UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Estudo de escoamentos transicionais tridimensionais de fluidos viscoelásticos modelados por Giesekus

Matheus Tozo de Araujo

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Matheus Tozo de Araujo

Estudo de escoamentos transicionais tridimensionais de fluidos viscoelásticos modelados por Giesekus

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Agosto de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A663e Araujo, Matheus Tozo de
 Estudo de escoamentos transicionais
 tridimensionais de fluidos viscoelásticos modelados
 por Giesekus / Matheus Tozo de Araujo; orientador
 Leandro Franco de Souza. -- São Carlos, 2021.
 117 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2021.

 1. Transição laminar-turbulenta. 2. Fluido
 Giesekus. 3. Simulação Numérica Direta. 4.
 Escoamento entre placas paralelas. 5. Simulação
 tridimensional. I. Souza, Leandro Franco de,
 orient. II. Título.

Matheus Tozo de Araujo

**Study of three-dimensional transitional flows of viscoelastic
fluids modeled by Giesekus**

Thesis submitted to the Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in
accordance with the requirements of the Computer
and Mathematical Sciences Graduate Program, for
the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
August 2021

*Aos meus pais Wilton e Salete,
ao meu irmão Marcelo e
à minha esposa Amanda,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por essa conquista.

Aos meus pais Wilton e Salete, meu irmão Marcelo e minha avó Zulmira por todo apoio e incentivo.

A minha esposa Amanda, por todo carinho, apoio, paciência e compreensão, que fizeram que meus dias se tornassem melhores durante essa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Franco de Souza, por toda dedicação dispensada durante minha orientação, amizade, conhecimentos transmitidos e pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

Aos professores Dra. Analice Costacurta Brandi, Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo e Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, pela amizade, disposição e colaboração no desenvolvimento desta tese.

Aos membros da banca por terem contribuído significativamente com contribuições e correções da presente tese.

A todos os docentes e funcionários do programa de pós-graduação em Ciências da Computação e Matemática Computacional do ICMC que, direta ou indiretamente, participaram do meu processo de formação.

À Leonardo Martinussi pela amizade e pela pronta ajuda técnica.

A todos os meus amigos do LMACC/ICMC-USP, em especial a Camila Lages, Filipe Nascimento (Pirata), Rafael Nakanishi, Marilaine Colnago, Wallace Casaca e Sardar Hussain pelos bons momentos compartilhados.

Aos meus irmãos de pesquisa, em especial a Juniormar Organista e Laison Furlan, pela parceria nos trabalhos e momentos de descontração.

Aos meus amigos Laura Bolivar e Lourenço Tércio Pereira pela amizade e oportunidade de conhecer um pouco da engenharia aeronáutica.

A todos os funcionários do ICMC-USP e todas as pessoas que contribuíram, direta e indiretamente, para o sucesso deste.

E finalmente, à CAPES, pelo suporte financeiro.

*“Não podemos resolver nossos problemas
com a mesma mentalidade de quando os criamos.”
(Albert Einstein)*

RESUMO

ARAÚJO, M. T. **Estudo de escoamentos transicionais tridimensionais de fluidos viscoelásticos modelados por Giesekus**. 2021. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

O presente trabalho investiga, por meio de Simulação Numérica Direta, a evolução e a influência de perturbações não estacionárias em escoamentos viscoelásticos tridimensionais entre placas paralelas, governados pela equação constitutiva Giesekus. Utiliza-se a formulação vorticidade-velocidade a fim de facilitar os cálculos. As equações são resolvidas utilizando um método de diferenças finitas compactas de alta ordem com um método pseudo-espectral na direção transversal. Com o objetivo de avaliar o comportamento das perturbações no escoamento, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se o parâmetro adimensional α_G do modelo Giesekus, o número de onda β_z e o número de Weissenberg Wi e os resultados foram comparados com o fluido Newtoniano e resultados da Teoria de Estabilidade Linear. Os resultados mostraram que o aumento do parâmetro α_G do modelo Giesekus não causa grande influência na estabilidade dos escoamentos, tornando-os um pouco mais estáveis. O aumento do número de onda β_z mostrou que o escoamento tende a ficar mais estável. E os resultados com a variação de Wi mostraram que o aumento do número de Weissenberg torna o escoamento mais estável e que a partir de um determinado valor de Wi , esse parâmetro passa a não ter tanta influência na estabilidade do escoamento.

Palavras-chave: Transição laminar-turbulenta, Fluido Giesekus, Simulação Numérica Direta, Escoamento entre placas paralelas, Simulação tridimensional.

ABSTRACT

ARAÚJO, M. T. **Study of three-dimensional transitional flows of viscoelastic fluids modeled by Giesekus.** 2021. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

The present work investigates through Direct Numerical Simulation the evolution and the influence of non-stationary disturbances in three-dimensional viscoelastic flows between parallel plates, governed by the Giesekus constitutive equation. The vorticity-velocity formulation is used in order to facilitate calculations. The equations are solved using a high-order compact finite difference method with a pseudo-spectral method in the transversal direction. In order to evaluate the behavior of the flow disturbances, different numerical simulations were performed by varying the dimensionless parameter α_G of the Giesekus model, the wave number β_z and the Weissenberg number Wi . The results were compared with the Newtonian fluid and results from the Linear Stability Theory. The results showed that the increase of the parameter α_G of the Giesekus model does not have a great influence on the flow stability, making it a little more stable. The increase in the β_z wave number showed that the flow tends to become more stable. And the results with the variation of Wi showed that the increase of the Weissenberg number makes the flow more stable and that after a certain value of Wi , this parameter does not have as much influence on the flow stability.

Keywords: Laminar-turbulent transition, Giesekus fluid, Direct Numerical Simulation, Flow between parallel plates, Tridimensional simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração do experimento e dos resultados obtidos por Osborne Reynolds.	29
Figura 2 – Classificação da estabilidade do sistema.	30
Figura 3 – Domínio computacional.	58
Figura 4 – Gráficos da função $f_p(x)$ e sua segunda derivada entre os pontos x_1 e x_2	58
Figura 5 – Ilustração do Ciclo V utilizado no método multigrid.	63
Figura 6 – Ponderação utilizada para as operações de restrição.	64
Figura 7 – Ponderação utilizada para a interpolação bilinear.	65
Figura 8 – Gráfico da função multiplicadora presente na região de amortecimento próxima a entrada do domínio.	66
Figura 9 – Efeito de se aplicar n vezes a função $f_2(x)$ para relaminarização.	68
Figura 10 – Exemplo de decomposição, com as regiões de sobreposição, do domínio para a paralelização, usando 8 EPs.	70
Figura 11 – Comparação entre a solução numérica obtida usando uma técnica DNS e a solução analítica do escoamento Oldroyd-B.	74
Figura 12 – Decaimento do erro com o refinamento de malha para o escoamento base.	75
Figura 13 – Comparação entre a solução numérica obtida usando uma técnica DNS e a solução semi-analítica do escoamento Giesekus puramente polimérico. Tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy}	76
Figura 14 – Decaimento dos erros de convergência com o refinamento da malha escoamento base do modelo Giesekus, para $\beta_{nn} = 0$	77
Figura 15 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u para as simulações contendo 729 e 1465 pontos na direção longitudinal x	78
Figura 16 – Comparação entre os perfis das componentes de velocidade e vorticidade dos escoamentos contendo $imax = 729$ e $imax = 1465$ pontos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio computacional. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z	79
Figura 17 – Comparação entre os perfis das componentes de velocidade e vorticidade dos escoamentos contendo $imax = 729$ e $imax = 1465$ pontos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio computacional. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz}	80
Figura 18 – Valor máximo da perturbação da velocidade u na direção x e curva neutra de estabilidade obtida com o código LST, para os escoamentos Newtonianos 2D.	82
Figura 19 – Comportamento da taxa de amplificação α_i na direção x	82

Figura 20 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade, u_{max} na direção x , para escoamentos Newtonianos 3D.	84
Figura 21 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade, u_{max} na direção x , para escoamentos do tipo Oldroyd-B 2D.	85
Figura 22 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de β_z . (a) Caso A, (b) Caso B e (c) Caso C.	89
Figura 23 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de α_G . (a) Caso A, (b) Caso B, (c) Caso C.	91
Figura 24 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso A. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z	92
Figura 25 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso A. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz}	93
Figura 26 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso B. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z	94
Figura 27 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso B. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz}	95
Figura 28 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso C. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z	96
Figura 29 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso C. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz}	97
Figura 30 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de Wi . (a) Caso A, (b) Caso B e (c) Caso C.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação de Instabilidades.	49
Tabela 2 – Dados escolhidos para Simulação Numérica Direta para os casos Newtonianos 2D.	81
Tabela 3 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos Newtonianos 2D. . .	83
Tabela 4 – Dados escolhidos para Simulação Direta Numérica para os casos Newtonianos 3D.	83
Tabela 5 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos Newtonianos 3D. . .	83
Tabela 6 – Dados escolhidos para Simulação Numérica Direta para os casos do tipo Oldroyd-B 2D.	85
Tabela 7 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos do tipo Oldroyd-B 2D. . .	85
Tabela 8 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para diferentes números de onda transversal.	88
Tabela 9 – Dados escolhidos para análise da influência do parâmetro α_G	90
Tabela 10 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para os casos de variação do parâmetro α_G	90
Tabela 11 – Dados escolhidos para análise da influência de Wi	99
Tabela 12 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para o caso de variação de Wi . . .	100

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CS	Correction Storage
DNS	Direct Numerical Simulation
EP	Elemento de Processamento
FAS	Full Aproximation Scheme
FFT	Fast Fourier Transform
FW	Full Weight
HWNP	High Weissenberg Number Problem
LSOR	Line Successive Over Relaxation
LST	Linear Stability Theory
MPI	Message-Passing Interface
SI	Straight Injection
TS	Tollmien-Schlichting
UCM	Upper-Convected Maxwell

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}$ — tensor conformação

A_p — constante utilizada para ajustar a amplitude das perturbações

$\mathbf{B}$ — tensor simétrico que comuta com $\mathbf{A}$

c — velocidade da onda

$cc.$ — complexo conjugado

$\mathbf{D}$ — tensor taxa de deformação

E_i — erro na norma L_i , $i = 1, 2, \infty$

$f_p(x)$ — função utilizada para introdução de perturbações não estacionárias

$f_1(x)$ — função utilizada para relaminarização do escoamento na entrada do domínio

$f_2(x)$ — função utilizada para relaminarização do escoamento na saída do domínio

$g = \{\mathbf{u}, \omega, a, b, c, \mathbf{T}\}$ — variáveis no espaço físico

$g_k = \{\mathbf{u}_k, \omega_k, a_k, b_k, c_k, \mathbf{T}_k\}$ — variáveis no espaço de Fourier

i — unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$

$\mathbf{I}$ — tensor identidade

$imax$ — número de pontos na direção x

$inter$ — sobreposição de subdomínios

$jmax$ — número de pontos na direção y

k — modo de Fourier ($0 \leq k \leq K$)

K — número de modos de Fourier

L — comprimento de escala

$nprocs$ — número de elementos de processamento

$\mathbf{O}$ — matriz de autovetores da tensor conformação $\mathbf{A}$

p — pressão

p_b — pressão no escoamento base

$ptsx$ — pontos na direção x

pts_y — pontos na direção y

Re — número de Reynolds

s — solução numérica

$\bar{s}$ — solução analítica

t — tempo

$\mathbf{T}$ — tensor extra-tensão

$\mathbf{T}_b$ — tensor extra-tensão no escoamento base

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ — produto tensorial

∇
 $\mathbf{T}$ — derivada contra-variante

$\mathbf{u}$ — campo de velocidade

$\mathbf{u}_b$ — campo de velocidade no escoamento base

$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{T}}$ — componentes do escoamento perturbado

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{\mathbf{T}}$ — amplitudes das perturbações

U — velocidade de escala

Wi — número de Weissenberg

x — coordenada associada à direção longitudinal do escoamento

x_0 — coordenada na direção longitudinal do contorno de entrada do domínio computacional

x_1 — coordenada na direção longitudinal do início da região de introdução das perturbações próximo ao contorno de entrada

x_2 — coordenada na direção longitudinal do fim da região de introdução das perturbações próximo ao contorno de entrada

x_3 — coordenada na direção longitudinal do início da região de relaminarização do escoamento próximo ao contorno de saída

x_4 — Coordenada na direção longitudinal do fim da região de relaminarização do escoamento próximo ao contorno de saída

x_{max} — coordenada na direção longitudinal do contorno de saída do domínio computacional

$\mathbf{x}$ — vetor de coordenadas cartesianas

y — coordenada associada à direção normal ao escoamento

y_{max} — coordenada na direção normal à superfície do contorno superior do domínio computacional

z — coordenada associada à direção transversal ao escoamento

α — número de onda na direção x
 α_G — parâmetro de mobilidade que regula o comportamento "shear shinning" do fluido
 β_k — número de onda na direção transversal ao escoamento do modo k de Fourier
 β_{nn} — parâmetro que controla a contribuição de solvente Newtoniano
 β_z — número de onda na direção transversal ao escoamento
 ε — função dependente dos pontos de discretização na direção longitudinal x
 ε_R — valor de referência adotado no método multigrid
 η_0 — coeficiente de viscosidade total do fluido
 η_p — coeficiente de viscosidade do polímero
 η_s — coeficiente de viscosidade do solvente
 ϕ — ângulo de uma onda tridimensional em relação ao escoamento médio
 Φ — logaritmo do tensor conformação
 λ — tempo de relaxação do fluido
 λ_1, λ_2 — autovalores da matriz conformação $\mathbf{A}$
 λ_z — comprimento de onda na direção transversal ao escoamento
 ω — frequência de propagação das ondas
 ω_t — frequência temporal das perturbações
 ω_x — componente de vorticidade na direção longitudinal do escoamento
 ω_{x_b} — componente de vorticidade na direção longitudinal do escoamento base
 ω_y — componente de vorticidade na direção normal ao escoamento
 ω_{y_b} — componente de vorticidade na direção normal ao escoamento base
 ω_z — componente de vorticidade na direção transversal ao escoamento
 ω_{z_b} — componente de vorticidade na direção transversal ao escoamento base
 Ω_k — representa as componentes e do tensor não-Newtoniano
 ρ — densidade do fluido
 $\Theta, \mathbf{N}$ — tensores anti-simétricos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Objetivos	31
1.2	Organização do trabalho	31
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	39
3.1	Equações do Modelo	39
3.2	Adimensionalização	40
3.3	Sistema de Equações em Coordenadas Cartesianas	41
3.4	Simulação Numérica Direta	42
3.5	Teoria de Estabilidade Linear	45
3.5.1	<i>Análise Espacial e Temporal de Instabilidades</i>	49
3.6	Escoamento Base	50
3.6.1	<i>Formulação Log-Conformation</i>	51
3.7	Condições de Contorno	53
3.7.1	<i>Condições de Contorno do Escoamento Base</i>	53
3.7.2	<i>Condições de Contorno do Escoamento Perturbado</i>	53
4	MÉTODO NUMÉRICO	55
4.1	Método Espectral	55
4.2	Simulação Numérica Direta	57
4.2.1	<i>Introdução das Perturbações Bidimensionais</i>	57
4.2.2	<i>Derivadas Temporais</i>	59
4.2.3	<i>Derivadas Espaciais</i>	59
4.2.3.1	<i>Cálculo da Primeira Derivada</i>	59
4.2.3.2	<i>Cálculo da Segunda Derivada</i>	60
4.2.4	<i>Equação de Poisson</i>	61
4.2.4.1	<i>Método Multigrid</i>	63
4.2.5	<i>Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento</i>	66
4.2.6	<i>Relaminarização do Escoamento</i>	66
4.2.7	<i>Cálculo da Vorticidade na Parede</i>	68
4.2.8	<i>Filtragem Espacial</i>	69
4.2.9	<i>Decomposição do Domínio</i>	70

4.2.10	<i>Algoritmo Computacional</i>	71
5	VERIFICAÇÃO	73
5.1	Verificação do Escoamento Base	73
5.1.1	<i>Modelo Oldroyd-B</i>	73
5.1.2	<i>Modelo Giesekus</i>	75
5.2	Verificação do Código que Simula Escoamento Perturbado	77
5.2.1	<i>Verificação da Influência da Região de Relaminarização</i>	78
5.2.2	<i>Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Newtonianos 2D</i>	81
5.2.3	<i>Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Newtonianos 3D</i>	83
5.2.4	<i>Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Oldroyd-B 2D</i>	84
6	RESULTADOS	87
6.1	Influência do Número de Onda Transversal β_z	87
6.2	Influência do Parâmetro α_G	88
6.3	Influência do Número de Weissenberg	98
7	CONCLUSÃO	101
	REFERÊNCIAS	103
APÊNDICE A	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO GIESEKUS	113
A.1	Solução Semi-analítica	116

INTRODUÇÃO

Uma vez que estamos cercados por fluidos, das mais diversas características e estado, é natural a necessidade de estudá-los e compreender o seu comportamento no meio. A partir dessa necessidade, no século III a.C., criou-se os primeiros conceitos da atual mecânica dos fluidos, com Arquimedes (287 - 212 a.C.) estabelecendo os princípios básicos de empuxo e flutuação. Considerada como o ramo da física que estuda as interações dos fluidos, a mecânica dos fluidos começou realmente a se desenvolver com os estudos de Leonardo Da Vinci (1432 - 1519), que deduziu a equação de conservação de massa para um escoamento permanente e unidimensional e, além disso, fez anotações com descrições precisas de ondas, jatos, ressaltos hidráulicos e projetos para baixo e alto arrasto. Atualmente, pode-se observar a presença da mecânica dos fluidos nas mais diversas aplicações, como escoamento de água em canais e redes de distribuição, extração de petróleo e gás natural de jazidas petrolíferas, movimento do sangue em vasos sanguíneos, cálculo de arrasto aerodinâmico de automóveis e outros meios de transporte, controle de ruído de aeronaves, dentre muitos outros.

Os fluidos podem ser divididos em fluidos ideais (não podem ser comprimidos e não possuem viscosidade), fluidos reais (têm viscosidade, portanto, de um modo geral pode-se dizer que todos os fluidos são reais), fluidos Newtonianos (se comportam de acordo com as leis de viscosidade de Newton, logo a viscosidade do fluido não varia com a força aplicada) e fluidos não-Newtonianos (não obedecem às leis de Newton para viscosidade). Neste último, pode-se dizer que a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional a taxa de deformação, portanto, o coeficiente de viscosidade desses fluidos não é constante. Ao contrário dos fluidos Newtonianos, cuja tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação, com a viscosidade sendo a constante de proporcionalidade.

Dentro da categoria dos fluidos não-Newtonianos, existem os fluidos viscoelásticos, assim denominados por apresentarem propriedades viscosas (obedecem a Lei de Newton para a viscosidade) e elásticas (obedecem a Lei de Hooke ([HOOKE, 1678](#)) para a forma elástica)

simultaneamente. De um modo geral, quando submetidos a uma tensão de cisalhamento, sofrem deformação, porém, quando esta cessa, as características elásticas fazem com que haja recuperação da deformação sofrida, mesmo que não total. Neste tipo de fluido, as relações entre as tensões e os gradientes de velocidade são não-lineares e não têm uma forma padrão universalmente válida para cada fluido, e em cada tipo de escoamento. Assim, o seu estudo faz com que seja necessário a escolha de uma equação constitutiva, que melhor descreva o processo a ser estudado.

Apesar de complexas, as equações constitutivas (ou modelos constitutivos) que descrevem o comportamento de fluidos viscoelásticos não-lineares tem grande aplicação na modelagem de escoamentos poliméricos devido a grande capacidade de descrever os fenômenos não-lineares. Na literatura encontram-se muitos trabalhos que tratam de modelos constitutivos de fluidos viscoelásticos, tais como os modelos diferenciais de Maxwell (BERIS; ARMSTRONG; BROWN, 1987; MOMPEAN; DEVILLE, 1997), Oldroyd-B (MOMPEAN; DEVILLE, 1997; BRASSEUR *et al.*, 1998; PHILLIPS; WILLIAMS, 2002; ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003), White-Metzner (WHITE; WHITE, 1991), Giesekus (GIESEKUS, 1962), Leonov (LEONOV, 1976), modelos do tipo FENE (STEVENSON; BIRD, 1971; JR., 1972; CHRISTAINSEN; BIRD, 1977; BIRD; DOTSON; JOHNSON, 1980; BIRD; DEAGUIAR, 1983; OLIVEIRA, 2002), PTT (THIEN; TANNER, 1977; ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003) e derivados, e os modelos integrais de Maxwell (KAYE, 1962) e K-BKZ (LUO; TANNER, 1986; LUO; TANNER, 1988). O modelo de Maxwell foi uma das primeiras tentativas de descrever o efeito da viscoelasticidade de um determinado fluido. Uma outra característica importante dos fluidos viscoelásticos é a presença das diferenças de tensões normais (BIRD; DEAGUIAR, 1983), relacionadas a efeitos importantes no comportamento dos escoamentos e, inclusive, ao surgimento de instabilidades.

Todos os escoamentos estão sujeitos ao surgimento de instabilidades, que podem ser de natureza cizalhante, influência de paredes, efeitos viscosos, dentre outras fontes de geração de ruído. Em geral, o seu aparecimento em escoamentos Newtonianos é uma consequência direta da presença do termo convectivo não-linear na equação conservação de quantidade de movimento, o qual é amplificado com o aumento do número de Reynolds. Entretanto, em escoamentos viscoelásticos, as não-linearidades também se fazem presentes na equação do tensor, oriundas do modelo constitutivo considerado. Várias instabilidades puramente elásticas têm sido relatadas em trabalhos experimentais ou teóricos através da análise da estabilidade desse tipo de escoamento (LARSON; SHAQFEH; MULLER, 1990; SHAQFEH; MULLER; LARSON, 1992; LARSON, 1992). No entanto, ainda hoje estudos em escoamentos paralelos não foram amplamente desenvolvidos.

Os estudos na área de estabilidade tiveram origem com as ideias de Osborne Reynolds e Lord Rayleigh. Em 1883, Osborne Reynolds, estudando escoamentos dentro de tubos, apresentou o experimento de Reynolds (Figura 1), onde investiga o fenômeno de transição de escoamento laminar para escoamento turbulento. Em seu experimento, Reynolds fez uso de um traçador no centro de tubos de vidro para visualizar o comportamento do escoamento. Em seus testes,

verificou-se que o escoamento poderia assumir forma laminar ([Figura 1a](#)) ou turbulenta ([Figura 1b](#)), de acordo com um parâmetro adimensional, futuramente denominado número de Reynolds (Re), que representa a razão de forças inerciais e viscosas. A [Figura 1c](#) mostra as estruturas de turbulência captadas por Reynolds por meio de feixes de luz, colocados na lateral do tubo.

