-140.
- [21] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.*, **21** (1989), 113-152.
- [22] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, H. Waadeland, Szegő polynomials applied to frequency analysis, *J. Comput. Appl. Math.* **46** (1993), 217-228.
- [23] W.B. Jones, V. Peterson, Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analysis and related topics, *Acta Appl. Math.*, **61** (2000), 149-174.
- [24] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (1980), 503-528.
- [25] S. Karlin, J. McGregor, Linear growth, birth and death processes, em *J. Math. Mech.* (agora *Indiana Univ. Math. J.*), **7** (1958), 643-662.
- [26] T.H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Canad. Math. Bull.* **27** (1984) 205-214.
- [27] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, 1962.
- [28] E. Leopold, Perturbed recurrence relations, *Numer. Algorithms*, **33** (2003), 357-366.
- [29] F. Marcellán, J. Petronillio, Orthogonal polynomials, and coherent pairs: the classical case, *Indag. Math.(N.S.)*, **6** (1995), 287-307.
- [30] P. Maroni, Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$, *Period. Math. Hungar.*, **21** (1990), 223-248.
- [31] B. Noble, J. W. Daniel, *Applied linear algebra*, 3th ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1988.

- [32] F. Peherstorfer, Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas, *Math. Comp.* **55** (1990), 231-241.
- [33] E.B. Saff, V. Totik, "Logarithmic potentials with external fields", Springer-Verlag, Heidelberg 1975.
- [34] E.B. Saff, R.S. Varga, Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **7** (1976), 344-357.
- [35] J.A. Shohat, J.D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Mathematical Surveys, Amer. Math. Soc., (1943).
- [36] A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra Appl.*, **397** (2005), 299-324.
- [37] A.P. da Silva, A. Sri Ranga, T.G. Vazquez, Monotonicity of the zeros of orthogonal polynomials through related measures, *J. Math. Anal. Appl.*, **307** (2005), 699-709.
- [38] N.J.A. Sloane, An introduction to association schemes and coding theory, in *Theory and Applications of Special Functions*, R.A. Askey, Ed., Academic Press, New York, 1975, 225-260.
- [39] A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, **21** (1996), 175-183.
- [40] A. Sri Ranga, W. Van Assche, Blumenthal's theorem for Laurent orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory*, **117** (2002), 255-278.
- [41] T.J. Stieltjes, Sur les racines de l'équation $X_n = 0$, *Acta Math.*, **9** (1886), 285-400.
- [42] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [43] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, in *Field Institute Communications 14: Special functions, q-series and related topics* (M.E.H. Ismail et al., eds.), Amer. Math. Soc. (1997), 211-245.

- [44] L. Vinet, A. Zhedanov, Szegő polynomials on the real axis, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **8** (1999), 149-164.
- [45] H.S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, The University Series in Higher Mathematics, Chelsea, Van Nostrand, New York, vol. 01, 1948.
- [46] D.V. Widder, *Advanced Calculus*, Dover, New York, 1989.
- [47] A. Zhedanov, On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval, *J. Approx. Theory*, **94** (1998), 73-106.