Aos meus pais José Carlos e Kátia.

Agradecimentos

Ao professor Eduardo Fontoura Costa pela excelente orientação dispendida, pelo contínuo apoio em todas as fases de realização deste trabalho, pelas discussões críticas que tanto contribuíram para o meu crescimento intelectual e pessoal, pela amizade que pude desfrutar e por constituir um exemplo de pesquisador.

Ao professor João Bosco Ribeiro do Val pela imprescindível co-orientação, pelo apoio promovendo discussões que muito enriqueceram a realização desta pesquisa e pela amizade a qual me mostrou o respeito pela minha caminhada no mundo científico.

Aos meus pais José Carlos Manfrim e Kátia Pacífico Manfrim, ao meu namorado Leonardo G. Perticarrari e às minhas irmãs Séforah M. P. Manfrim e Aline M. P. Manfrim por todo amor, compreensão, incentivo, suporte e carinho que me motivaram a prosseguir, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos professores José Silvio Govone, Mário de Castro, Marco Henrique Terra e Vilma Alves de Oliveira que tanto contribuíram para o meu crescimento intelectual e pessoal, e pela bela amizade.

Aos meus amigos, em especial, Amanda, Cibele, Daniel e Thiago pelo apoio e pela amizade que conquistamos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa concedida à este trabalho.

À todos os colegas, professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo.

Resumo

Este trabalho introduz os conceitos de controlabilidade fraca e estabilizabilidade fraca para sistemas lineares com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos a tempo discreto. É, inicialmente, construída uma coleção de matrizes $\mathbb{C}$ que se assemelha às matrizes de controlabilidade de sistemas lineares deterministicos. Essa coleção de matrizes $\mathbb{C}$ nos permite definir um conceito de controlabilidade fraca, requerendo que elas sejam de posto completo, assim como introduzir um conceito de estabilizabilidade fraca, dual ao conceito de detetabilidade fraca encontrado na literatura de sistemas com saltos de Markov. Uma característica importante do conceito de estabilizabilidade fraca é a de generalizar o conceito de estabilizabilidade na média quadrática, anteriormente encontrado na literatura.

O papel do conceito da estabilizabilidade fraca no problema de filtragem é investigado através de casos de estudo. Estes casos de estudo são desenvolvidos no contexto do filtro de Kalman com observação do parâmetro de Markov e sugerem que a estabilizabilidade fraca em conjunto com a detetabilidade na média quadrática garantem que o estimador seja estável na média quadrática.

Abstract

This work introduces weak controllability and weak stabilizability concepts for discrete-time Markov jump linear system. We introduce a collection of matrices $\mathbb{C}$ that resembles controllability matrices of deterministic linear systems. The collection of matrices $\mathbb{C}$ allows us to define a weak controllability concept by requiring that the matrices are full rank, as well as to introduce a weak stabilizability concept that is a dual of the weak detectability concept found in the literature of Markov jump systems. An important feature of the introduced concept is that it generalizes the previous concept of mean square stabilizability.

The role that the weak stabilizability concept plays in the filtering problem is investigated via case studies. These case studies are developed in the context of Kalman filtering with observation of the Markov parameter, they suggest that weak stabilizability together with mean square stabilizability ensure that the state estimator is mean square stable.

Sumário

Lista de Figuras **xiii**

Lista de Tabelas **xv**

Capítulo 1 Introdução **1**

1.1 Notações 2
1.2 Os SLSM 4
1.3 Conceitos preliminares 6
1.4 Teoria de Filtragem 9
1.5 Organização do texto 12

Capítulo 2 W-controlabilidade e W-estabilizabilidade **13**

2.1 Resultados preliminares 13
2.2 W-controlabilidade 18
2.3 W-estabilizabilidade 19
2.4 Exemplos Numéricos 20

Capítulo 3 Filtro de Kalman para os SLSM **23**

3.1 O filtro 23
3.2 Interpretação dos Resultados 36

Capítulo 4 Conclusões **39**

Apêndice A Teste da MS-estabilizabilidade **41**

Apêndice B Teste da MS-detetabilidade **43**

Apêndice C Redução da W-controlabilidade ao caso SLD **45**

Referências Bibliográficas **50**

Lista de Figuras

1.1 Quadro das dualidades 2
1.2 Representação de uma cadeia de Markov 4
1.3 Juntas do braço de um robô 5
1.4 Cálculo de $E\{\|x(k)\|^2\}$ versus sua estimativa $\overline{\|x(k)\|^2}$ 9
1.5 Representação geométrica da estimação linear ótima 11

3.1 Curvas para C_1 (MS-estabilizável e MS-detetável) 27
3.2 Curvas para C_1 ampliadas 28
3.3 Curvas para C_2 (W-estabilizável e MS-detetável) 29
3.4 Curvas para C_3 (não W-estabilizável e MS-detetável) 30
3.5 Curvas para C_4 (MS-estabilizável e W-detetável) 31
3.6 Curvas para C_5 (W-estabilizável e W-detetável) 32
3.7 Curvas para C_6 (não W-estabilizável e W-detetável) 32
3.8 Curvas para C_7 (MS-estabilizável e não W-detetável) 33
3.9 Curvas para C_8 (W-estabilizável e não W-detetável) 34
3.10 Curvas para C_9 (não W-estabilizável e não W-detetável) 34
3.11 Curvas para C_{10} (W-estabilizável e MS-detetável) 35
3.12 Curvas para C_{11} (não W-estabilizável e MS-detetável) 36

Lista de Tabelas

3.1 Resumo das características dos casos de estudo C_1 a C_{11} do FK 26
3.2 Resumo dos resultados dos casos de estudo C_1 a C_{11} do FK 36

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, inicialmente fazemos uma breve apresentação do cenário envolvendo os novos conceitos que vamos introduzir, objetivando completar o quadro de dualidade dos problemas de controle e filtragem para sistemas lineares com saltos Markovianos (SLSM). Apresentamos também, nas seções que seguem, algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho, a definição dos SLSM, alguns conceitos preliminares, tais como os de estabilidade, estabilizabilidade e detetabilidade, uma breve abordagem da teoria de filtragem e finalizamos com a organização do texto.

Como veremos em detalhe, posteriormente, os sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) são sistemas cuja dinâmica muda abruptamente, em certos instantes (denominados instantes de saltos) de tal forma que as soluções (denominadas trajetórias de estado) são aleatórias. Uma característica notável desses sistemas, em contraste com os sistemas lineares determinísticos (SLD), encontra-se no fato de que os conceitos de estabilizabilidade na média quadrática (MS-estabilizabilidade) e detetabilidade fraca (W-detetabilidade), que são adequados ao problema de controle linear quadrático (LQ), não são duais. De fato, em (Costa & do Val 2002*a*), em (Costa & do Val 2002*b*) e em (Costa, do Val & Fragoso 2005) mostra-se que o conceito de detetabilidade na média quadrática (MS-detetabilidade), dual ao conceito de MS-estabilizabilidade, é mais forte que o conceito de W-detetabilidade. Além disso, esses trabalhos fornecem um cenário completo no contexto do controle LQ que generaliza a teoria de sistemas lineares; por exemplo, tem-se que W-detetabilidade é uma condição suficiente para que o controlador LQ estabilize o sistema.

O elevado grau de maturidade dos resultados para controle de SLSM não encontra um completo paralelo na questão da filtragem. As condições encontradas na literatura que asseguram a existência e a estabilidade dos filtros são as noções de MS-estabilizabilidade e de MS-detetabilidade. Deste modo, a questão que surge naturalmente é se existe um conceito mais fraco de estabilizabilidade (W-estabilizabilidade) no problema de filtragem que generaliza a noção anterior de MS-estabilizabilidade, completando o quadro de dual-

idades, vide Figura 1.1

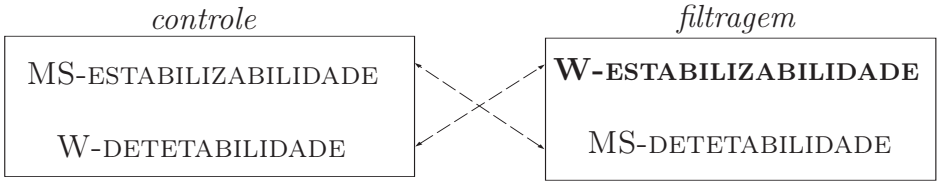

Figura 1.1: Quadro das dualidades

Resumidamente, desenvolvemos essa abordagem como segue. Inicialmente, construímos uma coleção de matrizes que tem uma analogia com as matrizes de controlabilidade usuais de SLD e ressaltamos que a dimensão dessa coleção de matrizes está relacionada às dimensões do sistema.

Baseando-nos nessa coleção de matrizes, introduzimos um conceito de W-controlabilidade, envolvendo uma condição de de posto completo, assim estendendo o conceito usual de controlabilidade no "sentido clássico" da teoria de SLD. Em seguida, introduzimos o conceito de W-estabilizabilidade e o caracterizamos em termos do conceito de MS-estabilizabilidade.

Essa caracterização nos permitirá observar que a W-estabilizabilidade é um conceito mais fraco que o de MS-estabilizabilidade e, além disso, a W-estabilizabilidade nos possibilitará analisar a relação de dualidade com a W-detetabilidade.

Na seqüência, investigamos o papel da W-estabilizabilidade no problema de filtragem através da construção de casos de estudo que empregam o filtro de Kalman (FK), quando dispomos da saída do sistema e do estado da cadeia de Markov. Esses casos de estudo sugerem que a estabilizabilidade fraca em conjunto com a detetabilidade na média quadrática garantem que o estimador seja estável na média quadrática (MS-estável).

Finalmente, ressaltamos que os resultados técnicos apresentados neste texto podem também ser encontrados, em uma versão mais sintética, em (Costa, Manfrim & do Val 2006)

1.1 Notações

Nesta seção, apresentamos as notações para referência posterior. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço linear Euclidiano de dimensão n. Sejam $\mathcal{R}^{r,n}$ (respectivamente, $\mathcal{R}^n$) o espaço linear normado formado por todas as matrizes reais de dimensão $r \times n$ (respectivamente, $n \times n$) e $\mathcal{R}^{n0}$ ($\mathcal{R}^{n+}$) o cone convexo fechado das matrizes simétricas semidefinidas positivas (o cone aberto das matrizes simétricas definidas positivas); U' denota o transposto de U, $U \geq V$ ($U > V$) significa que $U - V \in \mathcal{R}^{n0}$ ($U - V \in \mathcal{R}^{n+}$). O operador $1_{\{\cdot\}}$ representa a medida de Dirac e $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ é o operador traço.

Para $U \in \mathcal{R}^{n,q}$, $\mathcal{N}(U)$ representa o espaço nulo de U, para $U \in \mathcal{R}^n$ e $V \in \mathcal{R}^{n,r}$, $\mathcal{C}(U,V) = \left[\, V \vdots UV \vdots \cdots \vdots U^{n-1}V \,\right]$ é a matriz de controlabilidade do par (U,V). $\mathbb{I}$ denota uma matriz identidade de dimensão apropriada e $\otimes$ denota o produto de Kronecker.

Seja $\mathcal{M}^{n,q}$ o espaço linear formado por um número N de matrizes tais que $\mathcal{M}^{n,q} = \big\{U = (U_1, \ldots, U_N) : U_i \in \mathcal{R}^{n,q},\ i = 1, \ldots, N\big\}$; ainda, $\mathcal{M}^n \equiv \mathcal{M}^{n,n}$. Denota-se como $\mathcal{M}^{n0}$ ($\mathcal{M}^{n+}$) o conjunto $\mathcal{M}^n$ quando ele é constituído de $U_i \in \mathcal{R}^{n0}$ ($U_i \in \mathcal{R}^{n+}$) para todo $i = 1, \ldots N$. Define-se, também, como $U \geq V$ ($U > V$) a representação de $U_i \geq V_i$ ($U_i > V_i$), para cada $i = 1, \ldots, N$; estende-se, de forma análoga, esta representação para as outras relações matemáticas.

Para uma dada matriz $P \in \mathcal{R}^N$, introduzimos os operadores $\mathcal{E} : \mathcal{M}^{n0} \to \mathcal{M}^{n0}$; e, para $V \in \mathcal{M}^{r,n}$, $\mathcal{T}_V : \mathcal{M}^{n0} \to \mathcal{M}^{r0}$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(U) &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij} U_j \\ \mathcal{T}_{V,i}(U) &= \sum_{j=1}^{N} p_{ji} V_j U_j V_j', \quad i = 1, ..., N; \end{aligned} \tag{1.1}$$

observe que a notação em (1.1) omite a matriz P, e que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{T}$ são lineares e contínuos em seus argumentos. Denota-se $\mathcal{T}^0(U) = U$ e quando $\mathcal{T} : \mathcal{M}^{n0} \to \mathcal{M}^{n0}$ define-se $\mathcal{T}^k$ recursivamente por $\mathcal{T}^k(U) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{k-1}(U))$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 1.1. *Para exemplificar as notações, considere* $U = \big(U_1, U_2\big) \in \mathcal{M}^2$ *e* $V = \big(V_1, V_2\big) \in \mathcal{M}^{1,2}$ *assumindo os seguintes valores:*

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix};$$

considere, também, $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$. *Assim sendo, por exemplo temos:*

(i) $V' \in \mathcal{M}^{2,1}$ *é dado por* $V' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$;

(ii) $V'V > U$, *pois*

$$(V'V - U) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \tag{1.2}$$

sendo as matrizes em (1.2) *semi-definidas positivas;*

(iii) $\mathcal{T}_V(U)$ *é dado por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{V,1}(U) &= p_{11}\, V_1\, U_1\, V_1' \,+\, p_{21}\, V_2\, U_2\, V_2' \\ &= 0,5 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + 0,1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0,5 \cdot 2 + 0,1 \cdot 9 \;=\; 1,9 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{V,2}(U) &= p_{12}\, V_1\, U_1\, V_1' \;+\; p_{22}\, V_2\, U_2\, V_2' \\ &= 0,5 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + 0,9 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0,5 \cdot 2 + 0,9 \cdot 9 \;=\; 9,1.\end{aligned}$$

1.2 Os SLSM

Nas últimas décadas, diversas técnicas têm sido desenvolvidas para tratar de sistemas dinâmicos inerentemente sujeitos a mudanças em suas estruturas. Eles são freqüentemente encontrados em complexos problemas no qual as exigências de um bom desempenho devem ser respeitadas. Problemas dessa natureza, usualmente especializados para modelos particulares, apresentam graus de sucesso variado, em geral dependendo do grau de adequação do modelo (Costa 2001*b*).

Uma possível qualificação desses sistemas é a que surge quando eles sofrem alterações abruptas (saltos) em certos instantes, mas permanecem constantes nos demais instantes. Uma abordagem comum neste caso é através de modelos múltiplos chaveados, nos quais se assume que o sistema real pode ser representado por um modelo que pertence a um conjunto finito ou enumerável de possíveis modelos (também denominados modos de operação). Como referência, mencionamos (Johansen, Molengraft & Nijmeijer 2002) e os artigos nele citado.

