SISTEMAS LINEARES

Uma solução na norma Chebyshev

Edméa Cássia Baptista

Orientador: Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências da Computação e Matemática Computacional.

São Carlos

Dez/93

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de determinar uma solução aproximada de um Sistema Linear Inconsistente, segundo a norma de Chebyshev.

A partir de uma motivação em Engenharia Mecânica, denominada Planicidade de Superfícies, modelamos o problema, o qual é resolvido usando uma especialização do método Simplex. Propomos uma estrutura de dados, onde as colunas da matriz do "Modelo Linearizado" são geradas, ao invés de serem armazenadas, e apresentamos alguns estudos computacionais.

Finalizando, fazemos a revisão do artigo "Strict Chebyshev Approximation for General Systems of Linear Equations" de J. P. Thiran e S. Thiry, 1987.

ABSTRACT

This work studies a problem which consists in to determine a approximate solution of a Inconsistent Linear System according the Chebyshev norm.

From a problem in Mechanic Engineering called Flatness of Surfaces, we model the problem, which is solved using a specialization Simplex method. Then we propose a information structure, where the columns of the matrix of the "Linearized Model" are generated not stored. After this we show some computational studies.

Finishing, we make a revision on the "Strict Chebyshev Approximation for General Systems of Linear Equations" a paper of J.P. Thiran and S. Thiry, 1987.

À DEUS

Que nos acalentou no limiar da madrugada;
nas nossas horas de angústia, cheia de
incertezas e saudades, naqueles momentos em
que tudo parecia nublado, ELE sempre esteve
presente e sabemos que sua força nos ajudou,
fazendo-nos chegar à realização que
ostentamos agora.

A TI que nos deu a aula da vida.

(...)

Aos meus pais
com amor.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales, do ICMSC-USP, que com muita paciência e disponibilidade me orientou na elaboração desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Álvaro José Abackerli, da EESC-USP, pela atenção e colaboração no desenvolvimento deste trabalho, e participação na banca do exame de qualificação e defesa.

Aos professores que fizeram parte da banca do exame de qualificação e ao Prof. Dr. Messias Meneguette Junior, da UNESP-PRES.PRUDENTE, pela participação na banca de defesa.

Aos professores e colegas da UNESP-BAURU, pela colaboração direta e indireta; em especial à Andréa, Denise e Vanilda.

Aos professores e funcionários do ICMSC-USP, pela ajuda na confecção deste trabalho.

À minha mãe, pela "vida", incentivo e apoio nos momentos certos.

À Edna, Eli e Erica, pela força.

À todos os "amigos", que conviveram comigo durante esta fase, pelo companheirismo e apoio.

ÍNDICE

PREFÁCIO	01.
 CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	
1.1 Definição do Problema	03.
1.2 Uma Aplicação na Metrologia	06.
 CAPÍTULO 2 RESOLUÇÃO VIA PROGRAMAÇÃO LINEAR	
2.1 Problema de Programação Linear Equivalente.....	11.
2.2 O Problema Dual.....	12.
 CAPÍTULO 3 ESTUDO DE CASO: PLANICIDADE DE SUPERFÍCIES	
3.1 Estrutura de Dados.....	14.
3.2 Solução Básica Inicial.....	17.
3.2.1 Posto de B.....	20.
3.3 Vetor Multiplicador.....	22.
3.4 Custos Relativos.....	23.
3.4.1 Observação.....	25.
3.5 Algoritmo Simplex Aplicado ao Problema de Planicidade.....	27.
3.6 Experiência Computacional.....	29.
 CAPÍTULO 4 UM MÉTODO ASCENDENTE	
4.1 Preliminares.....	38.

4.1.1	Definição de H-Conjuntos e H-Conjuntos	
	Minimais para Sistemas Lineares.....	38.
4.1.1.1	Propriedades de H-Conjuntos	
	Minimais.....	41.
4.1.2	Caracterização das Soluções Ótimas	
	Usando H-Conjuntos Minimais.....	44.
4.2	Decomposição Canônica da Matriz.....	50.
4.3	Partição do Sistema Relativo a um H-Conjunto	
	Minimal.....	54.
4.4	Troca Entre H-Conjuntos Minimais.....	59.
4.5	Determinação do H-Conjunto Minimal.....	68.
4.6	Algoritmo e Exemplos Numéricos.....	70.
4.6.1	Algoritmo.....	70.
4.6.2	Exemplos Numéricos.....	75.
CONCLUSÕES.....		85.
BIBLIOGRAFIA.....		87.

PREFÁCIO

O objetivo deste trabalho é determinar a solução aproximada de um Sistema Linear Inconsistente, usando a Norma de Chebyshev. Existem vários métodos para solucionar este problema, como o Método de Barrodale e Phillips, o Método de Stiefel, o Método Simplex, entre outros [3].

Neste trabalho fazemos dois estudos, um deles é um estudo de caso, em Engenharia Mecânica, na área de Metrologia, o qual é denominado PLANICIDADE DE SUPERFÍCIES. O outro é um estudo teórico, onde é apresentado um algoritmo para o problema proposto, o qual explora partições do sistema e decomposições da matriz.

Para o caso de PLANICIDADE DE SUPERFÍCIES, optamos por usar uma especialização do método Simplex, devido à sua simplicidade de implementação e apresentamos alguns resultados computacionais.

No Capítulo 1, seção 1.1, fazemos uma introdução ao problema de resolução de Sistemas Lineares Inconsistentes; na seção 1.2, apresentamos o problema de PLANICIDADE modelado.

No Capítulo 2, mostramos que o problema aqui estudado pode ser visto como um Problema de Programação Linear e exploramos sua estrutura Dual.

No Capítulo 3, desenvolvemos todos os passos da especialização do método Simplex, aplicado ao problema de Planicidade e fornecemos um algoritmo estruturado, bem como, os resultados computacionais obtidos

por esse método, comparados com os resultados obtido pelo método dos Mínimos Quadrados.

Finalmente, no Capítulo 4, fazemos a revisão do artigo: "STRICT CHEBYSHEV APPROXIMATION FOR GENERAL SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS", de J.P. Thiran e S.Thiry, 1987, onde demonstramos vários teoremas propostos no artigo.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste Capítulo introduzimos o problema a ser estudado neste trabalho e fazemos uma aplicação em Metrologia, como motivação.

1.1 Definição do Problema.

Consideremos o sistema de equações lineares:

$$A x = b, \quad (1.1)$$

onde: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Suponhamos, entretanto, que o sistema (1.1) seja inconsistente, isto é, não existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a igualdade se verifique.

O problema a ser abordado neste trabalho consiste em determinar uma solução $x \in \mathbb{R}^n$, a qual minimiza a norma de Chebyshev do vetor resíduo, dado por:

$$r(x) = b - A x.$$

Ou seja, queremos determinar $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\infty} = \|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})\|_{\infty} = \alpha, \quad (1.2)$$

onde $\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\infty} = \max \{ |r_i(\mathbf{x})| ; 1 \leq i \leq m \}$; o vetor $\hat{\mathbf{x}}$ é denominado solução Chebyshev para (1.1). O problema (1.2) pode ser escrito, equivalentemente, como um problema de Programação Linear, como veremos no Capítulo 2.

Outras normas poderiam ser definidas, como a norma Euclidiana, a qual produziria a bem estudada solução "Mínimos Quadrados".

Consideremos, por exemplo, o problema de ajustar uma reta $y = \alpha x + \beta$ a um conjunto de pontos:

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{x} & x_1 & \dots & x_m \\ \hline \mathbf{y} & y_1 & \dots & y_m \end{array}.$$

Gostaríamos que os valores α e β fossem tais que:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta = y_1 \\ \alpha x_m + \beta = y_m \end{cases}.$$

Porém, os dados podem não definir uma reta e, portanto, o sistema acima é inconsistente. Definindo-se $r_i(\alpha, \beta) = y_i - \alpha x_i - \beta$, com $i = 1, \dots, m$, temos o problema de determinar α e β tais que:

$$\min \|\mathbf{r}(\alpha, \beta)\|_{\infty},$$

onde $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

As Fig. 1, 2 e 3 ilustram o comportamento para a solução, com diferentes normas escolhidas:

- Norma L_1 : $\| r(\alpha, \beta) \|_1 = \sum_{i=1}^m | r_i(\alpha, \beta) |$.

FIGURA 1. Solução referente à norma L_1

Neste caso, a solução obtida interpola os dados em pelo menos dois pontos, isto é, pelo menos duas equações são satisfeitas com igualdade.

- Norma L_2 : $\| r(\alpha, \beta) \|_2 = \left(\sum_{i=1}^m (r_i(\alpha, \beta))^2 \right)^{1/2}$.

FIGURA 2. Solução referente à norma L_2

Em geral, nenhuma equação é satisfeita.

- Norma L_∞ : $\| r(\alpha, \beta) \|_\infty = \max_i | r_i(\alpha, \beta) |$.

FIGURA 3. Solução referente à norma L_∞

Este é o caso a ser estudado neste trabalho, em que os maiores resíduos devem ser mínimos. Os resíduos que tem o maior valor, denotados por α , são pelo menos três. As normas anteriores admitiriam um resíduo grande, desde que a soma total fosse minimizada, influenciando-se pouco com pontos distoantes. A norma de Chebyshev, entretanto, é totalmente influenciada por todos os pontos. Observe que todos os pontos estão situados entre as duas retas paralelas tracejadas (retas de controle) na Fig. 3.

1.2 Uma Aplicação na Metrologia.

Um problema que surge na Metrologia (área da Engenharia Mecânica) é a determinação de Planicidade de Superfícies.

Dizemos que a PLANICIDADE de uma superfície é a menor distância entre dois planos paralelos, denominados Planos de Controle, os quais contenham toda a superfície.

Aproximamos a superfície por um plano, denominado Plano Médio o qual é paralelo aos Planos de Controle, como vemos na Fig. 4.

FIGURA 4. Representação de Planicidade

Para determinar a PLANICIDADE de uma superfície (x,y,h) , onde h é a altura correspondente às coordenadas (x,y) , procedemos como segue. Definimos uma malha de pontos onde a superfície será medida, isto é, ao invés de termos $h = h(x,y)$, teremos, $h_i = h(x_i, y_i)$, (Fig.5).

FIGURA 5. Discretização da superfície

As equações dos planos que constam da Fig. 5 são dados por:

- Plano Médio:

$$h_0 = \epsilon x + \beta y + \gamma$$

- Planos de Controle:

$$h_+ = \epsilon x + \beta y + \gamma + z$$

$$h_- = \epsilon x + \beta y + \gamma - z.$$

Pela definição de Planos de Controle, temos:

$$h_{+i} = \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma + z \geq h_i$$

$$h_{-i} = \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma - z \leq h_i,$$

ou seja,

$$h_i - z \leq \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma \leq h_i + z, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.3)$$

Para quaisquer valores de α , β , γ e z em (1.3), temos que a superfície está contida entre os Planos de Controle.

Queremos minimizar a distância entre os planos de Controle, sujeito a (1.3), isto é queremos resolver o problema:

$$\begin{aligned} & \min \quad z \\ \text{s.a.} \quad & h_i - z \leq \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma \leq h_i + z, \end{aligned} \quad (1.4)$$

com $1 \leq i \leq m$.

