Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de regressão pela norma L_p

Daniela Renata Cantane

Orientador: *Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Ciências da Computação e Matemática Computacional.

USP - São Carlos - SP

Setembro/2004

À minha família.

Agradecimentos

À Deus, por estar sempre abençoando minha vida e iluminando meus caminhos durante toda essa caminhada.

Aos meus pais, Cidinha e Carlinhos e aos meus irmãos, Daniel e Diego, pelo apoio e incentivo aos meus estudos. Agradeço por estarem sempre presentes em minha vida.

Ao meu namorado, Daniel, pela compreensão nos momentos que estive ausente, pelo seu amor, carinho e amizade durante todos estes anos.

Ao meu orientador, pela paciência e dedicação ao longo do desenvolvimento do projeto e por ter me concedido esta oportunidade.

Aos professores e funcionários da USP que contribuíram para a minha formação de uma forma em geral.

Às minhas amigas “irmãzinhas”, Aline, Lilian, Kelly, Cecília, Glaucia e Sônia que sempre estiveram dispostas a ajudar quando necessitei.

À FAPESP - Fundação de Amparo e Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho a família de métodos de pontos interiores barreira logarítmica é desenvolvida para o problema de regressão pela norma L_p e a estrutura matricial resultante é explorada objetivando uma implementação eficiente. Apresentamos alguns conceitos sobre métodos de pontos interiores necessários para o desenvolvimento do método e descrevemos um método de convergência quadrática previamente conhecido. Uma implementação em Matlab dos métodos de pontos interiores desenvolvidos é comparada com uma implementação do método quadrático existente, obtendo desempenho computacional superior.

Abstract

In this work the family of logarithmic barrier interior point methods is developed for the norm L_p fitting problem and the resultant matrix structure is exploited in order to have an efficient implementation. We introduce some concepts about interior point methods necessary for the development of the method and describe a previously known quadratic convergent problem. An implementation in Matlab of the interior point methods developed is compared with an implementation of the known quadratic method obtaining better computational performance.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Métodos de Pontos Interiores	4
2.1 Conceitos Iniciais sobre Pontos Interiores	4
2.1.1 Otimização Linear	4
2.1.2 Otimização Não Linear	6
2.1.3 Convexidade	8
2.2 Método de Newton	8
2.2.1 Método de Newton para uma variável	9
2.2.2 Método de Newton para várias variáveis	9
2.3 Método de Pontos Interiores Primal-Dual	10
2.3.1 Método Primal-Dual Afim-Escala	10
2.3.2 Método Primal-Dual Clássico	14
2.4 Método de Pontos Interiores Barreira Logarítmica	16
2.4.1 Critério de Convergência	19
2.4.2 Inicialização	19
2.5 Método de Pontos Interiores Barreira Logarítmica Preditor-Corretor	20
3 O Problema de Regressão L_p	24
3.1 O Problema de Regressão pela Norma L_p	24

3.2	Métodos Pré-Existentes	26
3.2.1	Métodos de Relaxação por Coluna para o problema de norma mínima	26
3.2.2	Método GNCS	27
4	Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Regressão pela Norma L_p	38
4.1	Método Barreira Logarítmica	38
4.1.1	CrITÉrio de Convergência	44
4.1.2	Pontos Iniciais	44
4.1.3	Algumas Considerações	45
4.2	Método Preditor-Corretor	45
4.2.1	Algumas Considerações	50
4.3	Método Primal-Dual Barreira Logarítmica	50
4.3.1	CrITÉrio de Convergência	56
4.3.2	Algumas Considerações	57
4.4	Método Primal-Dual Preditor-Corretor	57
4.4.1	Algumas Considerações	63
4.5	Regressão Polinomial	63
5	Resultados Computacionais	68
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	97
6.1	Conclusões	97
6.2	Perspectivas Futuras	98

Lista de Tabelas

5.1	Resultados computacionais utilizando a função $f_1(z)$	71
5.2	Resultados computacionais utilizando a função $f_2(z)$	71
5.3	Utilizando a função $f_1(z)$: $z_u = u, z_v = v$	73
5.4	Utilizando a função $f_2(z)$: $z_u = u, z_v = v$	73
5.5	Utilizando a função $f_1(z)$ e $z_u = z_v = e$	74
5.6	Utilizando a função $f_2(z)$ e $z_u = z_v = e$	74
5.7	Utilizando a função $f_1(z)$ e $z_u = ((\lambda + 1)/2)e$ e $z_v = ((\lambda - 1)/2)e$	75
5.8	Utilizando a função $f_2(z)$ e $z_u = ((\lambda + 1)/2)e$ e $z_v = ((\lambda - 1)/2)e$	75
5.9	Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$	85
5.10	Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$	85
5.11	Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$	86
5.12	Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$	86
5.13	Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$	87
5.14	Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$	87
5.15	Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$	88
5.16	Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$	88
5.17	Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$	89
5.18	Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$	89
5.19	Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$	90
5.20	Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$	90
5.21	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$	91
5.22	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$	91
5.23	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$	92

5.24	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$.	92
5.25	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.	93
5.26	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.	93
5.27	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.	94
5.28	Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.	94
5.29	Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.	95
5.30	Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.	95
5.31	Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.	96

Capítulo 1

Introdução

Desde o surgimento dos métodos de pontos interiores para otimização linear, códigos computacionais baseados nessas idéias vem se apresentando como alternativas eficientes para solução de problemas de grande porte [1, 10, 15, 19].

Uma linha de pesquisa importante nesta área considera classes específicas de problemas e explora as particularidades da estrutura matricial com o objetivo de obter implementações ainda mais eficientes, inclusive para problemas com restrições lineares e função objetivo não linear [5, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento dos métodos de pontos interiores para o problema de regressão pela norma L_p , $1 < p < 2$, no estudo da estrutura matricial resultante e na implementação eficiente do método desenvolvido. Os resultados obtidos serão comparados com uma implementação do método proposto em [13].

Dada uma classe de problemas, a forma padrão para o desenvolvimento de um método de pontos interiores consiste na aplicação do método de Newton às condições de otimalidade desconsiderando as restrições de capacidade. O método resultante é essencialmente um método de pontos interiores específico para esta classe de problemas. Algumas alterações, através da introdução de perturbações, são necessárias para obter um método eficiente [29, 30]. De forma análoga, desenvolve-se uma das variantes mais importantes

dos métodos de pontos interiores, o método preditor-corretor [16].

A etapa seguinte desta abordagem consiste na exploração eficiente da estrutura matricial do problema. É sempre importante lembrar que a resolução de um sistema linear, em geral simétrico, consiste no passo mais caro, em termos computacionais, de cada iteração dos métodos de pontos interiores. Desta forma, a exploração da estrutura matricial pode levar a métodos de pontos interiores mais eficientes que os métodos genéricos aplicados a um problema particular. As idéias desenvolvidas em [20, 21] para os problemas de regressão L_1 e L_∞ também podem ser adaptadas a este problema devido à semelhança das estruturas matriciais com o problema de regressão L_p .

O problema de regressão

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|Ax - b\|_p^p$$

onde $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $n > m$, tem inúmeras aplicações em diversas áreas de ciências e engenharias. As normas mais utilizadas são as normas L_1 , L_2 e L_∞ . A norma L_2 é muito popular entre outros motivos por permitir uma solução direta. Por sua vez a norma L_1 permite diminuir o efeito de pontos discrepantes enquanto que a norma L_∞ garante proteção contra o pior caso.

O método IRLS *iteratively reweighted least-squares* [17] foi por muito tempo a única alternativa prática para a resolução deste problema para outros valores de p . Mais recentemente este método foi aperfeiçoado, no que diz respeito à robustez, através da inclusão de uma busca linear [13]. No mesmo trabalho, foi também proposto um novo método que apresenta características similares aos métodos de pontos interiores. Este método apresentou resultados computacionais superiores ao IRLS.

Ambos métodos apresentados em [13] têm uma importante desvantagem: a busca linear é computacionalmente cara. Isto nos motivou o estudo dos métodos de pontos interiores aplicados a este problema que obtém resultados computacionais superiores, repetindo o desempenho obtido na minimização pelas normas L_1 e L_∞ em [20, 21], respectivamente.

No Capítulo 2, descrevemos alguns conceitos sobre métodos de pontos interiores. Descrevemos também o método de Newton que será utilizado para o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores barreira logarítmica, primal-dual e preditor-corretor.

No Capítulo 3, apresentamos o problema de regressão pela norma L_p e o método de convergência quadrática GNCS, desenvolvido em [13], que será utilizado para compararmos com o método de pontos interiores desenvolvido no capítulo seguinte.

Desenvolvemos, no Capítulo 4, os métodos de pontos interiores barreira logarítmica, primal-dual e preditor-corretor nos quais são aplicados ao problema de regressão pela norma L_p e as estruturas matriciais resultante são estudadas.

No Capítulo 5, apresentamos os resultados computacionais obtidos em nossos métodos e comparamos com os resultados do método existente apresentado no Capítulo 3.

No Capítulo 6, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras do nosso trabalho e por último encontram-se as referências bibliográficas.

Capítulo 2

Métodos de Pontos Interiores

Neste capítulo, descrevemos conceitos sobre pontos interiores, método de Newton, métodos barreira logarítmica, primal-dual e preditor-corretor que serão aplicados ao problema de regressão L_p .

2.1 Conceitos Iniciais sobre Pontos Interiores

Antes de descrevermos os métodos de pontos interiores, devemos caracterizar o que é um problema de otimização linear, um problema de otimização não linear e um ponto interior em problemas desse tipo.

Os problemas de otimização linear derivam da construção de uma representação matemática para um problema real em que se quer minimizar ou maximizar uma função objetivo linear, ao mesmo tempo em que as variáveis estão sujeitas a determinadas restrições também lineares. Para os problemas de otimização não linear, temos uma função objetivo não linear e/ou restrições não lineares. Um ponto interior é aquele em que todas as variáveis se encontram estritamente dentro de seus limites.

2.1.1 Otimização Linear

Seja um problema de otimização linear na forma padrão dado por

$$\begin{aligned}
& \min && c^t x \\
& \text{sa} && Ax = b \\
& && x \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde A é uma matriz, x é um vetor coluna de variáveis primais, b e c são vetores de constantes.

Esta formulação é denominada problema primal e está associada ao problema dual

$$\begin{aligned}
& \max && b^t y && \Leftrightarrow && \max && b^t y \\
& \text{sa} && A^t y \leq c && \text{sa} && A^t y + z = c \\
& && y \text{ livre} && && z \geq 0, \quad y \text{ livre}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde y é um vetor coluna de variáveis duais e z é a variável de folga complementar.

Na forma padrão, $x > 0$ é um ponto interior no problema primal e $z > 0$ é um ponto interior para o problema dual. No problema primal $Ax = b$; $x > 0$ é um ponto interior factível e no problema dual $A^t y + z = c$; $z > 0$ é um ponto interior factível.

Um outro conceito que será utilizado para a construção de métodos de pontos interiores é o *gap*. O *gap* é a diferença entre os valores das funções objetivo para o primal e o dual de um mesmo problema, ou seja, $\gamma = c^t x - b^t y$ [30]. É possível mostrar que para um ponto primal e dual factível, o *gap* é dado por $\gamma = c^t x - b^t y = z^t x$.

Por último, é possível determinar as condições de otimalidade. Um dado ponto (x, y, z) é ótimo para os problemas primal e dual se e somente se as seguintes condições são satisfeitas [2]:

- (i) Primal factível: $Ax = b$, $x \geq 0$;
- (ii) Dual factível: $A^t y + z = c$, $z \geq 0$;
- (iii) Complementaridade: $XZe = 0$, ou seja, $x_i z_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

onde e é o vetor coluna de dimensão n com todos os elementos iguais a 1, as

notações $X = \text{diag}(x)$ e $Z = \text{diag}(z)$ são utilizadas e $XZe = 0$ equivale à $x_i z_i = 0, i = 1, \dots, n$.

2.1.2 Otimização Não Linear

Agora, veremos a formulação de um problema de otimização não linear [3]. Em geral, um problema de otimização não linear é da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sa} \quad & h_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & h_m(x) = 0 \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_p(x) \leq 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned}$$

onde as funções f, h_i e g_i são contínuas e normalmente $\in \mathbb{C}^2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Devido ao fato de que em nosso trabalho utilizaremos problema com restrição de igualdade, serão abordadas somente as condições de otimalidade relativa ao mesmo.

Seja o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sa} \quad & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $h(x)$ é um vetor de restrições de igualdade.

A função Lagrangiana associada ao problema é dada por

$$L(x, y) = f(x) + y^t h(x).$$

A função Lagrangiana torna o problema irrestrito.

As condições de otimalidade para o problema (2.3) são dadas por:

(i) Condições necessárias de 1ª ordem:

Derivando a função Lagrangiana com relação a x e a y , obtemos

$$\nabla L(x, y) = \begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m y_i \nabla h_i(x) = 0 \\ h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Este sistema fornece os candidatos a ponto ótimo.

(ii) Condição necessária de 2ª ordem:

Um ponto x^* satisfazendo as restrições $h(x) = 0$ é chamado *ponto regular* (ponto candidato a ótimo) das restrições se os vetores gradientes $\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ forem linearmente independentes.

Um conjunto de restrições de igualdade $h(x) = 0$ define um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ chamado de *hipersuperfície*. Em um ponto regular x^* da hipersuperfície definida por $h(x) = 0$ o plano tangente é dado por:

$$M = \{y \mid \nabla^t h(x^*)y = 0\}$$

onde

$$\nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x^*) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x^*) \end{bmatrix}.$$

Temos que f e $h \in \mathbb{C}^2$. Seja x^* um ponto regular das restrições $h(x) = 0$ e um ponto extremo local (mínimo ou máximo) de $f(x)$ sujeito à restrição $h(x) = 0$. Então existe um vetor $y^t \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x^*) + y^t \nabla h(x^*) = 0$, onde y é o vetor multiplicador de Lagrange.

Considere $M = \{y \mid \nabla^t h(x^*)y = 0\}$. Então a matriz $L(x^*) = F(x^*) + y^t H(x^*)$ é semidefinida positiva em M , isto é,

$$y^t L(x^*)y \geq 0, \quad \forall y \in M,$$

onde $L(x^*) = \nabla^2 L(x^*)$, $F(x^*) = \nabla f(x^*)$ e $H(x^*) = \nabla h(x^*)$.

(iii) Condição suficiente de 2ª ordem:

Seja x^* regular tal que $\nabla f(x^*) + y^t \nabla h(x^*) = 0$. Suponha que $L(x^*) = F(x^*) + y^t H(x^*)$ seja definida positiva em M , isto é,

$$y^t L(x^*) y > 0, \quad \forall y \in M.$$

Então x^* é o ponto de mínimo local sujeito a $h_i(x) = 0$.

2.1.3 Convexidade

Definição 2.1.1 (Conjuntos Convexos) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω é dito convexo se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos de Ω está contido em Ω , ou seja, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Omega$, $\lambda \in [0, 1]$.*

Definição 2.1.2 (Funções Convexas) *Seja $f : S \rightarrow E_1$, onde S é um conjunto convexo não vazio em E_n . A função f é dita convexa em S se*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in S$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Se para todo $\lambda \in (0, 1)$ e $x_1 \neq x_2$ vale a desigualdade estrita então a função é denominada estritamente convexa.

Definição 2.1.3 (Funções Côncavas) *A função $f : S \rightarrow E_1$ é denominada côncava (estritamente côncava) em S se $-f$ é convexa (estritamente convexa) em S .*

2.2 Método de Newton

Os métodos de pontos interiores consistem na aplicação do método de Newton às condições de otimalidade desconsiderando as desigualdades e partindo de um ponto interior [30]. Para tanto, apresentaremos o método de Newton para uma variável e a seguir para várias variáveis. Para mais detalhes sobre o método de Newton e suas características ver [3, 14].

2.2.1 Método de Newton para uma variável

Seja $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = 0$. Para encontrarmos o valor de x utilizamos aproximações sucessivas da função $\phi(x)$ em torno dos pontos $x^0, x^1, \dots, x^k$, até que o ponto x^k seja tal que $\phi(x^k) \approx 0$. Vamos utilizar a fórmula de Taylor em torno do ponto x^0 :

$$0 = \phi(x) = \phi(x^0) + \phi'(x^0)(x - x^0) + \frac{\phi''(x^0)}{2!}(x - x^0)^2 + \dots$$

Aproximamos $\phi(x^1)$ até o termo linear da série, ou seja,

$$0 \simeq \phi(x^0) + \phi'(x^0)(x^1 - x^0) \Rightarrow x^1 = x^0 - \frac{\phi(x^0)}{\phi'(x^0)}.$$

Podemos aplicar esta fórmula para obter x^1 e depois calcular o valor de x^k sucessivamente, até que $\phi(x^k) \simeq 0$. Assim, construímos o método de Newton para uma variável:

Dado x^0

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$d^k = -\frac{\phi(x^k)}{\phi'(x^k)} \\ x^{k+1} = x^k + d^k$$

Até convergir (ou seja, $\phi(x^k) \simeq 0$).

2.2.2 Método de Newton para várias variáveis

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_i(x) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Novamente, para encontrarmos o valor de x utilizamos aproximações sucessivas da função $\phi(x)$ em torno dos pontos $x^0, x^1, \dots, x^k$, até que o ponto x^k seja tal que $\phi_i(x^k) \simeq 0$. Aplicando a fórmula de Taylor para várias variáveis em torno de x^0 :

$$0 = \phi_i(x) = \phi_i(x^0) + [\nabla \phi_i(x^0)]^t (x - x^0) + \dots, \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

onde

$$\nabla \phi_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Aproximando $\phi_i(x^1)$ até o termo linear da série, obtemos

$$0 \simeq \phi_i(x^1) = \phi_i(x^0) + [\nabla \phi_i(x^0)]^t (x^1 - x^0), \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\phi_1(x^0) &= [\nabla \phi_1(x^0)]^t (x^1 - x^0) \\ &\vdots \\ -\phi_n(x^0) &= [\nabla \phi_n(x^0)]^t (x^1 - x^0). \end{aligned}$$

$$\text{Sejam } J(x^0) = \begin{bmatrix} [\nabla \phi_1(x^0)]^t \\ \vdots \\ [\nabla \phi_n(x^0)]^t \end{bmatrix} \text{ a matriz Jacobiana e } F(x^0) = \begin{bmatrix} \phi_1(x^0) \\ \vdots \\ \phi_n(x^0) \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$-F(x^0) = J(x^0)(x^1 - x^0) \Rightarrow x^1 = x^0 - [J(x^0)]^{-1} F(x^0).$$

Construímos, assim, o método de Newton para várias variáveis:

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$d^k = -[J(x^k)]^{-1} F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

Até convergir.

2.3 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Nesta seção, veremos os métodos de pontos interiores primal-dual afim-escala [18] e primal-dual clássico.