Considere, ainda, que em cada instante há uma probabilidade de que o sistema chaveie do modo de operação em que se encontre para um outro modo, dependendo apenas do modo atual. Ou seja, os saltos nos parâmetros ocorrem de acordo com as transições de uma cadeia de Markov subjacente, como apresentado na Figura 1.2, de forma que cada estado da cadeia representa um dos possíveis modos. Assim sendo, tratam-se de sistemas estocásticos cuja dinâmica muda de forma abrupta em certos instantes e comportam-se como sistemas lineares entre os saltos. Esse é o contexto dos denominados sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM).

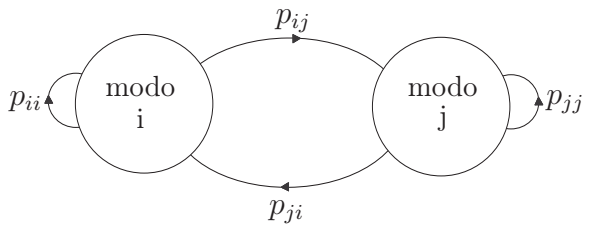

Figura 1.2: Representação de uma cadeia de Markov

Para ilustrar, consideremos os chamados manipuladores subatuados, que são sistemas

robóticos que podem possuir tanto juntas ativas quanto juntas passivas sujeitas à falhas ao executar operações críticas em ambientes onde não é conveniente ou possível executar a manutenção, como veículos espaciais, estruturas subaquáticas, ambientes expostos a agentes nocivos à saúde, etc... Quando ocorre uma falha em uma junta específica, ela se transforma em passiva e o sistema de controle posiciona o manipulador usando somente as juntas ativas restantes. Modelando cada combinação das ℓ juntas como sendo um "estado", teremos 2^ℓ estados que podem ser dados por: (1) quando todas juntas estão ativas, (2) quando as $\ell-1$ primeiras juntas estão ativas e a última está passiva, (3) quando a segunda e a terceira junta estão ativas e as demais estão passivas, e assim sucessivamente. Se a mudança entre dois estados ocorrer de acordo com uma probabilidade dependente apenas do estado atual, então podemos associar cada um dos 2^ℓ estados aos estados de uma Cadeia de Markov. Na Figura 1.3 estão representadas três juntas, assim sendo, temos 2^3 estados de Markov. De acordo com (Siqueira & Terra 2004) e (Costa, Fragoso & Marques 2005), enquanto as três juntas estão ativas, a posição do braço pode ser descrita por:

$$x(k+1) = A_1 x(k) + B_1 w(k),$$

sendo w um ruído; quando as duas primeiras juntas estão ativas e a última passiva, a posição do braço pode ser descrita por:

$$x(k+1) = A_2 x(k) + B_2 w(k),$$

e assim sucessivamente. Uma generalização deste exemplo leva à definição de SLSM que iremos empregar neste trabalho, formalizada como segue.

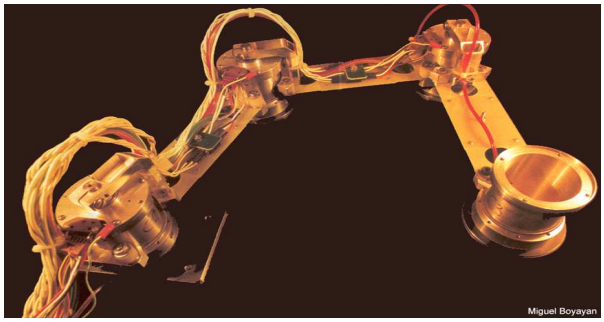

Figura 1.3: Juntas do braço de um robô [1].

Definimos um SLSM, a tempo discreto, descrito em um espaço de probabilidade apropriado dado por $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, como:

$$\Phi : \begin{cases} x(k+1) & = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} w(k), \quad x(0) \sim N(x_0, \Sigma) \\ y(k) & = C_{\theta(k)} x(k) + D_{\theta(k)} v(k), \quad \theta(0) \sim \pi_0(k) \end{cases} \tag{1.3}$$

[1]Figura cedida pelo Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) da Escola de Engenharia de São Carlos, departamento de Engenharia Elétrica, USP. Foto de Miguel Boyayan - FAPESP.

para $k = 0, 1, \ldots$, sendo o par (x, θ) o estado do sistema, com $x \in \mathbb{R}^n$ a parcela contínua e $\theta \in \mathbb{S} = \{1, \ldots, N\}$ a parcela discreta do estado; $y \in \mathbb{R}^m$ a saída do sistema; $w \in \mathbb{R}^{q_1}$ e $v(k) \in \mathbb{R}^{q_2}$ os ruídos aleatórios com distribuição $N(0, \mathbb{I})$. θ é o estado de uma cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estado finito com matriz de probabilidade de transição $P = \big[p_{ij}\big] \in \mathcal{R}^N$ tal que $p_{ij} := Pr\big(\theta(k+1) = j | (\theta(k) = i)\big)$ é a probabilidade do sistema passar do modo de operação i para j; portanto deve satisfazer-se que $p_{ij} \geq 0$ para $i, j \in \mathbb{S}$ e, para cada i, $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$. Define-se $\pi(k) = P\big(\theta(k) = i\big)$. Sempre que $\theta(k) = i$, $i = 1, \ldots, N$, assume-se que $A_{\theta(k)} = A_i \in \mathcal{R}^n$, $B_{\theta(k)} = B_i \in \mathcal{R}^{n,q_1}$, $C_{\theta(k)} = C_i \in \mathcal{R}^{m,n}$ e $D_{\theta(k)} = D_i \in \mathcal{R}^{m,q_2}$.

Neste trabalho, consideramos $A = (A_1, \ldots, A_N) \in \mathcal{M}^n$ como sendo um conjunto de matrizes conhecidas e, similarmente, estendemos essa consideração para as coleções de matrizes B, C e D. As questões relativas à inferência dos parâmetros não serão abordadas neste texto; detalhes sobre essas questões são encontradas em (Aguirre 2004), (Gevers 2005) e as referências neles citadas.

Os SLSM generalizam os SLD e, simultaneamente, apresentam resultados fortes que mimetizam suas propriedades, veja (Costa & do Val 2002*b*) e (Costa, do Val & Fragoso 2005). Há grandes possibilidades de aplicações, entre as quais mencionamos sistemas robóticos (Saridis 1983) (Siqueira & Terra 2004), modelos macroeconômicos (do Val & Basar 1999), receptores térmicos solares (Sworder & Rogers 1983) e sistemas aeronáuticos (Athans, Castanon, Dunn, Greene, Lee, Sandell & Willsky 1977).

Existem vários resultados na literatura sobre o controle de sistemas SLSM. Por exemplo, algoritmos para a solução do problema LQ usando abordagens convexas ou equações algébricas de Riccati (EARA) são encontrados em (Costa & Fragoso 1995), (Costa, do Val & Geromel 1999), (Costa & Marques 2000), (do Val & Costa 2002). Destacamos, ainda, de uma longa lista de referências: (Ji & Chizeck 1990*a*, Ji & Chizeck 1990*b*, Ji, Chizeck, Feng & Loparo 1991, Ji & Chizeck 1992), (Costa & Fragoso 1993), (Costa 1994), (Costa 1995),(Morozan 1995), (Rami & Ghaoui 1996), (Fragoso & Baczynski 2001), (Costa & do Val 2001) e (Costa, do Val & Fragoso 2005).

1.3 Conceitos preliminares

Nesta seção apresentamos as definições existentes na literatura de SLSM, tais como: MS-estabilidade, MS-estabilizabilidade, MS-detetabilidade e W-detetabilidade. Os seguintes resultados são adaptados de (Ji & Chizeck 1992, Ji et al. 1991), (Costa & Fragoso 1995), (Morozan 1995) e (Fragoso & Baczynski 2001) e referem-se a MS-estabilidade e MS-estabilizabilidade. Para simplificar a notação denotamos $E\{\cdot\} = E_{\pi_0,\Sigma}\{\cdot\}$.

Definição 1.1. *Diz-se que (A, P) é estável na média quadrática (MS-estável) se, para*

cada $x(0)$ *e* $\pi(0)$,

$$\lim_{k\to\infty} E\{\|z(k)\|^2\} = 0, \quad \forall x(0), \pi(0) \tag{1.4}$$

sendo $z(k+1) = A_{\theta(k)}z(k)$ *com* $z(0) = x(0)$, $\theta(0) \sim \pi(0)$.

A proposição seguinte, relacionada com o sistema com ruído, é similar à apresentada em (Costa & Tuesta 2004, Lemma 2.2).

Proposição 1.1. *Considere o sistema* Φ. (A, P) *é estável na média quadrática (MS-estável) se, e somente se,*

$$\lim_{k\to\infty} E\{\|x(k)\|^2\} < \infty, \quad \forall x(0), \pi(0). \tag{1.5}$$

Condições necessárias e/ou suficientes para a estabilidade de sistemas com saltos são encontradas, por exemplo, em (Ji & Chizeck 1990*b*), (Costa & Fragoso 1995), (do Val & Basar 1999) respectivamente para problemas de controle de horizonte infinito a tempo contínuo e a tempo discreto, e para horizonte retrocedente. Vale mencionar, entre as sutilezas dos SLSM, que a estabilidade de cada modo de operação (autovalores com parte real negativa ou dentro do círculo unitário, respectivamente para o caso contínuo e discreto) não é uma condição necessária nem suficiente para a MS-estabilidade do sistema, vide (Ji et al. 1991). O conceito de MS-estabilidade é equivalente a outros conceitos de segundo momento, como estabilidade estocástica exponencial, veja (Feng, Loparo, Ji & Chizeck. 1992).

Definição 1.2. *Considera-se o sistema* Φ. *Diz-se que* (A, B, P) *é estabilizável na média quadrática (MS-estabilizável) se existe uma coleção de matrizes* $K \in \mathcal{M}^{n,r}$ *tal que* $(A + BK, P)$ *seja MS-estável. Neste caso, diz-se que* K *estabiliza* (A, B, P) *no sentido MS.*

Como podemos observar em (Costa 2001*a*), o conceito de MS-estabilizabilidade é o conceito mais geral conhecido que assegura a existência de soluções para o problema LQ e para as EARA associadas.

Na seqüência, apresenta-se o conceito dual ao de MS-estabilizabilidade, a MS-detetabilidade. Ele é encontrado, por exemplo, em (Costa & Fragoso 1995), (Morozan 1995) e (Fragoso & Baczynski 2001) generalizando conceitos anteriores de detetabilidade.

Definição 1.3. *Considera-se o sistema* Φ. *Diz-se que* (A, C, P) *é detetável na média quadrática (MS-detetável) se existir um conjunto de matrizes* $L \in \mathcal{M}^{n,m}$, *tal que* $(A + LC, P)$ *seja MS-estável*

Na seqüência, apresentamos os conceitos de observabilidade fraca e detetabilidade fraca para SLSM, desenvolvido recentemente pelo orientador deste trabalho, vide (Costa & do Val 2002*b*) e (Costa & do Val 2001) para o caso discreto e (Costa & do Val 2002*a*)

para o caso a tempo contínuo. O conceito generaliza conceitos anteriores (incluindo os de observabilidade encontrados, por exemplo, em (Morozan 1995)), além de garantir que controladores ótimos LQ estabilizem o sistema.

Considere $\mathcal{O}_i(k) \in \mathcal{R}^{n0}$, com $k = 0, \ldots, n^2N$, definidas, para cada $i \in \mathbb{S}$, recursivamente por:

$$\mathcal{O}_i(k) = A_i'\mathcal{E}_i(\mathcal{O}(k-1))A_i,$$

com $\mathcal{O}_i(0) = C_i'C_i$ e $\mathbb{O} \in \mathcal{M}^{n(n^2N),n}$ definida por:

$$\mathbb{O}_i = \left[\ \mathcal{O}_i(0)\ \vdots\ \mathcal{O}_i(1)\ \vdots\ \mathcal{O}_i(2)\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ \mathcal{O}_i(n^2N-1)\ \right], \tag{1.6}$$

para cada $i \in \mathbb{S}$.

Definição 1.4. *Considere o sistema Φ. Diz-se que (A, C, P) é W-observável se $\mathbb{O}_i$ é posto completo para cada $i = 1, \ldots, N$.*

Seja a variável aleatória Γ definida por:

$$\Gamma(T) = \sum_{k=0}^{T} \psi'(k)C'_{\theta(k)}C_{\theta(k)}\psi(k) \tag{1.7}$$

com $T > 0$ e ψ a matriz de transição da parecela contínua do estado x do sistema Φ, isto é, $\psi(k) = A_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}\ldots A_{\theta(0)}$.

Definição 1.5. *Considere o sistema Φ. Diz-se que (A, C, P) é fracamente detetável (W-detetável) se,*

$$lim_{k\to\infty}E\{\|x(k)\|^2\} = 0 \quad \textit{sempre que} \quad E\{x_0'\Gamma(n^2N)x_0\} = 0$$

Proposição 1.2. *Considere o sistema Φ. Diz-se que (A, C, P) é W-detetável se, e somente se (A, $\mathbb{O}$, P) é MS-detetável.*

Em (Costa, Fragoso & Marques 2005) é definida a coleção de matrizes $\mathcal{S}(k) \in \mathcal{M}^{n0}$, que será empregada ao longo do texto, definida por:

$$S_i(k) = E\{x(k)x'(k)\ 1_{\{\theta(k)=i\}}\}, \tag{1.8}$$

para cada $i = 1\ldots, N$ e $k = 0, 1, \ldots$

Para verificar uma aplicação de alguns dos conceitos apresentados nesta seção, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2. *Seja o sistema Φ com as matrizes:*

$$\begin{gathered} A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B(1) = B(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad C(1) = C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D(1) = D(2) = 1, \quad \pi_0 = [1 \quad 0] \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Verificamos que (A, B, Σ, P) *é MS-estabilizável através do algoritmo apresentado no Apêndice A. Desenvolvemos a equação* (1.6) *e verificamos que* $\mathbb{O}_i$, $i = 1, 2$, *não tem posto completo, de forma que, pela Definição 1.4, obtivemos que* (A, C, P) *não é W-observável. Analisamos a MS-detetabilidade de* $(A, \mathbb{O}, P)$ *através do algoritmo apresentado no Apêndice B e aplicamos a Proposição 1.2, obtendo que* (A, C, P) *é W-detetável.*

Obtivemos uma estimativa para $E\{\|x(k)\|^2\}$ *através da média de* $\|x(k)\|^2$, *empregando simulação Monte Carlo com* 1000 *realizações. Para comparação, obtivemos* $S(k)$ *pelo Lema 2.1, através do que calculamos* $E\{\|x(k)\|^2\} = \mathrm{tr}(S_1(k)) + \mathrm{tr}(S_2(k))$; *os resultados são encontrados na Figura 1.4. Como era de se esperar, as curvas estão muito próximas uma da outra.*

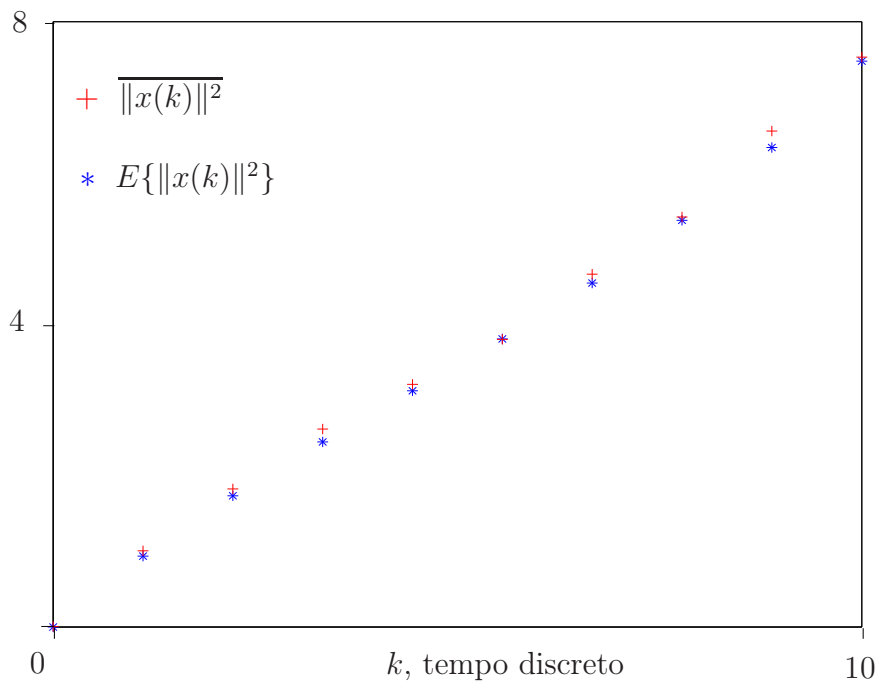

Figura 1.4: Cálculo de $E\{\|x(k)\|^2\}$ versus sua estimativa $\overline{\|x(k)\|^2}$.