Note que (1.3) pode ser escrita equivalentemente por:

$$-z \leq \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma - h_i \leq z, \quad 1 \leq i \leq m,$$

ou seja,

$$| \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma - h_i | \leq z, \quad 1 \leq i \leq m.$$

O problema (1.4) é, então, equivalente a:

$$\min \left\{ \max | \epsilon x_i + \beta y_i + \gamma - h_i |, \quad 1 \leq i \leq m \right\},$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \| z \|_{\infty} \\ \text{s.a.} \quad & X \theta + z = h \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\text{onde: } X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 3}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ e}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Conforme apresentado em (1.2), (1.5) é o problema de determinar a solução de Chebyshev. Assim, mostramos que o problema de determinar a

Planicidade de uma superfície consiste na resolução de um Sistema Linear Inconsistente, no senso da norma de Chebyshev. Observamos que o problema equivalente (1.4) é um problema de Programação Linear que será objeto de atenção no próximo capítulo.

A literatura existente sobre Planicidade, em sua quase totalidade faz uso do **Método dos Mínimos Quadrados**, por sua simplicidade. Entretanto, este método produz apenas uma solução aproximada para o problema de determinar Planicidade de superfícies, como veremos no Capítulo 3.

CAPITULO 2

RESOLUÇÃO VIA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste Capítulo, abordamos o problema (1.2) do ponto de vista da Programação Linear.

2.1 Problema de Programação Linear Equivalente.

O problema (1.2) pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \| r \|_{\infty} \\ \text{s.a.} \quad & A x + r = b \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definindo $z = \max | r_i |$, com $1 \leq i \leq m$, temos:

$$| r_i | \leq \max | r_i | = z,$$

portanto, o problema (2.1) é equivalente ao seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.a.} \quad & -z \leq r_i \leq z, \end{aligned}$$

com $1 \leq i \leq m$,

ou seja,

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{s.a.} & -ze \leq b - Ax \leq ze \end{array}$$

ou ainda,

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{s.a.} & \begin{bmatrix} A & e \\ -A & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \end{array} \quad (2.2)$$

onde $e^t = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

O problema (2.2) pode ser resolvido por métodos de Programação Linear, como, por exemplo, o método Simplex.

2.2 O Problema Dual.

Ao problema (2.1) temos associado o seguinte problema dual [3]:

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda^t b \\ \text{s.a.} & A^t \lambda = 0, \\ & \|\lambda\|_1 = 1 \end{array} \quad (2.3)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^m$, o qual é um problema com restrições lineares por partes.

Podemos linearizar (2.3), fazendo $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, onde $\lambda^+ \geq 0$, $\lambda^- \geq 0$, obtendo o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned}
& \max \quad (\lambda^+)^t \mathbf{b} - (\lambda^-)^t \mathbf{b} \\
& \text{s. a.} \quad \mathbf{A}^t \lambda^+ - \mathbf{A}^t \lambda^- = \mathbf{0} \\
& \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ + \sum_{i=1}^m \lambda_i^- = 1 \\
& \quad \lambda^+ \geq 0, \lambda^- \geq 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

O problema (2.4) pode também ser obtido tomando-se o dual de (2.2) [3].

Neste trabalho, aplicamos uma especialização do método Simplex ao problema (2.4). Observamos que, apesar de trabalharmos com o problema linearizado, somente a matriz $\mathbf{A}^t$ e o vetor $\mathbf{b}$ precisam ser armazenados ao aplicarmos esta especialização do método SIMPLEX, pois trabalhamos com um sinal para identificarmos a variável λ_i^+ ou λ_i^- .

Os passos da especialização do método Simplex aplicado especificamente ao problema de Planicidade, bem como seu algoritmo, serão detalhados no Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

ESTUDO DE CASO: PLANICIDADE DE SUPERFÍCIES

Neste Capítulo, detalhamos os passos da especialização do método Simplex para o caso de Planicidade de Superfícies e desenvolvemos um algoritmo.

Fazendo uso da mesma notação utilizada no Capítulo 1, seção 1.2 , ao problema (1.5) temos associado o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^t h \\ \text{s.a.} \quad & X^t \lambda = 0 \\ & \|\lambda\|_1 = 1 \end{aligned}$$

Este problema pode ser linearizado como (2.4), portanto, temos:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\lambda^+)^t h - (\lambda^-)^t h \\ \text{s.a.} \quad & X^t \lambda^+ - X^t \lambda^- = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ + \sum_{i=1}^m \lambda_i^- = 1 \\ & \lambda^+ \geq 0, \lambda^- \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Toda teoria desenvolvida neste Capítulo, bem como o algoritmo, tem por objetivo resolver o problema (3.1).

3.1 Estrutura de Dados.

Observamos nesta seção que, devido à estrutura de dados do problema não será necessário armazenarmos a matriz X , e fornecemos um procedimento para gerarmos as suas linhas.

Como vimos no Capítulo 1, seção 1.2., ao fazermos a discretização de uma superfície, a cada ponto (x_i, y_j) corresponde uma cota h_k . Os pontos (x_i, y_j) são obtidos da seguinte maneira:

$$x_0 = 0, y_0 = 0,$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x, i = 0, 1, \dots, M_h - 1$$

e

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y, j = 0, 1, \dots, M_v - 1,$$

onde: $M_h \in \mathbb{N}$ é o número de medidas feitas na horizontal; $M_v \in \mathbb{N}$ é o número de medidas feitas na vertical; $k = 1, \dots, (M_h * M_v)$, sendo $(M_h * M_v)$ o número total de pares (x_i, y_j) , (Fig. 6).

FIGURA 6. Discretização da superfície em termos de Δx e Δy

Usando uma nova escala, podemos associar cada nó $(i\Delta x, j\Delta y)$ a um nó (i, j) , com $0 \leq i \leq (M_h - 1)$ e $0 \leq j \leq (M_v - 1)$. Obtemos assim a Fig. 7.

FIGURA 7. Mudança de escala da discretização

Observando que a matriz X em (1.5) tem uma estrutura específica, pois cada linha está associada a um nó (i, j) , optamos por não armazenar esta matriz. Suas linhas (ou colunas de X^t) serão geradas sempre que necessário. O vetor das medições h é armazenado conforme Fig. 7.

Sabemos que a cada nó (i, j) corresponde o índice k de h , com $1 \leq k \leq (M_h * M_v)$, ou seja:

$$(i, j) \longrightarrow k = (j * M_h) + i + 1.$$

Queremos resolver o problema inverso: "Dado k , como determinarmos

i e j ?". Isto pode ser obtido do seguinte modo:

$$\frac{k-1}{M_h} = j + \frac{i}{M_h},$$

ou seja, j é o quociente inteiro da divisão de k-1 por M_h e i é o resto inteiro dessa divisão.

Para distinguirmos as colunas de X^t e de $-X^t$ usamos um sinal s, que será igual a 1, se a coluna pertencer a X^t , e -1, se a coluna pertencer a $-X^t$.

Na seção seguinte, precisaremos selecionar três colunas linearmente independentes da matriz X^t para determinarmos a solução inicial do problema. Conforme podemos observar na Fig. 7, se os pontos não estão alinhados, os vetores colunas correspondentes na matriz X^t são linearmente independentes [10]. Portanto, o procedimento adotado será o de escolher colunas que correspondam aos nós que não sejam colineares.

3.2 Solução Básica Inicial.

Para aplicarmos a especialização do Método Simplex, precisamos ter disponível uma solução básica inicial. Nesta seção fornecemos um procedimento para a determinação da solução básica inicial, para isso, trabalhamos, primeiramente, com o conjunto de restrições dado por:

$$X^t \lambda^+ - X^t \lambda^- = 0,$$

e depois nos preocupamos com a restrição de normalização do vetor.

Selecionamos três colunas linearmente independentes da matriz

$X^t \in \mathbb{R}^{3 \times m}$, e uma quarta coluna arbitrariamente, todas associadas aos maiores valores absolutos dos $h_{i,s}$. Denominamos B' a submatriz de X^t composta por estas quatro colunas, tal que, $B' \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. O conjunto dos índices relacionados a estas colunas é chamado de conjunto de índices básicos, onde B_i denota o i -ésimo índice básico, com $i = 1, \dots, 4$ e o conjunto dos índices restantes é o conjunto dos índices não básicos, onde N_j denota o j -ésimo índice não básico, com $j = 1, \dots, (2m-4)$. Associamos, inicialmente, a cada coluna de B' um sinal s_i , tal que, $s_i = 1$, para $i = 1, \dots, 4$, pois as colunas pertencem a X^t .

Portanto, B' pode ser escrita na forma:

$$B' = \begin{bmatrix} s_1 u_{B_1} & s_2 u_{B_2} & s_3 u_{B_3} & s_4 u_{B_4} \end{bmatrix},$$

onde, u_{B_i} é a B_i -ésima coluna da matriz X^t e s_i é o sinal associado a ela, para $1 \leq i \leq 4$.

Anulamos as $(2m-4)$ variáveis que não estão associadas ao conjunto de índices básicos e resolvemos o seguinte sistema:

$$B' \lambda'_B = 0, \quad (3.2)$$

onde $\lambda'_B = (\lambda'_{B_1}, \lambda'_{B_2}, \lambda'_{B_3}, \lambda'_{B_4}) \in \mathbb{R}^4$.

Como o número de variáveis livres do sistema (3.2) é igual a 1, atribuímos à variável λ'_{B_4} o valor 1; este valor será alterado posteriormente, pois a restrição de normalização ainda não foi

satisfeita. Determinamos, assim, uma solução particular para o sistema, podendo ocorrer duas situações:

SITUAÇÃO 1: $\lambda'_B \geq 0$.

Se todas as coordenadas do vetor λ'_B são não negativas, normalizamos este vetor para satisfazer a última restrição, obtendo:

$$\lambda_B = \frac{\lambda'_B}{\|\lambda'_B\|}.$$

Deste modo, λ_B é solução para o seguinte sistema:

$$B \lambda_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde, $B = \begin{bmatrix} B' \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é denominada matriz básica.

SITUAÇÃO 2: $\lambda'_{B_i} < 0$, para algum i .

Caso algum λ'_{B_i} seja negativo, para algum i , $1 \leq i \leq 3$ (pois $\lambda'_{B_4} = 1$), redefinimos a matriz B' , fazendo uma troca de variável, ou seja, trocando a B_i -ésima coluna de X^t pela B_i -ésima coluna $-X^t$, $1 \leq i \leq 3$. Isto equivale a dizer que será trocado o sinal s_i , isto é, $s_i = -1$. Consequentemente, a solução de (3.2) será alterada, e λ'_{B_i} será dado por $-\lambda'_{B_i}$, sendo desnecessária a resolução do novo sistema,

pois de (3.2), temos:

$$B' \lambda'_B = 0,$$

ou seja,

$$s_1 u_{B_1} \lambda'_{B_1} + s_2 u_{B_2} \lambda'_{B_2} + s_3 u_{B_3} \lambda'_{B_3} + s_4 u_{B_4} \lambda'_{B_4} = 0, \quad (3.4)$$

ou, ainda, supondo $\lambda'_{B_1} < 0$, trocamos a primeira coluna, isto é, redefinimos B' , como segue:

$$-s_1 u_{B_1} \bar{\lambda}'_{B_1} + s_2 u_{B_2} \bar{\lambda}'_{B_2} + s_3 u_{B_3} \bar{\lambda}'_{B_3} + s_4 u_{B_4} \bar{\lambda}'_{B_4} = 0. \quad (3.5)$$

onde, $\bar{\lambda}'^t_B = (\bar{\lambda}'_{B_1}, \bar{\lambda}'_{B_2}, \bar{\lambda}'_{B_3}, \bar{\lambda}'_{B_4}) \in \mathbb{R}^4$ é a nova solução.

