Resolução de um problema de corte de itens irregulares aplicado à indústria

Alfredo Rogerio Jorge

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Alfredo Rogerio Jorge

Resolução de um problema de corte de itens irregulares aplicado à indústria

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa.Dra. Marina Andretta

USP – São Carlos
Abril de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J634r

Jorge, Alfredo Rogerio
Resolução de um problema de corte de itens irregulares aplicado à indústria / Alfredo Rogerio Jorge; orientadora Marina Andretta. - São Carlos - SP, 2016.
110 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Problemas de corte de itens irregulares. 2. Modelos. 3. Heurísticas. 4. Aplicação. I. Andretta, Marina, orient. II. Título.

Alfredo Rogerio Jorge

Resolution of a cutting problem of irregular items used in industry

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa.Dra. Marina Andretta

USP – São Carlos
April 2016

À minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre iluminar e guiar meus caminhos, juntamente com Nossa Senhora Aparecida e Nossa Senhora de Fátima. À minha mãe Draucia, meu pai Rogerio, minha irmã Luana, minha namorada Roberta e toda minha família, por sempre estarem ao meu lado me dando força e incentivo.

Com relação ao ambiente da universidade, agradeço meus amigos da turma da Matemática Aplicada e Matemática de 2010, que foram importantes para que eu conseguisse meus objetivos, sempre dando apoio e incentivo. Aos meus amigos do Laboratório de Otimização (LOt) e do Nesting Club por toda a ajuda e aprendizado que me ofereceram.

Agradeço minha orientadora, Marina, por toda a dedicação e ajuda neste trabalho, a qual foi de grande valia para meu aprendizado.

Muito obrigado a todos que me ajudaram, direta ou indiretamente, e a Capes pelo apoio financeiro.

“Se você encontrar um caminho sem obstáculos,
ele provavelmente não leva a lugar nenhum.”
(Frank Clark)

RESUMO

JORGE, A. R.. **Resolução de um problema de corte de itens irregulares aplicado à indústria**. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Nos problemas de corte de itens irregulares, temos um conjunto de itens menores que devem ser alocados em objetos maiores (recipientes) de forma que estes estejam inteiramente contidos no recipiente e não se sobreponham. Neste trabalho, resolvemos um problema de corte e empacotamento de uma indústria que confecciona aventais e forros de luva, no qual deseja-se alocar uma lista de itens dentro de recipientes retangulares utilizando a menor quantidade de recipientes possível e minimizando o comprimento utilizado em cada recipiente. Para isto, utilizamos métodos exatos e heurísticos adaptados para o corte de aventais e forros de luva, com o objetivo de obter soluções de alta qualidade. Foram realizados experimentos computacionais que comprovaram a eficiência dos métodos de solução presentes neste trabalho.

Palavras-chave: Problemas de corte de itens irregulares, Modelos, Heurísticas, Aplicação.

ABSTRACT

JORGE, A. R.. **Resolução de um problema de corte de itens irregulares aplicado à indústria**. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In nesting problems, we have a set of small items that must be allocated into larger objects (containers) so that they are fully contained within the container and do not overlap. In this work, an apron and glove's lining industry cutting problem is solved, in which we want to allocate a list of items into rectangular containers using the smallest quantity of containers and minimizing the length used in each container. For this, we used exact and heuristic methods adapted for cutting aprons and glove liners, in order to obtain high quality solutions. Computational tests were performed and they show the efficiency of the solving methods presented in this work.

Key-words: Nesting problems, Models, Heuristics, Application.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Molde do forro de luva (fonte: própria). 29
Figura 2 – Exemplo de um balancim (figura retirada de http://www.shellymaquinas.com.br/ (26-10-2014)). 30
Figura 3 – Exemplo de uma faca elétrica (figura retirada de http://www.ferramentaskennedy.com.br/ (04-11-2014)). 31
Figura 4 – Exemplo dos aventais com seus respectivos bolsos (fonte: própria). 31
Figura 5 – Configuração de empacotamento de itens irregulares (Bennell e Oliveira (2008)). 34
Figura 6 – À esquerda um item e à direita a representação por malha 0-1 (adaptado de Bennell e Oliveira (2008)). 35
Figura 7 – À esquerda um item e à direita a representação por malha 1-3 (adaptado de Segenreich e Braga (1986)). 35
Figura 8 – Representação de um item por polígono (fonte: própria). 36
Figura 9 – Verificação de sobreposição definida em Oliveira e Ferreira (1993). 36
Figura 10 – Verificação de sobreposição definida em Segenreich e Braga (1986). 37
Figura 11 – Itens A e B e *no-fit polygon* de B em relação a A $(NFP_{A,B})$ (fonte: própria). . 39
Figura 12 – Item B e seu IFP em relação ao recipiente A $(IFP_{A,B})$ (fonte: própria). . . . 41
Figura 13 – Item B, recipiente não retangular A e o IFP $(IFP_{A,B})$ (fonte: própria). 41
Figura 14 – Diagrama que representa os tipos de métodos para resolução de problemas de corte de itens irregulares (fonte: própria). 42
Figura 15 – Representação do recipiente dada em Toledo *et al.* (2013). 50
Figura 16 – Posições permitidas para alocação dos itens no recipiente (fonte: própria). . 50
Figura 17 – Pontos em que o item pode ser posicionado (fonte: própria). 51
Figura 18 – Representação do NFP por um conjunto de pontos (fonte: própria). 51
Figura 19 – Representação de um item e algumas medidas importantes dada em Mundim *et al.* (2015). 53
Figura 20 – Exemplo de valores para a *D-function* (extraída de Mundim *et al.* (2015)). . 53
Figura 21 – Exemplo com dois itens e uma reta ativa em destaque (fonte: própria). . . . 55
Figura 22 – Exemplo de *inner-fit polygon*, região hachurada, de um item i em um recipiente regular (adaptado de Mundim *et al.* (2015)). 56
Figura 23 – Exemplo utilizando a heurística *Bottom-left* contínua (fonte: própria). 59
Figura 24 – Exemplo utilizando a heurística *Top-Bottom-left* contínua (fonte: própria). . 61
Figura 25 – Busca de posições factíveis: canto esquerdo inferior (CEI). 62

Figura 26 – Exemplo utilizando a heurística *Bottom-left* discreta (fonte: própria). 63
Figura 27 – Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de 180 graus para o item do canto superior (fonte: própria). 64
Figura 28 – Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de zero grau para o item do canto superior (fonte: própria). 64
Figura 29 – Busca de posições factíveis: canto esquerdo inferior (CEI) e canto esquerdo superior (CES). 65
Figura 30 – Exemplo utilizando a heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória (fonte: própria). 67
Figura 31 – Representação do forro de luva da mão direita e esquerda, respectivamente (fonte: própria). 70
Figura 32 – Representação dos itens que compõem os aventais com seus respectivos tamanhos (fonte: própria). 70
Figura 33 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente. 73
Figura 34 – Solução com a maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os tipos de aventais. 73
Figura 35 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando os forros de luva. 74
Figura 36 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando aventais e forros de luva. 75
Figura 37 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente. 76
Figura 38 – Solução com a maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os tipos de aventais. 77
Figura 39 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando os forros de luva. 78
Figura 40 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando aventais e forros de luva. 78
Figura 41 – Número de soluções melhores ou iguais obtidas pelo *Modelo dos pontos* (MP) e *Modelo de trigonometria direta* (MTD). 82
Figura 42 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente. 84
Figura 43 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* contínua utilizando todos os tipos de aventais. 85
Figura 44 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando os forros de luva. 87
Figura 45 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando aventais e forros de luva. 87

Figura 46 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente. . . . 89
Figura 47 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando todos os tipos de aventais. 90
Figura 48 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas os forros de luva e sessenta itens. 90
Figura 49 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* discreta utilizando aventais e forros de luva. 91
Figura 50 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLCA-100 utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente. 92
Figura 51 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística TBLCA-100 utilizando todos os tipos de aventais. 93
Figura 52 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLDA-100 utilizando apenas os forros de luva e sessenta itens. 93
Figura 53 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLDA-100 utilizando aventais e forros de luva. 93
Figura 54 – Número de soluções melhores ou iguais obtidas pela comparação entre as heurísticas *Bottom-left* contínua (BLC), *Top-bottom-left* discreta (TBLD) e TBLDA-100. 102

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Heurística *Bottom-left* contínua 58
Algoritmo 2 – Heurística *Bottom-left* discreta 62
Algoritmo 3 – Heurística *Top-bottom-left* contínua (discreta) aleatória 66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas um tipo de avental. 72
Tabela 2 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os tipos de aventais. 73
Tabela 3 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas os forros de luva. 74
Tabela 4 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os itens. . 75
Tabela 5 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas um tipo de avental. 76
Tabela 6 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os tipos de aventais. 77
Tabela 7 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas os forros de luva. 77
Tabela 8 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os itens. 78
Tabela 9 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando apenas um tipo de avental. 79
Tabela 10 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando todos os tipos de aventais juntos. 81
Tabela 11 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando os forros de luvas. 81
Tabela 12 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando os aventais e forros de luva. 81
Tabela 13 – Resultados númericos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando camadas. 83
Tabela 14 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando um tipo de avental. 85
Tabela 15 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando todos os tipos de aventais juntos. 86
Tabela 16 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando os forros de luvas. 86
Tabela 17 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando os aventais e forros de luva. 87

