SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Movimento de malhas e remalhamento de malhas superficiais

Igor Prata Soares

Orientador: *Prof. Dr. José Alberto Cuminato*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional.

**USP – São Carlos
Janeiro de 2007**

Movimento de malhas e remalhamento de
malhas superficiais

Igor Prata Soares

À Cynthia e aos meus pais

Agradecimentos

É em momentos como este que eu gostaria de ser poeta. Conseguir traduzir em texto miúdo o tamanho dessa gigantesca bolha inflante de agradecimentos. Mas como não sou, tenho a difícil tarefa de contentar-me em escrever apenas o simples obrigado. Mas saibam vocês, alvos do meu agradecimento, que essa palavrinha com seis letras espremidas entre dois ós diz muito mais que um sonoro e reconhecido obrigado.

O primeiro obrigado vai para a pessoa que mais contribuiu comigo enquanto navegava nessas ondas tão violentas, esse mar em ressaca, essa coisa estranha. Agradeço a você, Deus, porque me fez ver um horizonte muito além daquela linha curva que nossos pobres olhos conseguem enxergar. Porque me fez ter porto, antes mesmo de alcançá-lo.

Digo obrigado também a você Cynthia, minha amada esposa, com quem tenho aprendido muito, mas não coisas pequenas como as apresentadas nesta tese, mas coisas maiores, coisas de vida. Você, em palavras e silêncios, afetos e atenções, me nutriu, e só eu sei o quanto. Esta é uma tese sua também.

Aos meus quatro pais, digo mil e vinte e quatro obrigados. Vocês são inspiração para mim, tenho em vocês exemplo.

Aos meus amigos e grandes amigos vão muitos obrigados. Quem sou eu sem os amigos? Nada. Tudo, conversas, escaladas, discussões, churrasco, computadores, pizza, problemas, gargalhadas, incentivo, neve, planos, acampamentos, museus, projeto, emprego, vivência, C++, entrevista, viagem, surpresas, tudo que vivemos juntos merecem aplausos. Um obrigado especial a vocês, Marcello, Renan, Billy, Tiago, Antônio, João Paulo, Cássio, Mário, Fernando, Everton que contribuíram diretamente neste suado doutorado.

Tenho por vocês Fairfax Presbyterian Church e Truro a gratidão de quem precisou desesperadamente de ajuda e recebeu. Jamais poderei recompensá-los.

Agradeço a vocês, professores e funcionários do ICMC, pela competência e suporte. Em especial ao trio Poti, Castelo e Gustavo e ao Dr. Löhner pela atenção.

Agradeço ao CNPq e à Capes pelo suporte financeiro.

Resumo

Malhas dinâmicas são comumente utilizadas em problemas de simulação sobre domínios cuja geometria varia com o tempo. Sempre que o domínio onde a malha está definida é alterado, as molas são acionadas movimentando os vértices para que estes se conformem com a nova descrição do domínio. Os tipos de molas mais utilizadas são: as longitudinais, as torcionais e as semi-torcionais. Nesta tese uma nova mola é proposta, a mola altura, que além de evitar sobreposição de elementos, é conceitualmente simples e fácil de ser implementada. Outra contribuição desse trabalho é o mecanismo de vértices ativos, que permite economia de processamento durante a resolução da malha dinâmica. Quando a fronteira do domínio sofre grandes alterações, o processo dinâmico pode não ter êxito na correção da malha. Para contornar esse problema, a fronteira deve ser alterada aos poucos. Uma nova estratégia para realizar grandes deformações em pequenos passos é introduzida nesta tese. Em algumas aplicações, o movimento da fronteira da malha pode comprometer células da própria fronteira. A correção da fronteira é um processo delicado, já que em muitos casos ele implica em alterar a descrição do domínio. Um novo método para efetuar a correção da fronteira é apresentado neste trabalho. Ele é baseado em malhas dinâmicas e utiliza um novo conceito de molas, as molas conservativas. Todas as contribuições citadas acima tiveram aplicação prática na indústria aeronáutica, sendo utilizadas na implementação de uma metodologia inovadora para acoplar um simulador de escoamento de fluidos tridimensional com uma ferramenta de projeto inverso de aerofólios que roda em um contexto bidimensional.

O outro assunto abordado é o remalhamento de triangulações superficiais. Foi proposto um novo método, chamado *ANTS* (*Anisotropic Triangulations on Surfaces*) que produz triangulações anisotrópicas de qualidade sobre superfícies descrevendo objetos com geometria complexa. O método *ANTS* é caracterizado por efetuar o remalhamento diretamente na triangulação inicial, isto é, ele não faz uso de qualquer tipo de parametrização, seja global ou local. O processo de remalhamento é feito por meio de quatro operadores: inserção, remoção e movimento de vértices e alternância de arestas. Os operadores de inserção e remoção de vértices possibilitam controlar a densidade de vértices no domínio, permitindo que nós sejam

inseridos em regiões com densidade baixa ou eliminados onde a densidade é alta. A qualidade dos triângulos é controlada por meio dos operadores de movimento de vértices e de alternância (*flipping*) de arestas. O operador de movimento é utilizado no núcleo do processo de remalhamento. Para evitar que o remalhamento danifique a forma original da superfície, as quinas e os córneres são detectados no início do processo e preservados durante o remalhamento. A densidade de vértices sobre o domínio é controlada por uma função de espalhamento. Tal função pode ser passada como entrada para o *ANTS* ou calculada pelo próprio método. O *ANTS* foi aplicado com êxito em diversos exemplos gerando malhas de boa qualidade.

Abstract

This thesis intends to make a contribution on the field of dynamic meshes. Dynamic meshes are commonly used in the simulation of problems on domains whose geometry varies in time. Virtual springs are placed in the mesh to rearrange its vertices whenever the domain is changed. The most commonly used types of springs are: longitudinal, torsional and semi-torsional. In this thesis a new type of spring is introduced, the height spring, that is conceptually simple but produces good results. Another contribution of this thesis is the active vertices mechanism, that can improve the CPU processing time of the dynamic mesh. When the mesh domain undergoes large deformations, the proposed dynamic mesh algorithm may fail in correcting the mesh. A solution to this problem is perform large deformations in small steps. A new strategy for this purpose is presented. Sometimes the motion of the mesh boundary can damage cells on the boundary itself. This is a tricky problem to solve since the correction of boundary might change the domain geometry. A new method to correct the boundary cells is also presented in this study. The method is based on the dynamic mesh concept and uses a new type of spring, the conservative spring. All the mentioned contributions have been applied in the aeronautics industry. The techniques developed here have been used to implement an innovative methodology to couple a three-dimensional fluid dynamic solver with a two-dimensional inverse design tool for airfoils.

This thesis also deals with remeshing. It is presented the ANTS, a practical method for remeshing anisotropic triangulations on surfaces of complex geometry. The method is capable of performing refinement and coarsening during the same process using the well-known remeshing operators: vertex motion, vertex deletion (by collapsing edges), vertex insertion, and edge flipping. An interesting feature is that vertex motion is used in the core of the process instead of in a post-processing smoothing step. The ANTS uses the input mesh as the geometrical description and works directly on the surface mesh without using any other auxiliary structure (besides the input mesh itself) to preserve the geometrical shape. Moreover, neither global nor local parameterization are applied. Sharp edges and points are identified at the beginning and kept during the process in order to preserve ridges and details. The method

has been successfully applied to several examples producing high quality meshes.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos básicos	11
2.1	Definições preliminares	11
2.2	Notações	16
2.3	Anisotropia	16
2.4	Medidas no espaço anisotrópico	17
2.4.1	Cálculo de distâncias	17
2.4.2	Cálculo de ângulos	18
2.5	Representação gráfica de um tensor métrico	19
2.6	Função de espaçamento definida por meio de uma malha	20
2.7	O tensor métrico e a matriz hessiana	21
2.7.1	Tensores de transformação	23
2.7.2	O tensor de deformação relativa	24
3	Malhas Dinâmicas	27
3.1	O funcionamento das malhas dinâmicas	29
3.2	Molas longitudinais 2D	32
3.3	Molas para tratar triângulos inválidos	35
3.3.1	Molas torcionais	36
3.3.2	Molas semi-torcionais	38
3.3.3	Molas altura	39
3.4	Comparação entre molas	42
4	A execução da malha dinâmica	45
4.1	Os vértices ativos	45
4.2	Grandes deformações em pequenas etapas	48

5	Malha dinâmica tridimensional	55
5.1	Molas longitudinais 3D	55
5.2	Molas torcionais em tetraedros	56
5.3	Molas semi-torcionais em Tetraedros	59
5.4	Molas altura em tetraedros	60
5.5	Comparação entre molas	62
6	O movimento da fronteira da malha	65
6.1	Molas conservativas	67
6.1.1	Configuração da malha dinâmica com molas conservativas	68
6.2	Remodelagem automática da geometria de um avião	70
6.2.1	Tratamento da asa	73
6.2.2	Tratamento do bordo-de-fuga	74
6.2.3	Tratamento da ponta-de-asa	76
6.2.4	Tratamento da Fuselagem	76
6.2.5	O movimento da malha volumétrica	77
7	Remalhamento de triangulações superficiais	81
8	As estruturas de controle geométrico	95
9	A função de espalhamento	101
9.1	Construção de uma <i>função de espaçamento</i>	102
9.1.1	Os parâmetros S_{min} e S_{max}	102
9.1.2	Estimativa de tensores métricos nos vértices de uma malha	103
9.1.3	O conjunto de vértices V_v	107
9.2	Ajuste da <i>função de espaçamento</i>	108
9.2.1	Suavização de <i>funções de espaçamento</i>	111
10	O processo de remalhamento	119
10.1	Gerenciamento dos vértices iterados	122
10.2	Critério para preservar a forma geométrica da superfície	123
10.3	Operações de remalhamento	124
10.3.1	<i>Flipping</i> de arestas	126
10.3.2	Movimento de vértices	127
10.3.3	Inserção de vértices	129
10.3.4	Remoção de vértices	132

10.4 A parada do algoritmo	136
11 Resultados do remalhamento	139
11.1 Exemplo 1: Ossos do pé	140
11.2 Exemplo 2: Vasos sanguíneos	145
11.3 Exemplo 3: Melhoramento de malhas geradas a partir de imagens	149
11.4 Outros exemplos	154
12 Conclusão	159
12.1 Conclusões sobre movimento de malhas	159
12.2 Conclusões sobre remalhamento de malhas superficiais	163

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de diferentes malhas geradas para um mesmo domínio [14].	3
1.2	Exemplo de malha triangular estruturada (a) e não-estruturada (b).	4
1.3	Malha não-estruturada com densidade de pontos variante sobre o domínio [97].	4
2.1	Exemplo do fecho convexo de um conjunto de pontos no plano.	12
2.2	Faces de uma célula.	13
2.3	Ligação entre células.	13
2.4	Exemplo de componentes.	14
2.5	Estrela e link de vértices.	15
2.6	Representação da anisotropia por curvas de nível.	19
2.7	Representação por elipsóide 2D.	20
2.8	Exemplo de malha de fundo para definir a anisotropia sobre o domínio (a) e uma possível malha anisotrópica para o domínio (b) [14].	21
2.9	Aproximação por uma função linear por partes g de uma função original f [52].	22
2.10	Fator de encolhimento de uma aresta.	24
2.11	Tensores de deformação e tensores de deformação relativa [53].	24
3.1	Movimento de uma malha bidimensional por malha dinâmica.	27
3.2	Força produzida segundo a lei de Hook pelo deslocamento de uma partícula.	30
3.3	Sistema de duas partículas conectadas por uma mola longitudinal.	30
3.4	Sistema de molas.	31
3.5	Diferença entre desacoplamento e acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.	33
3.6	Diferença entre utilizar e não utilizar o acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.	34
3.7	Diferença entre utilizar e não utilizar o acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.	35

3.8	As molas longitudinais não impedem o surgimento de célula inválida.	35
3.9	Ilustração de uma mola torcional.	36
3.10	Mola semi-torcional proposta por Blom [10].	38
3.11	As molas torcionais em v_k e v_l são agregadas à mola longitudinal na aresta e_{ij}	39
3.12	Ilustração de uma mola altura.	40
3.13	Comparação entre a mola altura e o método <i>Ball-vertex</i> de Bottasso et al. [17].	41
3.14	Isolinhas das métricas utilizadas para a qualidade de triângulos.	43
3.15	Comparação entre molas bidimensionais.	44
4.1	A estratégia de vértices ativos.	50
4.2	Valores de h para $n_p = 5$	51
4.3	Grandes deformações em pequenos passos.	54
5.1	Mola longitudinal 3D com acoplamento de coordenadas.	56
5.2	Inseção de um triângulo fictício dentro de um tetraedro.	57
5.3	Controle do volume do tetraedro.	58
5.4	Equipando o tetraedro com molas torcionais.	58
5.5	Configuração de quatro triângulos por tetraedro.	59
5.6	Configuração de doze triângulos por tetraedro.	59
5.7	Mola semi-torcional diedral para controlar um dos ângulos diedral de um tetraedro.	60
5.8	Exemplo de altura 3D em tetraedro.	61
5.9	Deslocamento do bordo esférico interior da malha volumétrica.	63
5.10	Comparação entre molas 3D.	64
6.1	Deslocamento parcial da fronteira em um domínio retangular 2D.	66
6.2	Deslocamento parcial da fronteira em um domínio curvo 2D.	66
6.3	Molas conservativas agindo sobre um curva.	68
6.4	Efeitos do parâmetro α_c em malhas dinâmicas com molas conservativas.	70
6.5	Integração entre projeto inverso (2D) e simulador de escoamento de fluidos (3D).	72
6.6	O modelo de avião composto por quatro grupos: G_F , G_{Asa} , G_{BF} e G_{PA}	72
6.7	Os conjuntos <i>perfis-velhos</i> e <i>perfis-novos</i> tratados nesta seção.	73
6.8	Problemas causados no modelo devido ao movimento da asa.	74
6.9	Esquema de compartilhamento da fronteira do bordo-de-fuga com as outras componentes do avião.	74
6.10	Detalhes dos problemas causados na componente bordo-de-fuga devido ao movimento da asa.	75

6.11	Correção da componente bordo-de-fuga.	75
6.12	Correção da componente ponta-de-asa.	76
6.13	Correção da componente fuselagem.	77
6.14	Qualidade dos elementos da <i>malha original</i> e da <i>malha final</i>	79
7.1	Classes de métodos para geração de malhas.	88
8.1	Características geométricas em um cubo.	96
8.2	Ilustração <i>graus-de-quina</i> de vertices.	97
8.3	Efeito do processo simplificador de <i>linhas-de-controle</i>	99
9.1	O sistema de coordenadas local $\mathfrak{S}(v, \vec{\chi}_v, \vec{\gamma}_v, \vec{n}_v)$ definido a partir do vértice v para o cálculo da quádrlica.	104
9.2	Seleção dos vértices V_v	108
9.3	Efeito do parâmetro n_e para os valores 6, 12 e 24.	109
9.4	Construção de uma <i>função de espaçamento</i> sobre a superfície de um toro.	110
9.5	Comparação entre métodos de suavização de <i>funções de espaçamento</i>	118
10.1	Diagrama de estados da rotulação dos vértices.	123
10.2	Entidades envolvidas no cálculo da métrica Q_G	124
10.3	Efeitos da métrica Q_G no processo de remalhamento.	125
10.4	<i>Flipping</i> de uma aresta.	126
10.5	Movendo um vértice pertencente a uma <i>superfície-de-controle</i>	127
10.6	Movendo um vértice pertencente a uma <i>linha-de-controle</i>	128
10.7	Exemplificação do problema no critério simplificado dado pela Restrição 10.6.	131
10.8	Procedimento complementar para a inserção de vértices.	131
10.9	Caso limite para o procedimento complementar para inserção de vértices.	132
10.10	Remalhamento da triangulação original (a) sem utilizar (b) e utilizando (c) o procedimento complementar de inserção.	133
10.11	Remoção do vértice v_i seguida de retriangulação.	133
10.12	Remoção do vértice v_i pela colaptação da aresta e_{ij}	134
10.13	Colaptação de qualquer aresta tracejada resulta em elementos inválidos.	134
10.14	Condição para remoção de um vértice em uma <i>linha-de-controle</i>	134
10.15	Condição para remoção de um vértice em uma <i>ponta-de-controle</i>	135
10.16	Remoção de vértices em <i>superfícies-de-controle</i>	136

11.1 Malha original (à esquerda) e remalhamento isotrópico uniforme (à direita) dos ossos do pé.	142
11.2 Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica uniforme dos ossos do pé.	143
11.3 Ossos do pé após a suavização da forma (à esquerda) e após o remalhamento anisotrópico (à direita).	144
11.4 Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica dos ossos do pé.	145
11.5 Remalhamento anisotrópico dos vasos sangüíneos.	146
11.6 Detalhes das malhas dos vasos sangüíneos.	147
11.7 Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica dos vasos sangüíneos.	148
11.8 Crânio original (à esquerda) e após tratamento de suavização de forma e remalhamento isotrópico uniforme (à direita).	150
11.9 Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica uniforme do crânio.	151
11.10 Remalhamento anisotrópico do crânio suavizado.	152
11.11 Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica do crânio.	152
11.12 Remalhamento isotrópico do crânio suavizado.	154
11.13 Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica do crânio.	155
11.14 Remalhamento de uma formiga.	156
11.15 Remalhamento de uma vaca.	157
11.16 Remalhamento de um ônibus espacial.	158

Lista de Tabelas

6.1	Medições de qualidade dos elementos da malha volumétrica.	78
11.1	Informações sobre o remalhamento isotrópico uniforme dos ossos do pé.	141
11.2	Medições de ângulos da malha isotrópica uniforme para os ossos do pé.	141
11.3	Informações sobre o remalhamento anisotrópico dos ossos do pé.	143
11.4	Medições de ângulos da malha anisotrópica para os ossos do pé.	143
11.5	Medições de ângulos para o exemplo dos vasos sangüíneos.	145
11.6	Informações sobre o remalhamento dos vasos sangüíneos.	148
11.7	Medições de ângulos da malha isotrópica uniforme do crânio.	151
11.8	Informações sobre o remalhamento isotrópica uniforme do crânio.	151
11.9	Medições de ângulos na malha anisotrópica do crânio.	153
11.10	Informações sobre o remalhamento anisotrópico do crânio.	153
11.11	Medições de ângulos da malha isotrópica do crânio.	155
11.12	Informações sobre o remalhamento isotrópico do crânio.	155

Capítulo 1

Introdução

Um passo essencial em simulação numérica é a construção de uma discretização apropriada do domínio onde se deseja executar a simulação. Este é precisamente o problema tratado pela geração de malhas. A geração de malhas é um bom exemplo de atividade interdisciplinar, sendo que seu desenvolvimento se dá mediante avanços em geometria computacional e combinatorial, estrutura de dados, análise numérica e aplicações científicas.

A geração de malhas é um componente chave em simulações computacionais de fenômenos físicos ou de engenharia, que são freqüentemente modelados por equações diferenciais parciais (EDP). Nem sempre é possível resolver tais equações analiticamente, como por exemplo quando as condições de contorno são complicadas ou quando os domínios são irregulares. Nestes casos é necessário trabalhar com aproximações. Os métodos numéricos mais comumente usados para aproximar EDPs são: diferenças finitas, elementos finitos (ou MEF - *finite elements method*) e volumes finitos. Eles são usados para modelar os mais variados fenômenos, tais como: deformação mecânica, transferência de calor, dinâmica dos fluidos, propagação de ondas eletromagnéticas e mecânica quântica.

Uma simulação numérica normalmente utiliza os seguintes passos básicos:

1. *Modelagem Matemática*: define o domínio contínuo Ω e as equações diferenciais parciais sobre Ω que modelam o problema.
2. *Modelagem Geométrica*: aproxima o domínio contínuo Ω por uma representação discreta.
3. *Geração de Malha*: decompõe o interior do domínio em elementos por meio de uma malha.
4. *Aproximação Numérica*: refere-se à construção de um sistema de equações lineares ou não-lineares sobre a malha para representar as EDPs governantes.

5. *Solução Numérica*: resolve o sistema de equações e estima o erro na solução.
6. *Processo Adaptativo*: se necessário, refina e/ou engrossa a malha e repete os passos 5 e 6 sobre a malha refinada.

Para discretizar um domínio, não é suficiente escolher um conjunto qualquer de pontos para serem os nós, o domínio deve ser particionado em pequenas partes de formato simples. No caso do FEM, por exemplo, estas partes são chamadas elementos e são triângulos ou quadriláteros (em duas dimensões), ou ainda tetraedros, prismas, pirâmides e hexaedros (em três dimensões). O FEM emprega um nó em cada vértice dos elementos, estes nós são compartilhados por vários elementos. A coleção dos nós e elementos é chamada de malha. Como os elementos possuem formatos simples, é possível aproximar o comportamento da EDP em cada elemento. Acumulando estes efeitos sobre todos os elementos, deriva-se um sistema de equações cuja solução aproxima um conjunto de quantidades físicas (temperatura, por exemplo) em cada nó do domínio.

A precisão da solução depende intimamente da qualidade da malha. Uma malha é considerada de boa qualidade se ela for constituída por elementos adequados em termos de formato e tamanho. A Figura 1.1 apresenta quatro malhas diferentes para um mesmo domínio, sendo que cada uma delas se adequa a um tipo diferente de problema.

As malhas são geralmente categorizadas em estruturadas e não-estruturadas. As malhas estruturadas apresentam uma estrutura topológica uniforme, o que não acontece nas malhas não-estruturadas. Nas malhas estruturadas, os índices dos vizinhos de um nó podem ser obtidos por uma função simples. As malhas não-estruturadas são representadas por estruturas de dados mais elaboradas e os índices dos vizinhos são obtidos por meio de consultas a estas estruturas de dados. A Figura 1.2 apresenta dois exemplos de malhas triangulares, uma estruturada e outra não-estruturada. Um tipo particularmente simples de malha estruturada é a malha cartesiana regular, onde os elementos são quadriláteros ou hexaedros idênticos.

As malhas estruturadas são mais fáceis de serem geradas e manipuladas, requerem estruturas de dados simples e reduzem a dificuldade de programação. No entanto, o uso de malhas estruturadas regulares limitam a aplicabilidade dos métodos numéricos a problemas com domínios de geometria simples e com soluções dadas por funções suaves. Por outro lado, para problemas envolvendo domínios complicados onde as soluções variam rapidamente sobre o domínio, é necessário usar uma malha não-estruturada. Essas malhas possibilitam variar facilmente a topologia e o espaçamento em diferentes regiões do domínio. Por exemplo, considere a modelagem de terremotos, é necessário uma discretização mais fina e densa no centro do tremor, pois não se deve desperdiçar pontos em regiões de pouca atividade. Porém, para

Figura 1.1: Exemplos de diferentes malhas geradas para um mesmo domínio [14].

esse tipo de malha a construção do método numérico se torna mais difícil e a implementação dos algoritmos mais trabalhosa.

Um gerador de malhas deve controlar tanto quanto possível os tamanhos dos elementos na malha. Idealmente, esse controle inclui a habilidade de variar entre pequenos e grandes elementos em diferentes regiões do domínio. A razão disso é que o tamanho do elemento tem dois efeitos numa simulação. Uma região com elementos pequenos oferece mais precisão do que uma com elementos grandes, porém o tempo requerido para resolver um problema é proporcional ao número de elementos. Assim, escolher o tamanho dos elementos consiste em ponderar entre desempenho e precisão. Além disso, o tamanho de elemento requerido para se obter uma dada precisão depende do comportamento do fenômeno físico modelado e o tamanho pode ainda variar entre diferentes regiões do domínio do problema (ver Figura 1.3). Por exemplo, em simulação de dinâmica dos fluidos, elementos pequenos devem ser dispostos nas regiões de turbulência e elementos maiores podem ser utilizados nas áreas de relativa quietude. Em três dimensões, o volume de um elemento ideal em regiões distintas da malha pode diferir na razão de um para um milhão. Se uma malha for construída por elementos de tamanho uniforme, estes devem ser pequenos o suficiente para garantir a precisão desejada

Figura 1.2: Exemplo de malha triangular estruturada (a) e não-estruturada (b).

na parte do domínio mais relevante, podendo, portanto, demandar uma quantidade excessiva de computação. Um gerador de malhas deve, portanto, possibilitar variações no tamanho dos elementos sobre o domínio.

Figura 1.3: Malha não-estruturada com densidade de pontos variante sobre o domínio [97].

Refinamento e simplificação de malhas são processos utilizados para ajustar a densidade de nós da malha, e, conseqüentemente, os tamanhos dos elementos. O papel do refinamento é aumentar a densidade de nós e não é um procedimento simples de ser realizado. O processo de simplificação, por sua vez, trata da eliminação de nós e é um procedimento consideravelmente mais complicado que o de refinamento. Por isso os geradores de malhas normalmente se propõem a gerar uma malha tão grossa quanto possível e então oferecem uma opção para refinar regiões onde se deseja maior precisão numérica. Esta foi a estratégia empregada na geração da malha da Figura 1.3.

Não apenas o tamanho dos elementos influencia na qualidade da malha, mas também a forma. Sendo assim, outro objetivo dos geradores de malha é produzir elementos com formatos

adequados para o propósito da malha. Essa é uma tarefa consideravelmente difícil e poucos geradores são capazes de produzir malhas atendendo determinados critérios de qualidade relativos ao formato dos elementos [27, 70, 81, 78]. De uma maneira geral, os geradores procuram criar elementos tão próximos quanto possível dos equiláteros. Elementos com ângulos próximos de 180° podem causar erros inaceitáveis de discretização. Por princípio, a solução discreta deve aproximar a solução exata da EDP quando o tamanho dos elementos tender a zero. Entretanto, no caso de FEM, Babuska [8] mostra que se os ângulos aproximarem-se de 180° à medida que diminuem, a convergência para a solução exata não ocorre. Portanto, elementos com ângulos grandes devem ser evitados.

Um outro problema causado por ângulos grandes são os erros nas derivadas da solução, os quais sobresaem como artefatos de interpolação sobre a malha. Esse problema pode afetar qualquer aplicação que faça uso de malhas para interpolação.

Segundo [20], ângulos pequenos também podem causar problemas, por tornarem mal condicionados os sistemas acoplados de equações numéricas produzidos pelo método numérico. Se o sistema é mal condicionado e for solucionado por métodos diretos, os erros de arredondamento degradam a precisão da solução; já nos métodos iterativos, a convergência torna-se lenta.

Sabe-se, portanto, que o tamanho e o formato dos elementos devem ser controlados para garantir uma determinada precisão na solução. Mas como determinar quais regiões do domínio devem ser mais densas e quais devem ser menos densas? A resposta para esta pergunta reside nas condições numéricas do domínio do problema.

O domínio do problema é descrito pela sua geometria, possivelmente criada em algum sistema CAD, e também pelas condições numéricas sobre o domínio. As condições numéricas do problema afetam a precisão da solução, uma vez que estão diretamente relacionadas com os erros de discretização. Elas definem a densidade de espaçamento local desejada nas diversas regiões do domínio. A densidade, por sua vez, é geralmente obtida a partir de uma análise de erro *a priori* ou *a posteriori* baseada na simulação numérica inicial.

Um exemplo de indicador de densidade de pontos comumente utilizado é o gradiente da solução. Para um problema cuja solução tem variação lenta, é possível utilizar uma malha uniforme, isto é, com elementos de aproximadamente o mesmo tamanho. Para problemas com soluções que apresentam variações rápidas, pode ser necessário usar malhas mais refinadas em algumas regiões e menos refinadas em outras.

As condições numéricas definem uma *função de espaçamento*, denotada por $h(x)$, para cada ponto x do domínio. O valor de $h(x)$ determina qual a distância que um vértice em x deve estar dos outros vértices na malha, ou seja, o tamanho esperado das arestas. O valor de

$h(x)$ depende dos autovalores da matriz hessiana, denotada por $H(x)$, da solução u da EDP governante. O espaçamento $h(x)$, depende da raiz quadrada do maior autovalor em módulo de $H(x)$.

Em simulações numéricas adaptativas pode-se, por exemplo, começar com uma malha mais grossa e uniforme para o passo inicial. Os autovalores da matriz hessiana são estimados para um determinado conjunto de pontos no domínio baseado na aproximação numérica obtida na malha inicial. Os autovalores são então usados para determinar o espaçamento da nova malha.

Um outro fator que pode influenciar na solução produzida por um método numérico é a anisotropia. Quando o problema apresenta um comportamento fortemente anisotrópico os elementos da malha podem ser finos e orientados de acordo com a anisotropia. A Figura 1.1(d) mostra uma malha anisotrópica. Por exemplo, na análise de um vôo supersônico em mecânica dos fluidos, os elementos devem estar esticados e orientados ao longo da camada de choque. Malhas anisotrópicas são utilizadas em vários problemas de mecânica de fluidos computacional [69, 21, 2] e os resultados mostram que estas malhas oferecem um bom compromisso entre precisão numérica e número de elementos da malha.

A matriz hessiana $H(x)$ da solução estabelece uma métrica riemanniana que determina o espaçamento local. Considerando um ponto x do domínio, o elemento ideal para possibilitar um erro de aproximação uniforme em todas as direções é um elipsóide cujos eixos são dados pelos autovetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ e cujos raios ao longo de $\vec{v}_i$ são proporcionais a $1/\sqrt{|\xi_i|}$, onde ξ_i é o autovalor associado a $\vec{v}_i$ [80].

Como mencionado anteriormente, na geração de malhas isotrópicas o espaçamento $h(x)$ requerido para oferecer precisão em um ponto x do domínio depende da raiz quadrada do maior autovalor de $H(x)$ no ponto x . Entretanto, em aplicações anisotrópicas o maior autovalor em módulo pode diferir consideravelmente dos demais. Nesse caso, uma malha isotrópica poderá conter muito mais elementos que o necessário; já as malhas anisotrópicas são mais adequadas, pois o uso de elementos finos pode satisfazer às necessidades de precisão em diferentes direções, desde que os elementos estejam corretamente posicionados e direcionados no domínio.

A transformação de uma malha em outra malha mais adequada para o passo seguinte de simulação é conhecido como remalhamento (*remeshing*). Dependendo da configuração da *função de espaçamento* $h(x)$ a malha produzida pode ser isotrópica ou anisotrópica. Note que a discussão até o momento considerou um domínio fixo. Porém, existem aplicações onde a geometria do domínio varia com o tempo. São os problemas conhecidos como *moving boundary problems*, ou seja, problemas com fronteira móvel. Tais problemas são encontrados em diversas aplicações científicas e de engenharia, incluindo: simulação da circulação sanguínea, oscilações de aerofólio, análise de corpos em movimento, otimização de formas, além dos problemas em

mecânica de fluidos computacional com superfície livre. Durante a simulação dessas aplicações, o objeto em estudo sofre alterações em seu formato, modificando assim o domínio sobre o qual a malha está definida. Uma mudança contínua no domínio requer modificações consecutivas na malha a fim de garantir que esta permaneça conforme com a descrição geométrica do domínio. Dessa forma, sempre que o domínio for alterado, é necessário ajustar a malha para a nova geometria do espaço.

De modo geral, têm-se três alternativas para tratar a malha em aplicações com domínio variante: (1) gerar uma nova, (2) alterar a malha original e (3) malhas dinâmicas. A primeira opção consiste em gerar uma nova malha sempre que o domínio for alterado. O custo computacional dessa opção é geralmente proibitivo, principalmente em três dimensões, pois as malhas são comumente grandes e a alteração no domínio ocorre em pequenas etapas, o que requer a geração de várias malhas durante o processo. Além disso, o processo de geração de malha é difícil de ser automatizado, pois a intervenção do usuário é quase sempre requerida para configurar os parâmetros do gerador a fim produzir malhas de boa qualidade.

A segunda opção, remalhamento, modifica a malha por meio de operações como inserção, remoção e movimento de vértices e alternância (*flipping*) de arestas. Geralmente as alterações da malha ocorrem apenas onde o domínio foi modificado, podendo deixar intacta grande parte da malha original. Apesar de oferecer bons resultados, o remalhamento não é simples de ser implementado computacionalmente. A tarefa se torna ainda mais complexa em malhas volumétricas, em especial quando estas são compostas por elementos outros que não tetraedros. Note que o remalhamento neste caso tem um propósito diferente do discutido anteriormente onde a intenção era alterar os elementos de uma malha existente para que obedecessem uma determinada *função de espaçamento* $h(x)$ (isotrópica ou anisotrópica) definida sobre um domínio fixo. Neste caso, o remalhamento tem por objetivo principal corrigir as distorções na malha causadas pelo movimento da fronteira do domínio, sendo que a *função de espaçamento* $h(x)$ pode ou não estar envolvida.

A terceira opção, conhecida na literatura como *malha dinâmica* [36, 18, 73, 46, 89], consiste em manter inalterada a conectividade da malha original e realizar o ajuste à nova configuração do domínio por meio de movimentação de vértices. A malha dinâmica é obtida pela distribuição de molas virtuais sobre a malha a ser movimentada. Sempre que o domínio sofrer alteração, as molas são acionadas movimentando os vértices para que estes se conformem com a nova descrição do domínio. Se comparada com as outras opções, as malhas dinâmicas oferecem as seguintes vantagens: elas são relativamente fáceis de serem implementadas, mesmo em malhas volumétricas; geralmente requerem menos tempo para modificar a malha para a próxima etapa da aplicação; e não requerem a intervenção do usuário, o que torna a aplicação mais fácil de

ser automatizada. No entanto, as malhas dinâmicas possuem uma limitação intrínseca. Como a conectividade da malha não é alterada, quando o domínio sofre grandes deformações a malha resultante pode não oferecer boas condições para o próximo passo da aplicação. Quando isso ocorre, a geração de uma nova malha ou o remalhamento é aplicado.

Neste trabalho de doutorado são exploradas abordagens para tratamento de malhas por meio de malhas dinâmicas e de remalhamento. Nos dois casos, a intenção é produzir malhas para fins de simulação numérica.

A motivação inicial para o estudo de malhas dinâmicas neste trabalho está relacionada com a necessidade de movimentar malhas volumétricas em aplicações de dinâmica de fluidos computacional na indústria aeronáutica. Uma das contribuições desta tese é um estudo comparativo entre variadas configurações de molas e a proposta de um novo tipo de mola, chamada *mola altura*, que oferece vantagens sobre as molas longitudinais, torcionais e semi-torcionais, que são as mais comumente utilizadas.

Outra motivação para estudar malhas dinâmicas está relacionada com a carência de uma estratégia baseada em malhas dinâmicas para acoplar de forma automática um simulador de escoamento de fluidos tridimensional com uma ferramenta auxiliar bidimensional para projeto inverso de aerofólios. Esta também é uma das contribuições desta tese. Esse acoplamento se dá no seguinte contexto. Após realizar uma simulação numérica inicial na malha volumétrica em volta do avião, são aplicados planos de corte perpendiculares à asa. As interseções desses planos com a asa definem um conjunto de curvas denominadas perfis. O papel da ferramenta auxiliar de projeto inverso é modificar a geometria desses perfis. O grande desafio surge no momento de modificar o modelo tridimensional do avião com base apenas nas informações geométricas fornecidas pelo conjunto de perfis. Em face desse desafio, esta tese introduz uma estratégia inovadora para movimentar malhas superficiais. Tal estratégia é baseada em um novo tipo de mola introduzida neste trabalho que é conhecida como mola conservativa. Estas molas são capazes de movimentar malhas superficiais sem prejudicar a forma geométrica geral da superfície de entrada e sem precisar para isso fazer uso de projeção de pontos.

Como mencionado anteriormente, esta tese também introduz uma nova técnica de remalhamento. A técnica recebe o nome de *ANTS* (*Anisotropic Triangulations on Surfaces*) e tem por objetivo produzir triangulações anisotrópicas de qualidade sobre superfícies descrevendo objetos com geometria complexa. A motivação para tratar de tal assunto surgiu da limitação natural das malhas dinâmicas, que não são capazes de produzir malhas de boa qualidade quando o domínio sofre certas alterações geométricas, em geral deformações relativamente grandes. Como mencionado anteriormente, em tais cenários o remalhamento é uma alternativa interessante, pois ela pode manter inalteradas certas regiões da malha original, o que

promove economia de processamento.

O *ANTS* é caracterizado por efetuar o remalhamento diretamente na triangulação inicial, isto é, ele não faz uso de qualquer tipo de parametrização, seja global ou local. O processo de remalhamento se dá por meio de quatro operadores. Os operadores de inserção e remoção de vértices possibilitam controlar a densidade de vértices no domínio, permitindo que vértices sejam inseridos em regiões com densidade baixa e que vértices sejam eliminados onde a densidade é alta. A qualidade dos triângulos é controlada por meio dos operadores de movimento de vértices e de alternância (*flipping*) de arestas. Motivado pela flexibilidade das malhas dinâmicas e pelo trabalho de Bossen e Heckbert [15], o operador de movimento é utilizado no núcleo do processo de remalhamento e não em um passo de pós processamento, como acontece em vários métodos.

Para evitar que o remalhamento danifique a forma original da superfície, as quinas e os córneres são detectados no início do processo e preservados durante o remalhamento. Os vértices detectados como córneres não são nem movidos nem eliminados. Nas arestas detectadas como quina, o operador de *flipping* não é aplicado.

A densidade de vértices sobre o domínio é controlada por uma *função de espaçamento*. Tal função pode ser passada como entrada para o *ANTS* ou calculada pelo próprio método. Como mencionado anteriormente, as vezes a *função de espaçamento* pode ser provida mediante a análise dos estimadores de erro *a posteriori*, os quais são calculados a partir de uma simulação numérica executada previamente no mesmo domínio, possivelmente na própria triangulação de entrada. Em outros casos, o *ANTS* pode estimar uma *função de espaçamento* anisotrópica ou isotrópica (dependendo da necessidade do usuário) em função das principais curvaturas da malha de entrada.

Os capítulos dessa tese estão estruturados na seguinte ordem. O próximo capítulo trata dos conceitos básicos úteis para o entendimento do restante do texto. Embora as técnicas de malhas dinâmicas e de remalhamento estejam de uma certa maneira relacionadas, pois ambas têm o propósito de modificar malhas já existentes, elas diferem consideravelmente em suas metodologias. O assunto malha dinâmica está abordado nos capítulos 3, 4 e 5 ao passo que os capítulos 6, 7, 8, 9 e 10 tratam de remalhamento. Já o capítulo 11 apresenta conclusões e sugestões para trabalhos futuros referentes aos dois assuntos.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Este capítulo apresenta definições e conceitos fundamentais para o entendimento dos próximos capítulos.

2.1 Definições preliminares

As definições apresentadas a seguir estão principalmente baseadas em [33, 64, 35, 42].

Definição 1 (Espaço Euclidiano) *O Espaço Euclidiano de dimensão n é o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado da métrica euclidiana usual, isto é, dado dois pontos $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, a distância entre p e q é dada por:*

$$\|p - q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 \dots + (p_n - q_n)^2} \quad (2.1)$$

Definição 2 (Esfera) *Um esfera de dimensão $n - 1$, denotada por S^{n-1} , é definida como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x\| = 1$.*

Definição 3 (Disco) *Um disco de dimensão n , denotado por D^n , é definido como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x\| \leq 1$.*

Definição 4 (Homeomorfismo) *Um homeomorfismo de um conjunto A em um conjunto B é uma aplicação $f : A \rightarrow B$ contínua inversível com inversa contínua. Dizemos que dois conjuntos A e B são homeomorfos se existe homeomorfismo de A em B .*

Definição 5 (Fecho Convexo) *Dado um conjunto de pontos $P \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto de todas as combinações lineares convexas, dado pela equação 2.2, exprime a definição de fecho convexo (figura 2.1).*

Figura 2.1: Exemplo do fecho convexo de um conjunto de pontos no plano.

$$\text{conv}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, \quad (2.2)$$

em que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, p_i \in P$.

O fecho convexo $\text{conv}(P)$ pode ser visto como o menor polígono convexo que contenha os pontos de P .

Definição 6 (Vetores em posição geral) Se $v_0, v_1, \dots, v_p$ são vetores em $\mathbb{R}^m$, dizemos que esses $p+1$ vetores estão em posição geral, quando os vetores $(v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_p - v_0)$ são linearmente independentes.

Diz-se que o vetor y é linearmente dependente de $v_0, v_1, \dots, v_p$ se existir $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ tal que $y = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$.

Definição 7 (Célula convexa afim) É fecho convexo de um conjunto finito de pontos $p_0, p_1, \dots, p_n$. Dizemos então que ela é gerada por $p_0, p_1, \dots, p_n$.

Definição 8 (Subcélula) Uma subcélula convexa afim τ de um célula convexa afim σ , denotada por $\tau \prec \sigma$, é uma célula convexa afim τ contida no bordo de σ . denotada por $\tau \in \sigma$, se e somente se:

Um vértice de uma célula é uma subcélula com um só ponto. A célula σ é considerada subcélula dela mesma.

Definição 9 (Dimensão de uma célula) Diz-se que uma célula convexa afim gerada por $p_0, \dots, p_m$ tem dimensão n , denotado por n -célula, se ela contém $n+1$ vetores em posição geral dentre $p_0, \dots, p_m$ e não mais do que isso.