Figura 1 – Ilustração do experimento e dos resultados obtidos por Osborne Reynolds.

Esboço do experimento de Osborne Reynolds, 1883.

Fonte: [Reynolds \(1883\)](#).

Osborne Reynolds identificou que o processo de transição de um escoamento de fluido à turbulência acontece pela introdução de perturbações num escoamento inicialmente estável (laminar). Essas perturbações são amplificadas, multiplicadas e se transformam em turbulência. Lord Rayleigh, por sua vez, desenvolveu estudos teóricos relacionados à investigação de instabilidades em escoamentos paralelos de fluidos não viscosos. Rayleigh determinou que para um escoamento ser instável (passível de sofrer a transição para turbulência), deve existir um ponto de inflexão no perfil de velocidade deste escoamento.

Em meados do século XX, Willian M. Orr (em 1907) e Arnold Sommerfeld (em 1908), realizaram estudos independentes sobre a propagação de perturbações em escoamento laminar, dando origem a conhecida equação de Orr-Sommerfeld. Essa equação possuía como solução perturbações instáveis que surgiam no escoamento de forma periódica. No final dos anos 20 e início da década de 30, Walter Tollmien ([TOLLMIEN, 1928](#)) e Hermann Schlichting ([SCHLICHTING, 1933](#)) estudaram os efeitos dessas perturbações no perfil de camada limite sobre uma placa plana (efeito até então observado por Ludwig Prandtl) e as modelaram como ondas que se atenuavam ou amplificavam, dependendo da estabilidade do escoamento. Tais ondas foram denominadas ondas de Tollmien-Schlichting (TS). As ondas TS são definidas como o autovalor mais instável da equação de Orr-Sommerfeld e este autovalor corresponde à taxa

de amplificação das ondas de perturbação no espaço (análise espacial) ou no tempo (análise temporal). Ainda em meados da década de 30, Squire (1933) publicou um estudo que considerava o escoamento de um fluido viscoso entre placas paralelas. Seu principal resultado deu origem ao "Teorema de Squire" que demonstra que para cada modo instável tridimensional, existe um modo bidimensional associado com número de Reynolds menor, portanto, os modos bidimensionais são mais instáveis.

De um modo geral, a análise de estabilidade de um determinado escoamento pode ser feita a partir do sistema de equações que o descrevem. Para facilitar o entendimento da análise de estabilidade de um sistema, Kundu (2001) fez uma analogia com o comportamento de uma esfera em diferentes superfícies. Segundo Kundu (2001), o sistema pode ser definido como:

- *Incondicionalmente estável*, quando o sistema retorna ao seu estado inicial independente da amplitude das perturbações, ou seja, a amplitude das perturbações decresce (Figura 2a);
- *Incondicionalmente instável*, quando o sistema não retorna ao seu estado inicial independente da amplitude das perturbações, ou seja, a amplitude das perturbações cresce (Figura 2b);
- *Neutro*, quando a amplitude da perturbação permanece constante (Figura 2c);
- *Condicionalmente estável*, quando o sistema depende da amplitude das perturbações, ou seja, existe um valor crítico da amplitude para o qual o sistema pode ser estável ou instável (Figura 2d);

Figura 2 – Classificação da estabilidade do sistema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma observação válida para o caso de um sistema instável é que este pode apresentar dois comportamentos, ou a amplitude das perturbações cresce infinitamente ou a amplitude

crece até chegar a um novo estado de equilíbrio. Neste último estado, associa-se um novo sistema inicial o qual pode ser estável ou instável à outras perturbações. Logo, é possível concluir que pode haver vários estágios de transição à turbulência.

Com o progresso no estudo teórico de estabilidade de escoamentos e com o progresso tecnológico que houve a partir do final do século XX e começo do século XXI, a área de controle, com as simulações numéricas de escoamentos, se tornou importante para viabilização e otimização de diversos tipos de escoamentos necessários no cotidiano da sociedade moderna, como por exemplo no transporte de água por meio de tubulações sujeitas a perturbações devido a terremoto, vibração estrutural, vibração sonora ou rugosidade na estrutura que podem fazer com que o escoamento transicione para turbulência, podendo assim causar danos na estrutura das tubulações. Tais danos podem ser evitados fazendo a modelagem adequada das condições ideais para o escoamento e para o fluido que se pretende escoar. Vale ressaltar que podem existir situações em que escoamentos transicionais são capazes de causar mais danos que escoamentos turbulentos e que as vezes estes escoamentos podem ser considerados benéficos, como quando usados no processo de misturas.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo de estabilidade de escoamentos transicionais tridimensionais entre placas paralelas para fluidos viscoelásticos, modelados pelo equação constitutiva do modelo Giesekus, por meio do método de Simulação Numérica Direta (DNS). As análises são feitas com base no estudo da propagação de ondas de Tollmien-Schlichting, verificando-se o comportamento das perturbações a partir da variação de parâmetros presentes no modelo constitutivo, do número de onda na direção transversal e a constante do número de Weissenberg (Wi).

Os objetivos específicos deste trabalho, com relação a análise de estabilidade dos escoamentos tridimensionais, são:

- Verificar a influência do número de onda na direção transversal, β_z ;
- Verificar a influência do parâmetro de mobilidade α_G do modelo Giesekus;
- Verificar a influência da constante do número de Weissenberg.

1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: é feita uma breve revisão bibliográfica dos principais resultados na área.

- Capítulo 3: são apresentadas as equações que modelam escoamentos tridimensionais, incompressíveis e isotérmicos para um fluido não-Newtoniano. Considera-se a equação constitutiva do modelo Giesekus para o tratamento do fluido viscoelástico. As equações são apresentadas na forma dimensional e adimensional, com a formulação vorticidade-velocidade para a Simulação Numérica Direta.
- Capítulo 4: são descritos os métodos numéricos utilizados para a obtenção da solução das equações propostas no Capítulo 3 e um algoritmo computacional para resolução do sistema.
- Capítulo 5: é feita uma verificação dos códigos utilizados nas simulações.
- Capítulo 6: são apresentados os resultados numéricos das simulações utilizando Simulação Numérica Direta, em que é investigado a estabilidade de um escoamento incompressível tridimensional entre placas paralelas para um fluido viscoelástico, modelado pela equação constitutiva Giesekus.

Por fim, são apresentadas as conclusões da pesquisa desenvolvida.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Muitos são os trabalhos na literatura sobre análise de estabilidade em escoamentos estacionários, porém poucos são relativos ao estudo de estabilidade em escoamentos transicionais de fluidos viscoelásticos.

Embora [Gorodtsov e Leonov \(1967\)](#) seja considerado por muitos o pioneiro no estudo de estabilidade linear de escoamentos de fluidos viscoelásticos, um ano antes, [Potter \(1966\)](#) derivou as soluções assintóticas para a equação de Orr-Sommerfeld para o caso do escoamento de Poiseuille-Couette e observou que o movimento da parede superior exerce um forte efeito estabilizador no escoamento, mais precisamente, o escoamento é considerado estável para qualquer número de Reynolds finito quando a velocidade U da placa excede 70% da velocidade máxima W da componente Poiseuille do escoamento. Seus resultados mostraram também que o escoamento pode se tornar mais instável quando a relação U/W está dentro de uma pequena faixa, entre 0,2 e 0,4, com o aumento da componente Couette. No ano seguinte, uma análise fracamente não linear foi realizada por [Reynolds e Potter \(1967\)](#) que mostraram que o escoamento de Poiseuille-Couette é estável para perturbações infinitesimais, independente do número de Reynolds, quando o componente Couette é suficientemente grande.

[Gorodtsov e Leonov \(1967\)](#) utilizaram o escoamento de Couette para seus estudos em análise de estabilidade com fluidos viscoelásticos. Seu trabalho apresentou uma análise teórica da estabilidade desse tipo de escoamento para valores muito pequenos do número de Reynolds. Os autores optaram por utilizar o modelo de Maxwell para o tratamento do fluido viscoelástico, por possuir viscosidade e tempo de relaxação constantes e pela possibilidade de descrever o fenômeno da relaxação dos tensores. [Gorodtsov e Leonov \(1967\)](#) mostraram, com resultados analíticos, que para o limite $Re \rightarrow 0$, esse tipo de escoamento é sempre estável, independente da intensidade das forças elásticas.

Ainda no mesmo ano, [Hains \(1967\)](#) apresentou seu estudo de estabilidade por meio do método de modos normais para o escoamento de Poiseuille-Couette, a partir de um método

numérico modificado baseado no método desenvolvido pelo próprio autor, apresentado em (HAINS; PRICE, 1962). O autor apresentou as curvas neutras de estabilidade, bem como a variação do número de Reynolds crítico, para diferentes velocidades da parede superior do escoamento. Hains (1967) observou que o número de Reynolds crítico tende a aumentar de acordo a movimentação da parede, na mesma direção ou na direção oposta ao escoamento, ou seja, o escoamento tende a se tornar mais estável com o aumento da velocidade da parede.

No trabalho de Bhatnagar e Giesekus (1970) é feita a análise de estabilidade do escoamento de Couette por meio do método de Galerkin e um método de integração direta, com a aplicação do modelo Giesekus. Além disso, faz-se uma análise do tipo celular, onde as instabilidades são ocasionadas pela presença das moléculas de polímero no fluido. Em suas análises, os autores observaram que dois tipos de perturbações, com diferentes larguras de células, podem existir simultaneamente, desde que o parâmetro que representa a razão entre as forças inerciais e elásticas esteja em um determinado intervalo. Além disso, constataram a presença de instabilidades geradas pela viscoelasticidade do fluido em escoamentos que apresentam a segunda diferença de tensão normal positiva. Tal fenômeno também foi observado por outros autores, porém até o momento, não há estudos que comprovem a relação do surgimento das instabilidades com o fato da segunda diferença de tensão normal ser positiva.

Giesekus e Bhatnagar (1971) estudaram o fenômeno denominado *overstability*, que corresponde a existência de instabilidades periódicas de tipo celular atribuídas à elasticidade do fluido, no escoamento de Couette. Este artigo complementa os anteriores da série, que tratavam de instabilidades estacionárias do tipo celular. Um dos resultados mais importantes observados pelos autores é que a viscoelasticidade favorece o surgimento destas instabilidades, mesmo na ausência de forças inerciais, se a segunda diferença de tensão normal for escolhida positiva. A partir de um esquema de linearização, as equações de perturbação são derivadas e as soluções analíticas são fornecidas.

Hains (1971) e Sheppard (1972) foram os primeiros a estudar a estabilidade do escoamento de Poiseuille entre placas porosas e com um escoamento transversal, resultante da injeção de fluido em uma das paredes e a sucção feita na parede oposta. Hains (1971) estudou também a estabilidade do escoamento de Couette-Poiseuille sobre a mesma influência do escoamento transversal. O autor utilizou a análise de estabilidade linear considerando um escoamento com gradiente de pressão constante ao longo do canal, enquanto Sheppard (1972) utilizou o método de Galerkin para confirmar os resultados obtidos por (HAINS, 1971). Ambos os autores concluíram que uma pequena quantidade de injeção de fluido no escoamento transversal causa um aumento significativo no número de Reynolds crítico, o que faz com que o escoamento transversal possua um efeito estabilizador. Além disso, foi observado no escoamento de Poiseuille que o escoamento transversal diminui a velocidade máxima do perfil de velocidade e o desloca para longe da parede onde o fluido é injetado. Já no escoamento de Couette-Poiseuille, quando a injeção é feita na parede móvel, a velocidade máxima é aumentada e deslocada em direção à parede fixa.

Seguindo a linha de pesquisa apresentada por (HAINS, 1971), Bhatnagar e Sharma (1974) utilizou o mesmo escoamento transversal para investigar a estabilidade de um escoamento de Couette de um fluido viscolástico, com perturbações do tipo celular e o método de Galerkin em sua pesquisa. Além de confirmar os resultados apresentados por (HAINS, 1971), os autores observaram que o escoamento transversal, na presença da viscoelasticidade, pode apresentar um efeito tanto estabilizador quanto desestabilizador, de acordo com a faixa na qual o parâmetro que representa a razão entre as forças inerciais e elásticas se encontra. Estes resultados serviram de motivação para investigar o efeito do escoamento transversal aplicado a outros tipos de escoamentos, como apresentado em (BHATNAGAR; SHARMA, 1975), onde a análise de estabilidade é feita no escoamento de Poiseuille, apresentando resultados semelhantes ao escoamento de Couette.

Após uma hipótese mal interpretada do trabalho de Gorodtsov e Leonov (1967), Renardy e Renardy (1986) acreditaram na existência de instabilidades no escoamento de Couette para um fluido Maxwell devido às forças elásticas, mesmo para baixos números de Reynolds. Posteriormente, os autores esclareceram o mal entendido e mostraram a partir de um método espectral para o cálculo dos autovalores que este escoamento é sempre estável, independente do número de Reynolds. Renardy e Renardy (1986) observaram também que a discretização numérica utilizada, bem como a elasticidade podem apresentar um efeito desestabilizador no escoamento.

Lim e Schowalter (1987) apresentaram em seu trabalho uma análise de estabilidade linear de um escoamento de Poiseuille para pequenas perturbações, utilizando o modelo Giesekus e um método pseudo-espectral baseado nos polinômios de Chebyshev para as análises. O modelo Giesekus foi escolhido por permitir uma análise do parâmetro que controla o efeito "shear thinning" do fluido e por apresentar segunda diferença de tensão normal, características presentes em fluidos viscoelásticos. Os autores confirmaram os resultados de Ho e Denn (1977) e Lee e Finlayson (1986) da não existência de instabilidades em um fluido UCM (do inglês, *Upper-Convected Maxwell*) devido à viscoelasticidade. A comparação dos modelos Giesekus e Maxwell mostrou que há pouca diferença entre os dois, sendo o fluido Giesekus um pouco mais estável que o fluido Maxwell, para os parâmetros escolhidos. Lim e Schowalter (1987) concluíram também que no modelo Giesekus, os modos se tornam cada vez menos estáveis à medida que o número de Weissenberg ou o número de onda real são aumentados, mas não encontraram modos instáveis.

Muller, Larson e Shaqfeh (1989) reportaram em seu artigo resultados experimentais e teóricos, obtidos por meio do método de Galerkin, do efeito da elasticidade na estabilidade do escoamento de Taylor-Couette para um fluido Boger sem cisalhamento (BOGER, 1977; BOGER; NGUYEN, 1978; PRILUTSKI *et al.*, 1983), descrito pelo modelo Oldroyd-B. Além da boa concordância dos resultados experimentais com a teoria, os autores observaram a existência de instabilidades puramente elásticas por meio da análise de estabilidade linear, visualização

do escoamento e medições reométricas. As mesmas instabilidades puramente elásticas foram também observadas por [Larson, Shaqfeh e Muller \(1990\)](#), com número de Taylor igual a zero, para um fluido Oldroyd-B e o mesmo escoamento de Taylor-Couette.

[Azaiez e Homsy \(1994\)](#) utilizaram a análise de estabilidade linear, e simulações não lineares, para estudar os efeitos da viscoelasticidade na estabilidade de escoamentos com superfície livre. Os autores utilizaram os modelos Giesekus, Oldroyd-B e o modelo corrotacional de Jeffreys para o tratamento do fluido viscoelástico, porém tiveram seus principais resultados baseados no modelo Oldroyd-B. Os modelos foram estudados no limite em que o número de Weissenberg (Wi) e o número de Reynolds (Re) tendem ao infinito, mas com razão Re/Wi finita, o que faz com que os efeitos da elasticidade se concentrem nos modos de instabilidade puramente inerciais. Os resultados obtidos com o modelo Oldroyd-B mostraram que a elasticidade tende a atuar de forma significativa na estabilização de escoamentos com altos valores de Wi . Já os demais modelos reológicos, modelos Giesekus e corrotacional de Jeffreys, não mostraram mudanças significativas na estabilidade da camada de mistura invíscida.

[Blonce \(1997\)](#) utilizou o modelo Giesekus para efetuar a análise de estabilidade linear do escoamento bidimensional entre placas paralelas para fluidos com alta concentração polimérica, ou seja, com baixos números de Reynolds ($Re \sim O(1)$), e fluidos diluídos com um solvente Newtoniano, com altos valores de Reynolds ($Re \sim O(10^3)$). Os resultados envolvendo fluidos com alta concentração polimérica mostraram estar de acordo com outros trabalhos da literatura, não apresentando instabilidades (no sentido linear) devido a viscoelasticidade. Os principais resultados apresentados no seu trabalho, ficaram por conta da análise de fluidos diluídos com solvente Newtoniano, algo que nunca havia sido abordado envolvendo o modelo Giesekus. Esses resultados mostraram a influência dos efeitos da elasticidade na desestabilização do escoamento.

Alguns anos mais tarde, [Atalik e Keunings \(2002\)](#) realizaram uma análise de estabilidade temporal não-linear usando um método de Galerkin, a partir da propagação de perturbações bidimensionais de amplitude finita, em escoamentos viscoelásticos de Poiseuille e Couette de fluidos UCM, Oldroyd-B e Giesekus. As perturbações bidimensionais foram propagadas nos regimes inercial (altos valores de Re) e elástico (baixos valores de Re), onde foi possível observar que níveis baixos de elasticidade podem ter um efeito desestabilizador, enquanto níveis mais elevados tendem a causar um efeito estabilizador.

No mesmo ano, [Grillet et al. \(2002\)](#) investigaram a estabilidade, por meio de cálculos de elementos finitos transientes e o método espectral de Tau-Chebyshev ([SHEN, 1991](#)), dos escoamentos poliméricos de Couette e Poiseuille bidimensionais, para os modelos constitutivos PTT exponencial e Giesekus. Os autores mostraram a existência de modos instáveis para ambos os escoamentos, quando considerado o modelo PTT. Já para o modelo Giesekus, foi verificado a existência de modos estáveis para o escoamento de Couette, mas instáveis no escoamento de Poiseuille.

[Kupferman \(2005\)](#) estudou a estabilidade do escoamento de Couette utilizando o modelo

Oldroyd-B para o tratamento do fluido viscoelástico. Seu objetivo era estudar o surgimento e o comportamento de instabilidades espúrias para simulações com um número de Weissenberg suficientemente alto. Seu principal resultado foi a identificação de uma família de perturbações de tensão não-modais no escoamento que são livres de divergências. Em particular, existem perturbações as quais, para um alto número de Weissenberg, exibem um grande crescimento transitório acompanhado pela formação de oscilações transversais ao escoamento, cuja frequência cresce linearmente no tempo. Embora essas perturbações tenham um perfil temporal assintótico que decaem, as oscilações podem, em um número suficientemente grande de Weissenberg, atingir escalas de sub-grade antes de decair.

Um outro estudo de análise de estabilidade linear utilizando o modelo Giesekus foi proposto por [Taghavi, Khabazi e Sadeghy \(2009\)](#). Em seu trabalho, os autores utilizaram o modelo constitutivo para analisar os efeitos da elasticidade do fluido na estabilidade do escoamento de Poiseuille, sob a influência de um campo magnético transversal ao escoamento. Além dos efeitos causados pelas constantes do modelo Giesekus, como o parâmetro α_G (coeficiente de mobilidade) e β_{nn} (razão da viscosidade do solvente com relação a viscosidade total), foi feita uma análise da influência da constante magnética M , relacionada ao campo imposto na simulação. Confirmando os resultados reportados por ([ATALIK; KEUNINGS, 2002](#)), [Taghavi, Khabazi e Sadeghy \(2009\)](#) concluíram que a elasticidade pode atuar como um estabilizante ou desestabilizante do escoamento, dependendo do número de Weissenberg ser menor ou maior que um determinado valor crítico. Com relação às constantes do modelo Giesekus, foi verificado que estas podem atuar como estabilizante ou desestabilizante do escoamento, dependendo da sua magnitude. Diferentemente do campo magnético, que mostrou ser um fator estabilizante, independente da magnitude da constante M .

[Moyers-Gonzalez, Burghilea e Mak \(2011\)](#) estudaram a estabilidade linear do escoamento de Poiseuille bidimensional de um fluido elastoviscoplastico, utilizando uma versão revisada do modelo numérico proposto por ([PUTZ; BURGHELEA, 2009](#)). Seu objetivo era entender como a presença da elasticidade modifica a estabilidade hidrodinâmica do escoamento. Os resultados de [Moyers-Gonzalez, Burghilea e Mak \(2011\)](#) mostraram que há um aumento no número crítico de Reynolds para as perturbações à medida que a tensão de cisalhamento do escoamento aumenta. Além disso, os autores mostraram que a existência de estruturas sólidas e fluidas coexistindo numa mesma região, tende a causar um efeito desestabilizador do escoamento.

Partindo para a área de escoamentos transicionais, ([GERVAZONI, 2016](#)) fez uma análise de estabilidade de escoamentos entre placas paralelas utilizando o método de simulação direta e o modelo Oldroyd-B para fluidos viscoelásticos. A autora apresentou ainda o desenvolvimento das equações de estabilidade linear e o método de solução para um escoamento viscoelástico do tipo Oldroyd-B utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, onde a equação de Orr-Sommerfeld é modificada para um fluido viscoelástico. Seus resultados foram obtidos a fim de analisar a influência dos parâmetros adimensionais Re e Wi , bem como a razão de viscosidade do solvente

em relação a viscosidade total do modelo Oldroyd-B na estabilidade do escoamento. Como conclusão, Gervazoni (2016) obteve que a medida que Wi aumenta, o escoamento tende a se tornar mais instável. Na análise de Re , os resultados mostraram diferentes comportamentos dependendo do Wi utilizado. E, para a razão de viscosidade, foi observado que o escoamento tende a se tornar mais instável à medida que a constante diminui.

Furlan (2018) estudou a estabilidade de escoamentos transicionais bidimensionais entre placas paralelas para fluidos viscoelásticos, utilizando o modelo Giesekus. Furlan (2018) utilizou a técnica de Teoria de Estabilidade Linear (LST, do inglês *Linear Stability Theory*), onde deduziu a equação de Orr-Sommerfeld modificada para fluidos viscoelásticos e comparou os resultados obtidos com os obtidos por meio de Simulação Direta Numérica (DNS, do inglês *Direct Numerical Simulation*). Seu estudo tinha como objetivo verificar a influência da constante Wi e das variáveis adimensionais do modelo Giesekus, α_G e β_{nn} . O autor concluiu que a variável α_G tem grande influência na estabilidade do escoamento e, como esperado da variável β_{nn} , quando esta se aproxima de 1, as curvas neutras de estabilidade tendem à curva obtida com o modelo Newtoniano. Quanto a constante Wi , os resultados mostraram que seu aumento tende a tornar o escoamento mais instável.