Tabela 18 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando um tipo de avental. 88
Tabela 19 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando todos os tipos de aventais juntos. 89
Tabela 20 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando os forros de luvas. 90
Tabela 21 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando os aventais e forros de luva. 91
Tabela 22 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando apenas um tipo de avental. 94
Tabela 23 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando todos os tipos de aventais. 95
Tabela 24 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando apenas os forros de luva. 96
Tabela 25 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando todos os tipos de itens juntos. 96
Tabela 26 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando apenas um tipo de avental. 97
Tabela 27 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando todos os tipos de aventais. 98
Tabela 28 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando apenas os forros de luva. 99
Tabela 29 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando todos os tipos de itens juntos. 99
Tabela 30 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando apenas um tipo de avental. 100
Tabela 31 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando todos os tipos de aventais juntos. 101
Tabela 32 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando os forros de luva. . . . 101
Tabela 33 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando os aventais e forros de luva. 101
Tabela 34 – Resultados númericos para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando camadas. 103
Tabela 35 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* e a heurística *Bottom-left* contínua. 104

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 25

2 PROBLEMA DE CORTE DE LUVAS E AVENTAIS 27
2.1 Corte do forro de luva 29
2.2 Corte de aventais 30
2.3 Objetivo da dissertação 32

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 33
3.1 Definição do problema 33
3.2 Representação dos itens e recipientes 34
3.3 Sobreposição entre itens 36
3.3.1 No-fit polygon (NFP) *38*
3.4 Alocação de itens em um recipiente 39
3.4.1 Inner-fit polygon (IFP) *40*
3.5 Métodos de resolução 41
3.5.1 Heurísticas *42*
3.5.1.1 Heurísticas construtivas *42*
3.5.1.2 Heurísticas de melhoramento *43*
3.5.2 Modelos de programação linear inteira mista *45*

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO 49
4.1 Modelos matemáticos 49
4.1.1 Modelo dos pontos *49*
4.1.2 Modelo de trigonometria direta *52*
4.2 Métodos heurísticos 57
4.2.1 Heurística Bottom-left contínua *57*
4.2.2 Heurística Top-bottom-left contínua *59*
4.2.3 Heurística Bottom-left discreta *60*
4.2.4 Heurística Top-bottom-left discreta *62*
4.2.5 Heurísticas Top-bottom-left contínua aleatória e Top-bottom-left discreta aleatória *65*

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS 69
5.1 Instâncias 69

5.2 Modelos matemáticos **71**
5.2.1 Experimentos para verificar o limite dos modelos ***71***
5.2.1.1 Modelo dos pontos *71*
5.2.1.2 Modelo de trigonometria direta *74*
5.2.1.3 Comparação entre os métodos de resolução exatos sem considerar camadas *78*
5.2.2 Experimentos considerando camadas ***82***
5.3 Métodos heurísticos **83**
5.3.1 Experimentos sem considerar camadas ***83***
5.3.1.1 Heurísticas Bottom-left contínua e Top-bottom-left contínua *84*
5.3.1.2 Heurísticas Bottom-left discreta e Top-bottom-left discreta *88*
5.3.1.3 Heurísticas Top-bottom-left contínua aleatória e Top-bottom-left discreta aleatória *91*
5.3.1.4 Comparação entre os métodos de resolução heurísticos sem considerar camadas *100*
5.3.2 Experimentos considerando camadas ***102***
5.4 Comparação entre o melhor modelo matemático e a melhor heurística **103**

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS **105**

Referências **107**

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Os problemas de corte e empacotamento buscam determinar um arranjo de objetos menores (itens) dentro de objetos maiores (recipientes), obedecendo a certas restrições, e sempre visando melhorar a qualidade da solução sob alguma perspectiva. Estes problemas são de difícil resolução, principalmente pelas restrições de não sobreposição entre os itens. Dentre os problemas de corte e empacotamento, os problemas de corte de itens irregulares (ou *nesting problems*) são os que apresentam uma componente geométrica mais complexa, dado que lidam com itens e/ou recipientes de formas irregulares (não retangulares, não circulares) (veja Bennell e Oliveira (2008)). Na prática, os problemas de corte de itens irregulares estão presentes em diversas indústrias nas quais é necessário cortar ou encaixar múltiplos itens irregulares em um recipiente, como, por exemplo, na indústria têxtil, de móveis e de calçados.

Um caso particular de problemas de corte de itens irregulares é aquele em que os recipientes (matéria-prima) possuem tamanho fixo, podendo ser retangulares ou irregulares. Neste caso, estamos interessados em minimizar a quantidade de recipientes utilizados para cortar os itens. Estes problemas são conhecidos como problemas de corte de itens irregulares em recipientes (ou *regular bin packing problems*) e algumas estratégias heurísticas para resolvê-los podem ser encontradas nos trabalhos de Halavati *et al.* (2008), Lopez-Camacho *et al.* (2010) e Lopez-Camacho *et al.* (2013). No caso em que os recipientes apresentam largura fixa e comprimento "infinito", desejamos minimizar o comprimento do recipiente utilizado para alocar todos os itens. Estes problemas são conhecidos como problemas de corte de itens irregulares em faixa (ou *strip packing problems*) e algumas meta-heurísticas relevantes na área podem ser encontradas em Gomes e Oliveira (2006) (*simulated annealing*), Imamichi *et al.* (2009) (*iterated local search*), Umetani *et al.* (2009) (*guided local search*) e, a que obteve melhores resultados até o momento, Elkeran (2013) (*cuckoo search*). Os primeiros modelos matemáticos para o *strip packing problem* foram propostos recentemente por Fischetti e Luzzi (2009), Alvarez-Valdes *et al.* (2013), Toledo *et al.* (2013), Leao *et al.* (2015) e Mundim *et al.* (2015).

Estamos interessados no problema de corte de tecido para a confecção de aventais e forros de luva, proveniente de uma empresa do interior do Estado de São Paulo. Neste problema, temos um tipo de forro de luva e três tipos de aventais (pequeno, médio e grande) juntamente com seus bolsos, cada qual com uma determinada demanda a ser atendida.

O problema estudado possui um rolo de matéria-prima com largura fixa e comprimento considerado infinito (assim como o *strip packing problem*) e uma mesa com tamanho limitado onde o corte é realizado (assim como o *bin packing problem*). Pela tipologia de Wäscher *et al.* (2007), temos um problema de dimensão aberta, também conhecido como corte de itens irregulares em faixa (*irregular strip packing problem*) e um problema de corte de itens em recipientes (*bin packing problem*). O objetivo é utilizar a menor quantidade de recipientes para cortar todos os itens e, além disso, minimizar o comprimento de cada recipiente utilizado.

O objetivo desta dissertação é minimizar o desperdício de matéria-prima para o problema de corte de aventais e forros de luva. Para isso, vamos utilizar métodos exatos e heurísticos para resolver este problema.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, vamos abordar o problema de corte de aventais e forros de luva. No Capítulo 3, serão definidos os problemas de corte de itens irregulares e será realizada uma revisão bibliográfica sobre estes problemas. No Capítulo 4, apresentamos os métodos de resolução para o problema. O Capítulo 5 contém os experimentos computacionais realizados. Por fim, algumas conclusões e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

CAPÍTULO

2

PROBLEMA DE CORTE DE LUVAS E AVENTAIS

As luvas surgiram em 440 a.C. (Herodotus (1952)), quando a História de Heródoto (governante da Espanha) diz que ele foi incriminado por uma luva cheia de prata, a qual recebeu como suborno. Há também referências de que os romanos teriam utilizado luvas, como, por exemplo, Plínio, o Jovem, que foi advogado, escritor e magistrado da Roma Antiga, que usava luvas no inverno para que o trabalho não fosse parado. Já na Idade Média, as luvas eram um elemento estratégico para a defesa de um soldado.

Durante o século XIII, as luvas começaram a se tornar um item de beleza utilizado por mulheres. Estas luvas eram feitas de linho e seda e, às vezes, chegavam até o cotovelo. No século XVI, as luvas alcançaram sua maior elaboração, quando a Rainha Elizabeth I resolveu utilizá-las bordando jóias nelas (Chisholm e Hooper (1910)). Já no século XVII, as luvas eram feitas de pele de galinha e, além disso, as luvas tornaram-se moda. Também foram moldadas luvas de pele de bezerros por um fabricante Irlandês, Limerick (Jenkins (2010)). Na década de 1870, as luvas de seda e veludo eram utilizadas com vestidos para sair à noite ou em jantares mais finos (Mahe (2013)). Em 1905, temos a primeira referência da utilização de luvas por criminosos para esconder as impressões digitais da cena do crime (Cox (1905)). Em 1964, as primeiras luvas médicas descartáveis de látex foram fabricadas pela empresa australiana Ansell (Ansell (2003)).

No Brasil, no início da década de 1970, as empresas iniciaram uma maior demanda por luvas de segurança, muito em virtude de empresas estrangeiras (com a visão europeia e norte americana de segurança no trabalho e proteção ao trabalhador). Nos dias atuais, os usuários foram beneficiados com luvas mais resistentes e confortáveis, e as empresas ganharam com mais produtividade e menores índices de afastamentos e acidentes do trabalho. Antigamente, as luvas eram muito desconfortáveis e atrapalhavam o processo produtivo, mas hoje são partes integrantes dos uniformes das fábricas, inclusive auxiliando no aumento do desempenho dos trabalhadores (Yeh (2012)).

Temos, hoje em dia, uma grande variedade de luvas, como luvas resistentes ao fogo, luvas usadas por açougueiros, mergulhadores, lenhadores, policiais, bombeiros, luvas médicas, luvas de proteção contra impactos, entre outras.