Note que as subcélulas de uma 2-célula são: as suas arestas (1-subcélulas), e os seus vértices (0-subcélulas). A Figura 2.2 exemplifica as subcélulas de uma 2-célula retangular.

Figura 2.2: Faces de uma célula.

Figura 2.3: Ligação entre células.

Definição 10 (Simplexo) Quando uma célula convexa afim possui dimensão n e é gerada por $n + 1$ vetores em posição geral, ela é chamada de simplexo.

Definição 11 (Células propriamente ligadas) Duas células σ^m e σ^n são propriamente ligadas se alguma das seguintes condições forem satisfeitas:

- $\sigma^m \cap \sigma^n = \emptyset$, ou
- $\sigma^m \cap \sigma^n = \tau$ com $\tau \prec \sigma^m$ e $\tau \prec \sigma^n$.

A Figura 2.3 mostra exemplos de células propriamente e impropriamente ligadas.

Definição 12 (Complexo celular) Um complexo celular n -dimensional K é uma coleção finita de células i -dimensionais ($i = 0, \dots, n$) em $\mathbb{R}^m$ sob as seguintes condições:

1. Se $\sigma \in K$ e $\tau \in \sigma$ então $\tau \in K$.
2. Se σ e $\rho \in K$ então σ e ρ são propriamente ligadas.

Definição 13 (Adjacência de subcélulas) Duas k -células σ e ρ de um complexo celular K são adjacentes quando $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$.

Figura 2.4: Exemplo de componentes.

Definição 14 (Incidência) *Seja K um complexo celular. Se $\tau \in K$ e $\rho \in K$ e τ é subcélula de ρ , diz-se que ρ é incidente a τ .*

Definição 15 (Subcomplexo (ou grupo)) *Se uma coleção de células $L \subset K$ é um complexo celular, então é chamado de um subcomplexo (ou grupo) de K .*

Definição 16 (Complexo conectado) *Um complexo K é conectado se não pode ser representado como a união de dois subcomplexos disjuntos não vazios L e M sem células em comum.*

Definição 17 (Componente) *Uma componente de um complexo celular K é um subcomplexo conectado que não está contido em um subcomplexo conectado maior em K .*

A Figura 2.4 ilustra um complexo celular composto por 26 componentes (uma para cada osso).

Definição 18 (Estrela) *A estrela de uma célula convexa afim $\sigma \in K$ é um subcomplexo de K composto pela união das células e subcélulas incidentes a σ e é denotada por $\star_\sigma$.*

Definição 19 (Link) *O elo de uma célula convexa afim σ que é denotado por $\hat{\star}_\sigma$ é o subcomplexo do bordo de $\star_\sigma$ que não contém σ .*

A Figura 2.5 destaca a estrela (células destacadas em cinza) e o link (arestas em negrito) de dois vértices, indicados por a e b , de um complexo celular bidimensional.

Definição 20 (Variedade combinatória) *Um complexo celular n -dimensional M , $|M| \subset \mathbb{R}^m$, é uma variedade combinatória de dimensão n com bordo se o link de toda célula convexa afim σ de M for homeomorfo a S^{n-1} ou a D^{n-1} .*

Figura 2.5: Estrela e link de vértices.

Definição 21 (Bordo de uma variedade combinatória) *O bordo de uma variedade combinatória M de dimensão n é definido como o conjunto de todas as células cujo link é homeomorfo a D^{n-1} .*

O bordo de uma variedade combinatória de dimensão n é uma variedade combinatória de dimensão $(n - 1)$ sem bordo. O bordo de uma superfície combinatória é um conjunto (possivelmente vazio) de curvas, onde cada uma é formada por um conjunto finito de arestas e vértices de bordo que formam uma curva simples fechada chamada de curvas de bordo. Uma aresta de uma superfície combinatória é dita do bordo se ela for incidente a uma única face, caso contrário a aresta é definida como do interior. Um vértice é de bordo se ele for incidente a uma aresta de bordo, caso contrário, o vértice é do interior.

Definição 22 (Variedade combinatória orientável) *Uma variedade combinatória de dimensão n é orientável quando é possível escolher uma orientação coerente em suas n -células, isto é duas n -células adjacentes induzem orientações opostas em suas $(n - 1)$ -células comuns.*

Portanto, uma superfície combinatória orientável é aquela em que é possível orientar cada uma de suas faces de tal forma que uma aresta em faces adjacentes possui orientação oposta, isto é, uma aresta do interior incidente aos vértices v_a e v_b e às faces f_1 e f_2 , possui duas orientações, uma de v_a a v_b na face f_1 , e outra de v_2 a v_1 na face f_2 . Quando a aresta é de bordo, ela possui uma orientação que é coerente com a orientação da face incidente a ela. Dá-se o nome de aresta orientada ou semi-aresta, à cada uma das orientações das arestas.

No restante deste texto, o termo curva referir-se-á a uma variedade combinatória de dimensão 1 orientada com ou sem bordo. O termo superfície referir-se-á a uma variedade combinatória de dimensão 2 orientada com ou sem bordo.

As malhas bidimensionais tratadas neste texto são variedades combinatórias de dimensão 2 orientada com ou sem bordo.

As malhas tridimensionais tratadas neste texto são variedades combinatórias de dimensão 3 orientada com bordo.

2.2 Notações

No restante desta tese será utilizada a seguinte notação:

T	uma malha 2D ou 3D.
∂T	Bordo de T .
V_T	conjunto de vértices (0-células) de T .
v	vértice.
v_i	um vértice específico (0-célula).
e	aresta.
e_{ij}	a aresta (1-célula) incidente aos vértices v_i e v_j .
$\vec{e}_{ij}$	vetor definido por $(v_i - v_j)$, note que $\vec{e}_{ij} \neq \vec{e}_{ji}$.
t_{ijk}	um triângulo (2-célula) incidente aos vértices v_i, v_j e v_k .
τ_{ijkl}	um tetraedro (3-célula) incidente aos vértices v_i, v_j, v_k e v_l .
$V(\star_{v_i})$	conjunto de vértices adjacentes a v_i , ou seja, os vértices pertencentes a $\star_{v_i}$.
$(p)_x$	refere-se à coordenada x de p .
$(p)_y$	refere-se à coordenada y de p .
$(p)_z$	refere-se à coordenada z de p .
$\#(A)$	cardinalidade de um dado conjunto A .

2.3 Anisotropia

Diferentemente da geometria euclidiana, onde a definição de distâncias é isotrópica e consideravelmente simples, a geometria riemanniana descreve espaços curvos. A anisotropia de distâncias, necessária para gerar malhas com triângulos esticados, é definida na geometria riemanniana por um tensor métrico M . Este tensor quantifica o "estiramento" desejado para os triângulos da malha.

Seja Ω o domínio de uma malha superficial em R^3 . Qualquer função H associando a cada ponto $w \in \Omega$ um tensor métrico positivo definido, denotado por M_w define uma *função de espaçamento*. A notação M_w será utilizada para denotar o tensor métrico M associado ao ponto $w \in \Omega$, isto é, $H(w) = M_w$. O tensor métrico provém da geometria riemanniana e define anisotropia determinando como comprimentos e ângulos devem ser medidos.

O tensor métrico tridimensional M é uma matriz 3×3 simétrica definida positiva. Sejam ξ_i e $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, respectivamente, os autovalores (reais e positivos) e autovetores (unitários e ortogonais entre si) associados de M . Será utilizada a notação ξ_{min} e ξ_{max} para designar o menor e o maior autovalor de um tensor métrico M , e $\vec{v}_{min}$ e $\vec{v}_{max}$ seus respectivos autovetores

unitários associados.

Em muitas situações, os autovalores e os autovetores de um tensor métrico são conhecidos, nestes casos, um tensor tridimensional pode ser construído da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \vec{\nu}_2 & \vec{\nu}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \vec{\nu}_2 & \vec{\nu}_3 \end{bmatrix}^t \\ &= \xi_1 \vec{\nu}_1 \vec{\nu}_1^t + \xi_2 \vec{\nu}_2 \vec{\nu}_2^t + \xi_3 \vec{\nu}_3 \vec{\nu}_3^t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\vec{\nu}$ é uma matriz coluna e $\vec{\nu}\vec{\nu}^t$ é uma matriz quadrada 3×3 .

Considere o seguinte exemplo para ilustrar como um tensor métrico influencia no formato de um triângulo. Seja um domínio bidimensional com anisotropia constante definida pelo seguinte tensor métrico bidimensional $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Neste espaço, um triângulo com vértices $(1, 1)$, $(3/2, 1)$ e $(5/4, \sqrt{3}/2)$ é equilátero. Pois, segundo a métrica, todas as arestas medem uma unidade.

Na geometria riemanniana, as operações geométricas básicas são redefinidas. Sejam dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto interno de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por:

$$\vec{a}^t \odot \vec{b} = \vec{a}^t M \vec{b}, \quad (2.4)$$

e o produto vetorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \sqrt{\det(M)} (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (2.5)$$

onde $\det(\cdot)$ é o determinante de uma matriz e $(\cdot \times \cdot)$ é o produto vetorial no espaço euclidiano.

2.4 Medidas no espaço anisotrópico

As medidas de distâncias, ângulos e áreas no espaço anisotrópico são realizadas de forma particular, como apresentadas nessa seção.

2.4.1 Cálculo de distâncias

Na geometria riemanniana, o comprimento ℓ de uma curva paramétrica $S(t)$ entre os pontos x_i e x_j segundo a métrica M , onde $t \in [0, 1]$, $S(0) = x_i$ e $S(1) = x_j$ é definida como:

$$\ell(S) = \int_0^1 \sqrt{\frac{dS^t}{dt} M_{S(t)} \frac{dS}{dt}} dt. \quad (2.6)$$

A distância entre dois pontos é dada pela menor curva paramétrica S , a qual é conhecida como curva geodésica. Observe que computar esta curva para uma métrica arbitrária não é trivial. Porém, uma aproximação pode ser feita computando-se o comprimento ao longo de uma curva mais simples, sem garantir que ela seja o menor caminho. Assim, a aproximação pode ser obtida pela integração ao longo do segmento de reta $S(t) = x_i + t(x_j - x_i)$. Considerando que a métrica M varia linearmente entre quaisquer pontos x_i e x_j do domínio, então a distância entre os pontos pode ser definida por :

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \int_0^1 \sqrt{(\vec{r}_{ij})^t [M_i + t(M_j - M_i)] (\vec{r}_{ij})} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(d_{ij}^i)^2 + t[(d_{ij}^j)^2 - (d_{ij}^i)^2]} dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\vec{r}_{ij}$ é o vetor saindo de x_i para x_j , e

$$d_{ij}^k = \sqrt{(\vec{r}_{ij})^t M_k (\vec{r}_{ij})} \quad (2.8)$$

é a distância de x_i a x_j segundo a métrica M_k definida em um ponto k do domínio. Com mudanças apropriadas de variáveis, a Equação (2.7) pode ser reescrita como:

$$d_{ij} = \frac{2}{3} \frac{(d_{ij}^i)^2 + d_{ij}^i d_{ij}^j + (d_{ij}^j)^2}{d_{ij}^i + d_{ij}^j}. \quad (2.9)$$

Assumindo que os pontos x_i e x_j estejam próximos uns dos outros e que a métrica varie pouco entre eles, aproximações mais grosseiras são possíveis. Por exemplo, a simples média aritmética das distâncias quando medidas segundo x_i e x_j , isto é,

$$d_{ij} \approx \frac{d_{ij}^i + d_{ij}^j}{2}, \quad (2.10)$$

ou a média aritmética das métricas, tal que

$$d_{ij} \approx \sqrt{(\vec{r}_{ij})^t \left(\frac{M_i + M_j}{2} \right) (\vec{r}_{ij})}. \quad (2.11)$$

2.4.2 Cálculo de ângulos

O ângulo θ_{abc}^k entre os segmentos de reta $\overline{ab}$ e $\overline{bc}$ medido de acordo com a métrica M_k é calculado da seguinte forma:

$$\theta_{abc}^k = \arccos \frac{(a - b)^t M_k (c - b)}{d_{ab}^k d_{cb}^k}. \quad (2.12)$$

Figura 2.6: Representação da anisotropia por curvas de nível.

2.5 Representação gráfica de um tensor métrico

Uma das formas de representar a anisotropia em um ponto $w \in \Omega$ é descrevendo algumas curvas de nível da função $h(x) = x^t M_w x$, $x \in \Omega$. Note que uma curva de nível é formada por todos os pontos do domínio cuja distância de w é igual a uma constante fixa, quando a distância é medida no espaço anisotrópico. A Figura 2.6 apresenta um exemplo em que a visualização por curvas de nível é empregada para visualizar uma aproximação do diagrama de Voronoi anisotrópico. As linhas de equidistância entre dois pontos estão em negrito.

Muito embora as curvas de nível ofereçam informações valiosas para analisar o comportamento da anisotropia, elas podem ser confusas em domínios tridimensionais. Uma alternativa é apresentar apenas uma curva de nível, mais especificamente, aquela cujos pontos distem de uma unidade do centro, isto é,

$$\vec{r}_{wx}^t M_w \vec{r}_{wx} = 1, \quad (2.13)$$

onde $\vec{r}_{wx}$ é o vetor de w a p (veja Equação (2.8)). A Figura 2.7 apresenta um exemplo da representação por elipsóide em um domínio 2D (a extensão para o caso 3D é imediata). Os raios do elipsóide podem ser calculados de acordo com autovalores de M pela expressão

$$r_i = 1/\sqrt{\xi_i}, \quad (2.14)$$

onde r_i é o raio na direção do autovetor $\vec{v}_i$. Portanto, o menor raio do elipsóide está associado com o maior autovalor do tensor métrico.

Em malhas normalizadas, isto é, malhas em que todas as arestas têm comprimento unitário, a representação por elipsóide é apropriada. Pois, como todos os pontos sobre o elipsóide distam

Figura 2.7: Representação por elipsóide 2D.

de uma unidade do centro, é possível estimar visualmente como vértices adjacentes devem estar separados uns dos outros.

Em malhas normalizadas, é importante determinar, no espaço euclidiano, qual deve ser o comprimento ideal de uma aresta em uma dada direção $\vec{d}$ segundo a anisotropia de um ponto $p \in \Omega$, M_p , tal valor é dado por:

$$S_p(\vec{d}) = \frac{1}{\sqrt{\vec{d}^t M_p \vec{d}}}. \quad (2.15)$$

2.6 Função de espaçamento definida por meio de uma malha

Como visto nas seções acima, são os tensores métricos que definem quais são os formatos e orientações dos elementos sobre um domínio. Embora seja possível associar tensores métricos a cada ponto do domínio explicitamente por meio de um conjunto de funções, esta não é a forma mais comumente utilizada. O que geralmente se faz é atribuir diretamente tensores a apenas alguns pontos do domínio e então fazer uso de interpolação para determiná-los para os demais pontos. Uma *malha de fundo* é utilizada para esse fim. Um tensor métrico é definido para cada vértice da malha de fundo, veja a Figura 2.8. Os tensores métricos para os outros pontos do domínio podem ser computados via interpolação linear. Por exemplo, considerando um triângulo t_{abc} da malha de fundo e um ponto $p \in t_{abc}$, se M_a , M_b e M_c são os tensores métricos nos vértices de t_{abc} , então o tensor métrico em p pode ser interpolado pela seguinte equação:

$$M_p = \frac{w^{ap} \cdot M_a + w^{bp} \cdot M_b + w^{cp} \cdot M_c}{w^{ap} + w^{bp} + w^{cp}} \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} w^{ap} &= \|(p - b) \times (c - b)\| \\ w^{bp} &= \|(p - c) \times (a - c)\| \\ w^{cp} &= \|(p - a) \times (b - a)\| \end{aligned}$$

Em alguns casos, as coordenadas baricêntricas de um ponto são conhecidas, e, neste caso, elas podem ser utilizadas para a interpolação. Assim, a Equação (2.16) pode ser simplificada para:

$$M_p = \sum_{j=1}^k \lambda_j M_j, \quad (2.17)$$

onde $k = 3$; $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ e λ_j é a coordenada baricêntrica de p em t_{123} associada ao vértice v_j e M_j é o tensor métrico associado ao vértice v_j de t_{123} . Note que se $k = 2$, a Equação (2.17) interpola valores sobre retas.

Figura 2.8: Exemplo de malha de fundo para definir a anisotropia sobre o domínio (a) e uma possível malha anisotrópica para o domínio (b) [14].

2.7 O tensor métrico e a matriz hessiana

Quando uma malha é usada para fazer uma interpolação linear por partes de uma determinada função, a precisão de tal aproximação depende do tamanho e formato dos elementos. Shewchuk [80] apresenta uma maneira de controlar a influência da geometria dos elementos na precisão da malha estimando-se limitantes para os erros na aproximação e medidas de qualidade dos elementos. Considere o exemplo apresentado na Figura 2.9, onde uma malha triangular define uma função linear por partes $g(x)$ que procura aproximar alguma função $f(x)$ que é uma descrição suave da superfície. Em muitas aplicações, a malha é utilizada como um suporte para se obter valores mediante interpolação. Por exemplo, é comum se ter valores conhecidos apenas nos vértices da malha e inferir valores nos outros pontos do domínio via interpolação. Observe que rasterização (*rendering*) de imagens é uma aplicação desse tipo, onde coordenadas, vetores normais, dentre outras entidades, são interpolados a fim de gerar uma imagem. Portanto, se

Figura 2.9: Aproximação por uma função linear por partes g de uma função original f [52].

a malha for utilizada para interpolação, um bom critério para se julgar a adequação da malha é verificar a diferença entre a função interpolada e a função original.

Seja T uma malha triangular, $f(p)$ uma função escalar contínua definida sobre a malha. Seja gp uma aproximação linear por partes de $f(p)$, onde $g(v) = f(v)$ para cada vértice $v \in T$ e $g(p)$ é linear sobre cada elemento de T . O tensor métrico M geralmente expressa os efeitos do formato do elemento no erro de interpolação. Portanto, M_p está relacionada com a matriz hessiana de f no ponto $p \in \Omega$, podendo inclusive ser a própria hessiana.

Seja H_p a matriz hessiana de f no ponto $p \in \Omega$. Suponha que f satisfaz, de alguma forma, a seguinte restrição, para qualquer ponto $p \in \Omega$ e qualquer vetor direção $\vec{d}$:

$$|\vec{d}^T H_p \vec{d}| \leq \vec{d}^T M_p \vec{d}. \quad (2.18)$$

A inequação acima implica que a curvatura de f no ponto p ao longo da direção $\vec{v}_i$ não excede ξ_i . Mais especificamente, para qualquer vetor unitário $\vec{d}$, tem-se que:

$$\vec{d}^T M_p \vec{d} \leq \xi_{max}, \quad (2.19)$$

assim, a curvatura máxima de f no ponto $p \in \Omega$ é ξ_{max} . Observe que se todos os autovalores ξ_i forem iguais a 1, então M_p é o tensor identidade e o espaço é euclidiano.

Considere um ponto $p \in \Omega$. Como verificado na Equação (2.3), o tensor métrico M_p pode ser construído a partir de um conjunto de autovalores e autovetores. O que significa que, se for possível estimar a matriz hessiana H_p , é possível gerar M_p extraindo os autovalores (em módulo) e autovetores de H_p . Como afirmado anteriormente, diferente da hessiana, o tensor métrico M_p deve ser uma matriz positiva definida, portanto, seus autovalores devem ser positivos ($\xi_i > 0$). Portanto, os autovalores de f , em módulo, servem como limitantes superiores para a magnitude das curvaturas de f no ponto p tomadas ao longo das direções definidas pelos autovetores.

2.7.1 Tensores de transformação

Seja E o tensor de transformação que faz o mapeamento de um ponto p no espaço físico (o domínio onde a função f está definida) em outro ponto $\hat{p}$ no espaço isotrópico (onde se espera triângulos eqüiláteros). O tensor E é dado por [80]:

$$E = \sqrt{\left(\frac{1}{\xi_{max}}\right)} M. \quad (2.20)$$

No caso bidimensional, o tensor de transformação E fica:

$$E = \begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \vec{\nu}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_1/\xi_{max}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi_2/\xi_{max}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \vec{\nu}_2 \end{bmatrix}^t$$

Como $\vec{\nu}_1$ e $\vec{\nu}_2$ são vetores unitários ortogonais entre si, tem-se:

$$E^2 = \frac{1}{\xi_{max}} M. \quad (2.21)$$

Portando $\hat{p} = E.p$ é a imagem no espaço isotrópico de um ponto p qualquer no espaço físico. A notação $\hat{t}$ refere-se à imagem no espaço isotrópico de um triângulo anisotrópico t .

A constante de condicionamento de M

Seja ψ a constante de condicionamento do tensor métrico M dada por [80]:

$$\psi = \xi_{max}/\xi_{min}. \quad (2.22)$$

Algumas afirmações podem ser feitas com relação ao fator de encolhimento de uma aresta de um triângulo t quando este é transformado em $\hat{t}$ pela aplicação de E . O valor do fator de encolhimento pode ser de (Figura 2.10):

- no máximo $\sqrt{\psi}$, quando a aresta for paralela a $\vec{\nu}_{min}$;
- no mínimo 1, quando a aresta for paralela a $\vec{\nu}_{max}$.

Se não for necessário preservar a curvatura máxima da função f no espaço isotrópico, então o tensor de transformação E pode ser simplificado. No caso bidimensional, o tensor métrico simplificado F é definido por:

$$F = \sqrt{M}. \quad (2.23)$$

No caso bidimensional, o tensor de transformação F fica:

Figura 2.10: Fator de encolhimento de uma aresta.

$$F = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}^t.$$

Como $\vec{v}_i$ são vetores unitários ortogonais entre si, tem-se que

$$F^2 = M. \quad (2.24)$$

Da mesma forma como M_p representa o tensor métrico M definido no ponto $p \in \Omega$, E_p e F_p designarão tensores de transformação referentes à métrica M definida no ponto $p \in \Omega$.

2.7.2 O tensor de deformação relativa

Seja um ponto $p \in \Omega$. Se o tensor de transformação F_p for aplicado, diz-se que o espaço é visto segundo a ótica do ponto p . O tensor de deformação relativa $F_q F_p^{-1}$ transforma o espaço a partir da ótica de p para a ótica de q [53], ou seja, faz com que o espaço passe a ser visto segundo a ótica do ponto q . A Figura 2.11 ilustra o relacionamento entre os tensores de deformação relativa $F_q F_p^{-1}$ e $F_p F_q^{-1}$ e os tensores de transformação F_q e F_p .

Figura 2.11: Tensores de deformação e tensores de deformação relativa [53].

As definições, conceitos e notações apresentadas neste capítulo serão utilizadas no restante desta tese.

Capítulo 3

Malhas Dinâmicas

Malhas dinâmicas são comumente utilizadas em problemas de simulação sobre domínios cuja geometria varia com o tempo. Uma das formas mais comuns de implementar malhas dinâmicas é via distribuição de molas virtuais sobre os elementos da malha a ser reaproveitada. Sempre que o domínio onde a malha está definida é alterado, as molas são acionadas movimentando os vértices para que se conformem com a nova descrição do domínio. A Figura 3.1 ilustra o processo de movimento de malha para o caso bidimensional. A malha original (Figura 3.1(a)) tem suas fronteiras internas movimentadas (Figura 3.1(b)); note a presença de células sobrepostas. Após a aplicação do processo de malha dinâmica, os nós são movimentados para que a malha se conforme com a nova descrição do domínio (Figura 3.1(c)).

Figura 3.1: Movimento de uma malha bidimensional por malha dinâmica.

A primeira proposta de malha dinâmica, e também a mais simples de ser implementada, é a composta por molas longitudinais. Por esse motivo, este tipo de mola será utilizado para descrever o funcionamento de malhas dinâmicas em geral, que será apresentado na subseção a seguir. Existem, porém, outros esquemas de molas mais eficazes como as torcionais, semi-torcionais e altura, tais molas serão consideradas posteriormente.

Assumindo que as forças atuantes em um vértice tenham sido computadas de acordo com algum esquema de mola, é necessário formular alguma equação de movimento que possa reger o comportamento dinâmico dos vértices. Pela segunda lei de Newton tem-se que

$$M\ddot{\Delta} = F \quad (3.1)$$

onde Δ é o vetor deslocamento dos vértices da malha, $\dot{\Delta}$ é o vetor velocidade, $\ddot{\Delta}$ é o vetor aceleração, M é a massa associada aos vértices e F são as forças atuando nos vértices. Este modelo pode ser estendido para o tão conhecido caso massa-mola-amortecimento, onde a força F é computada a partir das seguintes forças que agem nos vértices:

- F_K : força entre-vértices. É análoga a uma mola e age entre vértices adjacentes.
- F_D : força de amortecimento. É contrária ao movimento e contribui para a convergência do sistema.

Cada vértice v_i possui três variáveis de estado, vetor deslocamento $\vec{\delta}_i$, vetor velocidade $\dot{\vec{\delta}}_i$, e vetor aceleração $\ddot{\vec{\delta}}_i$, e dois atributos, massa m_i e coeficiente de amortecimento d_i . Uma das possíveis formas de simplificar o sistema é assumir que todos os vértices possuem a mesma massa e o mesmo coeficiente de amortecimento.

A força de amortecimento, F_D , contribui para a convergência dos vértices para uma configuração estável. Essa força é contrária ao movimento, proporcional à velocidade do vértice e é definida como:

$$F_D = -D\dot{\Delta}, \quad (3.2)$$

onde D é uma matriz contendo os coeficientes de amortecimento.

A força entre vértices é contrária ao deslocamento e proporcional ao coeficiente de resistividade, denotado por K , e é dada por

$$F_K = -K\Delta. \quad (3.3)$$

A força total F agindo nos vértices é então dada por:

$$\begin{aligned}
F &= F_K + F_D \\
&= -K\Delta - D\dot{\Delta}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A equação final do sistema pode ser obtida substituindo a Equação (3.4) na Equação (3.1). Obtém-se, portanto, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$M\ddot{\Delta} + D\dot{\Delta} + K\Delta = 0. \tag{3.5}$$

Uma equação diferencial de primeira ordem também pode ser utilizada para formular o problema, como pode ser visto em [14, 106]. Embora esta simplificação ofereça mais chances da solução estacionar em um mínimo local, a formulação é mais estável numericamente. O movimento dos vértices passa a ser expresso pela seguinte equação:

$$D\dot{\Delta} + K\Delta = 0. \tag{3.6}$$

O problema pode ser simplificado ainda mais em um sistema conhecido como quase-estático [10, 36, 31], dado por

$$F_K = K\Delta = 0. \tag{3.7}$$

A formulação quase-estática é a mais amplamente utilizada em malhas dinâmicas e será a utilizada neste trabalho.

O sistema de equações (3.7) pode ser criado de várias maneiras. No restante deste capítulo são apresentadas diferentes formas de se calcular as forças elásticas envolvidas considerando diferentes tipos de molas.

3.1 O funcionamento das malhas dinâmicas

Seja $\vec{f}$ uma componente da matriz F_K da Equação (3.3). A força, $\vec{f}$, realizada por uma mola longitudinal é contrária ao deslocamento e é regida pela lei de Hook:

$$\vec{f} = -\kappa\vec{\delta}. \tag{3.8}$$

onde κ é o coeficiente de resistividade da mola e $\vec{\delta}$ representa a deformação na mola. A Figura 3.2 ilustra tal configuração.

Figura 3.2: Força produzida segundo a lei de Hook pelo deslocamento de uma partícula.

Figura 3.3: Sistema de duas partículas conectadas por uma mola longitudinal.

Batina em [9] foi possivelmente o primeiro pesquisador a utilizar a lei de Hook diretamente para implementar malhas dinâmicas. Ele propôs um método que manipula a malha como um sistema de molas fictícias onde cada aresta é vista como uma mola.

Para facilitar o entendimento de como a força pode ser calculada em um sistema de partículas, considere primeiramente um caso bem simples onde uma mola conecta duas partículas v_i e v_j que se movem, como ilustrado na Figura 3.3. A força em v_i causada pelo deslocamento de v_j , denotada por $\vec{f}_i^j$, possui mesma direção e sentido do deslocamento $\vec{\delta}_j$, ou seja,

$$\vec{f}_i^j = \kappa_{ij} \vec{\delta}_j. \quad (3.9)$$

Por outro lado, a força em v_i causada pelo deslocamento do próprio vértice v_i , denotada por $\vec{f}_i^i$, possui mesma direção mas sentido contrário ao seu deslocamento $\vec{\delta}_i$, ou seja,

$$\vec{f}_i^i = -\kappa_{ij} \vec{\delta}_i. \quad (3.10)$$

Portanto, a força resultante em v_i , denotada por $\vec{f}_i$, é dada por

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^j + \vec{f}_i^i = \kappa_{ij} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i). \quad (3.11)$$

Considerando que a força resultante em um vértice é calculada apenas para as molas que incidem sobre ele, a própria conectividade da malha determina a influência entre vértices. Sendo assim, a força resultante exercida no vértice v_i pode ser calculada por:

$$\vec{f}_i = \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i). \quad (3.12)$$

Figura 3.4: Sistema de molas.

onde $V(\star_{v_i})$ é o conjunto de vértices adjacentes ao vértice v_i (veja Capítulo 2). Um sistema de equações pode então ser montado considerando a força em cada nó da malha.

Suponha que n seja o número de vértices do interior da malha e m o número de vértices no bordo. O sistema de equações pode ser expresso matricialmente por (veja Equação (3.3))

$$K\Delta = -F, \quad (3.13)$$

onde K é a matriz $(n \times n + m)$ dos coeficientes das molas, Δ é uma matriz $(n + m \times 1)$ com os vetores deslocamento dos vértices e F é uma matriz $(n \times 1)$ com a força resultante em cada vértice.

Como o objetivo da malha dinâmica é encontrar uma disposição para os vértices do interior da malha, tal que a força resultante seja nula em cada um deles, o sistema tem os deslocamentos como incógnitas e as forças resultantes como vetores nulos. Sendo assim, todas as entradas da matriz F da Equação (3.13) são vetores nulos.

Apenas para simplificar a escrita, considere que os n vértices do interior da malha estejam agrupados da primeira coluna à n -ésima coluna de K . Dessa forma a Equação (3.13) pode ser expressa por

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{I(n \times n)} & K_{B(n \times m)} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta_{I(n \times 1)} \\ \hline \Delta_{B(m \times 1)} \end{array} \right] = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

onde a submatriz K_I refere-se aos vértices do interior, a submatriz K_B refere-se aos vértices do bordo, a submatriz Δ_I é composta pelos deslocamentos dos vértices do interior e a submatriz Δ_B é composta pelos deslocamentos dos vértices do bordo.

Para exemplificar as matrizes, considere a malha simples apresentada na Figura 3.4. A representação matricial do sistema para esse caso particular é dada por

$$\begin{bmatrix} -\sum_{v_w \in V(\star v_i)} \kappa_{iw} & \kappa_{ij} & \vdots & \kappa_{iq} & \kappa_{ir} & \kappa_{is} \\ \kappa_{ji} & -\sum_{v_w \in V(\star v_j)} \kappa_{jw} & \vdots & 0 & \kappa_{jr} & \kappa_{js} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\delta}_i \\ \vec{\delta}_j \\ \vec{\delta}_q \\ \vec{\delta}_r \\ \vec{\delta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde w refere-se aos índices dos vértices obtidos de acordo com a conectividade da malha. As delimitações nas matrizes são para explicitar as submatrizes K_I , K_B , Δ_I e Δ_B conforme a Equação (3.14).

Observe que na Figura 3.4 não existem molas nas arestas do bordo. A razão para isso é que seus vértices possuem deslocamentos predefinidos que permanecem estáticos durante a solução da malha dinâmica. Portanto, as incógnitas são apenas duas neste exemplo, os deslocamentos dos dois vértices do interior v_i e v_j . Sendo assim, as informações referentes aos vértices de bordo podem ser passadas para o lado direito da igualdade. O sistema (3.15) pode então ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{v_w \in V(\star v_i)} \kappa_{iw} & \kappa_{ij} \\ \kappa_{ji} & -\sum_{v_w \in V(\star v_j)} \kappa_{jw} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\delta}_i \\ \vec{\delta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa_{iq}\vec{\delta}_q - \kappa_{ir}\vec{\delta}_r - \kappa_{is}\vec{\delta}_s \\ -\kappa_{jr}\vec{\delta}_r - \kappa_{js}\vec{\delta}_s \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A matriz do lado esquerdo da igualdade é quadrada e simétrica, pois $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$. Além disso, ela é esparsa quando gerada a partir de malhas maiores.

A Equação (3.16) escrita em termos das submatrizes K_I , K_B , Δ_I e Δ_B é dada por

$$K_I \cdot \Delta_I = -K_B \cdot \Delta_B. \quad (3.17)$$

No próximo capítulo serão apresentadas considerações sobre como o sistema da Equação (3.17) pode ser resolvido. Nas próximas seções são descritos alguns tipos de molas que podem ser usadas para compor o sistema.

3.2 Molas longitudinais 2D

Como mencionado anteriormente, as molas longitudinais foram propostas por Batina [9]. O autor propôs que os coeficientes de rigidez das molas sejam valores inversamente proporcionais ao comprimento de suas respectivas arestas. Assim, para uma aresta conectando os vértices v_i e v_j , o coeficiente de rigidez da mola, denotado por κ_{ij} , é dado por:

Figura 3.5: Diferença entre desacoplamento e acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.

$$\kappa_{ij} = \frac{a}{(l_{ij})^b}, \quad (3.18)$$

onde l_{ij} é o comprimento da aresta ligando v_i a v_j e a e b são constantes (geralmente iguais a 1).

Considere que o domínio da malha está contido no plano xy . As notações $()_x$ e $()_y$ serão utilizadas para referir a uma coordenada específica. Por exemplo, $(\vec{\delta}_i)_x$ refere-se à coordenada x do vetor deslocamento $\vec{\delta}_i$. A formulação de molas longitudinais descrita na Seção 3.1 trata cada componente da força separadamente, ou seja

$$\begin{aligned} (\vec{f}_i)_x &= \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j)_x - (\vec{\delta}_i)_x \right] \\ (\vec{f}_i)_y &= \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j)_y - (\vec{\delta}_i)_y \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Note que uma coordenada não interfere no cálculo da outra. Isso pode ser percebido na Figura 3.5(a) onde o deslocamento horizontal em v_j produz um deslocamento também horizontal em v_i .

Essa formulação, no entanto, não simula o comportamento de uma rede de molas real, pois não há interação entre as coordenadas x e y . Na Figura 3.5(b) é mostrado um exemplo em que o acoplamento é considerado e o deslocamento horizontal no vértice v_j produz um deslocamento em ambas as direções no vértice v_i . Este acoplamento entre as duas direções pode ser feito da seguinte forma:

Figura 3.6: Diferença entre utilizar e não utilizar o acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}_i)_x &= \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_x \cos\alpha + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_y \sin\alpha \right] \cos\alpha \\
 (\vec{f}_i)_y &= \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_x \sin\alpha + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_y \cos\alpha \right] \sin\alpha
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

A diferença entre usar ou não o acoplamento pode ser conferida visualmente na Figura 3.6. A malha original é apresentada na Figura 3.6(a). Apenas o vértice do topo foi deslocado verticalmente para baixo (veja a Figura 3.6(b)). As Figuras 3.6(c) e 3.6(d) apresentam, respectivamente, os resultados após aplicar o movimento desacoplado e acoplado.

Muito embora o acoplamento produza um comportamento mais próximo do real, ele não é aconselhável em configurações envolvendo grandes deformações. Nesses casos, as molas não são capazes de resolver sobreposição de células. Este problema pode ser visto na Figura 3.7. A malha original é apresentada na Figura 3.7(a). Apenas o bordo interior foi deslocado horizontalmente para a direita, como apresentado na Figura 3.7(b). Note que o deslocamento é o suficiente para causar sobreposição de células (regiões em destaque nas Figuras 3.7(b) e 3.7(c)). As Figuras 3.7(c) e 3.7(d) apresentam os resultados após aplicar o movimento com molas longitudinais com e sem acoplamento de coordenadas, respectivamente.

Para várias aplicações, as molas longitudinais produzem bons resultados, desde que o deslocamento inicial tenha uma amplitude relativamente pequena. Quando isso não acontece, é comum o surgimento de elementos inválidos causados pelo cruzamento de vértices sobre arestas. Fato que é causado porque a tensão da mola longitudinal previne que dois vértices adjacentes se colidam, porém não impede que um vértice cruze uma de suas arestas opostas,

Figura 3.7: Diferença entre utilizar e não utilizar o acoplamento de coordenadas em molas longitudinais.

causando sobreposição de células. A sobreposição de células é caracterizada pela presença de células inválidas. A Figura 3.8 ilustra um caso em que o movimento de um vértice causa o surgimento de uma célula inválida (em destaque). Alguns métodos foram propostos para contornar esse problema, como será descrito nas próximas seções.

Figura 3.8: As molas longitudinais não impedem o surgimento de célula inválida.

3.3 Molas para tratar triângulos inválidos

A principal deficiência da mola longitudinal se deve ao fato da mesma não considerar em sua formulação as áreas dos elementos envolvidos. Assim, um triângulo pode estar próximo de apresentar área nula (ou mesmo razão de aspecto ruim) e este evento não ser notado pelas molas longitudinais. Nesta seção serão apresentadas algumas abordagens que levam em consideração as áreas dos elementos em suas formulações a fim de propiciar malhas de melhor qualidade após o movimento, podendo até mesmo impedir o surgimento de elementos inválidos em muitos casos.

3.3.1 Molas torcionais

Diferentemente das molas longitudinais, que controlam comprimentos, as molas torcionais controlam ângulos. O emprego dessas molas em malhas dinâmicas foi proposto por Farhat et al. [36]. As molas torcionais e longitudinais se complementam para compor o sistema, ou seja, os dois tipos de molas agem em conjunto.

Considere o triângulo t_{ijk} cujos vértices são designados por v_i , v_j e v_k . Seja θ_i^{ijk} o ângulo entre as arestas e_{ij} e e_{ik} . Seja $A(t_{ijk})$ a área do triângulo t_{ijk} . O coeficiente da mola torcional no vértice v_i do triângulo t_{ijk} é dado por:

$$C_i^{ijk} = \frac{1}{1 + \cos(\theta_i^{ijk})} \frac{1}{1 - \cos(\theta_i^{ijk})} = \frac{1}{\sin(\theta_i^{ijk})^2} = \frac{(e_{ij})^2 (e_{ik})^2}{4A(t_{ijk})^2}, \quad (3.21)$$

conforme ilustrado na Figura 3.9. Observe que o coeficiente tende a infinito quando o ângulo em questão tende a 0 ou a π .

Figura 3.9: Ilustração de uma mola torcional.

Para montar o sistema de molas, é necessário anexar uma mola torcional para cada ângulo interno de cada triângulo da malha. Portanto, em cada vértice da malha é atribuída uma mola torcional para cada triângulo incidente.

Tendo em vista que as molas torcionais são apenas complementares, é necessário compor um sistema formado tanto por molas longitudinais quanto torcionais. No entanto, esta não é uma tarefa simples, pois as forças são calculadas seguindo formulações distintas em cada tipo de mola. No caso das torcionais, deslocamentos geram momentos. Os autores então aplicaram transformações nas forças torcionais para compor o sistema.

Considere um triângulo t_{ijk} . Os torques gerados nos vértices do triângulo (assumindo que cada ângulo interno possui uma mola torcional) são dados por:

$$\mathbf{M}^{ijk} = \mathbf{C}^{ijk} \Delta\theta^{ijk}, \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{M}^{ijk} = [M_i M_j M_k]^t; \quad (3.23)$$

$$\mathbf{C}^{ijk} = \begin{bmatrix} C_i^{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & C_j^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & C_k^{ijk} \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

$$\Delta\theta^{ijk} = \mathbf{R}^{ijk} \Delta^{ijk}; \quad (3.25)$$

sendo que M_w , $w = i, j, k$, é o torque no vértice v_w , Δ^{ijk} contém os vetores deslocamentos em cada vértice do triângulo e $\mathbf{R}^{ijk}$ é uma matriz de rotação. Vale dizer que no desenvolvimento para se chegar à matriz $\mathbf{R}$ os autores assumem pequenos deslocamentos e rotações, o que sugere que o método deve ser utilizado apenas em aplicações onde o domínio sofre pequenas deformações. Os momentos são então expressos por:

$$\mathbf{M}^{ijk} = [\mathbf{C}^{ijk} \mathbf{R}^{ijk}] \Delta^{ijk}. \quad (3.26)$$

Os torques devem ser convertidos em forças torcionais equivalentes nos vértices, dadas por:

$$\mathbf{F}_{\text{torção}}^{ijk} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_i)_x \\ (\mathbf{F}_i)_y \\ (\mathbf{F}_j)_x \\ (\mathbf{F}_j)_y \\ (\mathbf{F}_k)_x \\ (\mathbf{F}_k)_y \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se uma transformação linear da forma

$$\mathbf{F}_{\text{torção}}^{ijk} = \mathbf{T}^{ijk} \mathbf{M}^{ijk}, \quad (3.27)$$

e assumindo que o trabalho realizado por $\mathbf{F}_{\text{torção}}^{ijk}$ e por $\mathbf{M}^{ijk}$ são equivalentes, isto é

$$(\mathbf{F}_{\text{torção}}^{ijk})^t \Delta^{ijk} = (\mathbf{M}^{ijk})^t \Delta\theta^{ijk}, \quad (3.28)$$

$$(\mathbf{M}^{ijk})^t (\mathbf{T}^{ijk})^t \Delta^{ijk} = (\mathbf{M}^{ijk})^t \mathbf{R}^{ijk} \Delta^{ijk}, \quad (3.29)$$

tem-se que $\mathbf{T}^{ijk} = (\mathbf{R}^{ijk})^t$. Finalmente, as forças torcionais nos vértices do triângulo t_{ijk} podem ser expressas por:

$$\mathbf{F}_{\text{torção}}^{ijk} = [(\mathbf{R}^{ijk})^t \mathbf{C}^{ijk} \mathbf{R}^{ijk}] \Delta^{ijk} = \mathbf{K}_{\text{torção}}^{ijk} \Delta^{ijk}. \quad (3.30)$$

Figura 3.10: Mola semi-torcional proposta por Blom [10].