Mais recentemente, Brandi, Mendonca e Souza (2019) investigaram a estabilidade do escoamento transicional viscoelástico de um fluido Oldroyd-B entre placas paralelas, com perturbações que se propagam como ondas de Tollmien-Schlichting, utilizando LST e DNS. Para a análise LST, os autores utilizaram uma equação de Orr-Sommerfeld modificada, a fim de incluir os efeitos viscoelásticos, que foi resolvida por meio de um método de *shooting*. O código DNS utiliza a formulação vorticidade-velocidade e um método de discretização de alta ordem. Com uma boa concordância entre os resultados obtidos com os dois métodos, LST e DNS, foi mostrado que o escoamento tende a se tornar mais estável com a diminuição da concentração de polímero no fluido e, quanto ao efeito das forças elásticas, foi mostrado que quanto mais baixos são os valores de Wi e da quantidade de solvente, menos estável é o escoamento.

Assim, pode-se observar que apesar de muitos estudos na área de estabilidade de escoamentos, poucos são voltados para escoamentos transitórios de fluidos viscoelásticos e o tratam na forma tridimensional. Sendo assim, as principais contribuições para o estado da arte deste trabalho são o desenvolvimento de um código DNS para simulações de escoamentos tridimensionais de fluidos viscoelásticos entre placas paralelas, com inserção de perturbações não estacionárias que se propagam como ondas de Tollmien-Schlichting. O código é verificado a partir de comparações com resultados obtidos com código LST. Dos resultados, é feito um estudo da influência do número de onda transversal e do parâmetro de mobilidade α_G do modelo Giesekus na estabilidade dos escoamentos.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as equações que modelam escoamentos tridimensionais incompressíveis, isotérmicos, para fluidos não-Newtonianos viscoelásticos modelados pela equação constitutiva Giesekus. Também são apresentadas as equações na formulação vorticidade-velocidade, utilizadas na Simulação Numérica Direta, bem como os cálculos para obtenção do escoamento base e o sistema de equações utilizados na Teoria de Estabilidade Linear.

3.1 Equações do Modelo

As equações que modelam escoamentos não-Newtonianos, incompressíveis, isotérmicos e sem influência de forças externas são as equações da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

e da conservação de quantidade de movimento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.2)$$

onde ρ representa a densidade do fluido, $\mathbf{u}$ denota o campo de velocidade, t o tempo, p a pressão e $\mathbf{T}$ corresponde ao tensor extra-tensão que deve obedecer a uma lei constitutiva. Neste trabalho, será adotada a equação constitutiva do modelo Giesekus ([GIESEKUS, 1966](#)), descrita por

$$\mathbf{T} + \lambda \left(\frac{\nabla}{\eta_p} + \frac{\alpha_G}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) \right) = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (3.3)$$

onde λ representa o tempo de relaxação do fluido, η_p corresponde ao coeficiente de viscosidade do polímero, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ é o produto tensorial e α_G representa o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento "shear thinning" do fluido (decréscimo da viscosidade com o aumento de uma pressão exercida). O parâmetro de mobilidade α_G varia entre 0 e 1, porém, segundo [Bird](#),

Armstrong e Hassager (1987), Schleiniger e Weinacht (1991), para um comportamento mais realístico, é usualmente restrito ao intervalo 0 e 0,5.

Ainda na equação (3.3), $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ representa a derivada contra-variante e $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, que são dados respectivamente por:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (3.4)$$

Observamos que, fazendo $\alpha_G = 0$ na equação (3.3), obtém-se o modelo de fluido viscoelástico Oldroyd-B (CROCHET; DAVIES; WALTERS, 1984; BRASSEUR *et al.*, 1998).

3.2 Adimensionalização

A fim de se obter um problema independente do sistema de unidades de medidas, mas ainda possibilitando mostrar os efeitos físicos, é usual trabalhar com as equações que modelam o problema na forma adimensional. O processo de adimensionalização possui aplicações não só na dinâmica dos fluidos computacional, mas em todos os campos da ciência e da engenharia, e tem como principal objetivo reduzir o número variáveis independentes e de parâmetros do problema e, a longo prazo, reduzir os esforços necessários nas análises do problema.

Para adimensionalização das equações governantes definem-se os seguintes parâmetros: o comprimento de escala L , a velocidade de escala U e a densidade $\rho = \rho_0$ (escoamento incompressível). Dessa forma, utilizando esses parâmetros de escala, definimos as variáveis adimensionais (FERZIGER; PERIC, 2002; HUGHES; BRIGHTON, 1967)

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{U}{L}t, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}, \quad (3.5)$$

Substituindo as variáveis adimensionais nas equações (3.1)-(3.3), obtém-se as equações que modelam um fluido viscoelástico, incompressível e isotérmico nas suas formas adimensionais (omitindo o símbolo * por conveniência) como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta_{nn}}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta_{nn})} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \mathbf{D}, \quad (3.8)$$

onde os parâmetros adimensionais $Re = (\rho UL)/(\eta_0)$ e $Wi = (\lambda U)/(L)$ denotam os números de Reynolds e Weissenberg, respectivamente, com $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$ representando a viscosidade total do fluido; η_s e η_p representam as viscosidades do solvente Newtoniano e do polímero, respectivamente. A quantidade de solvente Newtoniano é controlada pelo coeficiente de viscosidade de solvente $\beta_{nn} = \eta_s/\eta_0$, onde $\beta_{nn} \in [0, 1)$. Vale observar que, fazendo $\beta_{nn} = 0$, obtém-se o modelo de fluido viscoelástico UCM (do inglês, *Upper-Convected Maxwell*).

3.3 Sistema de Equações em Coordenadas Cartesianas

Considera-se neste trabalho, escoamentos cartesianos tridimensionais não-estacionários em que

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)^T, \quad T(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{xy} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{xz} & T^{yz} & T^{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Assim, as equações de continuidade (3.6) e conservação de quantidade de movimento (3.7) podem ser escritas, respectivamente, na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

E a equação do modelo constitutivo Giesekus (3.8) fornece as equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xx})}{\partial z} \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} T^{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{xz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{xx} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx^2} + T^{xy^2} + T^{xz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{yy})}{\partial z} \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} T^{yy} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{yz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy^2} + T^{yy^2} + T^{yz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial(uT^{zz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{zz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{zz})}{\partial z} \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} T^{xz} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{yz} + \frac{\partial w}{\partial z} T^{zz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{zz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xz^2} + T^{yz^2} + T^{zz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xy})}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} T^{yy} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{yz} + \\ & + \frac{\partial v}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{xz} - \frac{\partial w}{\partial z} T^{xy} - \frac{1}{Wi} \left[T^{xy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx} T^{xy} + T^{xy} T^{yy} + T^{xz} T^{yz}) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xz})}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} T^{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{zz} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{xy} - \frac{\partial v}{\partial y} T^{xz} - \frac{1}{Wi} \left[T^{xz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx} T^{xz} + T^{xy} T^{yz} + T^{xz} T^{zz}) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{yz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{yz})}{\partial z} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} T^{xz} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{zz} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{yy} - \frac{\partial u}{\partial x} T^{yz} - \frac{1}{Wi} \left[T^{yz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy} T^{xz} + T^{yy} T^{yz} + T^{yz} T^{zz}) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

As equações (3.10)-(3.19) modelam um escoamento tridimensional incompressível, isotérmico e sem ação de forças externas para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Giesekus em qualquer regime de escoamento.

3.4 Simulação Numérica Direta

A Simulação Numérica Direta (DNS, do inglês *Direct Numerical Simulation*) tem como objetivo resolver as equações de Navier-Stokes e das demais equações consideradas de forma direta, sem a necessidade de equações adicionais de fechamento do sistema. A fim de eliminar o tratamento da pressão nas equações de Navier-Stokes, optou-se pela utilização da formulação vorticidade-velocidade (SPEZIALE, 1987; TOUMI; LOC, 1987; LABIDI; PHUOC, 1989; GUEVREMONT; HABASHI; HAFEZ, 1990; KLOKER, 1997; SOUZA, 2003; SOUZA; MENDONCA; MEDEIROS, 2005; SOUZA; BRANDI; MENDONCA, 2016; BRANDI; MENDONCA; SOUZA, 2019). Para isso, definimos as componentes da vorticidade tridimensional como sendo:

$$\omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$\omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3.21)$$

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Derivando-se a equação (3.21) em relação a z e utilizando a equação de continuidade (3.10), obtém-se a equação de Poisson para velocidade u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (3.23)$$

Derivando-se a equação de continuidade (3.10) em relação a y e utilizando as definições dos componentes de vorticidade nas direções x (equação (3.20)) e z (equação (3.22)), obtém-se a equação de Poisson para a velocidade v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}. \quad (3.24)$$

Derivando-se a equação (3.21) em relação a x e utilizando a equação de continuidade (3.10), obtém-se a equação de Poisson para a velocidade w :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}. \quad (3.25)$$

A partir das equações (3.20)-(3.22) e de manipulações das equações de conservação de quantidade de movimento (3.11)-(3.13), obtém-se as equações de transporte de vorticidade tridimensional.

Derivando-se a equação (3.13) em relação a y e subtraindo da equação (3.12) após esta ser derivada em relação a z , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial \omega_x v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_x w}{\partial z} - \frac{\partial \omega_y u}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z u}{\partial z} &= \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x \partial z} + \\ &+ \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{zz}}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Derivando-se a equação (3.11) em relação a z e subtraindo da equação (3.13) após esta ser derivada em relação a x , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \omega_y w}{\partial z} + \frac{\partial \omega_x v}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z v}{\partial z} - \frac{\partial \omega_y u}{\partial x} &= \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{zz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Derivando-se a equação (3.12) em relação a x e subtraindo da equação (3.11) após esta ser derivada em relação a y , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \omega_z u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y w}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x w}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z v}{\partial y} &= \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações a ser considerado, juntamente com as equações dos tensores (3.14)-(3.19):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial z^2} - \\ - \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{zz}}{\partial y \partial z}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{zz}}{\partial x \partial z} - \\ - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{xz}}{\partial y \partial z} - \\ - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{yz}}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xx})}{\partial z} \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} T^{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{xz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{xx} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx^2} + T^{xy^2} + T^{xz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{yy})}{\partial z} \right) \\ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} T^{yy} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{yz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy^2} + T^{yy^2} + T^{yz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} = & 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial(uT^{zz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{zz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{zz})}{\partial z} \right) \\ & + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} T^{xz} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{yz} + \frac{\partial w}{\partial z} T^{zz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T^{zz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xz^2} + T^{yz^2} + T^{zz^2}) \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xy})}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} T^{yy} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{yz} + \\ & + \frac{\partial v}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{xz} - \frac{\partial w}{\partial z} T^{xy} - \frac{1}{Wi} \left[T^{xy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx} T^{xy} + T^{xy} T^{yy} + T^{xz} T^{yz}) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{xz})}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} T^{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} T^{zz} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{xy} - \frac{\partial v}{\partial y} T^{xz} - \frac{1}{Wi} \left[T^{xz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx} T^{xz} + T^{xy} T^{yz} + T^{xz} T^{zz}) \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial(uT^{yz})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(wT^{yz})}{\partial z} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} T^{xz} + \frac{\partial v}{\partial z} T^{zz} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} T^{yy} - \frac{\partial u}{\partial x} T^{yz} - \frac{1}{Wi} \left[T^{yz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy} T^{xz} + T^{yy} T^{yz} + T^{yz} T^{zz}) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$a = \omega_x v - \omega_y u,$$

$$b = \omega_z u - \omega_x w,$$

$$c = \omega_y w - \omega_z v.$$

3.5 Teoria de Estabilidade Linear

Para a aplicação da Teoria de Estabilidade Linear (LST, do inglês *Linear Stability Theory*), assume-se que o escoamento possa ser decomposto em um escoamento base (invariante na direção x) e um escoamento perturbado (não-permanente) (JUNIPER; HANIFI; THEOFILIS, 2014). A partir dessa decomposição, pode-se escrever as variáveis dependentes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, z, t), \\ v(x, y, z, t) &= \tilde{v}(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t) &= \tilde{w}(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, z, t), \\ \mathbf{T}(x, y, z, t) &= \mathbf{T}(y) + \tilde{\mathbf{T}}(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $U(y)$, $P(x, y)$ e $\mathbf{T}(y)$ representam as componentes do escoamento base e, as variáveis $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$ e $\tilde{\mathbf{T}}$, representam as componentes do escoamento perturbado.

Substituindo as decomposições (3.42) nas equações (3.29) - (3.41) e utilizando a hipótese de que o escoamento base satisfaz essas mesmas equações, pode-se eliminar os termos que contém apenas as variáveis do escoamento base. Além disso, a hipótese de Schlichting (SCHLICHTING, 1979) afirma as perturbações devem ser infinitesimais no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados, quando comparados com os termos lineares. Assim, substituindo as variáveis (3.42) nas equações de continuidade, conservação de quantidade de movimento e dos tensores não-Newtonianos (3.29)-(3.41) e assumindo que as amplitudes das perturbações são pequenas, obtemos as equações de conservação e dos tensores não-Newtonianos para as perturbações.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial U \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u} U}{\partial x} + \frac{\partial U \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial U \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{xz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v} U}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{yz}}{\partial z}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w} U}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial z}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{T}^{xx} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} T^{xx} + \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{T}^{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} T^{xy} + \frac{\partial U}{\partial z} \tilde{T}^{xz} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} T^{xz} \right) - \\ - \frac{1}{Wi} \left[\tilde{T}^{xx} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx} \tilde{T}^{xx} + T^{xy} \tilde{T}^{xy} + T^{xz} \tilde{T}^{xz}) \right] - \left[\frac{\partial (U \tilde{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v} T^{xx})}{\partial y} + \frac{\partial (\tilde{w} T^{xx})}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \left[\frac{\partial (\tilde{u} T^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (U \tilde{T}^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v} T^{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tilde{w} T^{yy})}{\partial z} \right] - \\ - \frac{1}{Wi} \left[\tilde{T}^{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy} \tilde{T}^{xy} + T^{yy} \tilde{T}^{yy}) \right] + 2 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} T^{yy} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}^{zz}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{\partial (U \tilde{T}^{zz})}{\partial x} - \frac{1}{Wi} \tilde{T}^{zz}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) - \left[\frac{\partial(\tilde{u}T^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(U\tilde{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}T^{xy})}{\partial y} - \frac{\partial(\tilde{w}T^{xy})}{\partial z} \right] + \\
& - \frac{1}{Wi} \left[\tilde{T}^{xy} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} ((\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy})T^{xy} + (T^{xx} + T^{yy})\tilde{T}^{xy}) \right] + \\
& + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} T^{yy} + \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{T}^{yy} + \frac{\partial U}{\partial z} \tilde{T}^{yz} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} T^{xx} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} T^{xy},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}^{xz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) - \frac{\partial(U\tilde{T}^{xz})}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{T}^{yz} + \frac{\partial U}{\partial z} \tilde{T}^{zz} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} T^{xx} - \\
& - \frac{1}{Wi} \left[\tilde{T}^{xz} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xx}\tilde{T}^{xz} + T^{xy}\tilde{T}^{yz}) \right],
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}^{yz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) - \frac{\partial(U\tilde{T}^{yz})}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} T^{xy} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} T^{yy} - \frac{\partial U}{\partial x} T^{yz} - \\
& - \frac{1}{Wi} \left[\tilde{T}^{yz} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} (T^{xy}\tilde{T}^{xz} + T^{yy}\tilde{T}^{yz}) \right].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Como as equações resultantes são lineares e os seus coeficientes não dependem de x e t , pode-se buscar soluções por meio do método de separação de variáveis ou modos normais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, y, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{u}(y) e^{i(\alpha x + \beta_z z - \omega t)} + cc. \right], \\
\tilde{v}(x, y, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta_z z - \omega t)} + cc. \right], \\
\tilde{w}(x, y, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{w}(y) e^{i(\alpha x + \beta_z z - \omega t)} + cc. \right], \\
\tilde{p}(x, y, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{p}(y) e^{i(\alpha x + \beta_z z - \omega t)} + cc. \right], \\
\tilde{\mathbf{T}}(x, y, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{T}}(y) e^{i(\alpha x + \beta_z z - \omega t)} + cc. \right],
\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $cc.$ é o complexo conjugado, α representa o número de onda na direção x , β_z representa o número de onda na direção transversal, ω é frequência de propagação das ondas e os termos $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$ e $\bar{\mathbf{T}}$ são as amplitudes das perturbações. As equações (3.53) indicam que as perturbações se propagam como ondas, de comprimento $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ e velocidade $c = \frac{\omega}{\alpha}$. Uma onda tridimensional que se propaga a um ângulo ϕ em relação à direção do escoamento médio é tal que:

$$\tan \phi = \frac{\beta_z}{\alpha}. \tag{3.54}$$

Reescrevendo as equações de conservação e dos tensores para as perturbações do escoamento (3.43) - (3.52) utilizando as soluções obtidas por modos normais, obtém-se as seguintes equações

$$i\alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} + i\beta_z \bar{w}(y) = 0, \tag{3.55}$$

$$i\alpha\bar{u}(y)(U(y)-c)+\bar{v}(y)\frac{dU(y)}{dy}=-i\alpha\bar{p}(y)+\frac{\beta_{nn}}{Re}\left[\frac{d^2\bar{u}(y)}{dy^2}-\bar{u}(y)(\alpha^2+\beta_z^2)\right]+$$

$$+\frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy}+i(\alpha\bar{T}^{xx}(y)+\beta_z\bar{T}^{xz}(y)), \quad (3.56)$$

$$i\alpha\bar{v}(y)(U(y)-c)=-\frac{d\bar{p}(y)}{dy}+\frac{\beta_{nn}}{Re}\left[\frac{d^2\bar{v}(y)}{dy^2}-\bar{v}(y)(\alpha^2+\beta_z^2)\right]+$$

$$+\frac{d\bar{T}^{yy}(y)}{dy}+i(\alpha\bar{T}^{xy}(y)+\beta_z\bar{T}^{yz}(y)), \quad (3.57)$$

$$i\alpha\bar{w}(y)(U(y)-c)=-i\beta_z\bar{p}(y)+\frac{\beta_{nn}}{Re}\left[\frac{d^2\bar{w}(y)}{dy^2}-\bar{w}(y)(\alpha^2+\beta_z^2)\right]+$$

$$+\frac{d\bar{T}^{yz}(y)}{dy}+i(\alpha\bar{T}^{xz}(y)+\beta_z\bar{T}^{zz}(y)). \quad (3.58)$$

$$\bar{T}^{xx}(y)-i\omega Wi\bar{T}^{xx}(y)+i\alpha WiU(y)\bar{T}^{xx}(y)-2i\alpha WiT^{xx}(y)\bar{u}(y)+Wi\frac{dT^{xx}(y)}{dy}\bar{v}(y)-$$

$$-2Wi\frac{dU(y)}{dy}\bar{T}^{xy}(y)-2WiT^{xy}\frac{d\bar{u}(y)}{dy}+2\frac{\alpha_G Re Wi}{(1-\beta_{nn})}(T^{xx}(y)\bar{T}^{xx}(y)+T^{xy}\bar{T}^{xy}(y))=$$

$$=2i\alpha\frac{(1-\beta_{nn})}{Re\bar{u}(y)} \quad (3.59)$$

$$\bar{T}^{xy}(y)-i\omega Wi\bar{T}^{xy}(y)+i\alpha WiU(y)\bar{T}^{xy}(y)-i\alpha WiT^{xx}(y)\bar{v}(y)+i\beta_z WiT^{xy}(y)\bar{w}+$$

$$+Wi\frac{dT^{xy}(y)}{dy}\bar{v}(y)-Wi\frac{dU(y)}{dy}\bar{T}^{yy}(y)-WiT^{yy}(y)\frac{d\bar{u}(y)}{dy}+$$

$$+\frac{\alpha_G Re Wi}{(1-\beta_{nn})}(T^{xy}(y)(\bar{T}^{xx}(y)+\bar{T}^{yy}(y))+\bar{T}^{xy}(y)(T^{xx}(y)+T^{yy}(y)))=$$

$$=\frac{(1-\beta_{nn})}{Re}\left(\frac{d\bar{u}(y)}{dy}+i\alpha\bar{v}(y)\right) \quad (3.60)$$

$$\bar{T}^{xz}(y)-i\omega Wi\bar{T}^{xz}(y)+i\alpha WiU(y)\bar{T}^{xz}(y)-i\alpha WiT^{xx}(y)\bar{w}(y)-Wi\frac{dU(y)}{dy}\bar{T}^{yz}(y)+$$

$$+\frac{\alpha_G Re Wi}{(1-\beta_{nn})}(\bar{T}^{xz}(y)T^{xx}(y)+\bar{T}^{yz}(y)T^{xy}(y))=\frac{(1-\beta_{nn})}{Re}(i\beta_z\bar{u}(y)+i\alpha\bar{w}(y)) \quad (3.61)$$

$$\bar{T}^{yy}(y)-i\omega Wi\bar{T}^{yy}(y)+i\alpha WiU(y)\bar{T}^{yy}(y)-2i\alpha WiT^{xy}(y)\bar{v}(y)+Wi\frac{dT^{yy}(y)}{dy}\bar{v}(y)-$$

$$-2WiT^{yy}(y)\frac{d\bar{v}(y)}{dy}+2\frac{\alpha_G Re Wi}{(1-\beta_{nn})}(T^{xy}(y)\bar{T}^{xy}(y)+T^{yy}(y)\bar{T}^{yy}(y))=2\frac{(1-\beta_{nn})}{Re}\frac{d\bar{v}(y)}{dy} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{yz}(y) - i\omega Wi\bar{T}^{yz}(y) + i\alpha WiU(y)\bar{T}^{yz}(y) - i\alpha WiT^{xy}(y)\bar{w}(y) - WiT^{yy}(y)\frac{d\bar{w}}{dy} + \\ + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})}(\bar{T}^{xz}(y)T^{xy}(y) + \bar{T}^{yz}(y)T^{yy}(y)) = \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \left[\frac{d\bar{w}}{dy} + i\beta_z \bar{v}(y) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\bar{T}^{zz}(y) - i\omega Wi\bar{T}^{zz}(y) + i\alpha WiU(y)\bar{T}^{zz}(y) = 2i\beta_z \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \bar{w}(y) \quad (3.64)$$

Na técnica LST, o sistema de equações (3.55) - (3.64) é resolvido na forma matricial, onde, por caracterizar um problema de autovalor, busca-se aquele com a menor taxa de amplificação (parte imaginária do número complexo) que fornecerá as informações quanto a estabilidade do escoamento.