No estado de São Paulo, a cidade de Bocaina é considerada a capital nacional da luva de raspa de couro. Este tipo de luva é utilizado como um acessório de segurança feito a partir do couro do boi. É muito utilizada por trabalhadores de metalúrgicas e do corte da cana-de-açúcar. Um ponto relevante é que, de acordo com Peloso (2008), as luvas de raspa são o principal produto gerador de empregos, e que são fundamentais para a sobrevivência de aproximadamente 70% da população economicamente ativa do município.

Em Courobusiness (2004), temos que na produção da luva há resíduos sólidos com mal aproveitamento, perdendo, assim, um percentual aproveitável para o artesanato. Além disso, há um alto custo para a remoção do resíduo ao local destinado, o que gera um comprometimento à saúde financeira da empresa, além de utilizar um grande espaço físico.

Com relação aos aventais, de acordo com Crafty (2006), na década de 1920 e 1930 os aventais seguiam o formato do vestido e eram utilizados para que os vestidos não fossem sujos. Já na década de 1940, os aventais ganharam uma nova forma com bolsos, botões e muitos eram feitos com os sacos onde se guardavam as sementes que os agricultores utilizavam. As revistas de 1940 e 1950 apresentaram as mulheres com aventais em quase todos os anúncios relacionados com o trabalho doméstico, pois era considerado um uniforme padrão para as donas de casa. A década de 1950 trouxe os meio-aventais de algodão engomados que eram enfeitados para ocasiões especiais.

Hoje em dia, o avental também é considerado um equipamento de segurança utilizado por trabalhadores em várias empresas. Muitas vezes, estes aventais são confeccionados de maneira manual e, geralmente, utilizando tecidos leves, como por exemplo o algodão, para um maior conforto em sua utilização.

Como a produção para este tipo de luva e aventais é realizada de maneira manual, os funcionários devem cortá-los, utilizando moldes, que são itens irregulares de um determinado material (lona ou couro) de forma a atender a uma demanda. Este tipo de problema está relacionado, na literatura, com os problemas de corte de itens irregulares.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo estudar a produção de aventais e luvas de uma empresa do interior de São Paulo. Para a confecção das luvas, é necessário cortar o forro de uma lona de algodão, que é utilizado na parte interna da luva, para que ela fique mais confortável quando utilizada. Com relação aos aventais, eles são compostos por duas partes, o avental propriamente dito e o bolso. Utilizamos técnicas referentes aos problemas de corte de itens irregulares para a resolução do corte de aventais e forros de luva.

A seguir, vamos detalhar a produção dos aventais e forros para as luvas que serão tratados neste trabalho.

2.1 Corte do forro de luva

De forma geral, dado um rolo de lona de algodão e um molde devemos cortar os forros para as luvas, de forma a atender a uma demanda. A princípio, temos duas restrições: a restrição de não sobreposição entre os forros e que os forros fiquem totalmente contidos no interior da lona para a realização do corte. Podemos enfestar (dobrar a lona) ou não, utilizar uma máquina para a realização do corte ou realizar o corte de maneira manual com uma tesoura, por exemplo. Ou seja, podemos escolher a estratégia que julgarmos ser a melhor para a realização do corte.

Como foi dito anteriormente, para confeccionar uma luva é necessário que o forro seja cortado de uma lona de algodão. Para a realização do corte, a fábrica que está relacionada com este projeto utiliza um molde, como ilustra a Figura 1, e um balancim (Figura 2) para cortá-lo. O material utilizado é a lona de algodão, cujo rolo possui de $175cm$ de largura e $100m$ de comprimento.

Figura 1 – Molde do forro de luva (fonte: própria).

Há algumas restrições que são impostas para realizar o corte. Temos que a lona utilizada para a confecção dos forros de luva é composta por fibras, assim, apenas são permitidos cortes perpendiculares às fibras, pois, caso contrário, a lona pode desfiar e, desta maneira, o item será descartado. Desta forma, são permitidas rotações de 180 graus do molde. Outra restrição é no número de camadas que são feitas com a lona. Como o corte é realizado em um balancim, temos um limite de camadas que ele suporta para a realização do corte. Se o número for muito grande, o balancim não consegue realizar o corte de todas as camadas, fazendo com que o material seja descartado. O número usual é de 8 camadas que, em geral, também é o número máximo.

O procedimento utilizado pela fábrica para o corte dos forros para as luvas é dado pela preparação da lona, em que o molde da luva é colocado para medir a largura da lona, a qual será um pouco maior do que a largura do molde da luva, para que assim sejam feitas camadas. Os moldes da luva são colocados lado a lado na lona. Como a lona é enfestada (dobrada), temos um certo desperdício de material na dobra e, além disso, há um desperdício com relação ao

Figura 2 – Exemplo de um balancim (figura retirada de http://www.shellymaquinas.com.br/ (26-10-2014)).

espaçamento (o qual é mínimo) da alocação de uma luva para outra (pois são colocadas lado a lado), que é multiplicado pelo número de camadas. De acordo com as informações da fábrica, este desperdício é estimado em torno de 10% do material utilizado.

Desta forma, desejamos resolver o problema utilizando um modelo matemático, se possível, e utilizar uma heurística para encontrar uma solução aproximada, ocasionando uma diminuição do desperdício de matéria-prima e, consequentemente, um aumento do lucro da fábrica.

A seguir, vamos explicar o problema do corte de aventais.

2.2 Corte de aventais

A realização do corte dos aventais, de maneira geral, apresenta restrição de não sobreposição entre os moldes e que os moldes estejam no interior da lona. Além disso, podemos rotacionar os moldes dos aventais, utilizar a lona em camadas, cortar apenas um item que compõem o avental de cada vez, misturar os moldes dos aventais com os moldes dos forros para as luvas, entre outras combinações. Desta forma, podemos escolher um plano de corte que julgarmos ser o mais adequado para a confecção dos aventais e, até mesmo, em conjunto com a confecção dos forros para as luvas, de forma a atender a uma demanda.

Para a confecção dos aventais, a fábrica utiliza dois moldes para representar os itens que o compõem, um para o avental propriamente dito e um para o bolso. Além disso, temos a utilização da lona de algodão, de uma mesa e uma faca elétrica (Figura 3) para a realização do corte da lona. Temos três tamanhos diferentes de aventais: pequeno (P), médio (M) e grande (G), como mostra a Figura 4. A lona apresenta $1,75m$ de largura e $100m$ de comprimento e a mesa possui $2,70m$ de comprimento e $1,90m$ de largura.

Uma restrição importante para o corte dos aventais é que não pode ser feito um molde (que contém a configuração dos itens que compõem o avental) maior que o tamanho da mesa, pois, se isso acontecer, não será possível realizar o corte, já que ele é realizado sobre a mesa. Caso

Figura 3 – Exemplo de uma faca elétrica (figura retirada de http://www.ferramentaskennedy.com.br/ (04-11-2014)).

a demanda dos aventais seja satisfeita e ainda haja posições em que os moldes das luvas podem ser alocados, é permitido alocar os moldes dos forros de luva juntamente com os moldes dos aventais. Outro ponto importante é que os itens que compõem os aventais podem ser rotacionados em qualquer ângulo, já que seus moldes apresentam uma medida um pouco maior que é utilizada para dobrar e fazer uma costura em volta do avental e do bolso de forma que a lona não desfie.

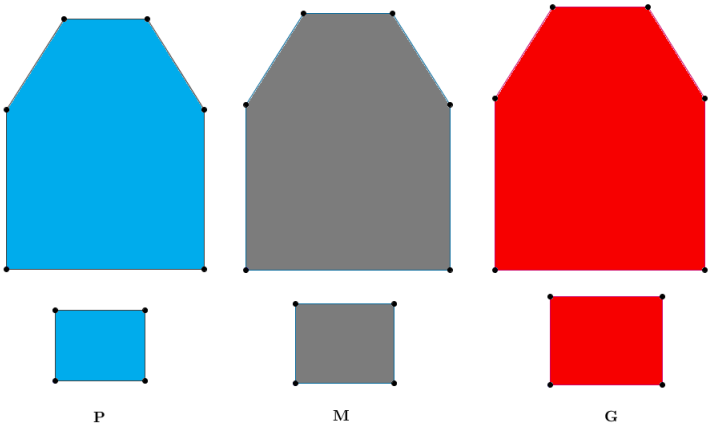


Figura 4 – Exemplo dos aventais com seus respectivos bolsos (fonte: própria).

O procedimento utilizado pela fábrica para a realização do corte dos aventais tem, como primeiro passo, esticar a lona sobre a mesa. Em seguida, o funcionário tenta fazer a alocação dos moldes dos itens na lona e, ao verificar que um item apresenta uma posição definida, ele faz, com uma caneta, o contorno do item na lona. A estratégia utilizada pelo funcionário é sempre alocar os itens maiores primeiro e depois encaixar os menores nas posições que sobraram. Realizado este procedimento, é gerado um leiaute para a realização do corte. Após ser feito o leiaute, um número de retângulos de matéria-prima são cortados, de acordo com a demanda, com mesma largura e comprimento que o leiaute e, assim, são feitas camadas para a realização do corte dos itens utilizando uma faca elétrica.

Desta forma, para a realização do corte, o funcionário tem que ficar testando as posições dos itens que se encaixam melhor, para que o desperdício do material seja minimizado. Como esse procedimento é feito de maneira visual e por tentativa e erro, o desperdício de material pode ser grande e, além disso, pode levar um tempo relativamente elevado e prejudicar o andamento

da produção.