2.3.1 Método Primal-Dual Afim-Escala

Seja um problema com a formulação primal e dual igual a definida em (2.1) e (2.2) respectivamente. A idéia para se construir um método de pontos interiores consiste em

aplicar o método de Newton ao sistema $F(x, y, z) = 0$ formado pelas condições de otimalidade desconsiderando $(x, z) \geq 0$, resolvendo os problemas primal e dual simultaneamente. Sejam $x^0, y^0, z^0, (x^0, z^0) > 0$ um ponto interior. Temos que $F(x^0, y^0, z^0)$ é dado por

$$F(x^0, y^0, z^0) = \begin{pmatrix} Ax^0 - b \\ A^t y^0 + z^0 - c \\ X^0 Z^0 e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o método de Newton para várias variáveis, obtemos

$$(x^1, y^1, z^1) = (x^0, y^0, z^0) - [J(x^0, y^0, z^0)]^{-1} F(x^0, y^0, z^0),$$

onde $J(x^0, y^0, z^0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix}.$

Assim, d^0 será dado por

$$d^0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_p^0 \\ r_d^0 \\ r_a^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dy^0 \\ dz^0 \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo o sistema acima e por facilidade de notação ignorando o índice 0 temos,

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Resolvendo o sistema (2.4), obtemos as direções dx, dy e dz . Assim, temos o sistema

$$Adx = r_p \quad (2.5)$$

$$A^t dy + dz = r_d \quad (2.6)$$

$$Zdx + Xdz = r_a \quad (2.7)$$

Da Equação (2.7), obtemos

$$dz = X^{-1}(r_a - Zdx).$$

Agora, da Equação (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} A^t dy + X^{-1}(r_a - Zdx) &= r_d \\ \Rightarrow A^t dy - X^{-1}Zdx &= r_d - X^{-1}r_a. \end{aligned}$$

Definindo $D = X^{-1}Z$, obtemos

$$\begin{aligned} A^t dy - Ddx &= r_d - X^{-1}r_a \\ \Rightarrow dx &= D^{-1}(A^t dy - r_d + X^{-1}r_a). \end{aligned}$$

Substituindo a última equação em (2.5), temos

$$\begin{aligned} AD^{-1}(A^t dy - r_d + X^{-1}r_a) &= r_p \\ \Rightarrow (AD^{-1}A^t)dy &= r_p + AD^{-1}r_d - AD^{-1}X^{-1}r_a \\ \Rightarrow dy &= (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}r_d - AD^{-1}X^{-1}r_a). \end{aligned}$$

Temos que $AD^{-1}A^t$ tem dimensão m , $\text{posto}(A) = m$, é simétrica e definida positiva. Podemos escrever

$$AD^{-1}A^t = LL^t,$$

ou seja, podemos calcular a decomposição de Cholesky de $AD^{-1}A^t$. A ordem de escolha dos pivôs da diagonal não altera a estabilidade numérica.

A estrutura esparsa de $AD^{-1}A^t$ não varia com as iterações. Portanto, podemos utilizar a mesma sequência de pivôs obtidas por alguma eurístia de reordenamento [] em todas as iterações reduzindo o enchimento (elementos não nulos em L que são nulos em $AD^{-1}A^t$) da matriz na decomposição de Cholesky. A matriz $AD^{-1}A^t$ é permutada uma única vez antes de iniciar as iterações.

Podemos resumir estes cálculos como se segue.

Método primal-dual afim-escala [18]

Dados (x^0, y^0, z^0) interior e $\tau \in (0, 1)$

Para $k = 0, 1, \dots$, faça

$$\begin{aligned}
r_p^k &= b - Ax^k \\
r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\
r_a^k &= -X^k Z^k e \\
dy^k &= [A(D^k)^{-1} A^t]^{-1} [r_p^k + A(D^k)^{-1} r_d^k - A(D^k)^{-1} (X^k)^{-1} r_a^k] \\
dx^k &= (D^k)^{-1} [A^t dy^k - r_d^k + (X^k)^{-1} r_a^k] \\
dz^k &= (X^k)^{-1} [r_a^k - Z^k dx^k] \\
\rho_p &= \min_{dx_i < 0} \left\{ -\frac{x_i}{dx_i} \right\} \\
\rho_d &= \min_{dz_i < 0} \left\{ -\frac{z_i}{dz_i} \right\} \\
\alpha_p^k &= \min\{1, \tau \rho_p\} \\
\alpha_d^k &= \min\{1, \tau \rho_d\} \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k dx^k \quad (\alpha_p^k \text{ é tal que } x^{k+1} > 0) \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k dy^k \\
z^{k+1} &= z^k + \alpha_d^k dz^k \quad (\alpha_d^k \text{ é tal que } z^{k+1} > 0)
\end{aligned}$$

Até convergir.

Observação 2.3.1 *Dados x^0 e z^0 interiores, o tamanho do passo α é calculado de forma que x^{k+1} e z^{k+1} permaneçam interiores (y é livre). Este método não necessita de um ponto inicial factível.*

Critério de Convergência

- (i) Factibilidade primal: $\frac{\|b - Ax\|}{\|b\| + 1} \leq \epsilon;$
- (ii) Factibilidade dual: $\frac{\|c - A^t y - z\|}{\|c\| + 1} \leq \epsilon;$
- (iii) Otimalidade - Gap relativo: $\frac{|c^t x - b^t y|}{1 + c^t x + b^t y} \leq \epsilon$ ou $\left| \frac{x^t z}{1 + c^t x + b^t y} \right| \leq \epsilon.$

Ponto Inicial

Para o problema primal, temos [16]:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= A^t(AA^t)^{-1}b \Rightarrow A\tilde{x} = b, \\ x_i^0 &= \max\{\tilde{x}_i, \epsilon_1\}, \\ \epsilon_1 &= \max\left\{-\min \tilde{x}_i, \epsilon_2, \frac{\|b\|_1}{\epsilon_2 \|A\|_1}\right\}, \\ \epsilon_2 &= 100.\end{aligned}$$

Agora, para o problema dual:

$$\begin{aligned}y^0 &= 0, \\ z_i^0 &= \begin{cases} c_i + \epsilon_3 & \text{se } c_i \geq 0; \\ -c_i & \text{se } c_i \leq -\epsilon_3; \\ \epsilon_3 & \text{se } -\epsilon_3 \leq c_i \leq 0, \end{cases} \\ \epsilon_3 &= 1 + \|c\|_1.\end{aligned}$$

2.3.2 Método Primal-Dual Clássico

O método primal-dual afim-escala não é um método eficiente porque permite que alguns produtos $x_i z_i$ se aproximem de zero muito rapidamente [30]. Consequentemente, as direções calculadas nestas condições são muito distorcidas e o método progride lentamente, podendo inclusive não convergir.

Para evitar esta dificuldade, é acrescentada uma perturbação μ às condições de complementaridade [16, 30]. No lugar de $x_i z_i = 0$ temos agora $x_i z_i = \mu$, $i = 1, \dots, n$.

No método primal-dual resolvemos o seguinte sistema não-linear

$$\begin{cases} Ax = b, & x \geq 0 \\ A^t y + z = c, & z \geq 0 \\ XZe = \mu e. \end{cases}$$

Aplicando o método de Newton temos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax \\ c - A^t y - z \\ \mu e - XZe \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular as direções exatamente como no método primal-dual afim-escala, basta substituir r_a por r_c . Em particular, o Jacobiano é o mesmo.

Método primal-dual clássico

Dados $\tau, \sigma \in (0, 1)$ e (x^0, y^0, z^0) interior ou $(x^0, z^0) > 0$

Para $k=0, 1, \dots$, faça

$$\begin{aligned} \mu^k &= \sigma \frac{\gamma^k}{n} \\ r_p^k &= b - Ax^k \\ r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\ r_c^k &= \mu^k e - X^k Z^k e \\ dy^k &= [A(D^k)^{-1} A^t]^{-1} [r_p^k + A(D^k)^{-1} r_d^k - A(Z^k)^{-1} r_c^k] \\ dx^k &= (D^k)^{-1} [A^t dy^k - r_d^k + X^{-1} r_c^k] \\ dz^k &= (X^k)^{-1} [r_c^k - Z^k dx^k] \\ \rho_p &= \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{dx_i^k} \right\} \\ \rho_d &= \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right\} \\ \alpha_p^k &= \min \{1, \tau \rho_p^k\} \\ \alpha_d^k &= \min \{1, \tau \rho_d^k\} \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k dx^k \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k dy^k \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha_d^k dz^k \end{aligned}$$

Até convergir.

Observação 2.3.2 *Se tomarmos $\mu^k = 0$ temos o método afim-escala. Considere $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\tau = 0,99995$. Temos que γ se reduz a cada iteração, portanto μ se reduz a cada iteração. Assim, quando $k \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$.*

Observação 2.3.3 *Dependendo da escolha de τ e σ obtemos resultados teóricos e práticos com respeito à eficiência do método. Uma variação importante ocorre quando $\gamma^k < 1$. Neste caso utiliza-se $\mu^k = \sigma \frac{(\gamma^k)^2}{n}$. Existem motivações teóricas que justificam esta escolha [27].*

2.4 Método de Pontos Interiores Barreira Logarítmica

Descreveremos agora o método de pontos interiores barreira logarítmica [3, 7] o qual utilizaremos para desenvolver o nosso método aplicado ao problema de regressão pela norma L_p .

Seja o problema de programação não linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sa } & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Inserimos a variável de folga s uma vez que neste método trabalhamos apenas com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sa } & g(x) + s = 0 \\ & h(x) = 0 \\ & s \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, relaxamos a restrição $s \geq 0$ inserindo-a na função objetivo através do parâmetro barreira μ , com $\mu \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \min f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_i) \\ \text{sa } g(x) + s = 0 \\ h(x) = 0. \end{aligned}$$

A função Lagrangiana é dada por

$$L = f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_i) + \pi^t(g(x) + s) + \lambda^t h(x),$$

onde π e λ são os multiplicadores de Lagrange.

Aplicando as condições de otimalidade, obtemos

$$\underbrace{\nabla L}_{=J(x,\pi,\lambda,s)} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ S\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu e \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

onde S é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os elementos de s .

Utilizando o método de Newton, chegamos a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\pi \\ d\lambda \\ ds \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ -\mu e + S\pi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, obtemos as direções $dx, d\pi, d\lambda$ e ds .

Agora, calculamos os passos α_p e α_d , correspondentes as variáveis primais e duais respectivamente, onde s e π permaneçam estritamente positivas. Os passos α_p e α_d são calculados a fim de preservarem a interioridade de todas as variáveis restritas do problema.

Sejam

$$\rho_p = \min_{ds_i < 0} \left\{ -\frac{s_i}{ds_i} \right\}$$

e

$$\rho_d = \min_{d\pi_i < 0} \left\{ -\frac{\pi_i}{d\pi_i} \right\}.$$

Assim, o passo α é dado por:

$$\alpha = \min \{1, \tau \rho_p, \tau \rho_d\} \quad (2.10)$$

Conhecendo as direções e os passos, todas as variáveis do problema podem ser atualizadas por:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha dx, \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha ds, \\ \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha d\pi, \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha d\lambda. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A atualização do parâmetro barreira é dada por

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}, \quad \text{onde } \beta > 1. \quad (2.12)$$

Resumimos agora o método barreira logarítmica.

Método barreira logarítmica

Dados x interior, $(s, \pi) > 0$, λ , μ e $\beta > 1$.

Para $k=0,1,\dots$, faça

Calcule o vetor gradiente da Lagrangiana (2.8).

Calcule a matriz Hessiana e resolva o sistema (2.9).

Calcule o passo α dado por (2.10).

Atualize as variáveis (x, s, π, λ) e o parâmetro barreira μ dados por (2.11) e (2.12) respectivamente.

Até convergir.

2.4.1 Critério de Convergência

O critério de convergência é dado por:

$$\|\nabla L\| < \epsilon,$$

onde ∇L é dado por (2.8).

2.4.2 Inicialização

Considere o problema original na forma

$$\min f(x) - \mu \sum \ln(s)$$

$$\text{sa } g(x) + s = 0$$

$$h(x) = 0.$$

Inicialize o vetor x , as variáveis de folga $s > 0$ tal que $g(x) + s = 0$, o parâmetro barreira μ , o parâmetro β e os multiplicadores de Lagrange, onde $\pi = \mu S^{-1}e$. Escolha o valor do critério de parada ϵ .

2.5 Método de Pontos Interiores Barreira Logarítmica Predictor-Corretor

Descreveremos agora o método de pontos interiores barreira logarítmica predictor-corretor [4] o qual também utilizaremos para desenvolver o método aplicado ao problema de regressão pela norma L_p .

Nos métodos de pontos interiores, resolvemos um sistema não linear dado pelas condições de otimalidade e este sistema pode ser resolvido pelo método de Newton. O método de Newton possui uma dificuldade, ele garante apenas convergência local, isto é, convergência a partir de um ponto inicial que está suficientemente próximo da solução. Para ampliar a região de convergência dos métodos de pontos interiores é necessário combiná-los com algum outro método que possua propriedades de convergência global satisfatórias.

Uma variante do método de Newton é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{x}^k &= x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \\ x^{k+1} &= \hat{x}^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(\hat{x}^k).\end{aligned}$$

Dado x^k , um passo regular de Newton é realizado para obter $\hat{x}^k$ e utilizando a mesma Hessiana obtém-se x^{k+1} a partir de $\hat{x}^k$. Este método de Newton de dois passos quando aplicado às condições de otimalidade é conhecido como método predictor-corretor [4].

Temos que, no método barreira logarítmica apenas os termos lineares de primeira ordem são modelados. Agora, no método barreira logarítmica predictor-corretor, introduzimos correções não lineares na equação (2.8). Assim, o sistema (2.9) é modificado da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\pi \\ d\lambda \\ ds \end{bmatrix} = \\
& = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ -\mu e + S\pi + dSd\Pi e \end{bmatrix} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

onde dS e $d\Pi$ são matrizes diagonais cujos elementos são ds e $d\pi$ respectivamente.

No método barreira logarítmica preditor-corretor, primeiramente tomamos um passo afim em que o parâmetro barreira $\mu = 0$. Então, o parâmetro barreira e os termos de segunda ordem podem ser obtidos a partir dos resultados do passo afim, e o lado direito de (2.13) pode ser calculado.

A diferença fundamental entre o método barreira logarítmica e o método barreira logarítmica preditor-corretor está na forma de calcular a direção de busca, que é obtida resolvendo dois sistemas lineares em cada iteração, onde a matriz dos coeficientes é a mesma e os lados direitos são distintos.

Resolvemos primeiro o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix}}_W \begin{bmatrix} \bar{dx} \\ \bar{d\pi} \\ \bar{d\lambda} \\ \bar{ds} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ S\pi \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

que equivale ao sistema linear (2.9) com $\mu = 0$.

Agora, resolvemos o segundo sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix}}_W \begin{bmatrix} dx \\ d\pi \\ d\lambda \\ ds \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ -\mu e + S\pi + \bar{d}S\bar{d}\bar{\Pi}e \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Podemos observar que temos a mesma matriz nos dois sistemas lineares. A diferença entre eles está apenas no vetor do lado direito, ou seja, a presença do termo não linear $\bar{d}S\bar{d}\bar{\Pi}e$ e do parâmetro barreira μ . Assim, a fatoração da matriz W do sistema (2.14) não é afetada em (2.15).

O método barreira logarítmica preditor-corretor reduz o número de iterações em relação ao método barreira logarítmica, mas exige que dois sistemas lineares sejam resolvidos em cada iteração. No entanto, como a matriz é a mesma nestes dois sistemas, os cálculos utilizados para a decomposição são efetuados uma única vez.

O cálculo dos passos primais e duais, α_p e α_d respectivamente, assim como a atualização das variáveis são equivalentes aos apresentados na seção anterior para o método barreira logarítmica.

Descreveremos agora um resumo do método barreira logarítmica preditor-corretor.

Método barreira logarítmica preditor-corretor

Dados x interior, $(s, \pi) > 0$, $\lambda, \beta > 1$.

Para $k=0,1,\dots$, faça

Resolva o sistema (2.14).

Entre com o parâmetro barreira μ e as correções não lineares.

Resolva o sistema (2.15).

Calcule o passo α dado por (2.10).

Atualize as variáveis (x, s, π, λ) e o parâmetro barreira μ dados por (2.11) e (2.12) respectivamente.

Até convergir.

O critério de convergência e a inicialização são dados por (2.4.1) e (2.4.2) respectivamente.

Capítulo 3

O Problema de Regressão L_p

Apresentamos neste capítulo o problema de regressão L_p e o método proposto em [13] com o objetivo de compararmos com os métodos de pontos interiores que desenvolvemos para o mesmo problema.

3.1 O Problema de Regressão pela Norma L_p

O problema de regressão

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|Ax - b\|_p^p \quad (3.1)$$

onde $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $n > m$, tem inúmeras aplicações em diversas áreas de ciências e engenharias. As normas mais utilizadas são as normas L_1 , L_2 e L_∞ . A norma L_2 é muito popular entre outros motivos por permitir uma solução direta. Por sua vez a norma L_1 permite diminuir o efeito de pontos discrepantes enquanto que a norma L_∞ garante proteção contra o pior caso. Os dois últimos problemas podem ser formulados por programação linear e os métodos de pontos interiores aplicados a estes problemas permitem a exploração da estrutura matricial do problema de forma bastante eficiente [20, 21].

O problema é teoricamente interessante, pois é uma extensão de um problema de minimização diferenciável por partes quando $p = 1$, de um problema de minimização

diferenciável de 1ª ordem (mas não diferenciável de 2ª ordem) quando $1 < p < 2$ e até um problema diferenciável de 2ª ordem quando $p = 2$.

O objetivo deste trabalho consiste na aplicação de métodos de pontos interiores ao problema de regressão L_p

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|r\|_p^p \\ &\text{sujeito a} \quad Ax + r = b, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $1 < p < 2$.

Este problema pode combinar as propriedades de regressão das normas 1 e 2 de forma apropriada para cada aplicação.

Definindo $r = u - v$, $u \geq 0$ e $v \geq 0$, podemos reescrever o problema (3.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p \\ &\text{sujeito a} \quad Ax + u - v = b, \quad (u, v) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ao transformarmos o valor absoluto em diferença de variáveis não negativas, $\|r\|_p^p = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^p$, temos que incluir a restrição $UVe = 0$. No entanto, essa restrição pode ser ignorada se fizermos $\|r\|_p^p = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^p = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p$, pois sempre existe um ponto factível com valor da função objetivo menor ou igual tal que $u_i = 0$ ou $v_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, ou seja, $UVe = 0$ é verificado na otimalidade. Por exemplo, dados os vetores u e v , calculamos o mínimo e o máximo de seus elementos ($m_1 = \min(u, v)$ e $m_2 = \max(u, v)$ respectivamente). Logo após, calculamos a diferença entre eles, ou seja, $m_2 - m_1$ e assim teremos um vetor da diferença e um vetor nulo.

Com este modelo não é necessário trabalhar com valores absolutos e, portanto, temos uma função cuja primeira derivada é definida para qualquer ponto. Além disso, quando

$p = 1$ temos exatamente o modelo de regressão L_1 resultando em um problema de otimização linear.

3.2 Métodos Pré-Existentes

3.2.1 Métodos de Relaxação por Coluna para o problema de norma mínima

O método desenvolvido em [8] é um método de relaxação de coluna para calcular a solução da norma L_p de um sistema de equações lineares inconsistentes. Atenções especiais são dadas em cada um dos casos: $p = 1$, $1 < p < 2$, $2 < p < \infty$ e $p = \infty$.

Neste artigo, é assumido que o sistema linear $Ax = b$ é inconsistente e que a matriz A é grande, esparsa e desestruturada. Neste caso, geralmente os elementos não nulos de A são armazenados por linha, depois de uma ordenação por linha, ou por coluna, depois de uma ordenação por coluna. Consequentemente, é conveniente resolver o problema por um método de relaxação por linha ou por um método de relaxação por coluna. A iteração básica de um esquema de uma relaxação por linha (coluna) é percorrer as linhas (colunas) de A .