É possível extrair da Equação (3.30) a força torcional aplicada apenas no vértice v_i da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{\text{torção}}^i = \left[\mathbf{B}_i^{ijk} \mathbf{K}_{\text{torção}}^{ijk} \right] \Delta^{ijk}, \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{B}_i^{ijk}$ é um operador para extrair a subcomponente associada com o vértice v_i .

A força total no vértice v_i é dada pela soma de todas as forças longitudinais e torcionais que agem no vértice, ou seja

$$\mathbf{F}_{\text{total}}^i = \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \left[\kappa_{ij} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i) + \sum_{t_{ijk} \succ e_{ij}} \left[\mathbf{B}_i^{ijk} \mathbf{K}_{\text{torção}}^{ijk} \right] \Delta^{ijk} \right], \quad (3.32)$$

onde κ_{ij} (ver Equação (3.18)) é o coeficiente de resistividade da mola longitudinal entre os vértices v_i e v_j . A expressão $t_{ijk} \succ e_{ij}$ refere-se a todos os triângulos que incidem em uma dada aresta e_{ij} , no caso de uma triangulação bidimensional, tem-se geralmente dois triângulos.

3.3.2 Molas semi-torcionais

Blom [10], motivado pelo trabalho de Farhat et al. [36] descrito na seção anterior, propôs uma abordagem simplificada para agregar a informação dos ângulos num sistema composto por molas longitudinais. Ele denominou essa mola simplificada como semi-torcional. A idéia por trás das molas semi-torcionais é fazer com que os ângulos influenciem os coeficientes das molas longitudinais, sendo assim, o sistema contém, na realidade, apenas molas longitudinais. Para isso, Blom dividiu o coeficiente de resistividade da mola longitudinal pelo valor do ângulo oposto. Considere a Figura 3.10. O coeficiente da mola longitudinal na aresta e_{ij} é dividido pelo valor do ângulo interno do triângulo t_{ijk} em v_k (θ_k^{ijk}). O coeficiente de resistividade da mola semi-torcional de Blom, denominado κ^{Blom} , é dado por:

$$\kappa_{ij}^{Blom} = \frac{\kappa_{ij}}{\theta_k^{ijk}}. \quad (3.33)$$

Note que κ^{Blom} quase não é alterado quando o triângulo em questão é equilátero, pois $\theta_i^{ijk} = \theta_j^{ijk} = \theta_k^{ijk}$. Quanto mais agudo for o ângulo, mais firme se torna a mola. Porém, quanto mais obtuso for o ângulo, menos rígida fica a mola, o que claramente não é desejado. Além disso, o autor não esclarece como calcular κ^{Blom} de arestas internas, pois existem dois ângulos opostos simultaneamente.

Uma melhoria nas molas semi-torcionais foi introduzida por Zeng e Ethier [111]. A idéia básica consiste em adicionar diretamente o coeficiente de uma mola torcional ao coeficiente da mola longitudinal oposta. Assim, o coeficiente de rigidez longitudinal total κ_{ij}^{total} da mola ligando os vértices v_i e v_j é dado por (veja a Figura 3.11):

$$\kappa_{ij}^{total} = \kappa_{ij} + C_k^{ijk} + C_l^{ijl}, \quad (3.34)$$

onde C é o coeficiente de rigidez da mola torcional apresentado na Equação (3.21).

No restante deste texto, o termo mola semi-torcional refere-se à proposta de Zeng e Ethier [111].

As molas semi-torcionais possuem algumas vantagens sobre as molas torcionais de Farhat et al. [36]. Elas são mais fáceis de serem implementadas computacionalmente. Segundo [112], são necessárias 72 adições e 117 multiplicações por elemento para se calcular o coeficiente de rigidez das molas torcionais, enquanto que apenas 18 adições e 20 multiplicações são necessárias para as molas semi-torcionais. Além disso, a formulação das molas semi-torcionais não assumem pequenos deslocamentos e ângulos, o que sugere que as mesmas podem ser aplicadas para grandes deformações. Em contrapartida, sabe-se que o enrijecimento de molas longitudinais não é suficiente para evitar o surgimento de elementos inválidos em todos os casos.

Figura 3.11: As molas torcionais em v_k e v_l são agregadas à mola longitudinal na aresta e_{ij} .

3.3.3 Molas altura

Neste trabalho de doutorado também foi desenvolvida uma mola para evitar elementos inválidos, são as *molas altura*. Ao invés de controlar as áreas dos triângulos por meio de ângulos, como o fazem as molas torcionais e semi-torcionais, o controle é feito verificando-se as alturas

Figura 3.12: Ilustração de uma mola altura.

dos triângulos. A mola altura é na verdade uma mola longitudinal ligando um vértice à sua projeção na aresta oposta. A Figura 3.12 ilustra uma mola altura posicionada para evitar que o vértice v_i cruze a aresta oposta e_{jk} . Cada triângulo é equipado com três molas altura, uma para cada vértice.

A força gerada em um vértice v_i por uma mola altura ligando v_i à sua projeção i' na reta definida por v_j e v_k , conforme ilustrado na Figura 3.12, é dada por

$$\vec{f}_i^{jk} = \kappa_i^{altjk} \left(\vec{\delta}_{i'} - \vec{\delta}_i \right), \quad (3.35)$$

onde $\vec{\delta}_{i'}$ é calculado como sendo a interpolação linear dos vetores deslocamentos $\vec{\delta}_j$ e $\vec{\delta}_k$ dos vértices v_j e v_k , respectivamente. Sendo assim, o vetor $\vec{\delta}_{i'}$ é dado por:

$$\vec{\delta}_{i'} = \lambda \vec{\delta}_j + (1 - \lambda) \vec{\delta}_k, \quad (3.36)$$

onde, o valor de λ varia de 0 a 1 e depende da posição do ponto i' com relação aos vértices v_j e v_k , e é dado por

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{se } \|i' - v_k\| > \|\vec{e}_{jk}\| \text{ e } \|i' - v_k\| > \|i' - v_j\|, \\ \|i' - v_k\| / \|\vec{e}_{jk}\|, & \text{se } \|i' - v_k\| \leq \|\vec{e}_{jk}\| \text{ e } \|i' - v_j\| \leq \|\vec{e}_{jk}\|, \\ 1, & \text{se } \|i' - v_j\| > \|\vec{e}_{jk}\| \text{ e } \|i' - v_j\| > \|i' - v_k\|. \end{cases} \quad (3.37)$$

Como a mola altura é uma mola longitudinal, seu coeficiente de rigidez κ_i^{altjk} é calculado de forma semelhante à Equação (3.18) e é dado por

$$\kappa_i^{altjk} = \frac{1}{\|i' - v_k\|}.$$

Semelhantemente às molas torcionais e semi-torcionais, as molas altura também devem complementar um sistema composto por molas longitudinais.

Bottasso et al. [17] propuseram um método intitulado *Ball-vertex* que emprega uma abordagem parecida com a da mola altura. A diferença entre o *Ball-vertex* e a mola altura é sutil,

porém com grandes implicações na qualidade da malha movimentada, como será mostrado a seguir. A versão de Bottasso projeta o deslocamento interpolado em i' sobre a reta definida por v_i e i' , ou seja, a força no vértice v_i é dada por:

$$\vec{f}_{B_i}^{jk} = \kappa_i^{alt,jk} \left[\left(\vec{\delta}_{i'} - \vec{\delta}_i \right) \frac{\vec{e}_{ii'}}{\|\vec{e}_{ii'}\|} \right] \frac{\vec{e}_{ii'}}{\|\vec{e}_{ii'}\|}. \quad (3.38)$$

Note que a projeção não acontece na Equação (3.35). Além disso, na *Ball-vertex*, o valor de λ na interpolação do vetor deslocamento em i' não é restringido entre 0 e 1.

A Figura 3.13 apresenta visualmente a diferença entre empregar a mola altura proposta nesta tese e o método *Ball-vertex* de Bottasso et al. [17]. Em ambos os casos, o domínio da malha foi submetido à mesma deformação e o sistema linear foi resolvido de forma semelhante. É possível notar que o método *Ball-vertex* não foi capaz de movimentar a malha sem o surgimento de elementos negativos, os quais estão em destaque na Figura 3.13(b). Note porém, que nenhum elemento negativo é gerado se as molas altura forem empregadas, veja a Figura 3.13(c). Além disso, também foram realizados testes com deformações pequenas no domínio (cerca de 10 vez menor que o empregado na Figura 3.13), mas a qualidade da malha movimentada é superior quando molas altura são empregadas.

Figura 3.13: Comparação entre a mola altura e o método *Ball-vertex* de Bottasso et al. [17].

3.4 Comparação entre molas

Nesta seção é feita uma comparação entre os resultados gerados pela aplicação de malhas dinâmicas com diferentes configurações de molas. As configurações comparadas são as seguintes:

1. Configuração 1: Molas longitudinais,
2. Configuração 2: Molas semi-torcionais,
3. Configuração 3: Molas longitudinais e molas semi-torcionais,
4. Configuração 4: Molas altura, e
5. Configuração 5: Molas longitudinais e molas altura.

A qualidade das malhas é aferida por duas métricas distintas: ângulo mínimo e razão de aspecto. A primeira avalia a qualidade dos triângulos pelo valor do menor ângulo interno. A segunda, mede a razão de aspecto, Q_{RA} , do triângulo de acordo com a seguinte fórmula:

$$Q_{RA} = \frac{A}{\ell_{max}^2}, \quad (3.39)$$

onde A é a área do triângulo e ℓ_{max} o comprimento de sua maior aresta.

O valor do ângulo mínimo varia, obviamente, entre 0° e 60° . A razão de aspecto varia de 0 a 1, pois o valor foi normalizado de acordo com a qualidade do triângulo equilátero, que é 0.433013. Quanto maior for o valor das medidas, melhor a qualidade dos triângulos.

Em [80], Shewchuk mostra gráficos de isolinhas de várias medidas de qualidade de triângulos, incluindo as duas utilizadas aqui. As Figuras 3.14(a) e 3.14(b) foram extraídas de [80] e consideram fixos dois vértices nas coordenadas (0,0) e (1,0) do triângulo enquanto que o terceiro vértice pode variar livremente. Os gráficos mostram o valor das métricas em função da posição do terceiro vértice.

A Figura 3.15 mostra um exemplo onde o domínio da malha sofre uma grande deformação, em que o círculo interior da esquerda é movido em direção ao círculo da direita. Note que a malha original é de boa qualidade e possui refinamento diferenciado sobre o domínio. Foi utilizada uma grande deformação para explicitar as diferenças entre os resultados. Trata-se, porém, de uma deformação abusiva que requer a utilização de mecanismos mais sofisticados para controlar a malha dinâmica, como o apresentado na Seção 4.2. Para cada malha apresentada na Figura 3.15 são mostrados histogramas das qualidades dos elementos considerando as métricas ângulo mínimo (histograma da esquerda) e razão de aspecto ((histograma da direita)). Observando a figura, é possível verificar que a configuração 2 (mola seme-torcional)

Figura 3.14: Isolinhas das métricas utilizadas para a qualidade de triângulos.

foi a que apresentou o pior resultado, pois não foi capaz de evitar células inválidas (os histogramas têm uma barra vertical em zero). Os resultados alcançados pelas configurações 1 e 3 são parecidos. A razão para isso se deve ao fato das molas semi-torcionais contribuírem pouco nas forças aplicadas nos vértices, já que todos os elementos são próximos dos equiláteros. As configurações 4 e 5 foram as que apresentaram os melhores resultados, as quais utilizam molas altura. Surpreendentemente, a configuração 5 forneceu piores resultados que a 4.

Figura 3.15: Comparação entre molas bidimensionais.

Capítulo 4

A execução da malha dinâmica

Uma vez montado o sistema de equações que regem a malha dinâmica, é necessário resolvê-lo a fim de encontrar os deslocamentos para os vértices presentes no interior da malha sendo movimentada. Neste capítulo são apresentadas algumas considerações sobre como o sistema pode ser resolvido.

O sistema linear pode ser resolvido de várias formas. Considere, no entanto, a solução iterativa pelo método de Gauss-Seidel onde o novo deslocamento do vértice iterado v_i , $\vec{\delta}_i^{new}$, depende dos deslocamentos calculados anteriormente, $\vec{\delta}^{old}$. Por exemplo, no caso das molas longitudinais, o valor de $\vec{\delta}_i^{new}$ é obtido por:

$$\vec{\delta}_i^{new} = \frac{\sum_{v_w \in V(\star v_i)} \kappa_{iw} \vec{\delta}_w^{old}}{\sum_{v_w \in V(\star v_i)} \kappa_{iw}} \quad (4.1)$$

onde w são valores obtidos de acordo com a conectividade da malha. Observe que $\vec{\delta}_i^{new}$ é dado pela média dos deslocamentos vizinhos ponderada pelos coeficientes de rigidez das molas. O lado esquerdo da Equação (4.1) muda dependendo da configuração de molas que compõem a malha dinâmica.

O Algoritmo 1 descreve como a malha dinâmica pode ser implementada com molas longitudinais e resolvida pelo método numérico de Gauss-Seidel para solucionar o sistema linear. Para que o algoritmo resolva sistemas compostos por outras molas, basta alterar a equação que calcula $\vec{\delta}_i^{new}$. Note que o algoritmo não desloca de fato os vértices da malha, ele apenas atualiza vetores deslocamento atribuídos aos mesmos.

4.1 Os vértices ativos

No algoritmo 1, o critério de parada é controlado por um valor ϵ fornecido pelo usuário. Seu término ocorre apenas quando os deslocamentos relativos de todos os vértices forem menores

Algorithm 1 Malha elástica.**entrada:** T : malha a ser movimentada. ∂T : conjunto de vértices na fronteira de T . $\Delta_{\partial T}$: conjunto de vetores deslocamento para os vértices F_T . ϵ : tolerância de convergência do método numérico.**considere:** $\vec{\delta}_i$: vetor deslocamento no vértice $v_i \in T$. t : indicador da iteração do método numérico.**início:** $t \leftarrow 0$ $\vec{\delta}_w \leftarrow \vec{0}$, para todo w tal que $w \in T$ e $w \notin \partial T$ **faça****para cada** vértice $v_i \in T$ tal que $v_i \notin \partial T$ **faça**Calcule $\vec{\delta}_i^{new}$ /* *por meio da Equação (4.1), por exemplo* */**fim_para** $t \leftarrow t + 1$ **enquanto** $\max_{v_w \in T} \left(\frac{\|\vec{\delta}_w^{(t)} - \vec{\delta}_w^{(t-1)}\|}{\|\vec{\delta}_w^{(t)}\|} \right) \geq \epsilon$ **fim**

que ϵ . Deslocamento relativo, neste contexto, significa o acréscimo normalizado no vetor deslocamento do vértice iterado realizado pela última iteração, isto é,

$$\frac{\|\vec{\delta}_w^{(t)} - \vec{\delta}_w^{(t-1)}\|}{\|\vec{\delta}_w^{(t)}\|}, \quad (4.2)$$

onde w refere-se ao vértice iterado. O primeiro comentário que pode ser feito sobre essa estratégia é que todos os vértices são julgados da mesma forma, quer estejam em regiões mais refinadas (arestas menores) ou regiões mais grosseiras (arestas maiores). Note porém, que as regiões mais grosseiras são menos sensíveis ao deslocamento relativo que as regiões mais refinadas. Sendo assim, é mais interessante que a influência do deslocamento relativo varie de acordo com o refinamento local da malha movimentada. Isso pode ser feito da seguinte forma:

$$\max_{v_w \in T} \left(\frac{\|\vec{\delta}_w^{(t)} - \vec{\delta}_w^{(t-1)}\|}{e_{min}^w} \right) \geq \epsilon \quad (4.3)$$

onde e_{min}^w é o comprimento da menor aresta incidente no vértice iterado v_w . O valor de e_{min}^w é calculado apenas no início do processo, antes mesmo do movimento da fronteira. Note que com essa nova estratégia, o valor de ϵ é mais intuitivo. Por exemplo, se $\epsilon = 0.1$, então a parada acontecerá somente se para cada vértice v_w de T o deslocamento relativo for menor que $0.1 \cdot e_{min}^w$. Ou seja, ϵ pode ser entendido como um fator porcentagem da menor aresta, esta por sua vez pode variar dependendo do refinamento da malha. Dessa forma, o critério

de parada é mais relaxado em regiões onde a malha é mais grosseira e mais apertado onde a malha é mais refinada.

Note que todos os vértices internos da malha são processados no laço aninhado do Algoritmo 1. A consequência disso é que pode ocorrer desperdício de processamento, principalmente nas últimas iterações do método numérico em que poucos vértices têm seus vetores deslocamento alterados. Além disso, a sequência em que os vértices são visitados influencia diretamente no tempo de processamento e na convergência do método numérico utilizado. A ordem de processamento mais indicada é aquela em que os vértices são iterados em camadas (como em casca de cebola) começando da fronteira para o interior da malha.

Uma das contribuições desta tese é uma técnica capaz de aumentar o desempenho computacional, controlar a sequência de processamento dos vértices e também controlar o critério de parada. A técnica proposta utiliza um mecanismo baseado em *vértices ativos*. A técnica é bastante simples e faz uso de rótulos nos vértices. São utilizados três rótulos:

- *ativo*: o vértice pode ser processado.
- *inativo*: o vértice não está sendo processado.
- *fixo*: o vértice não pode se mover.

Será utilizada a notação de conjunto para referir aos vértices com o mesmo rótulo, são eles: $\mathcal{A}$ para ativos, $\mathcal{I}$ para inativos e $\mathcal{F}$ para fixos. Como cada vértice pode possuir apenas um rótulo, os conjuntos são disjuntos. Além disso, o conjunto $\mathcal{A}$ e o $\mathcal{I}$ têm seus elementos dispostos em uma sequência dada pela ordem de entrada dos elementos.

Em uma etapa de pré-processamento, todos os vértices da malha são inicialmente rotulados de acordo com o seguinte procedimento:

1. Todos os vértices pertencentes à fronteira da malha são rotulados como fixos.
2. Todos os vértices que estão diretamente conectados aos vértices fixos, que possuem deslocamento não nulo, são marcados como ativos.
3. Todos os vértices que não foram rotulados nos passos anteriores são marcados como inativos.

Apenas os vértices ativos devem ser iterados. Observe que $\mathcal{A}$ é iniciado com os vértices do interior que são adjacentes à fronteira da malha, com isso, os primeiros vértices iterados são os que possivelmente sofrerão maior deslocamento. Os vértices ativos e inativos podem ter seus rótulos alternados. Um vértice *ativo* se torna *inativo* quando seu deslocamento relativo

for insignificante (menor que ϵ). Se, todavia, seu movimento for significativo, além do vértice permanecer *ativo*, todos os vértices inativos adjacentes a ele tornam-se ativos. Quando um vértice *ativo* é processado, ele é removido do início da sequência $\mathcal{A}$. A estratégia de inserção de elementos ao final da fila é feita de tal forma que os vértices recentemente ativados são adicionados primeiro e em seguida o vértice iterado.

O Algoritmo 2 descreve o procedimento de malha dinâmica utilizando o mecanismo de vértices ativos. Será utilizado o termo *iteração global* significando uma passagem pela sequência de vértices $\mathcal{A}$ (laço externo), e *iteração local* para referir ao processamento de um vértice individualmente (laço interno). Observe que a parada é controlada também por um valor máximo de iterações globais, N_{max} . Isso é importante em situações em que o método numérico não converge.

A abordagem de vértices ativos concentra o processamento da malha dinâmica nas regiões mais afetadas pelo deslocamento da fronteira. Isso pode ser verificado no exemplo apresentado na Figura 4.1. A deformação da malha é dada pelo deslocamento do círculo da esquerda levemente para baixo, o da direita permanece estático. Os vértices ativos (círculos verdes maiores) e os fixos (círculos vermelhos menores) estão em destaque. O número de vértices ativos ($\#(\mathcal{A})$) é mostrado na legenda de cada estágio.

4.2 Grandes deformações em pequenas etapas

É sabido que o sistema de molas se comporta melhor quanto menor for a deformação no domínio da malha. Em muitas aplicações, as alterações no domínio são pequenas e a malha dinâmica apresenta bons resultados, mesmo utilizando apenas molas longitudinais. No entanto, existem aplicações que envolvem grandes deformações e pode acontecer da malha dinâmica falhar, quer seja por permitir a presença de elementos inválidos, quer seja pela divergência do método numérico empregado. A técnica apresentada nesta seção permite gerenciar a execução da malha dinâmica em contextos envolvendo grandes deformações.

Como discutido anteriormente, a deformação no domínio é dada por vetores deslocamento atribuídos aos vértices da fronteira da malha. A deformação na geometria do domínio está diretamente relacionada com a magnitude dos vetores deslocamento. A idéia central da técnica proposta é atingir o deslocamento desejado em etapas, onde cada etapa objetiva realizar uma fração do deslocamento requerido. A questão que surge é como realizar o particionamento dos vetores deslocamento tal que em cada etapa a malha dinâmica alcance resultados aceitáveis. Além disso, as etapas devem ser calibradas de tal forma que as anteriores não produzam malhas com elementos muito finos (razão de aspecto baixa), pois isto pode inviabilizar as

Algorithm 2 Malha elástica com vértices ativos.

entrada:

T : malha a ser movimentada.
 ∂T : conjunto de vértices na fronteira de T .
 $\Delta_{\partial T}$: conjunto de vetores deslocamento para os vértices ∂T .
 N_{max} : número máximo de iterações permitidas.
 ϵ : tolerância de convergência do método numérico.

considere:

$\vec{\delta}_i$: vetor deslocamento no vértice $v_i \in T$.
 V_T : conjunto de todos os vértices de T .
 $\mathcal{A}$: seqüência de vértices rotulados como ativos.
 $\mathcal{A}_{aux}$: seqüência auxiliar de vértices ativos.
 $\mathcal{I}$: conjunto de vértices rotulados como inativos.
 $\mathcal{F}$: conjunto de vértices rotulados como fixos.
 t : indicador da iteração do método numérico.

início:

```

 $t \leftarrow 0$ 
 $\vec{\delta}_w \leftarrow \vec{0}$ , para todo  $w$  tal que  $w \in T$  e  $w \notin \partial T$ 
 $\mathcal{F} \leftarrow \partial T$ 
 $\mathcal{A} \leftarrow \{a | a \in T, a \notin \mathcal{F}, a \in V(\star_{v_w}) \text{ com } w \in \partial T\}$ 
 $\mathcal{I} \leftarrow V_T - \mathcal{A} - \mathcal{F}$ 
 $\mathcal{A}_{aux} \leftarrow \emptyset$ 
Enquanto  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  e  $t < N_{max}$  faça                                /* iteração global */
     $\mathcal{A}_{aux} \leftarrow \mathcal{A}$ .
     $\mathcal{A} \leftarrow \emptyset$ .
    Enquanto  $\mathcal{A}_{aux} \neq \emptyset$  faça                                /* iteração local */
         $v_i$  recebe o primeiro elemento de  $\mathcal{A}_{aux}$ 
         $\mathcal{A}_{aux} \leftarrow \mathcal{A}_{aux} - v_i$ .
        Calcule  $\vec{\delta}_i^{new}$  /* por meio da Equação (4.1), por exemplo */
        se  $\frac{\|\vec{\delta}_i^{(t)} - \vec{\delta}_i^{(t-1)}\|}{e_{min}^i} \geq \epsilon$  faça
             $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{i | i \in \mathcal{I} \cap V(\star_{v_i})\}$ 
             $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{v_i\}$ 
        senão
             $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{v_i\}$ 
        fim_se
    fim_enquanto
     $t = t + 1$ 
fim_enquanto
fim

```

(a) Início, $\#(\mathcal{A}) = 104$. (b) Iteração 9, $\#(\mathcal{A}) = 122$. (c) Iteração 1, $\#(\mathcal{A}) = 48$. (d) Iteração 10, $\#(\mathcal{A}) = 123$. (e) Iteração 2, $\#(\mathcal{A}) = 77$. (f) Iteração 11, $\#(\mathcal{A}) = 82$. (g) Iteração 3, $\#(\mathcal{A}) = 108$. (h) Iteração 12, $\#(\mathcal{A}) = 34$. (i) Iteração 4, $\#(\mathcal{A}) = 134$. (j) Iteração 13, $\#(\mathcal{A}) = 20$. (k) Iteração 5, $\#(\mathcal{A}) = 133$. (l) Iteração 14, $\#(\mathcal{A}) = 0$.

Figura 4.1: A estratégia de vértices ativos.

Figura 4.2: Valores de h para $n_p = 5$.

etapas seguintes. Sendo assim, cada etapa precisa evitar elementos inválidos como também preservar a qualidade dos elementos para que o restante do processo seja viável.

Seja ∂T o conjunto de vértices pertencentes ao bordo da malha. Seja $\Delta_{\partial T}$ o conjunto de vetores deslocamento associados aos vértices ∂T , ou seja, os que determinam a deformação imposta no domínio. Assim, para todo vértice $v_i \in \partial T$ existe um único $\vec{\delta}_i \in \Delta_{\partial T}$. O deslocamento da fronteira em cada etapa do movimento é dado por Δ_H , que é o conjunto formado pelos vetores de $\Delta_{\partial T}$ escalados segundo uma dada constante $0 \leq h \leq 1$, isto é, $\Delta_H = \{\vec{u} | \vec{u} = h\vec{\delta}, \forall \vec{\delta} \in \Delta_{\partial T}\}$. Assim, o valor de h é o que controla a amplitude do deslocamento de cada etapa de movimento. Além disso, o valor de h deve ser pequeno o suficiente para que viabilize uma malha movimentada livre de células inválidas. Portanto, o problema consiste em encontrar uma sequência adequada $h_0, h_1, \dots, h_{N-2}, h_{N-1}$, onde $\sum_{j=0}^{N-1} h_j = 1$ e N é o número de etapas de movimento. Esta sequência é encontrada iterativamente conforme o procedimento descrito no Algoritmo 3, comentários sobre o algoritmo são feitos a seguir.

Por meio do valor n_p , o usuário sugere o número de pequenos passos que devem ser executados para realizar o deslocamento total em questão. Note porém, que n_p é apenas uma sugestão inicial, pois o Algoritmo 3 pode aumentar o número de passos automaticamente quando necessário. Isto é, o valor de h_{min} é reduzido sempre que a malha movimentada após um dado passo for inaceitável.

A Figura 4.2 ilustra os valores de h considerando $n_p = 5$. Observe que o vetor deslocamento de entrada $\vec{\delta} \in \Delta_{\partial T}$ é dividido em 5 vetores proporcionais aos valores de h , os quais são múltiplos de h_{min} .

Sempre que a malha dinâmica é chamada, ela movimenta a malha T conforme a deformação dada por Δ_H , o qual é formado pelos vetores de $\Delta_{\partial T}$ escalados por h .

O Algoritmo 3 assume que seja possível determinar se a malha movimentada pela malha dinâmica é aceitável ou não. Essa avaliação da malha movimentada pode ser feita de várias maneiras, a mais simples delas consiste em verificar a existência de células inválidas. Porém, critérios mais sofisticados envolvendo a qualidade dos elementos podem ser incorporados ao

Algorithm 3 Grandes deformações em pequenos passos.

entrada:

T : malha a ser movimentada.
 ∂T : conjunto de vértices na fronteira de T .
 $\Delta_{\partial T}$: conjunto de vetores deslocamento para os vértices ∂T .
 N_{max}^G : número máximo de pequenos passos.
 n_p : número de pequenos passos.

considere:

Δ_H : vetores deslocamento submetidos à malha dinâmica.
 h_{done} : porcentagem de $\Delta_{\partial T}$ que já foi processado (o objetivo é $h_{done} = 1$).
 h_{min} : passo mínimo.
 n_e : contador de pequenos passos.

início:

$h_{done} \leftarrow 0$

$h_{min} \leftarrow 1.0 / \sum_{i=1}^{n_p} i$

$h \leftarrow n_p * h_{min}$

$n_e \leftarrow 1$

Enquanto $h_{done} < 1.0$ e $n_p \leq N_{max}^G$ **faça**

 Seja $\Delta_H = \{\vec{u} | \vec{u} = h\vec{\delta}, \forall \vec{\delta} \in \Delta_{\partial T}\}$

 Executar a Malha Dinâmica em T para Δ_H

se a qualidade de T é aceitável **faça**

 Atualiza as coordenadas dos vértices de T

$h_{done} \leftarrow h_{done} + h$

$n_e \leftarrow n_e + 1$

se $n_e = n_p$ **faça** $h \leftarrow 1 - h_{done}$

senão $h \leftarrow (n_p - n_e) * h_{min}$

fim_se

senão

se $n_e = 0$ **faça** $n_p \leftarrow n_p + 1$

senão $n_e \leftarrow 0$

fim_se

$h_{min} \leftarrow (1.0 - h_{done}) / \sum_{i=1}^{n_p} i$

$h \leftarrow n_p * h_{min}$

fim_se

fim_enquanto

fim

algoritmo.

Se o resultado da malha dinâmica for aceitável, a malha é de fato movimentada, ou seja, as coordenadas dos vértices são atualizadas. Por outro lado, se o resultado não for aceitável, o valor de h é reduzido, o que aumenta as chances da malha dinâmica produzir resultados aceitáveis na próxima iteração.

Nem sempre a malha dinâmica é capaz de ajustar a malha à nova descrição do domínio, mesmo quando é utilizado o proposto mecanismo de pequenos passos. Nesses casos, o valor N_{max}^G é utilizado para controlar a parada do Algoritmo 3 em casos de insucesso, evitando um laço infinito. Note que N_{max}^G fornece um valor máximo para n_p , que, por sua vez, só é incrementado quando a malha dinâmica falha.

O mecanismo de deformação em pequenos passos foi submetido ao seguinte caso de teste. A malha original mostrada na Figura 4.3(a) sofreu a deformação mostrada na Figura 4.3(b). A malha é composta por 1625 vértices e 3012 células. Foram utilizados os seguintes parâmetros: $n_p = 200$ e $N_{max}^G = 205$. A malha dinâmica foi aplicada com três configurações diferentes de molas: (1) molas longitudinais apenas, (2) molas longitudinais e semi-torcionais, e (3) molas longitudinais e altura. As malhas resultantes, após rodar as três configurações, estão apresentadas na Figura 4.3. Na legenda sob cada malha é mostrado o valor de h_{done} , que é a porcentagem do deslocamento desejado que foi alcançada sem a aparição de elementos inválidos. Note que apenas a configuração com molas longitudinais não foi capaz de realizar a deformação desejada, sendo que o h_{done} máximo alcançado foi de 0.773134. Os resultados obtidos com molas semi-torcionais e com molas altura são semelhantes.

(a) Malha Original

(b) Deformação da fronteira

(c) Longitudinais ($h_{done} = 0.773134$) (d) Longitudinais e semi-torcionais ($h_{done} = 1.0$) (e) Longitudinais e altura ($h_{done} = 1.0$)

Figura 4.3: Grandes deformações em pequenos passos.

Capítulo 5

Malha dinâmica tridimensional

Neste capítulo é apresentado como as molas longitudinais, torcionais, semi-torcionais e altura, apresentadas no capítulo anterior, podem ser aplicadas para movimentar malhas volumétricas.

5.1 Molas longitudinais 3D

Como descrito na seção 3.1, a cada aresta da malha é atribuída uma mola com coeficiente de rigidez é dado pela Equação (3.18). Como no caso 2D, as molas longitudinais 3D também podem ser implementadas com e sem o acoplamento das coordenadas. A extensão sem realizar o acoplamento de coordenadas é trivial, basta acrescentar uma equação para a coordenada z na Equação (3.19), ou seja

$$\begin{aligned}\left(\vec{f}_i\right)_x &= \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij} \left[\left(\vec{\delta}_j\right)_x - \left(\vec{\delta}_i\right)_x \right], \\ \left(\vec{f}_i\right)_y &= \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij} \left[\left(\vec{\delta}_j\right)_y - \left(\vec{\delta}_i\right)_y \right], \\ \left(\vec{f}_i\right)_z &= \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij} \left[\left(\vec{\delta}_j\right)_z - \left(\vec{\delta}_i\right)_z \right].\end{aligned}\tag{5.1}$$

A versão com acoplamento também é simples de ser estendida, no caso a força em um vértice v_i é calculada pela Equação (5.2) (veja Figura 5.1).

Figura 5.1: Mola longitudinal 3D com acoplamento de coordenadas.

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}_i)_x &= \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_x \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_z \cos(\phi) \right] \cos(\theta) \text{sen}(\phi), \\
 (\vec{f}_i)_y &= \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_x \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_z \cos(\phi) \right] \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi), \\
 (\vec{f}_i)_z &= \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} \kappa_{ij} \left[(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_x \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \right. \\
 &\quad \left. + (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i)_z \cos(\phi) \right] \text{sen}(\phi).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

As mesmas deficiências da mola longitudinal 2D estão presentes na versão 3D. Vale salientar, no entanto, que na versão 3D elementos inválidos podem surgir com mais facilidade, pois, os vértices podem cruzar faces, além de arestas. Nas seções seguintes são apresentados alguns dos esforços realizados no sentido de impedir o surgimento de células inválidas 3D.

5.2 Molas torcionais em tetraedros

As molas torcionais 3D em elementos tetraédricos não são uma extensão direta da versão 2D para triângulos, segundo apresentada na Seção 3.3.1. É necessário controlar o volume dos elementos, e não apenas as áreas como no caso bidimensional. No entanto, os vértices dos tetraedros possuem ângulos sólidos, que não são facilmente controláveis. Além disso, simplesmente controlar as áreas das faces dos tetraedros com molas torcionais 2D não é suficiente para impedir que o elemento se torne inválido. Sendo assim, fazer uso de molas torcionais em elementos 3D não é uma tarefa trivial.

Uma possível solução é controlar o volume dos tetraedros de uma maneira alternativa que considere ângulos planares ao invés de sólidos. Essa é justamente a estratégia adotada nos trabalhos presentes na literatura. Dentre eles, dois merecem destaque: o de Degand e Farhat [31] e o de Burg [18].

A proposta de Degand e Farhat não faz uso de molas torcionais tridimensionais de fato. Ao invés disso, eles posicionam adequadamente molas torcionais 2D no interior do elemento tetraédrico para controlar seu volume. Esta estratégia será descrita a seguir com maiores detalhes.

O trabalho de Burg [18] é o que mais se aproxima de uma proposta para molas torcionais 3D. Ele se baseia nas molas torcionais 2D de Farhat et al. [36] (descrito na seção 3.3.1) e a estende para o caso 3D. Burg apresenta uma nova formulação que considera a dinâmica dos elementos volumétricos, e não de triângulos como fizeram Degand e Farhat. Inicialmente, o autor apresenta como a nova formulação é desenvolvida para triângulos equipados com molas torcionais 2D e afirma que tal formulação se reduz exatamente naquela apresentada por Farhat et al. [36]. Em seguida, Burg mostra como a nova formulação pode ser facilmente estendida para tratar tetraedros. Em nenhum momento, no entanto, ângulos sólidos são considerados.

A estratégia de Degand e Farhat [31] consiste em inserir triângulos fictícios dentro dos tetraedros e anexar molas torcionais 2D aos vértices dos triângulos inseridos.

Seja τ_{pqrs} um tetraedro com volume V_{pqrs} . Para impedir a colisão do vértice v_s com a face oposta t_{pqr} , considera-se um triângulo fictício t_{sjq} dentro de τ_{pqrs} que esteja no plano perpendicular à face t_{pqr} , veja a Figura 5.2. Observe que, se $V_{pqrs} \rightarrow 0$ porque o vértice v_s tende a colidir com a face t_{pqr} , então a área de t_{sjq} também tende a zero. Portanto, controlar a área do triângulo t_{sjq} via molas torcionais 2D previne o vértice v_s de atravessar a face t_{pqr} , veja a Figura 5.3.

Figura 5.2: Inseção de um triângulo fictício dentro de um tetraedro.

A transferência da dinâmica das molas torcionais 2D do triângulo t_{sjq} para o tetraedro

Figura 5.3: Controle do volume do tetraedro.

τ_{pqrs} é feita de maneira direta, veja a Figura 5.4. As forças elásticas das molas torcionais de t_{sjq} são computadas (como descrito na Seção 3.3.1) e transferidas para os vértices do tetraedro τ_{pqrs} . Observe que o vértice fictício v_j do triângulo t_{sjq} não possui um vetor deslocamento correspondente, como é o caso dos vértices reais. A solução utilizada foi interpolar o vetor deslocamento de v_j a partir dos vértices v_p e v_r .

Figura 5.4: Equipando o tetraedro com molas torcionais.

Como existem quatro vértices no tetraedro, são necessárias quatro configurações de triângulos, como apresentado na Figura 5.5. Entretanto, deve-se notar que para cada vértice é possível inserir três triângulos diferentes para impedir que ele atravessasse a face oposta, cada triângulo influenciando a rigidez do tetraedro em uma direção diferente. Isso permite fazer um melhor controle do ângulo sólido no vértice. Para um triângulo com razão de aspecto ruim, pode ser uma tarefa dispendiosa determinar qual triângulo melhor previne o vértice de cruzar a face oposta. Para que isso seja evitado, os autores propoem a utilização dos três triângulos simultaneamente para cada vértice do tetraedro, o que gera a configuração de 12 triângulos apresentada na Figura 5.6.

Figura 5.5: Configuração de quatro triângulos por tetraedro.

Figura 5.6: Configuração de doze triângulos por tetraedro.

Segundo os autores, as duas configurações de triângulos extras (quatro ou doze) geram bons resultados. Porém, a configuração com doze triângulos produz um melhor posicionamento do vértice em cada iteração, a um custo computacional maior, obviamente.

5.3 Molas semi-torcionais em Tetraedros

As molas semi-torcionais também foram adaptadas para o contexto tridimensional. Nesta seção serão apresentados dois trabalhos, o de Murayama et al. [65] e o de Zeng e Ethier [112], ambos fazem uso de molas semi-torcionais para controlar ângulos diedrais entre faces.

A principal diferença entre as molas semi-torcionais 2D e 3D é que as últimas controlam ângulos entre faces ao invés de ângulos entre arestas. As molas semi-torcionais no contexto 3D serão chamadas de *molas semi-torcionais diedrais*. A função destas molas é impedir que vértices atravessem faces. Considere a Figura 5.7, onde uma mola é utilizada para controlar o ângulo diedral entre as faces t_{pqr} e t_{srq} . A notação φ_{qr}^{ps} será utilizada para designar uma mola semi-torcional presente no ângulo diedral na aresta e_{ps} e agindo sobre a mola longitudinal presente na aresta e_{qr} , como é o caso da Figura 5.7. Da mesma forma como explicado na Seção 3.3.2, a versão 3D também transfere seu coeficiente de rigidez diretamente para a mola

Figura 5.7: Mola semi-torcional diedral para controlar um dos ângulos diedral de um tetraedro.

longitudinal oposta. O seu coeficiente de rigidez, por sua vez, é calculado substituindo-se o ângulo entre arestas pelo ângulo diedral na Equação (3.21).

A proposta de Murayama et al. [65] sugere a adição de molas semi-torcionais tanto 2D quanto 3D. Para evitar que vértices atravessem arestas, molas semi-torcionais 2D são dispostas nos ângulos internos dos quatro triângulos que formam as faces do tetraedro. Além disso, o volume do tetraedro é controlado por seis molas semi-torcionais diedrais, uma em cada aresta do elemento. Cada tetraedro, portanto, é equipado com 18 molas semi-torcionais, 12 nos ângulos internos das faces e 6 nos ângulos diedrais internos do tetraedro.

Zeng e Ethier [112] também propuseram a utilização de molas semi-torcionais em elementos tetraedrais. A abordagem é muito parecida com a de Murayama et al., a única diferença é que não são utilizadas as molas nos ângulos internos das faces, mas apenas molas semi-torcionais diedrais. Portanto, cada tetraedro é equipado com apenas 6 molas semi-torcionais, uma para cada aresta.

Refletir o comportamento de molas torcionais em molas longitudinais, como é o caso das molas semi-torcionais, não necessariamente evita que elementos inválidos apareçam. Essa deficiência raramente impede a utilização do método em aplicações práticas de malha dinâmica, como por exemplo em CFD. Isso porque quando se tem elementos inválidos iminentes, a malha geralmente já apresenta tetraedros com razão de aspecto inadequada para as simulações seguintes. Em outras palavras, a geração de uma nova malha já seria necessária independentemente do surgimento de elementos inválidos.