Reescrevendo (3.5), da seguinte forma:

$$s_1 u_{B_1} (-\bar{\lambda}'_{B_1}) + s_2 u_{B_2} \bar{\lambda}'_{B_2} + s_3 u_{B_3} \bar{\lambda}'_{B_3} + s_4 u_{B_4} \bar{\lambda}'_{B_4} = 0,$$

e comparando com (3.4), concluímos:

$$\bar{\lambda}'_{B_1} = -\lambda'_{B_1}, \quad \bar{\lambda}'_{B_2} = \lambda'_{B_2}, \quad \bar{\lambda}'_{B_3} = \lambda'_{B_3} \text{ e } \bar{\lambda}'_{B_4} = \lambda'_{B_4}.$$

Procedemos, agora, com a normalização do vetor, como na situação 1.

3.2.1 Posto de B.

Nesta seção provaremos que a matriz B, fornecida por (3.3), é uma matriz básica.

Seja a matriz B' assim particionada:

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & s_4 u_{B_4} \end{array} \right].$$

A submatriz B_1 é dada por $B_1 = \begin{bmatrix} s_1 u_{B_1} & s_2 u_{B_2} & s_3 u_{B_3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\text{posto}(B_1) = 3$, conforme construção efetuadas na seção 3.2.

Então, a matriz B em (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & s_4 u_{B_4} \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Como $\text{posto}(B_1) = 3$, concluímos que B_1 é inversível. Aplicando Eliminação de Gauss em bloco à matriz (3.6), com o objetivo de zerar a última linha temos :

$$\left[\begin{array}{c|c} B_1 & s_4 u_{B_4} \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} B_1 & s_4 u_{B_4} \\ \hline 0 & 1 - (1, 1, 1)^t (B_1)^{-1} s_4 u_{B_4} \end{array} \right].$$

Sabemos, por construção, que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{B_1} \\ \lambda_{B_2} \\ \lambda_{B_3} \end{bmatrix} = - (B_1)^{-1} s_4 u_{B_4} \geq 0,$$

então,

$$1 - (1, 1, 1)^t (B_1)^{-1} s_4 u_{B_4} \geq 1.$$

Concluimos que a matriz B tem posto igual a 4.

Observamos que a estratégia de selecionarmos as 4 colunas, como visto na seção 3.2, como sendo aquelas associadas aos maiores valores absolutos dos $h_{i,s}$, também foi usada em [12] e tem por objetivo reduzir o número de iterações, bem como o tempo computacional. Fizemos várias experiências computacionais e concluimos que esta prática realmente nos fornece um tempo computacional melhor do que a escolha ao acaso.

3.3 Vetor Multiplicador (ou Solução Primal).

Ao calcularmos o vetor multiplicador, observamos que este nos fornece o valor das variáveis primais e da função objetivo primal. Portanto, nesta seção mostramos como obter estes valores.

Para determinarmos o valor das variáveis primais e da função objetivo primal, resolvemos o seguinte sistema:

$$B^t \Pi = h_B, \quad (3.7)$$

$$\text{onde: } B^t = \left[\begin{array}{c|c} B_1^t & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ s_4^t u_{B_4}^t & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}; \quad h_B^t = \left(s_1 h_{B_1}, s_2 h_{B_2}, s_3 h_{B_3}, s_4 h_{B_4} \right) \in \mathbb{R}^4$$

e $\Pi^t = \left[\theta^t \quad \alpha \right] \in \mathbb{R}^4$. Aqui $\theta \in \mathbb{R}^3$ é o vetor das variáveis primais e $\alpha \in \mathbb{R}$, o valor da função objetivo primal, pois de (3.7), temos:

$$s_i u_{B_i}^t \theta + \alpha = s_i h_{B_i}, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

ou, multiplicando por s_i ,

$$u_{B_1}^t \theta + z_{B_1} = h_{B_1}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (3.8)$$

com $z_{B_1} = s_1 \alpha$. Temos que (3.8) corresponde às equações primais associadas aos índices básicos.

Se $\alpha \geq 0$, então representamos α por:

$$\alpha = \| z_{B_1} \|_{\infty} = | z_{B_1} |.$$

Caso aconteça $\alpha < 0$ durante a aplicação do método Simplex, o nosso procedimento será o seguinte:

- Trocamos o valor da variável α , isto é α será dado por $-\alpha$, tornando esse valor positivo e, para continuar valendo a igualdade no sistema (3.5), s receberá $-s$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -s_1 u_{B_1}^t \\ -s_2 u_{B_2}^t \\ -s_3 u_{B_3}^t \\ -s_4 u_{B_4}^t \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha) = \begin{bmatrix} -s_1 h_{B_1} \\ -s_2 h_{B_2} \\ -s_3 h_{B_3} \\ -s_4 h_{B_4} \end{bmatrix}$$

3.4 Custos Relativos.

O critério de parada para o nosso algoritmo é fornecido pelo

valor dos custos relativos, ou seja, são eles que nos indicam se a solução é ótima ou não. Nesta seção, apresentamos um procedimento para o cálculo dos mesmos.

Utilizando a estrutura do problema (3.1) temos que calcular os custos relativos para as variáveis não básicas λ^+ e λ^- .

Para as variáveis λ^+ , temos:

$$\hat{h}_{N_j}^+ = h_{N_j} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{N_j} \\ y_{N_j} \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha, \quad (3.9)$$

com $1 \leq j \leq (m-4)$.

Para as variáveis λ^- , temos:

$$\hat{h}_{N_j}^- = -h_{N_j} + \theta^t \begin{bmatrix} x_{N_j} \\ y_{N_j} \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha = -\left[h_{N_j} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{N_j} \\ y_{N_j} \\ 1 \end{bmatrix} \right] - \alpha, \quad (3.10)$$

com $1 \leq j \leq (m-4)$.

Chamando $AUX = h_{N_j} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{N_j} \\ y_{N_j} \\ 1 \end{bmatrix}$, (3.9) e (3.10) ficam:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{N_j}^+ &= AUX - \alpha, \\ \hat{h}_{N_j}^- &= -AUX - \alpha. \end{aligned}$$

Para que a factibilidade não seja violada, devemos ter:

$$\hat{h}_{N_j}^+ \leq 0 \text{ e } \hat{h}_{N_j}^- \leq 0,$$

com $1 \leq j \leq (m-4)$, ou seja,

$$-\alpha \leq \text{AUX} \leq \alpha.$$

Caso a factibilidade seja violada, isto é, caso ocorra:

$$\text{AUX} > \alpha \text{ ou } \text{AUX} < -\alpha,$$

devemos fazer a variável que mais viola a factibilidade fazer parte da nova base.

3.4.1 Observação.

Se $\lambda_{B_i}^+$ (ou $\lambda_{B_i}^-$), para qualquer i , fizer parte da base, mostraremos que o custo relativo associado a $\lambda_{B_i}^-$ (ou $\lambda_{B_i}^+$) é não positivo, e portanto não é candidato a entrar na base. Temos, então, as situações:

1) A variável $\lambda_{B_i}^+$, é básica.

Calculando o custo relativo associado a $\lambda_{B_i}^+$, temos:

$$\hat{h}_{B_i}^+ = h_{B_i} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$h_{B_1} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha. \quad (3.11)$$

Calculando o custo relativo associado $\lambda_{B_1}^-$, temos:

$$\hat{h}_{B_1}^- = - \left(h_{B_1} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \alpha,$$

de onde segue, por (3.11), que:

$$\hat{h}_{B_1}^- = -\alpha - \alpha = -2\alpha \leq 0,$$

pois $\alpha \geq 0$.

2) A variável $\lambda_{B_1}^-$, é básica.

Calculando o custo relativo associado a $\lambda_{B_1}^-$:

$$\hat{h}_{B_1}^- = - \left(h_{B_1} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \alpha = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$h_{B_i} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = -\alpha . \quad (3.12)$$

Calculando o custo relativo associado a $\lambda_{B_i}^+$:

$$\hat{h}_{B_i}^+ = h_{B_i} - \theta^t \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha ,$$

usando (3.12),

$$\hat{h}_{B_i}^+ = -\alpha - \alpha = -2\alpha \leq 0 ,$$

pois $\alpha \geq 0$.

Portando calculamos somente o custo relativo das variáveis não básicas λ^+ e λ^- .

3.5 Algoritmo Simplex Aplicado ao Problema de Planicidade.

O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo Simplex. Levamos em consideração que o problema sempre tem solução ótima pois o zero é um limitante inferior para o problema.

Início

.Determinação de uma solução básica inicial conforme seção 3.2

.PARE ← FALSO

.ENQUANTO (NÃO PARE) faça

Início

{ solução básica corrente }

.Seja B a matriz básica e a solução básica factível associada, dada por:

$$B \lambda_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{seção 3.2})$$

{ verificação da otimalidade }

-i) Cálculo do vetor multiplicador (solução Primal)

$$B^t \Pi = h_B \quad (\text{seção 3.3})$$

-ii) Cálculo dos custos relativos

Para $1 \leq j \leq (m-4)$,

$$\hat{h}_{N_j} = h_{N_j} - \Pi^t u_{N_j}, \quad (\text{seção 3.4})$$

-iii) Teste de Otimalidade

Se

$$\hat{h}_{N_k} = \text{Max} \left\{ \hat{h}_{N_j}^+ \text{ e } \hat{h}_{N_j}^-, 1 \leq j \leq (m-4) \right\} \leq 0$$

A solução corrente é ótima. PARE ← VERDADE.

Senão

$$s_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \hat{h}_{N_k} = \hat{h}_{N_j}^+ \\ -1, & \text{se } \hat{h}_{N_k} = \hat{h}_{N_j}^- \end{cases}$$

Calcule a direção

$$B d = s_k u_{N_k}$$

{ Determinação do Passo }

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{B_1}}{d_1} = \min \left\{ \frac{\lambda_{B_i}}{d_i}, d_i > 0, 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

{ Atualização }

-Nova partição básica (troque a l -ésima coluna de B por $s_k u_{N_k}$,

onde u_{N_k} é a N_k -ésima coluna de X^t)

Fim.

Fim.

3.6 Experiência Computacional

O algoritmo apresentado na seção 3.5 foi implementado utilizando a linguagem Pascal. Alguns exemplos foram executados num microcomputador padrão PC - 486, sem coprocessador matemático.

Nos exemplos 1 a 7, aplicamos a especialização do método Simplex e comparamos a solução obtida com a dos Mínimos Quadrados, bem como o tempo computacional gasto. Os resultados computacionais são dados sob a forma de tabelas.

EXEMPLO 1:

Os dados fornecidos neste exemplo foram extraídos de [11], os quais foram obtidos através da medição de um desempenho.

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	8.13	82
Mínimos Quadrados	8.32	39

Para verificarmos quais alterações poderiam ocorrer nas soluções dos dois métodos fizemos algumas alterações no exemplo acima resultando nos exemplos 2,3 e 4.

EXEMPLO 2:

Neste exemplo, alteramos para valores maiores as medições feitas no lado direito, nas últimas duas colunas, como segue:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	8.93	71
Mínimos Quadrados	9.76	38

EXEMPLO 3:

De modo análogo, alteramos as medidas feitas no canto superior direito, considerando valores maiores, obtendo:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	8.55	99
Mínimos Quadrados	9.07	38

EXEMPLO 4:

Aqui, alteramos alguns dos valores das medições, para valores menores, como se a superfície tivesse uma depressão no meio:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	9.59	98
Mínimos Quadrados	10.95	39

Os próximos exemplos foram extraídos de [4].

EXEMPLO 5:

As medições são dadas por:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp Método Simplex	14.34	06
Mínimos Quadrados	16.48	06

EXEMPLO 6:

Neste exemplo, as medições são:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	4.86	16
Mínimos Quadrados	5.90	06

EXEMPLO 7:

Temos, aqui, as seguintes medições:

	Solução (μm)	Tempo Computacional (cs)
Esp. Método Simplex	8.75	55
Mínimos Quadrados	9.21	22

Observamos que os resultados computacionais fornecidos em [4], do qual foram extraídos os exemplos 5, 6 e 7, coincidem com os resultados obtidos quando utilizamos a especialização do método Simplex, sendo que o referido artigo, faz uso de outro método.