3.5.1 Análise Espacial e Temporal de Instabilidades

Derivada no campo dos números complexos, o sistema de equações (3.55) - (3.64) possui como autofunção $\bar{u}(y)$ complexa, além da possibilidade de α ou ω ser complexo, ou ambos complexos. Assim, a solução do sistema pode ser expressa por

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \bar{u}(y) e^{(-\alpha_i x - \beta_z z + \omega_i t)} e^{i(\alpha_r x + \beta_z z - \omega_r t)}, \quad (3.65)$$

onde os índices r e i representam componentes real e imaginária, respectivamente.

Na formulação espacial, e considerando perturbações bidimensionais, tem-se ω um número real e α um número complexo, com a amplitude da perturbação crescendo na direção do escoamento médio x . As componentes ω_r , α_r e α_i representam, respectivamente a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial.

Na formulação temporal, α é um número real e ω um número complexo, com a amplitude da perturbação crescendo em função do tempo. Neste caso, ω_i é a taxa de amplificação temporal. A Tabela 1 apresenta a classificação das instabilidades, utilizando as análises temporal e espacial.

Tabela 1 – Classificação de Instabilidades.

Tipo de análise	Taxa de amplificação	Amplitude	Classificação
análise temporal	$\omega_i < 0$	decrece	estável
	$\omega_i = 0$	constante	neutro
	$\omega_i > 0$	cresce	instável
análise espacial	$\alpha_i < 0$	cresce	instável
	$\alpha_i = 0$	constante	neutro
	$\alpha_i > 0$	decrece	estável

3.6 Escoamento Base

Para o cálculo do escoamento base, considera-se um escoamento bidimensional (devido a periodicidade imposta na direção z dos escoamentos perturbados), incompressível e isotérmico e sem ação de forças externas, modelado pelas equações adimensionais (3.6)-(3.8). Além disso, é considerada a formulação velocidade-vorticidade para obtenção dos resultados.

Dada a equação de continuidade bidimensional, no sistema de coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} = 0, \quad (3.66)$$

define-se a vorticidade ω_{z_b} como

$$\omega_{z_b} = \frac{\partial u_b}{\partial y} - \frac{\partial v_b}{\partial x}. \quad (3.67)$$

Derivando a equação (3.67) em relação a x e utilizando a equação de continuidade (3.66), obtém-se a equação de Poisson para a componente v_b da velocidade:

$$\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_{z_b}}{\partial x}. \quad (3.68)$$

Dadas as equações de conservação de quantidade de movimento escritas no sistema de coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{\partial u_b u_b}{\partial x} + \frac{\partial u_b v_b}{\partial y} = -\frac{\partial p_b}{\partial x} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left[\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_b}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T_b^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_b^{xy}}{\partial y}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial t} + \frac{\partial v_b u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b v_b}{\partial y} = -\frac{\partial p_b}{\partial y} + \frac{\beta_{nn}}{Re} \left[\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T_b^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_b^{yy}}{\partial y}, \quad (3.70)$$

é possível obter a equação de transporte de vorticidade bidimensional. Derivando a equação (3.70) em relação a y e subtraindo da equação (3.69) após esta ser derivada em relação a x , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{z_b}}{\partial t} + \frac{\partial (u_b \omega_{z_b})}{\partial x} + \frac{\partial (v_b \omega_{z_b})}{\partial y} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_{z_b}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{z_b}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T_b^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_b^{xy}}{\partial y^2} \\ - \frac{\partial^2 T_b^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_b^{yy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Assim, o escoamento base é obtido a partir da solução do seguinte sistema de equações

$$\omega_{z_b} = \frac{\partial u_b}{\partial y} - \frac{\partial v_b}{\partial x}, \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_{z_b}}{\partial x}, \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \omega_{z_b}}{\partial t} + \frac{\partial(u_b \omega_{z_b})}{\partial x} + \frac{\partial(v_b \omega_{z_b})}{\partial y} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_{z_b}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{z_b}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T_b^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_b^{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_b^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_b^{yy}}{\partial x \partial y}, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial T_b^{xx}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \frac{\partial u_b}{\partial x} - \left(\frac{\partial(u_b T_b^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v_b T_b^{xx})}{\partial y} \right) + 2 \left(T_b^{xx} \frac{\partial u_b}{\partial x} + T_b^{xy} \frac{\partial u_b}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T_b^{xx} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_b^{xx^2} + T_b^{xy^2}) \right], \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial T_b^{xy}}{\partial t} = \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial u_b}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial(u_b T_b^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v_b T_b^{xy})}{\partial y} \right) + T_b^{xx} \frac{\partial v_b}{\partial x} + T_b^{yy} \frac{\partial u_b}{\partial y} - \frac{1}{Wi} \left[T_b^{xy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_b^{xx} T_b^{xy} + T_b^{yy} T_b^{xy}) \right], \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial T_b^{yy}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re} \frac{\partial v_b}{\partial y} - \left(\frac{\partial(u_b T_b^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(v_b T_b^{yy})}{\partial y} \right) + 2 \left(T_b^{xy} \frac{\partial v_b}{\partial x} + T_b^{yy} \frac{\partial v_b}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T_b^{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_b^{xy^2} + T_b^{yy^2}) \right]. \quad (3.77)$$

3.6.1 Formulação Log-Conformation

A fim de controlar possíveis instabilidades numéricas causadas pelos altos valores no número de Weissenberg (HWNP, do inglês *High Weissenberg Number Problem*) (KEUNINGS, 1986), foi utilizado o método *log-conformation*, que propõe uma reformulação das equações constitutivas em função do tensor conformação $\mathbf{A}$ (VAITHIANATHAN; COLLINS, 2003; FATTAL; KUPFERMAN, 2004; TOMÉ *et al.*, 2012).

A partir da relação entre o tensor polimérico $\mathbf{T}$ e o tensor conformação $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{T} = \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} (\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (3.78)$$

é possível reescrever a equação constitutiva (3.8) em função do tensor conformação, como

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} - [\mathbf{A} \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{A}] = \frac{1}{Wi} \mathcal{M}(\mathbf{A}), \quad (3.79)$$

onde $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ é definido de acordo com o modelo viscoelástico. Para o modelo Giesekus, $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \alpha_G(\mathbf{A} - \mathbf{I}))$.

Para tornar possível a resolução a partir do método log-conformation, utilizamos a decomposição do gradiente do vetor velocidade proposta por Fattal e Kupferman (2004), Fattal e Kupferman (2005)

$$\nabla \mathbf{u} = \Theta + \mathbf{B} + \mathbf{N} \mathbf{A}^{-1}, \quad (3.80)$$

onde $\Theta = \Theta(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{A})$ e $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{A})$ são tensores anti-simétricos, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{A})$ é simétrico e comuta com $\mathbf{A}$. Substituindo tal decomposição na equação (3.79), é possível reescrever a equação constitutiva baseada no tensor conformação como

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} - [\Theta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Theta] - 2\mathbf{B}\mathbf{A} = \frac{1}{Wi} \mathcal{M}(\mathbf{A}). \quad (3.81)$$

Definindo o logaritmo do tensor conformação da forma

$$\Psi = \log_a(\mathbf{A}), \quad (3.82)$$

pela propriedade inversa, podemos escrever

$$\mathbf{A} = a^\Psi. \quad (3.83)$$

onde, para a obtenção do tensor Ψ é necessário o cálculo da matriz logarítmica da forma

$$\Psi = \log_a(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \log_a(\Lambda) \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \begin{bmatrix} \log_a(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \log_a(\lambda_2) \end{bmatrix} \mathbf{O}^T, \quad (3.84)$$

e para a obtenção do tensor a^Ψ é necessário o cálculo da matriz exponencial da forma

$$a^\Psi = \mathbf{O}(a^{\log_a(\Lambda)}) \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{O}^T = \mathbf{A}, \quad (3.85)$$

com λ_1 e λ_2 autovalores de $\mathbf{A}$.

Assim, utilizando as igualdades (3.82) e (3.83) e a equação (3.81) é possível escrever a equação da formulação log-conformation como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \Psi) = (\Theta \Psi - \Psi \Theta) + 2\mathbf{B} + (\mathbf{I} - a^\Psi)[\mathbf{I} - \alpha_G(a^\Psi - \mathbf{I})], \quad (3.86)$$

onde

$$\mathbf{O}^T(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \Theta_{12} \\ -\Theta_{12} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{N_{12}}{\lambda_2} \\ -\frac{N_{12}}{\lambda_2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

As matrizes Θ , $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}$ são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{O}^T(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{O}, \quad (3.88)$$

então

$$\mathbf{N} = \mathbf{O} \begin{bmatrix} 0 & \frac{N_{12}}{\lambda_2} \\ -\frac{N_{12}}{\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{O}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{O} \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \mathbf{O}^T, \\ \Theta = \mathbf{O} \begin{bmatrix} 0 & \Theta_{12} \\ -\Theta_{12} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{O}^T.$$

A partir da equação (3.87) são obtidas as seguintes igualdades

$$N_{12} = \frac{M_{12} + M_{21}}{(\lambda_2)^{-1} - (\lambda_1)^{-1}} \quad \text{e} \quad \Theta_{12} = \frac{M_{12}\lambda_2 + M_{21}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A matriz $\mathbf{B}$ é obtida por

$$B_{11} = M_{11} \quad \text{e} \quad B_{22} = M_{22}.$$

Os detalhes da obtenção da equação (3.86), bem como os teoremas que garantem a decomposição do gradiente do vetor velocidade e suas demonstrações, podem ser vistas em detalhes em Fattal e Kupferman (2004) e Júnior (2014).

3.7 Condições de Contorno

3.7.1 Condições de Contorno do Escoamento Base

São consideradas as seguintes condições de contorno para o escoamento base:

- *Inflow*: É adotado um perfil Newtoniano, onde é estabelecida a velocidade normal u_b , a velocidade tangencial v_b é considerada nula e não há contribuição dos tensores $\mathbf{T}_b$, ou seja,

$$u_b = U(y), \quad v_b = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_b = 0. \quad (3.89)$$

- *Paredes*: Considera-se as condições de não-escorregamento e impermeabilidade (componentes de velocidade e tensores iguais a zero, ou seja, $u_b = 0$, $v_b = 0$ e $\mathbf{T}_b = 0$), com a vorticidade ω_{zb} calculada através da equação:

$$\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2}. \quad (3.90)$$

- *Outflow*: Considera-se a segunda derivada das componentes do escoamento nula na direção normal à fronteira, logo

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{T}_b}{\partial x^2} = 0. \quad (3.91)$$

3.7.2 Condições de Contorno do Escoamento Perturbado

As perturbações no escoamento perturbado são introduzidas por meio da técnica de injeção e sucção de massa na parede. Com essa técnica, os componentes de velocidade e vorticidade no contorno de entrada não sofrem alterações e são iguais às variáveis médias durante toda a simulação. Na parede, as velocidades u e w são iguais a zero. A velocidade v assume valor igual a zero em todas as paredes, exceto na região de inserção das perturbações. Os componentes

do tensor $\mathbf{T}$ são calculados por meio das equações (3.36) - (3.41) e os valores dos componentes de vorticidade na parede são obtidos por:

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y}, \quad (3.92)$$

$$\omega_y = 0, \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}. \quad (3.94)$$

A equação (3.92) é obtida a partir das equações de vorticidade (3.20) - (3.22), da equação de continuidade (3.43) e da equação:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \quad (3.95)$$

A equação (3.93) deriva da definição da vorticidade (3.21) e a equação (3.94) é a equação de Poisson (3.31) isolando o termo $\partial \omega_z / \partial x$.

Próximo à região de saída do domínio foi implementada uma região de relaminarização do escoamento, cujo objetivo é dissipar todas as perturbações, evitando que haja reflexões para dentro do domínio. Esta técnica, permite utilizar no contorno de saída a condição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (3.96)$$

onde $f = \{u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z\}$.

Para os contornos na direção transversal, $z = 0$ e $z = \lambda_z$, condições de periodicidade são empregadas. Então, para todas as variáveis e suas derivadas:

$$f(x, y, 0, t) = f(x, y, \lambda_z, t), \quad (3.97)$$

$$\left. \frac{\partial^n f(x, y, 0, t)}{\partial z^n} \right|_{x, y, 0, t} = \left. \frac{\partial^n f(x, y, \lambda_z, t)}{\partial z^n} \right|_{x, y, \lambda_z, t}, \quad (3.98)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo são apresentados os métodos numéricos para resolução das equações apresentadas no capítulo anterior, a técnica de inserção de perturbações, tratamento de regiões de relaminarização e amortecimento a fim de evitar reflexões das perturbações no escoamento, o método *multigrid* utilizado e a decomposição do domínio para paralelização do código.

4.1 Método Espectral

No desenvolvimento deste trabalho, o escoamento é considerado periódico na direção transversal (z), sendo possível a utilização de um método espectral por meio da introdução de transformadas rápidas de Fourier (FFT, do inglês *Fast Fourier Transform*). Sua utilização simplifica a solução numérica do código, mantendo alta ordem de precisão no cálculo das derivadas (CANUTO *et al.*, 1988; SOUZA, 2003). Neste método, expandimos os campos de velocidade e vorticidade em séries de Fourier, com $K + 1$ modos de Fourier, da seguinte forma:

$$g(x, y, z, t) \approx \sum_{k=0}^K g_k(x, y, t) e^{-ik\beta_k z}, \quad (4.1)$$

onde $g = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, a, b, c, \mathbf{T}\}$ representa as variáveis no espaço físico, k é o modo de Fourier ($0 \leq k \leq K$), $g_k = \{\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k, a_k, b_k, c_k, \mathbf{T}_k\}$ representa as variáveis no espaço de Fourier, i corresponde a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$) e β_k é o número de onda transversal do modo de Fourier, dado por:

$$\beta_k = \frac{2\pi k}{\lambda_z}, \quad (4.2)$$

com λ_z sendo o comprimento de onda, na direção transversal, do modo de Fourier.

Substituindo as transformadas de Fourier (equação (4.1)) no sistema de equações (3.30)-(3.41), obtém-se as equações governantes no espaço de Fourier, para cada modo k de Fourier:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - k^2 \beta_k^2 u_k = ik\beta_k \omega_{yk} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y}, \quad (4.3)$$

$$\nabla_k^2 v_k = -\frac{\partial \omega_{zk}}{\partial x} - ik\beta_k \omega_{xk}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - k^2 \beta_k^2 w_k = \frac{\partial \omega_{yk}}{\partial x} + ik\beta_k \frac{\partial v_k}{\partial y}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{xk}}{\partial t} + \frac{\partial a_k}{\partial y} + ik\beta_k b_k = \frac{\beta_{nn}}{Re} \nabla_k^2 \omega_{xk} - ik\beta_k \left(\frac{\partial T_k^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_k^{yy}}{\partial y} - \frac{\partial T_k^{zz}}{\partial y} - ik\beta_k T_k^{yz} \right) - \\ - \frac{\partial^2 T_k^{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T_k^{yz}}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{yk}}{\partial t} - ik\beta_k c_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \nabla_k^2 \omega_{yk} - ik\beta_k \left(\frac{\partial T_k^{zz}}{\partial x} - \frac{\partial T_k^{xx}}{\partial x} - \frac{\partial T_k^{xy}}{\partial y} - ik\beta_k T_k^{xz} \right) + \\ + \frac{\partial^2 T_k^{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k^{yz}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{zk}}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\beta_{nn}}{Re} \nabla_k^2 \omega_{zk} - ik\beta_k \left(\frac{\partial T_k^{xz}}{\partial y} - \frac{\partial T_k^{yz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 T_k^{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_k^{xy}}{\partial y^2} - \\ - \frac{\partial^2 T_k^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_k^{yy}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{xx}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial u_k}{\partial x} - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{xx})}{\partial y} - ik\beta_k (w_k T_k^{xx}) \right) - 2ik\beta_k u_k T_k^{xz} + \\ + 2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} T_k^{xx} + \frac{\partial u_k}{\partial y} T_k^{xy} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{xx} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xx^2} + T_k^{xy^2} + T_k^{xz^2}) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{yy}}{\partial t} = 2 \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} \frac{\partial v_k}{\partial y} - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{yy})}{\partial y} - ik\beta_k (w_k T_k^{yy}) \right) - 2ik\beta_k v_k T_k^{yz} + \\ + 2 \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} T_k^{xy} + \frac{\partial v_k}{\partial y} T_k^{yy} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xy^2} + T_k^{yy^2} + T_k^{yz^2}) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{zz}}{\partial t} = -2ik\beta_k \frac{(1 - \beta_{nn})}{Re Wi} w_k - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{zz})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{zz})}{\partial y} - ik\beta_k (w_k T_k^{zz}) \right) - 2ik\beta_k w_k T_k^{zz} + \\ + 2 \left(\frac{\partial w_k}{\partial x} T_k^{xz} + \frac{\partial w_k}{\partial y} T_k^{yz} \right) - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{zz} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xz^2} + T_k^{yz^2} + T_k^{zz^2}) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{xy}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{xy})}{\partial y} - ik\beta_k(w_k T_k^{xy}) \right) + \frac{\partial u_k}{\partial y} T_k^{yy} + \\ & + \frac{\partial v_k}{\partial x} T_k^{xx} - ik\beta_k(u_k T_k^{yz} + v_k T_k^{xz} - w_k T_k^{xy}) - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{xy} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xx} T_k^{xy} + T_k^{xy} T_k^{yy} + T_k^{xz} T_k^{yz}) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{xz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x} - ik\beta_k u_k \right) - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{xz})}{\partial y} - ik\beta_k(w_k T_k^{xz}) \right) - ik\beta_k u_k T_k^{zz} + \\ & + \frac{\partial u_k}{\partial y} T_k^{yz} + \frac{\partial w_k}{\partial x} T_k^{xx} + \frac{\partial w_k}{\partial y} T_k^{xy} - \frac{\partial v_k}{\partial y} T_k^{xz} - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{xz} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xx} T_k^{xz} + T_k^{xy} T_k^{yz} + T_k^{xz} T_k^{zz}) \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^{yz}}{\partial t} = & \frac{(1 - \beta_{nn})}{ReWi} \left(\frac{\partial w_k}{\partial y} - ik\beta_k v_k \right) - \left(\frac{\partial(u_k T_k^{yz})}{\partial x} + \frac{\partial(v_k T_k^{yz})}{\partial y} - ik\beta_k(w_k T_k^{yz}) \right) - ik\beta_k v_k T_k^{zz} + \\ & + \frac{\partial v_k}{\partial x} T_k^{xz} + \frac{\partial w_k}{\partial x} T_k^{xy} + \frac{\partial w_k}{\partial y} T_k^{yy} - \frac{\partial u_k}{\partial x} T_k^{yz} - \frac{1}{Wi} \left[T_k^{yz} + \frac{\alpha_G ReWi}{(1 - \beta_{nn})} (T_k^{xy} T_k^{xz} + T_k^{yy} T_k^{yz} + T_k^{yz} T_k^{zz}) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\nabla_k^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \beta_k^2 \right).$$

Os produtos não lineares presentes nas equações (4.3)-(4.14) são calculados no espaço físico. Para tal, transforma-se as componentes de velocidade, vorticidade e os tensores para o espaço físico e, após o cálculo dos produtos não lineares, estes são transformados de volta para o espaço de Fourier. Este procedimento representa um esforço computacional menor do que se os produtos fossem realizados no espaço de Fourier, quando adotados mais do que um determinado número de modos de Fourier. O fato do processo ser realizado com parte da computação no espaço físico caracteriza um processo denominado *pseudo-espectral*.

4.2 Simulação Numérica Direta

4.2.1 Introdução das Perturbações Bidimensionais

A introdução das perturbações temporais é realizada através de injeção e sucção de massa na parede que, segundo Fasel, Rist e Konzelmann (1990), é um método muito eficiente para geração de ondas de Tollmien-Schlichting.

No método implementado, assume-se que no tempo $t = 0$, o escoamento não possui perturbações. No tempo $t + \Delta t$, são inseridas as perturbações através da técnica de injeção e sucção de massa na parede em um determinada região, como pode ser observado na Figura 3,

Figura 3 – Domínio computacional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

entre os pontos x_1 e x_2 . As ondas de Tollmien-Schlichting são geradas a partir da função polinomial $f_p(x)$ de grau 9 para a velocidade V_k

$$V_k(x, \pm 1, z, t) = A_p f_p(x) \sin(\omega_k t) \cos(\beta_z z), \quad x_1 < x < x_2, \quad (4.15)$$

e

$$V_k(x, \pm 1, z, t) = 0, \quad x \leq x_1 \quad \text{ou} \quad x \geq x_2, \quad (4.16)$$

onde A_p representa uma constante utilizada para ajustar a amplitude das perturbações, ω_k é a frequência temporal das perturbações e t o tempo. Neste trabalho, foi excitado apenas o modo $k = 1$. Os coeficientes do polinômio são escolhidos convenientemente com o objetivo de anular o valor da função e das suas primeira e segunda derivadas nos pontos x_1 e x_2 , conforme pode ser visto na Figura 4, suavizando a introdução de perturbações no escoamento.

Figura 4 – Gráficos da função $f_p(x)$ e sua segunda derivada entre os pontos x_1 e x_2 . (a) Função $f_p(x)$ entre os pontos x_1 e x_2 .(b) Segunda derivada da função $f_p(x)$ entre os pontos x_1 e x_2 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 Derivadas Temporais

Para a evolução temporal das equações de vorticidade (4.6) - (4.8) e tensores (4.9) - (4.14), foi adotado um método explícito de Runge-Kutta de 4ª ordem, conforme Ferziger e Peric (2002). O método utilizado é do tipo Previsor-Corretor onde os dois primeiros passos (4.17) e (4.18) utilizam os métodos de Euler explícito e implícito como previsor e corretor, respectivamente, para um avanço temporal de t a $t + \Delta t/2$. O próximo passo (4.19), que corresponde ao avanço para $t + \Delta t$, é realizado pela aplicação de um método previsor baseado na regra do ponto médio e, o último passo corretor (4.20), baseia-se na regra de Simpson. Os quatro passos do método são descritos como segue:

$$\Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^*} = \Omega_k^n + \frac{\Delta t}{2} f(t^n, \Omega_k^n), \quad (4.17)$$

$$\Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^{**}} = \Omega_k^n + \frac{\Delta t}{2} f(t^{(n+\frac{1}{2})}, \Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^*}), \quad (4.18)$$

$$\Omega_k^{(n+1)^*} = \Omega_k^n + \Delta t f(t^{(n+\frac{1}{2})}, \Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^{**}}), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(n+1)} &= \Omega_k^n + \frac{\Delta t}{6} \left[f(t^n, \Omega_k^n) + 2g(t^{(n+\frac{1}{2})}, \Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^*}) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t}{6} \left[f(t^{(n+\frac{1}{2})}, \Omega_k^{(n+\frac{1}{2})^{**}}) + f(t^{(n+1)}, \Omega_k^{(n+1)^*}) \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde Ω_k representa as componentes de vorticidade ω_x , ω_y e ω_z e as componentes do tensor não-Newtoniano T^{xx} , T^{xy} , T^{xz} , T^{yy} , T^{yz} e T^{zz} , f é obtido a partir do lado direito das equações (4.6)-(4.14) após isolar-se as derivadas temporais.