Este artigo concentra-se no método de relaxação por coluna. A iteração básica de cada método é composta de n passos. No j -ésimo passo, para $j = 1, 2, \dots, n$, somente x_j é modificado na tentativa de reduzir o valor da função objetivo, enquanto todas as outras variáveis são mantidas fixas. Utiliza-se o método de relaxação de Gauss-Seidel para resolver a equação normal $A^t Ax = A^t b$.

A situação é mais complicada quando $1 < p < 2$. Neste caso, a segunda derivada de $F(x) = \|Ax - b\|_p$ não é definida nos pontos onde o vetor residual $Ax - b$ tem componentes zero. A solução proposta neste artigo é substituir $F(x)$ por uma função de

aproximação hiperbólica da forma

$$H(x) = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[(a_i^t x - b_i)^2 + \epsilon^2 \right]^{p/2} \right\}^{1/p},$$

onde a_i^t denota a i -ésima linha de A e ϵ é uma constante positiva.

Não realizamos experimentos computacionais com este método uma vez que somente uma variável é atualizada a cada iteração, devendo convergir muito lentamente. O artigo [8] não apresenta resultados numéricos.

3.2.2 Método GNCS

Vamos agora descrever o método desenvolvido em [13] para o problema de regressão pela norma L_p como segue. O método, referido como GNCS, é um método de Newton globalizado que usa as condições de folgas complementares para o problema da norma L_p . O conteúdo e as notações desta seção estão de acordo com o artigo [13], com exceção da utilização da matriz A no lugar de A^t .

Considere o problema de regressão (3.1). Sejam r o vetor residual $r = Ax - b$ e $\sigma = \text{sgn}(r)$ o seu sinal. A função objetivo é denotada em termos de r por $\phi(r) = \|r\|_p^p$ ($= \psi(x)$) e o gradiente $\nabla\phi(r)$, quando ele existe, é denotado por $g = p(|r|)^{p-1}\sigma$.

Para $1 < p < 2$, o método tradicional para resolver (3.1) é o método (IRLS) iterativo de quadrados mínimos [17]. As direções de descida utilizadas por este método são derivadas da equação não linear $\psi(x) = 0$. Esta é a condição de otimalidade para (3.1) quando $1 < p < 2$ mas não quando $p = 1$. Quando $p = 1$ o progresso torna-se lento ao longo da direção de descida, pois não tentamos satisfazer as condições de otimalidade diretamente e, portanto, acredita-se que esta é a causa do desempenho insatisfatório do método IRLS quando p é próximo ou igual a 1.

Em cada iteração, o custo computacional do método GNCS é o mesmo do método IRLS: resolução um problema de quadrados mínimos. Experimentos numéricos verificam

em [13] que o GNCS é mais rápido que o tradicional método IRLS quando p é quase ou igual a 1.

Em [13] também é apresentado um procedimento de busca linear que explora a estrutura da função objetivo e impede resíduo nulo em cada iteração. O método GNCS apresenta-se melhor que o método IRLS e se reduz ao método de Coleman e Li [6] quando $p = 1$.

Sabemos que a norma L_p é diferenciável e estritamente convexa para $1 < p < \infty$ desde que A tenha posto completo. Então, a solução ocorre no ponto onde o gradiente $\nabla\psi(x) = A^t g$ é nulo. Supomos que existe um ponto com $r_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Isto é equivalente a

$$A^t(D)^{-2}r = 0, \quad (3.4)$$

onde $D = \text{diag}(|r|^{(2-p)/2})$, pois (3.4) é a equação normal para o seguinte sistema de quadrados mínimos:

$$(D)^{-1}Ax = (D)^{-1}b.$$

Suponhamos que as linhas da matriz Z constituem uma base para o espaço nulo de A , isto é, $A^t Z = 0$. Podemos escrever (3.4) da seguinte forma equivalente

$$g - Z^t w = 0. \quad (3.5)$$

O número de equações é n , que é equivalente ao número de variáveis (x, w) (note que $x \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^{n-m}$).

Seja $D_r^k = \text{diag}(|r^k|)$ e denote $\lambda^k = Z^t w^k$. Temos que

$$g - Z^t w = p(|r|)^{p-1} - Z^t w = p(|Ax - b|)^{p-1} - Z^t w = 0.$$

Derivando em relação a (x, w) ,

$$p(p-1)(|Ax - b|)^{p-2}A - Z^t = 0.$$

Assim, para qualquer ponto (x^k, w^k) o passo de Newton para a equação acima é definido por

$$\begin{aligned} & \left[p(p-1) \text{diag}(|r^k|)^{p-2} A, -Z^t \right] \begin{bmatrix} dx^k \\ dw^k \end{bmatrix}^t = - \begin{bmatrix} g^k - \lambda^k \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & A^t(p-1) \text{diag}(|r^k|^{-1}) \text{diag}(p|r^k|^{p-1}) A dx = \underbrace{A^t Z dw}_{=0} - A^t g^k + \underbrace{A^t \lambda^k}_{=0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, a direção de Newton para a variável x é

$$dx^k = -\frac{1}{p-1} \left(A^t (D_r^k)^{-1} \text{diag}(|g^k|) A \right)^{-1} A^t g^k.$$

Agora, consideramos o seguinte sistema não linear de equações

$$D_r(g - Z^t w) = 0. \quad (3.7)$$

Quando $p = 1$ esta é a condição de folga complementar para uma solução e λ é o vetor multiplicador dual. Quando $1 < p < 2$, (3.7) é a condição de otimalidade para (3.1) se D_r é não singular.

Como a solução para (3.5) é sempre uma solução para (3.7) e uma solução para (3.7) é uma solução para (3.5) se para qualquer $r_i = 0$, $\lambda_i = 0$, podemos calcular uma solução de (3.1) satisfazendo (3.7) e a condição $\lambda_i = 0$ se $r_i = 0$.

Considerando (3.7), as condições de otimalidade para minimização suave ($p > 1$) e parte das condições de otimalidade para minimização não suave ($p = 1$). Dado que a função objetivo $\phi(r)$ torna-se quase não suave quando p é próximo de um, Li [13] afirma que é melhor considerar (3.7) que (3.5). Já que estamos interessados no problema da norma L_p para todo $1 \leq p < 2$, usar a direção de Newton definido por (3.7) é mais apropriado que usar (3.5).

Supomos agora que o Jacobiano de $D_r(g - Z^t w)$ existe para (x^k, w^k) e é não singular. Seja

$$D_\lambda^k = \text{diag} \left(p\sigma^k \cdot * g^k - \sigma^k \cdot * \lambda^k \right)$$

onde $\cdot *$ é a notação do Matlab que representa o produto dos componentes dos vetores.

Temos que

$$D_r(g - Z^t w) = \text{diag} \left(|r^k| \right) \left[p(|Ax - b|)^{p-1} - Z^t w \right].$$

Derivando $D_r(g - Z^t w)$ com relação a (x^k, w^k) , obtemos

$$\begin{aligned} & \left[p(|Ax - b|)^{p-1} - Z^t w \right] A + \text{diag} \left(|r^k| \right) \left[p(p-1)\text{diag} \left(|r^k| \right)^{p-2} A - Z^t \right] \\ \Rightarrow & \left[p \left(|r^k| \right)^{p-1} - \lambda \right] A + \text{diag} \left(|r^k| \right) \left[(p-1)\text{diag} \left(p \left(|r^k| \right)^{p-1} \right) \text{diag} \left(|r^k| \right)^{-1} A - Z^t \right] \\ & \Rightarrow \left[g^k - \lambda + \text{diag} \left(g^k(p-1) \right) \right] A - D_r^k Z^t \\ & \Rightarrow \underbrace{\text{diag} \left(g^k p - g^k + g^k - \lambda \right)}_{=D_\lambda^k} A - D_r^k Z^t. \end{aligned}$$

Então o passo de Newton para (3.7) é definido por

$$\begin{aligned} & \left[D_\lambda^k A, -D_r^k Z^t \right] \left[dx^k, dw^k \right]^t = - \left[D_r^k \left(g^k - \lambda^k \right) \right] \quad (3.8) \\ & \Rightarrow D_\lambda^k A dx^k - D_r^k Z^t dw^k - D_r^k \lambda^k = -D_r^k g^k \\ & \Rightarrow A^t D_\lambda^k A dx^k - \underbrace{A^t D_r^k (Z^t dw^k + \lambda^k)}_{=0} = -A^t D_r^k g^k. \end{aligned}$$

Daqui obtemos

$$A^t \left(D_r^k \right)^{-1} D_\lambda^k A dx^k = -A^t g^k, \quad (3.9)$$

ou, equivalentemente,

$$dx^k = - \left(A^t \left(D_r^k \right)^{-1} D_\lambda^k A \right)^{-1} A^t g^k. \quad (3.10)$$

Foi demonstrado em [6] que, quando $p = 1$, $A^t (D_r)^{-1} D_\lambda A$ é definida positiva na

vizinhança da solução, sob algumas hipóteses não degeneradas.

Consideremos o caso em que $1 < p < 2$. Se não há resíduo nulo na solução, isto é, $|r^*| > 0$, $(D_r^*)^{-1} D_\lambda^*$ é definida positiva desde que $D_\lambda^* = (p-1) \text{diag}(|g^*|)$ e supomos que A tem posto completo. Assim $A^t (D_r^k)^{-1} D_\lambda^k A$ também é definida positiva quando (x^k, w^k) aproxima-se de (x^*, w^*) . Portanto a direção de Newton dx^k torna-se uma direção de descida para $\psi(x)$ na vizinhança da solução.

Se existe algum $r_i^* = 0$, a matriz Jacobiana de (3.7) é singular na solução quando $1 < p < 2$ porque $g_i^* = \lambda_i^* = 0$. No entanto, nesses pontos a matriz Jacobiana do sistema original (3.4) também não existe. Portanto, este problema não surge quando consideramos (3.7) no lugar de (3.5). Se existe um resíduo nulo na solução x^* é difícil obter convergência quadrática, então obtemos a convergência linear.

Já que $A^t (D_r^k)^{-1} D_\lambda^k A$ não pode ser definida positiva distante de uma solução, a globalização do passo de Newton (3.9) é necessária.

Para $p = 1$ em [6], o método de Newton é globalizado definindo uma matriz diagonal D_θ^k tal que $A^t (D_r^k)^{-1} D_\theta^k A$ muda de $A^t (D_r^k)^{-1} A$ para $A^t (D_r^k)^{-1} D_\lambda^k A$ próximo a uma solução e substituindo D_λ^k por D_θ^k quando a direção é calculada por (3.8).

Assim, o passo pode ser considerado como solução da seguinte equação

$$\begin{bmatrix} D_\theta^k A, -D_r^k Z^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^k, dw^k \end{bmatrix}^t = -D_r^k (g^k - \lambda^k). \quad (3.11)$$

Portanto,

$$dx^k = - \left(A^t (D_r^k)^{-1} D_\theta^k A \right)^{-1} A^t g^k. \quad (3.12)$$

Se uma variável de controle $0 < \theta < 1$ que mede a proximidade para a solução for usada, a matriz diagonal D_θ pode ser definida da seguinte maneira

$$D_\theta^k = \left| \theta^k \text{diag}(\sigma^k g^k) + (1 - \theta^k) D_\lambda^k \right| = \text{diag} \left(\left| g^k - (1 - \theta^k) \lambda^k \right| \right), \quad (3.13)$$

onde $D_\lambda^k = \text{diag}(g^k - \lambda^k)$.

Portanto, θ^k mede a satisfação da condição de folga complementar e a viabilidade dual do problema da norma L_1

$$\theta^k = \frac{\eta^k}{\gamma + \eta^k}, \quad (3.14)$$

onde $\eta^k = \max \left\{ \max \left\{ \frac{|D_r^k(g^k - \lambda^k)|}{\phi(r^0)} \right\}, \max \left\{ \max \{ |\lambda^k| - |g^k|, 0 \} \right\} \right\}$ e $0 < \gamma < 1$ (na implementação $\gamma = 0.99$), ou seja, η^k é o máximo da violação da condição de folga complementar ($D_r(g - \lambda) = 0$) e da viabilidade dual ($|\lambda| \leq |g|$). Note que $|g| = |p(|r|)^{p-1}| = e$ quando $p = 1$. Neste caso, $\theta = 0$ (ou $\eta = 0$) é uma condição de otimalidade necessária e suficiente (para uma discussão mais detalhada veja [6]).

Agora consideramos o caso em que $1 < p < 2$. Sabemos que a direção definida pelo método IRLS leva a convergência global, então definimos uma matriz diagonal D_θ tal que a direção obtida trocando D_λ por D_θ seja a mesma direção do método IRLS e que localmente converge para D_λ . Assim, D_θ é uma matriz diagonal cuja diagonal é uma combinação convexa dos componentes de $\text{diag}(pg^k)$ e D_λ .

$$\begin{aligned} D_\theta^k &= \left| \text{diag}(\theta^k) \text{diag}(p\sigma^k g^k) + \text{diag}(e - \theta^k) D_\lambda^k \right| \\ &= \text{diag}(|pg^k - (e - \theta^k) \cdot \lambda^k|). \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$\theta^k = (\eta^k e) ./ (\gamma |g^k| + \eta^k e), \quad (3.16)$$

onde $0 < \gamma < 1$, $e^t = [1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ e o escalar η^k é definido em (3.14).

Quando $p = 1$, (3.15) é igual ao definido em (3.13) e portanto D_θ^k definido por (3.16) é equivalente ao definido por (3.14). Além disso, x é ótimo se e somente se existe $\lambda = Z^t w$ tal que $\eta = 0$.

A matriz diagonal D_θ^k tem as seguintes propriedades.

Lema 3.2.1 *Suponha $0 < \gamma < 1$. Seja D_θ^k definido por (3.15). Então D_θ^k satisfaz*

$$(p-1)\text{diag}\left(|g^k|\right) \leq |D_\theta^k| \leq (p+1)\text{diag}\left(|g^k|\right). \quad (3.17)$$

Demonstração: Pela definição (3.15)

$$D_\theta^k = \text{diag}\left(|pg^k - (e - \theta^k) \cdot * \lambda^k|\right).$$

Da definição de θ (3.16)

$$\begin{aligned} \eta^k (e - \theta^k) &= \gamma \theta^k \cdot * |g^k| \\ \Rightarrow (|\lambda^k| - |g^k|) \cdot * (e - \theta^k) &\leq \gamma \theta^k \cdot * |g^k|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\lambda^k| &\leq |g^k| + \gamma (\theta^k \cdot * |g^k|) ./ (e - \theta^k) \\ &\leq ((e - \theta^k) \cdot * |g^k| + \gamma \theta^k \cdot * |g^k|) ./ (e - \theta^k) \\ &\leq ((e - (1 - \gamma)\theta^k) \cdot * g^k) ./ (e - \theta^k). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(p-1)\text{diag}\left(|g^k|\right) \leq |D_\theta^k| \leq (p+1)\text{diag}\left(|g^k|\right).$$

•

Definimos τ^k como sendo

$$\tau^k = \max\left(\tau, 1 - \frac{\eta^k}{\gamma + \eta^k}\right) \quad (3.18)$$

com o objetivo de incluir uma medida de otimalidade para $p = 1$. Note que, quando $\{\eta^k\}$ converge para zero, $\{\tau^k\}$ converge para um. Quando $p = 1$ o procedimento da busca linear para GNCS é equivalente ao usado em [6].

Para IRLS $\check{\alpha}^k$ é uma constante $p - 1$. Para GNCS com d^k definido por (3.12), $\check{\alpha}^k$ muda em cada iteração. No entanto, ele é limitado entre $p - 1$ e $p + 1$ como indicado pelo seguinte lema.

Lema 3.2.2 Supomos $d^k = Adx^k$, onde dx^k é definido por (3.12). Então o tamanho do passo $\check{\alpha}^k$ definido por

$$\check{\alpha}^k = -\frac{g^{k^t} d^k}{d^{k^t} \text{diag}(p(|r^k|)^{p-2}) d^k} \quad (3.19)$$

satisfaz

$$p - 1 \leq \check{\alpha}^k \leq p + 1.$$

Demonstração: De (3.12),

$$\begin{aligned} dx^k &= -\left(A^t (D_r^k)^{-1} D_\theta^k A\right)^{-1} A^t g^k \Rightarrow A^t (D_r^k)^{-1} D_\theta^k A dx^k = -A^t g^k \\ &\Rightarrow g^k = -\left(D_r^k\right)^{-1} D_\theta^k A dx^k \Rightarrow g^k = -\left(D_r^k\right)^{-1} D_\theta^k d^k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\check{\alpha}^k = -\frac{d^{k^t} (D_r^k)^{-1} D_\theta^k d^k}{d^{k^t} \text{diag}(p(|r^k|)^{p-2}) d^k}$$

De (3.17),

$$(p-1) \frac{d^{k^t} (D_r^k)^{-1} \text{diag}(|g^k|) d^k}{d^{k^t} \text{diag}(p(|r^k|)^{p-2}) d^k} \leq \check{\alpha}^k \leq (p+1) \frac{d^{k^t} (D_r^k)^{-1} \text{diag}(|g^k|) d^k}{d^{k^t} \text{diag}(p(|r^k|)^{p-2}) d^k}.$$

Logo,

$$p - 1 \leq \check{\alpha}^k \leq p + 1.$$

•

Computacionalmente, em vez de resolver um sistema linear $n \times n$ (3.11) para calcular (dx^k, dw^k) , pode-se preferir calcular dx^k resolvendo o problema de quadrados mínimos $n \times m$

$$(D^k)^{-1} A dx^k = -D^k g^k,$$

onde $D^k = \left(D_r^k (D_\theta^k)^{-1}\right)^{1/2}$. Portanto,

$$\begin{cases} A^t (D^k)^{-2} r = 0, \\ A^t (D^k)^{-2} A dx^k = -A^t D^k g^k, \\ d^k = A dx^k. \end{cases} \quad (3.20)$$

Uma vez que $d^k = Adx^k$ é calculado, λ pode ser atualizado por

$$\lambda^{k+1} \leftarrow \left(D_r^k\right)^{-1} D_\theta^k d^k + g^k. \quad (3.21)$$

O método GNCS pode ser resumido como segue.

Dado o ponto inicial $r^0 = Ax^0 - b$ com $|r^0| > 0$ e λ^0 .

Passo1: Calcular θ^k por (3.16) e $g^k = p(|r^k|)^{p-1} \sigma^k$.

Sejam $D_r^k = \text{diag}(|r^k|)$, $D_\theta^k = \text{diag}(|pg^k - (e - \theta^k) .* \lambda^k|)$.

Defina $D^k = (D_r^k (D_\theta^k)^{-1})^{1/2}$;

Passo2: Calcule a direção d^k por

$$\begin{cases} A^t (D^k)^{-2} r = 0, \\ A^t (D^k)^{-2} Adx^k = -A^t D^k g^k, \\ d^k = Adx^k; \end{cases}$$

Atualize λ^{k+1} :

$$\lambda^{k+1} \leftarrow \left(D_r^k\right)^{-1} D_\theta^k d^k + g^k.$$

Passo3: Calcule τ^k por (3.18).

Use o procedimento de busca linear descrito a seguir.

Atualize $r^{k+1} \leftarrow r^k + \alpha^k d^k$, $k \leftarrow k + 1$.

Vá para o passo 1.

Observação 3.2.1 *A desvantagem deste método é que a busca linear é cara.*

Procedimento de Busca Linear

Descreveremos agora o procedimento de busca linear utilizado pelo método GNCS.