2.3 Objetivo da dissertação

Temos como objetivo utilizar métodos de resolução relacionados com os problemas de corte e empacotamento para que a alocação dos moldes do corte dos aventais e forros de luva seja feito de maneira automática, ou seja, determinar um plano com a posição de alocação dos itens na lona de forma que o desperdício seja reduzido. Assim, o funcionário não teria mais que ficar realizando os testes com os itens para criar um leiaute, o que pode ser um benefício com relação ao tempo também.

No próximo capítulo vamos definir em detalhes os problemas de corte de itens irregulares e apresentar uma revisão bibliográfica sobre estes problemas, para verificar quais são suas representações e métodos de solução presentes na literatura.

CAPÍTULO

3

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, faremos um estudo aprofundado sobre os problemas de corte de itens irregulares.

3.1 Definição do problema

Os problemas de corte e empacotamento buscam determinar um arranjo de objetos menores (itens) dentro de objetos maiores (recipientes), obedecendo a certas restrições, e sempre visando melhorar a qualidade da solução sob alguma perspectiva. Estes problemas são de difícil resolução, principalmente pelas restrições de não sobreposição entre os itens. Dentre os problemas de corte e empacotamento, os problemas de corte de itens irregulares (ou *nesting problems*) são os que apresentam uma componente geométrica mais complexa, dado que lidam com itens e/ou recipientes de formas irregulares (não retangulares, não circulares) (veja Bennell e Oliveira (2008)). Na prática, os problemas de corte de itens irregulares estão presentes em diversas indústrias nas quais é necessário cortar ou encaixar múltiplos itens irregulares em um recipiente, como, por exemplo, na indústria têxtil (veja um exemplo na Figura 5), de móveis, de calçados e entre outras.

Vale a pena ressaltar que os problemas de corte e empacotamento de itens irregulares lidam com itens irregulares, mas os recipientes em que os itens serão alocados podem ser retangulares (por exemplo, um rolo de tecido na forma de um retângulo com largura fixa e comprimento "infinito") ou irregulares (por exemplo, o couro animal que advém da natureza e que apresenta irregularidades).

Um caso particular de problemas de corte e empacotamento de itens irregulares é aquele em que o recipiente possui tamanho fixo. Neste caso, o objetivo é minimizar a quantidade de recipientes utilizados para empacotar os itens. Este recipiente pode ser retangular ou irregular. Estes problemas são chamados de *bin packing*. Outro caso é o problema de *strip packing*,

Figura 5 – Configuração de empacotamento de itens irregulares (Bennell e Oliveira (2008)).

que consiste em cortar todos os itens dados de um recipiente retangular com largura fixa e comprimento "infinito". O objetivo é minimizar o comprimento utilizado do recipiente. Outras variações para os problemas de corte de itens podem ser encontradas em Dyckhoff (1990) e Wäscher *et al.* (2007).

Devido à dificuldade intrínseca e à importância prática, diversas técnicas de resolução de problemas de corte de itens irregulares têm sido desenvolvidas, baseadas, predominantemente, em meta-heurísticas. Algoritmos exatos, que garantem encontrar a solução ótima, também foram desenvolvidos. No entanto, nestes algoritmos, o tempo de execução cresce drasticamente com o aumento da quantidade de objetos usados.

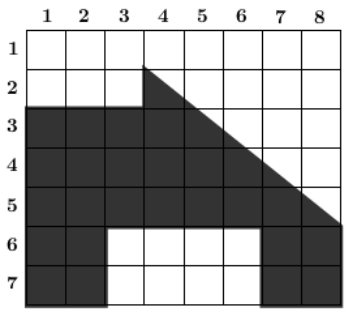
A seguir, vamos descrever como podemos representar os itens e os recipientes nos problemas de corte de itens irregulares.

3.2 Representação dos itens e recipientes

Há várias maneiras de representar um item e, dentre as mais comuns, estão a representação por pontos em uma malha (Hanan *et al.* (1992), Oliveira e Ferreira (1993) e Weng e Kuo (2011)) e a representação por polígonos (Oliveira *et al.* (2000), Dowsland *et al.* (2002), Gomes e Oliveira (2002), Gomes e Oliveira (2006), Bennell e Oliveira (2008) e Toledo *et al.* (2013)).

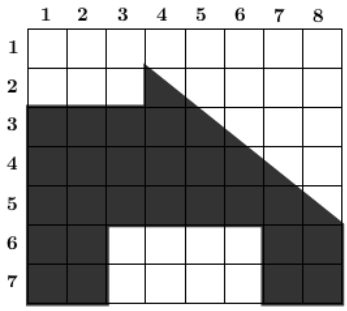
Para utilizar a representação por pontos de uma malha, dividimos o item em áreas discretas para codificar os dados da malha. Uma forma de codificar um item usando a malha é criar uma matriz M binária de forma que $M_{ij} = 1$ se o item ocupa a posição ij e $M_{ij} = 0$, caso contrário, onde i representa a linha e j a coluna da matriz M. Para ilustrar esta representação, veja na Figura 6 um item com sua respectiva malha.

Outra forma de representar itens por malha, utilizada por Segenreich e Braga (1986), é definir a malha da seguinte maneira: o algarismo 1 representa a fronteira do item e o algarismo 3 o interior do item. Na Figura 7, temos um exemplo de como um item é representado seguindo esta definição.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1	1
7	1	1	0	0	0	0	1	1

Figura 6 – À esquerda um item e à direita a representação por malha 0-1 (adaptado de Bennell e Oliveira (2008)).



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	3	3	3	3	3	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1	1
7	1	1	0	0	0	0	1	1

Figura 7 – À esquerda um item e à direita a representação por malha 1-3 (adaptado de Segenreich e Braga (1986)).

Uma das vantagens da descrição dos itens por malhas é que o cálculo da distância para eliminar a inviabilidade (sobreposição de itens) ou onde colocar dois itens no recipiente de modo que eles estejam em contato um com o outro, é apenas uma questão de contagem de posições da malha na direção desejada. Entretanto, as desvantagens para este tipo de representação são que este método necessita de muita memória computacional e não pode representar exatamente itens com bordas não ortogonais. Para uma melhor precisão, podemos refinar o tamanho de cada célula da malha, o que gera um aumento no tamanho das malhas e resulta em uma maior utilização da memória e tempo computacional para verificar a sobreposição de itens.

Outra forma de representação de itens é por polígonos. Neste caso, o item é representado por um ou vários polígonos, cada um representado por uma lista de vértices, seguindo uma orientação (geralmente sentido horário). Na Figura 8, temos, como exemplo, um polígono formado pelos vértices $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J, o qual representa um item.

Podemos citar que a principal vantagem deste tipo de representação é que os itens com bordas não ortogonais são representados com maior precisão e, além disso, não ocupa muita memória computacional. Uma desvantagem para este tipo de representação é que a verificação de sobreposição entre itens envolve um cálculo um pouco mais "difícil", que será abordado na próxima seção.

Geralmente, quando se trabalha com itens definidos por malhas, os recipientes para alocação dos itens também são representados por uma malha. Quando representamos os itens

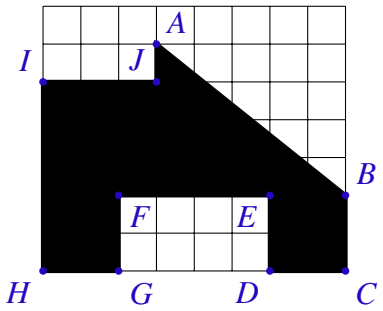


Figura 8 – Representação de um item por polígono (fonte: própria).

por polígonos, geralmente o recipiente também é representado por polígonos.

3.3 Sobreposição entre itens

Na literatura, existem vários métodos para encontrar sobreposição entre itens. Vamos separar estes métodos em dois casos. O primeiro caso está relacionado com itens representados por malhas e o segundo com os itens representados por polígonos.

No caso em que os itens são representados por malhas, temos o método *raster point* para verificar sobreposição. Este método pode ser definido de duas maneiras diferentes. Em Oliveira e Ferreira (1993) temos que o algarismo 1 indica que o item esta ocupando a célula da malha que representa o item e o caso contrário é dado pelo algarismo 0. Para descobrir se há sobreposição entre dois itens, somamos as matrizes que representam as malhas dos itens e, se obtivermos um valor maior que 1 em alguma posição, isto significa que existe sobreposição entre esses dois itens. Na Figura 9, temos um exemplo para verificação de sobreposição entre dois itens utilizando este método.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1\\
\hline
\end{array}
+
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&1&1&1&1&1&1\\
0&1&1&2&1&1&1&1\\
1&1&1&2&2&2&2&2\\
1&1&1&2&2&2&2&2\\
0&1&1&2&2&2&2&2\\
0&0&0&1&1&2&2&2\\
\hline
\end{array}
$$

Figura 9 – Verificação de sobreposição definida em Oliveira e Ferreira (1993).

Outra forma, proposta por Segenreich e Braga (1986), considera que os itens também serão representados por malhas, mas com a seguinte informação: o algarismo 1 representa a fronteira do item e o algarismo 3 o interior do item. Para descobrir se dois itens possuem sobreposição, somamos suas matrizes. Se obtivermos algarismos maiores que 3, isto indica que há sobreposição, ou seja, estamos em uma posição inviável. Números iguais a 2, indicam que os

itens estão a uma distância aceitável. A Figura 10 apresenta um exemplo ilustrativo para este método de verificação de sobreposição entre itens.

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	3	1	0	0	0	0
1	3	3	3	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	1
0	1	1	1	1	1	3	1
0	0	0	0	0	1	1	1

+

0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	1	1	1	1	1

=

0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	1	1	3	3	3	1
0	1	3	2	3	3	3	1
1	3	3	4	4	4	4	2
1	3	3	4	6	6	6	2
0	1	1	2	4	4	6	2
0	0	0	1	1	2	2	2

Figura 10 – Verificação de sobreposição definida em Segenreich e Braga (1986).