4.2.3 Derivadas Espaciais

Para o cálculo das derivadas espaciais, foi utilizado um método de diferenças finitas compactas de alta ordem (KLOKER, 1997; LELE, 1992; SOUZA, 2003; SOUZA; MENDONCA; MEDEIROS, 2005). O seu uso para a estimativa da primeira e segunda derivada espacial torna necessário a solução de sistemas lineares tridiagonais, além de proporcionar aproximações de quinta e sexta-ordem de precisão (SOUZA; MENDONCA; MEDEIROS, 2005).

4.2.3.1 Cálculo da Primeira Derivada

Para o ponto no contorno, $i = 1$, adotou-se a aproximação descentrada de 5ª ordem:

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24h} (-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + \mathcal{O}(h^5). \quad (4.21)$$

Para o ponto próximo a parede, $i = 2$, adotou-se a aproximação descentrada de 6ª ordem:

$$f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = \frac{1}{120h} (-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) + \mathcal{O}(h^6). \quad (4.22)$$

Para os pontos centrais, adotou-se a seguinte aproximação:

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12h}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + \mathcal{O}(h^6). \quad (4.23)$$

Para os casos $i = N$ e $i = N - 1$, as aproximações são análogas às adotadas para os pontos $i = 1$ e $i = 2$, respectivamente, com inversão de sinal.

As derivadas são calculadas na forma matricial, logo há a necessidade de inversão de uma matriz ou da aplicação do algoritmo de Thomas, para uma matriz tridiagonal. Assim tem-se a seguinte equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & & & & \\ 1 & 6 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 2 & 6 & 1 \\ & & & & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{N-1} \\ f'_N \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{24}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) \\ \frac{1}{120}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) \\ \vdots \\ \frac{1}{10}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{120}(406f_N + 300f_{N-1} - 760f_{N-2} + 80f_{N-3} - 30f_{N-4} + 4f_{N-5}) \\ \frac{1}{24}(74f_N - 16f_{N-1} - 72f_{N-2} + 16f_{N-3} - 2f_{N-4}) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

onde h representa o espaçamento e N representa o número de pontos discretizados.

4.2.3.2 Cálculo da Segunda Derivada

Para o ponto no contorno, $i = 1$, adotou-se a aproximação descentrada de 5ª ordem:

$$13f''_1 + 137f''_2 = \frac{1}{60h^2}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 35f_6) + \mathcal{O}(h^5). \quad (4.25)$$

Para o ponto próximo a parede, $i = 2$, adotou-se a aproximação descentrada de 6ª ordem:

$$f''_1 + 12f''_2 + 3f''_3 = \frac{1}{360h^2}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) + \mathcal{O}(h^6). \quad (4.26)$$

Para os pontos centrais utilizou-se a seguinte aproximação:

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{1}{4h^2}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) + \mathcal{O}(h^6). \quad (4.27)$$

Para o caso $i = N$ e $i = N - 1$, as aproximações são análogas as obtidas para os pontos $i = 1$ e $i = 2$, respectivamente. Assim, a equação a ser resolvida na forma matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix}
 13 & 137 & & & & & \\
 1 & 12 & 3 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & 2 & 11 & 2 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 3 & 12 & 1 \\
 & & & & & 137 & 13
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_1'' \\
 f_2'' \\
 \vdots \\
 f_i'' \\
 \vdots \\
 f_{N-1}'' \\
 f_N''
 \end{bmatrix}
 =
 \frac{1}{h^2}
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{60}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 35f_6) \\
 \frac{1}{360}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 - 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) \\
 \vdots \\
 \frac{1}{4}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) \\
 \vdots \\
 \frac{1}{360}(4834f_N - 8424f_{N-1} + 1890f_{N-2} - 2320f_{N-3} - 810f_{N-4} + 216f_{N-5} - 26f_{N-6}) \\
 \frac{1}{60}(9775f_N - 20285f_{N-1} + 11170f_{N-2} - 550f_{N-3} - 145f_{N-4} + 35f_{N-5})
 \end{bmatrix}.
 \quad (4.28)$$

onde h representa o espaçamento e N representa o número de pontos discretizados.

4.2.4 Equação de Poisson

A equação de Poisson a ser resolvida pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 v = g, \quad (4.29)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano, v é a velocidade V_k , a componente da velocidade do modo k de Fourier na direção normal à superfície, e g são os termos fonte da equação.

Levando-se em consideração o método espectral, a discretização da equação é realizada da seguinte maneira:

Na direção x , as seguintes aproximações são utilizadas para cada equação de Poisson:

- Para $i = 2$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_2 = \frac{10v_1 - 15v_2 - 4v_3 + 14v_4 - 6v_5 + v_6}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.30)$$

- Para $3 \leq i \leq imax - 2$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{3 \leq i \leq imax-2} = \frac{-v_{i-2} + 16v_{i-1} - 30v_i + 16v_{i+1} - v_{i+2}}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.31)$$

- Para $i = imax - 1$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{imax-1} = \frac{10v_{imax} - 15v_{imax-1} - 4v_{imax-2} + 14v_{imax-3} - 6v_{imax-4} + v_{imax-5}}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.32)$$

Na direção y , tem-se as seguintes aproximações:

- Para $j = 2$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_2 + 4 \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_3 = \frac{254v_1 - 432v_2 + 162v_3 + 16v_4}{36\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^5). \quad (4.33)$$

- Para $3 \leq j \leq jmax - 2$:

$$2 \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{j-1} + 11 \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_j + 2 \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{j+1} = \frac{3v_{j-2} + 48v_{j-1} - 102v_j + 48v_{j+1} + 3v_{j+2}}{4\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^6). \quad (4.34)$$

- Para $j = jmax - 1$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{jmax-1} = \frac{-v_{jmax-2} + 2v_{jmax-1} - v_{jmax}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2). \quad (4.35)$$

Para $j = jmax$:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{jmax} = \frac{-7v_{jmax} + 8v_{jmax-1} - v_{jmax-2}}{2\Delta y^2} + \frac{3}{\Delta y} \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{jmax} + \mathcal{O}(\Delta y^2). \quad (4.36)$$

Na direção z , a discretização já foi realizada no momento de adoção do método espectral nesta direção. Logo, para cada modo k de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\beta_k^2 v_k e^{-i\beta_k z}. \quad (4.37)$$

Com as aproximações acima é montada uma matriz pentadiagonal, que é resolvida para cada coluna do domínio (PRESS *et al.*, 1992). A solução desta matriz para todas as colunas do domínio é chamada de iteração.

A equação de Poisson (4.29) é resolvida a partir de um método multigrid, utilizando-se um método de sobre-relaxação sucessiva por linha (LSOR, do inglês *Line Successive Over Relaxation*). Observa-se o valor do fator de relaxação usado no método LSOR, quando se está indo da malha mais grossa para a mais fina deve ser igual a 1, caso contrário não ocorrerá a suavização das altas frequências, essencial para o funcionamento do método.

Um estudo da performance de métodos de solução da equação de Poisson em um código de simulação de escoamentos de fluidos incompressíveis é apresentada por Souza *et al.* (2006).

4.2.4.1 Método Multigrid

O método *multigrid*, proposto originalmente por (FEDORENKO, 1964), tem como finalidade acelerar a solução numérica de equações diferenciais parciais em método iterativos, removendo erros de alta frequência a partir do uso de várias malhas com diferentes graus de refinamento, provocando uma rápida redução do erro global e acelerando a convergência do método que, segundo Hirsch (1988), Ferziger e Peric (2002), independe do número de pontos da malha.

Em sua implementação, podem ser utilizados dois tipos de esquemas de aproximação: o esquema de correção (CS, do inglês *Correction Storage*) e o esquema de aproximação completa (FAS, do inglês *Full Approximation Storage*) (STUBEN; TROTTEBERG, 1981; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). No esquema CS, a equação original é resolvida apenas na malha mais fina; nas malhas mais grossas, resolve-se a equação de resíduo. No esquema FAS, a equação original é resolvida em todas as malhas. Geralmente, adota-se o esquema CS para resolução de problemas lineares e o esquema FAS para problemas não-lineares (BRANDT, 1977).

A sequência com que as malhas são percorridas durante a execução do método multigrid define os chamados ciclos de suavização. Uma generalização dos ciclos mais comumente utilizados é apresentada em Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000), Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001). Neste trabalho, optou-se pela utilização do esquema de aproximação total FAS com um ciclo V com 4 malhas, como esquematizado na Figura 5.

Para mais detalhes sobre o método multigrid, pode-se consultar (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; ZHANG, 1996; GUPTA; KOUATCHOU; ZHANG, 1997; ZHANG, 1997; SPITALERI, 2000)

Figura 5 – Ilustração do Ciclo V utilizado no método multigrid.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a Figura 5, são definidas a operação de restrição, que corresponde a passagem dos valores das variáveis de uma malha mais fina para uma malha mais grossa, e a

operação inversa de correção. Além disso, pode-se descrever os passos do algoritmo FAS para a resolução da equação de Poisson (4.29) da seguinte forma, partindo da malha mais fina (h):

1. realiza-se 2 iterações do método LSOR na malha h , para resolver

$$\nabla^2 v_h = g_h; \quad (4.38)$$

2. calcula-se o resíduo (d_h):

$$d_h = g_h - \nabla^2 v_h; \quad (4.39)$$

3. efetua-se as operações de restrição:

$$v_h^i \Rightarrow v_{2h}^0 \quad (SI), \quad (4.40)$$

$$d_h^i \Rightarrow d_{2h}^0 \quad (FW), \quad (4.41)$$

onde *SI* (do inglês *Straight Injection*) significa que os valores da variável na malha mais fina são passados para a malha mais grossa, sem o cálculo de médias, e *FW* (do inglês *Full Weight*) significa que há uma ponderação dos valores da variável da malha mais fina para a malha mais grossa. A ponderação dessas operações é mostrada na Figura 6.

Figura 6 – Ponderação utilizada para as operações de restrição.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4. Calcula-se o termo fonte para a segunda malha ($2h$) através de:

$$g_{2h} = d_{2h}^0 + \nabla^2 v_{2h}^0; \quad (4.42)$$

5. repete-se os passos de 1 a 4 até a malha mais grossa ($8h$), onde são realizadas 140 iterações do método LSOR, para resolver:

$$\nabla^2 v_{8h} = g_{8h}; \quad (4.43)$$

6. calcula-se a correção da malha mais grossa ($8h$):

$$corr_{8h} = v_{8h}^i - v_{8h}^0; \quad (4.44)$$

7. calcula-se uma interpolação bilinear da correção:

$$corr_{8h} \Rightarrow corr_{4h}. \quad (4.45)$$

A ponderação dessa operação é mostrada na [Figura 7](#).

Figura 7 – Ponderação utilizada para a interpolação bilinear.

Fonte: Elaborada pelo autor.

8. Atualiza-se os novos valores do termo v_{4h} :

$$v_{4h} = v_{4h}^i + corr_{4h}; \quad (4.46)$$

9. realiza-se uma iteração do método LSOR na terceira malha ($4h$), para resolver:

$$\nabla^2 v_{4h} = g_{4h}; \quad (4.47)$$

10. repete-se os passos de 6 a 9 até chegar na malha mais fina (h);
 11. se $d_h > \varepsilon_R$, realiza-se um novo ciclo V. Caso contrário, o algoritmo pára.

O número de ciclos V necessários para a solução da equação depende do valor do resíduo na malha mais fina (h). Se este valor for menor que um valor de referência estipulado, o procedimento é interrompido e a aproximação obtida é tomada como resposta. O valor de referência adotado para as simulações realizadas foi $\varepsilon_R = 10^{-6}$.

4.2.5 Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento

Meitz e Fasel (1996), em seus estudos com a presença de vórtices longitudinais, verificaram a possibilidade de reflexões desses vórtices para a entrada do domínio. A fim de evitar este fenômeno, foi adotada uma zona de amortecimento das perturbações próximo a entrada do domínio, onde as componentes de vorticidade e tensores são ponderados por meio de uma função rampa, da forma

$$f_1(x) = f_1(\varepsilon) = 6\varepsilon^5 - 15\varepsilon^4 + 10\varepsilon^3, \quad (4.48)$$

onde ε é definida como uma função dependente dos pontos de discretização (i) na direção longitudinal (x). A função ε é definida como

$$\varepsilon = \frac{i - 1}{i_1 - 1}, \quad (4.49)$$

onde $1 \leq i \leq i_1$. Uma representação da função (4.48) pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Gráfico da função multiplicadora presente na região de amortecimento próxima a entrada do domínio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todas as componentes de vorticidade e tensores são multiplicadas pela função (4.48), na região de amortecimento.

4.2.6 Relaminarização do Escoamento

Assim como ocorre na região de entrada do escoamento, há a possibilidade de reflexões das perturbações na região de saída para dentro do domínio, que podem comprometer os resultados numéricos. Kloker, Konzmann e Fasel (1993), Meitz e Fasel (1996), Souza (2003) utilizaram uma técnica de relaminarização com o objetivo de eliminar tais efeitos de reflexão de onda.

A técnica consiste em impor que as perturbações das componentes de vorticidade e tensores decaiam a zero em um dado intervalo próximo a saída do escoamento. Assim, dado um intervalo $x_3 < x < x_4$ em correspondência com os pontos de malha i_3 e i_4 , utiliza-se uma função rampa f_2 , com $f_2(x_3) = 1$ até $f_2(x_4) = 0$, tal que

$$\Omega_k^*(x, y, z, t) = f_2(x) \Omega_k(x, y, z, t), \quad (4.50)$$

onde $\Omega_k(x, y, z, t)$ representa as componentes da vorticidade e tensores que saem do integrador temporal e $\Omega_k^*(x, y, z, t)$ é tomado como valor obtido após a relaminarização.

Em seu trabalho, [Kloker, Konzelmann e Fasel \(1993\)](#) utiliza um polinômio de 5ª ordem para a função f_2 , definido por

$$f_2(x) = f_2(\varepsilon) = 1 - 6\varepsilon^5 + 15\varepsilon^4 - 10\varepsilon^3, \quad (4.51)$$

onde $\varepsilon = (i - i_3)/(i_4 - i_3)$, para $i_3 \leq i \leq i_4$. Esse polinômio garante que a variação da função e sua derivada sejam suaves, para evitar reflexões.

Em um estudo mais aprofundado dessa técnica, [Meitz e Fasel \(1996\)](#) verificou os efeitos de se aplicar a técnica de relaminarização n vezes, a cada passo do integrador temporal, que pode ser descrito como

$$\Omega_k^*(x, y, z, t) = f_2^n(x) \Omega_k(x, y, z, t). \quad (4.52)$$

Segundo testes realizados por [Meitz e Fasel \(1996\)](#) na aplicação da equação (4.52) a uma função $\Omega_k^*(x, y, z, t)$ constante, com $n = 1, 50, 100$ e 150 , foi possível verificar que a repetida aplicação da função $f_2(x)$ gera um decaimento brusco, que pode causar reflexões de onda na região de relaminarização. A fim de evitar este comportamento, [Meitz e Fasel \(1996\)](#) propôs a utilização da seguinte função

$$f_2(x) = f_2(\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon^4}{10}} (1 - \varepsilon^{50})^4. \quad (4.53)$$

Uma reprodução dos resultados obtidos por ([MEITZ; FASEL, 1996](#)) no estudo do comportamento da aplicação da função $f_2(x)$ repetidas vezes pode ser vista na [Figura 9](#).

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi utilizada a função (4.53) proposta por ([MEITZ; FASEL, 1996](#)). [Souza \(2003\)](#) ressalta em seu trabalho que, para um bom funcionamento da técnica, as seguintes restrições devem ser respeitadas

$$\begin{aligned} i_4 - i_3 &\geq 2\lambda, \\ i_{max} - i_4 &\geq \lambda, \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde λ é um comprimento de onda de Tollmien-Schlichting.

Figura 9 – Efeito de se aplicar n vezes a função $f_2(x)$ para relaminarização.

Fonte: Adaptada de Meitz e Fasel (1996).

4.2.7 Cálculo da Vorticidade na Parede

De posse das soluções da equação de Poisson e da continuidade, é possível efetuar o cálculo da vorticidade no contorno rígido a partir dos seguintes passos ((SOUZA, 2003)):

a) Primeiramente, calcula-se a variável:

$$J_k = \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - k^2 \beta_k^2 V_k, \quad (4.55)$$

na parede ($y = -1$), para qualquer posição x e modo de Fourier k .

A segunda derivada na direção x , no intervalo entre x_1 e x_2 , é obtida considerando a mesma função utilizada para inserção das perturbações. Nos demais pontos, toma-se como nula a derivada. Na direção y , é utilizada a aproximação descentrada explícita de 6ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} \Big|_{y=-1} = \frac{1}{180\Delta y^2} [938V_{k1} - 4014V_{k2} + 7911V_{k3} - 9490V_{k4} + \\ + 7380V_{k5} - 3618V_{k6} + 1019V_{k7} - 126V_{k8}] + \mathcal{O}(\Delta y^6). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Em $y = 1$, uma aproximação similar é empregada. Essas aproximações reforçam o fato de que $\frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} \Big|_{y=\text{parede}} = 0$.

b) Tendo os valores do laplaciano da velocidade, o componente de vorticidade é então obtido por meio da equação:

$$\frac{\partial \Omega_{z_k}}{\partial x} = -J_k + ik\beta_k \Omega_{z_k}. \quad (4.57)$$

As aproximações numéricas empregadas, também propostas por (SOUZA, 2003), são:

- para $i = 2$:

$$\omega_{z_{k_2}} = \frac{1}{720} \left[\Delta x (251\omega'_{z_{k_1}} + 646\omega'_{z_{k_2}} - 264\omega'_{z_{k_3}} + 106\omega'_{z_{k_4}} - 19\omega'_{z_{k_5}}) + 720\omega_{z_{k_1}} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{3}{160} \Delta x^6 \right); \quad (4.58)$$

- para $3 \leq i \leq imax - 1$:

$$\omega_{z_{k_i}} = \frac{1}{57} \left[\Delta x (10\omega'_{z_{k_{i-2}}} + 57\omega'_{z_{k_{i-1}}} + 24\omega'_{z_{k_i}} - \omega'_{z_{k_{i+1}}}) + 33\omega'_{z_{k_{i-2}}} + 24\omega'_{z_{k_{i-1}}} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{11}{3420} \Delta x^6 \right); \quad (4.59)$$

- para $i = imax$:

$$\omega_{z_{k_{imax}}} = \frac{1}{720} \left[\Delta x (251\omega'_{z_{k_{imax}}} + 646\omega'_{z_{k_{imax-1}}} - 264\omega'_{z_{k_{imax-2}}} + 106\omega'_{z_{k_{imax-3}}} - 19\omega'_{z_{k_{imax-4}}}) + 720\omega_{z_{k_{imax-1}}} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{3}{160} \Delta x^6 \right). \quad (4.60)$$

Aproximações similares são adotadas para o cálculo da vorticidade na parede superior ($y = 1$).

4.2.8 Filtragem Espacial

Segundo [Lele \(1992\)](#), a utilização de derivadas de alta ordem podem gerar instabilidades numéricas que causam o surgimento de perturbações, não físicas, de alta frequência durante as simulações. Essas perturbações de alta frequência são usualmente eliminadas com a utilização de filtros numéricos.

Dessa forma, optou-se por adotar um método compacto de filtragem, com sexta ordem de precisão, proposto por [Lele \(1992\)](#). A aplicação do filtro foi feita somente na direção longitudinal para as componentes de vorticidade, após o último subpasso do método de Runge-Kutta, a cada passo de tempo. As componentes de vorticidade após a aplicação do filtro são representadas com o símbolo $\hat{\omega}$ e são calculadas pelo seguinte sistema tridiagonal:

- Para $i = 1$ e $imax$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{1}{16} (15\omega_{i,j,k} + 4\omega_{i\pm 1,j,k} - 6\omega_{i\pm 2,j,k} + 4\omega_{i\pm 3,j,k} - \omega_{i\pm 4,j,k}); \quad (4.61)$$

- Para $i = 2$ e $imax - 1$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{1}{16} (\omega_{i\mp 1,j,k} + 12\omega_{i,j,k} + 6\omega_{i\pm 1,j,k} - 4\omega_{i\pm 2,j,k} + \omega_{i\pm 3,j,k}); \quad (4.62)$$

- Para $i = 3$ e $imax - 2$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{1}{16} (-\omega_{i\mp 2,j,k} + 4\omega_{i\mp 1,j,k} + 10\omega_{i,j,k} + 4\omega_{i\pm 1,j,k} - \omega_{i\pm 2,j,k}); \quad (4.63)$$

- Para $i = 4, \dots, imax - 3$:

$$\alpha_f \hat{\omega}_{i-1,j,k} + \alpha_f \hat{\omega}_{i,j,k} + \alpha_f \hat{\omega}_{i+1,j,k} = a_f \omega_{i,j,k} + b_f (\omega_{i-1,j,k} + \omega_{i+1,j,k}) + c_f (\omega_{i-2,j,k} + \omega_{i+2,j,k}) + d_f (\omega_{i-3,j,k} + \omega_{i+3,j,k}), \quad (4.64)$$

onde

$$a_f = \frac{11 + 10\alpha_f}{16}, \quad b_f = \frac{15 + 34\alpha_f}{64}, \\ c_f = \frac{-3 + 6\alpha_f}{32} \quad \text{e} \quad d_f = \frac{1 - 2\alpha_f}{64},$$

com α_f podendo assumir valores menores ou igual a 0.5. Quanto menor o valor de α_f , maior será o número de frequências filtradas durante a simulação.