1.4 Teoria de Filtragem

Nesta seção, apresentamos uma introdução bastante sucinta, sobre filtragem de sistemas para posteriormente podermos empregar a W-estabilizabilidade no FK. Indicamos (Davis & Vinter 1985), (Grewal & Andrews 1993), (Lewis 1992), (Söderström 1994) para mais detalhes.

Como detalhado em (Grewal & Andrews 1993), parece estranho que o termo filtro se aplique a um estimator, mas um filtro é um dispositivo físico que remove as frações

não desejadas das misturas. Originalmente, um filtro era somente utilizado para separar componentes não desejados de misturas gasosas, líqüidas e sólidas. Na época das válvulas eletrônicas, o termo foi aplicado aos circuitos analógicos que filtravam sinais eletrônicos. Esses sinais eram misturas entre componentes de diferentes freqüências, e esses dispositivos físicos atenuavam preferencialmente freqüências não desejadas.

A teoria de filtragem é tratada como o problema de selecionar o valor apropriado de uma variável a partir de informações disponíveis associada a esta. Este tipo de problema foi inicialmente estudado por Wiener (1942) utilizando a abordagem variacional, resultados similares foram obtidos por Kolmogorov (1941). Eles usavam as caracterizações estatísticas das distribuições de probabilidade dos sinais e dos ruídos para desenvolver uma estimativa ótima para o sinal.

Para definir o problema de filtragem, introduzimos o vetor de estado $x_k \in \mathbb{R}^n$. O modelo estocástico do estado a tempo discreto, considerando w_{k-1} um processo de seqüência ruidosa, é dado por:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1}), \tag{1.10}$$

O objetivo da filtragem é estimar x_k recursivamente por $y_k \in \mathbb{R}^m$ dado por:

$$y_k = h_k(x_k, v_k), \tag{1.11}$$

sendo v_{k-1} um processo de seqüência ruidosa e h_k conhecida. É comum assumir que as seqüências de ruído w_{k-1} e v_k possuem função de densidade de probabilidade (fdp) conhecidas e mutuamente independentes. Assume-se também que a condição inicial de estado x_0 tem fdp dada por $p(x_0)$.

Considere $\mathcal{L}_k = \{y_\ell,\ \ell = 1, \ldots, k\}$ o espaço gerado pelas obervações de y_k; o filtro estima x_k a partir de $\mathcal{L}_k$. Seja $p(x_0) \triangleq p(x_0|\mathcal{L}_0)$, em princípio, a fdp $p(x_k|\mathcal{L}_k)$ pode ser obtida recursivamente em dois estágios: por predição e por atualização.

Usando o modelo do sistema (1.10) tendo como finalidade obter a fdp $p(x_k|\mathcal{L}_k)$ no tempo k, calcula-se, primeiramente, a densidade da predição do estado no tempo k pela equação Chapman-Kolmogorov que e é dada por:

$$p(x_k|\mathcal{L}_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|\mathcal{L}_{k-1})dx_{k-1}. \tag{1.12}$$

Note que (1.12) usa o fato de $p(x_k|x_{k-1}, \mathcal{L}_{k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$ na medida em que (1.10) descreve um processo de Markov de ordem um com respeito a predição. O modelo de probabilidade da evolução do estado, $p(x_k|x_{k-1})$, é definido pela equação do sistema (1.10) e pela estatística de w_{k-1}. Com respeito ao passo de atualização, no passo k, conhecendo y_k, o estágio posterior é dado pelo anterior, envolvendo uma predição da fdp pela regra de Bayes, obtendo, após um longo desenvolvimento algébrico, que;

$$p(x_k|\mathcal{L}_k) = p(x_k|y_k, \mathcal{L}_{k-1}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|\mathcal{L}_{k-1})}{p(y_k|\mathcal{L}_{k-1})}; \tag{1.13}$$

sendo

$$p(y_k|\mathcal{L}_{k-1}) = \int p(y_k|x_k)p(x_k|\mathcal{L}_{k-1})dx_k, \tag{1.14}$$

dependendo somente da função $p(y_k|x_k)$, definida pelo modelo (1.11) e pela estatística de v_k. Em (1.13), y_k modifica a densidade anterior obtendo a densidade atual do estado (para mais detalhes, vide (Ristic, Arulampalam & Gordon 2004)).

Das relações (1.14) e (1.13), com base na solução ótima Bayesiana, a densidade $p\big(x_k|\mathcal{L}_k\big)$ possibilita uma estimativa ótima com respeito a algum critério, como, por exemplo, a estimativa de erro mínimo médio quadrático (MMQ) que estima a média condicional de x_k e é dada por:

$$\hat{x}_{k|k}^{MMQ} \triangleq E\{x_k|\mathcal{L}_k\} = \int x_k \cdot p(x_k|\mathcal{L}_k)dx_k, \tag{1.15}$$

A interpretação geométrica para $E\big\{x_k|\mathcal{F}_k\big\}$ é apresentada na Figura 1.5. As deduções e representações deste resultado quando nos restringimos aos sistemas lineares estão apresentadas em (Davis & Vinter 1985). Como ilustração de filtro MMQ, temos o filtro de

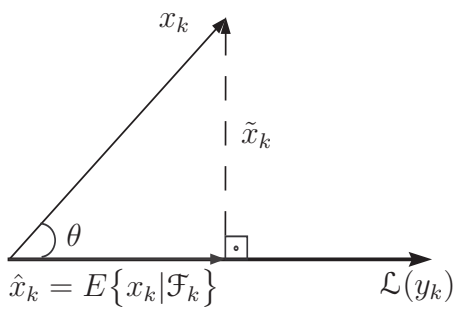

Figura 1.5: Representação geométrica da estimação linear ótima.

Wiener que é um filtro de resposta finita ao impulso, como apresentado, por exemplo, em (Grewal & Andrews 1993), (Lewis 1992).

Outro possível critério é o da estimativa máxima *a posteriori* (MAP), que é o máximo de $p\big(x_k|\mathcal{L}_k\big)$, dado por:

$$\hat{x}_{k|k}^{MAP} \triangleq \arg\max_{x_k} p(x_k|\mathcal{L}_k)dx_k. \tag{1.16}$$

Segundo (Ristic et al. 2004), a propagação recursiva da densidade *a posteriori*, obtida através de (1.14) e (1.13), é somente uma solução conceitual no sentido que, em geral, ela não pode ser determinada analiticamente.

No contexto em que (1.10) e (1.11) são funções lineares com ruído Gaussiano, ou seja, w_k e v_k têm distribuição Normal, o chamado Filtro de Kalman tem um papel muito importante, pois seu estimador é tanto MMQ quanto MAP, além de ser, também, linear;

em contrapardida ao filtro de Winer, o FK é um filtro recursivo de resposta infinita ao impulso e, além de utilizar a informação de autocorrelação do erro, sua implementação rescursiva é conveniente computacionalmente. Esse filtro será apresentado no Capítulo 3.

1.5 Organização do texto

Este texto está estruturado na forma como segue. No segundo capítulo apresentamos, inicialmente, alguns resultados preliminares essenciais na construção do conjunto de matrizes de controlabilidade para os SLSM. Apresentamos também alguns resultados associados a esse conjunto de matrizes, entre os quais destacamos uma definição de W-controlabilidade, que estabelece que um SLSM é fracamente controlável se, e somente se, cada matriz deste conjunto é de posto completo e a definição de W-estabilizabilidade. No final desse capítulo apresentamos alguns exemplos numéricos.

No Capítulo 3, apresentamos o FK. Com o objetivo de investigar condições para o bom comportamento do estimador, incluindo a questão da convergência e da estabilidade, elaboraramos nove casos de estudo, variando as características básicas do sistema. No final do capítulo apresentamos as conclusões obtidas a partir dos casos de estudo.

Capítulo 2

W-controlabilidade e W-estabilizabilidade

Neste capítulo introduzimos os conceitos de W-controlabilidade e W-estabilizabilidade para os SLSM. Inicialmente apresentamos alguns resultados preliminares, tais como a extensão do Teorema de Cayley-Hamilton para o operador linear apresentado em (1.1). Introduzimos uma coleção de matrizes $\mathbb{C}$ que se assemelha à matriz de controlabilidade de SLD e apresentamos um resultado a respeito da dimensionalidade de $\mathbb{C}$.

A partir da coleção das matrizes $\mathbb{C}$ definimos um conceito de W-controlabilidade, o qual requer que essas matrizes sejam de posto completo, e um conceito de W-estabilizabilidade, dual ao conceito de W-detetabilidade encontrado na literatura para SLSM. Uma característica importante desse conceito é que ele generaliza o conceito de MS-estabilizabilidade, como mostramos na Seção 2.3.

Posteriormente, no Capítulo 3, analisamos o papel do conceito da W-estabilizabilidade no problema de filtragem através de casos de estudo, sugerindo que ele é útil como condição para que o estimador de estado seja estável na média quadrática.

2.1 Resultados preliminares

Considere o sistema Φ. Definem-se as coleções de matrizes $S(k) \in \mathcal{M}^{n0}$, definida em (1.8), e $Q(k) \in \mathcal{M}^{n0}$:

$$\begin{aligned} S_i(k) &= E\{x(k)x'(k)\ 1_{\{\theta(k)=i\}}\}, \quad i = 1, \ldots, N; \\ Q_i(k) &= E\big\{w(k)w'(k)1_{\{\theta(k)=i\}}\big\}, \quad k = 0, 1, \ldots. \end{aligned} \tag{2.1}$$

O lema seguinte diz respeito ao cálculo de $S_i(k)$ em termos do operador $\mathcal{T}$ apresentado em (1.1). Lembramos que, para simplificar a notação, neste texto denotamos $E\{\cdot\} = E_{\pi_0,\Sigma}\{\cdot\}$.

Lema 2.1. *A seguinte afirmação vale:*

$$\begin{cases} S_i(k+1) = \mathcal{T}_{A,i}(S(k)) + \mathcal{T}_{B,i}(Q(k)), & k = 0, 1, \ldots \\ S_i(0) = \Sigma\pi_i(0), & i = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{2.2}$$

ou, equivalentemente, para $\bar{Q}(k) = \mathcal{T}_B(Q(k))$,

$$S(k) = \mathcal{T}_A^k(S(0)) + \sum_{t=0}^{k-1} \mathcal{T}_A^t(\bar{Q}(k-t)),\ k = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Demonstração. Desenvolvendo (2.1), para $k = 0$ obtem-se:

$$\begin{aligned} S_i(0) = E\{x(0)x'(0)1_{\{\theta(0)=i\}}\} =& E\{x(0)x'(0)\} \cdot E\{1_{\{\theta_0=i\}}\} \\ =& \Sigma \cdot \pi_i(0), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Para $k = 0, 1, \ldots$, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_i(k+1) =& E\big\{x(k+1)x'(k+1)1_{\{\theta(k+1)=i\}}\big\} \\ =& E\Big\{\Big(A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}w(k)\Big)\Big(A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}w(k)\Big)' 1_{\{\theta(k+1)=i\}}\Big\} \\ =& E\Big\{\Big(A_{\theta(k)}x(k)x'(k)A'_{\theta(k)}\Big)1_{\{\theta(k+1)=i\}}\Big\} \\ &+ E\Big\{\Big(B_{\theta(k)}w(k)w'(k)B'_{\theta(k)}\Big)1_{\{\theta(k+1)=i\}}\Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Do teorema da probabilidade total, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} S_i(k+1) =& \sum_{j=1}^{N} A_j E\Big\{x(k)x'(k)1_{\{\theta(k+1)=i\}}1_{\{\theta(k)=j\}}\Big\}A'_j \\ &+ \sum_{j=1}^{N} B_j E\Big\{w(k)w'(k)1_{\{\theta(k+1)=i\}}1_{\{\theta(k)=j\}}\Big\}B'_j \\ =& \sum_{j=1}^{N} p_{ji}A_j E\Big\{x(k)x'(k)1_{\{\theta(k)=j\}}\Big\}A'_j \\ &+ \sum_{j=1}^{N} p_{ji}B_j E\Big\{w(k)w'(k)1_{\{\theta(k)=j\}}\Big\}B'_j \\ =& \sum_{j=1}^{N} p_{ji}A_j S_j(k)A'_j + \sum_{j=1}^{N} p_{ji}B_j Q_j(k)B'_j \\ =& \mathcal{T}_{A,i}\big(S(k)\big) + \mathcal{T}_{B,i}(Q(k)), \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

A segunda afirmação segue diretamente da primeira, empregando (2.2) para escrever $S(k)$ em função de $S(k-1)$ e assim sucessivamente até se obter $S(k)$ em função de $S(0)$, considerando $\bar{Q}(k) = \mathcal{T}_B(Q(k))$.

□

Na seqüência, apresentam-se algumas notações e resultados preliminares para a construção, na Seção 2.2, da matriz de controlabilidade do sistema Φ. Para $V \in \mathcal{R}^n$, identificam-se as colunas de $V = [\, v_1 \vdots v_2 \vdots \ldots \vdots v_n \,]$. Para $U = \{U_1, \ldots, U_N\}$ e de (Costa &

Fragoso 1993), introduzem-se os seguintes operadores lineares e inversíveis:

$$\varphi(V) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}(U) = \begin{bmatrix} \varphi(U_1) \\ \vdots \\ \varphi(U_n) \end{bmatrix}.$$

De (Costa & Fragoso 1993, Proposição 4(a)) pode-se escrever:

$$\hat{\varphi}(\mathcal{T}_A(U)) = \mathcal{A}\,\hat{\varphi}(U), \tag{2.4}$$

sendo $\mathcal{A} \in \mathcal{R}^{n^2N}$ uma matriz definida por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} p_{11}A_1 \otimes A_1 & p_{21}A_2 \otimes A_2 & \cdots & p_{N1}A_N \otimes A_N \\ p_{21}A_1 \otimes A_1 & p_{22}A_2 \otimes A_2 & \cdots & p_{N2}A_N \otimes A_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}A_1 \otimes A_1 & p_{2N}A_2 \otimes A_2 & \cdots & p_{NN}A_N \otimes A_N \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

e $V \otimes Z$ representando o produto de Kronecker das matrizes V e Z. A representação matricial do operador $\mathcal{T}_A$ é a matriz $\mathcal{A} \in \mathcal{R}^{n^2N}$ em (2.5).