No caso em que os itens são representados por polígonos, temos como principais maneiras para verificar sobreposições a ϕ*-function*, a *geometria direta* e o *no-fit-polygon*, e uma ferramenta que pode ser utilizada em conjunto com essas técnicas que é a *D-function* (Bennell e Oliveira (2008)).

A ϕ*-function* é uma expressão matemática que representa as posições relativas entre dois itens. O valor da ϕ*-function* é maior que zero se os itens estão separados, igual a zero se estão encostados e menor que zero se apresentam sobreposição. Vale a pena citar que esta função foi construída apenas para objetos primários, como círculos, retângulos, polígonos regulares e polígonos convexos. Objetos que não são primários podem ser representados pela união ou intersecção de objetos primários e, a partir destas operações, pode-se obter ϕ*-functions* para objetos mais complexos. A vantagem de utilizar este método é que temos uma fórmula fechada para a verificação de sobreposição entre itens e o custo computacional para este tipo de cálculo geralmente é baixo. Entretanto, a derivação das funções, baseadas em trigonometria, é feita à mão, o que torna sua utilização inviável computacionalmente. Mais informações sobre a ϕ*-function* podem ser encontradas em Stoyan *et al.* (1996) e Chernov *et al.* (2010).

O método de *geometria direta* utiliza as arestas dos polígonos diretamente para verificação de sobreposição de itens. Para realizar esta verificação, Ferreira *et al.* (1998) utiliza quatro testes (comparação de aresta com aresta e de vértice com polígono) que devem ser satisfeitos para que, assim, tenha a confirmação de sobreposição entre as arestas observadas. Desta forma, esses testes devem ser realizados para todas as arestas de todos os itens existentes. Isso leva a muitos cálculos, o que torna esta alternativa computacionalmente custosa.

A *D-function*, proposta por Konopasek (1981), fornece a posição relativa de um ponto P e uma aresta orientada AB através de uma expressão matemática que é baseada na equação da distância de um ponto e uma reta (D_{ABP}). Assim, se D_{ABP} for maior que zero, o ponto P está à esquerda da aresta AB; se D_{ABP} for menor que zero, então o ponto P está à direita da aresta AB; e, por fim, se D_{ABP} for igual a zero, o ponto P está sobre a aresta AB. Desta forma, é possível verificar se um ponto P está à esquerda, à direita ou em cima de uma aresta AB e,

consequentemente, se existe sobreposição entre itens fazendo esta verificação para todas as arestas existentes dos itens já alocados no recipiente com relação ao ponto de referência do item que se deseja alocar no recipiente. Um ponto negativo deste método é o custo computacional com os cálculos. Note que, a *D-function* é uma ferramenta utilizada junto com a *geometria direta*, por exemplo, para verificar a sobreposição entre itens.

Uma quarta alternativa é o uso de polígonos de obstrução (ou *no-fit polygon*). A seguir, apresentaremos em detalhes como é sua definição e seu uso.

3.3.1 No-fit polygon (NFP)

O conceito de *no-fit polygon* (Bennell e Oliveira (2008)) é o mais utilizado na literatura para lidar com restrições de não sobreposição de itens.

Lembre-se de que os itens podem ser formados por vários polígonos. Para facilitar o entendimento, definimos o *no-fit polygon* considerando que cada item é formado por apenas um polígono.

Dados dois polígonos A e B e o ponto de referência[1] do polígono B (R_B), o *no-fit polygon* do polígono B em relação ao polígono A $(NFP_{A,B})$ é obtido ao orbitar o polígono B ao redor do polígono A, de forma que eles sempre fiquem em contato mas nunca se sobreponham. Simultaneamente, traçamos pelo ponto de referência de B (R_B), o caminho que este movimento orbital faz, obtendo assim um conjunto de polígonos. Tais polígonos são chamados de *no-fit polygon de B em relação a A*. As orientações do polígono A e B são mantidas no movimento orbital.

Na Figura 11, temos um item A (fixo) e um item B (orbital), com o seu ponto de referência (R_B). Orbitamos o item B ao redor do item A e obtemos o NFP do item B em relação ao item A $(NFP_{A,B})$.

A partir desta definição, temos as seguintes conclusões:

- se o ponto de referência do polígono B (R_B) estiver no interior do $NFP_{A,B}$, então B intercepta A;
- se o ponto de referência do polígono B (R_B) estiver na borda do $NFP_{A,B}$, então B toca A;
- se o ponto de referência do polígono B (R_B) estiver no exterior do $NFP_{A,B}$, então B não intercepta nem toca A.

Desta forma, para saber se um polígono B se sobrepõe a um polígono A, basta verificar se o ponto de referência do polígono B está no interior, na borda ou no exterior de $NFP_{A,B}$.

[1] O ponto de referência pode ser qualquer ponto, mas geralmente utiliza-se um vértice de um polígono que representa o item.

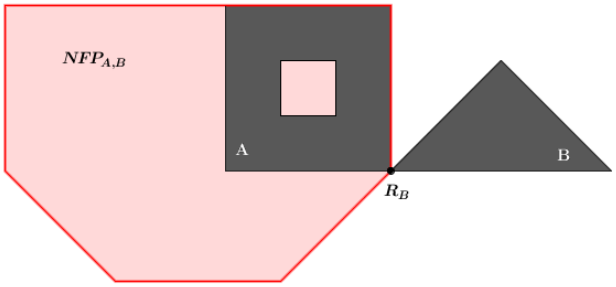


Figura 11 – Itens A e B e *no-fit polygon* de B em relação a A $(NFP_{A,B})$ (fonte: própria).

Usando a definição de NFP dada para dois polígonos, quando um item A é formado por mais de um polígono, $A_1, A_2, \cdots, A_k$, e um item B formado por $B_1, B_2, \cdots, B_p$, podemos calcular os $NFP's$ de A_i e B_j, com $i = 1, 2, \cdots, k$ e $j = 1, 2, \cdots, p$, respectivamente, e fazer a união dos $NFP's$ de A_i e B_j para obter o NFP de A e B.

Geralmente, os $NFP's$ são calculados antes de serem utilizados na aplicação do algoritmo de posicionamento de itens no recipiente, em uma etapa de pré-processamento.

A vantagem da utilização do NFP é que, ao contrário da geometria direta e da *D-function*, não é mais necessário comparar dois polígonos para ver se há sobreposição entre dois itens. Como a sobreposição é verificada comparando um ponto com um polígono, os cálculos são muito mais eficientes. No entanto, calcular o NFP tem um grande custo computacional. Se não é possível calculá-lo antes da aplicação do algoritmo para posicionamento dos itens no recipiente (como no caso em que a rotação livre dos itens é permitida), não vale a pena utilizá-lo.

A maneira que o NFP foi calculado é o método orbital de Mahadevan (1984). Outras estratégias (métodos) podem ser utilizados, como a *soma de Minkowski* (Bennell e Dowsland (2001) e Burke *et al.* (2006)) e a decomposição de polígonos (Avnaim e Bsissonnat (1987) e Agarwal *et al.* (2002)).

Para encontrar uma solução para problemas de corte de itens irregulares, além de verificar se itens se sobrepõem, precisamos verificar quando os itens estão dentro do recipiente. Na próxima seção tratamos de como esta verificação é feita.

3.4 Alocação de itens em um recipiente

Para realizar a alocação de um item em um recipiente, além de verificar a sobreposição de itens, precisamos verificar as posições de alocação válidas para que o item fique dentro do recipiente.

Quando os itens são representados por malha, para alocar o item no interior do recipiente (que geralmente também é representado por uma malha), basta encaixar a malha do item na malha

do recipiente, de forma que ela fique contida inteiramente dentro do recipiente. Após realizar a alocação, podemos utilizar os métodos para verificação de sobreposição já mencionados na Seção 3.3.

Com relação aos itens representados por polígonos, ao contrário do *no-fit polygon* (NFP), onde encontramos posições em que o item não pode ser alocado, existe uma técnica chamada *inner-fit polygon* (IFP) (Gomes e Oliveira (2002)), a qual encontra posições de alocação válidas para o item. A seguir, vamos definir esta técnica em detalhes.

3.4.1 Inner-fit polygon (IFP)

O conceito de *inner-fit polygon* (Gomes e Oliveira (2002)) é derivado do conceito de *no-fit polygon* e ele representa um conjunto possível de pontos para alocar um polígono dentro de um recipiente.

Para recipientes retangulares, considere o retângulo A que representa o recipiente (quando o recipiente não tem largura definida, podemos considerar que a largura do recipiente é a soma da largura de todos os itens a serem alocados). Para construir o *inner-fit polygon* de um item B em relação ao retângulo A, o item B, com ponto de referência R_B, desliza ao longo do contorno interno do retângulo A. Isso dá origem a um retângulo cujo comprimento é o comprimento de A menos o comprimento de B e cuja largura é a largura de A menos a largura de B.

Na Figura 12, apresentamos um exemplo de um recipiente A, um item B e seu *inner-fit polygon* $(IFP_{A,B})$. Observe que:

- se o ponto de referência do item B (R_B) é colocado no interior do retângulo $IFP_{A,B}$, então B está contido em A mas não toca A, ou seja, o item B está no interior do recipiente;
- se o ponto de referência do item B (R_B) é colocado na borda do retângulo $IFP_{A,B}$, então B está contido em A e toca A, ou seja, o item B está dentro do recipiente e toca um de seus lados;
- se o ponto de referência do item B (R_B) é colocado no exterior do retângulo $IFP_{A,B}$, então B não está contido em A, ou seja, o item B está (ao menos parcialmente) fora do recipiente.