4.2.9 Decomposição do Domínio

As simulações presentes neste trabalho foram feitas utilizando uma técnica de decomposição do domínio em vários subdomínios, tanto na direção longitudinal x como normal y , sendo cada um deles resolvido em um elemento de processamento (EP), como mostra o exemplo da Figura 10. As regiões sombreadas representam as regiões de sobreposição.

Figura 10 – Exemplo de decomposição, com as regiões de sobreposição, do domínio para a paralelização, usando 8 EPs.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada elemento de processamento é responsável por um subdomínio contendo $ptsx$ pontos na direção x e $ptsy$ pontos na direção y , sendo os valores associados à $ptsx$ e $ptsy$ calculados, respectivamente, por

$$ptsx = \frac{imax + (inter + 1)(nprocs - 1)}{nprocs} \quad \text{e} \quad ptsy = \frac{jmax + (inter + 1)(nprocs - 1)}{nprocs}, \quad (4.65)$$

sendo $imax$ e $jmax$ o número de pontos na direção x e y , respectivamente, $nprocs$ o número de elementos de processamento utilizados e $inter$ a sobreposição de subdomínios associada à malha mais refinada, considerando a aplicação do método *multigrid*. A sobreposição de subdomínios vizinhos é feita de modo a haver troca de informações entre eles, que são realizadas no processo de paralelização pela biblioteca MPI (do inglês, *Message-Passing Interface*) (PACHECO, 1996; GROPP; LUSK; THAKUR, 1999).

Vale ressaltar que o número de pontos pertencentes a região de sobreposição depende de alguns fatores, como o comprimento da molécula computacional usada na aproximação da derivada ($m = 5$) e do método usado para resolver a equação de Poisson. A sobreposição entre os subdomínios é obtida por meio da relação:

$$inter = 2^{(N-1)}(m - 2), \quad (4.66)$$

sendo N o número de níveis utilizado no método multigrid ($N = 4$). No presente trabalho, o $inter$ adotado, portanto, foi de $inter = 24$.

4.2.10 Algoritmo Computacional

Para a obtenção dos resultados aqui apresentados, resolve-se numericamente as equações (3.29) - (3.35), juntamente com as equações dos tensores (3.14) - (3.19), através da aplicação do seguinte algoritmo:

1. Aplicar um passo do integrador de tempo para as vorticidades e para os tensores não-Newtonianos;
2. Aplicar as funções responsáveis pelas zonas de amortecimento e relaminarização do escoamento;
3. Atualizar o valor das perturbações por sucção e injeção nas paredes;
4. Calcular a velocidade v , resolvendo a equação de Poisson (3.31);
5. Calcular a velocidade u , resolvendo as equações de Poisson (3.30) e continuidade (3.29) para o modo 0;
6. Calcular a velocidade w , resolvendo a equação de Poisson (3.32);
7. Atualizar os valores das vorticidades ω_x^* , ω_y^* e ω_z^* nas paredes;
8. Aplicar o filtro após o último passo do integrador temporal.

Após o último passo do integrador temporal, aplica-se o filtro computacional. O método numérico é finalizado quando atinge-se o tempo limite de simulação imposto.

VERIFICAÇÃO

A verificação do código numérico tem como principais objetivos identificar se este possui erros de implementação e verificar sua precisão numérica. Geralmente, o processo de verificação do código de Simulação Numérica Direta voltado para estudo da transição é feito a partir de um comparativo com resultados obtidos por meio do uso da Teoria de Estabilidade Linear.

Nesta seção, faz-se a verificação do código numérico para o cálculo do escoamento base e do código de análise de estabilidade. A verificação do código base é feita comparando-se os resultados numéricos com as respectivas soluções analíticas e, a verificação do código de estabilidade, é feita a partir da comparação dos resultados numéricos obtidos para escoamentos Newtonianos bi e tridimensionais, além do escoamento Oldroyd-B bidimensional, com os respectivos resultados da Teoria de Estabilidade Linear.

5.1 Verificação do Escoamento Base

A verificação do código numérico para o cálculo dos escoamentos base é feita a partir da comparação de resultados com a solução analítica do modelo Oldroyd-B (BRASSEUR *et al.*, 1998), que corresponde a $\alpha_G = 0$ na equação do modelo Giesekus (3.8), e comparação com a solução "semi-analítica" do modelo Giesekus para o caso puramente polimérico ($\beta_{nn} = 0$) (ARAUJO *et al.*, 2018; TOMÉ *et al.*, 2019). Para ambos os casos, é considerado um escoamento viscoelástico, bidimensional, incompressível e isotérmico, entre placas planas.

5.1.1 Modelo Oldroyd-B

Para a verificação do código com o modelo Oldroyd-B, foram feitas 3 simulações com diferentes valores de β_{nn} , Wi e Re . Nas simulações foram adotados os seguintes parâmetros:

- número de pontos na direção $x - imax = 8825$;

- número de pontos na direção $y - jmax = 249$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção $x - dx = 2\pi/16$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção $y - dy = 2/(jmax - 1)$;
- $Re = 3000, 4000$ e 5000 ;
- $Wi = 1, 3$ e 5 ;
- $\beta_{nn} = 0,25, 0,50$ e $0,75$;
- $\alpha_G = 0$.

A quantidade de pontos na direção x foi tomada de modo a garantir o completo desenvolvimento da solução, ou seja, a obtenção do estado estacionário. A Figura 11 mostra a comparação dos resultados das simulações numéricas com a respectiva solução analítica do modelo Oldroyd-B, de onde pode-se verificar a concordância dos resultados.

Figura 11 – Comparação entre a solução numérica obtida usando uma técnica DNS e a solução analítica do escoamento Oldroyd-B.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A fim de mostrar quantitativamente a convergência do método numérico, foi calculado o erro entre as soluções obtidas utilizando as normas L_1 , L_2 e L_∞ , comparando a velocidade U obtida com a solução numérica e a respectiva solução analítica. Os erros em cada norma são então definidos como:

$$E_1 = ||s - \bar{s}||_1 = \sum_{i=1}^n |s_i - \bar{s}_i|$$

$$E_2 = ||s - \bar{s}||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |s_i - \bar{s}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_\infty = ||s - \bar{s}||_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |s_i - \bar{s}_i|$$

onde E_i é o erro na norma L_i , $i = 1, 2, \infty$, s_i e $\bar{s}_i$ são as soluções numérica e analítica, respectivamente, e n é o número total de pontos.

Para o cálculo dos erros, foram utilizadas 7 malhas distintas contendo 209, 241, 273, 305, 337, 369 e 401 pontos na direção y . A Figura 12 mostra um comparativo dos erros obtidos e a ordem de convergência dos resultados.

Figura 12 – Decaimento do erro com o refinamento de malha para o escoamento base.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser visto na Figura 12, os erros diminuem com o refinamento de malha, mostrando que a convergência do método numérico empregado está em torno de 5.

5.1.2 Modelo Giesekus

Seguindo o mesmo raciocínio feito com o modelo Oldroyd-B, foi feita uma comparação de resultados numéricos com o solução semi-analítica do modelo Giesekus para o caso de escoamento puramente polimérico ($\beta_{nn} = 0$). Foram feitas 3 simulações com diferentes valores de α_G , Wi e Re , utilizando os seguintes parâmetros:

- número de pontos na direção x – $imax = 8825$;
- número de pontos na direção y – $jmax = 249$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x – $dx = 2\pi/16$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y – $dy = 2/(jmax - 1)$;
- $Re = 1000$ e 2000 ;
- $Wi = 1$ e 3 ;
- $\alpha_G = 0, 10, 0,30$ e $0,40$;

- $\beta_{nn} = 0$.

A Figura 13 mostra a comparação dos resultados das simulações numéricas com a respectiva solução semi-analítica do modelo Giesekus. Destas figuras, pode-se observar a conformidade entre as soluções obtidas.

Figura 13 – Comparação entre a solução numérica obtida usando uma técnica DNS e a solução semi-analítica do escoamento Giesekus puramente polimérico. Tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das normas para o cálculo dos erros e as mesmas 7 malhas definidas anteriormente, contendo 209, 241, 273, 305, 337, 369 e 401 pontos na direção y , é possível ver a concordância dos resultados numéricos e solução semi-analítica do modelo Giesekus. A Figura 14 apresenta os erros obtidos e a ordem de convergência do modelo.

Assim, pode-se concluir que o código numérico implementado simula de maneira satisfatória um escoamento base para ambos os modelos utilizados nos testes comparativos e pode ser usado como ferramenta para geração de resultados base para posterior análise de estabilidade.

Figura 14 – Decaimento dos erros de convergência com o refinamento da malha escoamento base do modelo Giesekus, para $\beta_{nn} = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Verificação do Código que Simula Escoamento Perturbado

A verificação do código numérico desenvolvido para análise de estabilidade é feita a partir da comparação das taxas de amplificação das perturbações obtidas, com os respectivos resultados de Teoria de Estabilidade Linear. Antes, faz-se a verificação do correto funcionamento da região de relaminarização do escoamento.

Nas simulações numéricas foram adotados os seguintes parâmetros em comum:

- número de pontos na direção x – $imax = 729$;
- número de pontos na direção z – $kphys = 4$;
- número de modos de Fourier – $kfour = 2$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x – $dx = 2\pi/(32\alpha_r)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y – $dy = 2/(jmax - 1)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção z – $dz = \lambda_z/kphys$;
- passo no tempo – $dt = 2\pi/(128\omega_t)$;
- início do domínio $x_0 = 1, 0$;
- posição da introdução de perturbações entre $x_1 = x_0 + 39dx$ e $x_2 = x_0 + 71dx$;
- posição da região de relaminarização próximo à saída $x_3 = x_{max} - 100dx$ e $x_4 = x_{max} - 40dx$;
- parâmetro que controla a amplitude das perturbações – $A = 1 \times 10^{-4}$.

5.2.1 Verificação da Influência da Região de Relaminarização

A verificação da influência da região de relaminarização tem como objetivo mostrar o correto funcionamento da aplicação do método imposto, responsável por eliminar as perturbações próximo a saída do domínio e, além disso, mostrar que o domínio computacional utilizado nas simulações possui tamanho suficiente para obtenção dos resultados.

Para a verificação, foram feitas 2 simulações para um caso estável utilizando o modelo Giesekus e cada simulação contendo um tamanho distinto de domínio computacional. Ao final das simulações, foram feitas medições e a comparação dos perfis das variáveis dos escoamentos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio.

Nas simulações, além da utilização dos parâmetros em comum citados anteriormente, foi utilizado um tempo total de simulação – $tt = 35 \times 128$ e uma das simulações contendo $imax = 1465$ pontos na direção y . A Figura 15 apresenta o comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x das simulações realizadas. As regiões RR correspondem as regiões de relaminarização das simulações contendo 729 ($RR\ imax = 729$) e 1465 ($RR\ imax = 1465$) pontos na direção longitudinal.

Figura 15 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u para as simulações contendo 729 e 1465 pontos na direção longitudinal x .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 15 é possível ver que os escoamentos apresentam boa concordância até a região de relaminarização correspondente a simulação com $imax = 729$ ($RR\ imax = 729$) pontos. A partir deste ponto, na simulação com $imax = 1465$ pontos, pode-se notar a frente de onda das perturbações, representando o processo de propagação das mesmas. As Figuras 16 e 17 mostram a comparação dos perfis das componentes de velocidade e vorticidade e tensores, respectivamente, obtidos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio computacional.

Figura 16 – Comparação entre os perfis das componentes de velocidade e vorticidade dos escoamentos contendo $imax = 729$ e $imax = 1465$ pontos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio computacional. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Comparação entre os perfis das componentes de velocidade e vorticidade dos escoamentos contendo $imax = 729$ e $imax = 1465$ pontos no ponto $x = x_3 - 32$ do escoamento com menor domínio computacional. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com as Figuras 16 e 17, é possível notar que não há alteração no escoamento simulado com $imax = 729$ pontos quando comparado com a simulação com $imax = 1465$ pontos, antes da região de relaminarização, logo, pode-se concluir que esta região apresenta o comportamento esperado de eliminar as perturbações e evitar a reflexão das mesmas para dentro do escoamento.

5.2.2 Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Newtonianos 2D

Na verificação do código numérico considerando escoamentos Newtonianos bidimensionais, foram realizadas 3 simulações, cujos dados foram escolhidos de forma a se obter diferentes comportamentos com relação às perturbações, sendo um escoamento do tipo instável, um neutro e outro estável, conforme apresentado na Tabela 2.

Para essas simulações, foram adotados os seguintes parâmetros, além daqueles em comum citados anteriormente:

- número de pontos na direção $y - jmax = 129$;
- tempo total de simulação - $tt = 20 \times 128$;

Tabela 2 – Dados escolhidos para Simulação Numérica Direta para os casos Newtonianos 2D.

Caso	Reynolds	ω_t	α_r	α_i
A	5000	0,33	1,15526	0,01167
B	10000	0,27	1,09507	0,00068
C	10000	0,2375	1,00052	-0,01025

A Figura 18a apresenta o comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u (u_{max}) na direção x para os escoamentos descritos na Tabela 2, obtidos através de análise temporal de Fourier dos dados. A Figura 18b apresenta a curva neutra de estabilidade obtida com o código LST, com o posicionamento dos casos descritos. A curva neutra de estabilidade corresponde a região cuja taxa de amplificação das perturbações permanece constante por toda extensão do domínio. A região externa à curva corresponde aos casos cuja taxa tende a decrescer ao longo do domínio e, a região interna, são os casos cuja taxa de amplificação das perturbações tende a crescer ao decorrer do escoamento.

Ao derivar-se o valor de u_{max} na direção x do escoamento (que corresponde a inclinação das retas presentes na Figura 18a), pode-se obter o valor da taxa de amplificação α_i das perturbações. A Figura 19 apresenta os valores de $-\alpha_i$, para cada simulação apresentada na Tabela 2. É possível observar que cada caso apresenta uma diferente taxa de amplificação. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 3, onde compara-se com os resultados da Teoria de Estabilidade Linear.

Figura 18 – Valor máximo da perturbação da velocidade u na direção x e curva neutra de estabilidade obtida com o código LST, para os escoamentos Newtonianos 2D.

(a) Máximo valor da perturbação da velocidade u_{max} na direção x . (b) Curva neutra de estabilidade obtida com o código LST.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Comportamento da taxa de amplificação α_i na direção x .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser observado na Tabela 3, os resultados apresentados são bem satisfatórios, mostrando uma grande proximidade entre os casos DNS e LST. Agora, fazendo uma analogia com a Figura 18b, tem-se:

- caso A: apresenta uma taxa de amplificação positiva (e está localizado na parte externa da curva neutra), logo, um caso estável;
- caso B: apresenta uma taxa de amplificação praticamente nula (e posicionado sobre a curva neutra), ou seja, um caso neutro;

Tabela 3 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos Newtonianos 2D.

Caso	α_i - DNS	α_i - LST
A	0,01167	0,01056
B	0,00068	0,00006
C	-0,01025	-0,01095

- caso C: apresenta uma taxa de amplificação negativa (e está localizado na região interna da curva neutra), portanto corresponde a um caso instável.

5.2.3 Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Newtonianos 3D

Para a verificação do código numérico utilizando escoamentos Newtonianos tridimensionais, parte-se do mesmo princípio para escolha casos bidimensionais. Foram realizadas 3 simulações, cujos dados podem ser visto na [Tabela 4](#), sendo novamente um caso estável, um neutro e outro instável.

Nas simulações foram adotados os seguintes parâmetros, além daqueles em comum citados anteriormente:

- número de pontos na direção y – $jmax = 377$;
- tempo total de simulação – $tt = 20 \times 384$;

Tabela 4 – Dados escolhidos para Simulação Direta Numérica para os casos Newtonianos 3D.

Caso	Reynolds	β_z	ω_t	α_r	α_i
A	7200	0,6	0,15	0,608703	0,015861
B	6900	0,4	0,215	0,855909	0,000165
C	10800	0,4	0,205	0,875464	-0,011626

Calculando-se a taxa de amplificação das perturbações dos escoamentos, é possível criar a [Tabela 5](#) onde são comparadas as taxas obtidas por meio da Simulação Numérica Direta e da Teoria de Estabilidade Linear. Novamente, os resultados obtidos mostram uma proximidade satisfatória, verificando o código numérico para um caso Newtoniano tridimensional. A [Figura 20](#) apresenta o máximo valor da perturbação da velocidade u (u_{max}) dos casos simulados.

Tabela 5 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos Newtonianos 3D.

Caso	α_i - DNS	α_i - LST
A	0,015861	0,015828
B	0,000165	0,000093
C	-0,011626	-0,011689

Figura 20 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade, u_{max} na direção x , para escoamentos Newtonianos 3D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser observado na [Tabela 5](#), o caso A apresenta uma taxa de amplificação positiva, ou seja, trata-se de um caso estável. O caso B apresenta uma taxa de amplificação praticamente nula, logo corresponde a um caso neutro e, o caso C, apresenta uma taxa de amplificação negativa, portanto trata-se de um caso instável. A mesma análise pode ser feita a partir do cálculo do coeficiente de inclinação das retas que correspondem ao máximo valor da perturbação, presente na [Figura 20](#).

5.2.4 Comparativo entre códigos em DNS e LST para escoamentos Oldroyd-B 2D

A verificação do código tridimensional, segundo escoamentos do tipo Oldroyd-B bidimensionais, é feita considerando-se 3 simulações cujos dados foram tomados afim de se obter um escoamento com comportamento estável, um neutro e ou instável. Os dados escolhidos são dados na [Tabela 6](#). Ainda, nas simulações foram adotados os seguintes parâmetros, além daqueles em comum citados anteriormente:

- número de pontos na direção y – $j_{max} = 377$;
- tempo total de simulação – $tt = 20 \times 384$;

O comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u dos casos escolhidos é apresentado na [Figura 21](#).

Tabela 6 – Dados escolhidos para Simulação Numérica Direta para os casos do tipo Oldroyd-B 2D.

Caso	Reynolds	β_{nn}	Weissenberg	ω_t	α_r	α_i
A	6500	0,9	10,0	0,2389	0,951526	0,00013
B	8000	0,9	5,0	0,24	0,9804	-0,009028
C	5200	0,9	1,0	0,2	0,8306	0,020705

Figura 21 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade, u_{max} na direção x , para escoamentos do tipo Oldroyd-B 2D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Calculando-se novamente a taxa de amplificação das perturbações, é possível construir a [Tabela 7](#) e comparar os resultados com os respectivos resultados obtidos com o cálculo da Teoria de Estabilidade Linear.

Tabela 7 – Comparação dos resultados DNS e LST para os casos do tipo Oldroyd-B 2D.

Caso	α_i - DNS	α_i - LST
A	0,00013	-0,000021
B	-0,009028	-0,009229
C	0,020705	0,020635

Como pode ser visto na [Tabela 7](#), a comparação dos resultados de DNS e LST apresentam uma proximidade bastante satisfatória, o que mostra que o código numérico tridimensional é capaz de efetuar simulações bidimensionais. Observa-se também que, de acordo com os resultados, tem-se o caso A como sendo um escoamento do tipo neutro, pois, apesar da diferença de sinais entre os resultados DNS e LST, a ordem de grandeza faz com que a taxa de amplificação das perturbações seja praticamente desprezível. O caso B corresponde a um escoamento do tipo instável e, para o caso C, tem-se um escoamento do tipo estável.

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nas simulações utilizando os métodos numéricos mostrados no Capítulo 4. É feita uma verificação da influência do número de onda transversal, do parâmetro α_G do modelo Giesekus e do número de Weissenberg na estabilidade dos escoamentos.

6.1 Influência do Número de Onda Transversal β_z

A análise da influência do número de onda transversal também pode ser considerada como uma verificação do código, pois como β_z mede a velocidade de propagação de ondas na direção transversal ao escoamento, quanto menor a sua magnitude, mais próximo de um caso bidimensional este escoamento será. Para essa análise, foram adotados os mesmos casos A, B e C, descritos na Tabela 6 do capítulo anterior. Além disso, utiliza-se o modelo Oldroyd-B devido ao menor custo computacional, menor tempo de simulação para obtenção de resultados e pelo fato da influência do número de onda transversal não depender do modelo adotado.

Nas simulações, foram adotados os seguintes parâmetros:

- número de pontos na direção x – $imax = 729$;
- número de pontos na direção z – $kphys = 4$;
- número de modos de Fourier – $kfour = 2$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x – $dx = 2\pi/(32\alpha_r)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y – $dy = 2/(jmax - 1)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção z – $dz = \lambda_z/kphys$;
- passo no tempo – $dt = 2\pi/(128\omega_t)$;

- número de onda transversal – $\beta_z = 0,0, 0,10, 0,75, 1,0, 1,25$ e $1,50$
- início do domínio $x_0 = 1,0$;
- posição da introdução de perturbações entre $x_1 = x_0 + 39dx$ e $x_2 = x_0 + 71dx$;
- posição da região de relaminarização próximo à saída $x_3 = x_{max} - 100dx$ e $x_4 = x_{max} - 40dx$;
- parâmetro que controla a amplitude das perturbações – $A = 1 \times 10^{-4}$.

A [Tabela 8](#) apresenta as taxas de amplificação das perturbações obtidas nas simulações e, a [Figura 22](#), apresenta o máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x do escoamento, para cada caso simulado.

Tabela 8 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para diferentes números de onda transversal.

	α_i					
	2D	3D				
Caso	$\beta_z = 0,0$	$\beta_z = 0,10$	$\beta_z = 0,75$	$\beta_z = 1,0$	$\beta_z = 1,25$	$\beta_z = 1,50$
A	0,00013	-0,000007	0,0068	0,022361	0,050129	0,088191
B	-0,009028	-0,009071	0,005286	0,027088	0,062907	0,090973
C	0,020705	0,020478	0,013203	0,017357	0,031014	0,052697

Ao olhar para a [Tabela 8](#) e a [Figura 22](#) pode-se notar que os resultados apresentaram o comportamento esperado quando $\beta_z = 0,1$, uma vez que as taxas de amplificação das perturbações são bem próximas das respectivas taxas obtidas com $\beta_z = 0,0$, que correspondem aos casos bidimensionais.

Agora, analisando o comportamento dos casos da [Tabela 8](#) de acordo com o aumento do número de onda transversal, é possível ver que o aumento de β_z faz com que o escoamento se torne cada vez mais estável, ao ponto dos casos A e B que correspondem, respectivamente, a um caso neutro e um caso instável quando $\beta_z = 0,0$, se tornem escoamentos estáveis para $\beta_z = 1,5$. Já o caso C, cujo escoamento bidimensional é estável, apesar de uma pequena variação para $\beta_z = 0,1$ e $0,75$, não apresenta mudança em sua classificação, se tornando inclusive mais estável.