Na teoria de álgebra linear, encontra-se o amplamente conhecido Teorema de Cayley-Hamilton, vide (Chen 1999). A demonstração é omitida.

Teorema 2.1. ***(Cayley-Hamilton)*** *Seja:*

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m$$

o polinômio característico da matriz $\mathbb{A}$ de dimensão $m \times m$. Então,

$$\Delta(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^m + \alpha_1\mathbb{A}^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbb{A} + \alpha_m\mathbb{I} = 0,$$

ou seja, $\mathbb{A}^m$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\{\mathbb{I}, \mathbb{A}, \ldots, \mathbb{A}^{m-1}\}$.

O Lema que segue é uma extensão do Teorema 2.1 para o operador linear $\mathcal{T}_A$ apresentado em (1.1) através da representação matricial (2.5) do operador.

Lema 2.2. $\mathcal{T}_A^m(U) = \alpha_1\mathcal{T}_A^{n^2N-1}(U) + \ldots + \alpha_{n^2N-1}\mathcal{T}_A^1(U) + \alpha_{n^2N}\mathcal{T}_A^0(U)$, $m \geq n^2N$

Demonstração. Como $\mathcal{A} \in \mathcal{R}^{n^2N}$, do Teorema 2.1 temos que o polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$, para $m \geq n^2N$, é dado por:

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{A}) = \lambda^{n^2N} + \beta_1\lambda^{n^2N-1} + \ldots + \beta_{n^2N-1}\lambda + \beta_{n^2N},$$

com $\beta_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = 1, \ldots, n^2N$, então:

$$\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{n^2N} + \beta_1\mathcal{A}^{n^2N-1} + \ldots + \beta_{n^2N-1}\mathcal{A} + \beta_{n^2N}\mathbb{I} = 0, \tag{2.6}$$

ou seja, $\mathcal{A}^{n^2N}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\{\mathbb{I}, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}^{n^2N-1}\}$. Considere $\ell \geq 0$, assim para $m = \ell + n^2N$ temos que $\ell = m - n^2N$. Pré multiplicando (2.6) por $\mathcal{A}^\ell$ obtemos:

$$\mathcal{A}^m + \beta_1\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + \beta_{n^2N-1}\mathcal{A}^{m-n^2N+1} + \beta_{n^2N}A^{m-n^2N} = 0, \tag{2.7}$$

Aplicando o Teorema 2.1 em cada matriz $\mathcal{A}^j,\ j = m-1, \ldots, n^2N$, podemos reescrever (2.7) como segue:

$$\mathcal{A}^m + \bar{\beta}_1\mathcal{A}^{n^2N-1} + \ldots + \bar{\beta}_{n^2N-1}\mathcal{A} + \bar{\beta}_{n^2N}\mathbb{I} = 0, \tag{2.8}$$

sendo $\bar{\beta}_i$ escalares definidos em termos dos escalares β_i, para cada $i = 1, \ldots, n^2N$. Pós multiplicando (2.8) por $\hat{\varphi}(U)$ obtemos:

$$\mathcal{A}^m\hat{\varphi}(U) + \bar{\beta}_1\mathcal{A}^{n^2N-1}\hat{\varphi}(U) + \ldots + \bar{\beta}_{n^2N-1}\mathcal{A}\ \hat{\varphi}(U) + \bar{\beta}_{n^2N}\ \hat{\varphi}(U) = 0, \tag{2.9}$$

Empregando (2.4), avaliamos

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^k(U)) &= \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A(\mathcal{T}_A^{k-1}(U))) = \mathcal{A}\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^{k-1}(U)) \\ &= \mathcal{A}\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A(\mathcal{T}_A^{k-2}(U))) = \mathcal{A}\ \mathcal{A}\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^{k-2}(U)) = \mathcal{A}^2\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^{k-2}(U)) \\ &= \ldots = \mathcal{A}^k\hat{\varphi}(U),\end{aligned} \tag{2.10}$$

permitindo reescrever (2.9) como:

$$\hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^m(U)) + \bar{\beta}_1\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^{n^2N-1}(U)) + \ldots + \bar{\beta}_{n^2N-1}\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A(U)) + \bar{\beta}_{n^2N}\ \hat{\varphi}(\mathcal{T}_A^0(U) = 0$$

lembrando que $\mathcal{T}_A^0(U) = U$. Devido a invertibilidade de $\hat{\varphi}$, obtemos:

$$\mathcal{T}_A^m(U) = \alpha_1\mathcal{T}_A^{n^2N-1}(U) + \ldots + \alpha_{n^2N-1}\mathcal{T}_A(U) + \alpha_{n^2N}\mathcal{T}_A^0(U),$$

ou seja, para $\alpha_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \ldots, n^2N$, temos que $\mathcal{T}_A^m(U)$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\{\mathcal{T}_A^0(U), \mathcal{T}_A(U), \ldots, \mathcal{T}_A^{n^2N-1}(U)\}$. □

Para um inteiro positivo m, considere $\mathcal{S}(m) \in \mathcal{M}^{n,nm}$ uma coleção de matrizes definida por:

$$\mathcal{S}_i(m) = \left[\ S_i(0)\ \vdots\ S_i(1)\ \vdots\ S_i(2)\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ S_i(m)\ \right] \tag{2.11}$$

com $S(k),\ k = 0, \ldots$, dado em (2.3).

A seguir, apresentamos um resultado que permitirá limitar a dimensão da coleção de matrizes $\mathcal{S}$ com o auxílio do Lema 2.2.

Lema 2.3. *Sejam $v \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \mathbb{S}$ tais que $\mathcal{S}_i(n^2N)\mathcal{S}_i'(n^2N)\ v = 0$ então $\mathcal{S}_i(m)\mathcal{S}_i'(m)\ v = 0$, para $m \geq n^2N + 1$.*

Demonstração. A demonstração está dividida em três partes. Na Parte (i), através dos Lemas 2.1 e 2.2 escreve-se $S(m)$ em termos de $\mathcal{T}_A^0, \ldots, \mathcal{T}_A^{n^2N-1}$, como segue. Do Lema 2.1 tem-se que:

$$S(m) = \mathcal{T}_A^m(S(0)) + \mathcal{T}_A^{m-1}(\bar{Q}(k)) + \ldots + \mathcal{T}_A^1(\bar{Q}(k)) + \mathcal{T}_A^0(\bar{Q}(k)), \tag{2.12}$$

e, do Lema 2.2, escrevem-se $\mathcal{T}_A^m(S(0))$ como:

$$\mathcal{T}_A^m(S(0)) = \alpha_1 \mathcal{T}_A^{n^2N-1}(S(0)) + \ldots + \alpha_{n^2N}\mathcal{T}_A^0(S(0)), \tag{2.13}$$

com $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n^2N$, e $\mathcal{T}_A^\ell(Q)$ como:

$$\mathcal{T}_A^\ell(\bar{Q}(k)) = \beta_1^\ell \mathcal{T}_A^{n^2N-1}(\bar{Q}(k)) + \ldots + \beta_{n^2N}^\ell \mathcal{T}_A^0(\bar{Q}(k)), \tag{2.14}$$

para $\ell = n^2N, \ldots, m-1$ e $\beta_j^\ell \in \mathbb{R}$, com $j = 1, \ldots, n^2N$. Substituindo (2.13) e (2.14) em (2.12) e considerando $\bar{\beta}_j = 1 + \sum_{\ell=n^2N}^{m-1} \beta_j^\ell$, $j = 1, \ldots, n^2N$, obtém-se:

$$\begin{aligned} S(m) =& \alpha_1 \mathcal{T}_A^{n^2N-1}(S(0)) + \ldots + \alpha_{n^2N}\mathcal{T}_A^0(S(0)) + \bar{\beta}_1 \mathcal{T}_A^{n^2N-1}(\bar{Q}(k)) \\ &+ \ldots + \bar{\beta}_{n^2N}\mathcal{T}_A^0(\bar{Q}(k)), \quad m \geq n^2N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Parte (ii). Empregando (2.11) e as hipóteses do Lema obtém-se

$$v'\mathcal{S}_i(n^2N)\mathcal{S}_i'(n^2N)\, v = v'[S_i(0)S_i'(0) + \ldots + S_i(n^2N)S_i'(n^2N)]\, v = 0,$$

para $i = 1, \ldots, N$, isto é,

$$v'S_i(0)S_i'(0)\, v + \ldots + v'S_i(n^2N)S_i'(n^2N)\, v = 0.$$

Lembrando que $S_i(k) \in \mathcal{R}^{n0}$, obtém-se $v'S_i(k)S_i'(k)\, v = 0$, para $k = 0, \ldots, n^2N$ e $i = 1, \ldots, N$, assim:

$$S_i(k)\, v = 0, \quad k = 0, \ldots, n^2N, \;\; i = 1, \ldots, N. \tag{2.16}$$

Substituindo $S_i(k)$ como em (2.3) tem-se:

$$\left(\mathcal{T}_{A,i}^k(S(0)) + \mathcal{T}_{A,i}^{k-1}(\bar{Q}(k)) + \ldots + \mathcal{T}_{A,i}^0(\bar{Q}(k))\right) v = 0, \tag{2.17}$$

para $k = 0, \ldots, n^2N$ e $i \in \mathbb{S}$. Pré-multiplicando (2.17) por v' e observando que cada termo de (2.17) esta em $\mathcal{R}^{n0}$, tem-se que $v'\mathcal{T}_{A,i}^k(\cdot)\, v = 0$, $k = 0, \ldots, n^2N$ e $i \in \mathbb{S}$, obtendo:

$$\mathcal{T}_{A,i}^k(S(0))\, v = 0, \;\; k = 0, \ldots, n^2N, \; i = 1, \ldots, N \tag{2.18}$$

e

$$\mathcal{T}_{A,i}^k(\bar{Q}(k))\, v = 0, \;\; k = 0, \ldots, n^2N - 1, \; i = 1, \ldots, N. \tag{2.19}$$

Parte (iii). De (2.15), (2.18) e (2.19) obtemos:

$$S_i(m)\, v = 0, \; m \geq n^2N + 1, \; i = 1, \ldots, N. \tag{2.20}$$

Finalmente, de (2.16) e (2.20) segue que $S_i(m)\, v = 0$, $m \geq 0$, e lembrando que $S_i(m)$ é simétrica, pode-se concluir que, para $i \in \mathbb{S}$,

$$\mathcal{S}_i(m)\mathcal{S}_i'(m)\, v = 0, \quad m \geq n^2N + 1.$$

□

2.2 W-controlabilidade

Nesta seção vamos definir a coleção de matrizes de controlabilidade e os conceitos de controlabilidade fraca para SLSM, lembrando que denotamos as matrizes usuais de controlabilidade para SLD por $\mathcal{C}(A, B)$.

Considerando um SLD, é possível verificar que se todos os modos próprios do sistema são excitados por ruído aditivo (isto é, (A, B) é controlável) então a matriz de segundo momento $\mathcal{S}(k) = E\{x(k)x'(k)\}$ é tal que o posto de $\left[S(0) \vdots S(1) \vdots \cdots \vdots S(m)\right]$ é completo para algum m. Como ilustração, apresentamos o seguinte exemplo de SLD controlável (ou ainda, um SLSM com $N = 1$):

Exemplo 2.1. *Considere o sistema:*

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k);\ x(0) \sim N(0, \Sigma), \tag{2.21}$$

com $\Sigma \equiv 0$ *e* $P = 1$*, ou seja,* $\pi_0 = 1$*. Facilmente podemos verificar que*

$$\text{posto}(\mathcal{C}(A, B)) = \text{posto}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$

e, para $m = 2$*,*

$$\begin{aligned} \text{posto}(\mathcal{S}_1(2)) &= \text{posto}\Big(\left[S_1(0) \ \vdots \ S_1(1) \ \vdots \ S_1(2)\right]\Big) \\ &= \text{posto}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2. \end{aligned}$$

considerando $S_i(k)$ *como apresentado no Lema 2.1.*

Antes de estendermos a noção acima para SLSM, devemos ainda voltar nossa atenção para o seguinte aspecto. Para SLD, o primeiro termo da matriz $\mathcal{C}(A, B)$ é o termo B, que não está relacionado com a dinâmica do sistema. Contudo, na coleção de matrizes $\mathcal{S}(m) = \left[\ S(0) \ \vdots \ S(1) \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ S(m)\ \right]$ o termo relacionado com o ruido aditivo no estado aparece sempre na forma $\mathcal{T}_B(Q(k))$, a qual se relaciona com a dinâmica da cadeia. Claro que, quando se reduz ao caso degenerado com $N = 1$, a dinâmica da cadeia é trivial e a questão desaparece. Uma forma de corrigir este descompasso consiste em incorporar um termo na forma $BQ(0)B'$ na coleção de matrizes $\mathcal{S}$ ou, analogamente, somar $BQ(0)B'$ ao termo $S(0)$. Assumindo essa perspectiva, definimos $\mathbb{C} \in \mathcal{M}^{n,nm}$ como:

$$\mathbb{C}_i(m) = \left[\ S_i(0) + B_iQ_i(0)B_i' \ \vdots \ S_i(1) \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ S_i(m)\ \right]$$

e estendemos o conceito de controlabilidade para os SLSM chamando-o de controlabilidade fraca, exigindo que

$$\text{posto}\big(\mathbb{C}_i(m)\big) = \text{posto}\left(\left[\ S_i(0) + B_iQ_i(0)B_i' \ \vdots \ S_i(1) \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ S_i(m)\ \right]\right) = n, \tag{2.22}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Em similaridade com a teoria de SLD, pode-se limitar a dimensionalidade de $\mathbb{C}$ em termos das dimensões n e N sem nenhuma perda de generalidade, como segue.

Corolário 2.1. *Se* $\text{posto}(\mathbb{C}_i(n^2N)) < n$ *para cada* $i \in \mathbb{S}$*, então* $\text{posto}(\mathbb{C}_i(m)) < n$ *para* $m \geq n^2N + 1$.

Demonstração. Uma vez que $\mathbb{C}_i$ não é posto completo, para $v \in \mathbb{R}^n$ temos que $\mathbb{C}_i'(n^2N)\, v = 0$, como $\mathcal{S}_i(n^2N) \subset \mathbb{C}_i(n^2N)$ então $\mathcal{S}_i'(n^2N)\, v = 0$, e do Lema 2.3 segue que $\mathcal{S}_i(m)\mathcal{S}_i'(m)\, v = 0$ e facilmente se verifica que $\mathcal{S}_i'(m)\, v = 0$ e que $B_iQ_i(0)B_i'\, v = 0$, seguindo o resultado. $\square$

O Corolário 2.1 nos permite enunciar a seguinte definição:

Definição 2.1. *A coleção de matrizes de controlabilidade* $\mathbb{C} \in \mathcal{M}^{n,n(n^2N+1)}$ *é dada por:*

$$\mathbb{C}_i = \left[\ S_i(0) + B_iQ_i(0)B_i' \ \vdots\ S_i(1) \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ S_i(n^2N)\ \right],\ i = 1, \ldots, N. \tag{2.23}$$

A partir da construção da matriz de controlabilidade, pode-se associá-la à noção de controlabilidade fraca, que é formalizada na definição seguinte.