Se o recipiente é não retangular, para realizar a construção do *inner-fit polygon*, deslizamos o ponto de referência do item B (R_B) ao longo do contorno interno do recipiente A gerando, assim, um conjunto de polígonos. Estes polígonos contém as posições em que o ponto de referência do item B pode ser alocado, de forma que ele fique inteiramente contido no recipiente A, ou seja, temos o $IFP_{A,B}$. Na maioria das vezes é difícil encontrar este conjunto de polígonos.

Na Figura 13, temos um recipiente não retangular A, um item B e seu *inner-fit polygon* $(IFP_{A,B})$

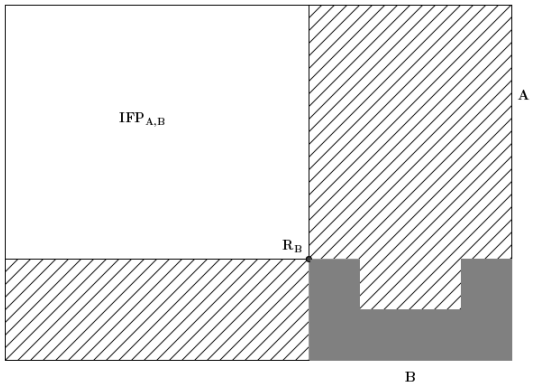


Figura 12 – Item B e seu IFP em relação ao recipiente A $(IFP_{A,B})$ (fonte: própria).

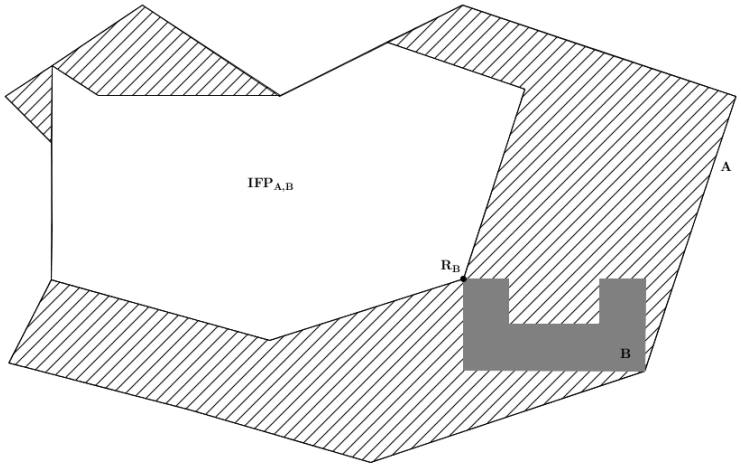


Figura 13 – Item B, recipiente não retangular A e o IFP $(IFP_{A,B})$ (fonte: própria).

Em resumo, o que difere a construção do IFP em um recipiente retangular para um recipiente não retangular é o fato que no caso em que o recipiente é dado por um retângulo temos uma fórmula fechada para o cálculo de seu IFP, o que geralmente não acontece quando temos um recipiente não retangular.

Dados os principais conceitos da geometria dos problemas de corte de itens irregulares, na próxima seção são apresentados alguns métodos de resolução destes problemas presentes na literatura.

3.5 Métodos de resolução

Realizando uma revisão bibliográfica, encontramos alguns métodos (algoritmos) para a resolução de problemas de corte de itens irregulares. Podemos dividir estes métodos em dois grandes grupos: **heurísticas** e **métodos exatos**. Na parte das heurísticas, temos as construtivas e as de melhoramento. Com relação aos modelos, podemos fazer a divisão em discretos e contínuos. A Figura 14 mostra um diagrama representando as divisões dos métodos para a resolução destes problemas.

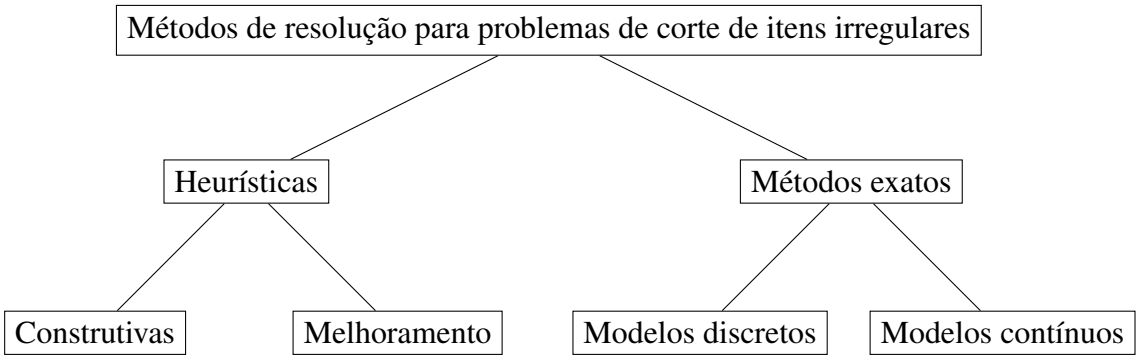


Figura 14 – Diagrama que representa os tipos de métodos para resolução de problemas de corte de itens irregulares (fonte: própria).

A seguir, abordamos alguns métodos encontrados na literatura, que pertencem a estes dois grandes grupos de métodos de resolução.

3.5.1 Heurísticas

Uma heurística é uma regra, simplificação, ou aproximação que reduz ou limita a busca por soluções em domínios que são difíceis e pouco compreendidos pelo pesquisador. Como dito anteriormente, temos as heurísticas construtivas e as de melhoramento. Vamos abordar cada uma separadamente.

3.5.1.1 Heurísticas construtivas

Uma heurística é dita construtiva se, a cada iteração, ela constrói uma solução factível para o problema. Na literatura, temos duas principais heurísticas construtivas para o problema de *nesting*: *Bottom-left* (Baker *et al.* (1980), Dowsland *et al.* (2002)) e *TOPOS* (Oliveira *et al.* (2000)).

A heurística *Bottom-left* foi desenvolvida para resolver problemas de *strip packing*, com os itens representados por polígonos. Primeiramente, os itens são ordenados segundo algum critério (área, comprimento, largura, entre outros). Em seguida, são alocados na posição mais à esquerda e abaixo do recipiente, de forma que estejam contidos no recipiente e que não haja sobreposição entre eles. A sobreposição entre os itens é verificada, geralmente, utilizando o *no-fit polygon*. Além disso, temos dois tipos de *Bottom-left*: um que permite a alocação de itens em espaços vazios deixados entre os itens já alocados e outro no qual esta alocação não é permitida.

Como na heurística anterior, a *TOPOS* também resolve um problema de *strip packing*. Os itens são representados por polígonos e alocados no recipiente, um por um, construindo uma solução parcial, a qual cresce com a alocação de um novo item. O *no-fit polygon* é utilizado para verificar sobreposição entre itens e para determinar o ponto factível do recipiente no qual o item pode ser alocado. As posições válidas verificadas para alocação de itens são dadas pelo contorno dos $NFP's$ de todos os itens já existentes no recipiente em relação ao item que se deseja alocar.

Para construir a solução, temos dois tipos de critérios: **busca local** e **ordenação inicial**.

Na **busca local**, em cada iteração, todos os itens ainda disponíveis são colocados em todas a orientações permitidas de acordo com uma estratégia escolhida (área mínima do item, comprimento mínimo do item ou máxima sobreposição entre itens). Cada solução parcial é calculada usando o critério escolhido ou uma combinação de critérios. A melhor solução é escolhida para ser a solução parcial atual que será utilizada na próxima iteração. Isto é feito até alocarmos todos os itens.

Na **ordenação inicial**, os itens são ordenados por um dos seguintes critérios: menor comprimento, menor área, menor concavidade, maior retângulo que envolve o item ou área total (quantidade do item multiplicada pela área). Em cada iteração, o próximo item a ser alocado é colocado em vários pontos factíveis, gerando, assim, diversas soluções parciais alternativas. Estas soluções são calculadas e a melhor posição (que gera o menor comprimento para o recipiente) é selecionada para de fato alocar o item. Repetimos o mesmo procedimento até que todos os itens estejam alocados.

Com o estudo bibliográfico, pudemos observar que na literatura a heurística construtiva mais utilizada é a *Bottom-left*.

3.5.1.2 Heurísticas de melhoramento

Uma heurística pode ser classificada como de melhoramento se, dada uma solução inicial (obtida por uma heurística construtiva, por exemplo), ela obtém resultados melhores do que a solução inicial dada. Em todos os casos descritos a seguir, a heurística construtiva *Bottom-left* é utilizada para gerar uma solução inicial para o problema.

A heurística *2-exchange*, proposta por Gomes e Oliveira (2002), fornece solução para um problema de *strip packing*. Os itens são representados por polígonos e ordenados por um critério (área, largura, comprimento, irregularidade, retângulo que envolve o item, ordenação randômica). Em seguida, a heurística *Bottom-left* converte a sequência de itens ordenados em uma solução inicial factível. Por fim, a *2-exchange* faz a troca de dois itens na sequência dos itens e constrói uma nova solução a partir desta nova sequência. Para realizar a troca, há três diferentes estratégias: primeira melhor solução encontrada (*first better*), melhor solução encontrada (*best*) e a solução escolhida aleatoriamente entre as melhores soluções encontrada (*random better*). Este procedimento é realizado um número finito de vezes e a melhor solução encontrada é armazenada. Esta heurística utiliza o *no-fit polygon* para verificar sobreposição entre itens. Para verificar a eficiência da heurística *2-exchange*, foram realizados experimentos computacionais baseados em um conjunto de instâncias da literatura. Na maioria dos casos, a heurística *2-exchange* obteve soluções melhores que as soluções presente na literatura.