Neste Capítulo, estudamos um método para resolver o problema de Planicidade, o qual, nos forneceu resultados computacionais satisfatórios, de acordo com as comparações feitas nos exemplos da seção 3.6. Ressaltamos que, as soluções fornecidas nos exemplos da seção 3.6 não são exatamente a Planicidade das superfícies pois, observando a fig 05, Capítulo 1, verificamos que a menor distância entre os planos não é z . Portanto, a solução só coincidirá com a Planicidade, se os planos forem paralelos ao plano xy , caso contrário, devemos calcular a distância entre os planos de controle, cujas equações são fornecidas pelo algoritmo da seção 3.5, recorrendo a [10].

Quanto ao tempo computacional, podemos dizer que a diferença entre os dois métodos é satisfatória, levando em conta o fato dos métodos serem diferentes, a precisão do método Simplex e o tempo que se leva para obter as medições.

No próximo Capítulo, estudaremos um método para resolução de Sistemas Lineares Inconsistentes, o qual explora decomposições da matriz e partições do sistema.

CAPÍTULO 4

UM MÉTODO ASCENDENTE

Neste capítulo, estudamos um outro método ascendente, para a resolução de (1.2), o qual faz uso de decomposições da matriz A e partições do sistema.

4.1 Preliminares

Introduzimos, aqui, alguns conceitos que serão usados no desenvolvimento do algoritmo, proposto na seção 4.6. Definimos H-Conjuntos e H-Conjuntos Minimais para sistemas lineares e caracterizamos as soluções ótimas.

4.1.1 Definição de H-Conjuntos e H-Conjuntos Minimais para Sistemas Lineares.

DEFINIÇÃO 1 - Um conjunto $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ é um H-Conjunto para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se existir um sinal padrão $\{s_j = \pm 1; j = 1, \dots, p+1\}$ tal que não exista $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça a desigualdade

$$s_j (u_{1j}^t x) > 0, \quad j = 1, \dots, p+1, \quad (4.1)$$

onde $u_1^t, \dots, u_m^t$ são vetores linhas da matriz A.

O seguinte teorema é uma forma alternativa para a definição de H-Conjunto.

TEOREMA 1 : Sejam: I, conforme Definição 1 e $S \in \mathbb{R}^{(p+1) \times n}$, uma matriz dada por $[u_{i_1}^t, \dots, u_{i_{p+1}}^t]^t$. O conjunto I é um H-Conjunto para A se, e somente se, existe uma solução não trivial $\sigma \neq 0$ para,

$$\sigma^t S = 0, \text{ com } \sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{p+1}\}. \quad (4.2)$$

O sinal padrão é, então, definido por $s_j = \text{sinal } \sigma_j$, com $j = 1, \dots, p+1$.

Prova:

i) Suponhamos que $\sigma^t S = 0$, somente com $\sigma = 0$, $s_j = \text{sinal } \sigma_j$ e que não exista $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça a desigualdade (4.1).

Seja D o casco convexo dos vetores $s_j u_{i_j}^t$ com $i_j \in I$. Tomemos $s_j = \pm 1$, qualquer. Portanto, o conjunto $\{s_1 u_{i_1}^t, s_2 u_{i_2}^t, \dots, s_{p+1} u_{i_{p+1}}^t\}$ é linearmente independente.

Como $0 \notin D$, usando o Teorema do Hiperplano Separador [13, capítulo 1], temos que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$s_j (u_{i_j}^t x) > 0, \quad i \in I,$$

o que contraria a hipótese.

Portanto, os vetores são linearmente dependentes, ou seja, $\sigma S = 0$, com $\sigma \neq 0$.

ii) Por outro lado, suponhamos que:

$$\sigma^t S = 0, \quad \text{com } \sigma \neq 0 \text{ e } s_j = \text{sinal}(\sigma_j).$$

Logo,

$$\sigma^t S x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ou, seja,

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j u_{1j}^t x = 0.$$

Multiplicando termo a termo por $(s_j)^2 = 1$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{p+1} (\sigma_j s_j) (s_j u_{1j}^t x) = 0,$$

de onde segue que

$$\sigma_j s_j \geq 0, \quad \text{com algum } \sigma_k s_k > 0,$$

uma vez que $s_j = \text{sinal}(\sigma_j)$ com $\sigma \neq 0$.

Logo não existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $s_j u_{1j}^t x > 0$, $1 \leq j \leq p+1$, o que conclui a prova do Teorema. ■

DEFINIÇÃO 2: Um H-Conjunto I é denominado H-Conjunto Minimal se não contém nenhum subconjunto próprio I' (ou seja, $I' \subset I$ tal que $I' \neq I$) que seja H-Conjunto.

4.1.1.1 Propriedades de H-Conjuntos Minimais.

PROPRIEDADE 1: Um conjunto I é um H-Conjunto Minimal para A , se, e somente se, $\text{posto}(S) = p$ e $\sigma_i \neq 0$, com $i = 1, \dots, p+1$, em (4.2).

Prova:

i) Suponhamos que $\text{posto}(S) = k < p$, $\sigma_s = 0$ e que $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$ seja um H-Conjunto Minimal para A .

Se $\text{posto}(S) = k$, então existem em S , k linhas linearmente independentes, isto é, existe $I' \subset I$ (por simplicidade de notação supomos que sejam os primeiros elementos de I) onde,

$$I' = \{i_1, \dots, i_{k+1}\} / \sigma^t S = 0, \text{ com } \sigma \neq 0.$$

Portanto, existe $I' \subset I$ tal que I' é um H-Conjunto Minimal para A , o que é um absurdo, pois I é um H-Conjunto Minimal para A .

Logo $\text{posto}(S) = p$.

Se $\sigma_s = 0$, temos que i_s pode ser retirado do conjunto I determinando um subconjunto que também é H-Conjunto, o que nos leva a um absurdo, pois I é um H-Conjunto Minimal.

Portanto, $\sigma_s \neq 0$.

ii) Reciprocamente, suponhamos que $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$ não seja um H-Conjunto Minimal para A, mas que $\text{posto}(S) = p$ e $\sigma_i \neq 0$, com $1 \leq i \leq p+1$.

Então, existem $I' = \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset I$, $k < p$ e uma submatriz S' de S, formada pelas linhas indexadas em I' . Temos,

$$\sigma'^t S' = 0, \text{ com } \sigma' \neq 0.$$

Concluimos, então, que as linhas da matriz S são linearmente dependentes e, portanto, $\text{posto}(S) < k+1$, ou seja, $\text{posto}(S) \leq k < p$, o que contraria a hipótese de que $\text{posto}(S) = p$.

Portanto, I é um H-Conjunto Minimal para A. ■

PROPRIEDADE 2: Todo sub-conjunto de $\{1, \dots, m\}$ com mais que $(n+1)$ elementos é um H-Conjunto para A. Então, um H-Conjunto Minimal para A tem no máximo $(n+1)$ elementos.

Prova:

Sabemos que $u_1^t \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o espaço linha da matriz A tem no máximo n vetores linearmente independentes.

Portanto, $n+1$ linhas da matriz A (matriz S) são linearmente dependentes; então,

$$\exists \sigma \neq 0 / \sigma^t S = 0.$$

Suponhamos, agora, cardinalidade de I maior que $n+1$. Então existe um subconjunto I' com cardinalidade $n+1$, o qual é linearmente dependente, isto é, é um H-Conjunto também. ■

PROPRIEDADE 3: $I = \{i_1\}$ é um H-Conjunto Minimal para A , se e somente se, $u_{i_1}^t = 0$.

Prova:

Basta observarmos que:

$$\sigma_1 u_{i_1}^t = 0, \text{ com } \sigma_1 \neq 0,$$

se e somente se,

$$u_{i_1}^t = 0. \blacksquare$$

PROPRIEDADE 4: Se I é um H-Conjunto Minimal para A , então toda submatriz $(p \times n)$ de S tem posto p .

Prova:

Suponhamos que exista uma submatriz $S' \in \mathbb{R}^{p \times n}$ de $S \in \mathbb{R}^{(p+1) \times n}$, tal que $\text{posto}(S') = r$, onde $r < p$. Sem perda de generalidade, podemos tomar os r primeiros elementos de I .

Então, os vetores $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}$ são linearmente independentes e $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, \dots, u_{i_p}\}$ são linearmente dependentes.

Assim, temos $\sigma^t S = 0$.

Porém, podemos tomar $\sigma_{p+1} = 0$ e, conseqüentemente, I não é um H-Conjunto Minimal para A , o que é um absurdo.

Portanto, cada submatriz $(p \times n)$ de S tem posto p . $\blacksquare$

4.1.2 Caracterização das soluções ótimas usando H-Conjuntos Minimais.

Usando a definição de H-Conjuntos Minimais obtemos uma caracterização das soluções ótimas, através do seguinte teorema:

TEOREMA 2 - TEOREMA DA CARACTERIZAÇÃO: O vetor $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de Chebyshev para o sistema $Ax = b$ se, e somente se, o conjunto de índices extremos

$$E(\hat{x}) = \left\{ i \in [1, m]; |r_i(\hat{x})| = \|r(\hat{x})\| \right\}$$

contém um H-Conjunto Minimal

$$I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\},$$

com sinais

$$s_j = \text{sinal } r_{i_j}(\hat{x}), \text{ com } 1 \leq j \leq p+1.$$

Prova:

i) Suponhamos que $\hat{x}$ não seja uma solução de Chebyshev para o sistema $Ax = b$, mas que exista o conjunto de índices extremos $E(\hat{x})$ contendo um H-Conjunto Minimal I , com os sinais especificados no teorema.

Como $\hat{x}$ não é uma solução, então existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\|r(\hat{x} + d)\| < \|r(\hat{x})\| = |r_{i_j}(\hat{x})|, \forall i_j \in I \subset E(\hat{x});$$

em particular, temos:

$$|r_{i_j}(\hat{x} + d)| < |r_{i_j}(\hat{x})|, \text{ para todo } i_j \in I \quad (4.3)$$

Sabemos que:

$$r(\hat{x} + d) = b - A(\hat{x} + d) = r(\hat{x}) - A d,$$

de onde segue que

$$r_{i_j}(\hat{x} + d) = r_{i_j}(\hat{x}) - u_{i_j}^t d, \text{ com } 1 \leq j \leq p+1. \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4) temos:

$$|r_{i_j}(\hat{x}) - u_{i_j}^t d| < |r_{i_j}(\hat{x})|$$

Então,

$$s_j u_{i_j}^t d > 0, \text{ para todo } i_j \in I. \quad (4.5)$$

Teremos um absurdo por escrever as condições do teorema,

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j u_{i_j}^t = 0. \quad (4.6)$$

Multiplicando (4.6) termo a termo por $(s_j)^2$ e d , obtemos:

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j s_j s_j u_{i_j}^t d = 0,$$

o que é um absurdo pois de (4.5) temos que $s_j u_{i_j}^t d > 0$, $i_j \in I$ e sabemos que $\sigma_j s_j > 0$.

Logo,

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j s_j s_j^t u_{1j}^t d > 0,$$

e, conseqüentemente, $\hat{x}$ é uma solução de Chebyshev para o sistema.

ii) Seja $\hat{x}$ a solução de Chebyshev para o sistema $Ax = b$ e suponhamos que não exista um H-Conjunto Minimal com os sinais especificados.

Então, $0 \notin D$, onde D é o casco convexo de vetores $s_j u_{1j}^t$, $j \in E(\hat{x})$.