Uma observação válida é que, de um modo geral, os resultados concordam com a proposta do Teorema de Squire ([SQUIRE, 1933](#)), que afirma que a evolução de perturbações tridimensionais tendem a ser mais estáveis que a evolução de perturbações bidimensionais para uma mesma frequência de perturbação, como acontece com os casos apresentados.

6.2 Influência do Parâmetro α_G

Para analisar a influência do parâmetro α_G do modelo Giesekus na estabilidade do escoamento, foram considerados 3 casos (um estável, um neutro e outro do tipo instável), para

Figura 22 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de β_z . (a) Caso A, (b) Caso B e (c) Caso C.

Fonte: Elaborada pelo autor.

diferentes valores de α_G ($\alpha_G = 0,0, 0,10, 0,20, 0,30$ e $0,40$) e seu respectivo escoamento Newtoniano. Vale lembrar que o caso $\alpha_G = 0,0$ corresponde ao modelo Oldroyd-B.

Nas simulações numéricas foram adotados os seguintes parâmetros:

- número de pontos na direção x – $imax = 729$;
- número de pontos na direção y – $jmax = 377$;
- número de pontos na direção z – $kphys = 4$;
- número de modos de Fourier – $kfour = 2$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção x – $dx = 2\pi/(32\alpha_r)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção y – $dy = 2/(jmax - 1)$;

- distância entre dois pontos consecutivos na direção z – $dz = \lambda_z/kphys$;
- tempo total de simulação – $tt = 35 \times 384$;
- passo no tempo – $dt = 2\pi/(128\omega_t)$;
- início do domínio $x_0 = 1,0$;
- posição da introdução de perturbações entre $x_1 = x_0 + 39dx$ e $x_2 = x_0 + 71dx$;
- posição da região de relaminarização próximo à saída $x_3 = x_{max} - 100dx$ e $x_4 = x_{max} - 40dx$;
- parâmetro que controla a amplitude das perturbações – $A = 1 \times 10^{-4}$.

Os demais dados utilizados em cada simulação são apresentados na [Tabela 9](#):

Tabela 9 – Dados escolhidos para análise da influência do parâmetro α_G .

Caso	Reynolds	β_{nn}	Weissenberg	β_z	ω_t	α_r
A	8200	0,9	10,0	1,0	0,252	0,578
B	9100	0,9	10,0	0,6	0,235	0,92317
C	10200	0,9	10,0	0,6	0,195	0,80513

A [Figura 23](#) apresenta o máximo valor da perturbação u na direção x do escoamento dos casos descritos na [Tabela 9](#), incluindo as respectivas simulações dos escoamentos newtonianos de cada caso. Na [Tabela 10](#) são apresentados os resultados obtidos para as taxas de amplificação α_i das perturbações por meio de Simulação Numérica Direta.

Tabela 10 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para os casos de variação do parâmetro α_G .

		α_i				
Caso	Newtoniano 3D	Oldroyd-B	Giesekus			
		$\alpha_G = 0.00$	$\alpha_G = 0.10$	$\alpha_G = 0.20$	$\alpha_G = 0.30$	$\alpha_G = 0.40$
A	0,0389	0,036793	0,043745	0,044148	0,443591	0,044510
B	-0,000631	-0,000707	0,000684	0,000690	0,000698	0,000707
C	-0,007402	-0,007992	-0,008929	-0,008922	-0,008898	-0,008813

De acordo com a [Tabela 10](#) e a [Figura 23](#), os escoamentos apresentaram comportamentos semelhantes com a variação do parâmetro α_G . O caso A, cujo escoamento para $\alpha_G = 0,0$ corresponde a um caso estável, teve sua estabilidade aumentada com o aumento de α_G , ou seja, o aumento do parâmetro α_G fez com que o escoamento se tornasse cada vez mais estável ([Figura 23a](#)).

No caso B, que corresponde a um caso neutro quando $\alpha_G = 0,0$, o aumento do parâmetro α_G teve uma influência quase desprezível, fazendo com que o escoamento aumentasse ligeiramente a sua estabilidade, porém não a ponto de mudar o seu comportamento neutro ([Figura 23b](#)).

Figura 23 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de α_G . (a) Caso A, (b) Caso B, (c) Caso C.

Fonte: Elaborada pelo autor.

E, no caso C, que é instável para $\alpha_G = 0,0$, a variação do parâmetro fez com que o escoamento se tornasse cada vez mais estável.

Dessa forma, é possível concluir que o parâmetro α_G não possui grande influência na estabilidade do escoamento, sendo que a sua variação tende a tornar o escoamento mais estável.

Uma forma de verificar o comportamento das perturbações no escoamento é olhar para as isosuperfícies que compõem esse escoamento. A Figura 24 e Figura 25, apresentam as isosuperfícies das componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade ω e do tensor das tensões $\mathbf{T}$, respectivamente, para as simulações do caso A.

A Figura 26 e Figura 27, apresentam as isosuperfícies das componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade ω e do tensor das tensões $\mathbf{T}$, respectivamente, para as simulações do caso B. E, a Figura 28 e Figura 29, apresentam as isosuperfícies das componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade ω e do tensor das tensões $\mathbf{T}$, respectivamente, para as simulações do caso C.

Figura 24 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso A. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso A. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso B. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso B. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Isosuperfícies das componentes da velocidade $\mathbf{u}$ e vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ do caso C. (a) u , (b) v , (c) w , (d) ω_x , (e) ω_y , (f) ω_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Isosuperfícies das componentes do tensor $\mathbf{T}$ do caso C. (a) T^{xx} , (b) T^{xy} , (c) T^{xz} , (d) T^{yy} , (e) T^{yz} , (f) T^{zz} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por meio das figuras de isosuperfícies é possível entender melhor o que acontece com as

perturbações no interior dos escoamentos. Como pode ser visto nas figuras relativas ao caso A (Figura 24 e Figura 25), que corresponde a um caso estável, após a introdução das perturbações, estas tendem a diminuir a sua amplitude ao longo do domínio. No caso B (Figura 26 e Figura 27), que se trata de um escoamento neutro, após a região de inserção das perturbações, estas tendem a se manter com a mesma amplitude ao longo de todo o domínio e, no caso C, que corresponde a um caso instável, as perturbações tendem a aumentar a amplitude à medida que se propagam na direção x .

6.3 Influência do Número de Weissenberg

Para a análise da influência do número de Weissenberg foram considerados, novamente, 3 casos (um estável, um neutro e outro do tipo instável), submetidos a 4 valores distintos de Wi ($Wi = 1, 10, 25, 50$ e 100). Nas simulações para esta análise foram adotados os seguintes parâmetros:

- número de pontos na direção $x - imax = 729$;
- número de pontos na direção $y - jmax = 377$;
- número de pontos na direção $z - kphys = 4$;
- número de modos de Fourier $- kfour = 2$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção $x - dx = 2\pi/(32\alpha_r)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção $y - dy = 2/(jmax - 1)$;
- distância entre dois pontos consecutivos na direção $z - dz = \lambda_z/kphys$;
- tempo total de simulação $- tt = 35 \times 384$;
- passo no tempo $- dt = 2\pi/(128\omega_t)$;
- início do domínio $x_0 = 1, 0$;
- posição da introdução de perturbações entre $x_1 = x_0 + 39dx$ e $x_2 = x_0 + 71dx$;
- posição da região de relaminarização próximo à saída $x_3 = x_{max} - 100dx$ e $x_4 = x_{max} - 40dx$;
- parâmetro que controla a amplitude das perturbações $- A = 1 \times 10^{-4}$.

Além disso, foram utilizados os seguintes dados da Tabela 11:

Tabela 11 – Dados escolhidos para análise da influência de Wi .

Caso	Reynolds	α_G	β_{nn}	β_z	ω_t	α_r
A	10200	0,3	0,5	1,0	0,195	0,80513
B	9100	0,4	0,9	0,6	0,235	0,92317
C	10200	0,4	0,9	0,6	0,195	0,80513

A Figura 30 apresenta a velocidade máxima da perturbação da velocidade u para os casos simulados e a Tabela 12 contém as taxas de amplificação das perturbações de cada caso.

Figura 30 – Comportamento do máximo valor da perturbação da velocidade u na direção x para diferentes valores de Wi . (a) Caso A, (b) Caso B e (c) Caso C.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Taxas de amplificação das perturbações obtidas para o caso de variação de Wi .

Caso	$Wi = 1$	$Wi = 10$	$Wi = 25$	$Wi = 50$	$Wi = 100$
A	0,019326	0,020283	0,051742	0,05541	0,057525
B	0,000233	0,000215	0,000314	0,000342	0,000353
C	-0,007625	-0,00843	-0,008482	-0,008492	-0,008494

De acordo com a [Figura 30](#), por meio da velocidade máxima da perturbação da velocidade u , e a [Tabela 12](#), por meio das taxas de amplificação das perturbações, pode-se notar que o número de Weissenberg tem grande influência na estabilidade do escoamento do caso A, caso estável, como pode ser visto para os casos $Wi = 1$, 10 e 25, porém a partir de um determinado Wi crítico, este parâmetro passa a não atuar de maneira tão significativa (como pode ser observado para os casos de $Wi > 25$). Já para os casos B e C (casos neutro e instável, respectivamente), o número de Weissenberg mostrou não causar grande influência na estabilidade dos escoamentos, apresentando pouca variação nas taxas de amplificação das perturbações.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram apresentadas as equações que modelam escoamentos tridimensionais e bidimensionais (para o cálculo do escoamento base), incompressíveis e isotérmicos, entre placas paralelas, para um fluido não-Newtoniano do tipo viscoelástico, governado pelo modelo constitutivo Giesekus. As equações foram apresentadas em suas formas dimensionais e adimensionais, com a formulação vorticidade-velocidade para resolução por meio da técnica de Simulação Numérica Direta, utilizada para investigar a estabilidade de escoamentos sob ação de perturbações não estacionárias.

Para as simulações dos escoamentos base, foi utilizado o método log-conformation que foi apresentado em detalhes e tem como objetivo controlar possíveis instabilidades numéricas causadas pelo uso de altos valores do número de Weissenberg (HWNP, do inglês *High Weissenberg Number Problem*). A escolha pelo cálculo do escoamento base de forma numérica foi dada devido à restrições encontradas no uso da solução analítica. Após a descrição do modelo adotado, foram apresentados os métodos numéricos utilizados, com detalhamento das regiões que compõem o domínio computacional, como região de entrada de fluido, inserção de perturbações e regiões de amortecimento e relaminarização. Mostrou-se também os principais cálculos realizados no método numérico e uma descrição do método multigrid utilizado, que foi de suma importância no tempo das simulações e obtenção dos resultados.

O processo de simulação depende de um escoamento base, cujo código numérico foi verificado utilizando as soluções analíticas dos modelos Oldroyd-B e Giesekus, este último para fluidos puramente poliméricos. Os resultados mostraram boa concordância com aqueles obtidos por meio das soluções analíticas, o que tornou viável sua utilização. A verificação do código para análise de estabilidade foi feita a partir da comparação de resultados obtidos com a Simulação Numérica Direta e a Teoria de Estabilidade Linear. Foram utilizados os modelos Newtonianos bidimensional e tridimensional, além do modelo Oldroyd-B bidimensional, para a verificação do código numérico para análise de estabilidade com diferentes tipos de escoamentos.

A comparação entre os resultados DNS e LST mostrou uma concordância bastante satisfatória entre eles, o que permitiu concluir que o código está apto para estudos em análise de estabilidade.

Para um melhor entendimento do comportamento das perturbações no escoamento tridimensional, uma análise da influência do número de onda transversal β_z foi efetuada. Os resultados mostraram que quanto menor o número de onda transversal, mais próximos são os escoamentos bi e tridimensionais, como era esperado, e o aumento no número de onda transversal faz com que o escoamento se torne mais estável. Além do número de onda transversal, verificou-se a influência dos parâmetros α_G do modelo Giesekus e o número de Weissenberg na estabilidade dos escoamentos.

Para a verificação do parâmetro α_G , foram considerados 3 tipos de escoamentos (um estável, um neutro e outro instável), para diversos valores do parâmetro em questão ($\alpha_G = 0.0, 0.10, 0.20, 0.30$ e 0.40). Após a análise da velocidade máxima da perturbação da velocidade u e das taxas de amplificação das perturbações, foi possível concluir que a variação do parâmetro α_G não causa efeito significativo na estabilidade dos escoamentos, tornando-os ligeiramente mais estáveis. Com relação ao número de Weissenberg, foram adotados 3 escoamentos sob influência de diversos valores de Wi ($Wi = 1, 10, 25, 50$ e 100). Os resultados mostraram que a variação do número de Weissenberg de 1 a 25, no caso estável, causou uma grande modificação na estabilidade do escoamento, tornando-o mais estável, porém, para $Wi > 25$, esta influência passou a não ser tão significativa. Nos demais casos (neutro e instável), a variação de Wi mostrou não causar grande influência na estabilidade dos escoamentos.

Algumas sugestões para a continuidade desta pesquisa são:

- estudo da influência do parâmetro β_{nn} do modelo Giesekus na estabilidade dos escoamentos;
- a implementação e análise de estabilidade com outros modelos constitutivos;
- estudo da estabilidade de escoamentos transicionais tridimensionais de fluidos viscoelásticos por meio da Teoria de Estabilidade Linear;
- análise de estabilidade secundária.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 110, n. 1, p. 45 – 75, 2003. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037702570200191X>>. Citado na página 28.

ARAUJO, M. T.; SILVA, A. A.; SOUZA, L. F.; PAULO, G. S.; FURLAN, L. J.; BRANDI, A. C. An algorithm for solving an implicit solution for fully development flow in a channel of a giesekus fluid. In: **17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**. [S.l.]: ABCM, 2018. Citado na página 73.

ATALIK, K.; KEUNINGS, R. Non-linear temporal stability analysis of viscoelastic plane channel flows using a fully-spectral method. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 102, n. 2, p. 299 – 319, 2002. ISSN 0377-0257. A Collection of Papers Dedicated to Professor ANDREAS ACRIVOS on the Occasion of his Retirement from the Benjamin Levich Institute for Physiochemical Hydrodynamics and the City College of the CUNY. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025701001847>>. Citado nas páginas 36 e 37.

AZAIEZ, J.; HOMSY, G. M. Linear stability of free shear flow of viscoelastic liquids. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 268, p. 37–69, 1994. Citado na página 36.

BERIS, A.; ARMSTRONG, R.; BROWN, R. Spectral/finite-element calculations of the flow of a maxwell fluid between eccentric rotating cylinders. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 22, n. 2, p. 129 – 167, 1987. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025787800332>>. Citado na página 28.

BHATNAGAR, R.; SHARMA, O. Stability of plane poiseuille flow of viscoelastic fluids with uniform cross flow. **Rheologica Acta**, Steinkopff-Verlag, v. 14, n. 7, p. 619 – 625, 1975. ISSN 354511. Citado na página 35.

BHATNAGAR, R. K.; GIESEKUS, H. On the stability of viscoelastic fluid flow - ii. plane channel flow. **Rheologica Acta**, v. 9, p. 53–60, 1970. ISSN 1435-1528. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01984594>>. Citado na página 34.

BHATNAGAR, R. K.; SHARMA, O. P. Stability of plane couette flow of a viscoelastic fluid with uniform cross-flow. **Rheologica Acta**, v. 13, p. 495–500, 1974. ISSN 1435-1528. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01521746>>. Citado na página 35.

BIRD, R.; ARMSTRONG, R.; HASSAGER, O. **Dynamics of polymeric liquids, Volume 1: Fluid mechanics, 2nd Edition**. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 1987. Citado na página 40.

BIRD, R.; DEAGUIAR, J. An encapsulated dumbbell model for concentrated polymer solutions and melts i. theoretical development and constitutive equation. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 13, n. 2, p. 149 – 160, 1983. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025783800135>>. Citado na página 28.

- BIRD, R.; DOTSON, P.; JOHNSON, N. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 7, n. 2, p. 213 – 235, 1980. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025780850075>>. Citado na página 28.
- BLONCE, L. Linear stability of giesekus fluid in poiseuille flow. **Mechanics Research Communications**, v. 24, n. 2, p. 223 – 228, 1997. ISSN 0093-6413. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641397000165>>. Citado na página 36.
- BOGER, D. A highly elastic constant-viscosity fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 3, n. 1, p. 87 – 91, 1977. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025777800141>>. Citado na página 35.
- BOGER, D. V.; NGUYEN, H. A model viscoelastic fluid. **Polymer Engineering & Science**, v. 18, n. 13, p. 1037–1043, 1978. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pen.760181311>>. Citado na página 35.
- BRANDI, A.; MENDONCA, M.; SOUZA, L. Dns and lst stability analysis of oldroyd-b fluid in a flow between two parallel plates. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 267, p. 14 – 27, 2019. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025718301344>>. Citado nas páginas 38 e 42.
- BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, v. 31, n. 138, p. 333–390, 1977. ISSN 00255718, 10886842. Citado na página 63.
- BRASSEUR, E.; FYRILLAS, M. M.; GEORGIOU, G. C.; CROCHET, M. J. The time-dependent extrudate-swell problem of an oldroyd-b fluid with slip along the wall. **Journal of Rheology**, v. 42, n. 3, p. 549–566, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1122/1.550959>>. Citado nas páginas 28, 40 e 73.
- BRIGGS, W.; HENSON, V.; MCCORMICK, S. **A Multigrid Tutorial**. 2nd. ed. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. ISBN 978-0-89871-462-3. Citado na página 63.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; JR., T. A. Z. **Spectral Methods in Fluid Dynamics**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988. (Springer Series in Computational Physics). ISBN 978-3-540-52205-8, 978-3-642-84108-8. Citado na página 55.
- CHRISTAINSEN, R. L.; BIRD, R. Dilute solution rheology: experimental results and finitely extensible nonlinear elastic dumbbell theory. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 3, n. 2, p. 161 – 177, 1977. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025777800475>>. Citado na página 28.
- CROCHET, M.; DAVIES, A.; WALTERS, K. **Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow**. [S.l.]: Elsevier, 1984. v. 1. (Rheology Series, v. 1). ISSN 0169-3107. Citado na página 40.
- FASEL, H. F.; RIST, U.; KONZELMANN, U. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary-layer transition. **AIAA Journal**, v. 28, n. 1, p. 29–37, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.10349>>. Citado na página 57.
- FATTAL, R.; KUPFERMAN, R. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 123, n. 2, p. 281 – 285, 2004. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025704002630>>. Citado nas páginas 51 e 53.

_____. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high weissenberg number using the log-conformation representation. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 126, n. 1, p. 23 – 37, 2005. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025705000042>>. Citado na página 51.

FEDORENKO, R. The speed of convergence of one iterative process. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 4, n. 3, p. 227 – 235, 1964. ISSN 0041-5553. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555364902538>>. Citado na página 63.

FERZIGER, J.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 3. Citado nas páginas 40, 59 e 63.

FURLAN, L. J. S. **Análise de Estabilidade de Escoamentos do Fluido Viscoelástico Giesekus**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2018. Citado na página 38.

GERVAZONI, E. S. **Análise de Estabilidade Linear de Escoamentos Bidimensionais do Fluido Oldroyd-B**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2016. Citado nas páginas 37 e 38.

GIESEKUS, H. Elasto-viskose flüssigkeiten, für die in stationären schichtströmungen sämtliche normalspannungskomponenten verschieden groß sind. **Rheologica Acta**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 1, p. 50–62, mar 1962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fb01972555>>. Citado na página 28.

_____. On the stability of flow of viscoelastic fluids i: plane and circular couette flow. **Rheol. Acta**, v. 5, p. 239, 1966. Disponível em: <<https://ci.nii.ac.jp/naid/10010464465/en/>>. Citado na página 39.

GIESEKUS, H.; BHATNAGAR, R. K. On the stability of viscoelastic fluid flow - iv. overstability in plane couette flow. **Rheologica Acta**, v. 10, p. 266–274, 1971. ISSN 1435-1528. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02040452>>. Citado na página 34.

GORODTSOV, V. A.; LEONOV, A. I. On a linear instability of a plane parallel couette flow of viscoelastic fluid. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 31, n. 2, p. 310 – 319, 1967. ISSN 0021-8928. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892867901566>>. Citado nas páginas 33 e 35.

GRILLET, A. M.; BOGAERDS, A. C.; PETERS, G. W.; BAAIJENS, F. P. Stability analysis of constitutive equations for polymer melts in viscometric flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 103, n. 2, p. 221 – 250, 2002. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025702000058>>. Citado na página 36.

GROPP, W.; LUSK, E.; THAKUR, R. **Using MPI-2: Advanced Features of the Message-Passing Interface**. The MIT Press, 1999. ISBN 9780262288040. Disponível em: <<https://doi.org/10.7551/mitpress/7055.001.0001>>. Citado na página 71.

GUEVREMONT, G.; HABASHI, W. G.; HAFEZ, M. M. Finite element solution of the navier–stokes equations by a velocity–vorticity method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 10, n. 4, p. 461–475, 1990. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.1650100408>>. Citado na página 42.

GUPTA, M. M.; KOUATCHOU, J.; ZHANG, J. Comparison of second- and fourth-order discretizations for multigrid poisson solvers. **Journal of Computational Physics**, v. 132, n. 2, p. 226 – 232, 1997. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196954662>>. Citado na página 63.

HAINS, F. D. Stability of plane couette-poiseuille flow. **The Physics of Fluids**, v. 10, n. 9, p. 2079–2080, 1967. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1762411>>. Citado nas páginas 33 e 34.

_____. Stability of plane couette-poiseuille flow with uniform crossflow. **The Physics of Fluids**, v. 14, n. 8, p. 1620–1623, 1971. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1693655>>. Citado nas páginas 34 e 35.

HAINS, F. D.; PRICE, J. F. Stability of plane poiseuille flow between flexible walls. **Proceedings of the Fourth United States Congress of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, New York, v. 2, p. 1263 – 1268, 1962. Citado na página 34.

HIRSCH, C. **Numerical Computation of Internal and External Flow**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd., 1988. v. 1. Citado na página 63.

HO, T. C.; DENN, M. M. Stability of plane poiseuille flow of a highly elastic liquid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 3, n. 2, p. 179 – 195, 1977. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025777800487>>. Citado na página 35.

HOOKE, R. Book, Microform. **Lectures de potentia restitutiva, or, Of spring, explaining the power of springing bodies to which are added some collections**. [S.l.]: Printed for J. Martyn London, 1678. 56 p. Citado na página 27.