Definição 2.2. *Considere o sistema* Φ *e a coleção de matrizes* $\mathbb{C}$ *apresentada em* (2.23)*. Diz-se que* (A, B, Σ, P) *é W-controlável se* $\text{posto}(\mathbb{C}_i) = n$ *para cada* $i \in \mathbb{S}$.

Observação 2.1. *É uma tarefa direta certificar-se de que, quando* $N = 1$ *e* $\Sigma \equiv 0$*,* $\mathbb{C}$ *se reduz à matriz usual de controlabilidade* $\mathcal{C}(A, B)$ *de um SLD, no sentido de que seus espaços nulos são os mesmos. Vide Apêndice C para comentários adicionais . Assim, a W-controlabilidade e a W-estabilizabilidade, que iremos definir na Seção 2.3, herdam de* $\mathbb{C}$ *a propriedade de se reduzirem às noções usuais de controlabilidade e de estabilizabilidade de* (A, B) *quando os SLSM se reduzem a um SLD.*

Observação 2.2. *A dimensão da matriz de controlabilidade apresentada em (2.23) para SLSM, dada por* $n, n(n^2N+1)$*, é maior que a dimensão da matriz de observabilidade para SLSM apresentada em (1.6), dada por* $n(n^2N), n$.

2.3 W-estabilizabilidade

Com o objetivo de definir o conceito de W-estabilizabilidade para SLSM, iniciamos esta seção com uma discussão a respeito dos SLD.

Um SLD é estabilizável se as trajetórias convergirem à origem sempre que a condição inicial estiver no espaço nulo de $\mathcal{C}'(A, B)$ (isto é, o sistema é estável no espaço não controlável). Entretanto, este conceito não é diretamente testável pois, em princípio, envolveria verificar a evolução das trajetórias para todas as condições iniciais no espaço nulo de $\mathcal{C}'$.

Uma maneira de tratar a estabilizabilidade consiste em encontrar uma ação de controle estabilizante $\bar{u}$ para o sistema $x(k+1) = Ax(k) + \bar{u}$, com $\bar{u}$ ortogonal ao espaço nulo de $\mathcal{C}'$. Isto é equivalente a verificar a existência de um controle u para que o sistema $x(k+1) = Ax(k) + \mathcal{C}\mathcal{C}'u(k)$ seja estável, pois $\mathcal{C}\mathcal{C}'u$ é ortogonal ao espaço nulo de $\mathcal{C}'$ (de fato, se $v \in \mathcal{N}\{\mathcal{C}'\}$, então $v'(\mathcal{C}\mathcal{C}'u) = (\mathcal{C}'v)'(\mathcal{C}'u) = 0$). Finalmente, pode-se adotar um controle na forma $u = Lx$, sem nenhuma perda de generalidade, para obter a seguinte condição testável: um SLD é estabilizável se e somente se existir uma matriz L, de dimensão apropriada, tal que a matriz $A + \mathcal{C}\mathcal{C}'L$ seja estável. Ou seja, (A, B) é estabilizável se, e somente se, $(A, \mathcal{C}\mathcal{C}')$ for estabilizável; esta é a condição testável de estabilizabilidade que é conveniente para ser estendida para os SLSM.

Definição 2.3. *Considere o sistema Φ. Diz-se que (A, B, Σ, P) é fracamente estabilizável (W-estabilizável) se $(A, \mathbb{C}\mathbb{C}', P)$ é MS-estabilizável.*

Os próximos resultados seguem diretamente da Definição 2.3 e do fato de que $\mathcal{N}(\mathbb{C}\mathbb{C}') \subset \mathcal{N}(B)$, mesmo com $\Sigma \equiv 0$.

Lema 2.4. *Assumindo que (A, B, P) seja MS-estabilizável, então tanto (A, B, Σ, P) quanto $(A, B, \Sigma \equiv 0, P)$ são W-estabilizáveis.*

Observação 2.3. *A Definição 2.3 nos permite verificar a W-estabilizabilidade a partir de um teste de MS-estabilizabilidade (veja por exemplo, (Costa & do Val 2002b, Proposition 2 e Remark 4)). No Apêndice A é apresentado um algoritmo para essa verificação.*

Observação 2.4. *Considere o sistema Φ com $\Sigma \equiv 0$, estabelecendo um cenário exatamente dual ao apresentado em (Costa & do Val 2002b, Remark 3), em que não se considera a matriz de custo terminal no funcional de custo, é estabelecido um teste da W-detetabilidade de (A, C, P) como segue:*

$$(A, \mathbb{O}'\mathbb{O}, P)\,\textit{MS-detetável} \Leftrightarrow (A, C, P)\,\textit{W-detetável},$$

determinando um dual com a Definição 2.3, em que:

$$(A, \mathbb{C}\mathbb{C}', P)\,\textit{MS-estabilizável} \Leftrightarrow (A, B, \Sigma, P)\,\textit{W-estabilizável}.$$

Desta forma, completamos o quadro de dualidades apresentado na Figura 1.1.

2.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, apresentamos exemplos ilustrativos de sistemas que são MS-estabilizável, estritamente W-estabilizável ou nenhum deles, com o objetivo de observar as propriedades

qualitativas do sistema envolvidas em cada conceito, a partir de exemplos. Consideramos combinações simples de valores para os parâmetros α e ρ no sistema Φ com $n = 3$ e $N = 2$,

$$\begin{gathered} A(1) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A(2) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ \alpha & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \rho & 1-\rho \\ \rho & 1-\rho \end{bmatrix}, \\ B(1) = B(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad C(1) = C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D(1) = D(2) = 1, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma \equiv 0. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Sempre que $\Sigma \equiv 0$, denotaremos (A, B, Σ, P) por (A, B, P).

Exemplo 2.2. *Neste exemplo consideramos $\alpha = 0,1$ e $\rho = 0,1$. As matrizes de controlabilidade não são de posto completo; de fato,*

$$\mathbb{C}_1\mathbb{C}_1' = \begin{bmatrix} 1,70 & 0,37 & 0 \\ 0,37 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{C}_2\mathbb{C}_2' = \begin{bmatrix} 56,79 & 30,35 & 0 \\ 30,35 & 16,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

e, pela Definição 2.2, (A, B, P) não é W-controlável. Empregando a condição testável apresentada no Apêndice A, temos que (A, B, P) é MS-estabilizável, assim sendo, pelo Lema 2.4 (A, B, P) é W-estabilizável.

Exemplo 2.3. *Neste exemplo consideramos $\alpha = 0,1$ e $\rho = 0,9$, ou seja, mudamos apenas a matriz da probabilidade do Exemplo 2.2 objetivando aumentar o tempo de ocupação do sistema no modo instável $\theta = 1$. Nessa situação, temos que o sistema não é MS-estabilizável mas é W-estabilizável. Isto é, (A, B, P) é estritamente W-estabilizável.*

$$\mathbb{C}_1\mathbb{C}_1' = \begin{bmatrix} 26,27 & 3,33 & 0 \\ 3,33 & 0,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{C}_2\mathbb{C}_2' = \begin{bmatrix} 0,31 & 0,04 & 0 \\ 0,04 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Note que, mesmo com a mudança no parâmetro ρ, não houve alteração na estrutura das matrizes de controlabilidade e que concentrando a probabilidade no modo instável perdemos a MS-estabilizabilidade do sistema, mas nem por isso deixamos de garantir a W-estabilizabilidade deste sistema.

Exemplo 2.4. *Neste exemplo consideramos $\alpha = 0$ e $\rho = 0,9$. Nos exemplos anteriores, o parâmetro $\alpha \neq 0$ era responsável por espalhar o ruído; aqui, podemos observar que com $\alpha = 0$ os espaços nulos de $\mathbb{C}_i$ em (2.26) estão contidos nos espaços nulos de $\mathbb{C}_i$ (2.27) como segue:*

$$\mathbb{C}_1\mathbb{C}_1' = \begin{bmatrix} 22,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{C}_2\mathbb{C}_2' = \begin{bmatrix} 0,26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

A ausência do ruído no espaço gerado por $[0 \quad 1 \quad 0]'$, juntamente com a grande permanência no modo $\theta = 1$, com a matriz A_1 apresentando um autovalor fora do círculo

unitário (no plano complexo) com o autovetor associado $[0 \quad 1 \quad 0]'$*, conduzem à perda da W-estabilizabilidade. Realmente, empregando a condição testável no Apêndice A, nos certificamos de que o sistema não é nem MS-estabilizável e nem W-estabilizável.*

Capítulo 3

Filtro de Kalman para os SLSM

Grewal & Andrews (1993) consideram o FK uma das maiores invenções da história da teoria de estimação estatística, e possivelmente a maior invenção do século XX. A partir dele, muitas coisas que não poderiam ser feitas foram executadas; suas aplicações mais imediatas foram para o monitoramento de sistemas dinâmicos complexos tais como processos contínuos encontrados em manufatura, em aviação, entre outros. Para essas aplicações, não é sempre possível ou desejável medir cada variável que se quer monitorar. (Grewal & Andrews 1993).

Como apresentamos no Seção 1.4, o FK é ótimo por apresentar um estimador tanto MMQ quanto MAP, além de ser, também, linear e recursivo de resposta infinita ao impulso. Uma característica do FK é a de estimar $x(k)$ a partir da informação disponível, por exemplo $\mathcal{L}_m = \{y(0), y(1), \ldots, y(m)\}$, havendo, assim, três casos possíveis: suavização quando $k < m$, sendo $\hat{x}_{k|m} = E\{x(k)|\mathcal{F}_m\}$; filtragem quando $k = m$, sendo $\hat{x}_{k|k} = E\{x(k)|\mathcal{F}_k\}$ ou predição quando $k > m$, sendo $\hat{x}_{k|m} = E\{x(k)|\mathcal{F}_m\}$.

Neste capítulo, consideramos a predição com um passo, ou seja, $\hat{x}_{k+1|k}$, mas ressaltamos que resultados análogos são esperados para suavização e filtragem. Na seqüência, apresentamos a formalização desse filtro, antecipando o resultado de que o FK para os SLSM, com a observação dos estados θ de Markov, é equivalente ao FK para sistemas lineares variantes no tempo como apresentado em (Costa & Tuesta 2004) e (Ji & Chizeck 1990*b*).

3.1 O filtro

A formalização do FK no contexto deste trabalho é abordado como segue. Considere novamente o sistema Φ apresentado em (1.2),

$$\Phi : \begin{cases} x(k+1) & = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}w(k), \quad x(0) \sim (x_0, \Sigma) \\ y(k) & = C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}v(k), \quad \theta(0) \sim \pi_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

para $k = 0, 1, \ldots$, com as hipóteses de que os ruídos não são correlacionados entre si e com o sistema ou, mais precisamente:

- $E\{w_k\} = 0$ e $E\big\{(w_k w_k')\big\} = \mathbb{I}$, ou seja, w_k tem média zero e matriz de covariância igual a $\mathbb{I}$, com dimensão apropriada;
- $E\big\{(w_k w_j')\big\} = 0,\ k \neq j$, ou seja, w_k é descorrelacionado com w_j, para todo $k \neq j$;
- $E\big\{(x_k w_k')\big\} = 0,\ k \geq 0$, ou seja, o estado x_k é descorrelacionado com o ruído w_k para todo $k \geq 0$;
- $E\big\{(w_k v_k')\big\} = 0\ k \geq 0$, ou seja, os ruídos w_k e v_k, são descorrelacionados para todo $k \geq 0$;
- $E\{v_k\} = 0$ e $E\big\{(v_k v_k')\big\} = \mathbb{I}$, ou seja, v_k tem média zero e matriz de covariância igual a R, com dimensão apropriada;
- $E\big\{(v_k v_j')\big\} = 0$, ou seja, v_k é descorrelacionado com v_j, para todo $k \neq j$);
- $E\big\{(x_k v_k')\big\} = 0,\ k \geq 0$, ou seja, o estado x_k é descorrelacionado com o ruído v_k para todo $k \geq 0$.

Assumimos no instante k que conhecemos $\mathcal{F}_k = [y(0), \theta(0), y(1), \theta(1), ..., y(k), \theta(k)]$, ou seja, as observações do estado de Markov e a saída do sistema até o instante presente. Como descrito em (Costa & Tuesta 2004) e (Ji & Chizeck 1990*b*), do sistema Φ com as afirmações apresentadas anteriormente, para $k = 0, 1, \ldots$, a estimativa ótima

$$\hat{x}(k) = E\{x(k)|\mathcal{F}_{k-1}\}$$

é dada por:

$$\hat{x}(k+1) = A_{\theta(k)}\hat{x}(k) + L(k)[y(k) - C_{\theta(k)}\hat{x}(k)], \tag{3.2}$$

com condição inicial $\hat{x}(0) = x_0$. A matriz de ganho $L(k) \in \mathcal{R}^{n,m}$ é dada por:

$$\begin{aligned} L(k) =& A_{\theta(k)}H(k)C'_{\theta(k)} \\ &\times [C_{\theta(k)}H(k)C'_{\theta(k)} + D_{\theta(k)}R(k)D'_{\theta(k)}]^{-1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$H(k)$ é a matriz de covariância do erro dada por:

$$H(k) = E\left\{\big(x(k) - \hat{x}(k)\big)\big(x(k) - \hat{x}(k)\big)'|\mathcal{F}_k\right\}. \tag{3.4}$$

$H(k)$ satisfaz a equação recursiva de Riccati:

$$\begin{aligned} H(k+1) =& A_{\theta(k)}\Big[H(k) - H(k)C'_{\theta(k)} \\ &\times \big(C_{\theta(k)}H(k)C'_{\theta(k)} + D_{\theta(k)}R(k)D'_{\theta(k)}\big)^{-1} \\ &\times C_{\theta(k)}H(k)\Big]A'_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}B'_{\theta(k)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

considerando $H(0) = \Sigma$.