Dados $\tau^k, \beta_f \in (0, 1)$, $d^k, r^k, \check{\alpha}^k, \rho_b > 0$ (p.ex. 10^6) e α_i^k definido por

$$J = \left\{ \alpha_i^k : \alpha_i^k = -\frac{r_i^k}{d_i^k}, r_i^k d_i^k < 0 \right\}.$$

Passo1: Seja $\alpha_*^k = \min(r^k + \alpha_i^k d^k)$ com $g(r^k + \alpha_*^k d^k)^t d^k \geq 0$. Se

$$\phi(r^{k+1}) \leq \phi(r^k) + \beta_f \alpha^k \nabla \phi(r^k)^t d^k, \quad (3.22)$$

onde $r^{k+1} = r^k + \alpha^k d^k$ é satisfeito com α_*^k , seja $\alpha_{\#}^k \leftarrow \max \{ \alpha_i^k : 0 \leq \alpha_i^k < \alpha_*^k \}$ e defina

$$\alpha^k \leftarrow \alpha_{\#}^k + \tau^k (\alpha_*^k - \alpha_{\#}^k)$$

e retorna; caso contrário, continua;

Passo 2: Se (3.22) não é satisfeito com $\alpha^k = 1$, vá para o passo 3.

Caso contrário, estabeleça

$$\alpha^k \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{se } \min(|r^k + d^k|) > 0; \\ \alpha_{\#}^k + \tau^k (1 - \alpha_{\#}^k), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\alpha_{\#}^k \leftarrow \max \{ \alpha_i^k : 0 \leq \alpha_i^k < 1 \}$, retorna;

Passo 3: Seja

$$\alpha^k \leftarrow \begin{cases} \check{\alpha}^k, & \text{se } \min(|r^k + \check{\alpha}^k d^k|) > 0; \\ \alpha_{\#}^k + \tau^k (\check{\alpha}^k - \alpha_{\#}^k), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\alpha_{\#}^k \leftarrow \max \{ \alpha_i^k : 0 \leq \alpha_i^k < \check{\alpha}^k \}$, retorna.

Critério de Convergência

O critério de convergência utilizado em [13] é dado por:

$$\frac{|\phi(r^{k+1}) - \phi(r^k)|}{\phi(r^{k+1})} < \epsilon \quad \text{ou} \quad \eta^k < \epsilon. \quad (3.23)$$

Com o objetivo de compararmos os resultados do método GNCS com os resultados dos

nossos métodos de pontos interiores de uma forma mais eficiente, o critério de convergência utilizado neste trabalho será dado por:

$$\frac{\|D_r^k(\lambda^k - g)\|}{\|r^k\| (2n)} \leq \epsilon. \quad (3.24)$$

Capítulo 4

Métodos de Pontos Interiores

Aplicados ao Problema de Regressão pela Norma L_p

Neste capítulo, desenvolvemos uma família de métodos de pontos interiores para o problema de regressão L_p : o método barreira logarítmica, o método primal-dual e a variante preditor-corretor.

4.1 Método Barreira Logarítmica

O problema (3.3) também pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p \\ \text{sa} \quad & Ax + u - v - b = 0, \quad (u, v) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A função objetivo é denotada em termos de u e v por $\phi(u, v) = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p$, o gradiente $\nabla\phi(u, v)$ é denotado por

$$G = \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix},$$

onde $G_{u_i} = G_{v_i} = p(u_i + v_i)^{p-1}$ e

$$\nabla^2 \phi = \begin{bmatrix} \nabla G_u \\ \nabla G_v \end{bmatrix},$$

onde $\nabla G_{u_{ij}} = \nabla G_{v_{ij}} = \begin{cases} \frac{p(p-1)}{(u_i + v_i)^{2-p}}, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ é uma matriz diagonal denotada por G_2 .

Como temos um problema de otimização não linear, usamos a forma padrão para desenvolver um método de pontos interiores: aplicamos o método de Newton às condições de otimalidade.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p - \mu \sum_{i=1}^n \ln(u_i) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(v_i) \\ \text{sa } & Ax + u - v - b = 0, \end{aligned}$$

onde $\mu > 0$ é o parâmetro barreira ($\mu \rightarrow 0$).

A Lagrangiana é dada por

$$L = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^p - \mu \sum_{i=1}^n \ln(u_i) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(v_i) + y^t(Ax + u - v - b),$$

onde y é o multiplicador de Lagrange.

Aplicando as condições de otimalidade, obtemos

$$\underbrace{\nabla L}_{J(x,y,u,v)} = \begin{bmatrix} A^t y \\ Ax + u - v - b \\ (G - \mu U^{-1} + Y)e \\ (G - \mu V^{-1} - Y)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

onde U e V são matrizes diagonais cujos elementos diagonais são u e v respectivamente.

Reescrevendo as duas últimas equações de (4.2),

$$\underbrace{\nabla L}_{J(x,y,u,v)} = \begin{bmatrix} A^t y \\ Ax + u - v - b \\ U(G + Y)e \\ V(G - Y)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e \\ \mu e \end{bmatrix}.$$

Utilizando o Método de Newton, chegamos a

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I \\ 0 & U & G + Y + UG_2 & UG_2 \\ 0 & -V & VG_2 & G - Y + VG_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1 &= -A^t y, \\ r_2 &= -Ax - u + v + b, \\ r_3 &= -U(G + Y)e + \mu e \quad e \\ r_4 &= -V(G - Y)e + \mu e. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema (4.3), obtemos as direções dx, dy, du, dv . Assim, temos o sistema

$$A^t dy = r_1 \quad (4.4)$$

$$Adx + du - dv = r_2 \quad (4.5)$$

$$Udy + [G + Y + UG_2] du + UG_2 dv = r_3 \quad (4.6)$$

$$-Vdy + VG_2 du + [G - Y + VG_2] dv = r_4. \quad (4.7)$$

Da Equação (4.6),

$$\begin{aligned} Udy + [G + Y + UG_2] du + UG_2 dv &= r_3 \\ \Rightarrow [G + Y + UG_2] du &= r_3 - Udy - UG_2 dv \\ \Rightarrow du &= [G + Y + UG_2]^{-1} (r_3 - Udy - UG_2 dv). \end{aligned}$$

Fazendo $D_u = [G + Y + UG_2]$, obtemos

$$du = D_u^{-1} (r_3 - Udy - UG_2dv).$$

Agora, da Equação (4.7),

$$\begin{aligned} & -Vdy + VG_2du + [G - Y + VG_2]dv = r_4 \\ \Rightarrow & [G - Y + VG_2]dv = r_4 + Vdy - VG_2du \\ \Rightarrow & [G - Y + VG_2]dv = r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy + VUG_2^2dv) \\ \Rightarrow & [G - Y + VG_2 - VUG_2^2D_u^{-1}]dv = r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy) \\ \Rightarrow & dv = [G - Y + VG_2 - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy)]. \end{aligned}$$

Fazendo $D_v = [G - Y + VG_2]$, obtemos

$$dv = [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy)].$$

Da Equação (4.5),

$$\begin{aligned} & Adx + du - dv = r_2 \\ \Rightarrow & Adx + D_u^{-1}(r_3 - Udy - UG_2dv) - [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy)] = r_2 \\ \Rightarrow & Adx + D_u^{-1} \left\{ r_3 - Udy - UG_2 [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy)] \right\} + \\ & - [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2r_3 + VUG_2dy)] = r_2 \\ \Rightarrow & - D_u^{-1}Udy - D_u^{-1}UG_2 [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [(V + D_u^{-1}VUG_2)dy] - [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} \times \\ & \times [(V + D_u^{-1}VUG_2)dy] = r_2 - Adx - D_u^{-1} \left\{ r_3 - UG_2 [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} [r_4 - D_u^{-1}VG_2r_3] \right\} \\ & + [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} (r_4 - D_u^{-1}VG_2r_3) \\ \Rightarrow & \left\{ -D_u^{-1}U - [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} V (I + D_u^{-1}UG_2)^2 \right\} dy = r_2 - Adx - D_u^{-1}r_3 + \\ & + [D_v - VUG_2^2D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2r_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow dy &= \left\{ -D_u^{-1}U - [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} V (I + D_u^{-1}UG_2)^2 \right\}^{-1} \left\{ r_2 - Adx - D_u^{-1}r_3 + \right. \\ &\quad \left. + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right\}.\end{aligned}$$

Fazendo $D = \left\{ -D_u^{-1}U - [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} [V (I + D_u^{-1}UG_2)]^2 \right\}^{-1}$, temos

$$dy = D \left\{ r_2 - Adx - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right\}.$$

Finalmente, de (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}A^t dy &= r_1 \\ \Rightarrow A^t D \left\{ r_2 - Adx - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right\} &= r_1 \\ \Rightarrow -A^t D Adx &= r_1 - A^t D \left\{ r_2 - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right\} \\ \Rightarrow dx &= (-A^t DA)^{-1} \left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right] \right\}\end{aligned}$$

Definindo $r = -\left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right] \right\}$ obtemos

$$dx = (A^t DA)^{-1} r.$$

Agora, vamos calcular o passo α , onde u e v permaneçam estritamente positivas.

$$\alpha = \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), 1 \right\},$$

onde $\tau = 0.9995$ [30].

Conhecendo as direções e os passos, todas as variáveis do problema podem ser atualizadas por

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + \alpha dx, \\ u^{k+1} &= u^k + \alpha du, \\ v^{k+1} &= v^k + \alpha dv, \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha dy.\end{aligned}$$

A atualização do parâmetro barreira é dada por

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}, \quad \text{onde } \beta > 1.$$

Apresentamos agora o resumo do método de pontos interiores barreira logarítmica para o problema L_p .

Dados x^0, y^0 e $(u^0, v^0) > 0$, μ^0 e $\beta > 1$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça

$$\begin{aligned} G &= p(u_i + v_i)^{p-1} \\ G_2 &= \text{diag} \left(\frac{p(p-1)}{(u_i + v_i)^{2-p}} \right) \\ r_1^k &= -A^t y \\ r_2^k &= -Ax - u + v + b \\ r_3 &= -U(G + Y)e + \mu e \\ r_4 &= -V(G - Y)e + \mu e \\ D_u &= [G + Y + UG_2] \\ D_v &= [G - Y + VG_2] \\ D &= \left\{ D_u^{-1}U + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} V (I + D_u^{-1}UG_2)^2 \right\}^{-1} \\ r &= \left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right] \right\} \\ dx &= (A^t DA)^{-1} r \\ dy &= D \left\{ r_2 - Adx - D_u^{-1}r_3 + [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} (I + D_u^{-1}UG_2) (r_4 - D_u^{-1}VG_2 r_3) \right\} \\ dv &= [D_v - VUG_2^2 D_u^{-1}]^{-1} [r_4 + Vdy + D_u^{-1}(-VG_2 r_3 + VUG_2 dy)] \\ du &= r D_u^{-1} (r_3 - Udy - UG_2 dv) \\ \alpha &= \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), 1 \right\} \\ u^{k+1} &= u^k + \alpha du \\ v^{k+1} &= v^k + \alpha dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \alpha dx \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha dy \\
\mu^{k+1} &= \frac{\mu^k}{\beta}
\end{aligned}$$

Até convergir.

4.1.1 Critério de Convergência

O critério de convergência é baseado nas condições de otimalidade (4.2):

$$N = \frac{\|\nabla L\|}{(1 + \|x\| + \|u\| + \|v\| + \|y\|)(2n)} \leq \epsilon.$$

Utilizamos também um critério de convergência baseado na diferença dos valores de N atual e da iteração anterior:

$$|N^{k+1} - N^k| \leq \epsilon_1.$$

4.1.2 Pontos Iniciais

Os pontos iniciais são calculados baseados nas idéias desenvolvidas em [6],

$$\begin{aligned}
x^0 &= (A^t A)^{-1} A^t b, \\
r^0 &= b - Ax^0, \\
u_i^0 &= \begin{cases} \frac{\lambda+1}{2} r_i^0 & \text{se } r_i^0 > 0, \\ -\frac{\lambda-1}{2} r_i^0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\
v_i^0 &= \begin{cases} \frac{\lambda-1}{2} r_i^0 & \text{se } r_i^0 > 0, \\ -\frac{\lambda+1}{2} r_i^0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\
y^0 &= \frac{\kappa r^0}{\|r^0\|_\infty}.
\end{aligned}$$

De fato, em [6] u e v não são definidos. Foi proposto em [21] esta escolha de modo que a relação $u^0 + v^0 = |\lambda r^0|$ seja satisfeita. Assim, se λ é $O(1)$, ambos u^0 e v^0 são da mesma ordem de r^0 . Lembramos que, por definição, $r = u - v$. Estabelecemos $\kappa = 0,975$.

4.1.3 Algumas Considerações

Na maioria dos métodos de pontos interiores o passo mais caro em termos computacionais é a solução do sistema linear com uma matriz do tipo A^tDA , onde D é uma matriz diagonal.

O sistema linear obtido em nosso trabalho é simétrico e definido positivo e assim pode ser resolvido pela fatoração de Cholesky. Obtemos, então, um sistema muito menor que o sistema original (4.3) e da mesma dimensão dos sistemas resolvidos pelo método GNCS [13]. Vale lembrar que, nessa classe de problemas, A é uma matriz cheia.

4.2 Método Preditor-Corretor

Neste método, utilizaremos a mesma formulação do problema apresentado na seção (4.1).

No método preditor-corretor, primeiramente tomamos a direção afim em que o parâmetro barreira $\mu = 0$. Assim, temos que resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I \\ 0 & U & G + Y + UG_2 & UG_2 \\ 0 & -V & VG_2 & G - Y + VG_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}x \\ \bar{d}y \\ \bar{d}u \\ \bar{d}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \\ \bar{r}_4 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= -A^ty, \\ \bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \bar{r}_3 &= -U(G + Y)e \quad e \\ \bar{r}_4 &= -V(G - Y)e, \end{aligned}$$

que é o mesmo sistema dado pela Equação (4.3) com $\mu = 0$.

Resolvendo o sistema (4.8), obtemos as direções afim $\bar{d}x, \bar{d}y, \bar{d}u, \bar{d}v$. Assim, temos o sistema

$$A^t \bar{d}y = \bar{r}_1 \quad (4.9)$$

$$A\bar{d}x + \bar{d}u - \bar{d}v = \bar{r}_2 \quad (4.10)$$

$$U\bar{d}y + [G + Y + UG_2] \bar{d}u + UG_2 \bar{d}v = \bar{r}_3 \quad (4.11)$$

$$-V\bar{d}y + VG_2 \bar{d}u + [G - Y + VG_2] \bar{d}v = \bar{r}_4. \quad (4.12)$$

Fazendo a mesma eliminação de variáveis utilizada no método barreira logarítmica, obtemos as direções

$$\begin{aligned} \bar{d}x &= \left(A^t \bar{D} A\right)^{-1} \bar{r}, \\ \bar{d}y &= \bar{D} \left\{ \bar{r}_2 - A\bar{d}x - \bar{D}_u^{-1} \bar{r}_3 + \left[\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}\right]^{-1} \left(I + \bar{D}_u^{-1} UG_2\right) \left(\bar{r}_4 - \bar{D}_u^{-1} VG_2 \bar{r}_3\right) \right\}, \\ \bar{d}v &= \left[\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}\right]^{-1} \left[\bar{r}_4 + V\bar{d}y + \bar{D}_u^{-1} \left(-VG_2 \bar{r}_3 + VUG_2 \bar{d}y\right)\right], \\ \bar{d}u &= \bar{D}_u^{-1} \left(\bar{r}_3 - U\bar{d}y - UG_2 \bar{d}v\right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= -A^t y, \\ \bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \bar{r}_3 &= -U(G + Y)e, \\ \bar{r}_4 &= -V(G - Y)e, \\ \bar{D}_u &= [G + Y + UG_2], \\ \bar{D}_v &= [G - Y + VG_2], \\ \bar{D} &= \left\{ -\bar{D}_u^{-1} U - \left[\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}\right]^{-1} V \left(I + \bar{D}_u^{-1} UG_2\right)^2 \right\}^{-1}, \\ \bar{r} &= -\left\{ \bar{r}_1 - A^t \bar{D} \left[\bar{r}_2 - \bar{D}_u^{-1} \bar{r}_3 + \left[\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}\right]^{-1} \left(I + \bar{D}_u^{-1} UG_2\right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\bar{r}_4 - \bar{D}_u^{-1} VG_2 \bar{r}_3\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Obtemos então as direções afim do nosso problema [18]. Agora, podemos impor um

valor para o parâmetro barreira μ e resolver o segundo sistema linear que é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I \\ 0 & U & G + Y + UG_2 & UG_2 \\ 0 & -V & VG_2 & G - Y + VG_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{dx} \\ \hat{dy} \\ \hat{du} \\ \hat{dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= -A^t y, \\ \hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \hat{r}_3 &= -U(G + Y)e + \mu e - \bar{d}U\bar{d}Ve \quad e \\ \hat{r}_4 &= -V(G - Y)e + \mu e - \bar{d}U\bar{d}Ve, \end{aligned}$$

onde $\bar{d}U$ e $\bar{d}V$ são matrizes diagonais de $\bar{d}u$ e $\bar{d}v$ respectivamente (direções afim obtidas no primeiro sistema linear).

Observe que temos a mesma matriz nos dois sistemas lineares, a diferença entre eles se encontra apenas nos vetores $\bar{r}_3, \hat{r}_3$ e $\bar{r}_4, \hat{r}_4$. A fatoração da matriz não é afetada por μ , pois o mesmo aparece apenas nos vetores $\hat{r}_3$ e $\hat{r}_4$.

Assim, temos as direções

$$\begin{aligned} \hat{dx} &= (A^t \bar{D} A)^{-1} \hat{r}, \\ \hat{dy} &= \bar{D} \left\{ \hat{r}_2 - A \hat{dx} - \bar{D}_u^{-1} \hat{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D}_u^{-1} UG_2) (\hat{r}_4 - \bar{D}_u^{-1} VG_2 \hat{r}_3) \right\}, \\ \hat{dv} &= [\bar{D}_v - VUG_2^2 \bar{D}_u^{-1}]^{-1} [\hat{r}_4 + V \hat{dy} + \bar{D}_u^{-1} (-VG_2 \hat{r}_3 + VUG_2 \hat{dy})], \\ \hat{du} &= \bar{D}_u^{-1} (\hat{r}_3 - U \hat{dy} - UG_2 \hat{dv}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= -A^t y, \\ \hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \hat{r}_3 &= -U(G + Y)e + \mu e - \bar{d}U\bar{d}Ve, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{r}_4 &= -V(G - Y)e + \mu e - d\bar{U}d\bar{V}e, \\
\bar{D}_u &= [G + Y + UG_2], \\
\bar{D}_v &= [G - Y + VG_2], \\
\bar{D} &= \left\{ -\bar{D}_u^{-1}U - [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}V(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2)^2 \right\}^{-1}, \\
\hat{r} &= -\left\{ \hat{r}_1 - A^t\bar{D} \left[\hat{r}_2 - \bar{D}_u^{-1}\hat{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (\hat{r}_4 - \bar{D}_u^{-1}VG_2\hat{r}_3) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

O passo α , onde u e v permaneçam estritamente positivas, é dado por

$$\alpha = \min \left\{ \tau \left(\min_{\hat{d}u_i < 0} -\frac{u_i}{\hat{d}u_i} \right), \tau \left(\min_{\hat{d}v_i < 0} -\frac{v_i}{\hat{d}v_i} \right), 1 \right\},$$

onde $\tau = 0.9995$ [30].