A heurística proposta em Gomes e Oliveira (2006) resolve um problema de *strip packing* com os itens definidos por polígonos. Ela realiza a troca de dois itens na solução inicial. A

escolha dos itens a serem trocados é feita de forma aleatória. Ao realizar a troca, podemos ter sobreposição entre os itens, a qual é verificada utilizando o *no-fit polygon*. Utiliza-se um algoritmo de separação, o qual aumenta a área do recipiente para que a sobreposição seja desfeita e, a seguir, um algoritmo de compactação, que tem como finalidade diminuir o comprimento do recipiente gerando, desta forma, uma nova solução para o problema. A nova solução é aceita se o comprimento do novo recipiente for menor do que o encontrado na solução anterior. Este procedimento é realizado até que não haja mais melhorias na solução. Vale destacar que os algoritmos de separação e de compactação utilizam modelos matemáticos. Alguns experimentos preliminares foram realizados nos estágios iniciais do trabalho de Gomes e Oliveira (2006) que permitiram tomar várias decisões sobre a implementação e o ajuste de parâmetros da heurística. Com relação as instâncias utilizadas para a realização dos experimentos computacionais, foram utilizadas instâncias já presentes na literatura e classificadas como artificiais, ou seja, que foram criadas, quebra-cabeças que são instâncias com encaixe perfeito e as instâncias de vestuário que foram obtidas de uma indústria de roupas. Os melhores resultados anteriormente publicados na literatura foram melhorados para todas as instâncias utilizadas nos testes computacionais.

Um novo método heurístico de resolução para problemas de *strip packing* com itens representados por polígonos é proposto em Egeblad *et al.* (2007). Dada a solução inicial, diminuímos o comprimento do recipiente (ou seja, compactamos ainda mais os itens) até que ocorra a sobreposição de um item. A sobreposição é verificada utilizando o conceito de *no-fit polygon*. Desta forma, o comprimento do recipiente é fixo e a busca por uma solução sem sobreposição pode se iniciar. A sobreposição é iterativamente diminuída através da aplicação da busca local. Mais precisamente, a cada passo da busca local o item é deslocado primeiramente no comprimneto buscando uma posição com sobreposição mínima em relação aos itens existentes no recipiente e, em seguida, é feito o mesmo procedimento na largura. Se uma posição sem sobreposição é encontrada, o item é alocado nessa posição e, além disso, o comprimento do recipiente pode ser reduzido novamente para buscar soluções melhores. Mas, pode ocorrer que a busca local fique presa em mínimos locais. Caso isso ocorra, uma meta-heurística é aplicada, a qual, em resumo, altera a função objetivo da busca local e, em seguida, realiza-se a busca local novamente. Para a realização dos experiementos computacionais utilizou-se o mesmo conjunto de instâncias do trabalho de Gomes e Oliveira (2006). Algumas características para essas instâncias foram incluídas, como não permitir a rotação dos itens para algumas instâncias e a permissão da rotação de 90 e 180 graus para os itens. Para algumas instâncias os resultados obtidos foram melhores que os resultados presentes na literatura. Além disso, foram realizados alguns experimentos utilizando itens com três dimensões.

Em Dowsland *et al.* (1998), temos uma heurística que resolve um problema de *bin packing* com o recipiente retangular. Os itens são representados por polígonos e a verificação de sobreposição entre itens é feita utilizando o *no-fit polygon*. Para encontrar uma solução inicial, é utilizada a heurística *Bottom-left*. Porém, ela não permite que um novo item de um "salto" sobre itens já alocados no recipiente, mesmo que haja espaço suficientemente grande

para que o novo item seja alocado. Este artigo propõe uma heurística que permite este tipo de alocação de item. Para isso, as posições possíveis de alocação de cada item são reduzidas no intervalo de zero em diante para a coordenada x e de zero a $W - w$ para a coordenada y, em que W é a largura do recipiente e w é a largura do item. Quando um novo item está para ser alocado, ele é implicitamente testado em cada uma das posições do recipiente até que uma possível posição sem sobreposição com outros itens alocados é encontrada. Desta forma, o item é alocado nesta posição. Este procedimento é realizado até todos os itens serem alocados. Uma observação é que a heurística busca posições mais próximas do topo ou das bordas inferiores para realizar a alocação do item. Portanto, temos um melhoramento da heurística *Bottom-left*. Alguns experimentos computacionais foram realizados e indicaram que, embora o comportamento da heurística depende das características dos itens, ele é muito eficaz para uma variedade de diferentes tipos de itens.

3.5.2 Modelos de programação linear inteira mista

Alguns modelos matemáticos foram propostos para a resolução de problemas de corte de itens irregulares. Podemos classificar os modelos em discretos e contínuos.

No modelo apresentado em Fischetti e Luzzi (2009), os itens são definidos por polígonos e descritos por uma lista de vértices. Este modelo resolve um problema de *strip packing*. O ponto de referência de cada item é o ponto mais à esquerda e abaixo do retângulo que envolve o item. A função objetivo é linear e dada pela minimização do comprimento do recipiente de forma a acomodar todos os itens sem que haja sobreposição entre eles. Desta forma, temos dois tipos de restrições: as que impedem que os itens excedam a dimensão do recipiente e as que proíbem que os itens se sobreponham (utilizando o *no-fit polygon*). Note que estas restrições são lineares e que o número de restrições está relacionado diretamente com o número de itens que o problema apresenta. O modelo realiza a divisão dos $NFP's$ em regiões externas a partir de algumas arestas. No modelo, a representação dessas regiões é dada através de variáveis binárias. Assim, um item poderá ser alocado em apenas uma dessas regiões. Alguns testes com esse modelo foram realizados pelos autores utilizando instâncias de vidros quebrados (*broken glasses instances*), onde uma região quadrada de vidro é quebrada de forma aleatória em n itens poligonais. Este tipo de problema é importante porque se sabe, antecipadamente, o valor da solução ótima, a qual é o comprimento de todo o vidro. Para estas instâncias, os resultados não foram muito bons, pois foi obtido resultados para casos com menos de 10 itens, dentro do tempo razoável de computação, para provar otimalidade, enquanto que para a maioria dos casos, observou-se uma grande diferença entre a solução heurística e os limitantes inferiores calculados. Outros testes com diferentes problemas foram realizados e os resultados foram comparados com o resultado de uma heurística gulosa, em que os resultados deste modelo foram satisfatórios. Um ponto positivo deste modelo é que ele pode ser útil para resolver alguns sub-problemas simplificados que surgem em heurísticas. Mas, ele não consegue resolver problemas complexos do mundo real.

O modelo proposto por Alvarez-Valdes *et al.* (2013) resolve o mesmo tipo de problema dito anteriormente, com as mesmas restrições. Este modelo difere do modelo anterior (Fischetti e Luzzi (2009)) apenas na maneira como é feita a divisão dos $NFP's$, a qual utiliza todas as arestas do NFP para gerar as regiões factíveis para alocações de itens. Para representar essas regiões no modelo, foram utilizadas variáveis binárias. Um ponto forte deste modelo é que ele permite encontrar soluções ótimas e alguns limitantes para instâncias com até 16 itens (que é considerado um número significativo de itens). Por outro lado, a complexidade do problema aumenta muito fortemente com o número e a complexidade dos itens, que é medido pelo número de vértices. Pode-se dizer que parece pouco provável que algoritmos exatos para resolver modelos baseados no conceito de NFP possam ser capazes de resolver problemas grandes (com muitos itens) do mundo real.

Além disso, foi proposto em Toledo *et al.* (2013) um modelo de programação inteira mista que tem a finalidade de resolver um problema de *strip packing*. A diferença deste modelo para os anteriores é que temos a discretização do recipiente, que é representado por um conjunto de pontos. Para a verificação de sobreposição é utilizado o *no-fit polygon* e para verificar se um item está alocado no interior do recipiente utiliza-se o *inner-fit polygon*. A idéia principal do modelo é alocar os pontos de referência dos itens somente em um conjunto de pontos pré-definidos do recipiente, sem que haja sobreposição entre os itens e que estejam inteiramente contidos no recipiente. Os pontos fortes deste modelo são, em primeiro lugar, a sua robustez no que diz respeito à geometria dos itens e do recipiente. O modelo pode ser facilmente aplicado a casos geometricamente mais complexos, tais como recipientes não convexos, com buracos ou outras imperfeições. Outra vantagem importante é que o número de variáveis binárias não depende do número total de itens, mas apenas do número de tipos de itens. Isso faz com que este modelo seja particularmente adequado para problemas com poucos tipos de itens. O ponto fraco vem da natureza discreta do modelo, devido à discretização do recipiente. O número de variáveis binárias varia com a escolha da discretização do recipiente e também depende do tamanho do recipiente. Antes do modelo proposto por Toledo *et al.* (2013), não havia relatos na literatura de soluções ótimas para problemas de corte e empacotamento com mais de sete itens. Desta forma, foram realizados experimentos computacionais para quarenta e cinco instâncias em que foi obtido trinta e quatro soluções ótimas com o número de itens variando de dezesseis a cinquenta e seis itens, dependendo do número de tipos de itens, a discretização e tamanho do recipiente, o que mostrou bons resultados.