O erro de estimação $\tilde{x}$ é dado por:

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k), \tag{3.6}$$

assim sendo,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) =& \big(A_{\theta(k)} - L(k)C_{\theta(k)}\big)\tilde{x}(k) \\ &+ B_{\theta(k)}w(k) - L(k)D_{\theta(k)}v(k).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observação 3.1. *Pode-se notar que a formulação do filtro descrito por (3.2)-(3.5) é absolutamente equivalente à formulação de predição de um passo para os sistemas lineares variantes no tempo, como apresentado em (Davis & Vinter 1985). As formulações para suavização e filtragem também coincidem, o que é razoável já que, no instante atual k, os valores assumidos por θ no intervalo $[0, k]$ são conhecidos.*

Observação 3.2. *Note através de* (3.5) *que $H(k)$, e conseqüentemente $L(k)$, dependem de $\{\theta(0), \ldots, \theta(k-1)\}$. Assim, $H(k)$ e $L(k)$ formam processos estocásticos cujas realizações dependem das de θ.*

Considere (3.2) reescrita como:

$$\hat{x}(k+1) = \big(A_{\theta(k)} - L(k)C_{\theta(k)}\big)\hat{x}(k) + L(k)y(k). \tag{3.8}$$

Claramente, a questão da estabilidade do FK consiste em verificar a MS-estabilidade de $\big(A_{\theta(k)} - L(k)C_{\theta(k)}, P\big)$. Contudo, há testes disponíveis na literatura apenas para ganhos na forma $L_{\theta(k)}$, o que não é o caso aqui, vide Observação 3.2. Uma forma de verificar a estabilidade consiste em realizar simluações de Monte Carlo para inferir se $E_{\Sigma,\pi(0)}\{\hat{x}(k)\}$ converge; porém, o termo exógeno $L(k)y(k)$ em (3.8) interfere no resultado, se o sistema original Φ não for MS-estável. Com objetivo de eliminar esta interferência, pode-se equivalentemente fazer simulações de Monte Carlo para o erro de estimação $\tilde{x}$ dado em (3.7). Finalmente, é fundamental entender que investigar a estabilidade de (3.7) envolve variar as condições iniciais em $\tilde{x}$. Para isto, nas simulações forçamos $\tilde{x}(0) \sim N(0, \Sigma + \delta\mathbb{I})$. De fato, se preservássemos $\tilde{x}(0) \sim N(0, \Sigma)$ conforme o cálculo teórico de $\tilde{x}(0)$, poderiamos ter "modos" instáveis não excitados, portanto sem reflexos na simulação.

Exemplo 3.1. *Considere o sistema Φ com: $A_1 = 0,5$, $A_2 = 2$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1$, $P = \mathbb{I}$, $\Sigma = 0$, $\pi(0) = \begin{bmatrix}0,5 & 0,5\end{bmatrix}$ e $C_1 = C_2 = 1$. Da definição, temos que (A, B, P) é W-estabilizável. Uma simulação de Monte Carlo baseada em 1.000 realizações de* (3.7)*, assumindo $\tilde{x}(0) \sim N(0, 10^{-5}\mathbb{I})$, sugere que $E\big\{\tilde{x}(k)\big\}$ é convergente e, portanto, que o filtro é MS-estável.*

Até este momento, consideramos variações em $x(0)$. Uma variação semelhante em θ não é pertinente, pois levaria a um FK diferente; uma ilustração é dada a seguir.

Exemplo 3.2. *Seja o sistema do Exemplo 3.1, agora com* $\pi(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$*; recordamos que (A,B,P) é W-estabilizável. Neste exemplo, em que* $P = \mathbb{I}$*, há apenas uma realização* $\theta(k) = 1$*,* $k = 0, 1, \ldots$ *com probabilidade um, levando a uma única realização para* $L(k)$ *e, no limite, a um ganho estacionário* $L^\infty = \lim_{k\to\infty} L(k) = 0$*. O valor inferido de* $E\{\tilde{x}(k)\}$ *resultou convergente.*

Seja agora $\pi(0) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$*, levando a uma variação em* $\theta(0)$*. Como resultado, tem-se outro FK com dinâmica diferente; realmente, o ganho estacionário agora foi* $L^\infty = 1,62$*, e uma vez mais* $E\{\tilde{x}(k)\}$ *resultou convergente, em sintonia com o que se espera de um sistema W-estabilizável.*

Em contraponto, se adotássemos $L^\infty = 0$ *obtido anteriormente como um ganho fixo, teríamos* $E\{\tilde{x}(k)\}$ *divergente. De fato, o conceito de W-estabilizabilidade neste artigo está ajustado para o FK em estudo (que observa* θ*), e não serve como condição para estabilidade de filtros com ganhos estacionários/independentes de* π*.*

Na seqüência apresentamos casos de estudo variando as características básicas do sistema Φ, tais como a MS-estabilizabilidade, a W-estabilizabilidade, a MS-detetabilidade e a W-detetabilidade. Para cada um destes casos, analisamos a estabilidade do filtro obtido através dos processos do erro $\tilde{x}$ e da covariância do erro H (vide Observação 3.2 em termos de valor esperado dados por $E\{||\tilde{x}(k)||^2|\mathcal{F}_0\}$ e $E\{H(k)|\mathcal{F}_0\}$, respectivamente).

Para o cálculo da estimativa da $E\{\tilde{x}(k)|\mathcal{F}_0\}$ e da estimativa da $E\{H(k)|\mathcal{F}_0\}$ empregamos a simulação Monte Carlo com 5.000 realizações, assumindo a condição inicial $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_e \sim N(0, \Sigma_e)$, $\Sigma_e = 10^{-6}\mathbb{I}$. Desenvolvemos um total de onze casos de estudo, cujas características estão apresentadas na Tabela 3.1. Nos nove primeiros casos ($C_1 - C_9$) consideramos a matriz $\Sigma = 0$ e os vetores B_1 e B_2 não nulos, enquanto que nos casos C_{10} e C_{11} assumimos a matriz Σ não nula e os vetores $B_1 = B_2 = 0$. Ressaltamos que os casos $C_1 - C_3$ apresentam o mesmo sistema dos exemplos 2.2 - 2.4, respectivamente. Os dados

Tabela 3.1: Resumo das características dos casos de estudo C_1 a C_{11} do FK.

(A, B, Σ, P) / (A, C, P)	MS-estabilizável, então W-estabilizável	W-estabilizável	n. a.
MS-detetável	C_1	C_2 e C_{10}	C_3 e C_{11}
W-detetável	C_4	C_5	C_6
n. a.	C_7	C_8	C_9

Observação: consideramos "n. a." a abreviação para "nenhuma das anteriores".

que não são modificados em cada caso de estudo são dados por:

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = 1, \quad x_0 = 0, \quad \text{e} \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

As coleções de matrizes $A = \big(A_1, A_2\big) \in \mathcal{M}^3$ e $B = \big(B_1, B_2\big) \in \mathcal{M}^{3,1}$, e as matrizes $P \in \mathcal{R}^2$, $\Sigma \in \mathcal{R}^3$ serão apresentadas em cada caso de estudo. Ressaltamos que os parâmetros que podem sofrer alterações de um caso de estudo para outro são apresentados em itálico.

Com o objetivo de analisar $E\big\{x(k)|\mathcal{F}_k\big\}$ e $E\big\{H(k)|\mathcal{F}_k\big\}$, implementamos o FK para cada caso de estudo, e traçamos as curvas de $E\big\{||\tilde{x}(k)||^2|\mathcal{F}_0\big\}$ e $E\big\{\mathrm{tr}\big(H(k)\big)|\mathcal{F}_0\big\}$, respectivamente.

Caso $\mathbf{C}_1$: (A, B, P) MS-estabilizável e (A, C, P) MS-detetável (sistema como no Exemplo 2.2)

Em C_1 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & \mathit{0,1} & 0 \\ \mathit{0} & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & \mathit{0,1} & 0 \\ \mathit{0,1} & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \mathit{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathit{0,1} & \mathit{0,9} \\ \mathit{0,1} & \mathit{0,9} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \mathit{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

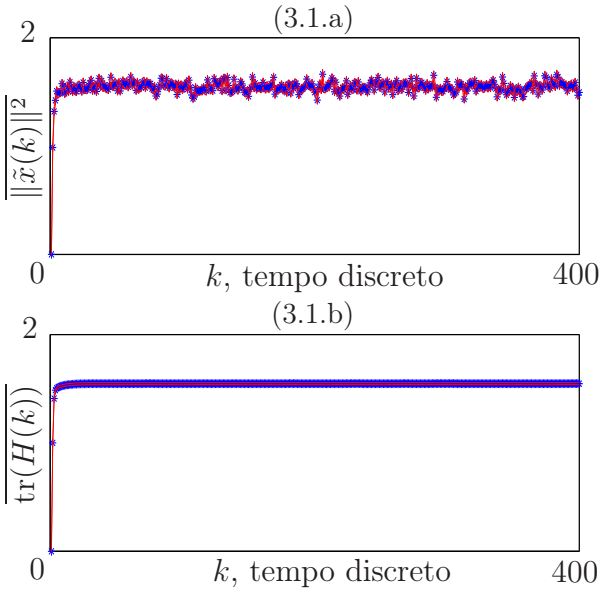

Figura 3.1: Curvas para C_1 (MS-estabilizável e MS-detetável).

Na Figura 3.1 a curva (3.1.a) representa uma estimativa para $E\{\| \tilde{x}(k) \|^2 |\mathcal{F}_0\}$ e, como podemos vizualizar, essa estimativa é limitada, sugerindo que o filtro seja MS-estável, veja Proposição 1.1. A curva (3.1.b) representa uma estimativa para $E\{\mathrm{tr}(H(k)) \,|\, \mathcal{F}_0\}$, sugerindo que a matriz de covariância do erro de estimação converge para uma solução estacionária $\mathbb{H}$.

Ampliando as curvas da Figura 3.1, obtemos:

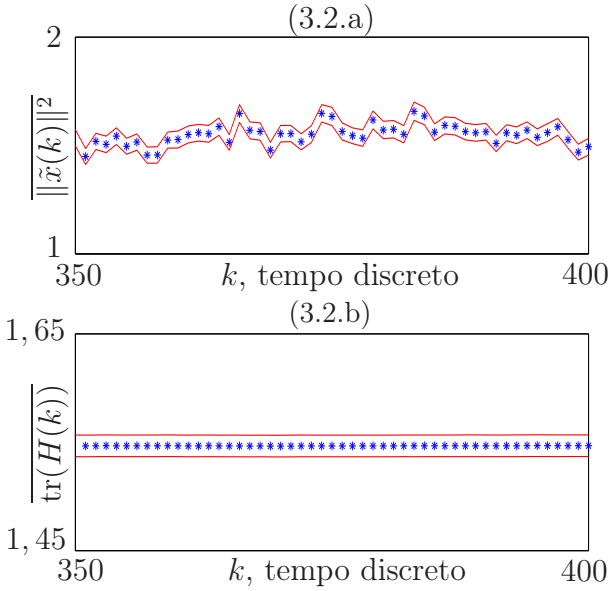

Figura 3.2: Curvas para C_1 ampliadas.

Esses resultados são, de certa forma, esperados, levando em consideração que no contexto de controle, dual ao de filtragem, MS-estabilizabilidade e MS-detetabilidade são condições suficientes para obter um controle estabilizante, como estabelecido, por exemplo, em (Costa & Fragoso 1995).

Caso $\mathbf{C_2}$: (A, B, P) W-estabilizável e (A, C, P) MS-detetável (sistema como no Exemplo 2.3)

Em C_2 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_1, modificamos apenas a matriz P, fazendo com o sistema tenha uma permanência maior no modo instável.

Analogamente a C_1, temos que, a partir da Figura 3.3, a estimativa para $E\{\|\tilde{x}(k)\|^2|\mathcal{F}_0\}$ é limitada, sugerindo que o filtro seja MS-estável, veja Proposição 1.1; e a estimativa para $E\{\mathrm{tr}(H(k))|\mathcal{F}_0\}$ sugere que a matriz de covariância do erro de estimação converge uma solução estacionária $\mathbb{H}$.

Nesse caso de estudo podemos verificar uma novidade no cenário de filtragem: enfraquecemos a MS-estabilizabilidade para W-estabilizabilidade e, ainda assim, obtivemos

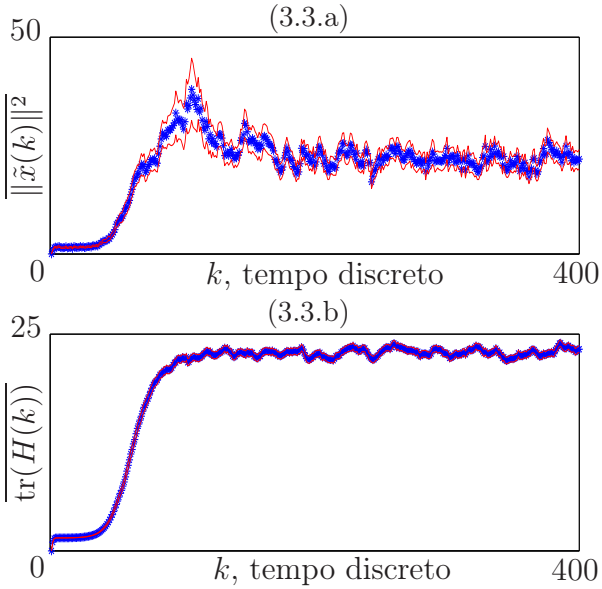

Figura 3.3: Curvas para C_2 (W-estabilizável e MS-detetável).

um filtro MS-estável.

Caso $\mathbf{C}_3$: (A, B, P) não W-estabilizável e (A, C, P) MS-detetável (como no Exemplo 2.4)

Em C_3 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com o C_2, modificamos apenas um parâmetro da matriz A_2. A curva da Figura (3.4.a), sugere claramente que a estimativa para $E\{\|\tilde{x}(k)\|^2|\mathcal{F}_0\}$ não é limitada, assim sendo, aplicando a Proposição 1.1 concluímos que o filtro não é estável. No entanto, pela curva da Figura (3.4.b), assim como em C_1 e C_2, a estimativa para $E\{\mathrm{tr}(H(k))|\mathcal{F}_0\}$ converge para uma solução estacionária $\mathbb{H}$.

Esse caso de estudo é muito interessante, pois temos a convergência da matriz de covariância do erro (acreditamos que seja devido a MS-detetabilidade do sistema) mas o filtro é instável. Assim sendo, fica clara a idéia de que não basta analisar somente a convergência da matriz de covariância do erro, ou, analogamente, verificar somente a MS-detetabilidade do sistema.

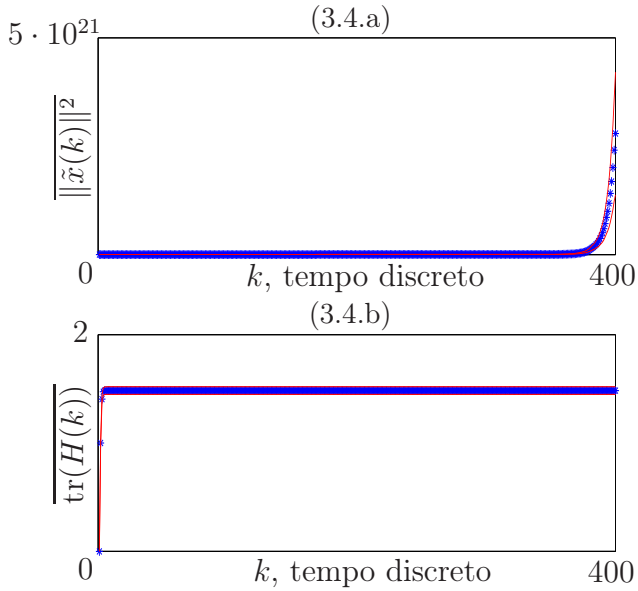

Figura 3.4: Curvas para C_3 (não W-estabilizável e MS-detetável).

Caso $\mathbf{C}_4$: (A, B, P) MS-estabilizável e (A, C, P) W-detetável

Em C_4 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_1, modificamos as matriz A_1 e P.