Pelo Teorema do Hiperplano Separador [13, capítulo 1], existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$s_j u_{1j}^t d > 0, \quad j \in E(\hat{x}).$$

Logo, vem:

ii₁) Para $j \in E(\hat{x})$, temos:

$$\begin{aligned} \|r(\hat{x} + \tau d)\| &= |r_{1j}(\hat{x} + \tau d)| = \\ &= |b_{1j} - u_{1j}^t(\hat{x} + \tau d)| = \\ &= |b_{1j} - u_{1j}^t \hat{x} - \tau u_{1j}^t d| = \\ &= |r_{1j}(\hat{x}) - \tau u_{1j}^t d| = \\ &= |s_j \|r(\hat{x})\| - \tau u_{1j}^t d| = \\ &= |\|r(\hat{x})\| - \tau s_j u_{1j}^t d| < \|r(\hat{x})\|, \end{aligned}$$

$$\text{se, } 0 < \tau < \frac{2 \|r(\hat{x})\|}{\max_{j \in E(\hat{x})} (s_j u_{1j}^t d)},$$

pois,

$$| \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \| - \tau s_j u_i^t d | < \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \|.$$

Então, vem:

$$- \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \| < \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \| - \tau s_j u_i^t d < \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \|,$$

isto é,

$$-2 \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \| < -\tau s_j u_i^t d < 0,$$

ou seja,

$$0 < \tau s_j u_i^t d < 2 \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \|,$$

ou, ainda,

$$0 < \tau < \frac{2 \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \|}{s_j u_i^t d}.$$

Portanto,

$$0 < \tau < \frac{2 \| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \|}{\max_{i \in E(\hat{\mathbf{x}})} (s_j u_i^t d)}.$$

ii₂) Para $i \notin E(\hat{\mathbf{x}})$, $\tau > 0$.

$$\begin{aligned}
\| r(\hat{x} + \tau d) \| &= | r_1(\hat{x} + \tau d) | = \\
&= | r_1(\hat{x}) - \tau u_1^t d | \leq \\
&\leq | r_1(\hat{x}) | + | \tau u_1^t d | \leq \\
&\leq \max_{i \notin E(\hat{x})} | r_1(\hat{x}) | + \tau \max_{i \notin E(\hat{x})} | u_1^t d | < \| r(\hat{x}) \|,
\end{aligned}$$

$$\text{se } 0 < \tau < \frac{(\| r(\hat{x}) \| - \max_{i \notin E(\hat{x})} | r_1(\hat{x}) |)}{\max_{i \notin E(\hat{x})} | u_1^t d |},$$

uma vez que

$$\max_{i \notin E(\hat{x})} | r_1(\hat{x}) | + \tau \max_{i \notin E(\hat{x})} | u_1^t d | < \| r(\hat{x}) \|.$$

Logo, temos:

$$\tau \max_{i \notin E(\hat{x})} | u_1^t d | < \| r(\hat{x}) \| - \max_{i \notin E(\hat{x})} | r_1(\hat{x}) |,$$

de onde segue que

$$0 < \tau < \frac{(\| r(\hat{x}) \| - \max_{i \notin E(\hat{x})} | r_1(\hat{x}) |)}{\max_{i \notin E(\hat{x})} | u_1^t d |}.$$

Então, se $\tau > 0$ é suficientemente pequeno, o fato de $\hat{x}$ ser uma solução de Chebyshev para $Ax = b$ é um absurdo, pois sempre temos disponível uma direção d de descida.

Portanto, existe um H-Conjunto Minimal com os sinais já especificados.

De i) e ii), temos a prova do teorema. ■

Portanto caracterizamos uma solução de Chebyshev por

$$b_{i_j} - u_{i_j}^t \hat{x} = s_j \alpha, \quad 1 \leq j \leq p+1, \quad (4.7)$$

onde α é definido em (1.2) e $s_j = \text{sinal } \sigma_j$, com σ resolvendo (4.2).

Observando que dimensão do Ker de S^t é igual a 1, considerando a Propriedade 1, normalizamos $\sigma^t \in \ker S^t$ por $\sum_j |\sigma_j| = 1$.

Então de (4.2), vem:

$$\sigma^t S = 0, \quad \|\sigma\|_1 = 1 \text{ e } s_j = \text{sinal } \sigma_j,$$

e de (4.7), obtemos:

$$b_{i_j} - u_{i_j}^t x = s_j \alpha, \quad 1 \leq j \leq p+1.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j b_{i_j} - \sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j u_{i_j}^t x = \sum_{j=1}^{p+1} \sigma_j s_j \alpha, \quad 1 \leq j \leq p+1,$$

o que acarreta

$$\alpha = \sum_{j=1}^p \sigma_j b_{1j}, \quad (4.8)$$

onde o sinal arbitrário de σ é fixado pela condição $\alpha \geq 0$.

Pela Propriedade 1, o sistema (4.7) impõe p condições independentes sobre x , tal que a solução de Chebyshev não é necessariamente única no caso de $p < n$.

Todas as soluções partilham a seguinte propriedade:

PROPRIEDADE 5: Toda solução de Chebyshev tem o mesmo resíduo $s_j \alpha$, ($1 \leq j \leq p+1$), para as equações correspondentes ao H-Conjunto Minimal I.

Nas próximas seções faremos a descrição dos passos que serão usados no algoritmo da seção 4.6.

4.2 Decomposição Canônica da Matriz.

Nesta seção, estudamos a decomposição de uma matriz de d linhas e e colunas, que será utilizada no algoritmo da seção 4.6. Essa decomposição foi proposta por Noble para o cálculo da inversa generalizada [5].

Seja uma matriz $D \in \mathbb{R}^{d \times e}$, com posto r . Ordenando as linhas e colunas de D , podemos determinar uma submatriz principal $E \in \mathbb{R}^{r \times r}$, não singular. Portanto, as primeiras r colunas de D formam uma base do espaço coluna e as $(e-r)$ colunas restantes podem ser expressas como combinação linear destes vetores básicos, ou seja, D pode ser escrita na forma:

$$D = \left[\begin{array}{c|c} E & C \end{array} \right],$$

onde $C = \left[c^1, c^2, \dots, c^{e-r} \right] \in \mathbb{R}^{dx(e-r)}$.

Então,

$$c^j = \left[\begin{array}{c} E \\ X \end{array} \right] f^j,$$

onde f^j são as coordenadas da coluna c^j na base $\left[\begin{array}{c} E \\ X \end{array} \right]$, $1 \leq j \leq e-r$, isto é,

$$C = \left[\begin{array}{c} E \\ X \end{array} \right] F,$$

onde $F = \left[f^1, f^2, \dots, f^{e-r} \right] \in \mathbb{R}^{rx(e-r)}$.

Logo podemos escrever:

$$D = \left[\begin{array}{cc} E & EF \\ X & XF \end{array} \right].$$

Usando o mesmo procedimento para as r primeiras linhas, teremos :

$$D = \begin{pmatrix} E & EF \\ \dots\dots\dots & \\ & L \end{pmatrix},$$

onde $L = \left[l^1, l^2, \dots, l^{d-r} \right]^t \in \mathbb{R}^{(d-r) \times (e)}.$

Portanto,

$$l^i = g^{i^t} \begin{pmatrix} E & EF \end{pmatrix},$$

onde g^i são as coordenadas da linha l^i na base $[E \ EF]$, $1 \leq i \leq d-r$ ou seja,

$$L = G \begin{pmatrix} E & EF \end{pmatrix},$$

onde $G = \left[g^1, g^2, \dots, g^{d-r} \right]^t \in \mathbb{R}^{(d-r) \times r}.$

Assim D também pode ser escrita na forma:

$$D = \begin{pmatrix} E & EF \\ GE & GEF \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$D = \begin{bmatrix} I_r \\ G \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} I_r & F \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

As matrizes E, F e G contêm número de parâmetros independentes, caracterizando uma matriz (dxe), de posto r, isto é :

$$r^2 + r(e-r) + (d-r)r = r(d+e-r). \quad (4.10)$$

Se $r = \min \{ d, e \}$, então (4.10) resulta em (d.e), de onde concluimos que todas as linhas de D são independentes.

Para $r = 1$, (4.9) decompõe-se no produto de um vetor coluna por um vetor linha e o número de parâmetros independentes torna-se (d+e-1).

Decompondo D no produto de uma matriz triangular inferior por uma outra matriz, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & 0_{r,d-r} \\ 0_{d-r,r} & I_{d-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & EF \\ GE & GEF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & F \\ GE & GEF \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0_{r,d-r} \\ -GE & I_{d-r,d-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{-1} & 0_{r,d-r} \\ 0_{d-r,r} & I_{d-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & EF \\ GE & GEF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efetuada o produto entre as duas primeiras matrizes, obtemos a decomposição:

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & 0_{r,d-r} \\ -G & I_{d-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & EF \\ GE & GEF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0_{d-r,r} & 0_{d-r,e-r} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Trabalhando com D^t , substituímos E , F e G , respectivamente, por E^t , F^t e G^t , produzindo a decomposição :

$$D \begin{bmatrix} E^{-1} & -F \\ 0_{e-r,r} & I_{e-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,e-r} \\ G & 0_{d-r,e-r} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Essas matrizes fornecem as informações necessárias para a próxima seção. Por exemplo, (4.11) e (4.12) mostram que as colunas $[-G \quad I_{d-r}]^t$ e $[-F^t \quad I_{e-r}]^t$ são vetores básicos de $\ker D^t$ e $\ker D$, respectivamente.

4.3 Partição do Sistema Relativo a um H-Conjunto Minimal.

Nesta seção, estudamos como particionar o sistema relacionado a um H-Conjunto Minimal e calcular a solução de Chebyshev para o sistema já particionado.

Sejam $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$ um H-Conjunto Minimal para a matriz A

e $S = [u_{i_1}, \dots, u_{i_{p+1}}]^t$ a matriz associada, de $(p+1)$ linhas por n colunas, tal que $\text{posto}(S) = p$.

Aplicando a decomposição descrita na seção 4.2 e permutando de maneira conveniente as colunas, podemos escrever S como:

$$S = [Q \ R], \text{ com: } R = QU, \ Q \in \mathbb{R}^{(p+1) \times p} \text{ e } U \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)} \quad (4.13)$$

onde as colunas de U representam os vetores coordenadas das últimas colunas de S , em termos da base formada pelas primeiras p colunas.

Ordenando as linhas de A convenientemente, suponhamos que as primeiras t linhas de A pertençam ao espaço linha de S . Então, reescrevemos A da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} & S & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & S' & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V & & W \end{pmatrix},$$

onde,

$$S' = [u_{p+2}, \dots, u_t]^t,$$

com $u_i = \sum_{j=1}^{p+1} \delta_j^i s_j$, $p+2 \leq i \leq t$, e s_j denota a j -ésima linha da matriz S , ou seja,

$$u_i = \Delta_i^t S,$$

onde $\Delta_i^t = [\delta_1^i, \dots, \delta_{p+1}^i]$.

Assim,

$$S' = \Delta S,$$

$$\text{onde } \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{p+2}^t \\ \vdots \\ \Delta_t^t \end{bmatrix}.$$

Como $S = [Q \quad QU]$, S' pode ser escrita na forma:

$$S' = \begin{bmatrix} \Delta Q & \Delta QU \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} S \\ \dots \\ S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & QU \\ \dots & \dots \\ \Delta Q & \Delta QU \end{bmatrix}.$$

Chamando

$$\begin{bmatrix} Q \\ \Delta Q \end{bmatrix} = T,$$

temos:

$$\begin{bmatrix} S \\ \dots \\ S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & TU \end{bmatrix},$$

onde, $T \in \mathbb{R}^{t \times p}$ e a matriz $\begin{bmatrix} T & TU \\ V & W \end{bmatrix}$ reúne as linhas de A que estão no espaço linha de S.