Conhecendo as direções e os passos, todas as variáveis do problema podem ser atualizadas por

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \alpha \hat{d}x, \\
u^{k+1} &= u^k + \alpha \hat{d}u, \\
v^{k+1} &= v^k + \alpha \hat{d}v, \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha \hat{d}y.
\end{aligned}$$

A atualização do parâmetro barreira é dada por

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}, \quad \text{onde } \beta > 1.$$

Apresentamos agora o resumo do método de pontos interiores preditor-corretor para o problema L_p .

Dados x^0, y^0 e $(u^0, v^0) > 0$, μ^0 e $\beta > 1$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça

$$G = p(u_i + v_i)^{p-1}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= \text{diag} \left(\frac{p(p-1)}{(u_i + v_i)^{2-p}} \right) \\
\bar{r}_1 &= -A^t y \\
\bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b \\
\bar{r}_3 &= -U(G + Y)e \\
\bar{r}_4 &= -V(G - Y)e \\
\bar{D}_u &= [G + Y + UG_2] \\
\bar{D}_v &= [G - Y + VG_2] \\
\bar{D} &= \left\{ -\bar{D}_u^{-1}U - [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}V(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2)^2 \right\}^{-1} \\
\bar{r} &= -\left\{ \bar{r}_1 - A^t\bar{D} \left[\bar{r}_2 - \bar{D}_u^{-1}\bar{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. (\bar{r}_4 - \bar{D}_u^{-1}VG_2\bar{r}_3) \right] \right\} \\
\bar{d}x &= (A^t\bar{D}A)^{-1}\bar{r} \\
\bar{d}y &= \bar{D} \left\{ \bar{r}_2 - A\bar{d}x - \bar{D}_u^{-1}\bar{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2)(\bar{r}_4 - \bar{D}_u^{-1}VG_2\bar{r}_3) \right\} \\
\bar{d}v &= [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}[\bar{r}_4 + V\bar{d}y + \bar{D}_u^{-1}(-VG_2\bar{r}_3 + VUG_2\bar{d}y)] \\
\bar{d}u &= \bar{D}_u^{-1}(\bar{r}_3 - U\bar{d}y - UG_2\bar{d}v) \\
\hat{r}_1 &= -A^t y \\
\hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b \\
\hat{r}_3 &= -U(G + Y)e + \mu e - d\bar{U}d\bar{V}e \\
\hat{r}_4 &= -V(G - Y)e + \mu e - d\bar{U}d\bar{V}e \\
\hat{r} &= -\left\{ \hat{r}_1 - A^t\bar{D} \left[\hat{r}_2 - \bar{D}_u^{-1}\hat{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. (\hat{r}_4 - \bar{D}_u^{-1}VG_2\hat{r}_3) \right] \right\} \\
\hat{d}x &= (A^t\bar{D}A)^{-1}\hat{r} \\
\hat{d}y &= \bar{D} \left\{ \hat{r}_2 - A\hat{d}x - \bar{D}_u^{-1}\hat{r}_3 + [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}(I + \bar{D}_u^{-1}UG_2)(\hat{r}_4 - \bar{D}_u^{-1}VG_2\hat{r}_3) \right\} \\
\hat{d}v &= [\bar{D}_v - VUG_2^2\bar{D}_u^{-1}]^{-1}[\hat{r}_4 + V\hat{d}y + \bar{D}_u^{-1}(-VG_2\hat{r}_3 + VUG_2\hat{d}y)] \\
\hat{d}u &= \bar{D}_u^{-1}(\hat{r}_3 - U\hat{d}y - UG_2\hat{d}v) \\
\alpha &= \min \left\{ \tau \left(\min_{\hat{d}u_i < 0} -\frac{u_i}{\hat{d}u_i} \right), \tau \left(\min_{\hat{d}v_i < 0} -\frac{v_i}{\hat{d}v_i} \right), 1 \right\} \\
u^{k+1} &= u^k + \alpha \hat{d}u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{k+1} &= v^k + \alpha \hat{d}v \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha \hat{d}x \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha \hat{d}y \\
\mu^{k+1} &= \frac{\mu^k}{\beta}
\end{aligned}$$

4.2.1 Algumas Considerações

O critério de convergência e o ponto inicial são os mesmos utilizados no método de pontos interiores barreira logarítmica.

Sabemos que na maioria dos métodos de pontos interiores o passo mais caro em termos computacionais é a solução do sistema linear com uma matriz do tipo A^tDA , onde D é uma matriz diagonal. Apesar de resolvermos dois sistemas lineares em cada iteração, os cálculos utilizados para construir a matriz e sua decomposição são efetuados uma única vez pois a matriz é a mesma nos dois sistemas lineares. Assim, esperamos obter uma redução do esforço computacional em relação ao método de pontos interiores barreira logarítmica como acontece em otimização linear [16].

4.3 Método Primal-Dual Barreira Logarítmica

De (4.2), sabemos que

$$\underset{J(x,y,u,v)}{\nabla L} = \begin{bmatrix} A^t y \\ Ax + u - v - b \\ (G - \mu U^{-1} + Y)e \\ (G - \mu V^{-1} - Y)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

onde U e V são matrizes diagonais cujos elementos diagonais são u e v respectivamente e $e = (1, 1, \dots, 1)$.

Agora, sejam $z_u = \mu U^{-1}e$ e $z_v = \mu V^{-1}e$. Obtemos assim um problema estritamente

primal-dual [7],

$$\underbrace{\nabla L}_{J(x,y,u,v,z_u,z_v)} = \begin{bmatrix} A^t y \\ Ax + u - v - b \\ (G - Z_u + Y)e \\ (G - Z_v - Y)e \\ UZ_ue \\ VZ_ve \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu e \\ \mu e \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Utilizando o Método de Newton, chegamos a

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & G_2 & G_2 & -I & 0 \\ 0 & -I & G_2 & G_2 & 0 & -I \\ 0 & 0 & Z_u & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_v & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ du \\ dv \\ dz_u \\ dz_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1 &= -A^t y, \\ r_2 &= -Ax - u + v + b, \\ r_3 &= (-G + Z_u - Y)e, \\ r_4 &= (-G + Z_v + Y)e, \\ r_5 &= -UZ_ue + \mu e \quad e \\ r_6 &= -VZ_ve + \mu e. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema (4.15), obtemos as direções $dx, dy, du, dv, dz_u, dz_v$. Assim, temos o sistema

$$A^t dy = r_1 \quad (4.16)$$

$$Adx + du - dv = r_2 \quad (4.17)$$

$$dy + G_2 du + G_2 dv - dz_u = r_3 \quad (4.18)$$

$$-dy + G_2 du + G_2 dv - dz_v = r_4 \quad (4.19)$$

$$Z_u du + U dz_u = r_5 \quad (4.20)$$

$$Z_v dv + V dz_v = r_6. \quad (4.21)$$

Da Equação (4.20),

$$\begin{aligned} Z_u du + U dz_u &= r_5 \\ \Rightarrow U dz_u &= r_5 - Z_u du \\ \Rightarrow dz_u &= U^{-1}(r_5 - Z_u du) \end{aligned}$$

Da Equação (4.21),

$$\begin{aligned} Z_v dv + V dz_v &= r_6 \\ \Rightarrow V dz_v &= r_6 - Z_v dv \\ \Rightarrow dz_v &= V^{-1}(r_6 - Z_v dv) \end{aligned}$$

Da Equação (4.18),

$$\begin{aligned} dy + G_2 du + G_2 dv - dz_u &= r_3 \\ \Rightarrow G_2 du &= r_3 - dy - G_2 dv + dz_u \\ \Rightarrow G_2 du &= r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1}(r_5 - Z_u du) \\ \Rightarrow (G_2 + U^{-1}Z_u) du &= r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1}r_5 \\ \Rightarrow du &= (G_2 + U^{-1}Z_u)^{-1}(r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1}r_5). \end{aligned}$$

Fazendo $Dz_u = (G_2 + U^{-1}Z_u)$, obtemos

$$du = Dz_u^{-1} \left(r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1}r_5 \right).$$

Agora, da Equação (4.19),

$$\begin{aligned}
& -dy + G_2 du + G_2 dv - dz_v = r_4 \\
& \Rightarrow G_2 dv = r_4 + dy - G_2 du + dz_v \\
& \Rightarrow G_2 dv = r_4 + dy - G_2 [Dz_u^{-1} (r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1} r_5)] + V^{-1} (r_6 - Z_v dv) \\
& \Rightarrow (G_2 + V^{-1} Z_v - G_2^2 Dz_u^{-1}) dv = r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6 \\
& \Rightarrow dv = (G_2 + V^{-1} Z_v - G_2^2 Dz_u^{-1})^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6].
\end{aligned}$$

Fazendo $Dz_v = (G_2 + V^{-1} Z_v)$, obtemos

$$dv = [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6].$$

Da Equação (4.17),

$$Adx + du - dv = r_2$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow Adx + Dz_u^{-1} (r_3 - dy - G_2 dv + U^{-1} r_5) - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + \\
& + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] = r_2 \\
& \Rightarrow Adx + Dz_u^{-1} \left\{ r_3 - dy - G_2 [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + \right. \\
& + V^{-1} r_6] + U^{-1} r_5 \left. \right\} - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 + G_2 dy - G_2 U^{-1} r_5) + \\
& + V^{-1} r_6] = r_2 \\
& \Rightarrow -D_u^{-1} dy - Dz_u^{-1} G_2 [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) dy - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} \times \\
& \times (I + Dz_u^{-1} G_2) dy = r_2 - Adx - Dz_u^{-1} \left\{ r_3 - G_2 \left[(Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1})^{-1} (r_4 + Dz_u^{-1} \times \right. \right. \\
& \times (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6 \left. \right] + U^{-1} r_5 \left. \right\} - (Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1})^{-1} (r_4 + Dz_u^{-1} \times \\
& \times (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6) \\
& \Rightarrow \left\{ -Dz_u^{-1} - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2)^2 \right\} dy = r_2 - Adx - Dz_u^{-1} r_3 + \\
& + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) [r_4 - Dz_u^{-1} (G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dy &= \left\{ -Dz_u^{-1} - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2)^2 \right\}^{-1} \left\{ r_2 - Adx - Dz_u^{-1} r_3 + \right. \\ &\quad \left. + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) [r_4 - Dz_u^{-1} (G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo $D = \left\{ -Dz_u^{-1} - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2)^2 \right\}^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} dy &= D \left\{ r_2 - Adx - Dz_u^{-1} r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) [r_4 - Dz_u^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, de (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} A^t dy &= r_1 \\ \Rightarrow A^t D \left\{ r_2 - Adx - Dz_u^{-1} r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) [r_4 - Dz_u^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right\} = r_1 \\ \Rightarrow -A^t D Adx &= r_1 - A^t D \left\{ r_2 - Dz_u^{-1} r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times [r_4 - Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right\} \\ \Rightarrow dx &= (-A^t DA)^{-1} \left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - Dz_u^{-1} r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times [r_4 - Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Definindo $r = -\left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - Dz_u^{-1} r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1} G_2) \times \right. \right.$
 $\times \left. \left. [r_4 - Dz_u^{-1} (-G_2 r_3 - G_2 U^{-1} r_5) + V^{-1} r_6] \right] \right\}$, obtemos

$$dx = (A^t DA)^{-1} r.$$

Agora, vamos calcular o passo α , onde u, v, dz_u e dz_v permaneçam estritamente positivas.

$$\alpha = \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), \tau \left(\min_{dz_{ui} < 0} -\frac{z_{ui}}{dz_{ui}} \right), \tau \left(\min_{dz_{vi} < 0} -\frac{z_{vi}}{dz_{vi}} \right), 1 \right\},$$

onde $\tau = 0.9995$ [30].

Conhecendo as direções e os passos, todas as variáveis do problema podem ser atualizadas por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha dx,$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha dy,$$

$$u^{k+1} = u^k + \alpha du,$$

$$v^{k+1} = v^k + \alpha dv,$$

$$z_u^{k+1} = z_u^k + \alpha dz_u,$$

$$z_v^{k+1} = z_v^k + \alpha dz_v.$$

A atualização do parâmetro barreira é dada por

$$\mu = \gamma\phi, \quad \text{onde } \gamma = u^t z_u + v^t z_v \text{ e } \phi = \frac{1}{m\sqrt{m}}.$$

Apresentamos agora o resumo do método de pontos interiores primal-dual barreira logarítmica para o problema L_p .

Dados x^0, y^0 e $(u^0, v^0) > 0, (z_u^0, z_v^0) > 0, \mu^0$ e $\beta > 1$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça

$$\begin{aligned} G &= p(u_i + v_i)^{p-1} \\ G_2 &= \text{diag} \left(\frac{p(p-1)}{(u_i + v_i)^{2-p}} \right) \\ r_1 &= -A^t y \\ r_2 &= -Ax - u + v + b \\ r_3 &= (-G + Z_u - Y)e \\ r_4 &= (-G + Z_v + Y)e \\ r_5 &= -U Z_u e + \mu e \\ r_6 &= -V Z_v e + \mu e \\ Dz_u &= (G_2 + U^{-1} Z_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Dz_v &= (G_2 + V^{-1}Z_v) \\
D &= \left\{ -Dz_u^{-1} - [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1}G_2)^2 \right\}^{-1} \\
r &= -\left\{ r_1 - A^t D \left[r_2 - Dz_u^{-1}r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1}G_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. [r_4 - Dz_u^{-1}(-G_2r_3 - G_2U^{-1}r_5) + V^{-1}r_6] \right] \right\} \\
dx &= (A^t DA)^{-1} r \\
dy &= D \left\{ r_2 - Adx - Dz_u^{-1}r_3 + [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} (I + Dz_u^{-1}G_2) [r_4 - Dz_u^{-1} \times \right. \\
&\quad \times (G_2r_3 - G_2U^{-1}r_5) + V^{-1}r_6] \left. \right\} \\
dv &= [Dz_v - G_2^2 Dz_u^{-1}]^{-1} [r_4 + dy + Dz_u^{-1}(-G_2r_3 + G_2dy - G_2U^{-1}r_5) + V^{-1}r_6] \\
du &= Dz_u^{-1} (r_3 - dy - G_2dv + U^{-1}r_5) \\
dz_u &= U^{-1}(r_5 - Z_u du) \\
dz_v &= V^{-1}(r_6 - Z_v dv) \\
\alpha &= \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), \tau \left(\min_{dz_{ui} < 0} -\frac{z_{ui}}{dz_{ui}} \right), \tau \left(\min_{dz_{vi} < 0} -\frac{z_{vi}}{dz_{vi}} \right), 1 \right\} \\
u^{k+1} &= u^k + \alpha du \\
v^{k+1} &= v^k + \alpha dv \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha dx \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha dy \\
z_u^{k+1} &= z_u^k + \alpha dz_u \\
z_v^{k+1} &= z_v^k + \alpha dz_v \\
\gamma &= u^t z_u + v^t z_v \\
\phi &= \frac{1}{m\sqrt{m}} \\
\mu &= \gamma\phi
\end{aligned}$$

Até convergir.

4.3.1 Critério de Convergência

O critério de convergência é baseado nas condições de otimalidade (4.14):

$$N = \frac{\|\nabla L\|}{(1 + \|x\| + \|u\| + \|v\| + \|y\| + \|z_u\| + \|z_v\|)(2n)} \leq \epsilon.$$

Utilizamos também um critério de convergência baseado na diferença dos valores de N atual e da iteração anterior:

$$\left| N^{k+1} - N^k \right| \leq \epsilon_1.$$

4.3.2 Algumas Considerações

Note que apesar de contar mais variáveis, o maior esforço computacional deste método consiste em resolver um sistema linear com a mesma dimensão e estrutura do método barreira logarítmica. Um ponto inicial para as novas variáveis pode ser dado por (4.1.2) e $z_u = z_v = (1, \dots, 1)^t$.

4.4 Método Primal-Dual Preditor-Corretor

Sabemos que no método primal-dual preditor-corretor, primeiramente tomamos a direção afim em que o parâmetro barreira $\mu = 0$. Então, temos que resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & G_2 & G_2 & -I & 0 \\ 0 & -I & G_2 & G_2 & 0 & -I \\ 0 & 0 & Z_u & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_v & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}x \\ \bar{d}y \\ \bar{d}u \\ \bar{d}v \\ \bar{d}z_u \\ \bar{d}z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \\ \bar{r}_4 \\ \bar{r}_5 \\ \bar{r}_6 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= -A^t y, \\ \bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \bar{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e, \\ \bar{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e, \\ \bar{r}_5 &= -UZ_u e \quad e \\ \bar{r}_6 &= -VZ_v e. \end{aligned}$$

que é o mesmo sistema dado pela Equação (4.15) com $\mu = 0$.

Resolvendo o sistema (4.22), obtemos as direções $\bar{d}x, \bar{d}y, \bar{d}u, \bar{d}v, \bar{d}z_u, \bar{d}z_v$. Assim, temos o sistema

$$A^t \bar{d}y = \bar{r}_1 \quad (4.23)$$

$$A \bar{d}x + \bar{d}u - \bar{d}v = \bar{r}_2 \quad (4.24)$$

$$\bar{d}y + G_2 \bar{d}u + G_2 \bar{d}v - \bar{d}z_u = \bar{r}_3 \quad (4.25)$$

$$-\bar{d}y + G_2 \bar{d}u + G_2 \bar{d}v - \bar{d}z_v = \bar{r}_4 \quad (4.26)$$

$$Z_u \bar{d}u + U \bar{d}z_u = \bar{r}_5 \quad (4.27)$$

$$Z_v \bar{d}v + V \bar{d}z_v = \bar{r}_6. \quad (4.28)$$

Fazendo a mesma eliminação de variáveis utilizada no método primal-dual barreira logarítmica, obtemos as direções

$$\begin{aligned} \bar{d}x &= (A^t \bar{D} A)^{-1} \bar{r}, \\ \bar{d}y &= \bar{D} \left\{ \bar{r}_2 - A \bar{d}x - \bar{D} z_u^{-1} \bar{r}_3 + [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D} z_u^{-1} G_2) [\bar{r}_4 - \bar{D} z_u^{-1} \times \right. \\ &\quad \times (G_2 \bar{r}_3 - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6] \Big\}, \\ \bar{d}v &= [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} [\bar{r}_4 + \bar{d}y + \bar{D} z_u^{-1} (-G_2 \bar{r}_3 + G_2 \bar{d}y - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6], \\ \bar{d}u &= \bar{D} z_u^{-1} (\bar{r}_3 - \bar{d}y - G_2 \bar{d}v + U^{-1} \bar{r}_5), \\ \bar{d}z_u &= U^{-1} (\bar{r}_5 - Z_u \bar{d}u), \\ \bar{d}z_v &= V^{-1} (\bar{r}_6 - Z_v \bar{d}v), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= -A^t y, \\ \bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\ \bar{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e, \\ \bar{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e, \\ \bar{r}_5 &= -U Z_u e, \\ \bar{r}_6 &= -V Z_v e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}z_u &= (G_2 + U^{-1}Z_u), \\
\bar{D}z_v &= (G_2 + V^{-1}Z_v), \\
\bar{D} &= \left\{ -\bar{D}z_u^{-1} - [\bar{D}z_v - G_2^2 \bar{D}z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D}z_u^{-1}G_2)^2 \right\}^{-1}, \\
\bar{r} &= -\left\{ \bar{r}_1 - A^t \bar{D} \left[\bar{r}_2 - \bar{D}z_u^{-1} \bar{r}_3 + [\bar{D}z_v - G_2^2 \bar{D}z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D}z_u^{-1}G_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. [\bar{r}_4 - \bar{D}z_u^{-1} (-G_2 \bar{r}_3 - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Obtemos então as direções afim do nosso problema. Agora, podemos impor um valor para o parâmetro barreira μ e resolver o segundo sistema linear que é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & G_2 & G_2 & -I & 0 \\ 0 & -I & G_2 & G_2 & 0 & -I \\ 0 & 0 & Z_u & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_v & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}x \\ \hat{d}y \\ \hat{d}u \\ \hat{d}v \\ \hat{d}z_u \\ \hat{d}z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{r}_5 \\ \hat{r}_6 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{r}_1 &= -A^t y, \\
\hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\
\hat{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e, \\
\hat{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e, \\
\hat{r}_5 &= -UZ_u e + \mu e - \bar{d}U d\bar{Z}_u e \quad e, \\
\hat{r}_6 &= -VZ_v e + \mu e - \bar{d}V d\bar{Z}_v e,
\end{aligned}$$

onde $\bar{d}U, \bar{d}V, d\bar{Z}_u$ e $d\bar{Z}_v$ são matrizes diagonais de $\bar{d}u, \bar{d}v, d\bar{z}_u$ e $d\bar{z}_v$ respectivamente (direções afins obtidas no primeiro sistema linear).