5.4 Molas altura em tetraedros

Além das molas torcionais e semi-torcionais, outros mecanismos também foram propostos para impedir o surgimento de elementos inválidos em malhas tetraédricas, como por exemplo

Figura 5.8: Exemplo de altura 3D em tetraedro.

o baseado em molas altura 3D.

As molas altura 3D são simples e é basicamente a extensão direta da versão 2D descrita na Seção 3.3.3. Considere a Figura 5.8, na qual uma mola altura 3D, denotada por η_s^{prq} , é utilizada para impedir que o vértice v_s atravesse a face oposta t_{pqr} em um tetraedro τ_{pqrs} . A mola altura em questão liga o vértice v_s à sua projeção s' na face oposta.

A força produzida por uma mola altura no tetraedro segue a mesma fórmula descrita para o caso bidimensional (ver Equação (3.35)). O vetor deslocamento de s' , denotado por $\vec{\delta}_{s'}$, é obtido a partir dos deslocamentos atribuídos aos vértices da face oposta t_{pqr} . Sejam λ_p , λ_q e λ_r as coordenadas baricêntricas de s' em relação a t_{pqr} , ou seja: $\lambda_p v_p + \lambda_q v_q + \lambda_r v_r = s'$. Os valores de λ devem ser positivos, o que não acontece se s' for projetado fora do triângulo t_{pqr} . Por isso, é feito o seguinte procedimento sobre as coordenadas baricêntricas:

1. Se alguma coordenada λ_i , com $i \in \{pqr\}$, for menor que zero, então λ_i passa a valer zero.
2. Seja $\lambda_{total} = \lambda_p + \lambda_q + \lambda_r$.
3. $\lambda'_i = \lambda_i / \lambda_{total}$, para $i = p, q, r$.

Feito esse procedimento, o vetor $\vec{\delta}_{s'}$ é dado por

$$\vec{\delta}_{s'} = \lambda'_p \vec{\delta}_p + \lambda'_q \vec{\delta}_q + \lambda'_r \vec{\delta}_r. \quad (5.3)$$

Um tetraedro deve ser equipado com quatro molas altura, uma para cada vértice do elemento, ou seja, o tetraedro τ_{pqrs} é equipado com as seguintes molas altura: η_s^{prq} , η_r^{spq} , η_p^{qrs} e η_q^{srp} .

Opcionalmente, pode-se também empregar molas altura 2D nos triângulos das faces, neste caso são adicionadas três molas para cada triângulo, conforme descrito na Seção 3.3.3. O tetraedro é equipado com 16 molas altura no total.

5.5 Comparação entre molas

Nesta seção é feita uma comparação entre os resultados promovidos pela aplicação de malhas dinâmicas 3D com diferentes configurações de molas. As configurações comparadas são as seguintes:

1. Configuração 1: Molas longitudinais,
2. Configuração 2: Molas semi-torcionais diedrais,
3. Configuração 3: Molas semi-torcionais diedrais e molas longitudinais,
4. Configuração 4: Molas semi-torcionais diedrais, molas semi-torcionais nas faces e molas longitudinais,
5. Configuração 5: Molas altura 3D,
6. Configuração 6: Molas altura 3D e molas longitudinais, e
7. Configuração 7: Molas altura 3D, molas altura 2D nas faces e molas longitudinais.

A qualidade das malhas é aferida pela razão de aspecto do tetraedro, denotada por β , dada pela seguinte fórmula:

$$\beta = \frac{V}{\ell_{max}^3}, \quad (5.4)$$

onde V é o volume do tetraedro e ℓ_{max} o comprimento de sua maior aresta. Quanto maior for o valor de β mais próximo do equilátero é o elemento. Os histogramas apresentados nesta seção mostram o número de ocorrência de elementos em intervalos de qualidade. Neles, o valor da qualidade está normalizado pela qualidade de um tetraedro equilátero, e, portanto, varia de 0 a 1.

A malha utilizada para produzir os resultados desta seção é composta por 2674 vértices e 13738 tetraedros. A malha possui dois bordos, um cubo externo e uma esfera no centro.

A deformação é dada deslocando-se o bordo esférico em direção a uma das quinas do cubo. A Figura 5.9 mostra esse deslocamento, são apresentadas apenas as células do bordo da malha e as células invertidas pelo deslocamento. A malha dinâmica foi aplicada com vértices ativos e utilizando a estratégia de pequenos passos com os parâmetros $n_p = 100$ e $N_{max}^G = 105$. Todas as configurações foram capazes de efetuar o deslocamento desejado e sem invalidar células. Os histogramas dos resultados obtidos estão apresentados na Figura 5.9. Pode-se perceber que as configurações que promoveram os melhores resultados foram as 1, 3 e 7; pois foram as

Figura 5.9: Deslocamento do bordo esférico interior da malha volumétrica.

que mais impediram o surgimento de elemtnos com qualidade inferior a 0.2. Dentre todas, a configuração 7 foi a que obteve o melhor resultado.

Figura 5.10: Comparação entre molas 3D.

Capítulo 6

O movimento da fronteira da malha

Nos capítulos anteriores foi discutida a utilização de malhas dinâmicas para movimentação de malhas bidimensionais e tridimensionais. Nos dois casos, a malha dinâmica considera estática a sua fronteira, ou seja, os vetores deslocamento ali atribuídos não são alterados durante o processo dinâmico.

Em muitas aplicações, a deformação da fronteira do domínio da malha é realizada automaticamente e este movimento pode comprometer células da própria fronteira. Observe que a aplicação da malha dinâmica como apresentada nos capítulos anteriores não pode corrigir tais problemas, pois esta não é capaz de corrigir os elementos inválidos da fronteira. Uma solução para esse problema é mover a fronteira da malha antes de aplicar a malha dinâmica clássica para propagar as deformações da fronteira nos vértices do interior. Neste capítulo, é apresentado como a técnica de malha dinâmica pode ser usada como uma ferramenta de correção automática da fronteira da malha.

A Figura 6.1 ilustra este cenário em um domínio 2D simples. Suponha que exista uma malha no interior do retângulo, a qual não está apresentada para não tornar a figura confusa. Porém, o triângulo abc da malha é apresentado para ilustrar os efeitos da deformação da fronteira sobre a malha. Suponha que a aplicação tenha controle apenas sobre os vértices do topo do retângulo, para os quais foram atribuídos os vetores deslocamento apresentados na Figura 6.1(b). Note o que acontece na geometria do domínio após o deslocamento parcial da fronteira na Figura 6.1(c). Note também que o triângulo abc passa a ter sua orientação invertida, ou seja, passa a ser um elemento inválido. Para se obter o resultado da Figura 6.1(d), é necessário mover outros vértices da fronteira, no caso, aqueles nos lados verticais do retângulo.

O domínio apresentado na Figura 6.1 é bastante simples, o que facilita a correção da fronteira. Pois, o domínio retangular continua sendo retangular após o processo de movimentação.

Figura 6.1: Deslocamento parcial da fronteira em um domínio retangular 2D.

Figura 6.2: Deslocamento parcial da fronteira em um domínio curvo 2D.

Porém, em domínios mais complexos a correção da fronteira pode não ser simples. A Figura 6.2 ilustra um exemplo com geometria um pouco mais complexa que o da Figura 6.1. Nesse caso, seria necessário deslocar os vértices das linhas curvas para corrigir a fronteira. O tratamento da fronteira se torna ainda mais complicado quando se trata de modelos tridimensionais definidos por superfícies curvas.

Sendo assim, o fato da fronteira descrever o domínio da malha torna delicada a tarefa de corrigi-la, pois em muitos casos (como o apresentado na Figura 6.2) a correção introduz necessariamente alguma alteração na geometria do domínio. Ou seja, o tratamento da fronteira pode criar uma descrição geométrica que difere consideravelmente da original. É necessário, portanto, julgar se a nova descrição é aceitável ou não. Esse julgamento depende diretamente da aplicação em questão. Se a aplicação exige fidelidade na descrição geométrica do domínio, a melhor solução é simplesmente evitar a correção automática, remodelar a geometria e utilizar técnicas de remalhamento ou mesmo gerar uma nova malha. Se a aplicação, no entanto, não exigir tal fidelidade, soluções automáticas podem ser consideradas. A metodologia proposta neste capítulo destina-se à esta última classe de aplicações.

Considere a seguinte nomenclatura:

- *deformação-imposta*: termo utilizado para designar o conjunto de vetores deslocamento que devem permanecer inalterados durante todo o processo, ou seja, é o conjunto que descreve a modificação desejada na geometria do domínio. A deformação-imposta corresponde aos vetores em destaque na Figura 6.2(b).
- *deformação-adicional*: termo utilizado para designar o conjunto de vetores deslocamento da fronteira que foram modificados para amenizar o impacto da *deformação-imposta* na geometria do domínio, ou seja, designa a parte corrigida da fronteira. De uma maneira geral, a *deformação-adicional* ocorre apenas em uma região próxima adjacente à *deformação-imposta*. A deformação-adicional corresponde aos vetores deslocamentos utilizados para deslocar as linhas curvas da Figura 6.2.
- *deformação-geral*: este termo refere-se à deformação total realizada na fronteira, isto é, o resultado obtido após a aplicação da *deformação-imposta* e da *deformação-adicional*. A deformação-geral corresponde aos vetores deslocamentos utilizados para gerar o domínio da Figura 6.2(d).

A metodologia apresentada neste capítulo, é uma proposta de como realizar automaticamente a *deformação-adicional* de tal maneira que a *deformação-geral* não produza um modelo muito diferente do original (antes da deformação). Em outras palavras, a geometria do modelo antes e depois da *deformação-geral* devem ser intuitivamente parecidos. Nenhum rigor científico, no entanto, será aplicado para medir a proximidade das descrições geométricas.

A intenção é propor uma maneira de se obter a deformação-adicional por meio de malha dinâmica. Para criar um sistema de molas adequado para movimentar a fronteira, é proposto neste trabalho um novo tipo de mola, a *mola conservativa*, apresentada a seguir.

6.1 Molas conservativas

O papel das molas conservativas é adicionar forças ao sistema de molas que contribuam para a "conservação" do aspecto original da fronteira. As molas conservativas são utilizadas para realizar a citada deformação-adicional. Seja v_i um vértice da fronteira que deve ser movido. Seja v_i^o a posição original de v_i , ou seja, antes de ser realizado qualquer movimento. A mola conservativa é uma mola longitudinal que liga um dado vértice, v_i , a um ponto fictício situado na sua posição original, v_i^o , e tem comprimento de equilíbrio nulo. Portanto, a mola procura manter o vértice próximo de sua posição original. A Figura 6.3 ilustra a aplicação de molas conservativas em uma curva (a extensão para superfícies é direta). A Figura 6.3(a) mostra a malha original. A Figura 6.3(b) mostra o que acontece quando o bordo, no caso apenas os

Figura 6.3: Molas conservativas agindo sobre um curva.

dois vértices da extremidade, são movidos. A Figura 6.3(c) mostra a malha final onde cada vértice do interior tem uma mola conservativa conectando-os às suas posições originais.

A força $\vec{f}_i^c$ exercida por uma mola conservativa anexada ao vértice v_i é dada por:

$$\vec{f}_i^c = -\kappa^c \vec{\delta}_i \quad (6.1)$$

onde κ^c é o coeficiente de resistividade da mola e $\vec{\delta}_i$ é o vetor deslocamento de v_i .

6.1.1 Configuração da malha dinâmica com molas conservativas

Para encontrar a posição de equilíbrio dos vértices, é necessário combinar as molas conservativas com outros tipos de molas, ou seja, deve-se resolver o sistema composto por equações do tipo:

$$\vec{f}_i^c + \vec{f}_i = 0 \quad (6.2)$$

onde $\vec{f}_i$ é o somatório das forças exercidas em v_i pelas molas tradicionais (longitudinais, semi-torcionais, altura, etc).

Em muitas situações é desejável que se tenha controle sobre a influência das molas conservativas no sistema. Em outras palavras, é desejável que o usuário tenha controle para determinar pouca ($\vec{f}_i^c < \vec{f}_i$) ou muita ($\vec{f}_i^c > \vec{f}_i$) conservação da fronteira original. Embora este ajuste possa ser feito por meio da Equação (6.1), ele não seria intuitivo do ponto de vista do usuário, pois seria necessário encontrar valores adequados para κ^c . Isso é particularmente difícil porque essa calibração depende do grau de refinamento local da malha, pois $\vec{f}_i^c$ depende do tamanho das arestas e/ou das áreas dos elementos vizinhos. Portanto, fá-se necessária uma

alternativa mais simples para calibrar as forças $\vec{f}_i^c$ e $\vec{f}_i$, a qual pode ser feita alterando-se a Equação (6.2) para

$$\alpha_c \vec{f}_i^c + (1 - \alpha_c) \vec{f}_i = 0 \quad (6.3)$$

onde $0 \leq \alpha_c \leq 1$ é uma constante de calibração definida pelo usuário. Observe que quando $\alpha_c = 1$ apenas a mola conservativa exerce força e o vértice permanece em sua posição original. Por outro lado, quando $\alpha_c = 0$ a força de conservação é nula e o sistema se torna a malha dinâmica clássica.

Diferentes tipos de molas podem ser considerados para gerar a força $\vec{f}_i$. Na discussão que se segue, foram utilizadas molas longitudinais e semi-torcionais, mas outras configurações também são possíveis. A força $\vec{f}_i$ pode ser calculada por

$$\vec{f}_i = \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i), \quad (6.4)$$

(compare com a Equação (3.12)). O valor de κ_{ij}^{nc} é o somatório dos coeficientes de rigidez de todas as molas que controlam a aresta e_{ij} . Por exemplo, se a malha da fronteira for uma triangulação com molas longitudinais e semi-torcionais, então o coeficiente κ_{ij}^{nc} é dado pela Equação (3.34).

O método de Gauss-Seidel pode ser utilizado para resolver o sistema formado por equações do tipo (6.3), $\forall v_i \in T$. Substituindo-se a Equação (6.1) e a Equação (6.4) na Equação (6.3) obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha_c \kappa^c \vec{\delta}_i + (1 - \alpha_c) \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i) \\ \vec{\delta}_i \left[\alpha_c \kappa^c + (1 - \alpha_c) \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc} \right] &= (1 - \alpha_c) \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc} \vec{\delta}_j \\ \vec{\delta}_i &= \frac{(1 - \alpha_c) \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc} \vec{\delta}_j}{\alpha_c \kappa^c + (1 - \alpha_c) \sum_{v_j \in V(\star v_i)} \kappa_{ij}^{nc}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Os efeitos do parâmetro α_c em uma malha 1D podem ser percebidos na Figura 6.4. A malha original é a linha horizontal em negrito, cujos vértices extremos são v_a e v_b . A deformação imposta é dada pelo deslocamento do vértice v_b para $v_{b'}$ por meio do vetor $\vec{\delta}_b$. A Figura 6.4 mostra simultaneamente os resultados após aplicar a malha dinâmica com molas conservativas

Figura 6.4: Efeitos do parâmetro α_c em malhas dinâmicas com molas conservativas.

com o parâmetro α_c valendo os seguintes valores: 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, e 1.0.

6.2 Remodelagem automática da geometria de um avião

O projeto de asas de aviões tradicionalmente é feito com o auxílio de ensaios em tunel de vento e simuladores computacionais de escoamento de fluidos. Este trabalho normalmente requer várias etapas que alternam, ensaios e mudanças na geometria da asa, até que se obtenham os resultados desejados. No caso dos ensaios computacionais, este processo envolve várias chamadas do simulador para diferentes geometrias de asa. Estas chamadas computam propriedades do fluido tais como distribuição de pressão e arrasto sobre a asa do avião. Estas propriedades são usadas para alimentar o processo de otimização da geometria da asa. O processo de modificação da asa geralmente é caro computacionalmente, pois podem ser requeridas centenas de iterações simulador/otimização [72]. O número de execuções pode ser reduzido consideravelmente se o processo de otimização da geometria da asa também puder ser automatizado. Uma técnica disponível é conhecida como projeto inverso.

O projeto inverso emprega informações como (1) a descrição geométrica inicial da asa; (2) a distribuição de pressão sobre a asa para a geometria inicial; (3) a distribuição de pressão desejada especificada pelo usuário; e (4) um conjunto de especificações opcionais na forma de restrições. Com estes dados é produzida uma nova geometria que aproxima as características da asa desejadas pelo engenheiro projetista.

Nesta aplicação está sendo considerado um cenário onde as simulações de escoamento de fluidos são feitas em um domínio tridimensional e a ferramenta que implementa a técnica de projeto inverso opera sobre malhas bidimensionais. Apesar de rodarem em dimensões diferentes, estas duas ferramentas podem ser acopladas. Suponha, para isso, uma malha volumétrica definida ao redor do avião que se deseja processar. Planos de corte perpendiculares à asa do avião são posicionados na malha volumétrica. A interseção entre os planos de corte e a asa do avião definem curvas, que serão chamadas de *perfis*. A ferramenta de projeto inverso pode ser executada sobre malhas 2D localizadas sobre os planos de corte e modificar a geometria dos perfis da asa. Com a nova descrição geométrica dos perfis, um novo avião com a asa modificada pode ser remodelado por ferramentas CAD e uma nova malha volumétrica pode ser gerada. Este é um processo difícil de ser automatizado e geralmente a intervenção humana é requerida em duas tarefas: (1) na remodelagem do avião para produzir a nova geometria da asa e (2) na geração da nova malha volumétrica.

Uma das propostas desta tese é apresentar uma metodologia inovadora baseada em malhas dinâmicas capaz de automatizar o acoplamento entre a ferramenta de projeto inverso (2D) e o simulador de escoamento de fluidos (3D).

A Figura 6.5 ilustra a metodologia proposta. Na Figura 6.5a, é apresentada a superfície do avião, a malha volumétrica não é mostrada para evitar confusão visual. Na Figura 6.5b, são posicionados três planos de corte sobre a asa do modelo. Na Figura 6.5c é apresentado o conjunto de perfis dados pela interseção dos planos de corte e a asa, estes perfis são chamados de *perfis-velhos*. A ferramenta de projeto inverso modifica a geometria dos *perfis-velhos* produzindo os *perfis-novos*, esta etapa do processo é representada na Figura 6.5d. Com base nas informações geométricas contidas nos dois conjuntos de perfis, a geometria da asa do avião é modificada. A reconstrução da geometria é representada pela Figura 6.5e. A alteração da asa causa problemas tanto na malha superficial (fronteira da malha volumétrica) quanto na volumétrica. Esses problemas são corrigidos por meio de técnicas baseadas em malha dinâmica. O resultado é uma malha modificada e corrigida, pronta para ser utilizada novamente pelo simulador 3D.

A malha representando a geometria do avião é obtida diretamente da malha volumétrica, isto é, são células do bordo, e será chamada de *malha-superficial*. Portanto, dois tipos de

Figura 6.5: Integração entre projeto inverso (2D) e simulador de escoamento de fluidos (3D).

Figura 6.6: O modelo de avião composto por quatro grupos: G_F , G_{Asa} , G_{BF} e G_{PA} .

malhas estão envolvidas no processo descrito, uma composta por triângulos e outra composta por tetraedros.

Para exemplificar a metodologia proposta, será apresentado um caso específico. O modelo de avião tratado no exemplo a seguir é bastante simples. Este é composto por fuselagem, asa, bordo de fuga e ponta-de-asa. As células da malha superficial relativas a cada componente definem grupos. Será utilizada a notação G_{Asa} , G_{BF} , G_{PA} e G_F para referenciar os grupos dos componentes asa, bordo de fuga, ponta-de-asa e fuselagem, respectivamente. Por exemplo, G_{Asa} é composto por todos os triângulos da *malha-superficial* sobre a asa do avião. Os grupos são importantes porque eles possibilitam que diferentes técnicas de malha dinâmica sejam aplicadas em diferentes componentes do modelo. A Figura 6.6 mostra o modelo do avião e seus quatro grupos.

A transferência da informação geométrica dos *perfis-novos* (2D) para o modelo do avião (3D) é feita em diferentes estágios. A ordem de processamento dos componentes é a seguinte: G_{Asa} , G_{BF} , G_{PA} e G_F . Todos esses componentes são movidos por malha dinâmica usando

Figura 6.7: Os conjuntos *perfis-velhos* e *perfis-novos* tratados nesta seção.

molhas conservativas, descritas na Seção 6.1.

Na prática, as modificações geométricas do conjunto de perfis causadas pelo projeto inverso são pequenas em escala se comparadas com as dimensões do modelo. Entretanto, para mostrar a robustez da técnica proposta, foi empregada uma deformação nos perfis bem maior que a usual. A Figura 6.7 mostra os conjuntos de perfis utilizados para produzir os resultados apresentados aqui. Foram utilizados apenas dois planos de corte, assim cada conjunto é composto por apenas dois perfis. Porém, a utilização de mais de cortes, implica em mais informação para modificar o modelo, o que aumenta as chances de se obter melhores resultados com o modelo final.

6.2.1 Tratamento da asa

Para realizar o movimento do grupo G_{Asa} , é necessário obter vetores deslocamento a partir dos conjuntos de perfis. Estes vetores deslocamento são vetores que levam os pontos dos *perfis-velhos* aos pontos correspondentes, assumindo que existam, dos *perfis-novos*. Os vetores deslocamento carregam consigo então a informação necessária para a reconstrução geométrica da asa. Apenas um conjunto restrito de vértices do grupo G_{Asa} recebem vetores deslocamento diretamente dos perfis, a saber, aqueles que estão mais próximos dos perfis. Este conjunto de vértices é denotado por V_P^{asa} .

Assumindo que os vetores deslocamento não necessariamente pertencem à nenhum bordo do grupo G_{Asa} , a malha dinâmica deve ser aplicada de uma maneira diferente à explicada anteriormente. Os únicos vértices fixos são os de V_P^{asa} , todos os outros vértices do grupo, independentemente de serem de bordo ou do interior, são tratados normalmente pela malha dinâmica. Para mover a asa do caso tratado (Figura 6.6), foi utilizado $\alpha_c = 0.0$ (ver Equação (6.5)).

Após a ação da malha dinâmica, a fronteira de G_{Asa} é deslocada. Este deslocamento pode causar problemas nas componentes adjacentes à asa. A Figura 6.8 ilustra os problemas causados pelo movimento do grupo G_{Asa} . Na figura é mostrado em cores diferentes a malha superficial do modelo antes e após a movimentação de G_{Asa} . As ampliações mostram os

Figura 6.8: Problemas causados no modelo devido ao movimento da asa.

Figura 6.9: Esquema de compartilhamento da fronteira do bordo-de-fuga com as outras componentes do avião.

problemas causados nas componentes adjacentes. O grupo G_{Asa} foi omitido para explicitar os problemas. Em (a) e (b) pode-se perceber que células inválidas acontecem na fuselagem. Os problemas ocorridos no bordo-de-fuga são mostrados em (c) e (d), e em (e) e (f) os problemas na ponta-de-asa.

6.2.2 Tratamento do bordo-de-fuga

Considerando apenas o bordo-de-fuga, grupo G_{BF} , seu bordo é dado por uma curva, referida por ∂_{TE} . A curva ∂_{TE} é também compartilhada pelos componentes asa, ponta-de-asa e fuselagem. Este compartilhamento pode ser visto esquematicamente na Figura 6.9. O grupo G_{Asa} foi movido antes do tratamento do grupo G_{BF} , desta forma as partes da curva ∂_{TE} adjacentes à asa também são deformadas. Esse movimento parcial de ∂_{TE} pode induzir problemas como os mostrados na Figura 6.10.

O tratamento do grupo G_{BF} é feito em dois estágios: (1) correção do bordo ∂_{TE} de G_{BF}

Figura 6.10: Detalhes dos problemas causados na componente bordo-de-fuga devido ao movimento da asa.

Figura 6.11: Correção da componente bordo-de-fuga.

e (2) correção da malha superficial definida por G_{BF} .

No primeiro estágio é utilizada uma versão 1D da malha dinâmica com molas conservativas. Neste exemplo, para a região de ∂_{TE} adjacente à ponta-de-asa, o parâmetro utilizado foi $\alpha_c = 0.3$, e para a região adjacente à fuselagem $\alpha_c = 0.0$ (ver Equação (6.5)). No segundo estágio, foi usada a versão 2D de malha dinâmica com molas conservativas com o parâmetro α_c nulo.

A Figura 6.11 ilustra o processo de correção do bordo-de-fuga. Em (a) é apresentado o bordo-de-fuga com os efeitos causados pelo movimento do componente asa e em (b) o resultado da correção. As ampliações mostradas em (d) e (e) mostram o resultado após a correção do bordo.

Concluídas as correções no bordo-de-fuga, as fronteiras entre grupos não são mais deslocadas, apenas seus nós interiores são modificados. Desta forma, o tratamento da ponta-de-asa e da fuselagem é mais simples do que o tratamento dos grupos anteriores.

Figura 6.12: Correção da componente ponta-de-asa.

6.2.3 Tratamento da ponta-de-asa

A dificuldade em tratar a ponta-de-asa é que esta pode assumir diferentes formas geométricas. Estas podem variar desde superfícies planas até complexas winglets. Por isso, este é o componente onde as molas conservativas têm maior importância.

Para a geometria específica deste exemplo, as molas conservativas não desempenham um papel muito importante, assim o parâmetro α_c da Equação (6.5) foi ajustado em 0.2.

O processo de correção da componente ponta-de-asa é mostrado na Figura 6.12. A figura apresenta, de cima para baixo, a malha original antes de qualquer deformação, a malha após o movimento da asa e do bordo-de-fuga e finalmente após a correção. Pode-se verificar que a malha corrigida recupera com êxito a forma geométrica original na parte frontal da ponta-de-asa (à esquerda na figura). O aspecto curvado na parte traseira (à direita na figura) é causado pela correção do bordo-de-fuga, veja a Figura 6.11(g).

6.2.4 Tratamento da Fuselagem

Os problemas causados na fuselagem devido ao movimento da asa e do bordo-de-fuga também são tratados por malhas dinâmicas com molas conservativas. No exemplo ilustrativo, foi utilizado $\alpha_c = 0.0$ (veja a Equação (6.5)), pois quanto mais livre a malha dinâmica, maiores as chances de correção dos elementos inválidos. Note que a fuselagem foi a única componente a apresentar tais elementos. O valor $\alpha_c = 0.0$, causa, obviamente, uma deformação na forma geométrica da fuselagem. Esta deformação, porém, é pequena e não compromete os resultados do processo de otimização da asa.

Figura 6.13: Correção da componente fuselagem.

Os passos de tratamento da fuselagem podem ser vistos na Figura 6.13. Em (a), (b) e (c) são apresentadas, respectivamente, a malha original, a malha após o movimento da asa e do bordo-de-fuga, e a malha após a correção da fuselagem. Pode-se notar comparando-se (a1) com (c1) e (a2) com (c2) que a qualidade da malha da malha movimentada é semelhante à da malha original.

6.2.5 O movimento da malha volumétrica

A malha superficial é bordo da malha volumétrica, desta forma, as correções na malha superficial afetam diretamente a malha volumétrica. Portanto, a malha dinâmica 3D deve ser empregada para corrigir problemas e melhorar a qualidade da malha volumétrica deformada. No exemplo tratado, a malha volumétrica é composta por 96693 tetraedros e 22402 vértices. Para movê-la, foram utilizadas molas longitudinais e semi-torcionais.

Embora as aplicações potenciais para o emprego da metodologia proposta sejam as relacionadas com projeto inverso e simulador de escoamento de fluidos, o foco deste trabalho objetiva resultados geométricos. Em outras palavras, não foi realizada simulação de escoamento de fluidos na malha modificada para verificar sua adequação. Ao invés disso, a malha volumétrica modificada é avaliada em termos da qualidade de seus elementos. A métrica utilizada é a razão

de aspecto e é dada por

$$\beta = \frac{V}{\ell_{max}^3}, \quad (6.6)$$

onde V é o volume do tetraedro e ℓ_{max} o comprimento de sua maior aresta. Quanto maior o valor de β , melhor a qualidade. Valores negativos de β indicam tetraedros inválidos, ou seja, houve cruzamento de faces e arestas.

A tabela 6.1 fornece valores de qualidade que ajudam a verificar os resultados obtidos. Os valores β_{min} e β_{max} são, respectivamente, o menor e o maior valor de β na malha analisada, e $\bar{\beta}$ refere-se à média aritmética de β considerando-se todos os elementos da malha. O número de tetraedros inválidos também são mostrados na tabela 6.1. Os valores da tabela foram adquiridos para a mesma malha em quatro estágios diferentes:

1. *Malha original*: malha original sem movimentação.
2. *Asa movimentada*: malha após a movimentação da asa, conforme descrito na Seção 6.2.1.
3. *Modelo corrigido*: malha após a movimentação dos componentes adjacentes à asa.
4. *Malha final*: malha após todo o processo de movimentação, incluindo o movimento da malha volumétrica.

Tabela 6.1: Medições de qualidade dos elementos da malha volumétrica.

Estágios	β_{min}	β_{max}	$\bar{\beta}$	Inválidos
<i>Malha original</i>	0.008182	0.109553	0.0361731	0
<i>Asa movimentada</i>	-0.073921	0.107143	0.0236085	17160
<i>Modelo corrigido</i>	-0.073921	0.107143	0.0223170	18441
<i>Malha final</i>	0.004392	0.107143	0.0361874	0

Analisando as entradas da tabela 6.1, pode-se perceber que, apesar da grande deformação do domínio, todos os elementos inválidos foram corrigidos. Como esperado, o valor de $\bar{\beta}$ da *Malha final* é maior que o da *Malha original*, porém note que a degradação é pequena. Este fato pode ser melhor percebido por meio da Figura 6.14 onde pode ser vista a distribuição das medidas de qualidade β considerando *Malha original* e a *Malha final*. Pode-se perceber na Figura 6.14 que os gráficos são quase idênticos.

Figura 6.14: Qualidade dos elementos da *malha original* e da *malha final*.

Capítulo 7

Remalhamento de triangulações superficiais

Malhas superficiais são comumente utilizadas para representar a forma de objetos em aplicações computacionais. Muitas dessas malhas são freqüentemente geradas via algoritmos de reconstrução ou via representações implícitas de isosuperfícies. Algoritmos de reconstrução são amplamente utilizados em contextos onde é necessário criar representações computacionais de objetos no mundo real. Para isso, o objeto em questão é varrido por *scanner* tridimensional que gera um conjunto de pontos representando a superfície do modelo. Algoritmos de reconstrução identificam possíveis conectividades entre os pontos do conjunto para criar malhas. Uma característica comum em malhas produzidas por este processo é a abundância de vértices, que está diretamente relacionada com a resolução do dispositivo. Além disso, redundância de vértices é também comum em malhas produzidas por estes processos. Portanto, as malhas geradas por tais processos, especialmente quando automatizados, raramente são satisfatórias para o processamento seguinte. Ferramentas automáticas para redução de complexidade de tais modelos têm estimulado um considerável número de trabalhos em simplificação de malhas [62, 43, 5, 41]. Além da redução de complexidade, tem-se também uma frequente demanda por métodos capazes de melhorar a qualidade das malhas, isto é, promover uma melhor amostragem de vértices bem como a regularidade dos elementos. Este processo de melhoramento é conhecido como *remalhamento*.

O Remalhamento de superfícies é uma ferramenta importante para várias aplicações em diversos contextos tais como, modelagem, edição, animação e simulação. É uma área de pesquisa que tem recebido considerável atenção nos últimos anos, o que tem, por conseguinte, proporcionado o surgimento de um grande número de técnicas com os mais variados propósitos. Alliez et al. [3] fazem uma boa revisão dos principais métodos para remalhamento de superfícies.

Nessa revisão, eles dão uma possível definição para *remalhamento* de superfícies como: "o processo, que recebendo uma malha de entrada, calcula uma outra malha cujos elementos satisfazem algum requisito de qualidade ao mesmo tempo em que aproxima a superfície de entrada." *Qualidade*, neste caso, depende da aplicação para a qual a malha é destinada. Ela pode estar relacionada com amostragem, regularidade, tamanho e formato dos elementos. As técnicas para remalhamento não necessariamente precisam alterar a malha de entrada, elas podem, alternativamente, criar uma nova malha desde o princípio.

Neste trabalho é proposto um novo método chamado *ANTS*. O nome é um acrônimo para *Anisotropic Triangulations on Surfaces*. O *ANTS* é um método prático para remalhamento de superfícies a fim de gerar triangulações anisotrópicas. Suas principais características são:

- Capacidade de remalhar triangulações descrevendo modelos com geometria complexa.
- Funciona alterando a superfície diretamente, isto é, não emprega qualquer tipo de parametrização para realizar as alterações na malha.
- Capacidade de preservar detalhes geométricos da superfície de entrada.
- Promover malhas de alta qualidade para simulações numéricas.
- Processa o remalhamento considerando tanto simplificação (redução de vértices) quanto refinamento (inclusão de vértices).
- Emprega movimento de nós durante o remalhamento.

Em [3] os autores listam quais são os principais requisitos envolvidos no remalhamento de superfícies. Estes requisitos estão listados a seguir com comentários a respeito de como o *ANTS* atende tais requisitos:

- **validade:** a malha produzida deve ser uma malha válida. Isso geralmente significa que ela deve ser uma variedade simples, e tipicamente fechada (sem bordos). No estágio atual de desenvolvimento do *ANTS*, ele é capaz de remalhar variedades com bordo gerando sempre malhas válidas. Mais ainda, a idéia central do método pode ser facilmente estendida para proporcionar também remalhamento de não-variedades.
- **qualidade:** A qualidade dos elementos das malhas é crucial para a robustez e a estabilidade numérica, tanto para simulação numérica quanto para processamento geométrico. Em aplicações envolvendo elementos finitos, por exemplo, malhas compostas por elementos próximos dos regulares são preferíveis, tanto em termos de geometria como de

conectividade. Malhas de alta qualidade são requeridas para minimizar os erros numéricos da solução [79]. O *ANTS* foi criado com o intuito de gerar malhas para serem utilizadas em simulações numéricas. Portanto, uma grande ênfase foi dada para que os triângulos gerados atingissem níveis aceitáveis de qualidade. Como será visto mais adiante, os elementos gerados pelo *ANTS* procuram obedecer a uma função que determina quais seriam os tamanhos desejados de elementos sobre o domínio. Sendo assim, a qualidade dos elementos está intimamente ligada às propriedades dessa função. Para se obter malhas de boa qualidade é necessário que a função seja adequadamente suave, isto é, não determine tamanhos muito diferentes em uma pequena vizinhança. Além disso, o *ANTS* foi desenvolvido para que possibilitasse a geração de malhas tanto anisotrópicas quanto isotrópicas.

- **Fidelidade:** A malha gerada deve aproximar a forma geométrica original mantendo, ao mesmo tempo, o número de elementos da malha abaixo de um determinado limiar. Idealmente, a resolução da malha gerada deve ser a mínima possível tal que os critérios de fidelidade sejam satisfeitos. Isto envolve a escolha de uma métrica para o erro da aproximação, bem como decidir entre interpolação e aproximação. A fidelidade geométrica é mantida pelo *ANTS* através da definição de uma métrica e um limiar fornecido pelo usuário. Qualquer alteração na malha só é permitida se o limiar estabelecido for obedecido. Sendo assim, o usuário tem o controle de quão fiel a malha gerada deve ser. Além disso, o *ANTS* identifica, em uma fase de pré-processamento, as principais linhas e pontos característicos do modelo e preserva estas entidades durante o remalhamento, isso faz com que quinas e pontas presentes na malha original estejam presentes na produzida. Finalmente, a malha gerada é uma interpolação da original, uma vez que todos os vértices da primeira estão sobre a última.
- **Entrada discreta:** Os métodos recebem como entrada uma malha discreta, que é geralmente uma aproximação de algum modelo original contínuo possivelmente desconhecido. Quando a malha não é uma discretização adequada do modelo original, a tarefa de obtenção da maioria das informações geométricas (vetor normal, plano tangente, estimativa de curvatura) é dificultada. Além disso, a malha de entrada pode ter diversos defeitos com relação ao modelo original. Por exemplo, malhas geradas por reconstrução a partir de nuvens de pontos podem possuir artefatos de *aliasing* e faltar importantes características presentes no modelo original. Este item de certa forma entra em conflito com o item fidelidade. No caso do *ANTS* a fidelidade geométrica é colocada em primeiro plano. Se for necessário fazer correções na malha original, estas devem ocorrer em alguma etapa

de pré-processamento.

- **Grandes conjuntos de dados:** Escaneadores 3D modernos geram grandes conjuntos de dados uma vez que a taxa de amostragem é aumentada para garantir que detalhes geométricos sejam obtidos. Como resultado, a amostragem e a triangulação não são sensíveis à forma e existem, portanto, muitas redundâncias nos dados. O *ANTS* é um método que pode ser facilmente paralelizado, o que o torna adequado para o processamento de malhas grandes. Neste trabalho, no entanto, o paralelismo do algoritmo não é tratado.
- **Incerteza:** A malha de entrada pode ter ruídos. O *ANTS* pode tratar superfícies pouco ruidosas desde que sejam feitos ajustes adequados nos parâmetros de entrada do método. Porém, em superfícies muito ruidosas, é aconselhável que seja realizado algum pré-processamento para eliminar ruídos.
- **Correspondência:** Uma questão comum a todas as técnicas refere-se a como encontrar a localização correspondente de um novo vértice sobre a superfície de entrada. Tal correspondência é tipicamente encontrada via parâmetrização da malha de entrada. Este é um problema complexo que pode ser computacionalmente caro, ter problemas quanto à precisão ou mesmo impor restrições sobre a malha de entrada. Isto é particularmente problemático quando as operações de remalhamento são executadas em um domínio 2D, pois o mapeamento de estruturas não triviais 3D (possivelmente uma malha com número arbitrário de genus e buracos) para um domínio paramétrico 2D inevitavelmente introduz distorções métricas e pode levar a perda de informações importantes. Além disso, se a parametrização é combinada com segmentação de malha, é bem possível que sejam encontradas dificuldades próximas aos bordos dos segmentos. Existem técnicas que são livres de parametrizações e que trabalham diretamente sobre a superfície fazendo modificações locais na malha tais como adição, remoção e reposicionamento de vértices. Durante tais modificações, os vértices da malha são forçados a permanecerem sobre a malha de entrada. Esta abordagem pode ser encontrada em diferentes técnicas [40, 39, 48, 47, 1, 101, 92]. As modificações são realizadas em 3D (as quais são computacionalmente caras) ou em um plano tangente (as quais são mais rápidas, porém menos precisas). Se operações locais são utilizadas, então as armadilhas das técnicas baseadas em parametrizações globais são evitadas. As distorções causadas pelo mapeamento de uma malha 3D em um domínio 2D paramétrico pode ser consideravelmente reduzidas utilizando-se sobreposição de segmentos [92]; e o acúmulo de erro (frequentemente causados pelas operações locais) pode ser minimizado pela constante comparação

com uma aproximação suave da geometria original (por exemplo, usando triângulos PN [102] ou retalhos contínuos [105]). O *ANTS* é uma técnica que não faz qualquer tipo de parametrização, seja global ou local, para realizar o remalhamento.

Ao se elaborar uma técnica para remalhamento, é necessário avaliar os principais requisitos que devem ser obedecidos. Muitos requisitos são antagônicos, como, por exemplo, a qualidade da malha produzida e a rapidez de processamento. Portanto, é necessário estabelecer um compromisso entre os dois requisitos. O *ANTS* foi desenvolvido para que atendesse, até certo ponto, os dois critérios. Todavia, uma maior ênfase foi dada no sentido de fazer com que o método atendesse prioritariamente critérios de qualidade da malha produzida, sem perder de vista, obviamente, fatores ligados ao desempenho computacional.

A seguir são apresentados os principais trabalhos sobre remalhamento de superfícies, quer sejam planares ou curvilíneas, quer sejam para triangulações isotrópicas ou anisotrópicas. Muito embora alguns dos trabalhos citados aqui não compartilham o mesmo objetivo do *ANTS*, isto é, remalhamento anisotrópico de superfícies com geometria complicada, eles são mencionados por contribuírem, diretamente ou indiretamente, para a formulação do método proposto. Uma revisão das técnicas para remalhamento de superfícies pode ser encontrada em [3].

Algumas técnicas fazem uso de parametrização da superfície em regiões planares. O problema dessa estratégia é que a técnica de remalhamento fica limitada ao tratamento de superfícies homeomórficas a discos. Se superfícies mais gerais precisam ser tratadas, então é necessário recortá-las e uní-las novamente e, neste caso, a qualidade do remalhamento tende a se degradar nas regiões próximas à costura. Além disso, realizar parametrização global de objetos grandes e detalhados pode ser um desafio considerável. Uma alternativa à parametrização são as técnicas baseadas em operadores de remalhamento local (quebra de arestas, colapso de arestas, *flipping* de arestas e reposicionamento de vértices) pois estes geralmente oferecem maior flexibilidade ao processo de remalhamento. Todavia, é necessário tomar cuidado ao aplicar tais operadores, pois estes podem modificar o formato geométrico do modelo. O método proposto neste trabalho não faz uso de qualquer tipo de parametrização para efetuar o remalhamento.