Deste modo, podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} T & TU \\ V & W \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde: $V \in \mathbb{R}^{(m-t) \times p}$ e $W \in \mathbb{R}^{(m-t) \times (n-p)}$.

Podemos decompor a matriz A da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} T & TU \\ V & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & -U \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0_{t,n-p} \\ V & W - VU \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } K = \begin{bmatrix} I_p & -U \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix}.$$

Seja o espaço gerado pela matriz S dado por:

$$[S] = \{ x / x = \delta^t S = [\delta^t Q \quad \delta^t QU] \}.$$

Suponhamos que a matriz $W - VU$ tenha uma linha nula, dada por:

$$w_1^t - v_1^t U = 0,$$

então, temos:

$$w_1^t = v_1^t U$$

e, portanto,

$$(\mathbf{v}_1^t, \mathbf{w}_1^t) = (\delta^t Q \quad \delta^t Q U) \in [S],$$

o que é um absurdo. Logo, $W - VU$ não tem linhas nulas.

Temos, então, o seguinte sistema transformado para $Ax = b$:

$$A K K^{-1} \mathbf{x} \approx \mathbf{b}.$$

Chamando $K^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dots \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-p}$, temos:

$$\begin{bmatrix} T & 0_{t, n-p} \\ V & W - VU \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^t$ e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m-t}$.

Computamos a solução de Chebyshev para o sistema $T\mathbf{y} \approx \mathbf{c}$, o qual tem posto coluna completo p e o menor número de variáveis em relação ao H-Conjunto Minimal dado.

Aplicamos recursivamente o mesmo procedimento para reduzir o sistema:

$$(W - VU) \mathbf{z} \approx \mathbf{d} - V\hat{\mathbf{y}},$$

fazendo $\bar{A} = W - VU \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times \bar{n}}$ e $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{d} - V\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$, temos:

$$\bar{A} \mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}}, \quad (4.15)$$

com $\bar{m} = m - t$ e $\bar{n} = n - p$.

Portanto, a solução para o sistema original é:

$$x = K \begin{bmatrix} \hat{y} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & -U \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y} - Uz \\ z \end{bmatrix},$$

isto é,

$$x = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ 0_{n-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U \\ I_{n-p} \end{bmatrix} z. \quad (4.16)$$

A partição da matriz aqui apresentada depende da escolha do H-Conjunto Minimal. Um procedimento para a escolha deste será apresentada na seção 4.5.

4.4 Troca entre H-Conjuntos Minimais.

O algoritmo que desenvolveremos na seção 4.6, tem como objetivo determinar o ótimo do problema (1.2), o que corresponde ao desvio máximo entre todos os H-Conjuntos Minimais. Verificaremos que o algoritmo aumenta o desvio a cada passo. Assim, serão importantes as trocas entre H-Conjuntos Minimais relativos a sistemas sucessivos, as quais serão descritas nesta seção.

Consideremos, para a matriz A , um H-Conjunto Minimal $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$. Essa matriz pode ser decomposta como (4.13); além disso ela satisfaz (4.2). Em I , temos que o desvio é dado por (4.8) e que $1 \leq i_k \leq t$, onde $1 \leq k \leq p+1$. Tomemos, agora, para a matriz $\bar{A} = W - VU$, um H-Conjunto Minimal $\bar{I} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{p+1}\}$, cujos índices correspondem às linhas de $\bar{A}$. Portanto, temos que $1 \leq \bar{i}_k \leq \bar{m}$, onde

$1 \leq k \leq \bar{p}+1$, e os índices correspondentes para linhas de A são:

$$j_k = t + \bar{i}_k, \text{ com } 1 \leq k \leq \bar{p}+1.$$

Podemos escrever a matriz $\bar{S} \in \mathbb{R}^{(\bar{p}+1) \times \bar{n}}$ associada a $\bar{A}$, como:

$$\bar{S} = \bar{R} - \bar{Q}U,$$

onde, $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{(\bar{p}+1) \times p}$ e $\bar{R} \in \mathbb{R}^{(\bar{p}+1) \times \bar{n}}$ são submatrizes de V e W dadas em (4.14), respectivamente.

O desvio $\bar{\alpha}$ em $\bar{I}$ é dado por:

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k \bar{b}_{\bar{i}_k} \geq 0, \quad (4.17)$$

com $\bar{b} = d - V\hat{y}$.

Esse desvio é tal que $\bar{\sigma}^t = [\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{\bar{p}+1}]$ satisfaz $\bar{\sigma}^t \bar{S} = 0$, com a condição de normalização $\sum_k |\bar{\sigma}_k| = 1$.

Podemos combinar as $p+\bar{p}+2$ linhas da matriz A , as quais são relacionadas a I e $\bar{I}$, obtendo:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \bar{Q} & \bar{R} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

a qual é equivalente a:

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ \bar{Q} & \bar{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -U \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0_{p+1,\bar{n}} \\ \bar{Q} & \bar{S} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

onde $K = \begin{pmatrix} I_p & -U \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$, é a matriz definida na seção 4.3.

Considerando que $\text{posto}(S) = p$, que em $\bar{Q}$ e $\bar{R}$ estão as linhas de A , as quais não pertencem ao espaço linha de S , e que P^t tem nulidade 2, concluímos que $\text{posto}(P) = p + \bar{p}$.

Definimos uma base para $\ker(P^t)$ da seguinte maneira:

i) Tomamos o vetor $[\sigma^t, 0_{p+1}^t]^t$ o qual satisfaz $[\sigma^t, 0_{p+1}^t] P = 0$;

ii) Denotamos o outro vetor da base por $[\tau^t, \bar{\tau}^t]^t$, com $\tau \in \mathbb{R}^{p+1}$ e $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^{\bar{p}+1}$, onde $\bar{\tau}$ é um vetor não nulo.

Usando (4.19), temos $\bar{\tau}^t \bar{S} = 0$, onde o espaço solução tem dimensão 1. Portanto, temos que $\bar{\tau}$ é proporcional a $\bar{\sigma}$ e, então, tomamos $\bar{\tau} = \bar{\sigma}$. Para determinarmos o sub-vetor $\tau^t = [\tau_1, \dots, \tau_{p+1}]$, precisamos impor a seguinte condição adicional:

$$\tau^t s = \sum_{k=1}^{p+1} \tau_k s_k = -1, \text{ com } s^t = [s_1, \dots, s_{p+1}]^1, \quad (4.20)$$

onde $s_k = \text{sin} \sigma_k$, o qual, considerada a igualdade

$$\tau^t Q = -\bar{\sigma}^t \bar{Q}, \quad (4.21)$$

define um único τ , dado por:

$$\tau^t \begin{pmatrix} Q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^t Q & \tau^t s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma}^t \bar{Q} & -1 \end{pmatrix} = -\bar{\sigma}^t \begin{pmatrix} \bar{Q} & \bar{s} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Em (4.22), temos:

$$\bar{\sigma}^t \bar{s} = |\bar{\sigma}| = \sum_1 |\sigma_1| = 1;$$

além disso $\begin{pmatrix} Q & s \end{pmatrix}$ é não singular e $\bar{s}^t = [\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{p+1}]$, com $\bar{s}_k = \text{sin} \bar{\sigma}_k$.

Resumidamente, temos:

Definiremos, na demonstração do Teorema da Troca, um conjunto com cardinalidade $q + 1$, da seguinte maneira:

$$\hat{I} = \left\{ i_k / \frac{-\sigma_k}{\tau_k} = \lambda \right\}$$

Essa condição nos garante que este conjunto $\hat{I}$ é não vazio pois:

$\hat{I}$ seria vazio se: $\tau_k = 0$ para todo $1 < k < p+1$

ou

$$\sigma_k \tau_k > 0, \text{ para todo } 1 \leq k \leq p+1,$$

mas pela condição (4.20) isto não acontece.

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0_{\bar{p}+1} \\ \tau & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \mathbf{P} = 0, \quad (4.23)$$

considerada a condição (4.20).

Lembrando que $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{d} - \mathbf{V}\hat{\mathbf{y}}$ e $d_{i_k} = b_{j_k}$ com, $j_k = t + \bar{i}_k$, reescrevemos (4.17) da seguinte forma:

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} - \bar{\sigma}^t \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{y}},$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é a submatriz de $\mathbf{V}$ associada a $\bar{\mathbf{I}}$.

Do resultado apresentado em (4.21), segue que:

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} + \tau^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{y}}.$$

Por (4.7), a k -ésima componente de $\mathbf{Q}\hat{\mathbf{y}}$ é $b_{i_k} - s_k \alpha$; assim usando (4.20), temos:

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} + \sum_{k=1}^{p+1} \tau_k (b_{i_k} - s_k \alpha),$$

ou seja,

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} + \sum_{k=1}^{p+1} \tau_k b_{i_k} - \sum_{k=1}^{p+1} \tau_k s_k \alpha,$$

ou, ainda,

$$\bar{\alpha} = \alpha + \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} + \sum_{k=1}^{p+1} \tau_k b_{i_k} \quad (4.24)$$

Uma troca entre I e $\bar{I}$, pode ser realizada de acordo com a regra a ser descrita no Teorema da Troca.

Nesse teorema, denotamos por $J = \{j_1, \dots, j_{\bar{p}+1}\}$ o H-Conjunto $\bar{I}$, no qual os elementos são referentes aos índices da matriz A , isto é, $j_k = t + \bar{i}_k$, para $1 \leq k \leq \bar{p}+1$.

TEOREMA 3 - TEOREMA DA TROCA: Para $\bar{\alpha} > \alpha$, um subconjunto não nulo $\hat{I}$ de I pode ser trocado com J para formar um novo H-Conjunto Minimal

$$I^* = \{ I \setminus \hat{I} \} \cup J,$$

para a matriz A com um desvio crescente $\alpha^* > \alpha$.

Prova:

Consideremos uma combinação linear dos dois vetores do $\text{Ker}(P^t)$ dados em (4.23) para determinarmos um outro H-Conjunto Minimal para A :

$$1 [\sigma^t, 0^t]^t + \theta [\tau^t, \bar{\sigma}^t]^t = [\sigma^t + \theta \tau^t, \theta \bar{\sigma}^t]^t \in \text{Ker}(P^t),$$

então,

$$[\sigma^t + \theta \tau^t, \theta \bar{\sigma}^t] P = 0, \quad (4.25)$$

onde o parâmetro θ é escolhido de modo a cancelar algumas componentes de $\sigma^t + \theta \tau^t$.

Tomemos $\theta = \lambda$, onde λ é o menor número positivo em

$$\left\{ \frac{-\sigma_k}{\tau_k} / 1 \leq k \leq p+1 \right\}.$$

Definimos o seguinte conjunto:

$$\hat{I} = \left\{ i_k / \frac{-\sigma_k}{\tau_k} = \lambda \right\};$$

assumimos a cardinalidade de $\hat{I} = q+1$ e $\hat{I}$ não vazio, como foi visto em (4.20).

Mostraremos, agora, que $I^* = \{ I \setminus \hat{I} \} \cup J$ é um H-Conjunto Minimal para A através da aplicação da Propriedade 1.

-Primeiramente mostremos que o vetor σ^* tem componentes não nulas.

De fato, fazendo $\theta = \lambda$ em (4.25) e descartando as $q+1$ componentes nulas de $\sigma^t + \theta \tau^t$, juntamente com as $q+1$ linhas associadas de P, obtemos $\sigma^* S^* = 0$, com $\sigma^* \in \mathbb{R}^{p^*+1}$, $S^* \in \mathbb{R}^{(p^*+1) \times n}$, $p^* = p + \bar{p} - q$ e cardinalidade de $I^* = p^* + 1$. Portanto, o vetor σ^* tem componentes não nulas.