Lembremos novamente que a matriz é mesma nos dois sistemas lineares, a diferença entre eles se encontra apenas nos vetores $\bar{r}_3, \hat{r}_3$ e $\bar{r}_4, \hat{r}_4$. A fatoração da matriz não é

afetada por μ , pois o mesmo aparece apenas nos vetores $\hat{r}_3$ e $\hat{r}_4$.

Assim, temos as direções

$$\begin{aligned}
\hat{dx} &= (A^t \bar{D} A)^{-1} \hat{r}, \\
\hat{dy} &= \bar{D} \left\{ \hat{r}_2 - A \hat{dx} - \bar{D} z_u^{-1} \hat{r}_3 + [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D} z_u^{-1} G_2) [\hat{r}_4 - \bar{D} z_u^{-1} \times \right. \\
&\quad \times (G_2 \hat{r}_3 - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6] \left. \right\}, \\
\hat{dv} &= [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} [\hat{r}_4 + \hat{dy} + \bar{D} z_u^{-1} (-G_2 \hat{r}_3 + G_2 \hat{dy} - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6], \\
\hat{du} &= \bar{D} z_u^{-1} (\hat{r}_3 - \hat{dy} - G_2 \hat{dv} + U^{-1} \hat{r}_5), \\
\hat{dz}_u &= U^{-1} (\hat{r}_5 - Z_u \hat{du}), \\
\hat{dz}_v &= V^{-1} (\hat{r}_6 - Z_v \hat{dv}),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{r}_1 &= -A^t y, \\
\hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b, \\
\hat{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e, \\
\hat{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e, \\
\hat{r}_5 &= -U Z_u e, \\
\hat{r}_6 &= -V Z_v e, \\
\bar{D} z_u &= (G_2 + U^{-1} Z_u), \\
\bar{D} z_v &= (G_2 + V^{-1} Z_v), \\
\bar{D} &= \left\{ -\bar{D} z_u^{-1} - [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D} z_u^{-1} G_2)^2 \right\}^{-1}, \\
\hat{r} &= - \left\{ \hat{r}_1 - A^t \bar{D} \left[\hat{r}_2 - \bar{D} z_u^{-1} \hat{r}_3 + [\bar{D} z_v - G_2^2 \bar{D} z_u^{-1}]^{-1} (I + \bar{D} z_u^{-1} G_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. [\hat{r}_4 - \bar{D} z_u^{-1} (-G_2 \hat{r}_3 - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o passo α , onde u, v, dz_u e dz_v permaneçam estritamente positivas.

$$\alpha = \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), \tau \left(\min_{dz_{ui} < 0} -\frac{z_{ui}}{dz_{ui}} \right), \tau \left(\min_{dz_{vi} < 0} -\frac{z_{vi}}{dz_{vi}} \right), 1 \right\},$$

onde $\tau = 0.9995$ [30].

Conhecendo as direções e os passos, todas as variáveis do problema podem ser atualizadas por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha dx,$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha dy,$$

$$u^{k+1} = u^k + \alpha du,$$

$$v^{k+1} = v^k + \alpha dv,$$

$$z_u^{k+1} = z_u^k + \alpha dz_u,$$

$$z_v^{k+1} = z_v^k + \alpha dz_v.$$

A atualização do parâmetro barreira é dada por

$$\mu = \gamma\phi, \quad \text{onde } \gamma = u^t z_u + v^t z_v \text{ e } \phi = \frac{1}{m\sqrt{m}}.$$

Apresentamos agora o resumo do método de pontos interiores primal-dual preditor-corretor para o problema L_p .

Dados x^0, y^0 e $(u^0, v^0) > 0$, $(z_u^0, z_v^0) > 0$, μ^0 e $\beta > 1$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça

$$\begin{aligned} G &= p(u_i + v_i)^{p-1} \\ G_2 &= \text{diag} \left(\frac{p(p-1)}{(u_i + v_i)^{2-p}} \right) \\ \bar{r}_1 &= -A^t y \\ \bar{r}_2 &= -Ax - u + v + b \\ \bar{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e \\ \bar{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e \\ \bar{r}_5 &= -U Z_u e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_6 &= -VZ_v e \\
D\bar{z}_u &= (G_2 + U^{-1}Z_u) \\
D\bar{z}_v &= (G_2 + V^{-1}Z_v) \\
\bar{D} &= \left\{ -D\bar{z}_u^{-1} - [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} (I + D\bar{z}_u^{-1}G_2)^2 \right\}^{-1} \\
\bar{r} &= -\left\{ \bar{r}_1 - A^t \bar{D} \left[\bar{r}_2 - D\bar{z}_u^{-1} \bar{r}_3 + [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} (I + D\bar{z}_u^{-1}G_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. [\bar{r}_4 - D\bar{z}_u^{-1} (-G_2 \bar{r}_3 - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6] \right] \right\} \\
\bar{d}x &= (A^t \bar{D} A)^{-1} \bar{r} \\
\bar{d}y &= \bar{D} \left\{ \bar{r}_2 - A \bar{d}x - D\bar{z}_u^{-1} \bar{r}_3 + [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} (I + D\bar{z}_u^{-1}G_2) [\bar{r}_4 - D\bar{z}_u^{-1} \times \right. \\
&\quad \times \left. (G_2 \bar{r}_3 - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6] \right\} \\
\bar{d}v &= [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} [\bar{r}_4 + \bar{d}y + D\bar{z}_u^{-1} (-G_2 \bar{r}_3 + G_2 \bar{d}y - G_2 U^{-1} \bar{r}_5) + V^{-1} \bar{r}_6] \\
\bar{d}u &= D\bar{z}_u^{-1} (\bar{r}_3 - \bar{d}y - G_2 \bar{d}v + U^{-1} \bar{r}_5) \\
\bar{d}z_u &= U^{-1} (\bar{r}_5 - Z_u \bar{d}u) \\
\bar{d}z_v &= V^{-1} (\bar{r}_6 - Z_v \bar{d}v) \\
\hat{r}_1 &= -A^t y \\
\hat{r}_2 &= -Ax - u + v + b \\
\hat{r}_3 &= (-G + Z_u - Y)e \\
\hat{r}_4 &= (-G + Z_v + Y)e \\
\hat{r}_5 &= -UZ_u e + \mu e - d\bar{U} d\bar{Z}_u e \\
\hat{r}_6 &= -VZ_v e + \mu e - d\bar{V} d\bar{Z}_v e \\
\hat{r} &= -\left\{ \hat{r}_1 - A^t \bar{D} \left[\hat{r}_2 - D\bar{z}_u^{-1} \hat{r}_3 + [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} (I + D\bar{z}_u^{-1}G_2) \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. [\hat{r}_4 - D\bar{z}_u^{-1} (-G_2 \hat{r}_3 - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6] \right] \right\} \\
\hat{d}x &= (A^t \bar{D} A)^{-1} \hat{r} \\
\hat{d}y &= \bar{D} \left\{ \hat{r}_2 - A \hat{d}x - D\bar{z}_u^{-1} \hat{r}_3 + [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} (I + D\bar{z}_u^{-1}G_2) [\hat{r}_4 - D\bar{z}_u^{-1} \times \right. \\
&\quad \times \left. (G_2 \hat{r}_3 - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6] \right\} \\
\hat{d}v &= [D\bar{z}_v - G_2^2 D\bar{z}_u^{-1}]^{-1} [\hat{r}_4 + \hat{d}y + D\bar{z}_u^{-1} (-G_2 \hat{r}_3 + G_2 \hat{d}y - G_2 U^{-1} \hat{r}_5) + V^{-1} \hat{r}_6] \\
\hat{d}u &= D\bar{z}_u^{-1} (\hat{r}_3 - \hat{d}y - G_2 \hat{d}v + U^{-1} \hat{r}_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\hat{z}_u &= U^{-1}(\hat{r}_5 - Z_u d\hat{u}) \\
d\hat{z}_v &= V^{-1}(\hat{r}_6 - Z_v d\hat{v}) \\
\alpha &= \min \left\{ \tau \left(\min_{du_i < 0} -\frac{u_i}{du_i} \right), \tau \left(\min_{dv_i < 0} -\frac{v_i}{dv_i} \right), \tau \left(\min_{dz_{ui} < 0} -\frac{z_{ui}}{dz_{ui}} \right), \tau \left(\min_{dz_{vi} < 0} -\frac{z_{vi}}{dz_{vi}} \right), 1 \right\} \\
u^{k+1} &= u^k + \alpha d\hat{u} \\
v^{k+1} &= v^k + \alpha d\hat{v} \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha d\hat{x} \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha d\hat{y} \\
z_u^{k+1} &= z_u^k + \alpha d\hat{z}_u \\
z_v^{k+1} &= z_v^k + \alpha d\hat{z}_v \\
\gamma &= u^t z_u + v^t z_v \\
\phi &= \frac{1}{m\sqrt{m}} \\
\mu &= \gamma\phi
\end{aligned}$$

4.4.1 Algumas Considerações

O critério de convergência e o ponto inicial são os mesmos utilizados no método de pontos interiores primal-dual.

4.5 Regressão Polinomial

Consideremos o caso especial onde os dados são aproximados por um polinômio de grau $d = m - 1$. Nesta situação, a matriz de restrição tem a mesma estrutura de

$$V^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \beta_2^{m-1} & \dots & \beta_n^{m-1} \end{pmatrix}$$

na qual é denominada matriz de Vandermonde retangular, onde $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = b$.

Um procedimento para calcular o produto de V por um vetor x , $w = Vx$ é dado

por

$$\begin{aligned} w_i &\leftarrow x_m \\ w_i &\leftarrow x_j + \beta_i w_i \text{ (para } j = m-1, \dots, 1). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Além disso, o produto $H = VD^*V^t$, onde D^* é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais dependem do método, tem a estrutura especial de uma matriz de Hankel, seus elementos são constantes ao longo de suas antidiagonais. Isto é,

$$H = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_m \\ \eta_2 & \eta_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \eta_{2m-2} \\ \eta_m & \dots & \eta_{2m-2} & \eta_{2m-1} \end{pmatrix}$$

Utilizando cuidadosamente esta estrutura, a complexidade computacional de uma iteração pode ser reduzida. A razão é que há algoritmos $O(m^2)$ para resolver sistemas de Hankel (por exemplo, [28]) e H pode ser obtida em $O(nm)$ flops desde que somente $2m-1$ elementos sejam calculados. Assim, a complexidade do pior caso de uma iteração é reduzida a $O(n^2)$ para o método GNCS devido à busca linear e $O(nm)$ para demais métodos. Observe que estas mudanças não afetam o procedimento de busca linear do GNCS. Por isso, quando n torna-se muito maior que m o desempenho do método GNCS pode piorar mais rápido do que os métodos de pontos interiores.

Observação 4.5.1 *Flops é uma sigla para o número de operações de pontos flutuantes. No Matlab a função flops fornece um valor quase exato do número de operações de pontos flutuantes. Adições, subtrações, multiplicações e divisões são 1 flop cada se o resultado é real. Funções elementares também são 1 flop se o número é real.*

Exemplo 4.5.1 *Se A e B são matrizes reais $n \times n$, então*

$$A + B = n^2 \text{ flops,}$$

$$A * B = 2 * n^3 \text{ flops.}$$

Embora o tempo das diferentes operações de ponto flutuante seja diferente, a proporção dessas operações é aproximadamente a mesma em todos os métodos vistos. Portanto, esta é uma medida convicta de comparação entre estes métodos.

Talvez o resultado mais surpreendente seja o fato de que não precisamos guardar nenhuma matriz em todos os métodos estudados, devido a estrutura especial de V . Os produtos matriz-vetor Vx ou $V^t y$ podem ser calculados na quantidade usual de flops sem que sejam armazenados. Do mesmo modo calculamos H de V . Uma vez que H tem somente $2m - 1$ elementos com valores diferentes, ele pode ser armazenado como um vetor. Além disso, é possível calcular sua inversa em $O(m^2)$ flops [28] e resolver simultaneamente o sistema linear. Assim, a matriz não é armazenada em nenhum procedimento. Note que o método de Trench [28] pode ser aplicado porque H é definida positiva - assim todas as submatrizes principais são não-singulares. Um método onde pode ser conveniente (mas não necessário) armazenar uma matriz é o preditor-corretor. A metade inferior de H^{-1} poderia ser armazenada para resolver o segundo sistema linear mais rapidamente.

Um procedimento para calcular o produto matriz-vetor $w = Vx$ com $2n(m - 1)$ flops é dado em (4.30) - note que $w_i = \sum_{j=1}^m \beta_i^j x_j$. Um procedimento para obter $z = V^t y$ com $2nm - n$ flops é dado a seguir - note que z pode ser escrito como

$$z = \sum_{i=1}^n y^t (1, \beta_i, \beta_i^2, \dots, \beta_i^{m-1}).$$

Procedimento para calcular $z = V^t y$

$z \leftarrow 0$

Para $i = 1, \dots, n$ faça

$\sigma \leftarrow y_i$

$z_1 \leftarrow z_1 + y_i$

Para $j = 2, \dots, m$ faça

$\sigma \leftarrow \beta_i \sigma$

$z_j \leftarrow z_j + \sigma.$

Observe que, em geral, o produto matriz-vetor custa $2nm$ flops. Este custo pode ser reduzido a $2nm - n$ flops considerando que todos os componentes a primeira coluna de V são 1. Neste contexto, o custo de calcular os valores $(\beta_i)^j$ também precisa ser considerado. Ele equivale a $n(m - 2)$ flops. No entanto, este cálculo é feito somente uma vez, antes do início das iterações. Por isso, os procedimentos dados anteriormente não somente evitam o armazenamento da matriz V mas de fato são ligeiramente mais baratos do que o procedimento geral.

Um procedimento semelhante para calcular a matriz H é dado a seguir, onde δ_i^* é o i -ésimo elemento da diagonal de D^* . O procedimento custa $4nm - 3n$ flops.

Procedimento para calcular H

$H \leftarrow 0$

Para $i = 1, \dots, n$ faça

$\sigma \leftarrow \delta_i^*$

$\eta_1 \leftarrow \eta_1 + \delta_i^*$

Para $j = 2, \dots, 2m - 1$ faça

$\sigma \leftarrow \beta_i \sigma$

$\eta_j \leftarrow \eta_j + \sigma.$

Há ainda outra melhoria para o problema de regressão polinomial. É muito fácil encontrar uma base sem armazenar qualquer matriz como anteriormente. Para calculá-la, é suficiente selecionar os m menores resíduos $|r_i|$ de r e interpolar os pontos correspondentes. Como os valores de β_i são todos distintos, qualquer conjunto de colunas de V levará a uma matriz não singular para interpolação.

Na implementação descrita em [21], os menores resíduos de m são encontrados uti-

lizando o algoritmo “heap” [26]. Uma vez são necessários somente os m menores elementos, este algoritmo é adequado para nossa aplicação porque ele não precisa ordenar o vetor inteiro r . A complexidade computacional é $O(n \log(n))$. Após encontrado os pontos, a interpolação é calculada em $O(m^2)$ flops por diferenças divididas.

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Apresentamos neste capítulo os resultados computacionais obtidos pelos métodos de pontos interiores aplicados ao problema de regressão pela norma L_p e a comparação com os resultados do método de convergência quadrática GNCS apresentado no Capítulo 3.

O método de pontos interiores barreira logarítmica, referido como BL, o método primal-dual barreira logarítmica, referido como PD, assim como o método preditor-corretor, referido como PC, o método primal-dual preditor-corretor, referido como PDPC, e o método de convergência quadrática GNCS foram implementados em Matlab 5.3, com o sistema operacional Windows Milenium, processador Intel Celeron 700MHz.

Seguindo [13], aproximamos $f(z)$, calculado em $z = 0, \frac{1}{m}, \dots, 1$, por um polinômio de grau $n - 1$: $p(z) = \sum_{j=1}^n x_j z^{j-1}$ tal que as normas L_p são minimizadas. As duas funções testes utilizadas são

$$f_1(z) = \sqrt{1+z}, \quad f_2(z) = e^z + \begin{cases} 5, & \text{se } 0.1 < z < 0.2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A primeira função $f_1(z)$ é contínua, enquanto a segunda função $f_2(z)$ não é. Os elementos da matriz A são compostos da seguinte forma: a primeira coluna é formada por um vetor unitário e a segunda coluna por elementos de 0 a 1. O vetor b é o valor da função obtido em cada ponto da segunda coluna de A .