Métodos baseados na triangulação de Delaunay apóiam-se no teste do circuncírculo vazio para determinar como os nós devem ser conectados para gerar a malha. Este teste determina se o circuncírculo de um dado triângulo da malha é vazio, ou seja, se o círculo não contém algum outro vértice da malha. Para uma triangulação ser Delaunay o teste deve ser verdadeiro para todos os triângulos. O refinamento Delaunay, originalmente proposto por Chew [27], baseia-

se no aparato teórico oferecido pelo referido teste. Novos pontos são inseridos sempre no circuncentro de triângulos com qualidade insatisfatória. O refinamento é caracterizado por seguir o princípio do ponto mais distante, isto é, sempre que um triângulo não satisfizer o critério de qualidade desejado, então o algoritmo insere um ponto dentro do domínio que é o localmente mais distante de todos os outros pontos presentes no domínio. Quando o processo de refinamento termina, a qualidade desejada dos elementos é automaticamente satisfeita. O desafio no caso é garantir que o processo terminará em algum momento. Um ponto interessante sobre o refinamento Delaunay é que o teste do circuncírculo fornece o aparato teórico necessário para provar o término do algoritmo, desde que determinadas condições de entrada sejam satisfeitas. Ruppert [70] mostrou como adaptar a técnica de refinamento Delaunay de Chew para gerar malhas com refinamento diferenciado sobre um domínio 2D. Shewchuk [77, 78] propôs uma extensão do método de Ruppert para tratar domínios poliedrais 3D sem ângulos agudos, a versão considerando ângulos agudos também foi proposta [26, 25, 68].

Em domínios bidimensionais, esse teste é rápido de ser aplicado e conduz a bons resultados, além de fornecer base teórica para triangulações isotrópicas. Todavia, o mesmo não pode ser dito quando este é adaptado para funcionar em domínios superficiais ou quando a triangulação gerada deve apresentar características anisotrópicas. No entanto, a técnica de refinamento Delaunay é explorada em diversos trabalhos. Chew [28] propôs uma adaptação do teste do circuncírculo vazio para domínios superficiais curvilíneos e então criou o primeiro método para refinamento Delaunay de superfícies. O trabalho de Chew [28] foi adaptado por Boissonnat e Oudot [11] para remalhar superfícies gerais, isto é, superfícies implícitas, modelos CSG e superfícies poliedrais. Cheng et. al [23, 24] propuseram um método para remalhar superfícies dinâmicas definidas por um conjunto finito de esferas. O método adapta dinamicamente a triangulação sobre uma superfície que sofre alterações em forma, curvatura e topologia. Cheng et. al [26] propuseram uma técnica para gerar triangulações sobre superfícies implícitas e paramétricas suaves sem bordo oferecendo garantias teóricas sobre a topologia e geometria da superfície bem como garantias sobre os tamanhos e qualidades dos elementos. Dey et. al [32] introduziram um algoritmo para remalhamento de superfícies poligonais que reamostra uma malha de entrada por meio de refinamento Delaunay e produz uma malha com a mesma topologia e geometria aproximada. Além disso, os elementos da malha gerada têm razão de aspecto limitada e os autores provam que o algoritmo termina se a malha de entrada aproximar adequadamente uma superfície suave.

Métodos baseados em avanço de fronteira [7, 45] para remalhamento de superfícies também estão presentes na literatura. Löhner [61] propôs um método de remalhamento baseado em avanço de fronteira capaz de lidar com superfícies de geometria complicada. Ao invés de fazer

uso de funções analíticas para aproximar a geometria, o método trabalha diretamente sobre a triangulação de entrada. Para fazer isso, a superfície de entrada é separada em retalhos cujos bordos fornecem as curvas de partida para o processo de avanço de fronteira, para recobrir a superfície original com novos triângulos. Outro trabalho que merece menção é o de Schreiner et al. [75, 76] que se baseia nas idéias de reconstrução de superfícies a partir de nuvens de pontos, principalmente na técnica de Scheidegger et al. [74], para fazer o remalhamento. Os autores advogam que a técnica funciona para qualquer modelo de entrada onde se possa calcular a curvatura e fazer projeção de pontos sobre sua superfície, incluindo modelos definidos por nuvens de pontos. O processo de avanço de fronteira é guiado por uma *função de espaçamento* isotrópica que determina o tamanho dos triângulos de acordo com a curvatura da superfície de entrada. Outros métodos baseados em avanço de fronteira são [87, 34].

A suavização de malhas é geralmente utilizada como uma etapa de pós-processamento para melhorar a qualidade dos elementos da malha. No entanto, movimento de vértices tem sido cada vez mais empregado como parte integrante de métodos para remalhamento. Percebendo essa tendência, Bossen e Hechbert [15] propuseram uma nova forma de classificar métodos de geração de malhas. Muito embora a classificação foi proposta para geração de malhas, ela também é pertinente para remalhamento de superfícies. A classificação se baseia na organização dos passos principais dos algoritmos. Mesmo havendo casos híbridos, os autores propuseram quatro classes principais:

1. *Triangulação coletiva* (veja a Figura 7.1(a)): escolhe a posição inicial dos vértices sobre o domínio, gera a triangulação a partir deles (geralmente pela triangulação de Delaunay) e então, opcionalmente, melhora a malha usando algum método de suavização. O problema com esta abordagem é que um posicionamento ruim dos vértices iniciais pode acarretar em uma malha com topologia ruim.
2. *Triangulação incremental* (veja a Figura 7.1(b)): Insere os vértices um de cada vez, atualizando a triangulação após cada inserção. Um passo opcional de suavização é aplicado para melhorar a qualidade da malha final.
3. *Geração flexível com triangulação posterior* (veja a Figura 7.1(c)): Posiciona os vértices sobre o domínio. Em seguida, num laço feito para cada vértice da malha ocorre suavização e inserção/remoção de vértices para se obter um controle adequado do número de vértices da malha. Finalmente é realizada a triangulação dos vértices para se obter a triangulação resultante.
4. *Geração flexível com retriangulação* (veja a Figura 7.1(d)): diferente da geração flexí-

vel com pós-triangulação, onde a malha só é gerada no final, aqui a triangulação está presente durante todo o processo. Esta classe considera suavização, inserção/remoção e retriangulação para cada vértice iterado no laço principal do método.

Figura 7.1: Classes de métodos para geração de malhas.

O método proposto neste trabalho pode ser classificado como flexível com retriangulação.

Os métodos flexíveis geralmente fazem a suavização simulando o comportamento físico de dinâmica de partículas. Eles também usam alguma abordagem para fazer o controle da densidade de vértices presentes no domínio, pois, geralmente não se sabe *a priori* quantos vértices são necessários para se obter uma malha com triângulos obedecendo algum critério de qualidade. O número de vértices poderia ser estimado por meio da área ou volume do domínio, para os casos bidimensionais ou tridimensionais respectivamente. No entanto, mesmo que a quantidade ideal de vértices seja conhecida, a dificuldade ainda reside em como distribuí-los. Uma solução seria utilizar um esquema adaptativo onde é feito um controle da densidade local dos vértices distribuídos sobre o domínio. Para isso dois casos são levados em consideração:

- Inclusão de novos vértices: se o número de vértices for pequeno, então eles estarão relativamente distantes entre si, podendo contribuir para formação de elementos grandes e de formato inadequado; portanto, é necessário adicionar novos vértices.
- Eliminação de vértices: se o número de vértices for grande, a malha resultante pode conter mais vértices que o necessário promovendo um número elevado de elementos, portanto é interessante remover alguns vértices.

Com este processo, o número de vértices é ajustado dinamicamente. A grande questão que surge é como garantir a parada do algoritmo, pois uma seqüência infinita de inserções e remoções pode acontecer facilmente.

Turk [101] introduziu o primeiro trabalho que faz uso de simulação física de partículas para fazer remalhamento de superfícies. A simulação é empregada para espalhar um certo número de novos vértices sobre a superfície. O procedimento é simples e produz malhas isotrópicas satisfatórias para superfícies sem quinas e pontas.

Surazhsky e Gotsman [92] introduzem um algoritmo interessante capaz de produzir malhas com alto grau de regularidade, isto é, a grande maioria dos vértices possuem seis triângulos incidentes. O método é conhecido como remalhamento explícito de superfícies. O termo explícito é utilizado para indicar que o método funciona diretamente na malha de entrada ao invés de modificá-la indiretamente através, por exemplo, de parametrizações globais, no entanto, parametrizações locais são realizadas. A técnica faz uso de um processo chamado otimização de malhas baseada em área que cumpre a tarefa de espalhar os vértices adequadamente sobre a superfície do modelo. Como observado pelos autores em [91, 93], a estratégia de equalização das áreas dos triângulos da malha tem um efeito surpreendente, pois embora não produza elementos quase equiláteros, os vértices são espalhados adequadamente. O processo de espalhamento dos vértices sobre o domínio é feito intercalando-se otimização de área e *flipping de arestas*. Como pós-processamento, os autores aplicam uma etapa de regularização da conectividade da malha.

Alliez et al. [6] criaram uma técnica de remalhamento iterativo de superfícies baseado em parametrização global. A malha original é representada por uma série de mapas 2D no espaço paramétrico que são usados para criar o chamado mapa de controle. O controle da densidade de vértices sobre a superfície é feito aplicando-se a técnica de amostragem por difusão de erro, que foi originalmente criada para processamento de imagens.

Alliez et al. [4] e Surazhsky et al. [90] propuseram métodos para remalhamento baseados na relaxação de Lloyd [58]. Tal relaxação é obtida substituindo-se os pontos geradores do diagrama de Voronoi pelos centróides de suas respectivas células de Voronoi. Para utilizar a relaxação de Lloyd, os métodos parametrizam a malha inicial em um plano, sendo que o primeiro método faz parametrização global e o segundo parametrizações locais com sobreposição.

Vorsatz et al. [104] propuseram um método para remalhamento de superfícies que é sensível às características geométricas da malha original. O método primeiro ajusta o número de vértices a um dado valor fornecido pelo usuário via inserção de vértices e colapso de arestas. Em seguida, a superfície é globalmente parametrizada; os vértices são distribuídos no espaço parametrizado via suavização laplaciana e logo depois trazidos de volta ao domínio

superficial. Neste processo, as linhas características do modelo inicial são perdidas. Para solucionar este problema, é feito um processo que move os vértices em direção às linhas e vértices característicos da superfície. As linhas características não são explicitamente identificadas em uma etapa de pré-processamento, ao invés disso, um campo de curvatura é calculado e este campo influencia o movimento dos vértices em direção às regiões de maior curvatura. Sendo assim, nenhum parâmetro é requerido do usuário para montar tal campo. Este método possui diversos problemas práticos o maior deles é devido à parametrização global. Para contornar este problema, Vorsatz et al. [103] adaptaram a técnica para evitar o mapeamento global. Isso é feito identificando-se explicitamente as quinas da superfície e controlando o processo de remalhamento para evitar que elas sejam danificadas. Além disso, o método faz uso de parametrização local para movimentar os vértices. No caso, apenas a sub-malha correspondente à estrela do vértice movido é parametrizada. A consequência disso é que o movimento é consideravelmente limitado, já que o vértice deve permanecer sobre a sub-malha em questão.

Botsh e Lobbelt [16] propuseram uma abordagem de remalhamento para modelagem com multiresolução (em inglês *multiresolution modeling*). O método de retriangulação utilizado para gerar triangulações uniformes baseia-se diretamente nos trabalhos [92, 90, 103].

Frey e Borouchaki [39, 40] propuseram uma abordagem de remalhamento que funciona em dois estágios. Primeiro, a malha de entrada é submetida a um processo de simplificação utilizando os operadores locais de colapso de arestas, *flipping* de arestas e reposicionamento de nós. A saída desta primeira etapa é chamada malha geométrica, por oferecer fidelidade ao modelo inicial, podendo inclusive apresentar características anisotrópicas. A etapa seguinte processa a malha geométrica a fim de gerar uma nova malha com características adequadas para computações com elementos finitos. Para isso, um suporte geométrico (G^1 contínuo) é construído sobre a malha geométrica e é utilizado tanto para guiar os operadores de remalhamento local (inserção, remoção, *flipping* e movimento) quanto para definir uma métrica geométrica. Esta métrica cumpre o papel de limitar a distância entre as arestas da malha gerada à superfície do modelo.

Todos os métodos discutidos até aqui são para produzir malhas isotrópicas. Os métodos citados a seguir se propõem a gerar malhas com características anisotrópicas. Alguns dos métodos não são propriamente para remalhamento, mas são incluídos na discussão por apresentarem idéias interessantes que podem ser aproveitadas de alguma forma em técnicas de remalhamento.

Esforços têm sido feitos no intuito de gerar triangulações anisotrópicas com garantia de qualidade. Como acontece no caso isotrópico, os métodos capazes de oferecer tal garantia são aqueles baseados na triangulação de Delaunay. Para o caso anisotrópico, os esforços nessa

direção também envolvem a triangulação de Delaunay.

Sabe-se que dado um conjunto de pontos no espaço euclidiano, a triangulação de Delaunay oferece uma forma canônica para conectar tais vértices. A triangulação de Delaunay anisotrópica é construída em variedades riemannianas e pode manter algumas das valiosas propriedades da triangulação de Delaunay euclidiana, como observado por Leibon e Letscher [54]. No entanto, as triangulações de Delaunay anisotrópicas não existem para um conjunto arbitrário de pontos, e certos requerimentos de densidade devem ser obedecidos para que a triangulação represente precisamente tanto a topologia quanto a geometria de uma variedade Riemanniana. A construção de triangulações de Delaunay anisotrópicas é um problema consideravelmente mais difícil que a versão euclidiana. Em uma variedade riemanniana pode não haver uma única linha dando a menor distância entre dois pontos. Além disso, o teste do circuncírculo vazio não é bem definido, uma vez que podem existir várias esferas passando por três pontos de uma variedade riemanniana. Todavia, a diferença entre a triangulação de Delaunay anisotrópica e a euclidiana pode ser minimizada se for assumido que a amostragem de pontos é suficiente grande em uma dada vizinhança da variedade. Leibon e Letscher [54] provaram que se uma variedade riemanniana for adequadamente amostrada, então a triangulação de Delaunay existe e é única e mantém as mesmas propriedades das triangulações do espaço euclidiano. Os autores também apresentam algoritmos para construir a triangulação. Para fins práticos, porém, a proposta não é adequada, pois, não se pode garantir *a priori* que os pontos de entrada satisfazem o critério de amostragem.

Labelle e Shewchuk [53] propuseram um método para refinamento de triangulações de Delaunay anisotrópicas em domínios bidimensionais. O método segue uma abordagem diferente da tradicional que analisa e modifica a triangulação diretamente. Ao invés disso, Labelle e Shewchuk propuseram uma aproximação do diagrama de Voronoi anisotrópico e realizam o refinamento no próprio diagrama. A triangulação só é de fato gerada no final do processamento. Além disso, os autores provam que o algoritmo termina e a malha gerada obedece a critérios de qualidade se algumas restrições na entrada forem obedecidas. Boissonnat et. al [50] propuseram uma alternativa para a construção dos diagramas de Voronoi anisotrópicos como também uma variante do algoritmo de Labelle e Shewchuk.

Vários métodos baseados em heurísticas fazem uso de recursos provenientes da triangulação de Delaunay, muito embora a triangulação produzida não seja necessariamente Delaunay. Por exemplo, em contextos anisotrópicos o critério Delaunay é modificado e utilizado para governar o processo de *flipping* de arestas [83, 56, 14].

Castro Díaz e Hecht [21] descrevem um método para remalhar superfícies tanto com triangulações isotrópicas quanto anisotrópicas. O processo é bastante simples e se baseia em

aplicar adequadamente os operadores de remalhamento local. O remalhamento se dá pelo processamento de arestas. Um novo vértice é inserido se o comprimento da aresta for considerado grande. Arestas consideradas pequenas são colapsadas e um dos vértices é eliminado. Estas operações são seguidas de *flipping* de arestas se necessário. Finalmente, a malha gerada passa por um processo final de otimização global em duas etapas: (i) os vértices interiores com menos de três arestas incidentes são eliminados e (ii) os vértices são movimentados por um procedimento de suavização inteligente [19, 38]. Para auxiliar no processo de projeção de pontos sobre a superfície os autores utilizam um suporte geométrico. Este suporte é criado utilizando o algoritmo de Farin [37] que constrói uma superfície G^1 pela colagem de retalhos menores sobre os quais são definidas superfícies de Bezier.

Em [82, 84, 85] Shimada introduziu uma nova abordagem para gerar malhas isotrópicas utilizando como base simulação física de partículas. A idéia é inspirada no comportamento natural das bolhas, as quais tendem a formar padrões hexagonais quando confinadas em um domínio fechado. Tal comportamento oferece uma boa configuração para a localização dos vértices (centro das bolhas) de uma malha isotrópica. O método de empacotamento de bolhas é composto por dois passos principais: empacotamento das bolhas e conexão dos vértices. Na primeira etapa, o método realiza o posicionamento dos vértices da malha distribuindo bolhas no domínio. A distribuição das bolhas segue a seguinte ordem: (1) vértices, (2) arestas, (3) faces e (4) interior do domínio. Em (2), (3) e (4), as bolhas são criadas e então movimentadas sobre o domínio para que se consiga uma boa distribuição das mesmas. Para movimentar as bolhas, o método roda uma simulação seguindo o modelo dinâmico de forças de atração e repulsão. A força é modelada como uma aproximação da força de van der Waal, que simula o comportamento molecular. A simulação roda até que as bolhas encontrem posições estáveis, ou seja, as forças entre elas estejam balanceadas. Uma boa configuração das bolhas é aquela que minimiza tanto as sobreposições quanto as falhas. Para isso, durante a simulação é feito um controle do número de bolhas para evitar o excesso (demasiada sobreposição no domínio) ou escassez (falha no domínio) de bolhas. Quando as bolhas já estiverem posicionadas e estáveis, os vértices da malha são então dispostos nos centros das bolhas. Para completar o processo, a malha é contruída por avanço de fronteira a fim de se obter uma triangulação de Delaunay.

A idéia de empacotamento de bolhas foi estendida para o caso anisotrópico. Os trabalhos [83, 86, 110] adaptaram o método para criar triangulações anisotrópicas em superfícies curvas em $\mathbb{R}^3$; e os trabalhos [108, 107, 109] estenderam-na para gerar malhas anisotrópicas tetraedrais e hexa-dominantes. Em ambas as extensões a diferença do método tradicional de empacotamento de bolhas para o caso anisotrópico se dá em dois aspectos: (1) o uso de bolhas elipsoidais e (2) o uso de um critério Delaunay modificado para conectar os vértices de tal

modo que considere a anisotropia do domínio.

Li et al [56, 57] propuseram uma abordagem baseada em "mordidas" (*bitting*) para gerar malhas isotrópicas 2D combinando a abordagem por avanço de fronteira com empacotamento de esferas. Morder significa consumir uma região do domínio. No caso isotrópico, cada mordida tem o formato de um círculo. Para adequar esse método ao caso anisotrópico as mordidas passam a ter o formato de uma elipse, que são definidas por tensores métricos definidos sobre o domínio.

Bossen e Heckbert [15, 14] propuseram um método para geração de malhas simpliciais anisotrópicas bidimensionais. Seu método faz uso de suavização por simulação física; controle da densidade de vértices no domínio por meio de refinamento/simplificação de malha; e retriangulação da malha. O método recebe como entrada um polígono delimitando o domínio e um campo de tensores métricos para definir a anisotropia sobre o domínio. Inicialmente, o método gera uma triangulação de Delaunay com restrição sobre o polígono de entrada. Em seguida, para que a malha inicial passe a respeitar a anisotropia, o método itera os vértices, sendo que em cada iteração ocorrem os seguintes passos: (1) um vértice aleatório é escolhido e reposicionado por meio de uma simulação física de forças entre vértices; (2) a malha é retriangulada para respeitar o deslocamento do vértice; e (3) se necessário, ocorre controle de densidade local pela inserção ou remoção de vértices. Como o passo de retriangulação é efetuado sempre que um vértice é iterado, a malha está presente durante todo o processo. A presença da malha é interessante por três motivos: (1) descarta o uso de uma estrutura auxiliar para fazer a busca dos vértices mais próximos (vizinhos); (2) não precisa de um método para fazer a triangulação final dos pontos; e (3) possibilita que a qualidade dos elementos seja medida em qualquer instante durante o processo, permitindo a parada do algoritmo assim que os elementos satisfizerem uma determinada condição fornecida pelo usuário.

Como mencionado, vários dos métodos citados contribuíram, direta ou indiretamente, para a criação do método de remalhamento proposto, o *ANTS*. Os capítulos a seguir apresentam detalhes sobre o *ANTS*. O próximo capítulo descreve como é feita a detecção das linhas e pontos relevantes para a descrição da forma geométrica da malha de entrada. Estas linhas e pontos são determinantes para a criação das *estruturas-de-controle*, que por sua vez são de fundamental importância para que as principais características geométricas da malha de entrada sejam preservadas durante o processo de remalhamento. Além das *estruturas-de-controle*, o remalhamento é também guiado por uma *função de espaçamento*, que é responsável por informar qual é o espaçamento desejado entre vértices sobre o domínio. As *funções de espaçamento* podem ser isotrópicas ou anisotrópicas, o que determina o tipo de malha que será produzida. O Capítulo 9 descreve como uma *função de espaçamento* anisotrópica é calculada

a partir da malha de entrada. Uma vez calculadas as *estruturas-de-controle* e a *função de espaçamento* a partir da malha de entrada, o processo de remalhamento é executado, conforme descrito no Capítulo 10. Finalmente, no Capítulo 11 mostra os resultados obtidos e também conclusões sobre o método proposto.

Capítulo 8

As estruturas de controle geométrico

Neste capítulo é mostrado como são identificadas as estruturas que representam as principais características geométricas do modelo representado pela malha de entrada. Tais estruturas são de fundamental importância para que o processo de remalhamento preserve o formato original da superfície.

As características geométricas podem ser facilmente identificadas analisando-se as quinas do modelo representado pela malha de entrada. Por exemplo, verificando-se as quinas da malha representando um cubo (veja a Figura 8.1) pode-se facilmente identificar que tal modelo possui as seguintes características geométricas principais: oito pontos (vértices do cubo), doze linhas (arestas do cubo) e seis sub-superfícies (faces do cubo).

Se as características geométricas de um dado modelo forem mantidas durante o processo de ramalhamento, a malha produzida terá uma forma geométrica parecida com a original. Essa é justamente a idéia por trás do método proposto para manter a forma geométrica do modelo remalhado. Dá-se o nome de *estruturas-de-controle*, denotado por C , ao conjunto das principais características geométricas de uma superfície.

Existem vários trabalhos na literatura que tratam da identificação das principais características geométricas de malhas superficiais [51, 63, 49, 100]. A técnica apresentada neste capítulo é baseada principalmente na proposta por Tilch and Löhner [100].

O processo de extração das *estruturas-de-controle* do modelo é baseado na identificação das *arestas-quina* da superfície inicial. Tais arestas são facilmente identificadas analisando-se o ângulo formado entre os vetores normais de faces adjacentes. Seja Φ um valor definido pelo usuário, se o ângulo entre as normais for maior que Φ , então a aresta é considerada de quina. Além disso, para superfícies com bordo, todas as arestas de bordo são consideradas *arestas-quina*. Para a maioria dos exemplos, é suficiente que o valor de Φ esteja no intervalo $30^\circ \leq \Phi \leq 50^\circ$.

Figura 8.1: Características geométricas em um cubo.

Considere *grau-de-quina* de um vértice v_i , denotado por $\mathfrak{D}(v_i)$, como o número de *arestas-quina* incidentes naquele vértice. Na Figura 8.2, estão indicados vértices com *graus-de-quina* iguais a 1, 2 e 3.

Uma vez marcadas todas as *arestas-quina* da malha superficial, elas são utilizadas no processo de identificação das *estruturas-de-controle*. O conjunto *estruturas-de-controle* pode ser dividido em quatro subconjuntos, são eles: *cantos-de-controle*, *linhas-de-controle*, *pontas-de-controle* e *superfícies-de-controle*, os quais são respectivamente denotados por C_C , C_L , C_T e C_S .

Uma *estrutura-de-controle* em particular será denotada utilizando-se um índice, por exemplo, C_i refere-se a uma *estrutura-de-controle* qualquer, que pode ser um *canto-de-controle*, *linha-de-controle*, *ponta-de-controle* ou *superfície-de-controle*. O índice também será usado para referenciar elementos de C_C , C_L , C_T e C_S . Por exemplo, $C_{L_i} \in C_L$ e $C_{L_j} \in C_L$ referem-se a duas *linhas-de-controle* distintas.

Um *canto-de-controle*, $C_{C_i} \in C_C$, é um vértice v da malha tal que:

- $\mathfrak{D}(v) > 2$, ou
- $\mathfrak{D}(v) = 2$ e o ângulo entre as duas *arestas-quina* incidentes em v for menor que Ψ (geralmente $\Psi = 180^\circ - 1.2\Phi$).

Uma *ponta-de-controle*, $C_{T_i} \in C_T$, é um vértice v da malha tal que $\mathfrak{D}(v) = 1$.

Uma *linha-de-controle*, $C_{L_i} \in C_L$, é um conjunto de vértices e arestas da malha formando uma curva discretizada tal que:

- um vértice $v \in C_{L_i}$ se e somente se $\mathfrak{D}(v) = 2$ e $v \notin C_C$ e

Figura 8.2: Ilustração *graus-de-quina* de vértices.

- uma aresta $e_{jk} \in C_{L_i}$ se e somente se e_{jk} for *aresta-quina* e $v_j \in C_{L_i}$ ou $v_k \in C_{L_i}$.

Note que as *linhas-de-controle* podem formar ciclos ou ter em suas extremidades vértices pertencentes a C_C ou C_T .

Finalmente, uma *superfície-de-controle*, $C_{S_i} \in C_S$, é um conjunto de triângulos, arestas e faces da malha tal que:

- um triângulo $t \in C_{S_i}$ se for possível construir um caminho célula-a-célula entre t e qualquer triângulo em C_{S_i} sem cruzar qualquer aresta em C_L .
- uma aresta $e \in C_{S_i}$ se seus triângulos adjacentes pertencerem a C_{S_i} .
- um vértice $v \in C_{S_i}$ se todas as células incidentes em v pertencerem a C_{S_i} .

As *estruturas-de-controle* em uma superfície estão exemplificadas nas Figuras 8.2 e 8.3, as *linhas-de-controle* são as arestas em negrito e os *cantos-de-controle* e as *pontas-de-controle* são os vértices em destaque.

Quando todas as *estruturas-de-controle* tiverem sido identificadas, pode-se opcionalmente realizar um processamento sobre elas a fim de eliminar algumas arestas desnecessariamente marcadas como *arestas-quina*. Para isso foi utilizado o procedimento descrito em [100] para melhorar a fidelidade das *linhas-de-controle*. Para cada extremidade de cada *linha-de-controle*, um critério relaxado (1.2Φ) para determinar *arestas-quina* é aplicado para remover, em seqüência, a aresta da extremidade da *linha-de-controle*. Se a aresta da extremidade não for considerada uma *aresta-quina* segundo o novo critério relaxado, ela é removida e a próxima aresta

é avaliada. Em seguida um critério mais apertado (0.8Φ) é utilizado para colocar de volta na *linha-de-controle* algumas das arestas que foram removidas. Note que este processo de simplificação pode remover completamente ou parcialmente uma *linha-de-controle*; portanto, é fundamental que os conjuntos C_C , C_T e C_S sejam atualizados após a simplificação. Os efeitos deste procedimento simplificador de *linhas-de-controle* pode ser verificado na Figura 8.3; na Figura 8.3(a) não foi utilizado o simplificador enquanto que na Figura 8.3(b) ele foi utilizado.

Além de serem de fundamental importância para o processo de remalhamento, as *estruturas-de-controle* também são utilizadas durante a construção de uma *função de espaçamento* anisotrópica sobre G , como será visto no próximo capítulo.

(a) Sem simplificação

(b) Com simplificação

Figura 8.3: Efeito do processo simplificador de *linhas-de-controle*.

Capítulo 9

A função de espalhamento

É sabido que diferentes aplicações requerem malhas com características diferenciadas, mesmo que estas estejam definidas sobre o mesmo domínio. Portanto, não se pode, *a priori*, afirmar que uma dada malha é mais adequada que outra sem considerar qual é a aplicação envolvida. Por exemplo, em computação gráfica é comum a utilização de malhas para apenas representar a forma geométrica de um dado modelo. Neste caso, as malhas mais adequadas são aquelas com o menor número de elementos, desde que a fidelidade à forma geométrica não seja comprometida. Sendo assim, triângulos dos mais variados formatos e tamanhos podem ser utilizados para compor a malha, desde que cada um deles ofereça uma aproximação local adequada do modelo. Por outro lado, em aplicações envolvendo simulações numéricas de fluidos, as malhas mais adequadas são as que oferecem compromisso adequado entre desempenho computacional e precisão numérica. Quanto menor o número de triângulos, maior a eficiência computacional, porém, maiores as chances da precisão numérica ser degradada. Neste caso, tanto o tamanho dos elementos quanto o formato e disposição dos mesmos influenciam a precisão da simulação. Geralmente, os elementos mais adequados são os equiláteros. Em muitas situações são necessários refinamentos diferenciados sobre o domínio. Por exemplo, em simulações estruturais as malhas possuem elementos menores em regiões onde a concentração de pressão é maior ao passo que elementos maiores são utilizados nas outras regiões. Em outros casos, no entanto, malhas compostas por elementos mais finos e longos que os usuais podem oferecer um melhor compromisso entre desempenho e precisão, este é o caso das malhas anisotrópicas. Por exemplo, na camada limite em volta da asa de um avião ou ao longo das frentes de choque em vôos supersônicos, elementos com razão de aspecto da ordem de 100.000 por 1 podem ser apropriados [79]. Portanto, para que um procedimento possa gerar malhas adequadas para variadas aplicações é necessário adotar algum critério que estabeleça quais são os tamanhos e os formatos desejados de elementos nas diferentes regiões do domínio, este é o papel das

funções de espaçamento.

Uma *função de espaçamento* estabelece para cada ponto do domínio qual é o tamanho e o formato desejáveis de um elemento da malha naquele ponto. A forma mais comumente empregada de *função de espaçamento* é especificando o tamanho desejado de aresta para um ponto do domínio. No caso de malhas superficiais, o controle das arestas é suficiente para controlar o formato dos elementos. Por exemplo, se uma *função de espaçamento* estabelece que cada ponto do domínio requer arestas de tamanho 1, a malha ideal é aquela composta por elementos equiláteros de lado 1. Em malhas volumétricas, no entanto, isso não é suficiente, pois os indesejados tetraedros *slivers* têm comprimentos de arestas parecidos.

Este trabalho propõe-se a tratar tanto malhas isotrópicas quanto anisotrópicas. Para que possam ser geradas malhas isotrópicas, é suficiente especificar apenas o tamanho desejado do elemento em cada ponto do domínio, e assume-se que o triângulo seja o mais próximo do equilátero quanto possível. Já no caso de malhas anisotrópicas, as *funções de espaçamento* são mais elaboradas, pois o tamanho desejado deve variar em direções deferentes. Observe que o caso isotrópico é um caso particular do anisotrópico, o qual ocorre quando o tamanho desejado é o mesmo em qualquer direção, como será verificado no decorrer deste capítulo.

9.1 Construção de uma *função de espaçamento*

Uma *função de espaçamento* pode ser obtida de diferentes formas. Em simulações numéricas, por exemplo, estimadores de erros *a priori* ou *a posteriori* baseados em uma simulação inicial podem ser utilizadas para definir uma *função de espaçamento* para uma simulação em particular. Em aplicações envolvendo malhas superficiais, parece razoável que a *função de espaçamento* seja definida por meio das principais curvaturas da superfície em cada ponto do domínio. Dessa forma, uma maior densidade de pontos é requerida em regiões de maior curvatura ao passo que uma menor densidade em regiões de menor curvatura. Nesta seção é descrita uma abordagem para se definir uma *função de espaçamento* anisotrópica a partir de uma superfície discretizada.

9.1.1 Os parâmetros S_{min} e S_{max}

O processo de construção de uma *função de espaçamento* é guiado por dois parâmetros fornecidos pelo usuário, a saber: S_{min} e S_{max} . Estes valores são, respectivamente, os limitantes inferior e superior para os raios dos elipsóides definidos por H . Esses limitantes servem para evitar que a *função de espaçamento* construída requeira arestas muito grandes em regiões planas ou demasiadamente pequenas sobre detalhes muito finos da superfície. Portanto, os raios

dos elipsóides nunca devem ser menores que S_{min} nem maiores que S_{max} . Observe que estes valores fornecem uma maneira indireta de controlar o comprimento das arestas da triangulação após o remalhamento. Para isso, os valores S_{min} e S_{max} limitam os autovalores ξ_i , $i = 1, 2, 3$, dos tensores métricos de H (ver Equação (2.3)) da seguinte forma

$$\frac{1}{S_{max}^2} \leq \xi_i \leq \frac{1}{S_{min}^2}. \quad (9.1)$$

O papel de S_{min} e S_{max} ficará evidente no decorrer deste capítulo.

9.1.2 Estimativa de tensores métricos nos vértices de uma malha

Tem-se como objetivo estimar um tensor métrico para cada vértice de uma malha denominada G . Para definir um tensor, no entanto, é necessário que se conheça as curvaturas principais e as direções principais em cada vértice da malha. Existem vários métodos presentes na literatura para este propósito [29, 71, 99]. Neste trabalho foi empregada a estratégia de se aproximar a vizinhança de um dado vértice da malha por uma quádrlica [44, 40], e então calcular as curvaturas a partir desta.

Seja v um vértice de G para o qual pretende-se atribuir um tensor métrico M_v . Primeiramente, seleciona-se um conjunto de pontos da malha na vizinhança de v , seja V_v este conjunto. A Seção 9.1.3 descreve como este conjunto pode ser obtido. Os pontos V_v são aproximados por uma quádrlica pelo método dos mínimos quadrados [98]. Para isso, deve-se determinar um sistema de coordenadas local, denotado por $\mathfrak{S}$, centrado em v , sobre o qual a quádrlica será definida.

Para definir $\mathfrak{S}$ é necessário que primeiro seja estimado o vetor normal à superfície em v . Este vetor será denotado por $\vec{n}_v$, e pode ser aproximado pela seguinte equação:

$$\vec{n}_v = \frac{\sum_{t \in \star_v} \vec{n}_t A(t)}{\sum_{t \in \star_v} A(t)}, \quad (9.2)$$

em que $\vec{n}_t$ é o vetor normal ao triângulo t incidente em v e $A(t)$ a sua área, conforme descrito em [67].

Seja π_v o plano tangente a v , isto é, ortogonal a $\vec{n}_v$. Sejam $\vec{\chi}_v$ e $\vec{\gamma}_v$ dois vetores unitários ortogonais entre si e paralelos a π_v tal que $\vec{n}_v = (\vec{\chi}_v \times \vec{\gamma}_v)$. Assim, o sistema de coordenadas local pode ser representado pela quádrupla $\mathfrak{S}(v, \vec{\chi}_v, \vec{\gamma}_v, \vec{n}_v)$, em que v é a origem. O sistema de coordenadas está ilustrado na Figura 9.1. A notação (χ, γ, ζ) são as coordenadas do sistema local $\mathfrak{S}$ e (x, y, z) são as coordenadas do sistema global.

Considere a quádrlica que passe por v (a origem de $\mathfrak{S}$) e um dado ponto (χ, γ, ζ) pertencente à superfície que será aproximada. A quádrlica pode ser representada pela seguinte equação:

Figura 9.1: O sistema de coordenadas local $\mathfrak{S}(v, \vec{\chi}_v, \vec{\gamma}_v, \vec{n}_v)$ definido a partir do vértice v para o cálculo da quádrlica.

$$a\chi^2 + b\chi\gamma + c\gamma^2 - \zeta = 0, \quad (9.3)$$

na qual a , b e c são coeficientes a serem determinados de tal forma que a quádrlica aproxime adequadamente os vértices $v_i \in V_v$. Sendo assim, obtêm-se um sistema de m equações lineares, com $m = \#(V_v)$. Na forma matricial, o sistema é dado por:

$$\begin{pmatrix} \chi_1^2 & \chi_1\gamma_1 & \gamma_1^2 \\ \chi_2^2 & \chi_2\gamma_2 & \gamma_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_m^2 & \chi_m\gamma_m & \gamma_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

na qual $(\chi_i, \gamma_i, \zeta_i)$, com $i = 1, \dots, m$, são as coordenadas do vértice $v_i \in V_v$ convertidas para $\mathfrak{S}$.

Geralmente, o sistema 9.4 possui mais equações do que incógnitas, isto é, $m > 3$. Neste caso, foi utilizado o método dos mínimos quadrados para aproximá-lo, e, portanto, o sistema original na forma $AX = B$ é aproximado por $A^t A \tilde{X} = A^t B$, sendo $\tilde{X}$ a solução por mínimos quadrados.

Uma vez que os coeficientes a , b e c foram encontrados, as curvaturas e direções principais são calculadas a partir da quádrlica.

Estimativa das curvaturas principais

A geometria diferencial clássica [96] fornece ferramentas para se computar as curvaturas e direções principais da quádrlica em questão. Para isso, considere que a superfície quádrlica, denotada por $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, seja descrita da seguinte forma:

$$F(\chi, \gamma) = (x(\chi, \gamma), y(\chi, \gamma), z(\chi, \gamma)), \quad (9.5)$$

em que $(\chi, \gamma) \in U$ e $x(\chi, \gamma) = \chi$, $y(\chi, \gamma) = \gamma$, e $z(\chi, \gamma) = a\chi^2 + b\chi\gamma + c\gamma^2$.

Considere $\vec{F}_\chi(\chi, \gamma)$ e $\vec{F}_\gamma(\chi, \gamma)$ vetores tangentes à quádrlica no ponto $q = (\chi, \gamma) \in \pi_v$ dados pelas seguintes expressões:

$$\vec{F}_\chi(\chi, \gamma) = \left(\frac{\partial x(\chi, \gamma)}{\partial \chi}, \frac{\partial y(\chi, \gamma)}{\partial \chi}, \frac{\partial z(\chi, \gamma)}{\partial \chi} \right) = (1, 0, 2a\chi + b\gamma)^2, \quad (9.6)$$

$$\vec{F}_\gamma(\chi, \gamma) = \left(\frac{\partial x(\chi, \gamma)}{\partial \gamma}, \frac{\partial y(\chi, \gamma)}{\partial \gamma}, \frac{\partial z(\chi, \gamma)}{\partial \gamma} \right) = (0, 1, b\chi + 2c\gamma)^2. \quad (9.7)$$

A primeira e a segunda forma quadrática de uma superfície de classe C^2 ou superior (note que a quádrlica satisfaz este requisito), para todo ponto $q = (\chi, \gamma) \in U$, são dadas, respectivamente, por:

$$\Phi_1(\vec{w}_q) = E(\chi, \gamma)\alpha^2 + F(\chi, \gamma)\alpha\beta + G(\chi, \gamma)\beta^2 \quad (9.8)$$

e

$$\Phi_2(\vec{w}_q) = e(\chi, \gamma)\alpha^2 + f(\chi, \gamma)\alpha\beta + g(\chi, \gamma)\beta^2 \quad (9.9)$$

$\forall \vec{w}_q = \alpha \vec{F}_\chi(\chi, \gamma) + \beta \vec{F}_\gamma(\chi, \gamma)$, onde $E(\chi, \gamma)$, $F(\chi, \gamma)$, $G(\chi, \gamma)$ são os coeficientes da primeira forma quadrática, que, no caso da superfície quádrlica F , são dados por

$$E(\chi, \gamma) = \vec{F}_\chi(\chi, \gamma) \cdot \vec{F}_\chi(\chi, \gamma) = 1 + (2a\chi + b\gamma), \quad (9.10)$$

$$F(\chi, \gamma) = \vec{F}_\chi(\chi, \gamma) \cdot \vec{F}_\gamma(\chi, \gamma) = (2a\chi + b\gamma)(b\chi + 2c\gamma), \quad (9.11)$$

$$G(\chi, \gamma) = \vec{F}_\gamma(\chi, \gamma) \cdot \vec{F}_\gamma(\chi, \gamma) = 1 + (b\chi + 2c\gamma). \quad (9.12)$$

E, $e(\chi, \gamma)$, $f(\chi, \gamma)$, $g(\chi, \gamma)$ são os coeficientes da segunda forma quadrática dados por

$$e(\chi, \gamma) = \vec{F}_{\chi\chi}(\chi, \gamma) \cdot (0, 0, 1) = 2a, \quad (9.13)$$

$$f(\chi, \gamma) = \vec{F}_{\chi\gamma}(\chi, \gamma) \cdot (0, 0, 1) = b, \quad (9.14)$$

$$g(\chi, \gamma) = \vec{F}_{\gamma\gamma}(\chi, \gamma) \cdot (0, 0, 1) = 2c, \quad (9.15)$$

com

$$\vec{F}_{\chi\chi}(\chi, \gamma) = \left(\frac{\partial^2 x(\chi, \gamma)}{\partial \chi^2}, \frac{\partial^2 y(\chi, \gamma)}{\partial \chi^2}, \frac{\partial^2 z(\chi, \gamma)}{\partial \chi^2} \right), \quad (9.16)$$

$$\vec{F}_{\chi\gamma}(\chi, \gamma) = \left(\frac{\partial^2 x(\chi, \gamma)}{\partial \chi \partial \gamma}, \frac{\partial^2 y(\chi, \gamma)}{\partial \chi \partial \gamma}, \frac{\partial^2 z(\chi, \gamma)}{\partial \chi \partial \gamma} \right), \quad (9.17)$$

$$\vec{F}_{\gamma\gamma}(\chi, \gamma) = \left(\frac{\partial^2 x(\chi, \gamma)}{\partial \gamma^2}, \frac{\partial^2 y(\chi, \gamma)}{\partial \gamma^2}, \frac{\partial^2 z(\chi, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right). \quad (9.18)$$

Sejam κ_1 e κ_2 as curvaturas principais da quádrlica definida em um ponto $q \in \pi_v$. Sabe-se, pela geometria diferencial clássica, que a curvatura média $\kappa_m(\chi, \gamma) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ e a curvatura de Gauss $\kappa_g(\chi, \gamma) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ em $F(\chi, \gamma)$, com $q = (\chi, \gamma) \in \pi_v$, podem ser calculadas com base nos coeficientes das formas quadráticas por:

$$\kappa_m(\chi, \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{e(\chi, \gamma)G(\chi, \gamma) - 2f(\chi, \gamma)F(\chi, \gamma) + E(\chi, \gamma)g(\chi, \gamma)}{E(\chi, \gamma)G(\chi, \gamma) - F(\chi, \gamma)^2} \right), \quad (9.19)$$

$$\kappa_g(\chi, \gamma) = \frac{e(\chi, \gamma)g(\chi, \gamma) - f(\chi, \gamma)^2}{E(\chi, \gamma)G(\chi, \gamma) - F(\chi, \gamma)^2}. \quad (9.20)$$

Mais precisamente, deve-se encontrar os valores de κ_1 e κ_2 para o ponto de origem do sistema de coordenadas local $\mathfrak{S}$. Lembre-se que v é essa origem, ao qual será atribuído o tensor métrico M_v . Sendo assim, considere $q = q_o = (0, 0)$ na Equação (9.9). Aplicando a Equação (9.19) e a Equação (9.20) no ponto de interesse q_o , obtêm-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 &= 4ac - b^2, \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 &= 2(a + c), \end{cases} \quad (9.21)$$

em que as curvaturas κ_1 e κ_2 são raízes de uma equação do segundo grau e dadas por

$$\kappa_1 = \frac{2(a + c) + \sqrt{(2(a + c))^2 - 4(4ac - b^2)}}{2} \quad (9.22)$$

e

$$\kappa_2 = \frac{2(a + c) - \sqrt{(2(a + c))^2 - 4(4ac - b^2)}}{2}. \quad (9.23)$$

Estimativa das direções principais de curvatura

A partir dos valores obtidos pelos procedimentos descritos acima, é possível estimar as direções principais $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ associadas respectivamente com as curvaturas κ_1 e κ_2 .