Como podemos observar na Figura (3.5.a), a estimativa para $E\{\|\tilde{x}(k)\|^2|\mathcal{F}_0\}$ não é limitada, o que nos sugere que o filtro não seja estável, veja Proposição 1.1. Assim como em C_3, a estimativa para $E\{\mathrm{tr}(H(k))|\mathcal{F}_0\}$ sugere que a matriz de covariância do erro de estimação não converge para uma solução estacionária $\mathbb{H}$.

Nesse caso de estudo, enfraquecemos a MS-detetabilidade para W-detetabilidade e concentrando a matriz de probabilidade no modo instável. A instabilidade do filtro era esperada, pois através de (3.7) temos que a dinâmica do erro de $x(k)$ é dada por $\big(A_{\theta(k)} - L(k)C_{\theta(k)}\big)$ e, recordando a Definição 1.3, se o sistema não é MS-detetável então não existe um ganho K tal que $\big(A - KC\big)$ seja MS-estável.

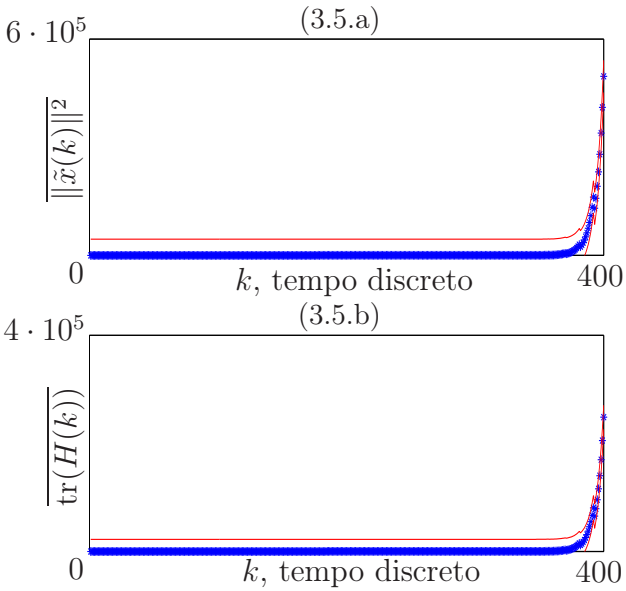

Figura 3.5: Curvas para C_4 (MS-estabilizável e W-detetável).

Caso $\mathbf{C}_5$: (A, B, P) W-estabilizável e (A, C, P) W-detetável

Em C_5 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_2, modificamos apenas um parâmetro da matriz A_1. Tanto os resultados obtidos na Figura 3.6, como as interpretações, são análogos ao C_4.

Caso $\mathbf{C}_6$: (A, B, P) não W-estabilizável e (A, C, P) W-detetável

Em C_6 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_3, modificamos apenas um parâmetro da matriz A_1.

Nesse caso de estudo temos o resultado e a interpretação semelhante ao obtido em C_3.

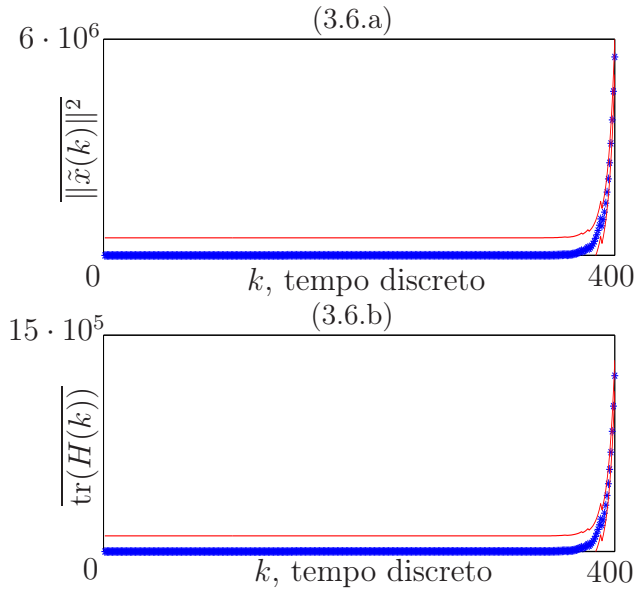

Figura 3.6: Curvas para C_5 (W-estabilizável e W-detetável).

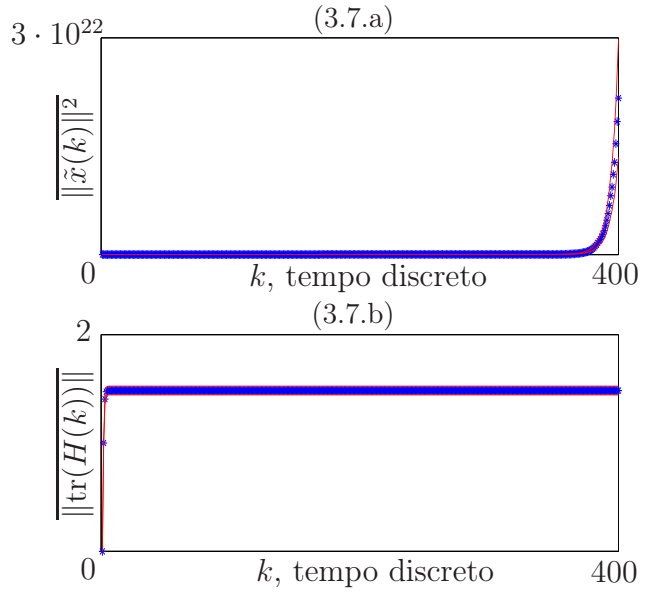

Figura 3.7: Curvas para C_6 (não W-estabilizável e W-detetável).

Caso $\mathbf{C_7}$: (A, B, P) MS-estabilizável e (A, C, P) não W-detetável

Em C_7 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_1, modificamos as matrizes A_1, A_2 e P. Tanto os

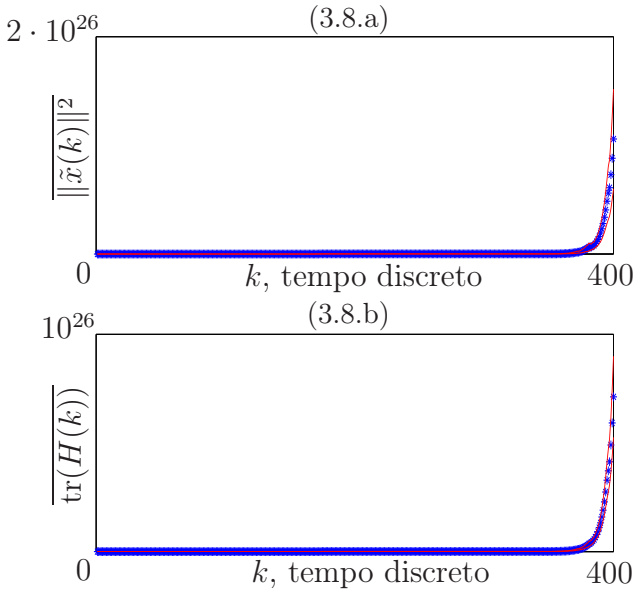

Figura 3.8: Curvas para C_7 (MS-estabilizável e não W-detetável).

resultados obtidos na Figura 3.8, como as interpretações, são análogos a C_4.

Caso $\mathbf{C_8}$: (A, B, P) W-estabilizável e (A, C, P) não W-detetável
Em C_8 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_2, modificamos as matrizes A_1 e A_2. Tanto os resultados obtidos na Figura 3.9, como as interpretações, são análogos a C_4.

Caso $\mathbf{C_9}$: (A, B, P) não W-estabilizável e (A, C, P) não W-detetável
Em C_9 consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

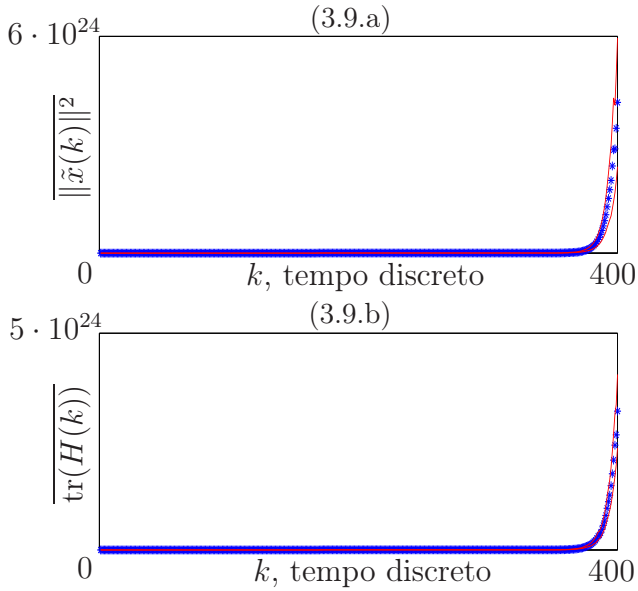

Figura 3.9: Curvas para C_8 (W-estabilizável e não W-detetável).

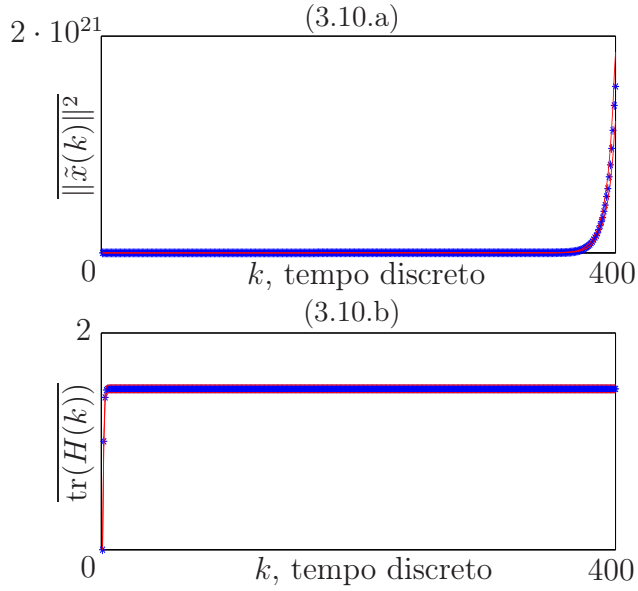

Figura 3.10: Curvas para C_9 (não W-estabilizável e não W-detetável).

Observe que, em comparação com C_3, modificamos as matrizes A_1 e A_2. Tanto os resultados obtidos na Figura 3.10, como as interpretações, são análogos a C_3.

Caso $\mathbf{C}_{10}$: (A, B, P) W-estabilizável e (A, C, P) W-detetável
Em C_{10} consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & \mathit{0,1} & 0 \\ \mathit{0} & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & \mathit{0,1} & 0 \\ \mathit{0,1} & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \mathit{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_2, nesse caso de estudo as alteração ocorrem na matriz B e na matriz Σ. Assim como a interpretação obtida em C_2, temos que, a partir da Figura

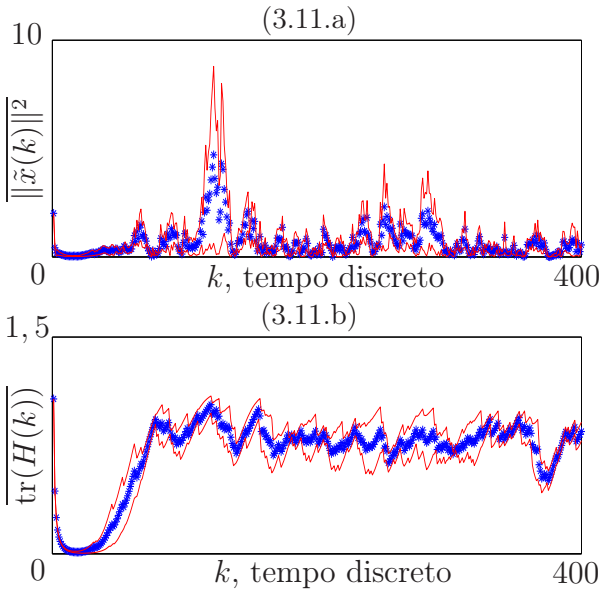

Figura 3.11: Curvas para C_{10} (W-estabilizável e MS-detetável).

3.11, a estimativa da $E\{\|\tilde{x}(k)\|^2|\mathcal{F}_0\}$ é limitada, sugerindo que o filtro seja MS-estável, veja Proposição 1.1; e que a estimativa da $E\{\mathrm{tr}(H(k))|\mathcal{F}_0\}$ converge para uma solução estacionária $\mathbb{H}$.

Caso $\mathbf{C}_{11}$: (A, B, P) não W-estabilizável e (A, C, P) MS-detetável

Em C_{11} consideramos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, em comparação com C_3, nesse caso de estudo as alteração ocorrem na matriz B e na matriz Σ. Nesse caso de estudo, assim como a interpretação obtida em C_3, temos que, a partir da Figura 3.12, a estimativa para $E\{\|\tilde{x}(k)\|^2|\mathcal{F}_0\}$ não é limitado, sugerindo que o filtro não seja MS-estável, veja Proposição 1.1; e que a estimativa para $E\{\mathrm{tr}(H(k))|\mathcal{F}_0\}$ não converge para uma solução estacionária.

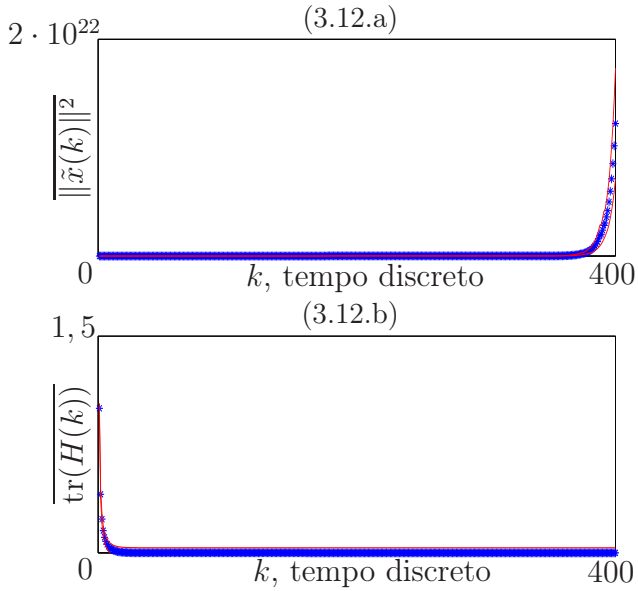

Figura 3.12: Curvas para C_{11} (não W-estabilizável e MS-detetável).

3.2 Interpretação dos Resultados

Nesta seção apresentamos uma tabela com o resumo dos resultados dos casos, e uma explicação da contribuição da W-estabilizabilidade no contexto de filtragem.

Tabela 3.2: Resumo dos resultados dos casos de estudo C_1 a C_{11} do FK [2] .

(A, B, Σ, P) / (A, C, P)	MS-estabilizável, então W-estabilizável	W-estabilizável	n. a.
MS-detetável	C_1 $\diamond$ ✓	C_2 e C_{10} $\diamond$ ✓	C_3 e C_{11} $\diamond$
W-detetável	C_4	C_5	C_6 $\diamond$
n. a.	C_7	C_8	C_9 $\diamond$

A Tabela 3.2 sugere que a W-estabilizabilidade é uma condição necessária e suficiente para que, havendo uma solução estacionária $\mathbb{H}$ para a matriz de covariância do erro de estimação, então ela esteja associada a um filtro MS-estável. Assim sendo, os casos de estudo sugerem que o filtro é MS-estável somente quando temos MS-detetabilidade associada a W-estabilizabilidade.