- Mostremos, agora, que $\text{posto}(S^*) = p^*$.

Consideremos uma combinação linear das primeiras p^* linhas de $S^* K$, que tem o mesmo posto de S^* .

Por (4.19) podemos escrever:

$$[u^t \quad v^t \quad 0^t] \begin{bmatrix} Q^1 & 0_{p-q, \bar{n}} \\ \bar{Q} & \bar{S} \end{bmatrix} = 0,$$

onde Q^1 é a submatriz de Q correspondente a $I \setminus \hat{I}$, $u \in \mathbb{R}^{p-q}$ e $v \in \mathbb{R}^{\bar{p}}$.

Esta relação implica que

$$[v^t \quad 0^t] \bar{S} = 0,$$

e pela propriedade 4, temos $v = 0$.

Temos, então, que $u^t Q^1 = 0$ e, pela mesma propriedade, segue $u = 0$.
Portanto, $\text{posto}(S^*) = p^*$.

Provaremos, agora, que o desvio α^* em I^* é maior que α .

Juntamente com (4.25), consideremos a seguinte função:

$$\alpha(\theta) = \frac{\left| \sum_{k=1}^{p+1} \left[\sigma_k + \theta \tau_k \right] b_{i_k} + \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \theta \bar{\sigma}_k b_{j_k} \right|}{\sum_{k=1}^{p+1} \left| \sigma_k + \theta \tau_k \right| + \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \left| \theta \bar{\sigma}_k \right|} \quad (4.26)$$

onde devido a (4.8) e (4.24), o numerador é:

$$\left| \sum_{k=1}^{p+1} \sigma_k b_{i_k} + \sum_{k=1}^{p+1} \theta \tau_k b_{i_k} + \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \theta \bar{\sigma}_k b_{j_k} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{p+1} \sigma_k b_{i_k} + \theta \left(\sum_{k=1}^{p+1} \tau_k b_{i_k} + \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} \bar{\sigma}_k b_{j_k} \right) \right| = \\
&= |\alpha + \theta(\bar{\alpha} - \alpha)|.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Para $0 \leq \theta \leq \lambda$, o sinal de $\sigma_k + \theta \tau_k$ é igual ao sinal(σ_k) = s_k , de modo que, por (4.20) obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} |\sigma_k + \theta \tau_k| &= \sum_{k=1}^{p+1} s_k (\sigma_k + \theta \tau_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} s_k \sigma_k + \sum_{k=1}^{p+1} s_k \theta \tau_k = \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} s_k \sigma_k + \theta \sum_{k=1}^{p+1} s_k \tau_k = 1 - \theta. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\bar{p}+1} |\theta \bar{\sigma}_k| &= \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} |\theta| |\bar{\sigma}_k| = \\
&= |\theta| \sum_{k=1}^{\bar{p}+1} |\bar{\sigma}_k| = |\theta| = \theta,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

pois $0 \leq \theta \leq \lambda$.

De (4.28) e (4.29), temos que o denominador de (4.26) se reduz à unidade e, considerando (4.27) o desvio α^* em I^* é dado por:

$$\alpha(\lambda) = \alpha + \lambda (\bar{\alpha} - \alpha),$$

o que prova o teorema. ■

4.5 Determinação do H-Conjunto Minimal.

Para aplicarmos a divisão do sistema da seção 4.4, necessitamos de um H-Conjunto Minimal para a matriz A, a qual é suposta tendo linhas não nulas. Nesta seção fornecemos um procedimento para a determinação de um H-Conjunto Minimal, o qual depende dos valores relativos de m e n e nosso objetivo é maximizar α .

Vejamos o procedimento para dois casos separadamente:

CASO 1: $m > n$.

Sabemos que o desvio α em $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$, dado por (4.8), é limitado pelo $\max_{i_j \in I} |b_{i_j}|$. Podemos maximizar este limite seguindo os seguintes passos:

i) Selecionamos um conjunto de índices relacionado ao maior valor absoluto das componentes do vetor b, com cardinalidade (n+1), devido à Propriedade 2;

ii) Tomamos uma submatriz $B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ de A, onde suas linhas são as correspondentes aos índices do conjunto anterior, com $\text{posto}(B) = u$, pois a matriz A tem linhas não nulas, por hipótese. Aplicamos a decomposição (4.11) e obtemos:

$$\begin{bmatrix} Y^{-1} & 0_{u, n+1-u} \\ -L & I_{n+1-u} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} I_u & Z \\ 0_{n+1-u, u} & 0_{n+1-u, n-u} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

onde $Y \in \mathbb{R}^{uxu}$, $L \in \mathbb{R}^{(n+1-u) \times u}$ e $Z \in \mathbb{R}^{ux(n-u)}$.

Observamos que cada coluna de $[-L \quad I_u]^t \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1-u)}$ é um vetor da base do $\text{Ker}(B^t)$, onde um desvio pode ser calculado usando (4.8).

iii) Seleccionamos uma coluna que produza o desvio máximo e descartamos todas as colunas de B^t que estão associadas com uma coordenada nula deste vetor do $\text{Ker}(B^t)$.

iv) Devido a Propriedade 1, a submatriz resultante B é a matriz $S \in \mathbb{R}^{(p+1) \times n}$ de um H-Conjunto Minimal $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$ com $p > 0$, de acordo com Propriedade 3.

CASO 2: $m \leq n$.

Nesse caso, temos que $B = A$ e, portanto, $\text{posto}(B) = \text{posto}(A) = r$.

Se $r < m$, usamos a mesma técnica do caso 1 para obter I e S ;

Se $r = m$ a matriz tem posto linha completo e portanto não existe H-Conjunto para A . O sistema $Ax = b$ é resolvido exatamente pelos vetores (4.16) e o correspondente desvio α é nulo.

Na próxima seção, veremos o algoritmo do método proposto para a

resolução de sistemas lineares.

4.6 Algoritmo e Exemplos Numéricos.

Apresentamos, agora, o algoritmo para resolução de sistemas de equações lineares e alguns exemplos numéricos.

4.6.1 Algoritmo.

Nosso algoritmo usa algumas rotinas, as quais são apresentadas a seguir:

Rotina Zero

Início

Selecione $t^{(0)}$ equações relacionadas a vetores linhas nulas de A ;

Particione A e b

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ A^{(1)} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} d^{(0)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \text{com } A^{(1)} \in \mathbb{R}^{m^{(1)} \times n^{(1)}} \text{ e } b^{(1)} \in \mathbb{R}^{m^{(1)}};$$

$$m^{(1)} \leftarrow m - t^{(0)};$$

$$n^{(1)} \leftarrow n;$$

$$\text{Calcule } \alpha^{(0)} = \| d^{(0)} \|.$$

$$\text{Sistema para resolver } A^{(1)}x \approx b^{(1)}.$$

Fim.

Rotina Um

Início

Método da seção 4.5.

Fim.

Rotina Dois

Início

Método da seção 4.3.

Sistema posto completo

$$T_{(i)}^{(k)} y_{(i)}^{(k)} \approx c_{(i)}^{(k)}, \text{ de } t_{(i)}^{(k)} \text{ linhas por } p_{(i)}^{(k)} \text{ colunas.}$$

$$\text{Calcule } \alpha_{(i)}^{(k)}, \hat{y}_{(i)}^{(k)} \text{ em } I_{(i)}^{(k)} \text{ usando } b_{ij} - u_{ij}^t \hat{x} = s_j \alpha_j.$$

Fim

Rotina Três

Início

Rotina dois.

$$\text{Enquanto } \| c_{(i)}^{(k)} - T_{(i)}^{(k)} \hat{y}_{(i)}^{(k)} \| \neq \alpha_i \text{ faça}$$

Troca do tipo 1 entre $I_{(i)}^{(k)}$ e um índice extremo,

obtendo um novo H-Conjunto minimal $I_{(i+1)}^{(k)}$ com

$$p_{(i+1)}^{(k)} > 0 \text{ e } \alpha_{(i+1)}^{(k)} > \alpha_{(i)}^{(k)}.$$

Se $p_{(i+1)}^{(k)} < p_{(i)}^{(k)}$ então

Atualize todas as matrizes

$$i \leftarrow i+1$$

Senão

Matrizes são inalteradas

$$i \leftarrow i+1$$

Rotina dois.

Fim enquanto.

$$I_{(i)}^{(k)} \leftarrow I_{(i+1)}^{(k)}; U_{(i)}^{(k)} \leftarrow U_{(i+1)}^{(k)}; T_{(i)}^{(k)} \leftarrow T_{(i+1)}^{(k)}; c_{(i)}^{(k)} \leftarrow c_{(i+1)}^{(k)};$$

$$\alpha_{(i)}^{(k)} \leftarrow \alpha_{(i+1)}^{(k)}; t_{(i)}^{(k)} \leftarrow t_{(i+1)}^{(k)}; m_{(i)}^{(k)} \leftarrow m_{(i+1)}^{(k)}.$$

Fim.

Rotina Quatro

Início

Método da seção 4.3 para construir o sistema:

$$A^{(k)}_y \approx b^{(k)}$$

$$m^{(k)} \leftarrow m^{(k-1)} - t^{(k-1)}$$

$$n^{(k)} \leftarrow n^{(k-1)} - p^{(k-1)}$$

Fim.

Rotina Cinco

Início

Troca tipo 2 entre $I^{(k-1)}$ e $I^{(k)}_{(1)}$ obtendo um novo

H-Conjunto Minimal para $A^{(k-1)}$

Determinamos $\alpha^{(k-1)}$;

$k \leftarrow k - 1$;

Fim.

Apresentamos, agora, o algoritmo


```

Início
  k ← 1
  Rotina Zero
  Se A(1) tem posto linha total então
    α(k) = 0
    PARE
  Senão
    Início
      i ← 0
      Rotina Um
      Repita
        Rotina Tres
        Se t(k) = m(k) então
          PARE
        k ← k+1
        Rotina Quatro
        Saiu 2 ← Falso
        Repita
          Se A(k) tem posto linha completo então
            PARE
            i ← 0
            Saiu 3 ← Falso
            Repita
              Rotina um
              Determine α(k)(i)
              Se α(k)(i) ≤ α(k-1) então
                Rotina 3
                Se t(k) = m(k) então
                  PARE
                k ← k+1
                Rotina quatro
                Saiu 3 ← verdade
              Senão
                Rotina 5
                Se k = 1 então
                  Saiu 3 ← verdade
                  Saiu 2 ← verdade
            Fim se
            Até que saiu 3 ← verdade
            Até que saiu 2 ← verdade
            Até que PARE
          Fim
        Fim.

```

A cada iteração, o algoritmo aumenta o desvio do sistema de índice k e, além disso, converge para uma sequência de H-Conjuntos Minimais

$$I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(g)},$$

e para uma sequência de desvios decrescentes

$$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(g)},$$

onde cada desvio corresponde a uma solução de Chebyshev do sistema relacionado, dado por:

$$\alpha^{(k)} = \| c^{(k)} - T^{(k)} \hat{y}^{(k)} \|, \text{ com } 1 \leq k \leq g.$$

Levando em consideração essas condições, e considerando (4.16) podemos enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 4: A solução de Chebyshev para o sistema $Ax \approx b$ é dada por:

$$x^{(1)} + H^{(1)} \left[x^{(2)} + \dots + \left[x^{(g-1)} + H^{(g-1)} \left[x^{(g)} + H^{(g)} v \right] \right] \dots \right], \quad (4.31)$$

onde

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{y}^{(k)} \\ 0_{n^{(k)}} \end{bmatrix}, \quad H^{(k)} = \begin{bmatrix} -U^{(k)} \\ I_{n^{(k)}} \end{bmatrix},$$

com $1 \leq k \leq g$ e $n^{(k)} = n - p^{(1)} - p^{(2)} - \dots - p^{(k)}$; $U^{(k)} \in \mathbb{R}^{p^{(k)} \times n^{(k)}}$ é a matriz relacionada a $I^{(k)}$ e v é algum vetor do $\mathbb{R}^{n-r}$.