A geometria diferencial clássica afirma que, para um ponto $q = (\chi, \gamma) \in \pi_v$, o vetor $\vec{d}_i = \alpha \vec{F}_\chi(\chi, \gamma) + \beta \vec{F}_\gamma(\chi, \gamma)$ é uma direção principal relacionada com a curvatura principal κ_i , $i \in 1, 2$, se, e somente se, os valores α e β satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (e(\chi, \gamma) - \kappa_i E(\chi, \gamma))\alpha + (f(\chi, \gamma) - \kappa_i F(\chi, \gamma))\beta = 0, \\ (f(\chi, \gamma) - \kappa_i F(\chi, \gamma))\alpha + (g(\chi, \gamma) - \kappa_i G(\chi, \gamma))\beta = 0. \end{cases} \quad (9.24)$$

Para o ponto de origem $q_o = (0, 0)$ da quádrlica, têm-se que

$$\begin{cases} (2a - \kappa_i)\alpha + b\beta = 0, \\ b\alpha + (2c - \kappa_i)\beta = 0, \end{cases} \quad (9.25)$$

que é um sistema homogêneo. Utilizando-se, por exemplo, a primeira equação do sistema 9.25, tem-se que $\vec{d}_i = (\alpha, \frac{(\kappa_i - 2a)\alpha}{b})$, com $i \in 1, 2$.

Uma vez que as curvaturas e direções principais para o vértice base v foram calculadas, resta apenas montar o tensor métrico. Para isso, considere $\kappa_{max} = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$ e sua direção principal correspondente como $\vec{d}_{max}$, e, semelhantemente, $\kappa_{min} = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ com direção $\vec{d}_{min}$. O tensor métrico é montado de acordo com a Equação (2.3), sendo que $\xi_1 = \kappa_{max}$, $\xi_2 = \kappa_{min}$, $\xi_3 = \kappa_{max}$, $\vec{v}_1 = \vec{d}_{max}$, $\vec{v}_2 = \vec{d}_{min}$ e $\vec{v}_3 = \vec{n}_v$.

Estimativa de tensores métricos sobre *linhas-de-controle*

A forma de estimar tensores métricos para os vértices de uma malha como apresentado anteriormente é utilizada apenas para vértices pertencentes às *superfícies-de-controle* ou aos *pontas-de-controle*. Para vértices pertencentes às *linhas-de-controle* ou em *cantos-de-controle*, os tensores são estimados via interpolação.

Existem casos, no entanto, em que um vértice $v_i \in C_L \cup C_C$ não possui qualquer vértice pertencente a uma *superfície-de-controle*. Nestes casos, v_i recebe um tensor métrico isotrópico onde

$$\xi_i = \left(\frac{1}{S_{min}^2} + \frac{1}{S_{max}^2} \right) \frac{1}{2} = \left(\frac{S_{min} + S_{max}}{2S_{min}S_{max}} \right)^2 \quad (9.26)$$

para $i = 1, 2, 3$, onde S_{min} e S_{max} são os parâmetros descritos na Seção 9.1.1.

9.1.3 O conjunto de vértices V_v

O processo de construção da quádrlica descrito na Seção 9.1.2 depende da escolha apropriada de um conjunto de vértices V_v na vizinhança do vértice sobre o qual se está calculando as principais curvaturas. Nesta seção é apresentado como são selecionados os vértices para formar o conjunto V_v .

Considere um disco ω_v centrado em v sobre a superfície, conforme mostrado na Figura 9.2. Um vértice v_j está contido no disco se o comprimento do caminho geodésico¹ de v até v_j for menor que o raio do disco. O raio do disco ω_v é calculado como o dobro da média dos comprimentos das arestas incidentes em v .

Nem todos os vértices contidos no disco ω_v devem ser incluídos em V_v . Um vértice $v_j \in G$ é inserido em V_v se :

¹O caminho geodésico é o menor caminho entre dois pontos tomado sobre a superfície. Neste trabalho, ele pode ser computado de forma grosseira.

Figura 9.2: Seleção dos vértices V_v .

- v_j e v pertencem à mesma *superfície-de-controle* e o ângulo formado entre o plano π_v e o segmento de reta $\overline{v_jv}$ for menor que 25° (veja Figura 9.2), ou
- v_j é um vértice incidente em v .

9.2 Ajuste da função de espaçamento

Uma vez que um tensor métrico tenha sido associado com cada vértice de G , são realizadas algumas operações para ajustar melhor os tamanhos requeridos pelos tensores.

O primeiro ajuste realiza uma escala sobre os tensores a fim de encolher seus respectivos elipsóides. Esta operação de escala é responsável por aumentar o número de triângulos na malha resultante.

Seja M um tensor métrico tridimensional com autovalores ξ_i e autovetores $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, 3$. O tensor M escalado por um fator ϵ_s é dado por

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_s \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_s \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}^t. \quad (9.27)$$

Note que o processo descrito na Seção 9.1.2 cria tensores métricos sobre *superfícies-de-controle* definindo elipsóides com raios iguais aos raios de curvatura. Porém, se o processo de remalhamento gerar arestas com comprimentos iguais aos raios de curvatura, a malha tende a ser muito grosseira. Para ilustrar este fato considere um exemplo unidimensional onde se queira aproximar uma circunferência com arestas. Se o tensor métrico não sofrer uma escala de redução, então a malha gerada possuirá apenas seis arestas, o que é claramente uma aproximação grosseira do modelo.

Figura 9.3: Efeito do parâmetro n_e para os valores 6, 12 e 24.

Para contornar este problema, uma escala é aplicada sobre todos os tensores métricos de G . O fator de escala ϵ_s é dado pela seguinte fórmula:

$$\epsilon_s = \frac{1}{2\text{sen}(\pi/n_e)}, \quad (9.28)$$

onde $n_e \geq 6$ é um parâmetro indicando quantas arestas devem ser utilizadas para amostrar uma circunferência. A Figura 9.3 apresenta o efeito de diferentes valores de n_e na aproximação. Note que a escala é adimensional, o que significa que ela é aplicada de igual modo independente do tamanho do elipsóide. Geralmente, $n_e = 24$ é suficiente para uma boa amostragem.

Após a escala, é realizada uma operação denominada *enquadramento*. Esta operação tem a função de ajustar explicitamente os autovalores dos tensores métricos a fim de satisfazer a restrição imposta pela Equação (9.1). Para isso, os raios de elipsóides com comprimentos maiores que S_{max} são reduzidos para S_{max} (ver Seção 9.1.1). Este é um caso não raro que ocorre em regiões planas da superfície. Semelhantemente, os raios com comprimentos menores que S_{min} são aumentados para S_{min} . Este é o caso de vértices descrevendo detalhes muito finos do modelo, muitas vezes é desejável fazer uma aproximação de superfície mais grosseira em tais regiões para reduzir o número de elementos da malha final.

A Figura 9.4 ilustra a criação de uma função tamanho sobre a superfície de um toro (Figura 9.4(b)). A fim de prover uma melhor forma para visualização da *função de espaçamento*, apenas os elipsóides de um subconjunto de vértices são mostrados. A Figura 9.4(c) (notoriamente confusa) mostra os elipsóides extraídos diretamente das quádricas. A Figura 9.4(a) mostra o efeito da etapa de *escala* ($\epsilon_s = 25$). Finalmente, a Figura 9.4(d) mostra o efeito da operação *enquadramento*.

As etapas descritas acima são capazes de produzir *funções de espaçamento* suaves desde que a superfície seja também suave. No entanto, em modelos mais realistas tais etapas não são suficientes para garantir *funções de espaçamento* suaves. Como a suavidade é de fundamental importância para produzir malhas de boa qualidade, uma etapa final de suavização é aplicada, como descrito na seção seguinte.

Figura 9.4: Construção de uma *função de espaçamento* sobre a superfície de um toro.

9.2.1 Suavização de *funções de espaçamento*

Como argumentado previamente, sabe-se que variações bruscas na *função de espaçamento* geralmente degradam a qualidade da malha resultante. Uma das formas de reduzir o impacto das *funções de espaçamento* na malha resultante é por meio de suavização. Em espaços isotrópicos, alguns métodos foram propostos, como o de Löhner [60, 59], o de Borouchaki et al. [12] e o de Owen e Saigal [66]. Estes métodos podem ser facilmente adaptados para atuarem em domínios anisotrópicos. De fato, Borouchaki et al. descrevem tal extensão para o método proposto por eles. No entanto, esta adaptação suaviza apenas os raios dos elipsóides (autovalores) deixando intocadas suas principais direções (autovetores). Ou seja, elas tendem a não manter o nível desejado de anisotropia. Li et al. [55] propuseram um método capaz de suavizar *funções de espaçamento* anisotrópicas tanto em termos de autovalores quanto autovetores.

Nesta seção são descritos dois métodos de suavização: o de Borouchaki et al. [12] e o de Li et al. [55]. Em seguida é feita uma comparação entre eles.

H-Correction [12]

Borouchaki et al. propuseram um método para controlar a variação de tamanhos em *funções de espaçamento*. O método é descrito inicialmente para o caso isotrópico e então é generalizado para o caso anisotrópico.

Considere uma *função de espaçamento*, H , definida por meio de uma malha de fundo G em um domínio Ω . Para realizar a suavização, é necessário determinar localmente a variação de tamanhos em Ω . Os autores oferecem duas formas diferentes de medir tal variação. A primeira, conhecida como *H-variation*, mede o gradiente de H . A segunda, chamada *H-Shock*, considera a razão entre os comprimentos (medidos no espaço euclidiano) de duas arestas adjacentes. O procedimento de suavização *H-Correction* consiste em reduzir consistentemente as métricas definidas em H a fim de limitar a variação, quer medida via *H-variation* ou via *H-shock*, a um valor fornecido pelo usuário.

Considere o caso isotrópico, onde o tamanho desejado em um ponto P é dado por $h(P)$. O comprimento de uma aresta e_{pq} da malha de fundo G pode ser calculada por

$$\ell_{PQ} = \|\vec{e}_{pq}\| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt, \quad (9.29)$$

onde $h(t)$ é uma função de interpolação monotônica tal que $h(0) = h(P)$ e $h(1) = h(Q)$.

O *H-variation* relacionado com a aresta e_{pq} , denotado por $Hv(e_{pq})$, é dado por

$$Hv(e_{pq}) = \frac{h(Q) - h(P)}{\|\vec{e}_{pq}\|}. \quad (9.30)$$

O *H-shock* relacionado com a aresta e_{pq} , denotado por $Hs(e_{pq})$, é dado por

$$Hs(e_{pq}) = \max \left(\frac{h(Q)}{h(P)}, \frac{h(P)}{h(Q)} \right)^{1/\ell_{PQ}}. \quad (9.31)$$

Os valores Hv e Hs quando referidos a vértices são dados como o maior valor dentre todas as arestas adjacentes àquele vértice, ou seja:

$$Hv(v_p) = \max_{v_q \in V(\star_{v_p})} Hv(e_{pq}) \quad (9.32)$$

e

$$Hs(v_p) = \max_{v_q \in V(\star_{v_p})} Hs(e_{pq}). \quad (9.33)$$

Por definição, o *H-variation* e o *H-shock* de uma *função de espaçamento* são dados pelo valor máximo das medidas $Hv(v_p)$ e $Hs(v_p)$, respectivamente, considerando todos os vértices.

A extensão das métricas para o caso geral anisotrópico é simples. O valor de h é calculado considerando uma dada direção, no caso, a direção da aresta em questão $\vec{e}_{pq}$. Ou seja, para a aresta e_{pq} , $h(P) = S_p(\vec{e}_{pq})$ e $h(Q) = S_q(\vec{e}_{pq})$. Além disso, o comprimento ℓ_{PQ} da Equação (9.29) é substituído pela Equação (2.9).

Os autores fornecem duas variações para o procedimento de suavização *H-correction*, dependendo de qual medida de variação deve ser empregada, se *H-variation* ou se *H-shock*.

Considere primeiro a versão baseada no *H-variation*, denotada por *Hv-correction*. Neste caso, quando uma métrica é reduzida, seu elipsóide correspondente pode ter seu formato alterado. A intenção é limitar o *H-variation* ao longo de uma aresta e_{pq} a um valor HV_{lim} , isto é $Hv(e_{pq}) \leq HV_{lim}$. Assim, no caso isotrópico, as novas especificações de tamanho nos vértices v_p e v_q são dados por:

$$h(P) = \min(h(P), h(Q) + HV_{lim}\|\vec{e}_{pq}\|), \quad (9.34)$$

$$h(Q) = \min(h(Q), h(P) + HV_{lim}\|\vec{e}_{pq}\|). \quad (9.35)$$

No caso anisotrópico, o operador $\min$ é substituído pelo operador interseção entre tensores métricos, conforme descrito em [13], portanto:

$$M_p = M_p \cap M_q(1 + HV_{lim}d_{pq}^p)^{-2}, \quad (9.36)$$

$$M_q = M_q \cap M_p(1 + HV_{lim}d_{pq}^q)^{-2}. \quad (9.37)$$

Note que a correção ao longo de uma aresta não leva em consideração a interpolação da métrica ao longo da aresta. O procedimento *Hv-correction* está descrito no Algoritmo 4.

Algorithm 4 Hv-correction

entrada:

- G : malha de fundo.
- H : função de espaçamento definida em G .
- HV_{lim} : limitante para o H -variation.

início:

enquanto a métrica em um vertice for modificada **faça**

para cada aresta e_{pq} de G **faça**

Substitua M_p por $M_p \cap M_q(1 + HV_{lim}d_{pq}^p)^{-2}$

Substitua M_q por $M_q \cap M_p(1 + HV_{lim}d_{pq}^q)^{-2}$

fim_para

fim_enquanto

fim

Considere agora a versão do *H-correction* baseada *H-shock*, denotada por *Hs-correction*. Neste tipo de correção os formatos dos elipsóides são preservados. Suponha que $h(P) \leq h(Q)$ para uma dada areta e_{pq} . Neste caso, o tamanho requerido em v_q é que deve ser reduzido tal que o valor de *H-shock* seja limitado por um valor definido pelo usuário HS_{lim} . Seja $h'(Q)$ o novo valor de $h(Q)$ após a redução da métrica. Para facilitar os cálculos, os autores propõem uma solução aproximada para $h'(Q)$.

Como $h'(Q) \leq h(Q)$, tem-se que $\ell_{PQ} < \ell'_{PQ}$, onde ℓ'_{PQ} é a distância de v_p a v_q levando em consideração $h'(Q)$. Seja $HS'(e_{pq})$ o novo *H-shock* considerando $h'(Q)$. Tem-se que:

$$HS'(e_{pq}) = \left(\frac{h(P)}{h'(Q)} \right)^{1/\ell'_{PQ}} \leq \left(\frac{h(P)}{h'(Q)} \right)^{1/\ell_{PQ}} = HS(e_{pq})\eta^{1/\ell_{PQ}}, \quad (9.38)$$

onde $\eta = h'(Q)/h(Q)$. Para se ter $HS'(e_{pq}) \leq HS_{lim}$, é suficiente satisfazer a inequação

$$HS(e_{pq})\eta^{1/\ell_{PQ}} \leq HS_{lim}, \quad (9.39)$$

conseqüentemente

$$\eta \leq \left(\frac{HS_{lim}}{HS(e_{pq})} \right)^{\ell_{PQ}} \quad (9.40)$$

Em síntese, supondo que $h'(Q) \leq h(Q)$, o valor de $h(Q)$ deve ser reduzido por um fator η menor ou igual que $(HS_{lim}/HS(e_{pq}))^{\ell_{PQ}}$, para que o *H-shock* associado com e_{pq} seja menor que HS_{lim} . Note que η não é um valor ótimo.

No caso anisotrópico, a verificação da aresta e_{pq} também é simples. Basta assumir que $h(P) = S_p(\vec{e}_{pq})$ e $h(Q) = S_q(\vec{e}_{pq})$ e reduzir M_q para M_q/η^2 . O Algoritmo 5 descreve como aplicar iterativamente o *Hs-correction* para suavizar uma *função de espalhamento*.

Algorithm 5 Hs-correction

entrada:

G : malha de fundo.
 H : *função de espalhamento* definida sobre os vértices de G .
 HS_{lim} : limitante para o *H-shock*.

início:
enquanto o *H-shock* ao longo de alguma aresta for $\geq HS_{lim}$ **faça**
para cada aresta e_{pq} de G **faça**
se $HS(e_{pq}) \geq HS_{lim}$ **faça**

Compute $\eta = \left(\frac{HS_{lim}}{HS(e_{pq})} \right)^{\ell_{PQ}}$
se $S_q(\vec{e}_{pq}) \geq S_p(\vec{e}_{pq})$ **faça**

Substitua M_q por $\frac{M_q}{\eta^2}$
senão

Substitua M_p por $\frac{M_p}{\eta^2}$
fim_se
fim_se
fim_para
fim_enquanto
fim

O método de Li et. al [55]

Li et al. propuseram um procedimento para suavizar *funções de espalhamento* anisotrópicas. Diferentemente do método descrito na seção anterior, onde apenas os autovalores são alterados, a proposta de Li et al. também modifica os autovetores dos tensores. A descrição do método de suavização dado a seguir corresponde ao método implementado neste trabalho, e possui pequenas diferenças com relação ao método original proposto pelos autores.

O método utiliza uma métrica capaz de quantificar a variação entre dois tensores vizinhos. Sejam v_p e v_q dois vértices vizinhos, sobre os quais estão definidos os tensores métricos M_p e M_q , respectivamente. Seja $\vec{u}_i$ um vetor direção unitário qualquer associado com M_i . A métrica $\gamma_L(\vec{u}_p, \vec{u}_q)$ que quantifica a variação entre as métricas M_p e M_q considerando as direções $\vec{u}_p$ e $\vec{u}_q$, respectivamente, é dada por:

$$\gamma_L(\vec{u}_p, \vec{u}_q) = e^{\frac{|S_p(\vec{u}_p) - S_q(\vec{u}_q)|}{\|\vec{e}_{pq}\|}}, \quad (9.41)$$

onde $S_i(\vec{u}_i)$ é dado pela Equação (2.15). A idéia é então modificar os tensores métricos de

tal forma que a métrica γ_L entre tensores vizinhos seja sempre menor que um dado valor γ_{L_0} fornecido pelo usuário.

Considere os seguintes rótulos para os tensores: (i) *tensor-esfera*, onde os três autovalores são iguais; (ii) *tensor-esferóide*, onde apenas dois autovalores são idênticos; e (iii) *tensor-elipsóide*, onde todos os autovalores diferem entre si.

Seja $R(M_w)$ a razão de aspecto do tensor métrico M_w dada por:

$$R(M_w) = \sqrt{\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}}}, \quad (9.42)$$

onde ξ_{max} e ξ_{min} são respectivamente o maior e o menor autovalor de M_w .

O processo de suavização procura então reduzir as diferenças entre tensores métricos adequadamente de tal forma a satisfazer um limitante estabelecido pelo usuário. Neste caso, porém, uma métrica M_w pode sofrer alterações tanto nas principais direções (autovetores $\vec{v}_i$, veja Equação (2.3)) quanto nos tamanhos requeridos $S_w(\vec{v}_i)$ (que estão intimamente relacionados com os autovalores). O processo de suavização segue as seguintes diretrizes:

- Se dois tensores apresentarem diferentes tamanhos, então o maior é reduzido.
- Se para dois tensores vizinhos M_p e M_q tem-se que $R(M_p) > R(M_q)$, então as direções de M_p são preservadas e as de M_q podem ser alteradas.
- Se dois tensores com alto R estiverem próximos, todas as principais direções são mantidas.

O par de vetores direção ($\vec{u}_p, \vec{u}_q$) da Equação (9.41) é formado por autovetores. Para se comparar duas métricas, nem sempre é necessário fazer a correspondência de cada autovetor de uma métrica com outro autovetor da outra métrica. A seleção dos pares de autovetores se dá pela verificação do tipo dos tensores métricos envolvidos. Suponha que $R(M_p) > R(M_q)$, três casos são possíveis: (i) se M_p é qualquer e M_q é um tensor-esfera, então não é necessário estabelecer qualquer par; (ii) se M_p e M_q são tensores-esferóides, então se encontra apenas um par, o das direções polares²; e (iii) se M_p é um tensor-elipsóide e M_q é qualquer, então deve-se encontrar os três pares. Neste último caso, os pares são feitos minimizando-se os maiores ângulos entre vetores.

Suponha $R(M_p) > R(M_q)$. Considere o fator α , que é calculado pela seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{(R(M_q) - 1)R(M_p)}{(R(M_p) - 1)R(M_q)}, \quad (9.43)$$

²A direção polar de um tensor-esferóide corresponde ao autovetor associado com o autovalor diferenciado.

onde $0 \leq \alpha \leq 1$, com $\alpha = 0$ se algum dos tensores for isotrópico (tensor-esfera) e $\alpha = 1$ se os dois tensores tiverem a mesma razão de aspecto.

O fator α é utilizado na fórmula a seguir que ajusta um dos autovetores do tensor menos anisotrópico, no caso M_q ,

$$\vec{\nu}_i^q|_{new} = (1 - \alpha)\vec{\nu}_i^p + \alpha\vec{\nu}_j^q, \quad (9.44)$$

onde $\vec{\nu}_j^q$ é o autovetor de M_q que deve ser ajustado, pois assumimos que $R(M_p) > R(M_q)$; $\vec{\nu}_i^q|_{new}$ é a nova direção de $\vec{\nu}_j^q$; e $\vec{\nu}_i^p$ é o autovetor de M_p fazendo par com $\vec{\nu}_j^q$.

O ajuste de dois tensores métricos M_q e M_p vizinhos é realizado pelo seguinte procedimento. Primeiro encontra-se os pares adequados de autovetores, se existirem. Em seguida, para cada par $(\vec{\nu}_i^p, \vec{\nu}_j^q)$ tenta-se fazer o ajuste direcional aplicando-se a Equação (9.44). Finalmente, ajusta-se os autovalores, o que se dá em três passos:

1. Calcule $S_p(\vec{\nu}_i^p)$ e $S_q(\vec{\nu}_j^q)$.
2. Compute a métrica $\gamma_L(\vec{\nu}_i^p, \vec{\nu}_j^q)$ segundo a Equação (9.43).
3. Se $\gamma_L(\vec{\nu}_i^p, \vec{\nu}_j^q) < \gamma_{L_0}$ então não é necessário fazer a redução; caso contrário, a redução é realizada nos seguintes termos: se $S_q(\vec{\nu}_j^q) > S_p(\vec{\nu}_i^p)$ então reduza $S_q(\vec{\nu}_j^q)$; senão, reduza $S_p(\vec{\nu}_i^p)$.

Suponha que M_q tenha que ter algum autovalor alterado. Seja $S_q(\vec{\nu}_j^q)|_{new}$ o tamanho reduzido relativo a $S_q(\vec{\nu}_j^q)$ que se deseja encontrar. Para que a redução estabeleça $\gamma_L(\vec{\nu}_i^p, \vec{\nu}_j^q) = \gamma_{L_0}$, é necessário que:

$$\gamma_{L_0} = e^{\frac{|S_p(\vec{u}_p) - S_q(\vec{\nu}_j^q)|_{new}|}{\|\vec{e}_{pq}\|}}. \quad (9.45)$$

Portanto, o novo tamanho reduzido é dado por:

$$S_q(\vec{\nu}_j^q)|_{new} = \|\vec{e}_{pq}\| \ln(\gamma_{L_0}) + S_p(\vec{u}_p). \quad (9.46)$$

Após processar todos os pares, os tensores são montados novamente na forma matricial conforme a Equação (2.3).

Uma comparação visual dos três métodos de suavização descritos anteriormente pode ser feita analisando-se a Figura 9.5. Para simplificar a visualização, são apresentados os tensores métricos de apenas alguns vértices da malha, os quais são escolhidos aleatoriamente. A Figura

9.5(a) apresenta a *função de espaçamento* inicial, a qual foi submetida a nove processos de suavização independentes. As Figuras 9.5(b), 9.5(e) e 9.5(h) mostram os efeitos após a aplicação de 5 iterações do método *H-variation* com os parâmetros $HV_{lim} = 0.25$, $HV_{lim} = 0.1$ e $HV_{lim} = 0.025$, respectivamente. Note que quanto menor o valor de HV_{lim} , mais isotrópicos se tornam os tensores. Os efeitos de se aplicar 5 iterações do método *H-shock* estão apresentados nas Figuras 9.5(c), 9.5(f) e 9.5(i), sob os parâmetros $HS_{lim} = 1.25$, $HS_{lim} = 1.1$ e $HS_{lim} = 1.025$ respectivamente. Note que os tensores são escalados uniformemente durante a suavização. É possível notar também que, comparado com os outros métodos, o *H-Shock* é que o realiza a redução mais acentuada dos raios dos elipsóides (veja a Figura 9.5(i)), o que conseqüentemente requer um número mais elevado de elementos após o remalhamento. Finalmente, as Figuras 9.5(d), 9.5(g) e 9.5(j) mostram os resultados após se aplicar a adaptação do método de Li et al. sob os parâmetros $\gamma_{L_0} = 1.25$, $\gamma_{L_0} = 1.1$ e $\gamma_{L_0} = 1.025$. Note que o método não apenas reduz os raios dos elipsóides, mas também altera a forma dos elipsóides. Por exemplo, o tensor-esfera presente na Figura 9.5(a) se torna um tensor-esferóide após a suavização, o que não acontece nos outros métodos.

Figura 9.5: Comparação entre métodos de suavização de *funções de espaçamento*.

Capítulo 10

O processo de remalhamento

Neste capítulo será descrito o funcionamento do *ANTS*, o método proposto neste trabalho para remalhamento de superfícies.

O método recebe como entrada uma triangulação superficial T . Logo no início do procedimento é feita uma cópia exata de T , denominada G , que servirá como aparato geométrico para que o algoritmo mantenha a forma superficial da malha sendo processada. A malha G permanece inalterada durante todo o processo, ao passo que a malha T sofre constantes transformações. O símbolo T_{in} será utilizado para denominar a malha T no início do processo, ou seja, a malha de entrada antes de qualquer alteração. Similarmente, T_{out} será utilizado para denominar a malha T final, isto é, após ter sido executado todo o processo de remalhamento.

O método ANTS constitui-se dos seguintes passos gerais:

1. Identificar as *estruturas-de-controle* em T_{in} .
2. Criar G como uma cópia de T_{in} .
3. Identificar as *estruturas-de-controle* em G .
4. Definir uma *size-function* sobre G .
5. Remalhar T_{in} até gerar T_{out} .

Os passos 1 e 3 foram descritos na Seção 8. A partir do passo 2, duas malhas estão presentes no processo, isto é, T e G . O passo 4 define tensores métricos sobre os vértices de G , como descrito no Capítulo 9. O passo 5 é descrito em detalhes no restante desse capítulo.

Note que dois conjuntos de *estruturas-de-controle* estão presentes no processamento. Uma definida sobre T , que será referida por C^T , e outra sobre G , denominada C^G . Como T é modificada durante o processo de remalhamento, os elementos de C^T também são alterados.

Muito embora C^T seja modificado pelo remalhamento, é necessário que a forma geométrica das linhas e superfícies de controle de C^T estejam sobre suas correspondentes em C^G . Portanto, faz-se necessária uma associação entre os elementos de C^T e os de C^G , para que se saiba precisamente onde as projeções devem ocorrer. Essa associação é feita ligando-se cada vértice de T a um vértice de G . No início do processo, existe uma correspondência um-para-um entre os vértices de T e G e a associação é trivial, pois as duas malhas são idênticas. À medida que o remalhamento ocorre, as associações são atualizadas para manter a coerência entre as *estruturas-de-controle*.

O processo de remalhamento ocorre pela execução de operadores de remalhamento, a saber: (i) inserção de vértices, (ii) colapso de arestas, (iii) *flipping* de arestas e (iv) movimento de vértices. O funcionamento básico do ANTS consiste em selecionar um vértice de T e acionar os operadores de remalhamento adequados conforme a necessidade local da malha. O termo *iteração-vértice* será utilizado para designar este processo de seleção e remalhamento a partir de um vértice.

Durante uma *iteração-vértice*, os operadores são chamados em uma sequência predeterminada, como pode ser visto no Algoritmo 6. Os operadores de remalhamento são executados conforme as seguintes regras. Primeiro, tenta-se executar o operador de movimento, sendo que ele só é chamado se a densidade local nas proximidades do vértice iterado não for nem muito alta nem muito baixa. Se o critério de densidade for obedecido, mas a movimentação do vértice comprometer a forma geométrica da superfície, a movimentação é desfeita. Se, no entanto, todas as condições forem favoráveis para a movimentação do vértice, ele é de fato deslocado e o operador de *flipping* de arestas é chamado para melhorar a qualidade local da malha. Em seguida, verifica-se novamente a densidade local da superfície nas vizinhanças do vértice iterado. Se a densidade for muito alta, executa-se o operador de colapso de aresta para remover o vértice iterado. Porém, a colapso só é de fato realizada se não houver alterações significativas na forma geométrica da superfície. Se a colapso de fato ocorrer, o operador de movimento é executado imediatamente após a colapso para todos os vértices que eram inicialmente adjacentes ao vértice removido. Finalmente, se a densidade local for considerada baixa, o operador de inserção de vértice é executado para aumentar a densidade local. Neste caso, um novo vértice é inserido sobre alguma aresta adjacente ao vértice iterado. Da mesma forma que para os outros operadores, a inserção também só ocorre se ela não alterar significativamente a forma geométrica da superfície.

Uma vez apresentada a idéia geral do método proposto, as próximas seções descrevem mais

Algorithm 6 O procedimento *iteração-vértice*.

entrada:
 v_i : vértice a ser iterado.

início:

 Calcule a densidade local de vértices em T na vizinhança de v_i .

se a densidade não for muito alta nem não muito baixa **então**
 v_i é movimentado.

se a forma geométrica de T não for preservada **então**

 retorne v_i à sua posição original.

senão

 execute o operador de *flipping* de arestas.

fim_se
fim_se
se densidade local baixa **então**
se a remoção de v_i não comprometer a forma geométrica de T **então**

 Determine o conjunto $V = V(\star_{v_i})$.

 O vértice v_i é removido pela colapsoção de alguma aresta adjacente.

 Execute o operador movimento para cada vértice em V .

fim_se
senão
se densidade local alta **então**
se a inserção não comprometer a forma geométrica de T **então**

 um novo vértice é inserido em uma aresta adjacente a v_i .

fim_se
fim_se
fim_se
fim

detalhadamente o processo de remalhamento.

10.1 Gerenciamento dos vértices iterados

É necessário fazer um gerenciamento dos vértices para decidir qual vértice deve ser selecionado para uma *iteração-vértice*. Este gerenciamento é feito via rotulação de vértices, onde cada nó de T recebe um dos seguintes rótulos:

- *ativo*
- *inativo*
- *adormecido*

Uma vez que cada vértice recebe apenas um rótulo, é possível agrupá-los em três conjuntos distintos: $\mathcal{A}$ o conjunto de vértices *ativos*; $\mathcal{I}$ o conjunto de vértices *inativos* e $\mathcal{D}$ o conjunto de vértices *adormecidos*. Além disso, os elementos do conjunto $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ estão dispostos conforme a ordem de chegada dos vértices aos conjuntos. Os elementos de $\mathcal{I}$ não precisam obedecer ordem alguma.

Os vértices rotulados como *ativos* são aqueles prontos para serem submetidos a uma *iteração-vértice*. No início do processamento, todos os vértices de T são adicionados em $\mathcal{A}$ e, conseqüentemente, os conjuntos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{D}$ estão vazios.

Quando um vértice v_i *ativo* é submetido a uma *iteração-vértice*, ele se torna *inativo* ou *adormecido*. Note, portanto, que o conjunto $\mathcal{A}$ se tornará vazio em algum momento. A transição de *ativo* para *inativo* ocorre quando nenhum operador de remalhamento foi de fato executado durante a iteração de v_i . Portanto, um vértice *inativo* é aquele que possivelmente não precisará ser processado novamente. De fato, isso ocorrerá se os vértices de sua estrela permanecerem inalterados. Se, por outro lado, alguma modificação ocorrer na estrela (devido a *iteração-vértice* de algum vértice adjacente), o vértice volta a se tornar *ativo*. Sendo assim, é possível que um vértice rotulado como *inativo* se torne *ativo* novamente.

A transição de *ativo* para *adormecido* ocorre quando algum operador de remalhamento foi chamado durante o processamento do vértice ativo v_i . Um vértice rotulado como *adormecido* deve se tornar *ativo* futuramente para que o remalhamento local seja concluído. Quando um vértice se torna *adormecido*, todos os seus vértices adjacentes que forem *ativos* ou *inativos* também se tornam *adormecidos*.

Sempre que o conjunto $\mathcal{A}$ se tornar vazio e o conjunto $\mathcal{D}$ possuir algum vértice, todos os elementos de $\mathcal{D}$ passam para $\mathcal{A}$, a esta transição dá-se o nome de *reiniciação*. O termo

$$\mathcal{A} = V_T$$

$$\mathcal{D} = \emptyset$$

10.2. CRITÉRIO PARA PRESERVAR A FORMA GEOMÉTRICA DA SUPERFÍCIE 123

Figura 10.1: Diagrama de estados da rotulação dos vértices.

iteração-malha será utilizado para referenciar ao conjunto de *iterações-vértice* necessárias para se alcançar $\mathcal{A} = \emptyset$ partindo-se de $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\mathcal{D} = \emptyset$. O diagrama da Figura 10.1 ilustra os possíveis estados dos conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{D}$ durante o remalhamento. O processo inicia com todos os vértices de T rotulados como *ativos* ($\mathcal{A} = V_T$). Após uma *iteração-malha*, $\mathcal{A} = \emptyset$ e todos os vértices atuais da malha estão distribuídos em $\mathcal{I}$ e $\mathcal{D}$ ($\mathcal{I} \cup \mathcal{D} = V_T$). O diagrama apresenta um laço entre os dois estados intermediários, onde ocorrem sucessivas *reinicializações/iterações-malha*. Quando o método converge, o estado final dos conjuntos tem todos os vértices de T rotulados como *inativos*, o que significa que a malha não precisa mais sofrer qualquer remalhamento.

10.2 Critério para preservar a forma geométrica da superfície

Uma das grandes dificuldades em remalhamento de superfícies está em preservar a forma geométrica do modelo. Qualquer um dos operadores de remalhamento (inserção, remoção, flipping ou movimento) pode modificar a forma da superfície. Portanto, torna-se necessário adotar algum critério para verificar se a alteração introduzida pelo operador causa deformações na forma.

O método proposto utiliza uma métrica, chamada *qualidade geométrica*, denotada por Q_G , que determina a fidelidade de um triângulo de T com relação à geometria inicial G . Os triângulos de T devem estar próximos dos planos tangentes definidos nos seus vértices, sendo que estes planos devem ser obtidos a partir de G . Seja $t_{abc} \in T$ um triângulo definido pelos vértices $v_j \in T$, $j = a, b, c$. A *qualidade geométrica* de t_{abc} é dada por:

$$Q_G(t_{abc}) = \min_{j \in a, b, c} \langle \vec{n}_j, \vec{n}_t \rangle \quad (10.1)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar, $\vec{n}_t$ é o vetor normal unitário do triângulo t_{abc} , e $\vec{n}_j$ o vetor

Figura 10.2: Entidades envolvidas no cálculo da métrica Q_G .

normal unitário interpolado em v_j a partir de G . A Figura 10.2 ilustra as entidades envolvidas, onde a malha G é apresentada com arestas tracejadas e a malha T com arestas em negrito.

Sabe-se que o produto escalar de dois vetores unitários é igual ao cosseno do ângulo entre os vetores, assim $0 \leq Q_G \leq 1$. Quanto maior for o valor de Q_G , maior a fidelidade do triângulo t_{abc} , pois, mais alinhados estão os vetores normais $\vec{n}_t$ (em T) e $\vec{n}_j$ (em G).

Durante a *iteração-vértice* de um vértice v_i , a métrica Q_G é utilizada da seguinte forma. A métrica Q_G computa a qualidade de todos os triângulos pertencentes à $\star_i$ após qualquer operador ser executado. Se Q_G for maior que um dado valor $\cos(\theta_{Q_G})$ para todos os triângulos avaliados (estrela de v_i), então as modificações do operador são aceitas, caso contrário, a operação é desfeita. Maiores detalhes sobre como Q_G é aplicada para verificar os efeitos de cada operador podem ser vistos nas seções 10.3.3, 10.3.4, 10.3.1 e 10.3.2.

O valor do ângulo θ_{Q_G} , portanto, fornece um critério para controlar a fidelidade da forma superficial de T com relação a G . Se valores altos (próximos de 1) forem fornecidos para Q_G , menor a fidelidade de T , porém mais liberdade se tem para remalhar, o que proporciona maiores condições para se obter triângulos de melhor qualidade. Sendo assim, o valor de θ_{Q_G} fornece um meio de se ajustar o compromisso entre fidelidade geométrica e qualidade dos triângulos. Recomenda-se, no entanto, que a qualidade esteja no intervalo $0.9848 \leq Q_G \leq 0.7071$, isto é, $10^\circ \leq \theta_{Q_G} \leq 45^\circ$. Na maioria dos testes realizados foi utilizado $\theta_{Q_G} = 30^\circ$.

A Figura 10.3 apresenta os efeitos para diferentes escolhas de Q_G . Na figura, a malha inicial apresentada na Figura 10.3(a) foi submetida ao mesmo processo de simplificação, porém com diferentes valores para Q_G . Note que para $Q_G = \cos(10^\circ)$ (Figura 10.3(b)), a métrica impede que os operadores modifiquem a malha nas regiões onde a curvatura é mais acentuada.

10.3 Operações de remalhamento

Todas as operações descritas a seguir são chamadas a partir do vértice iterado, o qual é denotado por v_i .

(a) Malha inicial

(b) $Q_G = \cos(10^\circ)$ (c) $Q_G = \cos(30^\circ)$ (d) $Q_G = \cos(45^\circ)$ (e) $Q_G = \cos(60^\circ)$ (f) $Q_G = \cos(90^\circ)$ Figura 10.3: Efeitos da métrica Q_G no processo de remalhamento.