Podemos observar, também, que a MS-detetabilidade é uma condição suficiente para que exista uma solução estacionária $\mathbb{H}$ da matriz de covariância do erro de estimação e também é necessária para a estabilidade do filtro.

[2]Considerando "n. a." a abreviação de "nenhuma das anteriores", o símbolo $\diamond$ representando que a matriz de covariância do erro de estimação converge para uma solução $\bar{H}$ e o símbolo ✓ representando que o FK é MS-estável.

Note que em C_{10} e C_{11}, em que fizemos $B = 0$ e $\Sigma \neq 0$ (em contrapartida com os demais casos de estudo, em que $B \neq 0$ e $\Sigma = 0$), não houve alterações qualitativas nos resultados. Isto sugere que a W-estabilizabilidade cumpre o mesmo papel descrito anteriormente, seja com ruído aditivo, ou com ruído na condição inicial $x(0)$ ou quando ocorre os dois tipos de ruído.

Capítulo 4

Conclusões

Nesta tese, introduzimos um conjunto de matrizes $\mathbb{C}$ que se assemelha às matrizes de controlabilidade de SLD e, conforme apresentado no Lema 2.3 e Corolário 2.1, a dimensão dessa coleção de matrizes é relacionada com a dimensão do sistema: $\mathbb{C} \in \mathcal{M}^{n,n(n^2N+1)}$. Quando $\mathbb{C}$ é de posto completo, temos uma situação análoga à dos SLD em que todos os modos do sistema são excitados por um ruído aditivo, originando, assim, o conceito de controlabilidade fraca.

Uma característica interessante da coleção $\mathbb{C}$ é que ela depende da distribuição da condição inicial $x(0)$, através da matriz de covariância de $x(0)$ denotada por Σ, bem como do ruido aditivo no estado, através da coleção de matrizes B. De fato, pode ser demonstrado que Σ pode completar espaços nulos de $\mathbb{C}$ $\big($formalmente, $\mathcal{N}\big(\mathbb{C}(A, B, \Sigma \equiv 0, P)\big) \subset \mathcal{N}\big(\mathbb{C}(A, B, \Sigma \neq 0, P)\big)$. Em particular, na situação "degenerada" em que $N = 1$ e $\Sigma \equiv 0$, $\mathbb{C}$ se reduz à matriz usual de controlabilidade $\mathcal{C}(A, B)$ de um SLD, no sentido de que seus espaços nulos são os mesmos, vide Observação 2.1. Assim, o conceito de controlabilidade fraca é mais amplo do que o de controlabilidade de SLD relacionado apenas à matriz de controlabilidade $\mathcal{C}(A, B)$, como usualmente aparece na literatura.

Um outro impacto que surge ao considerar a matriz de convariância Σ (a qual, por dualidade, no problema de controle corresponde à matriz de custo terminal) é que a dimensão da coleção de matrizes de controlabilidade, $n, n(n^2N + 1)$ torna-se maior que a dimensão da coleção matriz de observabilidade para SLSM apresentada em (1.6), $n(n^2N), n$. Esta diferença desaparece se considerarmos cenários perfeitamente duais, fazendo $\Sigma \equiv 0$, cenário em que $S(0)$ resulta em uma coleção de matrizes nula e poderia ser desprezado a definição de $\mathbb{C}$; vide Observação 2.2.

A coleção de matrizes $\mathbb{C}$ também nos permitiu introduzir uma noção de W-estabilizabilidade, que foi apresentada na Definição 2.3. Essa definição generalizou a noção anterior de MS-estabilizabilidade, vide Lema 2.4. Ressaltamos que a correspondência entre este conceito e o de W-detetabilidade foi estabelecida na Observação 2.4, através da dualidade que segue:

$$(A, \mathbb{O}'\mathbb{O}, P) \text{ MS-detetável dual a } (A, \mathbb{C}\mathbb{C}', P) \text{ MS-estabilizável,}$$

de forma que se completou o quadro de dualidades entre controle e filtragem, apresentado na Figura 1.1.

No contexto do FK com observação dos estados θ de Markov desenvolvemos diversos casos de estudo variando as características básicas do sistema Φ, e analisamos o comportamento em valor esperado do erro de estimação e da covariância deste, obtidos pelo FK dados por $E\big\{||\tilde{x}(k)||^2|\mathcal{F}_0\big\}$ e $E\big\{H(k)|\mathcal{F}_0\big\}$, respectivamente. Os casos de estudo sugerem que W-estabilizabilidade é uma condição necessária e suficiente para que, havendo uma solução estacionária $\mathbb{H}$ da matriz de covariância do erro de estimação, então ela esteja associada a um filtro MS-estável, ou seja, o filtro é MS-estável somente quando temos MS-detetabilidade associada a W-estabilizabilidade.

Apêndice A

Teste da MS-estabilizabilidade

Em (Costa & do Val 2002*b*, Remark 4) apresenta-se um teste para a MS-estabilizabilidade baseada em iterações de equações algébricas de Riccati acopladas (EARA) em que se requer a W-detetabilidade de (A, C, P) para garantir a existência das soluções EARA. Adaptando esse teste, introduz-se o parâmetro κ_i, $i = 1, \ldots, N$, no qual basta tornar cada $\sqrt{\kappa_i p_{ii}} A_i$ estável, o que assegura a existência das soluções das EARA sem necessidade de garantir a W-detetabilidade; um resultado similar pode ser encontrado em (Costa & do Val 2004)

Método

Passo 1. Considera-se $\kappa_i \leq 1$ o maior escalar para que cada $\sqrt{\kappa_i p_{ii}} A_i$ seja estável.

Passo 2. Considera-se $X^0 = (X_1^0, ..., X_N^0) \in \mathcal{M}^{n+}$.

Passo 3. Para $k = 1, 2, ..$ e $i = 1, 2, ..., N$ resolvem-se as EARAs abaixo:

$$\begin{aligned} -X_i^k + & \kappa_i p_{ii} A_i' X_i^k A_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i \\ & - (\kappa_i p_{ii} A_i' X_i^k B_i + A_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i) \\ & \times (\mathbb{I} + \kappa_i p_{ii} B_i' X_i^k B_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k B_i)^{-1} \\ & \times (\kappa_i p_{ii} B_i' X_i^k A_i + B_i' \tilde{\mathcal{E}}_i^k A_i) = 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

com

$$\tilde{\mathcal{E}}_i^k = \sum_{j=1}^{i} p_{ij} X_j^k + (1 - \kappa_i) p_{ii} X_i^k.$$

Proposição A.1. *X_k converge para algum $X \in \mathcal{M}^{n+}$ se, e somente se, (A, B, P) é MS-estabilizável.*

Apêndice B

Teste da MS-detetabilidade

O algoritmo apresentado no resultado que segue e é adaptado de (do Val, Geromel & Gonçalves 2002)

Proposição B.1. *O sistema descrito por* $(A, \mathbb{O}, P)$ *é MS-detetável se o seguinte conjunto de LMIs, nas variáveis* $X \in \mathcal{M}^{n+}$, $G \in \mathcal{M}^{n}$ *e* $L \in \mathcal{M}^{m,n}$ *for factível:*

$$\begin{bmatrix} X_i & \big(A_i G_i + (\mathbb{O}_i' \mathbb{O}_i) L_i\big)' \\ \big(A_i G_i + (\mathbb{O}_i' \mathbb{O}_i) L_i\big) & (G_i G_i' - \mathcal{E}_i(X)) \end{bmatrix} < 0 \tag{B.1}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Apêndice C

Redução da W-controlabilidade ao caso SLD

Nesta seção, apresentamos a redução de algumas propriedades que construímos para os SLSM no Capítulo 2, para os SLD.

No Exemplo 2.1 apresentamos um SLD (ou ainda, SLSM com $N = 1$ e $\Sigma \equiv 0$) em que as matrizes de controlabilidade $\mathcal{C}(A, B)$ e $\mathbb{C}$ tinham posto completo, ou seja, obtivemos uma situação de analogia entre as matrizes de controlabilidade $\mathcal{C}$ e $\mathbb{C}$ para SLD usual e SLSM sem salto nos parâmetros ($N = 1$), respectivamente, no qual todos os modos foram excitadas somente pelo ruído aditivo. Entretanto, considere o exemplo que segue:

Considere o SLD dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k), \quad x(0) \sim N\left(0, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

ou seja, o vetor $B = 0$ com $P = 1$ e $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$, temos que

$$\text{posto}(\mathcal{C}(A, B)) = \text{posto}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

mas

$$\text{posto}(\mathcal{C}(A, BB' + \Sigma)) = \text{posto}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

e, para $m = 2$,

$$\text{posto}(\mathbb{C}_1(2)) = \text{posto}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Assim sendo, existem situações em que a matriz de controlabilidade usual $\mathcal{C}(A, B)$ para SLD não é sensível a excitação de ruído na condição inicial, o que não ocorre com a matriz de controlabilidade $\mathbb{C}$ em (2.23). O exemplo sugere que a verificação do posto$\big(\mathcal{C}(A, BB' + \Sigma)\big)$ tem o mesmo significado da verificação do posto$\big(\mathbb{C}\big)$, ou seja, que $\mathcal{N}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{N}\big(\mathcal{C}(A, B)\big)$ e que $\mathcal{N}(\mathbb{C}) = \mathcal{N}\big(\mathcal{C}(A, BB' + \Sigma)\big)$, de maneira que a noção de W-controlabilidade generaliza a noção de controlabilidade relacionada apenas às matrizes A e B.

Referências Bibliográficas

Aguirre, L. A. (2004), *Introdução à identificação de sistemas: Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, segunda edn, Editora UFMG.

Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. & Willsky, A. S. (1977), 'The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part i: Equilibrium flight', *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**, 768–780.

Chen, C.-T. (1999), *Linear System Theory and Design*, third edition edn, Oxford University Press, New York Oxford.

Costa, E. F. (2001*a*), 'Detetabildade de sistemas sujeitos a saltos Markovianos', *Tese de Doutorado apresentada a UNICAMP* .

Costa, E. F. (2001*b*), 'Detetabilidade de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos', *Tese de Doutorado, UNICAMP* .

Costa, E. F. & do Val, J. B. R. (2001), 'On the detectability and observability for discrete-time Markov jump linear systems', *System and Control Letters* **44**, 135–145.

Costa, E. F. & do Val, J. B. R. (2002*a*), 'On the detectability and observability for continuous-time Markov jump linear systems', *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(4), 1295–1314.

Costa, E. F. & do Val, J. B. R. (2002*b*), 'Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems', *International Journal of Control* **75**, 1282–1292.

Costa, E. F. & do Val, J. B. R. (2004), 'An algorithm for solving a perturbed algebraic Riccati equation', *European Journal of Control, Paris* **10**(6), 576–580.

Costa, E. F., do Val, J. B. R. & Fragoso, M. D. (2005), 'A new approach to detectability of discrete-time infinite Markov jump linear systems', *SIAM Journal on Control and Optimization, Philadelphia* **43**(6), 2132–2156.

Costa, E. F., Manfrim, A. L. P. & do Val, J. B. R. (2006), 'Weak controllability and weak stabilizability concepts for linear systems with Markov jump parameters', *accepted to the Automatic Control Conference 2006* .

Costa, O. L. & Fragoso, M. D. (1993), 'Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**, 154–178.

Costa, O. L. V. (1994), 'Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(8), 1685–1689.

Costa, O. L. V. (1995), 'Discrete-time coupled Riccati equations for systems with Markov switching parameters', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **194**, 197–216.

Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1999), 'Continuous-time state-feedback H_2-control of Markovian jump linear systems via convex analysis', *Automatica* **35**, 259–268.

Costa, O. L. V. & Fragoso, M. (1995), 'Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-40**, 2076–2088.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. & Marques, R. P. (2005), *Disrete-time Markov jump linear systems: Prpbability and its applications*, Springer.

Costa, O. L. V. & Marques, R. (2000), 'Robust H_2-control for discrete-time Markovian jump linear systems', *International Journal of Control* **73**(1), 11–21.

Costa, O. L. V. & Tuesta, E. F. (2004), 'H_2-control and the separation principle for discrete-time Markovian jump linear systems', *Mathematics of Control, Signals and Systems* **16**, 320–350.

Davis, M. H. A. & Vinter, R. B. (1985), *Stochastic Modelling and Control*, Chapman and Hall.

do Val, J. & Basar, T. (1999), 'Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem', *Journal of Economic Dynamics & Control* **23**, 1099–1131.

do Val, J. & Costa, E. F. (2002), 'Numerical solution for the linear-quadratic control problem of Markov jump linear systems and a weak detectability concept', *Journal of Optimization Theory and Applications* **114**(1), 69–96.

do Val, J., Geromel, J. & Gonçalves, A. (2002), 'The H_2-control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state', *Automática* pp. 343–349.

Feng, X., Loparo, K. A., Ji, Y. & Chizeck., H. J. (1992), 'Stochastic stability properties of jump linear systems.', *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(1), 38– 53.

Fragoso, M. & Baczynski, J. (2001), 'Optimal control for continuous time LQ problems with infinite Markov jump parameters', *SIAM Journal on Control and Optimization* **40**(1), 270– 297.

Gevers, M. (2005), 'Identification for Control: from the early achievements to the revival of experiment design', *European Journal of Control* **11**, 335–352.

Grewal, M. S. & Andrews, A. P. (1993), *Kalman Filtering - theory and practice*, Prentice Hall.

Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990*a*), 'Controlability, stabilizability and continuous time Markovian jump linear quadratic control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7), 777–788.

Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990*b*), 'Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions', *Control Theory and Advanced Technology* **6**(3), 289–319.

Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1992), 'Jump linear quadratic gaussian conrol in continuous time', *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(12), 1884–1892.

Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. & Loparo, K. A. (1991), 'Stability and control of discrete-time jump linear systems', *Control Theory and Advanced Tecnology* **7**(2), 247–269.

Johansen, T. A., Molengraft, R. V. & Nijmeijer, H. (2002), 'Guest editorial: Swithched, piecewise and polytopic linear systems', *International Journal of Control. Special issue on Switched and Polytopic Linear Systems* **75**, 1241–1242.

Lewis, F. L. (1992), *Applied Optimal Control and Estimation: Digital Design and implementation*, Prentice Hall and Texas Instruments.

Morozan, T. (1995), 'Stability and control for linear systems with jump Markov perturbations', *Stochastic Analysis and Applications* **13**(1), 91–110.

Rami, M. A. & Ghaoui, L. E. (1996), 'LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(11), 1666–1671.

Ristic, B., Arulampalam, S. & Gordon, N. (2004), *Beyond Kalman Filter: particle filters for tracking applications*, Artech House, Boston, London.

Saridis, G. N. (1983), 'Intelligent robotic control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**, 547–557.

Söderström, T. (1994), *Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and control*, Prentice-Hall.

Siqueira, A. A. G. & Terra, M. H. (2004), 'Nonlinear and markovian H_∞ controls of underactuated manipulators', *IEEE Transactions on Control System Technology* **12**(6), 811–826.

Sworder, D. D. & Rogers, R. O. (1983), 'An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver', *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(10), 971–978.