Temos, então que a solução é única se e somente se, o sistema for posto coluna completo. Caso contrário, é uma variedade linear, a

qual é a soma $\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$, onde:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)} \left[\mathbf{x}^{(2)} + \dots + \left[\mathbf{x}^{(g-1)} + \mathbf{H}^{(g-1)} \mathbf{x}^{(g)} \right] \dots \right] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)} \dots \mathbf{H}^{(g)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{bmatrix},$$

com $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^r$ e $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, definem completamente a solução.

4.6.2 Exemplos Numéricos.

Apresentamos agora alguns exemplos que podem ser resolvidos através do algoritmo.

EXEMPLO 1: A matriz $\mathbf{A}$ tem posto coluna completo, portanto, a solução é unicamente determinada. Se aproximarmos 1 pelos elementos do espaço $\{t, t^2\}$ no conjunto discreto $\{1, 0, -1\}$, produzimos o sistema:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \approx \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Descartamos a linha nula de $\mathbf{A}$, ou seja, a linha 2, obtendo um novo sistema $\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x} \approx \mathbf{b}^{(1)}$, onde:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinamos

$$I^{(0)} = \{ 2 \} \text{ e } \alpha^{(0)} = d^{(0)} = 1.$$

Como a matriz $A^{(1)}$ é não singular, o sistema portanto tem solução única, dada por

$$\hat{x}^t = (1, 1),$$

com $I^{(1)} = \{ 1, 3 \}$ e $\alpha^{(1)} = 0$.

Observamos que o conjunto $I^{(1)}$ não é um H-Conjunto para A.

EXEMPLO 2: Se a matriz A tem posto completo e os desvios são tais que $\alpha^{(0)} \leq \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \dots = \alpha^{(g)} = \alpha$, temos a unicidade da solução de Chebyshev. Isto acontece quando aproximamos $t_1^2 + t_2^2$ por um polinômio de grau dois no seguinte espaço $\{ 1, t_1, t_2 \}$. No conjunto $\{(0,0), (-1,0), (1,0), (0,1), (0,-1)\}$, obtemos, o sistema:

$$A x \approx b$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Aplicando o processo da seção 4.5 temos:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{LY} \end{bmatrix}$$

onde $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Escrevendo B como (4.30), temos:

$$\sigma^{(1)t} = (-1, -1, +1, +1),$$

$$\alpha^{(1)} = 0,$$

$$I^{(1)} = \{2, 3, 4, 5\},$$

logo,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Q.$$

Aplicando o procedimento do seção 4.3, obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & S & \\ & & \\ \dots & \dots & \dots \\ & & S' \end{bmatrix}.$$

Usando equação $b_{ij} - u_i^t \hat{x}^{(1)} = s_j \alpha$, vem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 0,$$

de onde segue que:

$$\mathbf{x}^{(1)t} = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})^t = (-1, 0, 0, 0, 0).$$

Portanto,

$$\|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})\| \geq \alpha^{(0)},$$

e $i=1$ entra no conjunto $I^{(1)}$.

Usando (4.22), temos, que

$$\tau^t = \left(0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

e

$$\hat{I} = \{ 4, 5 \}$$

Assim, o novo H-Conjunto Minimal é dado por $I^{(1)} = \{1, 2, 3\}$, o que acarreta

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \end{array} \right],$$

Usando o procedimento da seção 4.5 temos:

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Y & YZ \\ \hdashline LY & LYZ \end{array} \right],$$

onde $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Por (4.30), temos:

$$\sigma^{(1)t} = (-2, 1, 1) \text{ e } \alpha^{(1)} = \frac{1}{2}.$$

Utilizando a partição da seção 4.3, podemos escrever:

$$A K = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hdashline V & W-VU \end{array} \right].$$

Resolvendo o sistema $T y^{(1)} \approx c$, onde $c^t = (0, 1, 1)$ e $y^{(1)} = (x_1, x_2)$, temos:

$$y^{(1)} = \left[\frac{1}{2}, 0 \right].$$

Como $\| c - T y^{(1)} \| = \alpha^{(1)} = \frac{1}{2}$, tomamos um novo H-Conjunto Minimal $I^{(2)} = \{4, 5\}$, onde,

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } b^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

de onde vem que

$$\sigma^{(2)t} = (1, 1), \alpha^{(2)} = \frac{1}{2} \text{ e } x^{(2)t} = x_3 = 0.$$

Portanto, como

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \frac{1}{2},$$

temos a solução,

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \left[\frac{1}{2}, 0, 0 \right],$$

com o resíduo:

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

EXEMPLO 3: Para sistemas com posto coluna deficiente, a aproximação é uma variedade linear, conforme (4.32). Resolvemos o sistema:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \approx \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que exemplifica essa situação.

Resolução:

Aplicamos o procedimento da seção 4.5 para decompor a matriz $\mathbf{A}$,

produzindo:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ \hline 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Y & YZ \\ \hline -L\bar{Z} & -LY\bar{Z} \end{array} \right]$$

Escrevendo as três últimas colunas de B como combinação linear da base formada pelas duas primeiras, obtemos:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, para a última linha, temos:

$$L = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a terceira componente de L é nula, descartamos a terceira linha de B, obtendo, então, de acordo com (4.13), as matrizes:

$$I^{(1)} = \{1, 2, 4\}, \quad S = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ e } \sigma^t = (-0.01 \quad 0.01 \quad 1),$$

$$\text{onde } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo as últimas colunas de S em termos da base formada pelas duas primeiras, obtemos:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e de σ^t , obtemos o vetor sinal $s^t = (-1, 1, 1)$.

Aplicando a decomposição da seção 4.3 à matriz **A** obtemos,

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} T & & & TU \\ \hline -\bar{V} & & & \bar{W} \end{array} \right].$$

Resolvendo o sistema

$$(Q \ s) \ \hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{b},$$

$$\text{onde } (Q \ s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{y}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \alpha^{(1)} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{x}}^{(1)} =$$

obtemos

$$\hat{\mathbf{y}}^{(1)t} = \left[-\frac{8}{1.02}, -\frac{0.08}{1.02}, \frac{0.08}{1.02} \right].$$

Como

$$\| \mathbf{c} - T\hat{\mathbf{x}}^{(1)} \|_{\infty} = \frac{0.08}{1.02} = \alpha^{(1)},$$

segue que $I^{(2)} = \{ 3 \}$. Uma nova aplicação do processo da seção 4.3, resulta em um novo sistema, dado por:

$$A^{(2)} \hat{x}^{(2)} = b^{(2)},$$

onde

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } b^{(2)} = -0.2.$$

Como a matriz tem posto linha completo, temos que

$$\alpha^{(2)} = 0,$$

e uma solução para o sistema é dada por

$$\hat{x}^{(2)t} = (x_3, x_4, x_5, x_6) = (-1, 0, 0, 0).$$

Logo a solução de Chebyshev é dada por:

$$\hat{x} = \hat{x}^{(1)} + H^{(1)} \left[\hat{x}^{(2)} + H^{(2)} v \right],$$

onde $\hat{x}^{(1)}$ e $\hat{x}^{(2)}$ já foram determinados e

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} -U^{(1)} \\ I_4 \end{bmatrix} \text{ e } H^{(2)} = \begin{bmatrix} -U^{(2)} \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{1.02} \\ \frac{0.94}{1.02} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

e

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})^t = \left[\frac{0.08}{1.02}, \frac{0.08}{1.02}, 0, \frac{0.08}{1.02} \right].$$

Os exemplos aqui apresentados, são pequenos e não foram resolvidos com auxílio do computador, pois, optamos por implementar a especialização do método Simplex, como visto no Capítulo 3, ao invés de implementar o algoritmo dessa seção.

CONCLUSÕES

Vimos, neste trabalho, que o problema de determinar a solução aproximada de um Sistema Linear Inconsistente pode ser resolvido através de um problema de Programação Linear.

Em relação ao estudo de caso, Planicidade de Superfícies, verificamos que a especialização do método Simplex produz, sempre, uma solução "melhor" do que a fornecida pelo método dos Mínimos Quadrados. Além disso, ressaltamos a simplicidade de aplicação do método Simplex, a estrutura de dados do problema que nos permite economizar memória, devido ao fato de podermos gerar as linhas da matriz das restrições e a economia de tempo computacional obtida, ao selecionarmos colunas linearmente independentes associadas aos maiores valores das medições. Entretanto, o tempo computacional do método dos Mínimos Quadrados é "menor", mas levando em consideração que a solução fornecida pelo método Simplex é melhor, as diferenças entre os métodos e o tempo gasto para obter as medições ser grande, concluímos que a diferença de tempo é totalmente aceitável.

Do ponto de vista da Planicidade de Superfícies, é considerado um erro de 3% para a solução fornecida por qualquer método, devido a "Erros de Medição". Portanto, só consideramos que a solução fornecida pelo algoritmo da seção 3.5 é significativamente melhor do que a dos Mínimos Quadrados, se a diferença entre elas é de pelo menos 3%. Por isso, na seção 3.6, fizemos algumas variações nas medições feitas em [11], e observando as tabelas, podemos verificar que a condição dos 3% foi satisfeita nos exemplos de 2 à 7.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos a revisão do artigo [12], o qual explora decomposições da matriz e partições do sistema , onde fornecemos a prova de vários teoremas propostos, bem como o algoritmo do método estruturado. Ressaltamos que este algoritmo, do ponto de vista computacional, é dispendioso, devido às suas comparações de soluções e trocas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DESCLOUX, J. **Approximations in L^p and Chebyshev approximations.**
J. Siam, 11, p.1017-1026, 1963.
- [2] DURIS, C. & TEMPLE, M.G. **A finite step algorithm for determining
the strict Chebyshev solution to $Ax=b$.** Siam J. Numer. Anal.,
10, p.690-699, 1973.
- [3] FRANCELIN, A.P. **Aproximação da solução de sistemas lineares
inconsistentes na norma de Chebyshev.** ICMSC-SÃO CARLOS, 1986,
76.(Dissertação de Mestrado).
- [4] HUANG, S.T.; FAN, K.C. & WU, J.H. **A new minimum zone method for
evaluating flatness errors.** Precision Engineering, 15, p.25-32,
1993.
- [5] NOBLE, B. **A method for computing the generalized inverse of a
matriz.** SIAM J. Numer. Anal., 3, p.582-584, 1966.
- [6] OSBORNE, M.R. & WATSON, G.A. **On the best linear Chebyshev
approximation.** Comp. J., 10, p.172-177, 1967.
- [7] POWELL, M.J.D. **Approximation theory and methods.** London,
Cambrige University Press, 1981.
- [8] RICE, J.R. **Tchebycheff approximation in compact metric space.**
Bull. Amer. Math. Soc., 68, p.405-410, 1962.

- [9] RICE, J.R. **The Approximation of Functions.** Mass, Addison-Wesley, 1969.
- [10] RIGHETTO, A. **Vetores e Geometria Analitica.** Passos, Ivan Rossi, 1976.
- [11] SATO, D.P.V. & BICUDO, L.A.M.C. **Medição da Planicidade de um desempenho.** São Carlos, 1992. 20p. (Relatório-Faculdade de Engenharia-USP).
- [12] THIRAN, J.P. & THIRY, S. **Strict Chebyshev Approximation for General Systems of Linear Equations.** Numer. Math, 51, p.701-725, 1987.
- [13] WATSON, G.A. **Approximation Theory and Numerical Methods.** New York, John Wiley & Sons, 1980.