Figura 10.4: *Flipping* de uma aresta.

10.3.1 *Flipping* de arestas

A operação de *flipping* de arestas objetiva melhorar a qualidade local dos elementos da malha. Esta operação é amplamente utilizada em métodos para geração de triangulações de Delaunay, os quais se baseiam no critério do *circuncírculo vazio* [27]. Este critério é bem definido e facilmente computado para geração de triangulações isotrópicas em domínios bidimensionais planares. No entanto, o mesmo não pode ser dito quando se trata de domínios superficiais curvilíneos, muito embora existam propostas como a de Chew [28]. Além de ser computacionalmente caro de ser calculado, o critério modificado de Chew é aplicável apenas em superfícies suaves. O teste do circuncírculo também tem sido modificado para contemplar triangulações anisotrópicas [83, 56, 14], porém, ainda não foi proposta uma alternativa para o critério que garanta triangulações de Delaunay anisotrópicas mesmo para domínios bidimensionais planares. Como o método Ants se propõe a remalhar triangulações anisotrópicas superficiais, o critério do circuncírculo vazio não se mostrou apropriado. A opção escolhida procura melhorar a qualidade dos elementos pela diminuição do maior ângulo interno dos triângulos.

Sejam e_{ac} e e_{bd} as diagonais do quadrilátero q_{abcd} , conforme ilustrado na Figura 10.4. O *flipping* da diagonal e_{ac} para e_{bd} ocorre se os seguintes testes forem simultaneamente verdadeiros:

- A aresta e_{ac} não pertence a alguma *linha-de-controle*, isto é, $e_{ac} \notin C_L$.
- O maior ângulo interno dos triângulos envolvidos diminui, isto é, $\max\{\theta_{abc}^b, \theta_{cda}^d\} > \max\{\theta_{dab}^a, \theta_{bcd}^c\}$ (veja Equação (2.12)).
- $Q_G(t_{abd}) > \cos(\theta_{Q_G})$ e $Q_G(t_{bcd}) > \cos(\theta_{Q_G})$.

O primeiro teste apenas assegura que *linhas-de-controle* sejam preservadas. O segundo teste procura melhorar a qualidade dos triângulos pela diminuição do maior ângulo interno dos triângulos envolvidos. O terceiro teste garante que a qualidade geométrica da superfície seja mantida após o *flipping*.

O operador de *flipping* é chamado a partir de um vértice v_i a fim de melhorar, quando possível, a qualidade dos elementos incidentes em v_i . Para isso, procura-se realizar o *flipping*

Figura 10.5: Movendo um vértice pertencente a uma *superfície-de-controle*.

em todas as arestas pertencente ao $\star_{v_i}$. Sempre que o *flipping* de fato ocorrer, o $\star_{v_i}$ é atualizado. O processo termina quando não for possível aplicar o *flipping* a alguma aresta de $\star_{v_i}$.

10.3.2 Movimento de vértices

Foi desenvolvida uma nova estratégia para se efetuar movimento de vértices em domínios com características anisotrópicas. A idéia baseia-se no operador laplaciano de suavização, que é conhecido tanto por sua simplicidade como também por ser computacionalmente barato.

No método proposto, o procedimento para movimentar um vértice v_i depende do tipo de *estrutura-de-controle* à qual o vértice pertence.

Suponha que o vértice v_i pertença a uma *superfície-de-controle*. Neste caso, a nova posição de v_i , denotada por v_i' , é obtida em dois passos. Observe a Figura 10.5. Primeiro, o centróide c_i é calculado a partir de $V(\star_{v_i})$ (veja a Figura 10.5(a)), ou seja

$$c_i = \frac{1}{\#(V(\star_{v_i}))} \sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} v_j \quad (10.2)$$

O centróide c_i é utilizado no lugar de v_i (veja a Figura 10.5(b)) na seguinte equação de deslocamento

$$v_i' = \frac{\sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} (\|c_i - v_j\| S_j(\vec{u}_j)^2)^{-1} p_j}{\sum_{v_j \in V(\star_{v_i})} (\|c_i - v_j\| S_j(\vec{u}_j)^2)^{-1}} \quad (10.3)$$

onde $\vec{u}_j = (c_i - v_j)/\|c_i - v_j\|$; $p_j = v_j + S_j(\vec{u}_j)\vec{u}_j$; e $S_j(\vec{u}_j)$ é o tamanho de aresta desejado em v_j na direção definida por $\vec{u}_j$ (veja Equação (2.15)).

A estratégia proposta para movimentar vértices merece alguns comentários. Primeiro, apenas uma iteração move v_i para uma localização estável. Isso se deve ao fato de não se

Figura 10.6: Movendo um vértice pertencente a uma *linha-de-controle*.

utilizar v_i para fornecer informações de posição e tamanhos desejados, uma vez que estas informações são obtidas a partir do centróide c_i . Esta é a razão pela qual o centróide foi escolhido ao invés de v_i . Segundo, a Equação (10.3) leva em consideração a função tamanho em v_j , o que mantém v_i perto dos vértices requerendo arestas menores. Terceiro, a estratégia funciona para *funções de espaçamento* tanto isotrópicas quanto anisotrópicas, desde que estas sejam suaves sobre o domínio. A suavidade das *funções de espaçamento* é fundamental tanto para a convergência do método proposto quanto para a qualidade dos elementos gerados, conforme discutido no capítulo 9.

Quando o vértice v_i pertence a uma *linha-de-controle*, a estratégia de movimentação é a seguinte. Para evitar problemas durante a projeção do vértice sobre G após seu movimento, o vértice é movido sobre a *linha-de-controle* que pertence. Veja a Figura 10.6. Sejam v_j e v_k dois vértices adjacentes a v_i , todos pertencendo à mesma C_{L_i} . Seja $P_{jk} = \|v_i - v_j\| + \|v_i - v_k\|$ o perímetro euclidiano de v_j a v_k medido sobre C_{L_i} . Seja $v_w \in \{v_j, v_k\}$ o vértice mais distante de v_i segundo a métrica definida em v_w , isto é, v_w tal que $d_{iw}^w = \max\{d_{ij}^j, d_{ik}^k\}$ (na Figura 10.6, $v_w = v_j$). A equação utilizada para calcular a nova posição de v_i é dada por

$$v'_i = v_w + \left(P_{jk} \frac{S(v_w)}{S(v_j) + S(v_k)} \right) \frac{(v_i - v_w)}{\|v_i - v_w\|} \quad (10.4)$$

Se v_i for uma *ponta-de-controle*, então a mesma estratégia de movimentação de vértices em *superfície-de-controle* (Equação (10.3)) é aplicada.

O operador de movimentação não é executado para todo vértice iterado. De fato, para um vértice v_i ser movimentado, ele precisa satisfazer os seguintes critérios:

- v_i não pode ser um *canto-de-controle*, isto é, $v_i \notin C_C$, e
- $\Theta_{min} < \bar{\ell}^i < 2\Theta_{max}$.

O primeiro critério assegura que nenhum vértice classificado como *canto-de-controle* é movimentado. O segundo critério evita que o operador de movimento seja aplicado apenas onde a densidade de vértices é muito baixa (limite inferior) ou muito alta (limite superior). Em

outras palavras, a movimentação não ocorre em cenários requerendo explicitamente inserção ou remoção de vértices. Isto oferecendo, portanto, maior agilidade ao processo.

Se, por outro lado, os critérios forem satisfeitos, a nova posição é calculada de acordo com as estratégias descritas acima (Equações 10.3 e 10.4). Em seguida, os vértices são projetados em suas respectivas *estrutura-de-controle*, com exceção dos vértices em *pontas-de-controle*, que são projetados nas *linhas-de-controle* adjacentes.

Finalmente, para que a movimentação do vértice seja de fato efetuada a qualidade geométrica deve ser obedecida. Sendo assim, a métrica Q_G (Equação (10.1)) é avaliada para todos os triângulos incidentes no vértice movimentado. Se a qualidade for satisfatória, o vértice é movido; caso contrário, a movimentação é descartada.

10.3.3 Inserção de vértices

Para inserir um novo vértice v_{new} em T são necessárias duas informações: (1) a exata localização p_{new} onde o vértice deve ser inserido e (2) sobre qual elemento $\rho \in T$ (aresta ou célula) o ponto p_{new} está posicionado. Esta última informação é necessária para se atualizar a conectividade da malha a fim de incluir v_{new} . A ordem com que p_{new} e ρ são encontrados difere dependendo da estratégia de refinamento empregado.

Em algoritmos para refinamento de triangulações de Delaunay [27, 70, 77], por exemplo, primeiro é feita uma busca por algum triângulo cuja qualidade está abaixo de um dado limiar. Em seguida, p_{new} é calculado como sendo o circuncentro do triângulo. Finalmente, uma busca para encontrar o elemento ρ é realizada. O circuncentro é uma boa escolha porque, em triangulações de Delaunay, ele contribui positivamente na distribuição dos vértices sobre o domínio. Note que p_{new} pode cair fora do domínio, o que requer um tratamento especial. Além disso, em malhas superficiais curvas o circuncentro pode facilmente não tangenciar a superfície, o que significa que é necessário projetá-lo.

A outra estratégia consiste em primeiro encontrar ρ e então calcular p_{new} dentro do próprio ρ . O ponto p_{new} pode ser, por exemplo, o baricentro de ρ . Note que, neste caso, a operação de inserção pode ser realizada mais rapidamente que a primeira estratégia porque é necessária apenas uma busca (ao invés de duas) e são descartados a projeção e o tratamento especial para pontos fora do domínio. O problema que surge, entretanto, é a dificuldade de se encontrar o elemento (aresta ou face) apropriado para a inserção de um novo ponto no domínio tal que ofereça uma boa distribuição dos vértices. Em geral, as malhas seguindo essa segunda estratégia tendem a possuir qualidade inferior se comparada com a primeira estratégia.

Neste trabalho, novos vértices são inseridos nos pontos médios de arestas. A inserção se enquadra, portanto, na segunda estratégia descrita acima. Porém, existe uma desvantagem na

opção adotada. Sabe-se que um novo vértice deve ser posicionado o mais distante possível dos demais vértices presentes na malha para que se obtenha uma melhor distribuição de vértices. A questão é que esta posição dificilmente cai sobre uma aresta. Porém, isto não é um problema no caso do método proposto porque o operador de movimento será executado posteriormente e deslocará o vértice recentemente inserido para uma posição mais apropriada na malha.

Seja v_i o vértice sendo processado. As condições locais da malha na vizinhança de v_i são analisadas para decidir se uma nova inserção deve ocorrer ou não. Para que a inserção ocorra é necessário que a densidade local de vértices seja considerada baixa. Para isso, seleciona-se v_j como sendo o vértice adjacente a v_i mais distante, isto é, v_j tal que $d_{ij} = \max_{k \in V(\star_{v_i})} \{d_{ik}\}$. Um novo vértice é inserido se o seguinte critério for satisfeito:

$$\left(\frac{2\min\{S_i(\vec{e}_{ij}), S_j(\vec{e}_{ij})\}}{S_i(\vec{e}_{ij}) + S_j(\vec{e}_{ij})} \right) \max\{d_{ij}^i, d_{ij}^j\} > \Theta_{max}, \quad (10.5)$$

em que $S_k(\vec{e}_{ij})$ é o tamanho requerido de aresta em v_k na direção definida pela aresta e_{ij} (veja Equação (2.15)). Note que quando a *função de espaçamento* é constante, tem-se que $S_i(\vec{e}_{ij}) = S_j(\vec{e}_{ij})$ para toda aresta em T . Portanto, a Restrição 10.5 pode ser simplificada para

$$d_{ij} > \Theta_{max}. \quad (10.6)$$

A razão para se utilizar a Restrição 10.5 ao invés da Restrição 10.6 é que a última não evita inserções em cenários onde a métrica muda abruptamente entre vértices vizinhos. Este é o caso exemplificado na Figura 10.7. Note que, muito embora a métrica em v_j determine que novos pontos não possam ser inseridos, a métrica em v_i é pequena o suficiente para que a distância envolvendo as duas métricas, isto é, d_{ij} , seja grande. Assim, de acordo com a Restrição 10.6, a inserção deve ocorrer. O que seria uma decisão equivocada. Para exemplificar este fato, suponha que um novo vértice v_{new} seja inserido na aresta e_{ij} , como ilustrado na Figura 10.7(b). A métrica interpolada em v_{new} é grande o suficiente para que o operador de deleção (veja Seção 10.3.4) seja executado. O que causaria um ciclo infinito de inserções seguidas de deleções. Observe porém que a Restrição 10.5 impede tal inserção e, conseqüentemente, o ciclo infinito.

É possível melhorar significativamente a qualidade da malha final se um procedimento complementar for utilizado para auxiliar a decidir se um novo vértice deve ser inserido mesmo quando a Restrição 10.5 falhar. Em situações em que a Restrição 10.5 determina que um novo vértice não deve ser inserido, não se pode concluir necessariamente que a densidade de vértices local é alta o suficiente para rejeitar a inserção. Para ilustrar este fato observe a Figura 10.8. Considere, apenas por questões de simplicidade, que a *função de espaçamento* é constante e

Figura 10.7: Exemplificação do problema no critério simplificado dado pela Restrição 10.6.

Figura 10.8: Procedimento complementar para a inserção de vértices.

isotrópica. Na Figura 10.8(a), todas as arestas estão entre Θ_{min} e Θ_{max} , portanto a distribuição de vértices local está adequada. No entanto, a inserção de um novo vértice dentro do hexágono amostraria ainda melhor a região. Como todas as arestas incidentes em v_i são menores que Θ_{max} , a Restrição 10.6 (como também a Restrição 10.5) falha e, conseqüentemente, a inserção não ocorre. Para contornar essa debilidade, o procedimento complementar de inserção proposto é executado sempre que a Restrição 10.5 falha.

O papel do procedimento complementar de inserção é tão somente realizar uma perturbação na densidade de vértices local. Para isso, o vértice v_i é ligeiramente deslocado numa direção apropriada e em seguida a densidade local é verificada novamente. Considere a Figura 10.8. Seja v_i o vértice sendo iterado e v_j o vértice adjacente de v_i tal que $d_{ij} = \max_{v_k \in V(\star_{v_i})}(d_{ik})$ com $d_{ij} > 1.2071$. Seja p um ponto sobre a aresta e_{ij} tal que $d_{pj}^j = 1.0$ (veja Figura 10.8(a)). O vértice v_i é movido para p (e projetado novamente em G). Em seguida, encontra-se a maior aresta e_{iw} adjacente a v_i na nova configuração, ou seja, v_w tal que $d_{iw} = \max_{v_k \in V(\star_{v_i})}(d_{ik})$ (veja Figura 10.8(b)). Se a Restrição 10.5 for obedecida para e_{iw} , um novo vértice é inserido; caso contrário, v_i é movido de volta à sua posição original.

Note que existe uma restrição para a existência de v_j no procedimento acima, isto é,

Figura 10.9: Caso limite para o procedimento complementar para inserção de vértices.

$d_{ij} > 1.2071$. Se a aresta e_{ij} , que é a maior dentre as adjacentes, for menor que 1.2071, então o deslocamento de v_i certamente não ocasionará a inserção de um novo vértice. Para verificar este fato, considere a seguinte análise do caso limite. Observe a construção apresentada na Figura 10.9, na qual é considerada uma *função de espaçamento* constante e isotrópica. A configuração em que o deslocamento de v_i sobre e_{ij} mais afeta o comprimento da aresta e_{iw} é quando as duas arestas estão sobre uma mesma reta. Além disso, quanto maior for o comprimento de e_{iw} , maior a chance da inserção ocorrer; portanto, suponha $d_{ij} = d_{iw}$ (veja Figura 10.9(a)). Como p dista de 1.0 de v_j , então o acréscimo em d_{iw} é de $d_{ij} - 1.0$. Como a inserção ocorre apenas se a distância de v_i a v_w , após o deslocamento, for maior que $\Theta_{max} = \sqrt{2}$, é necessário que:

$$d_{iw} + (d_{ij} - 1.0) > \Theta_{max}, \quad (10.7)$$

mas no cenário em discussão $d_{iw} = d_{ij}$, portanto

$$d_{iw} > \frac{\Theta_{max} + 1}{2} = 1.2071. \quad (10.8)$$

O efeito do procedimento complementar pode ser percebido na Figura 10.10. A Figura 10.10(a) apresenta a malha inicial. A Figura 10.10(b) mostra o resultado após o remalhamento não aplicando o procedimento complementar de inserção. Finalmente, a triangulação da Figura 10.10(c) foi obtida utilizando-se o procedimento complementar.

10.3.4 Remoção de vértices

A remoção de vértices é uma operação utilizada para diminuir a densidade local de vértices da malha. Existem duas formas de se implementar a remoção de um dado vértice v_i da malha. A primeira opção consiste em remover v_i e suas células adjacentes produzindo um buraco, o qual

Figura 10.10: Remalhamento da triangulação original (a) sem utilizar (b) e utilizando (c) o procedimento complementar de inserção.

Figura 10.11: Remoção do vértice v_i seguida de retriangulação.

é em seguida coberto com novos triângulos. A Figura 10.11 exemplifica este processo em uma malha planar. Em malhas superficiais, o recobrimento do buraco deve ser feito de tal forma que os novos triângulos aproximem a geometria da superfície, o que torna a implementação da operação consideravelmente custosa.

A segunda opção é conhecida como *colapso de aresta*. Neste caso, uma aresta e_{ij} incidente em v_i é escolhida e então contraída. Tal contração elimina apenas o vértice v_i e os triângulos incidentes em e_{ij} . O processo de contração está exemplificado na Figura 10.13. A colapso de arestas oferece algumas vantagens sobre a primeira opção. Ela é mais simples de ser implementada, uma vez que não envolve cálculos geométricos, mas apenas operações topológicas. Note que diferentes escolhas da aresta a ser contraída podem interferir diferentemente na fidelidade geométrica da superfície; assim, é necessário que ela seja escolhida adequadamente. Existem casos, no entanto, em que é impossível realizar a colapso sem criar elementos inválidos. A Figura 10.12 ilustra um caso em que a eliminação de v_i pela contração de qualquer aresta, seja ela qual for, resulta em elementos inválidos. Felizmente, tais casos são raros; além disso, geralmente o mesmo vértice se torna removível no decorrer do método proposto, pois a iteração do método sobre os vértices adjacentes desconfiguram o caso problemático. Neste trabalho, a remoção de vértices é feita via colapso de arestas.

A remoção de um dado vértice v_i só ocorre após uma série de verificações, as quais checam a densidade local de vértices e a fidelidade geométrica da superfície. A maneira com que v_i é verificado depende diretamente de qual *estrutura-de-controle* o vértice pertence.

Suponha que v_i seja um *canto-de-controle*, isto é $v_i \in C_C$, então, neste caso, v_i nunca é removido.

PSfrag replacements

Se v_i pertence a uma *superfície-de-controle*, então vários testes devem ser realizados. O primeiro teste faz uma checagem grosseira da densidade local de vértices. Se $\bar{d}_i^{max} \geq 1$ então v_i não deve ser removido, sendo que $\bar{d}_i^{max}$ é a média aritmética de $d_{ij}^{max}, \forall v_j \in V(\star_{v_i})$. O papel deste teste inicial é aumentar o desempenho do método proposto, pois ele pode constatar

¹A condição $v_i \notin C_L$ garante que a *linha-de-controle* possui apenas uma aresta, portanto o outro vértice de e_{ij} deve ser ou *ponta-de-controle* ou *canto-de-controle*.

Figura 10.15: Condição para remoção de um vértice em uma *ponta-de-controle*.

facilmente o caso em que a remoção não deve ocorrer, o que evita a execução de testes mais criteriosos e computacionalmente mais caros. Se, por outro lado, o teste inicial falha, então mais verificações devem ser realizadas. Sejam v_j e v_k dois vértices adjacentes a v_i , tais que e_{ij} e e_{ik} sejam as duas arestas mais curtas (medidas pela Equação (2.9)) incidentes em v_i e $d_{ij} < d_{ik}$. Para que v_i seja removido, pelo menos uma de três condições deve ser satisfeita. A Figura 10.16 apresenta um exemplo em que cada condição é satisfeita individualmente. As ditas condições são apresentadas a seguir:

1. $e_{ij} \in C_S$, $v_j \in C_S$, $v_j \notin \mathcal{A}$ (ver Seção 10.1) e $d_{ij}^{max} < \Theta_{min}$. Veja a Figura 10.16(a). Este teste assegura que a densidade local de vértices dentro de uma *superfície-de-controle* é alta o suficiente para que o vértice seja removido.
2. $e_{ij} \in C_S$, $v_j \notin C_S$, e $d_{ij}^{max} < \mu\Theta_{min}$, onde $0.2071 < \mu\Theta_{min} < 0.5$. Veja a Figura 10.16(b). Este teste é necessário porque o padrão hexagonal ótimo desenhado por seis triângulos incidentes em v_i pode não ser possível quando existe uma aresta saindo de v_i e chegando em alguma *linha-de-controle*.
3. $e_{iw} \in C_S$, $v_w \notin C_S$, e $d_{iw}^{max} < \Theta_{min}$, para $w = j, k$. Este teste assegura que a malha final tenha no máximo uma aresta cujo comprimento esteja entre $\mu\Theta_{min}$ e Θ_{min} . Veja a Figura 10.16(c).

Finalmente, se os testes acima indicarem que o vértice deve ser removido, isto é feito colapsando a aresta que menos prejudique a fidelidade da superfície desde que o critério de qualidade θ_{Q_G} discutido na seção 10.2 seja satisfeito.

Se a remoção for de fato realizada, o seguinte processamento é efetuado em seguida para todos os vértices v_j que eram adjacentes a v_i antes da remoção. O operador de *flipping* seguido pelo operador de movimento para todos os vértices v_j . Além disso, o rótulo de todos

Figura 10.16: Remoção de vértices em *superfícies-de-controle*.

os vértices v_j passa para *adomecido*. Observe que este gerenciamento dos rótulos evita que vértices adjacentes sejam removidos durante a mesma *iteração-malha*.

10.4 A parada do algoritmo

Como comentado na Seção 10.1, o *ANTS* termina o remalhamento quando os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ estiverem simultaneamente vazios. Este é o tipo ideal de parada do algoritmo pois significa que não são necessárias quaisquer outras modificações na malha. Na prática, no entanto, existem cenários onde os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ não ficam vazios e o método entraria em um laço infinito de processamento. O principal fator que contribui para a não parada do algoritmo é uma *função de espaçamento* mal condicionada. O mal condicionamento acontece em dois aspectos:

1. a função não define tensores alinhados às principais curvaturas do modelo e
2. a função não é suave o suficiente para permitir que uma aresta da triangulação satisfaça simultaneamente as métricas definidas nos seus vértices.

O primeiro item não é um problema fácil de ser resolvido, pois requer análise de curvatura da malha de entrada. A questão é que se esta malha não for uma amostragem adequada do

modelo que ela aproxima, as curvaturas não podem ser estimadas corretamente. Uma maneira simples de amenizar este problema é ajustar adequadamente os parâmetros para detectar as *estruturas-de-controle* tal que estas se ajustem às quinas do modelo.

O segundo item, todavia, pode ser facilmente resolvido aplicando-se algum dos procedimentos de suavização da *função de espaçamento* descritos na Seção 9.2.1.

Muito embora essas soluções contribuam para a parada ideal do método, elas dependem do usuário; é desejável, entretanto, que o *ANTS* páre independentemente dos parâmetros definidos pelo usuário. Foi observado que após um certo número de *iterações-malha* o *ANTS* atinge um estado no qual o remalhamento não efetua alterações significantes para o melhoramento global da qualidade da malha, mesmo em casos onde um possível laço infinito tenha sido estabelecido. Sendo assim, o *ANTS* poderia ser parado forçosamente em qualquer momento depois que este estado de pequenas mudanças tenha sido atingido. A questão que surge é como determinar esse estado atingido, ou seja, como encontrar o número de *iterações-malha* mínimo, N_{pi} , que leve a tal estado. A seguir é apresentada a estratégia empregada para estimar N_{pi} .

A estimativa de N_{pi} é realizada verificando-se o número de vértices em T após cada *iteração-malha*. Sejam NV_{min} e NV_{max} respectivamente o menor e o maior número de vértices de T atingidos durante o processo de remalhamento. Os valores NV_{min} e NV_{max} são iniciados com o número de vértices de T_{in} . Após cada *iteração-malha*, os valores são atualizados de acordo com o número de vértices de T . A idéia é parar o remalhamento quando NV_{min} e NV_{max} parmenecerem estáveis durante 10 *iterações-malha* consecutivas. Em outras palavras, sempre que NV_{min} ou NV_{max} for atualizado, o método tem 10 *iterações-malha* para mudar algum dos dois valores, caso contrário o método é terminado.

Capítulo 11

Resultados do remalhamento

O método proposto *ANTS* foi submetido a vários casos de teste, em diferentes situações, a fim de certificar sua aplicabilidade.

Para viabilizar a análise dos resultados, são apresentadas tabelas com informações relativas a cada exemplo. As informações estão agrupadas em:

1. *Parâmetros ANTS*. Destacam os valores utilizados para configurar o *ANTS*; Φ e Ψ são para a detecção das *estruturas-de-controle*, conforme descrito na Seção 8; S_{min} , S_{max} e n_e são para a construção da *função de espaçamento*; a suavização da *função de espaçamento* pode ser feita pelo método de Li (ver Seção 9.2.1) sob o parâmetro γ_{L_0} , ou pelo método *HCorrection*, sob o parâmetro HV_{lim} ; o número de iterações de suavização (N_{suav}) utilizado também é apresentado.
2. *Malha de entrada*. Apresenta valores relacionados à malha superficial de entrada. Além de informar o número de vértices (N_{Vert}) e de células (N_{tria}), também são apresentados valores sobre as *estruturas-de-controle*, ou seja, número de *cantos-de-controle* (N_{CC}), *linhas-de-controle* (N_{CL}), *pontas-de-controle* (N_{CT}) e *superfícies-de-controle* (N_{CS}). Para os parâmetros não listados aqui foram utilizados os valores padrão fornecidos durante a descrição do método.
3. *Malha resultante*. Idem ao item anterior, porém refere-se à malha produzida pelo remalhamento.
4. *Processamento*. Fornece informações sobre o processo de remalhamento. São informados o número de *iterações-malha* (N_{iter}) realizadas, e também quantas inserções (N_{ins}), remoções (N_{rem}) e movimento (N_{mov}) de vértices ocorreram durante o processo. Além disso, também são mostradas informações sobre os tempos de processamento (em segundos) que foram necessários para carregar a malha na memória ($t_{leitura}$), para identificar

as *estruturas-de-controle* (t_C), para criar a *função de espaçamento* anisotrópica (t_H) e para efetuar o remalhamento em si (t_{remesh}).

Para todos os exemplos são apresentadas figuras ilustrando as condições das malhas. A *função de espaçamento* utilizada em cada exemplo também é apresentada. Porém, para evitar confusão visual, são visualizados elipsóides apenas em alguns pontos aleatoriamente escolhidos sobre o domínio.

A qualidade da malha é computada em três conjuntos de elementos: Λ_T , Λ_{C_L} e Λ_{C_S} . O conjunto Λ_T contém todos os triângulos da malha final T_{out} . O conjunto Λ_{C_L} contém todos os triângulos com algum vértice $v \in C_L \cup C_C \cup C_T$; em outras palavras, triângulos que tocam alguma *linha-de-controle*. O conjunto Λ_{C_S} contém todos os triângulos de T_{out} com os três vértices pertencendo a alguma *superfície-de-controle*, ou seja, $\Lambda_{C_S} \cup \Lambda_{C_L} = \Lambda_T$ e $\Lambda_{C_S} \cap \Lambda_{C_L} = \emptyset$. Essa divisão dos elementos foi feita para ajudar na análise dos resultados, pois é esperado que os elementos de pior qualidade estejam ligados às *linhas-de-controle* devido ao critério de remalhamento mais relaxado.

A qualidade dos triângulos nesses três conjuntos é aferida em termos do menor ângulo (α_{min}) e maior ângulo (α_{max}), sendo que estes são medidos de acordo com a anisotrópica interpolada em seus respectivos centróides. Esses valores de ângulos são utilizados para calcular $\bar{\alpha}_{min}$ e $\bar{\alpha}_{max}$ que são médias aritméticas dos valores de α_{min} e α_{max} considerando todos os elementos do conjunto. Além disso também são apresentados dois valores significando porcentagens de elementos com determinada propriedade, são eles: ($30^\circ < \alpha_{min}$) para elementos com menor ângulo maior que 30° ; e ($\alpha_{max} < 100^\circ$) para elementos com maior ângulo menor que 100° .

Além das medidas baseadas em ângulos, também são apresentados histogramas dos comprimentos normalizados das arestas das malhas. As arestas são medidas de acordo com a Equação (2.7). Este gráfico ajuda a verificar se as distâncias entre os vértices estão obedecendo a *função de espaçamento*.

11.1 Exemplo 1: Ossos do pé

O modelo para os ossos do pé tratado neste exemplo (veja Figura 11.1) é composto por 26 componentes conexas separadas, uma para cada osso. Existe sobreposição entre alguns ossos. Note que trata-se de um modelo simplificado, pois possui muitas quinas e poucos triângulos. Esta simplificação impede que as curvaturas possam ser bem aproximadas, o que, conseqüentemente, dificulta a definição de uma *função de espaçamento* anisotrópica adequada seguindo o procedimento proposto na Seção 9.1. Portanto, este é o caso em que uma malha

Tabela 11.1: Informações sobre o remalhamento isotrópico uniforme dos ossos do pé.

<i>Parâmetros</i> ANTS		<i>Malha de entrada</i>		<i>Malha resultante</i>		<i>Processamento</i>	
Φ	140°	N_{Vert}	2154	N_{Vert}	22330	N_{iter}	10
Ψ	90°	N_{tria}	4204	N_{tria}	44556	N_{ins}	23317
S_{min}	-	N_{CC}	438	N_{CC}	438	N_{rem}	3141
S_{max}	-	N_{CL}	1383	N_{CL}	4177	N_{mov}	95370
n_e	-	N_{CT}	313	N_{CT}	309	$t_{leitura}$	0.047s
γ_{L_0}	-	N_{CS}	217	N_{CS}	217	t_C	0.047s
N_{suav}	-					t_H	-
						$t_{H_{suav}}$	-
						t_{remesh}	16.203s

Tabela 11.2: Medições de ângulos da malha isotrópica uniforme para os ossos do pé.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	50.38°	71.11°	99.4479%	99.2595%	44556
Λ_{CL}	51.85°	69.30°	99.9757%	99.9618%	28812
Λ_{CS}	47.70°	74.42°	98.4820%	97.9738%	15744

isotrópica uniforme é uma boa opção. Foi realizado tal remalhamento objetivando arestas com comprimentos iguais a 0.007 da maior dimensão do *bounding box* do modelo. As imagens à direita da Figura 11.1 apresentam a malha isotrópica uniforme gerada a partir do modelo original. Os dados referentes ao remalhamento estão apresentados nas Tabelas 11.1 e 11.2 e na Figura 11.2.

Se o modelo de entrada não fosse uma simplificação grosseira para os ossos do pé, os ossos teriam formatos mais tubulares e as curvaturas poderiam ser aproximadas com precisão suficiente para se contruir uma *função de espaçamento* anisotrópica. Com o intuito de tornar o modelo mais suave, a malha isotrópica gerada anteriormente (veja a Figura 11.1) teve sua forma geométrica suavizada pelo procedimento de Taubin [95]. O resultado da suavização pode ser visto nas imagens à esquerda da Figura 11.3. A *função de espaçamento* anisotrópica (veja Figura 11.3) foi então definida sobre a malha suavizada. Os dados referentes a esse remalhamento podem ser vistos nas Tabelas 11.3 e 11.4 e na Figura 11.4.

Figura 11.1: Malha original (à esquerda) e remalhamento isotrópico uniforme (à direita) dos ossos do pé.

Figura 11.2: Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica uniforme dos ossos do pé.

Tabela 11.3: Informações sobre o remalhamento anisotrópico dos ossos do pé.

<i>Parâmetros ANTS</i>		<i>Malha de entrada</i>		<i>Malha resultante</i>		<i>Processamento</i>	
Φ	140°	N_{Vert}	22330	N_{Vert}	23665	N_{iter}	12
Ψ	90°	N_{tria}	44556	N_{tria}	47226	N_{ins}	16725
S_{min}	0.003	N_{CC}	27	N_{CC}	27	N_{rem}	15390
S_{max}	0.5	N_{CL}	853	N_{CL}	787	N_{mov}	307647
n_e	36	N_{CT}	618	N_{CT}	564	$t_{leitura}$	0.563s
γ_{L_0}	1.3	N_{CS}	28	N_{CS}	28	t_C	0.484s
N_{suav}	15					t_H	2.297s
						$t_{H_{suav}}$	13.938s
						t_{remesh}	50.781

Tabela 11.4: Medições de ângulos da malha anisotrópica para os ossos do pé.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	50.12°	71.25°	99.7480%	99.5299%	47226
Λ_{CL}	50.61°	70.71°	99.8768%	99.6921%	42220
Λ_{CS}	45.96°	75.87°	98.6616%	98.1622%	5006

Figura 11.3: Ossos do pé após a suavização da forma (à esquerda) e após o remalhamento anisotrópico (à direita).

Figura 11.4: Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica dos ossos do pé.

Tabela 11.5: Medições de ângulos para o exemplo dos vasos sanguíneos.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	51.27°	70.02°	99.8283%	99.7441%	119944
Λ_{CL}	51.29°	69.10°	99.8568%	99.7647%	119390
Λ_{CS}	45.77°	76.16°	93.6594%	95.2897%	554

11.2 Exemplo 2: Vasos sanguíneos

Neste exemplo é remalhada uma superfície representando vasos cerebrais com aneurisma. A malha inicial foi gerada a partir de imagens médicas pelo método proposto por Cebal e Löhner [22], autores estes que gentilmente forneceram a malha para este exemplo. O modelo pode ser visto na Figura 11.5 em duas perspectivas. Como se trata de uma superfície suave, poucas *linhas-de-controle* são detectadas, o que, por conseguinte, contribui para a qualidade da malha final. Apesar dos vasos serem tubulares, não convém definir uma *função de espaçamento* com anisotropia acentuada para este modelo. A anisotropia acentuada seria inadequada porque ela degradaria a qualidade da malha final uma vez que os tubos são curvos e ondulados. Sendo assim, o modelo original foi submetido ao remalhamento com anisotropia e o resultado pode ser visto na Figura 11.5. A Figura 11.6 mostra detalhes da malhas original (coluna da esquerda) e da malha anisotrópica gerada (coluna da direita). Informações referentes ao remalhamento podem ser vistas na tabela 11.6 e dados sobre a qualidade da malha gerada podem ser verificados na tabela 11.5 e na Figura 11.7.

Malha original.

Amostragem da *função de espaçamento* anisotrópica.

Malha final anisotrópica.

Figura 11.5: Remalhamento anisotrópico dos vasos sangüíneos.

Figura 11.6: Detalhes das malhas dos vasos sangüíneos.

Figura 11.7: Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica dos vasos sanguíneos.

Tabela 11.6: Informações sobre o remalhamento dos vasos sanguíneos.

<i>Parâmetros ANTS</i>		<i>Malha de entrada</i>		<i>Malha resultante</i>		<i>Processamento</i>	
Φ	100°	N_{Vert}	133581	N_{Vert}	59981	N_{iter}	24
Ψ	140°	N_{tria}	267172	N_{tria}	119972	N_{ins}	26279
S_{min}	0.001	N_{CC}	15	N_{CC}	15	N_{rem}	99879
S_{max}	0.02	N_{CL}	73	N_{CL}	89	N_{mov}	854096
n_e	30	N_{CT}	56	N_{CT}	56	$t_{leitura}$	3.937s
HV_{lim}	1.25	N_{CS}	4	N_{CS}	4	t_C	4.485s
N_{suav}	20					t_H	22.531s
						$t_{H_{suav}}$	67.672s
						t_{remesh}	183.172s

11.3 Exemplo 3: Melhoramento de malhas geradas a partir de imagens

Nesta subseção é mostrado como o *ANTS* foi utilizado para gerar malhas isotrópicas e anisotrópicas de alta qualidade sobre modelos gerados pelo método proposto por Alex Cuadros [30], o qual gera malhas superficiais e volumétricas a partir de imagens tridimensionais.

A malha apresentada à esquerda da Figura 11.8 mostra a malha superficial do crânio de um macaco. Tal malha foi gerada por Alex a partir de imagens produzidas por ressonância magnética. Embora a malha aproxime muito bem a forma contida nas imagens 3D com um número reduzido de elementos, ela não é uma malha com forma geométrica suave. Além disso, as malhas geradas não são orientadas (muitas vezes não orientáveis) e apresentam singularidades de vértices e arestas. Para que a malha produzida pudesse ser submetida ao *ANTS*, foi necessário primeiro alterá-la em uma etapa de pré-processamento.

Primeiro, foram removidas todas as singularidades presentes na malha por meio de duplicação de vértices. Em seguida foi executado um procedimento para orientar os elementos consistentemente. Descobriu-se então que a maioria dos modelos gerados são não orientáveis. Para tornar a orientação possível, foram removidos alguns triângulos da malha superficial sem singularidades. Porém, a remoção dos triângulos introduziu algumas singularidades de vértices que também tiveram que ser tratadas. Tanto a remoção de singularidades quanto a orientação da malha foram necessárias devido a restrições impostas pela estrutura de dados sobre a qual o *ANTS* foi implementado.

A próxima etapa teve por objetivo suavizar a forma geométrica da malha. O método para suavização de formas utilizado foi o proposto por Taubin [95, 94]. O método de Taubin foi escolhido por sua simplicidade, mas outros métodos mais robustos, como o proposto por Sousa et al. [88], também poderiam ser utilizados. Para que bons resultados sejam atingidos é recomendado que a malha a ser suavizada possua uma distribuição de vértices adequada. Por isso, várias medidas foram tomadas para preparar a malha para o processo de suavização. Primeiro foi aplicado o operador laplaciano apenas nos vértices que foram detectados como singulares na etapa anterior. Isso foi necessário porque as singularidades geralmente ocorrem estagnando a espessura de uma parede (espessura entre a face interior e exterior do crânio, por exemplo) e a suavização desses pontos contribui para a recuperação da espessura original da parede. Em seguida, foi efetuado o remalhamento isotrópico para tornar os comprimentos das arestas da malha mais uniformizados. No caso, a *função de espaçamento* do *ANTS* foi definida para requerer arestas medindo o comprimento médio de todas as arestas da malha original. Foram necessárias apenas 5 *iterações-malha* para efetuar esse remalhamento. A suavização da

Figura 11.8: Crânio original (à esquerda) e após tratamento de suavização de forma e remalhamento isotrópico uniforme (à direita).

forma foi então realizada e o remalhamento refeito. A Figura 11.8 apresenta a malha original (à esquerda) e a malha resultante desse tratamento (à direita). As características da malha produzida podem ser vistas na Figura 11.9 e na tabela 11.7 e os dados sobre o remalhamento na tabela 11.8.

A partir da malha suave apresentada na coluna à direita da Figura 11.8 o *ANTS* foi executado normalmente, ou seja, uma *função de espaçamento* anisotrópica foi definida (à esquerda na Figura 11.10) e o remalhamento foi efetuado. A malha final está apresentada à direita na Figura 11.10. Informações sobre o remalhamento e sobre a qualidade da malha produzida podem ser vistos nas Tabelas 11.10 e 11.9 e na Figura 11.11.

Também foi gerada uma malha isotrópica a partir da malha suave (coluna à direita da Figura 11.8). A malha produzida está apresentada na Figura 11.12. Informações sobre o

Figura 11.9: Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica uniforme do crânio.

Tabela 11.7: Medições de ângulos da malha isotrópica uniforme do crânio.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	49.96°	71.50°	97.8108%	98.4363%	22383
Λ_{CL}	52.02°	69.13°	99.9747%	100.000%	15804
Λ_{CS}	45.03°	77.21°	92.6128%	94.6800%	6579

Tabela 11.8: Informações sobre o remalhamento isotrópica uniforme do crânio.

Parâmetros ANTS		Malha de entrada		Malha resultante		Processamento	
Φ	140°	N_{Vert}	12275	N_{Vert}	11144	N_{iter}	5
Ψ	160°	N_{tria}	24643	N_{tria}	22383	N_{ins}	280
S_{min}	-	N_{CC}	1082	N_{CC}	1082	N_{rem}	1411
S_{max}	-	N_{CL}	2084	N_{CL}	1922	N_{mov}	26909
n_e	-	N_{CT}	782	N_{CT}	672	$t_{leitura}$	0.328s
γ_{L_0}	-	N_{CS}	120	N_{CS}	120	t_C	0.281s
N_{suav}	-					t_H	-
						$t_{H_{suav}}$	-
						t_{remesh}	4.422s

Figura 11.10: Remalhamento anisotrópico do crânio suavizado.

Figura 11.11: Histograma dos comprimentos de arestas da malha anisotrópica do crânio.