HUGHES, W. F.; BRIGHTON, J. A. **Schaum's Outline of Theory and Problems of Fluid Dynamics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1967. (Schaum's outline series). Citado na página 40.

JR., H. R. W. Kinetic theory and rheology of dilute suspensions of finitely extendible dumbbells. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 11, n. 3, p. 379–387, 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/i160043a017>>. Citado na página 28.

JUNIPER, M.; HANIFI, A.; THEOFILIS, V. Modal stability theory lecture notes from the flow-nordita summer school on advanced instability methods for complex flows, stockholm, sweden, 20131. **Applied Mechanics Reviews**, v. 66, 02 2014. Citado na página 45.

JÚNIOR, I. L. P. **Decomposições matriciais para escoamentos viscoelásticos incompressíveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente - SP, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/108643>>. Citado na página 53.

KAYE, A. Non-newtonian flow in incompressible flows. **College of Aeronautics**, 1962. Citado na página 28.

KEUNINGS, R. On the high weissenberg number problem. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 20, p. 209 – 226, 1986. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025786800222>>. Citado na página 51.

KLOKER, M. A robust high-resolution split-type compact fd scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. **Applied Scientific Research**, v. 59, p. 353–377, 11 1997. Citado nas páginas 42 e 59.

KLOKER, M.; KONZELMANN, U.; FASEL, H. Outflow boundary conditions for spatial navier-stokes simulations of transition boundary layers. **AIAA Journal**, v. 31, n. 4, p. 620–628, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.11595>>. Citado nas páginas 66 e 67.

KUNDU, I. M. C. P. K. **Fluid mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2001. Citado na página 30.

KUPFERMAN, R. On the linear stability of plane couette flow for an oldroyd-b fluid and its numerical approximation. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 127, n. 2, p. 169 – 190, 2005. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025705000674>>. Citado na página 36.

LABIDI, W.; PHUOC, L. T. Numerical resolution of the three-dimensional navier-stokes equations in velocity-vorticity formulation. In: DWOYER, D. L.; HUSSAINI, M. Y.; VOIGT, R. G. (Ed.). **11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989. p. 354–359. ISBN 978-3-540-46141-8. Citado na página 42.

LARSON, R.; SHAQFEH, E.; MULLER, S. A purely elastic instability in taylor-couette flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 218, p. 573 – 600, 09 1990. Citado nas páginas 28 e 36.

LARSON, R. G. Instabilities in viscoelastic flows. **Rheologica Acta**, v. 31, p. 213 – 263, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00366504>>. Citado na página 28.

LEE, K.-C.; FINLAYSON, B. A. Stability of plane poiseuille and couette flow of a maxwell fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 21, n. 1, p. 65 – 78, 1986. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025786800635>>. Citado na página 35.

LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. ISSN 10902716. Citado nas páginas 59 e 69.

LEONOV, A. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. **Rheologica Acta**, v. 15, p. 85–98, 02 1976. Citado na página 28.

LIM, F.; SCHOWALTER, W. Pseudo-spectral analysis of the stability of pressure-driven flow of a giesekus fluid between parallel planes. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 26, n. 1, p. 135 – 142, 1987. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025787850516>>. Citado na página 35.

LUO, X.; TANNER, R. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part ii: Integral constitutive models. **Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics**, v. 22, p. 61–89, 1986. Citado na página 28.

LUO, X.-L.; TANNER, R. I. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 25, n. 1, p. 9–22, 1988. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620250104>>. Citado na página 28.

- MEITZ, H. L.; FASEL, H. **Numerical Investigation of Suction in a Flat-Plate Boundary Layer**. 351 p. Tese (Doutorado) — The University of Arizona, 1996. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10150/282209>>. Citado nas páginas 66, 67 e 68.
- MOMPEAN, G.; DEVILLE, M. Unsteady finite volume simulation of oldroyd-b fluid through a three-dimensional planar contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 72, n. 2, p. 253 – 279, 1997. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025797000335>>. Citado na página 28.
- MOYERS-GONZALEZ, M.; BURGHELEA, T.; MAK, J. Linear stability analysis for plane-poiseuille flow of an elastoviscoplastic fluid with internal microstructure for large reynolds numbers. **Fuel and Energy Abstracts**, v. 166, p. 515–531, 05 2011. Citado na página 37.
- MULLER, S.; LARSON, R.; SHAQFEH, E. A purely elastic transition in taylor-couette flow. **Rheologica Acta**, v. 28, p. 499–503, 11 1989. Citado na página 35.
- OLIVEIRA, P. An exact solution for tube and slit flow of a fene-p fluid. **Acta Mechanica**, v. 158, p. 157–167, 01 2002. Citado na página 28.
- PACHECO, P. S. **Parallel Programming with MPI**. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996. ISBN 1558603395. Citado na página 71.
- PHILLIPS, T.; WILLIAMS, A. Comparison of creeping and inertial flow of an oldroyd b fluid through planar and axisymmetric contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 108, n. 1, p. 25 – 47, 2002. ISSN 0377-0257. Numerical Methods Workshop S.I. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025702001234>>. Citado na página 28.
- POTTER, M. Stability of plane couette–poiseuille flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 24, p. 609, 03 1966. Citado na página 33.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in FORTRAN 77 - The art of scientific computing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. Citado na página 62.
- PRILUTSKI, G.; GUPTA, R.; SRIDHAR, T.; RYAN, M. Model viscoelastic liquids. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 12, n. 2, p. 233 – 241, 1983. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025783800408>>. Citado na página 35.
- PUTZ, A.; BURGHELEA, T. The solid-fluid transition in a yield stress shear thinning physical gel. **Rheologica Acta**, v. 48, p. 673–689, 07 2009. Citado na página 37.
- RENARDY, M.; RENARDY, Y. Linear stability of plane couette flow of an upper convected maxwell fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 22, n. 1, p. 23 – 33, 1986. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377025786800027>>. Citado na página 35.
- REYNOLDS, O. Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 174, p. 935–982, 1883. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1883.0029>>. Citado na página 29.

REYNOLDS, W. C.; POTTER, M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 27, n. 3, p. 465–492, 1967. Citado na página 33.

SCHLEINIGER, G.; WEINACHT, R. J. A remark on the giesekus viscoelastic fluid. **Journal of Rheology**, v. 35, n. 6, p. 1157–1170, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1122/1.550169>>. Citado nas páginas 40, 113, 114 e 116.

SCHLICHTING, H. Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1933, p. 181–208, 1933. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/59420>>. Citado na página 29.

_____. **Boundary Layer Theory**. [S.l.]: McGraw-Hill, IncH., 1979. Citado na página 46.

SHAQFEH, E.; MULLER, S.; LARSON, R. The effects of gap width and dilute solution properties on the viscoelastic taylor-couette instability. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 235, p. 285 – 317, 02 1992. Citado na página 28.

SHEN, J. Hopf bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow. **Journal of Computational Physics**, v. 95, n. 1, p. 228 – 245, 1991. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919190261I>>. Citado na página 36.

SHEPPARD, D. M. Hydrodynamic stability of the flow between parallel porous walls. **The Physics of Fluids**, v. 15, n. 2, p. 241–244, 1972. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1693900>>. Citado na página 34.

SOUZA, L. F. **Instabilidade Centrífuga e Transição para Turbulência em Escoamentos Laminares Sobre Superfícies Côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003. Citado nas páginas 42, 55, 59, 66, 67 e 68.

SOUZA, L. F.; MENDONCA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 565 – 582, 06 2005. Citado nas páginas 42 e 59.

SOUZA, L. F.; OISHI, C. M.; CUMINATO, J. A.; NETO, A. S. Comparison of poisson solvers in a transient 2d fluid flow problem with dirichlet boundary conditions. In: **Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**. [S.l.]: ABCM, 2006. Citado na página 62.

SOUZA, L. F. d.; BRANDI, A. C.; MENDONCA, M. T. d. Estabilidade de escoamentos de fluidos não newtonianos. In: _____. **Escola de Primavera em Transição e Turbulência**. 1. ed. [S.l.]: ABCM/DCTA, 2016. v. 10, p. 101–160. Citado na página 42.

SPEZIALE, C. G. On the advantages of the vorticity-velocity formulation of the equations of fluid dynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 73, n. 2, p. 476 – 480, 1987. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187901495>>. Citado na página 42.

SPITALERI, R. M. Full-fas multigrid grid generation algorithms. **Applied Numerical Mathematics**, v. 32, n. 4, p. 483 – 494, 2000. ISSN 0168-9274. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927499000641>>. Citado na página 63.

SQUIRE, H. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 142, n. 847, p. 621–628, 1933. Citado na página 88.

STEVENSON, J. F.; BIRD, R. B. Elongational viscosity of nonlinear elastic dumbbell suspensions. **Transactions of the Society of Rheology**, v. 15, n. 1, p. 135–145, 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.1122/1.549203>>. Citado na página 28.

STUBEN, K.; TROTTEBERG, U. **Nonlinear Multigrid Methods, The Full Approximation Scheme**. Köln-Porz: Springer-Verlag, 1981. 58 - 71 p. Citado na página 63.

TAGHAVI, S.; KHABAZI, N.; SADEGHY, K. Hydromagnetic linear instability analysis of giesekus fluids in plane poiseuille flow. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 14, n. 5, p. 2046 – 2055, 2009. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100757040800124X>>. Citado na página 37.

THIEN, N. P.; TANNER, R. I. A new constitutive equation derived from network theory. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 2, n. 4, p. 353 – 365, 1977. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037702577800219>>. Citado na página 28.

TOLLMIE, W. Über die entstehung der turbulenz. 1. mitteilung. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1929, p. 21–44, 1928. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/59276>>. Citado na página 29.

TOMÉ, M.; ARAUJO, M.; EVANS, J.; MCKEE, S. Numerical solution of the giesekus model for incompressible free surface flows without solvent viscosity. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 263, p. 104 – 119, 2019. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025718301939>>. Citado na página 73.

TOMÉ, M.; CASTELO, A.; AFONSO, A.; ALVES, M.; PINHO, F. Application of the log-conformation tensor to three-dimensional time-dependent free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 175-176, p. 44–54, 2012. ISSN 0377-0257. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025712000511>>. Citado na página 51.

TOUMI, A.; LOC, T. P. Numerical study of three dimensional viscous incompressible flow by vorticity and velocity formulation. In: TAYLOR; HABASHI; HAFEZ (Ed.). **15th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Furbulent Flow**. Swansea, Wales: Pineridge Press, 1987. p. 595–606. Citado na página 42.

TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHÜLLER, A. **Multigrid**. San Diego: Academic Press, 2001. ISBN 012701070X. Citado na página 63.

VAITHIANATHAN, T.; COLLINS, L. R. Numerical approach to simulating turbulent flow of a viscoelastic polymer solution. **Journal of Computational Physics**, v. 187, n. 1, p. 1 – 21, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103000287>>. Citado na página 51.

WESSELING, P. **An Introduction to Multigrid Methods**. New York: John Wiley & Sons, Ltd., 1992. Citado na página 63.

WHITE, F.; WHITE, S. F. M. **Viscous Fluid Flow**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). ISBN 9780070697126. Citado na página 28.

ZHANG, J. Acceleration of five-point red-black gauss-seidel in multigrid for poisson equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 80, n. 1, p. 73 – 93, 1996. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0096300395002766>>. Citado na página 63.

_____. Residual scaling techniques in multigrid, i: Equivalence proof. **Applied Mathematics and Computation**, v. 86, n. 2, p. 283 – 303, 1997. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300396001944>>. Citado na página 63.

SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO GIESEKUS

Nesta seção, serão apresentados os passos para se resolver analiticamente o sistema não-linear de equações que representam um escoamento incompressível e isotérmico, no estado estacionário, de um fluido Giesekus com a presença de um solvente Newtoniano em um canal, como descrito em (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991), cujos passos foram apresentados usando uma adimensionalização diferente.

Schleiniger e Weinacht (1991) resolveu e discutiu matematicamente as soluções para o escoamento estacionário de Poiseuille em coordenadas cartesianas bidimensionais de um fluido Giesekus, com e sem a presença de solvente Newtoniano. Os autores também discutiram sobre fluidos Giesekus para o caso axi-simétrico sem a presença de solvente Newtoniano. Neste trabalho, a solução não é obtida explicitamente, uma vez que a derivada da componente de velocidade é dada por um equação implícita.

Nesta seção, será fornecida uma explicação detalhada para se chegar à solução analítica e um algoritmo numérico para a solução da equação implícita que aqui é denominada por solução “semi-analítica”.

Considere o sistema de equações representando um escoamento incompressível e isotérmico de um fluido Giesekus, com a presença de um solvente Newtoniano, em coordenadas cartesianas bidimensionais (x, y) e na forma adimensional, no estado estacionário $\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0\right)$, sem variação de velocidade e tensores na direção longitudinal $\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0, \mathbf{u} = \mathbf{u}(y), \mathbf{T} = \mathbf{T}(y)\right)$, componente de velocidade normal ao escoamento nula $(\mathbf{u} = (u(y), 0))$ e um gradiente de pressão longitudinal constante $\left(\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = p_x < 0\right)$. De acordo com essas afirmações e considerando um canal horizontal, onde o escoamento do fluido se dá ao longo da direção x , tem-se o seguinte sistema de equações:

$$p_x = \frac{\beta}{Re} u'' + T^{xy'} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = T^{yy'} \quad (\text{A.2})$$

$$T^{xx} - 2WiT^{xy}u' + \frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}(T^{xx2} + T^{xy2}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$T^{xy} - WiT^{yy}u' + \frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}T^{xy}(T^{xx} + T^{yy}) = \frac{(1-\beta)}{Re}u' \quad (\text{A.4})$$

$$T^{yy} + \frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}(T^{xy2} + T^{yy2}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dy}$ e $(\cdot)'' = \frac{d^2(\cdot)}{dy^2}$ por simplicidade de notação. Além disso, será considerado $-1 \leq y \leq 1$ e, assim, $T^{xx}(0) = T^{xy}(0) = T^{yy}(0) = u'(0) = 0$ no centro do canal.

Ressaltamos que o sistema de equações (A.1)-(A.5) é análogo ao sistema (2.1)-(2.5) resolvido por [Schleiniger e Weinacht \(1991\)](#), com exceção dos parâmetros adimensionais.

Reescrevendo a equação (A.5) em uma forma equivalente, obtém-se

$$\left(T^{yy} + \frac{(1-\beta)}{2\alpha Re Wi}\right)^2 + T^{xy2} = \frac{(1-\beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}, \quad (\text{A.6})$$

que fornece duas expressões para T^{yy} como função de T^{xy} ,

$$T^{yy} = \frac{-(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}}}{2\alpha Re Wi}. \quad (\text{A.7})$$

Como o tensor é nulo no centro do canal, a melhor escolha na equação (A.7) corresponde àquela com sinal positivo:

$$T^{yy} = \frac{-(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}}}{2\alpha Re Wi}. \quad (\text{A.8})$$

Somando as equações (A.3) e (A.5), tem-se

$$(T^{xx} + T^{yy}) + \frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}[(T^{xx} + T^{yy})^2 - 2T^{xx}T^{yy} + 2T^{xy2}] - 2WiT^{xy}u' = 0, \quad (\text{A.9})$$

ou, de maneira equivalente,

$$\frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}(T^{xx} + T^{yy})^2 + (T^{xx} + T^{yy}) - \frac{2\alpha Re Wi}{(1-\beta)}T^{xx}T^{yy} + \frac{2\alpha Re Wi}{(1-\beta)}T^{xy2} = 2WiT^{xy}u'. \quad (\text{A.10})$$

Agora, expressando $(T^{xx} + T^{yy})$ da equação (A.4), obtém-se,

$$(T^{xx} + T^{yy}) = \frac{\frac{(1-\beta)}{Re}u' + WiT^{yy}u' - T^{xy}}{\frac{\alpha Re Wi}{(1-\beta)}T^{xy}}. \quad (\text{A.11})$$

Além disso, a equação (A.11) implica

$$T^{xx} = \frac{(1-\beta)[(1-\beta) + ReWiT^{yy}]u'}{\alpha Re^2 Wi T^{xy}} - \frac{[(1-\beta) + \alpha ReWiT^{yy}]}{\alpha ReWi}. \quad (A.12)$$

As equações (A.11) e (A.12) estão bem definidas para $y \neq 0$. Além disso, consideramos conhecidos os valores de T^{xx} , T^{yy} , T^{xy} e u' para $y = 0$.

Substituindo as equações (A.11) e Eq. (A.12) na equação (A.10) e, depois de algumas manipulações algébricas, usando a equação (A.5) para simplificar os cálculos, tem-se

$$u' = \frac{\left[\frac{(1-\beta)}{Re} + bWiT^{yy}\right]T^{xy}}{\left[\frac{(1-\beta)}{Re} + WiT^{yy}\right]^2}, \quad \text{onde } b = 2\alpha - 1. \quad (A.13)$$

A equação (A.13) mostra que u' depende de T^{xy} e T^{yy} . Este último, por sua vez, de acordo com a equação (A.8), também depende do componente T^{xy} . Então, substituindo a equação (A.8) na equação (A.13), e depois de algumas manipulações algébricas, tem-se uma solução para u' ,

$$u' = \frac{2\alpha Re T^{xy} \left[(1-\beta) + b\sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}} \right]}{\left[b(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2}} \right]^2}. \quad (A.14)$$

Vale ressaltar alguns comentários sobre o sinal dos radicais presentes na equação (A.14). A solução do modelo Giesekeus precisa satisfazer todas as suas equações, em particular, a equação (A.5), que foi reescrita como Eq. (A.6). A equação (A.6) significa que

$$\left(T^{yy} + \frac{(1-\beta)}{2\alpha ReWi} \right)^2 \leq \frac{(1-\beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}, \quad (A.15)$$

e, também,

$$T^{xy2} \leq \frac{(1-\beta)^2}{4\alpha^2 Re^2 Wi^2}. \quad (A.16)$$

A restrição dada pela equação (A.16) implica que $(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 T^{xy2} \geq 0$, isto é, o radical present na equação (A.14) é sempre não-negativo desde que seja considerada a equação (A.5). Portanto, esta restrição será respeitada neste trabalho.

Integrando a equação (A.1) com relação a y e usando o fato de $T^{xy} = u' = 0$ no centro do domínio $y = 0$, tem-se

$$T^{xy} = \frac{-\beta}{Re} u' + p_{xy}, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad p_x \text{ é uma constante negativa.} \quad (A.17)$$

Substituindo a equação (A.17) na equação (A.14), obtém-se uma expressão implícita para u' ,

$$u' = \frac{2\alpha Re \left(\frac{-\beta}{Re} u' + p_{xy} \right) \left[(1-\beta) + b \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} u' + p_{xy} \right)^2} \right]}{\left[b(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha^2 Re^2 Wi^2 \left(\frac{-\beta}{Re} u' + p_{xy} \right)^2} \right]^2}. \quad (\text{A.18})$$

Para se obter a solução analítica é necessário seguir os seguintes passos:

1. Resolva a equação (A.18) para obter u' para um p_x dado apropriadamente.
2. Resolva a equação (A.17) para obter $T^{xy}(y)$;
3. Resolva a equação (A.8) para obter $T^{yy}(y)$;
4. Resolva a equação (A.12) para obter $T^{xx}(y)$.

Novamente, ressaltamos que as equações (A.18), (A.17), (A.8) e (A.12) são semelhantes às equações (5.5), (5.2), (5.3) e (5.4) de (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991), respectivamente, a menos dos parâmetros adimensionais.

Uma vez que a sequência 2., 3. e 4. é seguida, é possível ver que todas as componentes do tensor podem ser obtidas explicitamente, apenas usando alguns cálculos algébricos. Porém, no passo 1. não é fácil resolver u' analiticamente. Portanto, na próxima seção serão discutidos os pressupostos e as estratégias numéricas adotadas para escolher p_x corretamente, para calcular u' e para calcular o componente da velocidade u .

A.1 Solução Semi-analítica

Nesta seção, será explicado como trabalhar com o passo 1. indicado na seção A.

Uma decisão tomada foi calcular um p_x que forneça uma velocidade média desejada U , como por exemplo $U = 2/3 \text{ m/s}$. Tomando a definição de velocidade média, integrando por partes e usando a condição de não escorregamento na parede $u(1) = 0$, temos

$$U = \int_0^1 u(y) dy = - \int_0^1 y \frac{du(y)}{dy} dy \implies \int_0^1 y u' dy = -U. \quad (\text{A.19})$$

Para ajustar p_x , duas etapas são definidas: I. e II., descritas a seguir.

- I. Descobre-se o intervalo $[a, b]$ onde p_x pertence, aplicando o Teorema do Valor Intermediário:

- I.1 Dá-se uma estimativa inicial $p_x^{(n)}$ na equação (A.18);
- I.2 Dá-se estimativas iniciais para $u'^{(n-1)}$ e $u'^{(n-2)}$ para obter $u'^{(n)}$, aplicando o Método da Secante em I.1;
- I.3 Verifica-se se $u'^{(n)}$ satisfaz a equação (A.19) usando o Método 1/3 de Simpson;
- I.3.1 Se $\int_0^1 y u'^{(n)} dy = -U$, então $p_x^{(n)} = p_x$ e $u' = u'$ é o valor procurado. Assim, o passo 1 está concluído.
- I.3.2 Se $\int_0^1 y u'^{(n)} dy < -U$, então mantém-se o valor de $p_x^{(n)} := a$, incrementa-o para obter um novo $p_x^{(n)}$ e repete-se I.1-I.3. até $\int_0^1 y u'^{(n)} dy > -U$. Assim, mantém-se o valor incrementado mais recente de $p_x^{(n)}$ como b . A existência de a e b é assegurada pelo Teorema do Valor Intermediário.
- II. Como $p_x \in [a, b]$, aplica-se o Método da Bissecção no intervalo $[a, b]$ para obtê-lo. Em cada iteração do Método da Bissecção, repete-se I.1-I.3 até que uma tolerância prescrita para o Método 1/3 de Simpson seja alcançada, para resolver $\int_0^1 y u'^{(n)} dy$. Em seguida, p_x e u' para o passo 1. são obtidos numericamente.
- III. Calcula-se numericamente, novamente, o componente de velocidade $u(y)$ pelo Método de Euler, como um problema de valor inicial, assumindo $u(y_0) = 0$, assim $u(y_j) = u(y_{j-1}) + \frac{du(y_{j-1})}{dy} \Delta y$, $j = 1, \dots, M$, onde $y_j = \frac{j}{M}$, M é um inteiro positivo.