Os gráficos das funções são representados por:

Figura 5.1: Função $f_1(z)$

Figura 5.2: Função $f_2(z)$

Primeiramente, utilizando a função $f_1(z)$ com $n = 2$, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,1000 \\ 1,0000 & 0,2000 \\ 1,0000 & 0,3000 \\ 1,0000 & 0,4000 \\ 1,0000 & 0,5000 \\ 1,0000 & 0,6000 \\ 1,0000 & 0,7000 \\ 1,0000 & 0,8000 \\ 1,0000 & 0,9000 \\ 1,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \text{e } b = \begin{bmatrix} 1,0488 \\ 1,0954 \\ 1,1402 \\ 1,1832 \\ 1,2247 \\ 1,2649 \\ 1,3038 \\ 1,3416 \\ 1,3784 \\ 1,4142 \end{bmatrix}.$$

Agora, utilizando a função $f_2(z)$ com $n = 2$, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,1000 \\ 1,0000 & 0,2000 \\ 1,0000 & 0,3000 \\ 1,0000 & 0,4000 \\ 1,0000 & 0,5000 \\ 1,0000 & 0,6000 \\ 1,0000 & 0,7000 \\ 1,0000 & 0,8000 \\ 1,0000 & 0,9000 \\ 1,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad \text{e } b = \begin{bmatrix} 1,1052 \\ 1,2214 \\ 1,3499 \\ 1,4918 \\ 1,6487 \\ 1,8221 \\ 2,0138 \\ 2,2255 \\ 2,4596 \\ 2,7183 \end{bmatrix}.$$

As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram os resultados obtidos pelos métodos de pontos interiores barreira logarítmica, preditor-corretor e o método GNCS utilizando $f_1(z)$ e $f_2(z)$ respectivamente. Utilizamos o parâmetro barreira $\mu = 0,001$ e os critérios de parada $\epsilon = 10^{-5}$ e $\epsilon_1 = 10^{-3}$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	6	8132	0,0398	9	15650	0,0398	11	13759	0,0398
1,1	1	1948	0,0245	1	2351	0,0245	11	13831	0,0238
1,2	1	1952	0,0146	1	2359	0,0146	15	18831	0,0142
1,3	1	1948	0,0091	1	2351	0,0090	6	7511	0,0085
1,4	1	1948	0,0052	1	2351	0,0052	6	7511	0,0051
1,5	1	1948	0,0031	1	2351	0,0031	6	7511	0,0031
1,6	1	1952	0,0018	1	2359	0,0018	6	7491	0,0018
1,7	1	1948	0,0011	1	2351	0,0011	5	6261	0,0011
1,8	1	1948	6,5573e-4	1	2351	6,5572e-4	4	5031	6,5427e-4
1,9	1	1948	3,9242e-4	1	2351	3,9242e-4	4	5031	3,9208e-4

Tabela 5.1: Resultados computacionais utilizando a função $f_1(z)$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	6	8137	0,5284	2	4031	0,5558	7	8705	0,5280
1,1	2	3205	0,4240	2	4031	0,4238	10	12431	0,4081
1,2	2	3205	0,3242	2	4031	0,3239	8	9971	0,3162
1,3	2	3205	0,2485	2	4031	0,2477	13	16331	0,2457
1,4	2	3205	0,1923	2	4031	0,1903	10	12511	0,1902
1,5	3	4476	0,1475	5	9105	0,1485	11	13741	0,1473
1,6	3	4476	0,1146	4	7405	0,1474	9	11331	0,1141
1,7	3	4476	0,0904	2	4011	0,1145	8	10081	0,0884
1,8	2	3195	0,0694	2	4011	0,0693	6	7581	0,0685
1,9	2	3195	0,0534	2	4011	0,0534	4	5011	0,0532

Tabela 5.2: Resultados computacionais utilizando a função $f_2(z)$.

Figura 5.3: Referente à tabela 5.1

Figura 5.4: Referente à tabela 5.2

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	2258	0,0385	1	2731	0,0401
1,1	11	17868	0,0237	1	2881	0,0220
1,2	9	14764	0,0141	1	2881	0,0143
1,3	9	14764	0,0085	1	2881	0,0088
1,4	8	13211	0,0051	6	13256	0,0041
1,5	7	11659	0,0030	6	13256	0,0027
1,6	7	11659	0,0018	1	2881	0,0020
1,7	6	10108	0,0011	1	2881	0,0013
1,8	5	8556	6,2227e-004	5	11181	6,2483e-004
1,9	4	7004	3,7436e-004	4	11181	3,7646e-004

Tabela 5.3: Utilizando a função $f_1(z)$: $z_u = u, z_v = v$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	2262	0,5589	1	2735	0,5406
1,1	6	10112	0,3834	7	15335	0,3033
1,2	7	11664	0,3112	4	9110	0,2944
1,3	5	8560	0,2261	4	9110	0,1152
1,4	5	8560	0,1830	4	9110	0,1302
1,5	5	8560	0,1446	4	9110	0,1089
1,6	5	8560	0,1138	4	9110	0,0918
1,7	7	11664	0,0879	4	9110	0,0769
1,8	7	11664	0,0682	4	9110	0,0630
1,9	7	11664	0,0530	4	9110	0,0507

Tabela 5.4: Utilizando a função $f_2(z)$: $z_u = u, z_v = v$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	3	5342	0,0363	4	8906	36,7509
1,1	3	5452	0,0219	4	9076	0,0265
1,2	3	5452	0,0134	4	9076	0,0138
1,3	7	11660	0,0082	4	9076	0,0080
1,4	5	8556	0,0043	4	9076	0,0044
1,5	5	8556	0,0028	4	9076	0,0027
1,6	6	10108	0,0017	6	13226	0,0018
1,7	7	11660	9,9510e-004	7	15301	0,0015
1,8	7	11660	5,8523e-004	7	15301	6,0710e-004
1,9	7	11660	3,8314e-004	7	15301	3,2959e-004

Tabela 5.5: Utilizando a função $f_1(z)$ e $z_u = z_v = e$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	3	5346	0,4520	5	10985	1,1636e+003
1,1	5	8560	0,3443	5	11155	0,2934
1,2	5	8560	0,2832	4	9080	0,2760
1,3	6	10112	0,2324	6	13230	0,2122
1,4	5	8560	0,1754	6	13230	0,1744
1,5	6	10112	0,1396	6	13230	0,1371
1,6	6	10112	0,1072	6	13230	0,1070
1,7	6	10112	0,0838	6	13230	0,0835
1,8	6	10112	0,0665	6	13230	0,0652
1,9	7	11664	0,0507	6	13230	0,0510

Tabela 5.6: Utilizando a função $f_2(z)$ e $z_u = z_v = e$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	3	5274	0,0347	4	8838	32,5980
1,1	6	10040	0,0230	5	11083	0,0230
1,2	8	13144	0,0136	5	11083	0,0122
1,3	7	11592	0,0082	5	11083	0,0076
1,4	5	8488	0,0043	5	11083	0,0047
1,5	5	8488	0,0030	5	11083	0,0029
1,6	5	8488	0,0019	5	11083	0,0019
1,7	4	6936	0,0010	5	11083	0,0013
1,8	6	10040	6,5256e-004	7	15233	5,8673e-004
1,9	6	10040	3,8549e-004	7	15233	3,2485e-004

Tabela 5.7: Utilizando a função $f_1(z)$ e $z_u = ((\lambda + 1)/2)e$ e $z_v = ((\lambda - 1)/2)e$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	9	14590	0,5714	3	6767	415,5724
1,1	6	10004	0,3796	6	13162	0,7215
1,2	4	6940	0,2900	7	15237	0,2789
1,3	4	6940	0,2270	5	11087	0,1912
1,4	4	6940	0,1776	7	15237	0,1702
1,5	4	6940	0,1406	7	15237	0,1394
1,6	4	6940	0,1115	7	15237	0,1087
1,7	4	6940	0,0873	7	15237	0,0844
1,8	4	6940	0,0647	7	15237	0,0656
1,9	4	6940	0,0501	7	15237	0,0511

Tabela 5.8: Utilizando a função $f_2(z)$ e $z_u = ((\lambda + 1)/2)e$ e $z_v = ((\lambda - 1)/2)e$.

Podemos verificar nas tabelas 5.1 e 5.2 que, tanto em relação as iterações quanto em relação ao número de flops, os métodos de pontos interiores apresentaram melhores resultados que o método GNCS.

Nas tabelas de 5.3 a 5.8 encontram-se os resultados obtidos pelo método primal-dual, cujos valores iniciais de z_u e z_v foram variados conforme indicado nas tabelas.

Os métodos de pontos interiores para as funções $f_1(z)$ e $f_2(z)$ apresentam desempenho computacional superior que o método GNCS, tanto em relação às iterações quanto ao número de flops.

Na maioria dos casos, $z_u = z_v = e$ apresentam melhores resultados, utilizando tanto a função $f_1(z)$ quanto a função $f_2(z)$. Desta forma, utilizamos esse valor inicial para z_u e z_v como padrão para todos os testes computacionais realizados.

Realizamos agora testes computacionais com várias funções nas quais encontram-se descritas a seguir. Foram utilizados números aleatórios entre $[0, 1]$, obtidos através de um gerador, totalizando 1000 pontos em cada caso.

Utilizamos primeiramente a função $\sin x$. Nas tabelas 5.9 e 5.10 aproximamos a função por uma reta, com $\epsilon = 10^{-5}$ e $\epsilon_1 = 10^{-3}$. Nas tabelas 5.11 e 5.12 aproximamos a função por um polinômio de grau 4, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$.

Utilizamos agora a função $\sinh x$. Nas tabelas 5.13 e 5.14 aproximamos a função por uma parábola, com $\epsilon = 10^{-6}$ e $\epsilon_1 = 10^{-3}$. Nas tabelas 5.15 e 5.16 aproximamos a função por um polinômio de grau 5, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$.

Nas tabelas 5.17 e 5.18 utilizamos a aproximação da função $\ln x$ por um polinômio de grau 3, com $\epsilon = 10^{-8}$ e $\epsilon_1 = 10^{-6}$. Nas tabelas 5.19 e 5.20 utilizamos a aproximação da função por um polinômio de grau 6, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$.

Nas tabelas 5.21 e 5.22 utilizamos a aproximação da função $\exp x$ por um polinômio de grau 4, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$. Nas tabelas 5.23 e 5.24 utilizamos a aproximação da função por um polinômio de grau 8, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$.

Nas tabelas 5.25 e 5.26 utilizamos a aproximação da função $\exp x^2$ por um polinômio de grau 5, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$. Nas tabelas 5.27 e 5.28 utilizamos a aproximação da função por um polinômio de grau 10, com $\epsilon = 10^{-10}$ e $\epsilon_1 = 10^{-8}$.

Utilizamos agora um problema real de grande porte no qual estamos principalmente interessados em comparar o tempo de CPU em segundos e número de iterações necessários para a convergência dos métodos. O conjunto contém os dados “Prime Rate”(PR). O conjunto de dados compreende valores dos juros diários ao longo de 40 anos, finais-de-semanas e feriados não foram considerados, totalizando 10958 valores observados. Para evitar problemas de estabilidade numérica dos métodos, os dados (observados) foram normalizados no intervalo $[0, 1]$. Estes experimentos foram realizados em uma estação Sun Blade 100 com Matlab 6.0, assim, não foi possível estimar o número de flops. Utilizamos o parâmetro barreira $\mu = 0,001$ e os critérios de parada $\epsilon = 10^{-10}$, $\epsilon_1 = 10^{-8}$. Os resultados obtidos se encontram nas tabelas a seguir.

Podemos verificar que os métodos de pontos interiores apresentam desempenho computacional superior que o método GNCS, tanto em relação ao tempo computacional quanto à validade da solução.

Os métodos primal-dual barreira logarítmica e primal-dual preditor-corretor convergem para problemas de grande porte em menos iterações e com esforço por iteração muito menor que o método GNCS utilizando o critério de convergência (3.24). Podemos também verificar que os métodos de pontos interiores primal-dual barreira logarítmica e primal-dual preditor corretor apresentam desempenho computacional superior aos métodos de pontos interiores barreira logarítmica e preditor-corretor. O método GNCS utilizando

o critério de convergência (3.23) proposto em [13] não converge mesmo após 100 iterações.

Figura 5.5: Referente às tabelas 5.9 e 5.10

Figura 5.6: Referente às tabelas 5.11 e 5.12

Figura 5.7: Referente às tabelas 5.13 e 5.14

Figura 5.8: Referente às tabelas 5.15 e 5.16

Figura 5.9: Referente às tabelas 5.17 e 5.18

Figura 5.10: Referente às tabelas 5.19 e 5.20

Figura 5.11: Referente às tabelas 5.21 e 5.22

Figura 5.12: Referente às tabelas 5.23 e 5.24

Figura 5.13: Referente às tabelas 5.25 e 5.26

Figura 5.14: Referente às tabelas 5.27 e 5.28

Figura 5.15: Referente às tabelas 5.29, 5.30 e 5.31

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	173431	53,8331	1	206431	53,8358	5	20358892	52,6350
1,01	1	184420	52,3824	1	223414	52,3853	3	12218940	51,5613
1,1	1	184420	41,0034	1	223414	41,0143	3	12220938	40,4386
1,2	1	184420	31,2088	1	223414	31,2164	3	12221937	30,8568
1,3	1	184420	23,8680	1	223414	23,8713	3	12227935	23,6701
1,4	1	184420	18,3006	1	223414	18,3007	2	8152962	18,2464
1,5	1	184420	14,0700	1	223414	14,0689	2	8152962	14,0596
1,6	1	184420	10,8544	1	223414	10,8546	2	8152962	10,8577
1,7	1	184420	8,4143	1	223414	8,4106	2	8152962	8,3998
1,8	1	184420	6,5097	1	223414	6,5091	2	8152962	6,5079
1,9	1	184410	5,0798	1	223394	5,0821	2	8152962	5,0485

Tabela 5.9: Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	211403	53,6410	1	252395	53,8168
1,01	3	518240	50,9050	3	663194	51,4332
1,1	3	518240	39,8398	3	663194	40,1028
1,2	3	518240	30,4629	3	663194	30,6103
1,3	3	518240	23,3502	3	663194	23,4631
1,4	2	370316	18,2127	3	663194	18,0339
1,5	2	370316	14,0075	3	663194	13,8896
1,6	2	370316	10,7954	3	663194	10,7203
1,7	2	370316	8,3373	2	466286	8,3971
1,8	2	370316	6,4546	2	466286	6,4974
1,9	2	370316	5,0164	2	466286	5,0365

Tabela 5.10: Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	830435	0,0563	4	1029057	0,0563	31	128045643	0,0535
1,01	4	841349	0,0511	4	1046040	0,0511	36	148697069	0,0487
1,1	4	841424	0,0486	4	1046040	0,0506	26	107397216	0,0207
1,2	3	650346	0,0083	1	319344	0,0083	20	82614708	0,0080
1,3	3	650346	0,0032	1	319344	0,0032	14	57832200	0,0031
1,4	3	650346	0,0012	1	319344	0,0012	12	49570032	0,0012
1,5	3	650346	4,7876e-004	1	319344	4,7876e-004	8	33049692	4,7164e-004
1,6	3	650346	1,8576e-004	1	319344	1,8576e-004	10	41309862	1,8395e-004
1,7	3	650346	7,2239e-005	1	319344	7,2239e-005	7	28919607	7,1833e-005
1,8	3	650346	2,8154e-005	1	319344	2,8154e-005	6	24789522	2,8083e-005
1,9	3	650346	1,0997e-005	1	319344	1,0997e-005	7	28919607	1,0993e-005

Tabela 5.11: Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	24	5356415	0,0404	17	4847493	0,4899
1,01	17	3827026	0,0416	19	5426872	0,0465
1,1	31	6907782	0,0207	27	7676456	0,0207
1,2	28	6247620	0,0080	11	3177288	0,0079
1,3	22	4927296	0,0031	20	5708069	0,0031
1,4	21	4707242	0,0012	14	4020882	0,0012
1,5	19	4267134	4,7161e-004	15	4302080	4,7164e-004
1,6	17	3827026	1,8393e-004	14	4020882	1,8395e-004
1,7	16	3606972	7,1820e-005	15	4302080	7,1829e-005
1,8	18	4047080	2,8083e-005	15	4302080	2,8081e-005
1,9	18	4047080	1,0990e-005	15	4302080	1,0989e-005

Tabela 5.12: Resultados computacionais utilizando a função $\sin x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	197214	3,0649	1	234247	3,0653	22	89910914	2,9616
1,01	1	208203	2,8977	1	251230	2,8980	19	77644934	2,8023
1,1	1	208203	1,7496	1	251230	1,7500	17	69501913	1,7061
1,2	1	208203	1,0003	1	251230	1,0018	11	44973949	0,9851
1,3	1	208216	0,6713	1	251256	0,5828	8	32709967	0,5699
1,4	1	208203	0,3355	1	251230	0,3360	5	20445985	0,3303
1,5	1	208203	0,1939	1	251230	0,1939	4	16357991	0,1917
1,6	1	208203	0,1123	1	251230	0,1123	3	12269997	0,1115
1,7	1	208203	0,0652	1	251230	0,0652	2	8182003	0,0649
1,8	1	208203	0,0379	1	251230	0,0379	2	8182003	0,0378
1,9	1	208203	0,0221	1	251230	0,0221	2	8182003	0,0221

Tabela 5.13: Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	235186	3,0653	1	280211	3,0814
1,01	3	582077	2,7854	4	960098	2,7398
1,1	3	582077	1,6715	4	960098	1,6181
1,2	2	414126	0,9828	4	960098	0,9176
1,3	2	414126	0,5639	3	739130	0,5679
1,4	2	414126	0,3243	3	739130	0,3268
1,5	2	414126	0,1871	3	739130	0,1885
1,6	1	246175	0,1113	3	739130	0,1089
1,7	1	246175	0,0646	2	518162	0,0648
1,8	1	246175	0,0375	2	518162	0,0376
1,9	1	246175	0,0218	1	297194	0,0221

Tabela 5.14: Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	6	1409089	0,0020	5	1456213	0,0034	26	108127218	2,8144e-004
1,01	8	1866402	0,0021	5	1473196	0,0029	26	108127218	2,4268e-004
1,1	4	973754	6,4133e-005	1	359524	6,4125e-005	21	87334410	6,4056e-005
1,2	4	973754	1,4638e-005	1	359524	1,4638e-005	17	70699764	1,4626e-005
1,3	4	973754	3,3517e-006	1	359524	3,3517e-006	15	62397426	3,3496e-006
1,4	4	973754	7,6957e-007	1	359524	7,6957e-007	11	45758784	7,6920e-007
1,5	4	973754	1,7716e-007	1	359524	1,7716e-007	10	41602620	1,7710e-007
1,6	4	973754	4,0882e-008	1	359524	4,0882e-008	7	29127135	4,0873e-008
1,7	4	973754	9,4557e-009	1	359524	9,4557e-009	5	20806815	9,4544e-009
1,8	4	973754	2,1917e-009	1	359524	2,1917e-009	3	12486495	2,1915e-009
1,9	4	973754	5,0902e-010	1	359524	5,0902e-010	2	8326335	5,0901e-010

Tabela 5.15: Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	1087665	7,0296e-004	3	1023273	0,0021
1,01	47	11940588	2,4268e-004	44	14053000	2,4205e-004
1,1	44	11184174	6,4056e-005	35	11196543	6,4056e-005
1,2	38	9671346	1,4626e-005	26	8340088	1,4613e-005
1,3	30	7654242	3,3496e-006	21	6753168	3,3496e-006
1,4	21	5385000	7,6908e-007	15	4848863	7,6920e-007
1,5	17	4376448	1,7700e-007	13	4214096	1,7709e-007
1,6	14	3620034	4,0617e-008	12	3896712	4,0849e-008
1,7	13	3367896	9,1948e-009	13	4214096	9,3905e-009
1,8	11	2863620	1,9742e-009	10	3261944	2,0763e-009
1,9	11	2863620	8,0135e-010	8	2627176	4,2201e-010

Tabela 5.16: Resultados computacionais utilizando a função $\sinh x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	1	225032	0,2150	1	266117	0,2150	30	123189942	0,2113
1,01	1	236021	0,1974	1	283100	0,1974	32	131402004	0,1948
1,1	1	236021	0,1024	3	703204	0,0974	25	102659787	0,0939
1,2	2	399038	0,0436	1	283100	0,0436	17	69811539	0,0419
1,3	2	399048	0,0193	1	283120	0,0193	13	53387415	0,0187
1,4	2	399038	0,0086	1	283100	0,0086	11	45175353	0,0084
1,5	2	399038	0,0038	1	283100	0,0038	7	28751229	0,0037
1,6	2	399038	0,0017	1	283100	0,0017	7	28751229	0,0017
1,7	2	399038	7,5975e-004	1	283100	7,5975e-004	6	24645198	7,5509e-004
1,8	2	399038	3,4055e-004	1	283100	3,4055e-004	4	16433136	3,3961e-004
1,9	2	399038	1,5301e-004	1	283100	1,5301e-004	4	16433136	1,5290e-004