Tabela 11.9: Medições de ângulos na malha anisotrópica do crânio.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	49.10°	72.54°	99.0101%	98.7054%	38389
Λ_{C_L}	50.63°	70.70°	99.9227%	99.7351%	27175
Λ_{C_S}	45.38°	77.01°	96.7986%	96.2101%	11214

Tabela 11.10: Informações sobre o remalhamento anisotrópico do crânio.

Parâmetros ANTS		Malha de entrada		Malha resultante		Processamento	
Φ	140°	N_{Vert}	11144	N_{Vert}	19152	N_{iter}	7
Ψ	160°	N_{tria}	22383	N_{tria}	38389	N_{ins}	14106
S_{min}	0.006	N_{C_C}	1219	N_{C_C}	1219	N_{rem}	6098
S_{max}	0.5	N_{C_L}	2192	N_{C_L}	3048	N_{mov}	121865
n_e	45	N_{C_T}	575	N_{C_T}	562	$t_{leitura}$	0.281s
γ_{L_0}	1.20	N_{C_S}	189	N_{C_S}	189	t_C	0.265s
N_{suav}	15					t_H	1.015s
						$t_{H_{suav}}$	7.125s
						t_{remesh}	22.813s

Figura 11.12: Remalhamento isotrópico do crânio suavizado.

remalhamento e sobre a qualidade da malha produzida podem ser vistos nas Tabelas 11.12 e 11.11 e na Figura 11.13.

11.4 Outros exemplos

As Figuras 11.14, 11.15 e 11.16 apresentam outros exemplos nos quais o *ANTS* foi aplicado.

Figura 11.13: Histograma dos comprimentos de arestas da malha isotrópica do crânio.

Tabela 11.11: Medições de ângulos da malha isotrópica do crânio.

	$\bar{\alpha}_{min}$	$\bar{\alpha}_{max}$	$(30^\circ < \alpha_{min})$	$(\alpha_{max} < 100^\circ)$	# triângulos
Λ_T	50.68°	70.74°	99.5115%	99.4548%	100509
Λ_{CL}	51.64°	69.61°	99.9834%	99.9591%	78219
Λ_{CS}	47.30°	74.69°	97.8555%	97.6851%	22290

Tabela 11.12: Informações sobre o remalhamento isotrópico do crânio.

Parâmetros ANTS		Malha de entrada		Malha resultante		Processamento	
Φ	140°	N_{Vert}	10870	N_{Vert}	50232	N_{iter}	7
Ψ	160°	N_{tria}	21832	N_{tria}	100509	N_{ins}	47165
S_{min}	0.006	N_{CC}	1352	N_{CC}	1352	N_{rem}	7803
S_{max}	0.5	N_{CL}	2443	N_{CL}	5811	N_{mov}	251845
n_e	45	N_{CT}	674	N_{CT}	672	$t_{leitura}$	0.282s
γ_{L_0}	1.20	N_{CS}	228	N_{CS}	228	t_C	0.265s
N_{suav}	15					t_H	0.938s
						$t_{H_{suav}}$	1.36s
						t_{remesh}	49.391s

Figura 11.14: Remalhamento de uma formiga.

Figura 11.15: Remalhamento de uma vaca.

Figura 11.16: Remalhamento de um ônibus espacial.

Capítulo 12

Conclusão

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros sobre os dois assuntos tratados nessa tese.

12.1 Conclusões sobre movimento de malhas

Neste trabalho foram apresentadas várias contribuições relacionadas com malhas dinâmicas. Dentre as principais contribuições estão: (1) a introdução das molas altura e como as mesmas podem ser empregadas em malhas triangulares e tetraedrais (2) a proposta da metodologia baseada em vértices ativos para resolver a malha dinâmica, (3) a proposta de um mecanismo para aplicar malhas dinâmicas em pequenos passos, (4) a introdução das molas conservativas para corrigir a fronteira de malhas (5) a criação de uma metodologia aplicável na indústria aeronáutica para realizar o acoplamento automático entre ferramentas de projeto inverso bi-dimensional e simuladores de escoamento de fluidos tridimensionais.

Nesta tese foi apresentada uma descrição detalhada do funcionamento das malhas dinâmicas e das molas mais conhecidas e comumente empregadas, são elas: as molas longitudinais [9], as molas torcionais [36, 31, 18], e as molas semi-torcionais [10, 111, 112, 65]. As molas longitudinais oferecem bons resultados em casos onde o domínio da malha é submetido a pequenas deformações. Elas podem ser implementadas com ou sem acoplamento de coordenadas. De uma maneira geral, a formulação sem acoplamento é computacionalmente mais rápida e produz melhores resultados que a versão acoplada. Porém, quando a deformação do domínio for consideravelmente pequena (menor que o comprimento da menor aresta da estrela do vértice deslocado), a proposta acoplada produz malhas de melhor qualidade, mas requer um custo computacional maior. As molas longitudinais têm uma deficiência intrínseca, pois elas não impedem que vértices cruzem suas respectivas faces opostas. Esta deficiência se deve ao fato

da área (ou volume) do elemento não ser considerada na formulação da mola.

Para contornar essa deficiência foram propostos outros tipos de molas que complementam as molas longitudinais, dentre as mais conhecidas estão as torcionais e semi-torcionais. Estas molas controlam a área (ou volume) dos elementos por meio de ângulos entre arestas ou entre planos. Nesta tese foi proposta uma nova mola, a mola altura, que faz o controle do elemento por meio de sua altura, ao invés de ângulos. A idéia por trás da mola é bem simples e consiste tão somente em anexar uma mola longitudinal ligando o vértice controlado à sua projeção na face oposta. Na construção da malha dinâmica, as molas altura podem ser utilizadas com ou sem o complemento das molas longitudinais. Curiosamente, nos testes realizados o sistema composto por apenas molas altura produziu malhas de qualidade superior do que quando as longitudinais também eram empregadas. Se comparadas com as molas semi-torcionais, os resultados obtidos com as molas altura também são superiores.

Concomitantemente ao desenvolvimento da mola altura neste trabalho, Bottasso et al. [17] propôs o método *ball-vertex* que faz uso da mesma idéia básica. As diferenças são sutis, porém significativas. Os resultados obtidos pelas molas altura são superiores se comparados aos do método *ball-vertex*, tanto em termos de qualidade de malha quanto em desempenho computacional.

Também foram apresentadas nesta tese metodologias para a execução da malha dinâmica. O método numérico empregado para resolver o sistema de equações que formam a malha dinâmica foi o de Gauss-Seidel. Um dos fatores que contribuiu para a escolha desse método foi o fato de ele não necessitar que a matriz de coeficientes seja de fato criada em uma estrutura de dados auxiliar. Note que cada linha da matriz contém informações relativas apenas à estrela de um vértice. Sendo assim, a resolução do sistema pode ser fácil e eficientemente implementada consultando-se diretamente a estrutura de dados da malha. Além disso, o método de Gauss-Seidel é intuitivo e permite que cada vértice seja processado (movido) individualmente. Essa característica possibilitou a criação da estratégia de vértices ativos proposta nesta tese.

A estratégia de vértices ativos foi inicialmente desenvolvida para aumentar o desempenho computacional na aplicação do método numérico. A estratégia é simples e fácil de ser implementada. Seu funcionamento básico se dá pela marcação e gerenciamento de vértices por meio dos rótulos *ativo*, *inativo* e *fixo*. O rótulo *ativo* indica que o vértice (ou algum de seus vizinhos) teve um deslocamento significativo na iteração do método numérico anterior, e, portanto, tem grandes chances de ser movido na iteração seguinte. Por outro lado, o rótulo *inativo* indica que um dado vértice não teve um deslocamento significativo na iteração anterior, como também não tiveram seus vértices adjacentes; portanto, um vértice inativo não precisa ser processado na iteração seguinte. O rótulo *fixo* é atribuído aos vértices que fornecem a condição de con-

torno do sistema (o deslocamento inicial da malha). Durante a aplicação do método numérico, um rótulo *ativo* pode se tornar *inativo* e vice-versa. O processamento termina quando nenhum vértice *ativo* estiver presente. Como apenas os vértices ativos precisam ser processados, uma economia significativa de processamento ocorre durante a solução do sistema. Essa economia é ainda mais expressiva quando a malha dinâmica deve ser aplicada em malhas volumétricas grandes cuja fronteira sofre pouca deformação.

O emprego da estratégia de vértices ativos tem a propriedade de concentrar o processamento nas regiões da malha que foram mais afetadas pelo deslocamento do bordo. Essa propriedade tem o efeito positivo na convergência do método numérico. Isso ocorre porque as equações do sistema são reordenadas durante o processamento, e as equações que sofrem maior influência das condições de contorno tendem a ser processadas primeiro.

Foi verificado experimentalmente que o emprego de vértices ativos produz malhas muito semelhantes às produzidas sem empregá-los. Porém, não foi feita nenhuma garantia teórica sobre esse resultado.

Para que a malha dinâmica possa ser utilizada em cenários envolvendo grandes deformações, é necessário que o deslocamento da fronteira do domínio seja aplicado aos poucos. Nesta tese foi proposta uma metodologia para administrar o deslocamento da fronteira até se obter a deformação desejada. Os vértices da fronteira são movidos em passos cada vez menores até alcançarem as posições desejadas. Em cada passo da fronteira, a malha dinâmica é executada para mover os vértices do interior. O processo pode ser interrompido em dois casos: (1) quando a deformação desejada for alcançada ou (2) quando a malha dinâmica produzir uma malha que não satisfaça os critérios de qualidade especificados pelo usuário. Quando ocorre o segundo caso, a malha resultante foi movida, mas não na totalidade desejada. Testes mostraram que as malhas movimentadas em pequenos passos têm qualidade superior, mesmo quando a deformação da fronteira é pequena. A determinação da quantidade de passos, bem como a amplitude dos mesmos, é feita mediante parâmetros ajustados pelo usuário. Acredita-se, porém, que seja possível fazer uma boa estimativa desses parâmetros de maneira automática, o que deve ser feito futuramente.

O emprego da abordagem de deslocamento em pequenos passos permitiu comparar a eficácia das molas longitudinais, semi-torcionais e altura sob um novo ponto de vista. Foi aplicada uma deformação no domínio, grande o suficiente para que nenhuma combinação de molas fosse capaz de corrigir a malha sem produzir elementos inválidos. A abordagem de pequenos passos foi aplicada para cada configuração de molas sob os mesmos parâmetros. As molas altura mais uma vez foram as que obtiveram maior êxito, pois conseguiram realizar a maior porcentagem do deslocamento desejado. As molas semi-torcionais propiciaram o segundo maior

deslocamento e as molas longitudinais o terceiro.

Não são incomuns aplicações que realizam automaticamente a deformação da fronteira da malha. Em muitos casos, a deformação é aplicada apenas em regiões específicas do bordo e esse movimento parcial pode comprometer células da própria fronteira. Problemas como estes não podem ser resolvidos aplicando-se diretamente a malha dinâmica convencional sobre a malha deformada pois a fronteira permanece inalterada. Uma das propostas desta tese foi a criação de uma metodologia baseada em malhas dinâmicas para movimentar a fronteira de uma malha conservando a sua aparência original. Para isso foram criadas as molas conservativas que complementam o sistema formado por outros tipos de molas.

Foi observando o comportamento das malhas dinâmicas em superfícies que se chegou na proposta das molas conservativas. O que foi observado foi que as malhas dinâmicas eram capazes de deformar superfícies. Esta foi uma descoberta surpreendente que ainda não havia sido explorada na literatura. Porém em muitos casos as deformações extrapolavam os limites esperados e causavam problemas nas malhas. As molas conservativas foram adicionadas ao sistema para controlar a deformação. Como se trata do movimento do bordo, a geometria do domínio é alterada. Sendo assim, as molas conservativas devem ser utilizadas apenas em aplicações que não impõem restrições severas à geometria do domínio.

A malha dinâmica com molas conservativas foi amplamente utilizada na metodologia apresentada para possibilitar o acoplamento automático entre um simulador de escoamento de fluidos volumétrico com uma ferramenta de projeto inverso bidimensional. Este acoplamento é bastante complexo, pois depende de muitas variáveis tais como, o número de planos de corte utilizados, a geometria da asa, a geometria dos componentes adjacentes à asa, e a qualidade da malha superficial e volumétrica. Em muitos casos são requeridos tratamentos especiais para mover cada componente do avião. Por exemplo, uma ponta-de-asa chanfrada deve ser tratada de maneira diferente de uma winglet. A técnica proposta produziu bons resultados no que se refere às correções das componentes do avião adjacentes à asa. Pois foi capaz de corrigir elementos inválidos, como foi o caso da fuselagem no exemplo da Seção 6.2, quanto de recuperar a forma geométrica original, como foi o caso da ponta-de-asa no exemplo da Seção 6.2. Além disso, foi mostrado que também é possível utilizar malhas dinâmicas para movimentar a asa para que esta se ajuste à descrição geométrica determinada pelos perfis. Como se trata de um problema difícil e dependente de diversas variáveis, a técnica proposta pode funcionar adequadamente em alguns casos e produzir resultados impróprios em outros.

Malhas híbridas são amplamente utilizadas em simuladores de escoamento de fluidos. Os tipos de elementos comumente utilizados nesse tipo de malhas são tetraedros, hexaedros, prismas com base triangular e pirâmides com base quadrangular. Uma das sugestões para trabalhos

futuros é o emprego das molas longitudinais, semi-torcionais e altura para mover malhas híbridas. Diferentemente das malhas simpliciais, as malhas híbridas possuem faces quadriláteras. Este fato torna não trivial a tarefa de anexar molas. Observe, por exemplo, que empregar apenas molas longitudinais sobre as arestas da malha não é suficiente. Isto se deve ao simples fato de um vértice não estar conectado diretamente a todos os outros vértices do mesmo quadrilátero. Conseqüentemente, o movimento de um vértice não afeta diretamente o vértice não adjacente. Além disso, os quatro vértices do quadrilátero podem não ser co-planares. Isso faz com que cuidados especiais sejam necessários na obtenção de informações geométricas, por exemplo, na medição de ângulos diedrais entre faces e na projeção de pontos sobre faces.

12.2 Conclusões sobre remalhamento de malhas superficiais

Nesta tese foi apresentado o *ANTS*, um método prático para remalhamento de triangulações sobre superfícies de modelos com geometria complexa. O objetivo do *ANTS* é gerar triangulações anisotrópicas de qualidade para simulação numérica. O método é caracterizado por realizar o remalhamento local e diretamente na superfície. Localmente porque são utilizados os operadores de inserção, remoção e deslocamento de vértices e *flipping* de arestas; e diretamente, por não fazer uso de qualquer tipo de parametrização, seja local ou global, para efetuar o remalhamento; ao invés disso, vértices deslocados e inseridos são sempre projetados diretamente sobre a superfície de entrada para que a fidelidade geométrica seja mantida. Para evitar que arestas e córneres do modelo de entrada sejam danificados pelo remalhamento, estas entidades são detectadas e marcadas como *estruturas-de-controle* no início do processo. As *estruturas-de-controle* alteram a maneira com que os operadores de remalhamento são executados para que as arestas e os córneres sejam mantidos. Além disso, a fidelidade geométrica da malha produzida também é controlada por uma métrica que afere a qualidade geométrica da superfície processada. Esta métrica impede que os operadores sejam de fato executados sempre que estes reduzem a qualidade abaixo de um limite previamente estabelecido. O formato, tamanho e alinhamento dos triângulos produzidos são determinados por uma *função de espaçamento* definida sobre o domínio. Tal função tem o papel de estabelecer a distância que deve separar quaisquer dois vértices adjacentes no domínio. A *função de espaçamento* pode ser isotrópica ou anisotrópica e pode ser fornecida pelo usuário como entrada para o *ANTS* ou pode ser definida pela análise das principais curvaturas da triangulação de entrada. O processo de remalhamento pode efetuar refinamento em uma região e simplificação em outra, dependendo apenas de como a *função de espaçamento* está definida. O *ANTS* foi aplicado em vários exemplos, mostrando-se robusto e produzindo malhas de boa qualidade.

Poucas iterações são suficientes para produzir bons resultados. O núcleo do *ANTS* funciona processando vértices, ou seja, a densidade de vértices da malha é analisada localmente e dependendo das condições, os operadores de movimento, de remoção e de inserção de vértices são executados. É utilizada uma estratégia baseada em rótulos para determinar quais vértices devem ser processados. A rotulação é feita de tal maneira que vértices adjacentes não sejam processados em sequência, isso faz com que os operadores sejam aplicados de forma distribuída sobre o domínio. Foram necessárias cerca de 10 iterações-malha para gerar a maioria dos exemplos citados no capítulo 11.

O operador de movimento de vértices tem um papel importante no processo de remalhamento. O deslocamento de vértices é comumente utilizado apenas em um passo de pós-processamento para suavização de malha. Porém a sua utilização durante o processo de remalhamento tem se tornado freqüente em métodos para geração de malhas e remalhamento [82, 14, 4, 103, 92, 110]. Neste trabalho o operador de movimento foi utilizado no núcleo do processo de remalhamento, sendo que ele é sempre considerado antes de se aplicar remoção ou inserção de vértices, como o fizeram Bossen e Heckbert [15]. A vantagem em fazer isso é que a distribuição local de vértices é melhorada antes de se decidir se vértices devem ser inseridos ou removidos. Isso afeta diretamente o número final de vértices da malha, pois, os operadores de inserção e remoção podem verificar melhor as condições de densidade local antes de decidir se a operação deve ser de fato realizada. Além disso, o processamento da inserção no que tange a decisão do local preciso onde um vértice deve ser inserido é simplificado, pois o vértice não precisa ser inserido no local ótimo já que ele será movido em seguida. A desvantagem em se utilizar esta estratégia é que o operador de deslocamento pode ser acionado diversas vezes durante o processo, o que torna o método como um todo mais caro computacionalmente. Para diminuir esse impacto no desempenho, a densidade local dos vértices é aferida e a movimentação não ocorre quando for evidente que a inserção ou a remoção deve ocorrer.

Foi proposto um novo mecanismo para se calcular a nova posição dos vértices, o qual baseia-se no conhecido operador laplaciano de suavização. O movimento é realizado de forma rápida e eficaz. Entretanto, como ele é intimamente dependente da *função de espaçamento* definida sobre o domínio, se esta não for adequadamente suave, o movimento pode não ser efetivo e assim degradar a qualidade da malha produzida. É importante notar, porém, que mesmo estratégias baseadas em minimização de energia, como a proposta por Bossen [14], dependem da suavidade da *função de espaçamento* para produzir resultados satisfatórios.

A inserção de novos vértices na malha é feita sobre arestas. Isso oferece rapidez ao operador, pois basta encontrar o ponto médio da maior aresta para determinar onde o novo vértice deve ser inserido; evitando assim buscas e medições mais elaboradas para determinar o local.

Além disso, a atualização da conectividade da malha é simples, pois envolve apenas quatro vértices e dois triângulos. Como mencionado anteriormente, a opção de inserção de vértices sobre arestas é adequada porque o operador de movimento está envolvido. Outro aspecto que merece destaque quanto à inserção é a utilização do procedimento complementar que realiza uma pequena perturbação no vértice iterado para então verificar se a inserção deve ocorrer ou não. Apesar de simples, esse procedimento elevou consideravelmente a qualidade da malha gerada.

Percebeu-se que o algoritmo pára por si só em determinadas situações. Em geral, a parada está intimamente condicionada à *função de espaçamento* utilizada, esta, por sua vez, deve ser bem suave e corretamente alinhada com as curvaturas do modelo original. Embora a parada de fato aconteça em alguns casos, nenhuma garantia teórica é fornecida sobre as condições da parada. Por isso, foi adotada uma estratégia para controlar a parada em termos práticos, como foi apresentado na Seção 10.4. Em geral, o valor sugerido de 10 *iterações-malha* pode ser reduzido para 1 ou 2 quando se sabe *a priori* se ocorrerá refinamento ou simplificação da malha de entrada.

Gerar malhas anisotrópicas de qualidade sobre superfícies é um desafio considerável. É sabido que quanto mais suave for a *função de espaçamento* maiores as chances de se obter uma malha com boa qualidade. No caso de malhas anisotrópicas essa suavidade é ainda mais crítica, pois em casos onde a anisotropia é muito acentuada, uma pequena alteração no alinhamento da anisotropia pode causar o surgimento de triângulos indesejados. Além disso, não basta ter uma *função de espaçamento* suave se seus tensores não estiverem adequadamente alinhados com as curvaturas da superfície. O grande problema nesse caso é que quando a *função de espaçamento* é calculada a partir de uma malha superficial de entrada nem sempre é possível calcular adequadamente as curvaturas da superfície. Isso porque a própria malha de entrada é uma aproximação de algum modelo real e esta aproximação pode não ser adequada para se extrair as curvaturas. No caso do *ANTS*, a abordagem utilizada para definir uma *função de espaçamento* sobre a malha de entrada produz resultados aceitáveis somente quando esta for uma boa aproximação do modelo real. Isto é, a densidade de vértices deve estar adequadamente distribuída sobre o domínio. Além disso, melhores resultados são obtidos em superfícies suaves, mesmo que apresentem quinas e córneres. O cálculo das curvaturas depende do vetor normal estimado no vértice sobre o qual se está estimando o tensor métrico. O problema que surge em superfícies ruidosas é que o ruído influencia no cálculo do vetor normal, prejudicando assim a estimativa das curvaturas. Portanto, mais esforços devem ser aplicados no sentido de melhorar a estimativa do vetor normal.

Pode-se notar nos histogramas de comprimentos de arestas normalizadas do Capítulo 11

que o pico do gráfico não coincide com o comprimento ideal de arestas que no caso é 1.0. Este fato ocorre porque os critérios de remalhamento privilegiam arestas menores às maiores.

Os efeitos negativos da *função de espaçamento* podem ser reduzidos se os procedimentos de suavização descritos na Seção 9.2.1 forem utilizados. Além disso, quando a malha de entrada for grossa, é aconselhável que seja feito um refinamento para aumentar o número de pontos, como foi feito no exemplo dos ossos do pé na Seção 11. Esse refinamento da malha de fundo contribui para uma melhor interpolação dos tensores métricos sobre o domínio.

Considerando o exposto a respeito de remalhamento de malhas superficiais são propostas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Estabelecer as garantias teóricas que suportam o algoritmo proposto, determinando quais são as condições em que a parada automática ocorre.
- Estender o *ANTS* para remalhar triangulações não-orientáveis representando não variedades.
- Adaptar o algoritmo para computação paralela.
- Estender a idéia básica de remalhamento proposta para tratar malhas volumétricas.

Referências Bibliográficas

- [1] Rassineux A., P. Villon, J-M. Savignat, and O. Stab, *Surface remeshing by local hermite diffuse interpolation*, Special Edition on Unstructured Mesh Generation - International Journal for Numerical Methods in Engineering **49** (2000), no. 1-2, 147–156.
- [2] Juan C. Aguilar and Jonathan B. Goodman, *Anisotropic mesh refinement for finite element methods based on error reduction*, Journal of Computational and Applied Mathematics (2006).
- [3] P. Alliez, G. Ucelli, C. Gotsman, and M. Attene, *Recent advances in remeshing of surfaces*, Tech. report, AIM@SHAPE Network of Excellence, 2005.
- [4] Pierre Alliez, Éric Colin de Verdière, Olivier Devillers, and Martin Isenburg, *Isotropic surface remeshing*, Proceedings of Shape Modeling International, 2003, pp. 49–58.
- [5] Pierre Alliez and Craig Gotsman, *Recent advances in compression of 3d meshes*, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling. N.A. Dodgson, M.S. Floater e M.A. Sabin. Springer-Verlag, 2005.
- [6] Pierre Alliez, Mark Meyer, and Mathieu Desbrun, *Interactive geometry remeshing*, SIGGRAPH '02: Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 2002, pp. 347–354.
- [7] Marco Attene, Bianca Falcidieno, Michela Spagnuolo, and Geoff Wyvill, *A mapping-independent primitive for the triangulation of parametric surfaces*, Graph. Models **65** (2003), no. 5, 260–273.
- [8] Ivo Babuska and A. K. Aziz, *On the angle condition in the finite element method*, SIAM Journal on Numerical Analysis **13** (1976), no. 2, 214–226.
- [9] J. T. Batina, *Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes*, AIAA Journal **28** (1990), no. 8, 1381–1388.

- [10] F. J. Blom, *Considerations on the spring analogy*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **32** (2000), 647–668.
- [11] J. D. Boissonnat and S. Oudot, *Provably good surface sampling and approximation*, SGP '03: Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland), Eurographics Association, 2003, pp. 9–18.
- [12] H. Borouchaki, F. Hecht, and P. Frey, *Mesh gradation control*, 1998, pp. 1143–1165.
- [13] Houman Borouchaki, Paul Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, and Eric Saltel, *Delaunay mesh generation governed by metric specifications. part i algorithms*, Finite Elem. Anal. Des. **25** (1997), no. 1-2, 61–83.
- [14] Frank J. Bossen, *Anisotropic mesh generation with particles*, Tech. Report CMU-CS-96-134, CS Dept., Carnegie Mellon University, May 1996.
- [15] Frank J. Bossen and Paul S. Heckbert, *A pliant method for anisotropic mesh generation*, 5th International Meshing Roundtable, October 1996, pp. 63–76.
- [16] Mario Botsch and Leif Kobbelt, *A remeshing approach to multiresolution modeling*, 2004, pp. 185–192.
- [17] Carlo L. Bottasso, Davide Detomi, and Roberto Serra, *The ball-vertex method : a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes*, Computer methods in applied mechanics and engineering **194** (2005), no. 39-41, 4244–4264.
- [18] C.O.E. Burg, *A robust unstructured grid movement strategy using three-dimensional torsional springs*, AIAA Paper 2004-2529 34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, June 2004.
- [19] Scott A. Canann, Michael B. Stephenson, and Ted Blacker, *Optismoothing: an optimization-driven approach to mesh smoothing*, Finite Elem. Anal. Des. **13** (1993), no. 2-3, 185–190.
- [20] Graham F. Carey and John Tinsley Oden, *Finite elements: Computational aspects*, Prentice-Hall, 1984.
- [21] M.J. Castro-Diaz and F. Hecht, *Anisotropic surface mesh generation*, Tech. report, INRIA, 1995.

- [22] Juan Raul Cebral and Rainald Löhner, *From medical images to anatomically accurate finite element grids*, 2001.
- [23] Ho-Lun Cheng, Tamal K. Dey, Herbert Edelsbrunner, and John Sullivan, *Dynamic skin triangulation*, Symposium on Discrete Algorithms, 2001, pp. 47–56.
- [24] ———, *Dynamic skin triangulation*, Discrete and Computational Geometry **25** (2001), no. 4, 525–568.
- [25] S. W. Cheng, T. K. Dey, E. A. Ramos, and T. Ray, *Quality meshing for polyhedra with small angles*, Proc. 20th Annu. Sympos. Comput. Geom., 2004, pp. 290–299.
- [26] Siu-Wing Cheng, Tamal K. Dey, Edgar A. Ramos, and Tathagata Ray, *Sampling and meshing a surface with guaranteed topology and geometry*, SCG '04: Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry (New York, NY, USA), ACM Press, 2004, pp. 280–289.
- [27] L. Paul Chew, *Guaranteed-quality triangular meshes*, Tech. Report TR-89-983, Department of Computer Science, Cornell University, 1989.
- [28] ———, *Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces*, SCG '93: Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry (New York, NY, USA), ACM Press, 1993, pp. 274–280.
- [29] David Cohen-Steiner and Jean-Marie Morvan, *Restricted delaunay triangulations and normal cycle*, SCG '03: Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry (New York, NY, USA), ACM Press, 2003, pp. 312–321.
- [30] A. J. Cuadros-Vargas and L. G. Nonato, *Imesh: Generating quality meshes from images.*, European Conference on Computational Fluid Dynamics - ECCOMAS'06.
- [31] C. Degand and C. Farhat, *A three-dimensional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*, Computers and Structures **80** (2002), 305–316.
- [32] T. K. Dey, G. Li, and T. Ray, *Polygonal surface remeshing with delaunay refinement*, 2005.
- [33] Rubem Gomez Dias, *Uma compressão simples para malhas irregulares com alças*, Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- [34] S. Dong, S. Kircher, and M. Garland, *Harmonic functions for quadrilateral remeshing of arbitrary manifolds*, Comput. Aided Geom. Des. **22** (2005), no. 5, 392–423.

- [35] H. Edelsbrunner, *Geometry and topology for mesh generation*, Cambridge Univ. Press, England, 2001.
- [36] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne, *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **163** (1998), 231–245.
- [37] G. Farin, *Smooth interpolation top scattered 3-d data*, Surfaces in Computer Aided Geometric Design editado por R. Barnhill and W. Boehm, North-Holland, 1982.
- [38] D. Field, *Laplacian smoothing and delaunay triangulations*, Communications in Numerical Methods in Engineering **4** (1988), 709–712.
- [39] P. Frey and H. Borouchaki, *Geometric surface mesh optimization*, 1998.
- [40] Pascal J. Frey, *About surface remeshing*, IMR, 2000, pp. 123–136.
- [41] Michael Garland, *Quadric-based polygonal surface simplification*, Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1999.
- [42] J. E. Goodman and J. O'Rourke (eds.), *Handbook of discrete and computational geometry 2nd edition*, CRC Press, 2004.
- [43] C. Gotsman, S. Gumhold, and L. Kobbelt, *Simplification and compression of 3d meshes*, Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling editado por A. Iske, E. Quak, M.S. Floater - Springer, 2002.
- [44] B. Hamann, *Curvature approximation for triangulated surfaces*, 1993, pp. 139–153.
- [45] Erich Hartmann, *A marching method for the triangulation of surfaces.*, The Visual Computer **14** (1998), no. 3, 95–108.
- [46] Brian T. Helenbrook, *Mesh deformation using the biharmonic operator*, Iteration journal for numerical methods in engineering **00** (2001), no. 2, 1–30.
- [47] Hugues Hoppe, *Progressive meshes*, SIGGRAPH '96: Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 1996, pp. 99–108.
- [48] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald, and Werner Stuetzle, *Mesh optimization*, SIGGRAPH '93: Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 1993, pp. 19–26.

- [49] A. Hubeli and M. Gross, *Multiresolution feature extraction for unstructured meshes*, Visualization VIS '01, 2001.
- [50] Mariette Yvinec Jean-Daniel Boissonnat, Camille Wormser, *Anisotropic diagrams: Labelle shewchuk approach revisited*, Proceedings of the 17th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'05), 2005, pp. 266–269.
- [51] Leif P. Kobbelt, Mario Botsch, Ulrich Schwanerke, and Hans-Peter Seidel, *Feature sensitive surface extraction from volume data*, SIGGRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 2001, pp. 57–66.
- [52] Francois Labelle and Jonathan Richard Shewchuk, *Anisotropic voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation*, SCG '03: Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry (New York, NY, USA), ACM Press, 2003, pp. 191–200.
- [53] ———, *Anisotropic voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation*, SCG '03: Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry (New York, NY, USA), ACM Press, 2003, pp. 191–200.
- [54] Greg Leibon and David Letscher, *Delaunay triangulations and voronoi diagrams for riemannian manifolds*, Proceedings of the 16th annual symposium on Computational geometry, ACM Press, 2000, pp. 341–349.
- [55] X. Li, J. Remacle, N. Chevaugnon, and M. Shephard, *Anisotropic mesh gradation control*, Thirteenth International Meshing Roundtable, (Williamsburg, VA), Sandia National Laboratories, 2004.
- [56] Xiang-Yang Li, Shang-Hua Teng, and Alper Üngör, *Biting ellipses to generate anisotropic mesh*, 8th International Meshing Roundtable, 1999, pp. 97–108.
- [57] ———, *Biting: Advancing front meets sphere packing*, International Journal of Numerical Methods in Engineering (IJNME) **49** (2000), no. 1-2, 61–81.
- [58] S. Lloyd, *Least square quantization in pcm*, IEEE Trans. Inform. Theory **28** (1982), no. 2, 129–137.
- [59] Rainald Löhner, *Adaptive remeshing for transient problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **75** (1989), 195–214.

- [60] ———, *Extensions and improvements of the advancing front grid generation technique*, Communications in Numerical Methods in Engineering **12** (1996), 683–702.
- [61] ———, *Regriidding surface triangulations*, J. Comput. Phys. **126** (1996), no. 1, 1–10.
- [62] David Luebke, Benjamin Watson, Jonathan D. Cohen, Martin Reddy, and Amitabh Varshney, *Level of detail for 3d graphics*, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [63] Kwan-Liu Ma and Victoria Interrante, *Extracting feature lines from 3d unstructured grids*, VIS '97: Proceedings of the 8th conference on Visualization '97 (Los Alamitos, CA, USA), IEEE Computer Society Press, 1997, pp. 285–ff.
- [64] M. Mäntylä, *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, 1988.
- [65] M. Murayama, K. Nakahashi, and K. Matsushima, *Unstructured dynamic mesh for large movement and deformation*, 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 2002, pp. AIAA–2002–0122.
- [66] S. Owen and S. Saigal, *Surface mesh sizing control*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **47** (2000), 497–511.
- [67] S. Owen, D. White, and T. Tautges, *Facet-based surfaces for 3d mesh generation*, 11th International Meshing Roundtable, 2002, pp. 297–312.
- [68] S. Pav and N. Walkington, *A robust 3d delaunay refinement algorithm*, Proc. Intl. Meshing Roundtable, 2004.
- [69] J. Peraire, J. Peiró, and K. Morgan, *Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computation*, Journal of Computational Physics **103** (1992), 269–285.
- [70] Jim Ruppert, *A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*, J. Algorithms **18** (1995), no. 3, 548–585.
- [71] Szymon Rusinkiewicz, *Estimating curvatures and their derivatives on triangle meshes*, 3DPVT '04: Proceedings of the 3D Data Processing, Visualization, and Transmission, 2nd International Symposium on (3DPVT'04) (Washington, DC, USA), IEEE Computer Society, 2004, pp. 486–493.
- [72] R. Sadri, D. Leblond, and P. Piperni, *Coupling of a wing inverse design code to an euler/navier-stokes flow solver using mesh movement capabilities*, 50th AGM and Conference (Canada), 2003.

- [73] Jamshid A. Samareh, *Applications of quaternions for mesh deformation*, Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, The International Society of Grid Generation.
- [74] C. Scheidegger, S. Fleishman, and C. Silva, *Triangulating point-set surfaces with bounded error*, Proceedings of the third Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing (M. Desbrun and H. Pottman, eds.), The Eurographics Association, 2005, pp. 63–72.
- [75] J. Schreiner, C.E. Scheidegger, S. Fleishman, and C.T. Silva, *Direct (re)meshing for efficient surface processing*, (2006).
- [76] ———, *Direct (re)meshing for efficient surface processing*, SCI Institute Technical Report UUSCI-2006-013, University of Utah, 2006.
- [77] Jonathan Richard Shewchuk, *Delaunay refinement mesh generation*, Ph.D. thesis, School of Computer Science - Carnegie Mellon University, 1997.
- [78] ———, *Tetrahedral mesh generation by delaunay refinement*, Symposium on Computational Geometry, 1998, pp. 86–95.
- [79] ———, *What is a good linear element? interpolation, conditioning, and quality measures*, 11th International Meshing Roundtable (Ithaca, New York), September 2002, pp. 115–126.
- [80] ———, *What is a good linear finite element? - interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures*, <http://citeseer.nj.nec.com/shewchuk02what.html>, 2003.
- [81] J.R. Shewchuk, *Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation*, Computational Geometry: Theory and Applications **22** (2002), no. 1-3, 21–74.
- [82] K. Shimada, *Physically-based mesh generation: Automated triangulation of surfaces and volumes via bubble packing*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993.
- [83] Kenji Shimada, Yamada Atsushi, and Itoh Takayuki, *Anisotropic triangular meshing of parametric surfaces via close packing of ellipsoidal bubbles*, 6th International Meshing Roundtable, 1997, pp. 375–390.
- [84] Kenji Shimada and David C. Gossard, *Bubble mesh: automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing*, SMA '95: Proceedings of the Third Symposium on Solid Modeling and Applications, 1995, pp. 409–419.

- [85] ———, *Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis*, Comput. Aided Geom. Des. **15** (1998), no. 3, 199–222.
- [86] Kenji Shimada, Atsushi Yamada, and Takayuki Itoh, *Anisotropic triangulation of parametric surfaces via close packing of ellipsoids.*, International Journal of Computational Geometry and Applications **10** (2000), no. 4, 417–440.
- [87] Oren Sifri, Alla Sheffer, and Craig Gotsman, *Geodesic-based surface remeshing.*, IMR, 2003, pp. 189–199.
- [88] F.S. Sousa, N. Nangiavacchi, L.G. Nonato, A. Castelo, M.F. Tomé, V.G. Ferreira, J.A. Cuminato, and S. McKee, *A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3d multi-fluid flows with free surface*, Journal of computational physics **198** (2004), 469–499.
- [89] N.M. Sudharsan, R. Ajaykumar, K. Murali, and K. Kumar, *A comparative study of dynamic mesh updating methods used in the simulation of fluid-structure interaction problems with a num-linear free surface*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science **218** (2004), no. 3, 283–300.
- [90] Vitaly Surazhsky, Pierre Alliez, and Craig Gotsman, *Isotropic remeshing of surfaces: a local parameterization approach*, Proceedings of 12th International Meshing Roundtable (Santa Fe, New Mexico, USA), 2003, pp. 215–224.
- [91] Vitaly Surazhsky and Craig Gotsman, *High quality compatible triangulations*, Proceedings of 11th International Meshing Roundtable, September 2002, pp. 183–192.
- [92] ———, *Explicit surface remeshing*, Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing (Aachen, Germany), June 2003, pp. 17–28.
- [93] ———, *High quality compatible triangulations*, Engineering with Computers **20** (2004), no. 2, 147–156.
- [94] Gabriel Taubin, *A signal processing approach to fair surface design*, Yorktown Heights, N.Y. : IBM T.J. Watson Research Center, 1995.
- [95] ———, *Geometric signal processing on polygonal meshes*, STAR - state of the art report, Eurographics 2000, 2000, pp. 81–96.
- [96] Ketiv Tenenblat, *Introdução à geometria diferencial*, UnB, 1988.

- [97] S H Teng and C W Wong, *Unstructured mesh generation: Theory, practice, and perspectives*, International Journal of Computer Geometry **10** (2000), no. 3, 227–266.
- [98] Lloyd N. Thefethen and III David Bau, *Numerical linear algebra*, Siam, 1997.
- [99] Holger Theisel, Christian Rössl, Rhaleb Zayer, and Hans-Peter Seidel, *Normal based estimation of the curvature tensor for triangular meshes*, 12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, PG 2004 (Seoul, South Korea) (Daniel Cohen-Or, Hyeong-Seok Ko, Demetri Terzopoulos, and Joe Warren, eds.), IEEE, October 2004, pp. 288–297.
- [100] R. Tilch and Rainald Löhner, *Advances in discrete surface grid generation: Towards a reliable industrial tool for cfd*, AIAA-02-0862, 2002.
- [101] Greg Turk, *Re-tiling polygonal surfaces*, Computer Graphics **26** (1992), no. 2, 55–64.
- [102] Alex Vlachos, Jorg Peters, Chas Boyd, and Jason L. Mitchell, *Curved PN triangles*, Symposium on Interactive 3D Graphics, 2001, pp. 159–166.
- [103] J. Vorsatz, Ch. Rössl, and H.-P. Seidel, *Dynamic remeshing and applications*, SM '03: Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications (New York, NY, USA), ACM Press, 2003, pp. 167–175.
- [104] Jens Vorsatz, Christian Rössl, Leif Kobbelt, and Hans-Peter Seidel, *Feature sensitive remeshing*, Computer Graphics Forum, Proceedings of Eurographics 2001 (Alan Chalmers and Theresa-Marie Rhyne, eds.), Blackwell, 2001, pp. 393–401.
- [105] Desmond J. Walton and Dereck S. Meek, *A triangular g1 patch from boundary curves.*, Computer-Aided Design **28** (1996), no. 2, 113–123.
- [106] Andrew P. Witkin and Paul S. Heckbert, *Using particles to sample and control implicit surfaces*, SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA), ACM Press, 1994, pp. 269–277.
- [107] S. Yamakawa, *Unstructured three-dimensional mesh generation with controlled anisotropy and directionality*, Ph.D. thesis, Mechanical Engineering Department, Carnegie Mellon University, May 2002.
- [108] S. Yamakawa and K. Shimada, *High quality anisotropic tetrahedral mesh generation via ellipsoidal bubble packing*, 9th International Meshing Roundtable, 2000, pp. 263–273.

- [109] Soji Yamakawa and Kenji Shimada, *Anisotropic tetrahedral meshing via bubble packing and advancing front*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **57** (2003), 1923–1942.
- [110] ———, *Triangular/quadrilateral remeshing of an arbitrary polygonal surface via packing bubbles*, GMP '04: Proceedings of the Geometric Modeling and Processing 2004 (Washington, DC, USA), IEEE Computer Society, 2004, p. 153.
- [111] D. Zeng and C. R. Ethier, *A semi-torcional spring analogy model for updating unstructured meshes*, 9th Annual Conference of the CFD Society of Canada, 2001, p. 113.
- [112] Dehong Zeng and C. Ross Ethier, *A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3d moving domains*, Finite Elem. Anal. Des. **41** (2005), no. 11-12, 1118–1139.