Tabela 5.17: Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	9	1798948	1,0909	1	312081	0,2234
1,01	9	1809937	0,1478	10	2570622	0,1609
1,1	10	2001930	0,0709	6	1574374	0,0675
1,2	5	1041965	0,0315	6	1574374	0,0306
1,3	14	2769902	0,0161	7	1823436	0,0132
1,4	14	2769902	0,0074	10	2570622	0,0083
1,5	11	2193923	0,0029	10	2570622	0,0037
1,6	11	2193923	0,0013	1	329064	0,0017
1,7	11	2193923	6,3001e-004	9	2321560	6,6829e-004
1,8	14	2769902	2,9689e-004	1	329064	3,3951e-004
1,9	12	2385916	1,4304e-004	1	329064	1,5254e-004

Tabela 5.18: Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	12	3185273	0,0085	3	1023989	0,0240	31	129907258	6,3055e-004
1,01	10	2677716	0,0067	8	2634282	0,0143	38	159247112	5,4881e-004
1,1	4	1122078	1,6283e-004	1	403648	1,6284e-004	25	104765662	1,5737e-004
1,2	4	1122078	4,0864e-005	1	403648	4,0864e-005	17	71243534	3,9361e-005
1,3	4	1122078	1,0157e-005	1	403648	1,0157e-005	12	50296200	9,8624e-006
1,4	4	1122078	2,5314e-006	1	403648	2,5314e-006	13	54488464	2,4760e-006
1,5	4	1122078	6,3268e-007	1	403648	6,3268e-007	7	29342872	6,2279e-007
1,6	4	1122078	1,5855e-007	1	403648	1,5855e-007	7	29342872	1,5694e-007
1,7	4	1122078	3,9834e-008	1	403648	3,9834e-008	5	20962340	3,9605e-008
1,8	4	1122078	1,0033e-008	1	403648	1,0033e-008	4	16775071	1,0008e-008
1,9	4	1122078	2,5334e-009	1	403648	2,5334e-009	3	12581808	2,5318e-009

Tabela 5.19: Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	1235989	0,0023	6	2220769	0,0278
1,01	19	5570713	4,0722e-004	26	9390312	5,4880e-004
1,1	42	12200440	1,5737e-004	19	6886916	1,5415e-004
1,2	30	8741452	3,9361e-005	30	10820824	3,9361e-005
1,3	30	8741452	9,8624e-006	21	7602172	9,8624e-006
1,4	23	6723709	2,4759e-006	12	4383520	2,4683e-006
1,5	16	4705966	6,2206e-007	13	4741148	6,2276e-007
1,6	14	4129468	1,5526e-007	12	4383520	1,5686e-007
1,7	13	3841219	3,7686e-008	11	4025892	3,9457e-008
1,8	12	3552970	8,5652e-009	11	4025892	9,9167e-009
1,9	11	3264721	2,8376e-009	11	4025892	2,4049e-009

Tabela 5.20: Resultados computacionais utilizando a função $\ln x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	5	1021313	0,0141	5	1271239	0,0141	42	173476578	0,0135
1,01	4	841374	0,0121	4	1045690	0,0121	50	206524257	0,0121
1,1	7	1414608	0,1648	6	1530454	0,1174	32	132175728	0,0045
1,2	3	650296	0,0016	1	319294	0,0016	25	103263135	0,0015
1,3	3	650296	5,3279e-004	1	319294	5,3278e-004	17	70222455	5,1773e-004
1,4	3	650296	1,7922e-004	1	319294	1,7922e-004	15	61962285	1,7542e-004
1,5	3	650296	6,0443e-005	1	319294	6,0443e-005	13	53704113	5,9533e-005
1,6	3	650296	2,0431e-005	1	319294	2,0431e-005	11	45441945	2,0230e-005
1,7	3	650296	6,9219e-006	1	319294	6,9219e-006	7	28921605	6,8826e-006
1,8	3	650296	2,3502e-006	1	319294	2,3502e-006	11	45443943	2,3442e-006
1,9	3	650296	7,9977e-007	1	319294	7,9977e-007	6	24789522	7,9925e-007

Tabela 5.21: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	19	4256095	0,0106	15	4285047	0,1194
1,01	24	5367354	0,0111	20	5708020	0,0117
1,1	28	6247570	0,0045	17	4864425	0,0045
1,2	23	5147300	0,0015	18	5145623	0,0015
1,3	21	4707192	5,1773e-004	17	4864426	5,1773e-004
1,4	21	4707192	1,7542e-004	18	5145623	1,7542e-004
1,5	19	4267084	5,9532e-005	15	4302029	5,9533e-005
1,6	19	4267084	2,0228e-005	15	4302030	2,0230e-005
1,7	18	4047030	6,8783e-006	15	4302030	6,8824e-006
1,8	17	3826976	2,3385e-006	14	4020832	2,3429e-006
1,9	17	3826976	7,9801e-007	14	4020832	7,9870e-007

Tabela 5.22: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	6	2143591	0,0040	20	8303165	0,0017	31	132274711	2,4272e-004
1,01	9	3185356	0,0020	7	2972520	0,0023	31	132272713	2,0888e-004
1,1	4	1467396	5,4240e-005	1	504384	5,4240e-005	28	119473000	5,4133e-005
1,2	4	1467396	1,2118e-005	1	504384	1,2118e-005	25	106675285	1,2100e-005
1,3	4	1467396	2,7127e-006	1	504384	2,7127e-006	21	89607003	2,7099e-006
1,4	4	1467396	6,0848e-007	1	504384	6,0848e-007	15	64011573	6,0803e-007
1,5	4	1467396	1,3672e-007	1	504384	1,3672e-007	8	34143578	1,3666e-007
1,6	4	1467396	3,0772e-008	1	504384	3,0772e-008	6	25610436	3,0762e-008
1,7	4	1467396	6,9361e-009	1	504384	6,9361e-009	4	17077294	6,9349e-009
1,8	4	1467396	1,5656e-009	1	504384	1,5656e-009	3	12811722	1,5655e-009
1,9	4	1467396	3,5384e-010	1	504384	3,5384e-010	2	8543153	3,5384e-010

Tabela 5.23: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	1581307	7,7105e-004	3	1434009	0,0026
1,01	31	11651632	1,6848e-004	31	14060008	1,8536e-004
1,1	38	14259608	5,4133e-005	33	14960652	4,4133e-005
1,2	36	13514472	1,2100e-005	30	13609686	1,2100e-005
1,3	31	11651632	2,7099e-006	25	11358075	2,7099e-006
1,4	21	7925952	6,0796e-007	15	6854856	6,0803e-007
1,5	15	5690544	1,3655e-007	16	7305178	1,3664e-007
1,6	14	5317976	3,0618e-008	12	5503890	3,0721e-008
1,7	12	4572840	5,9809e-009	11	5053568	6,8355e-009
1,8	12	4572840	1,3758e-009	10	4603246	1,3471e-009
1,9	13	4945408	3,5384e-010	10	4603246	3,0937e-010

Tabela 5.24: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	962567	0,0166	5	1456015	0,0165	42	174651816	0,0014
1,01	5	1196718	0,0190	6	1751416	0,0162	34	141386520	0,0014
1,1	5	1196718	0,0158	6	1751416	0,0168	26	108127218	3,7107e-004
1,2	4	973556	1,0570e-004	1	359326	1,0570e-004	22	91488576	1,0057e-004
1,3	4	973556	2,8378e-005	1	359326	2,8378e-005	14	58225278	2,7286e-005
1,4	4	973556	7,6374e-006	1	359326	7,6374e-006	15	62381442	7,4156e-006
1,5	4	973556	2,0613e-006	1	359326	2,0613e-006	10	41596626	2,0187e-006
1,6	4	973556	5,5783e-007	1	359326	5,5783e-007	7	29120142	5,5030e-007
1,7	4	973556	1,5137e-007	1	359326	1,5137e-007	9	37432470	1,5020e-007
1,8	4	973556	4,1185e-008	1	359326	4,1185e-008	5	20806815	4,1041e-008
1,9	4	973556	1,1236e-008	1	359326	1,1236e-008	4	16645656	1,1226e-008

Tabela 5.25: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	12	3104571	0,0010	9	2927379	0,0083
1,01	41	10427562	0,0011	19	6118202	0,0010
1,1	40	10175424	3,7107e-004	31	9926809	3,7107e-004
1,2	28	7149768	1,0057e-004	24	7705121	1,0057e-004
1,3	22	5636940	2,7285e-005	15	4848665	2,7286e-005
1,4	21	5384802	7,4155e-006	20	6435585	7,4156e-006
1,5	18	4628388	2,0181e-006	14	4531282	2,0187e-006
1,6	16	4124112	5,4902e-007	12	3896514	5,4998e-007
1,7	15	3871974	1,4908e-007	12	3896514	1,4995e-007
1,8	14	3619836	3,8956e-008	11	3579130	4,0638e-008
1,9	16	4124112	9,6351e-009	10	3261746	1,0377e-008

Tabela 5.26: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.

P	BL			PC			GNCS		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	7	3198452	0,0042	5	2685879	0,0053	24	104635770	2,4102e-004
1,01	16	7206044	0,0037	8	4263996	0,0027	21	91559675	2,0739e-004
1,1	4	1877240	5,3890e-005	1	621350	5,3889e-005	17	74124544	5,3704e-005
1,2	4	1877240	1,2024e-005	1	621350	1,2024e-005	18	78473586	1,1994e-005
1,3	4	1877240	2,6889e-006	1	621350	2,6889e-006	12	52321392	2,6840e-006
1,4	4	1877240	6,0249e-007	1	621350	6,0249e-007	9	39242298	6,0174e-007
1,5	4	1877240	1,3525e-007	1	621350	1,3525e-007	7	30522236	1,3514e-007
1,6	4	1877240	3,0412e-008	1	621350	3,0412e-008	7	30522236	3,0397e-008
1,7	4	1877240	6,8491e-009	1	621350	6,8491e-009	4	17445140	6,8474e-009
1,8	4	1877240	1,5448e-009	1	621350	1,5448e-009	2	8727076	1,5447e-009
1,9	4	1877240	3,4889e-010	1	621350	3,4889e-010	2	8727076	3,4889e-010

Tabela 5.27: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.

P	PD			PDPC		
	It	Flops	FO	It	Flops	FO
1	4	1991151	5,1699e-004	3	1769019	0,0018
1,01	37	17612559	1,9093e-004	41	23041074	1,9699e-004
1,1	46	21869946	5,3704e-005	34	19125666	5,3704e-005
1,2	40	19031688	1,1994e-005	28	15769602	1,1994e-005
1,3	29	13828215	2,6840e-006	25	14091570	2,6840e-006
1,4	22	10516914	6,0171e-007	12	6820098	6,0157e-007
1,5	15	7205613	1,3502e-007	18	10176162	1,3513e-007
1,6	13	6259527	3,0008e-008	12	6820098	3,0363e-008
1,7	12	5786484	6,3107e-009	12	6820098	6,7937e-009
1,8	11	5313441	1,5123e-009	10	5701410	1,4143e-009
1,9	13	6259527	3,3540e-010	8	4582722	2,8783e-010

Tabela 5.28: Resultados computacionais utilizando a função $\exp x^2$.

P	BL			PC		
	It	Tempo	Fo	It	Tempo	Fo
1,1	7	3,8589e+03	3,3512e+04	1	8,6112e+02	3,3705e+04
1,2	8	8,1236e+03	3,8426e+04	10	9,8467e+03	3,8426e+04
1,3	7	6,7028e+03	4,4343e+04	6	5,3258e+03	4,4126e+04
1,4	7	7,1191e+03	5,1428e+04	6	6,2856e+03	5,1938e+04
1,5	5	4,9047e+03	5,9937e+04	5	4,3646e+03	5,9564e+04
1,6	6	6,5736e+03	7,0179e+04	5	5,3546e+03	7,0165e+04
1,7	5	5,1326e+03	8,2539e+04	4	4,1257e+03	8,3298e+04
1,8	5	4,7238e+03	9,7482e+04	5	4,9564e+03	9,8147e+04
1,9	5	5,4242e+03	1,1559e+05	5	4,7919e+03	1,1559e+05
2,0	4	3,9804e+03	1,3757e+05	4	4,9800e+03	1,3757e+05

Tabela 5.29: Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.

P	PD			PDPC		
	It	Tempo	Fo	It	Tempo	Fo
1,1	1	741,1319	3,1918e+04	1	887,9641	3,2480e+04
1,2	1	827,9342	3,6638e+04	1	856,6936	3,6177e+04
1,3	1	801,2922	4,2435e+04	1	826,9323	4,0170e+04
1,4	1	831,6956	4,9537e+04	1	832,6895	4,5249e+04
1,5	1	843,3268	5,8176e+04	5	4,2766e+03	5,9846e+04
1,6	7	5,5551e+03	6,8518e+04	5	4,1477e+03	7,0128e+04
1,7	8	6,9422e+03	8,1549e+04	5	7,1247e+03	8,2465e+04
1,8	8	7,1460e+03	9,6172e+04	5	4,5319e+03	9,7388e+04
1,9	8	6,9720e+03	1,1392e+05	5	4,7974e+03	1,1635e+05
2,0	9	7,8416e+03	1,3737e+05	6	5,4329e+03	1,3615e+05

Tabela 5.30: Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.

P	GNCS		
	It	Tempo	Fo
1,1	3	5,8997e+03	3,3542e+04
1,2	3	5,8686e+03	3,8475e+04
1,3	3	5,8200e+03	4,4374e+04
1,4	5	9,7496e+03	5,1434e+04
1,5	5	1,0070e+04	5,9937e+04
1,6	5	1,2327e+04	7,0179e+04
1,7	5	1,0039e+04	8,2539e+04
1,8	4	7,5788e+03	9,7483e+04
1,9	4	7,6355e+03	1,1559e+05
2,0	2	3,9044e+03	1,3757e+05

Tabela 5.31: Resultados computacionais utilizando o problema de grande porte.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Conclusões

Os métodos de pontos interiores aplicados ao problema de regressão pela norma L_p apresentam resultados computacionais superiores ao método GNCS em relação à robustez, iteração e número de flops, repetindo o desempenho obtido na minimização pelas normas L_1 e L_∞ em [20, 21], respectivamente.

Podemos verificar também que os métodos de pontos interiores apresentam desempenho computacional superior ao método GNCS em relação à validade da solução e ao tempo computacional.

Para o método GNCS o critério de convergência (3.23) proposto em [13] não converge para problemas de grande porte e, em outros casos, não consegue uma aproximação da função objetivo e resulta um número muito grande de iterações.

Os métodos de pontos interiores convergem para problemas de grande porte com função objetivo e esforço por iteração menores que o método GNCS.

Na maioria dos casos, o método preditor-corretor apresenta desempenho computacional superior ao método barreira logarítmica assim como o método primal-dual preditor-

corretor em relação ao método primal-dual barreira logarítmica.

Em relação à função objetivo, os métodos de pontos interiores barreira logarítmica e preditor-corretor apresentam em geral desempenho computacional ligeiramente inferior aos métodos primal-dual barreira logarítmica e primal-dual preditor-corretor respectivamente.

Utilizando $p = 1$ podemos verificar que os métodos de pontos interiores não obtiveram bons resultados, pois a derivada da norma 1 não é bem definida. Neste caso, o problema pode ser modelado como um problema de otimização linear e portanto este método não seria utilizado.

6.2 Perspectivas Futuras

Implementação em C/FORTRAN, explorando a estrutura matricial (4.1.3). Explorar a estrutura matricial dessa forma em Matlab não compensa.

Realizar experimentos utilizando novas idéias como, por exemplo, utilizar o *gap* como critério de parada.

Bibliografia

- [1] I. Adler, M.G.C. Resende, G. Veiga and N. Karmarkar, An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, *Mathematical Programming*, **44** (1989), 297-335.
- [2] M.S. Bazaraa, "Linear Programming and Network Flows", 2nd ed., John Wiley & Sons, 1990.
- [3] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali and C.M. Shetty, "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms", John Wiley & Sons, 1979.
- [4] D.P. Bertsekas, "Nonlinear Programming", 2nd ed., Athena Scientific, USA, 1999.
- [5] J. Castro, A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows, *SIAM J. Optimization*, **10** (2000), 852-877.
- [6] T.F. Coleman and Y. Li, A globally and quadratically convergent affine scaling method for linear l_1 problems, *Math. Programming*, **56** (1992), 189-222.
- [7] A.S. El-Bakry, R.A. Tapia, T. Tsuchiya and Y. Zhang, On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **89** (1996), 507-541.
- [8] A. Dax and B. Berkowitz, Column relaxation methods for least norm problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11** (1990), 975-989.
- [9] G.H. Golub and C.F. Van Loan, "Matrix Computations", 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MA, 1996.

- [10] J. Gondzio, Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming, *Computational Optimization and Applications*, **6** (1996), 137-156.
- [11] G. Heinig and P. Jankowski, Parallel and superfast algorithms for Hankel systems, *Numerical Mathematics*, **58** (1990), 109-127.
- [12] J.L. Kennington and R.V. Helgason, "Algorithms for Network Programming", Wiley, New York, 1980.
- [13] Y. Li, A globally convergent method for l_p problems, *SIAM J. Optimization*, **3** (1993), 609-629.
- [14] D.G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Second Edition, Addison-Wesley, 1989.
- [15] I.J. Lustig, R.E. Marsten and D.F. Shanno, On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming, *SIAM J. Optimization*, **2** (1992), 435-449.
- [16] S. Mehrotra, On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization*, **2** (1992), 575-601.
- [17] G. Merle and H. Späeth, Computational experience with discrete l_p approximation, *Computing*, **12** (1974), 315-321.
- [18] R.D.C. Monteiro, I. Adler and M.G.C. Resende, A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, *Mathematics of Operations Research*, **15** (1990), 191-214.
- [19] A.R.L. Oliveira and C. Lyra, Implementação de um método de pontos interiores para programação linear, *Revista SBA: Controle & Automação*, **3** (1991), 370-382.
- [20] A.R.L. Oliveira and C. Lyra, Interior point methods for the polynomial L_∞ fitting problems, *Internacional Transactions in Operational Research*, **11** (3) (2004), 309-322.

- [21] A.R.L. Oliveira, M.A. Nascimento and C. Lyra, Efficient implementation and benchmark of interior point methods for the polynomial L_1 fitting problems, *Statistics & Data Analysis*, **35** (2000), 119-135.
- [22] A.R.L. Oliveira, L. Nepomuceno and S. Soares, Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches, *IEEE Transactions on Power Systems*, **18** (4) (2003), 1235-1240.
- [23] A.R.L. Oliveira, L. Nepomuceno and S. Soares, Short term hydroelectric sheduling combining network flow and interior point approaches, *Trabalho aceito para publicação na Electrical Power & Energy Systems*, (2004).
- [24] A.R.L. Oliveira and S. Soares, Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC, *Controle & Automação*, **14** (3) (2003), 278-285.
- [25] M.G.C. Resende and G. Veiga, An efficient implementation of a network interior point method, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **12** (1993), 299-348.
- [26] R. Sedgewick, "Algorithms", Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
- [27] R.A. Tapia and Yin Zhang, Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **73** (1992), 229-242.
- [28] W.F. Trench, An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **13** (4) (1965), 1102-1107.
- [29] R.J. Vanderbei, "Linear Programming - Foundations and Extensions", Kluwer Academics Publishers, Boston, USA, 1996.
- [30] S.J. Wright, "Primal-Dual Interior-Point Methods", SIAM Publications, SIAM Philadelphia, PA, USA, 1996.