Recentemente foi proposto em Mundim *et al.* (2015) um modelo inteiro misto para a resolução de problemas de *strip packing* que utilizam itens representados por polígonos. O que difere este modelo para os outros apresentados nesta seção é que para verificar a sobreposição entre itens é necessário apenas informações dos itens, já que o modelo utiliza a *D-function* juntamente com a trigonometria direta para esta verificação. Além disso, utiliza-se o conceito de *inner-fit polygon* para delimitar as posições válidas de alocação dos itens. O ponto forte deste modelo é que não é necessário utilizar o conceito de *no-fit polygon* para verificar sobreposição

entre os itens, como nos modelos anteriores, podendo ocasionar em uma diminuição de variáveis e restrições quando comparados com os outros modelos. Além disso, alguns resultados mostraram sua eficiência quando utiliza-se instâncias clássicas da literatura e instâncias de uma indústria têxtil. Com relação aos pontos fracos, temos que este modelo só é válido para polígonos convexos (podendo utilizar a divisão de um item em polígonos convexos) e não são permitidas rotações para os itens.

A seguir, vamos formalizar e abordar métodos de solução para o problema de corte de aventais e forros de luva apresentado no Capítulo 2.

CAPÍTULO

4

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo, explicamos os métodos de resolução utilizados para o corte e empacotamento de aventais e forros de luva presentes neste projeto.

4.1 Modelos matemáticos

Com relação aos modelos matemáticos, vamos utilizar o modelo proposto por Toledo *et al.* (2013) conhecido na literatura como *Dotted-Board Model* (ou *Modelo dos pontos*) e o modelo proposto por Mundim *et al.* (2015) conhecido como *Modelo de trigonometria direta*.

A princípio, temos dois modelos que são utilizados para problemas de *strip packing* e que não resolvem nosso problema de fato, que é minimizar o comprimento de cada recipiente utilizado e a quantidade de recipientes utilizados para empacotar aventais e forros de luva. Temos que um recipiente apresenta $175cm$ de largura, que é a largura da lona de onde se cortam os itens, e $270cm$ de comprimento, que é o comprimento da mesa onde é feito o corte. Para resolver o problema de fato, vamos verificar o número máximo que podemos empacotar em um recepiente e, a partir disso, gerar camadas.

A seguir, vamos explicar cada modelo separadamente.

4.1.1 Modelo dos pontos

No *Modelo dos pontos*, proposto por Toledo *et al.* (2013), temos que o recipiente é representado por uma malha de pontos, em que g_x e g_y representam a resolução da malha no eixo x e no eixo y, respectivamente. A Figura 15 ilustra essa representação. Neste modelo, os pontos de referência dos itens podem ser posicionados apenas nos pontos da malha. A Figura 16 mostra as posições permitidas para alocação. Além disso, não é preciso considerar cada repetição do item individualmente, ou seja, os itens são divididos em tipos e o número de tipos de itens é

representado por T. Assim, o número total de itens do tipo i a ser posicionado é dado por q_i, $i = 1, \ldots, T$.

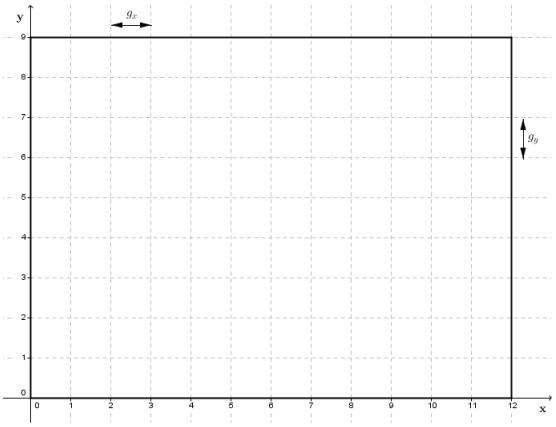


Figura 15 – Representação do recipiente dada em Toledo *et al.* (2013).

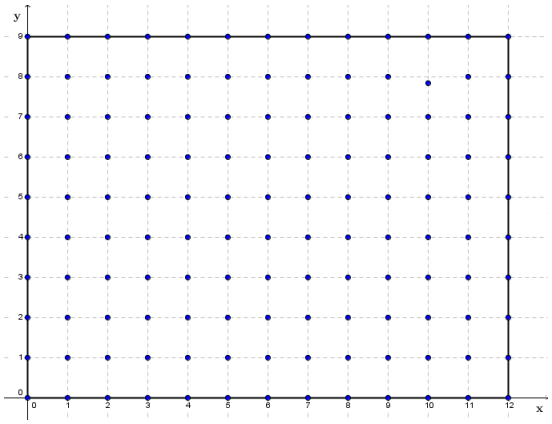


Figura 16 – Posições permitidas para alocação dos itens no recipiente (fonte: própria).

Desta forma, devemos decidir em qual posição alocar o ponto de referência de cada item. Assim, as variáveis de decisão do modelo são dadas por:

$$\delta_i^d = \begin{cases} 1, & \text{se o ponto de referência de um item } i \text{ é posicionado na posição } d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Conforme apresentado em capítulos anteriores, o problema de corte de itens irregulares apresenta três conjuntos de restrições básicos que são listados a seguir:

1. cada item precisa ser alocado inteiramente no interior do recipiente;
2. todos os itens devem ser alocados;
3. os itens não podem se sobrepor.

Para o primeiro conjunto de restrições, é utilizado o conceito de IFP, que nesta abordagem é dado por um conjunto de pontos. Assim, para garantir o posicionamento do item do tipo i no interior do recipiente, o conjunto de variáveis de decisão δ_i^d é limitado a $d \in IFP_i$, onde IFP_i são os pontos da malha que pertencem ao *inner-fit polygon* do item do tipo i com o recipiente. Temos, na Figura 17, um exemplo desta restrição para um item.

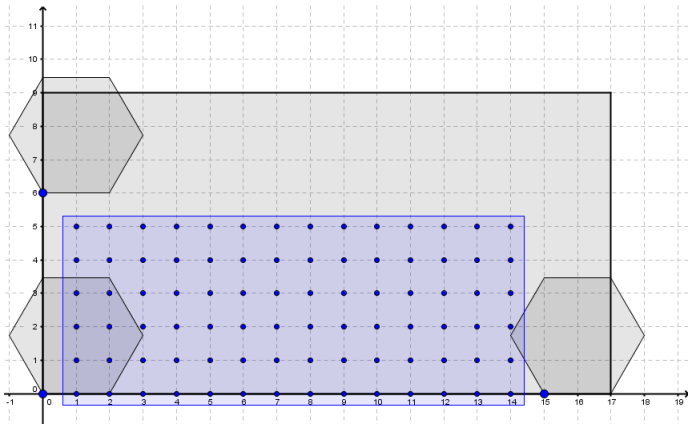


Figura 17 – Pontos em que o item pode ser posicionado (fonte: própria).

Com relação ao segundo conjunto de restrições, como q_i é o número de itens do tipo i que devem ser alocados, as seguintes restrições garantem que todos os itens serão alocados sobre o recipiente:

$$\sum_{d \in IFP_i} \delta_i^d = q_i, \quad i = 1, \ldots, T.$$

Por fim, as restrições que garantem que os itens não se sobrepõem são baseadas no conceito de NFP, que é representado por um conjunto de pontos (Figura 18). Assim, a restrição de não sobreposição de itens pode ser escrita como:

$$\delta_i^e + \delta_j^d \leq 1, \quad \forall e \in NFP_{i,j}^d, \quad \forall d \in IFP_i, \quad i, j = 1, \ldots, T,$$

onde $NFP_{i,j}^d$ é o conjunto de pontos do recipiente em que os itens j e i se sobrepõem quando o ponto de referência do item i é posicionado no ponto d do recipiente.

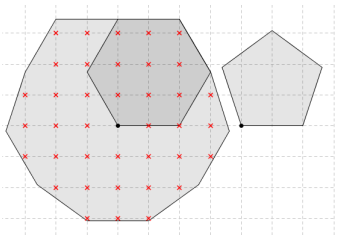


Figura 18 – Representação do NFP por um conjunto de pontos (fonte: própria).

Para cada item i, a distância horizontal (comprimento) do ponto de referência até o final do item é dada por l_i. Considerando que o recipiente tem distância de um ponto a outro no eixo x de g_x e que os itens são alocados na coluna c, o comprimento necessário para que o item i seja posicionado é dado por:

$$c.g_x + l_i.$$

Desta forma, o comprimento mínimo do recipiente suficiente para incluir todos o itens é igual a:

$$\min \ \max\{(c.g_x + l_i) \times \delta_i^d\}, \quad \forall d \in IFP_i, \quad i = 1, \ldots, T.$$

Portanto, a formulação do *Modelo dos pontos* (Toledo *et al.* (2013)) é dada por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & L & & (4.1)\\
s.a. \quad & (c.g_x + l_i) \times \delta_i^d \leq L, & \forall d \in IFP_i, \ \ i = 1, ..., T, & (4.2)\\
& \sum_{d \in IFP_i} \delta_i^d = q_i, & i = 1, \ldots, T, & (4.3)\\
& \delta_i^e + \delta_j^d \leq 1, & \forall e \in NFP_{i,j}^d, \forall d \in IFP_i, \ \ i, j = 1, \ldots, T, & (4.4)\\
& \delta_i^d \in \{0, 1\}, & \forall d \in IFP_i, \ \ i = 1, \ldots, T, & (4.5)\\
& L \geq 0 & & (4.6)
\end{aligned}$$

A função objetivo (4.1) minimiza o comprimento utilizado do recipiente que é definido nas restrições (4.2). As restrições (4.3) garantem que todos os itens são alocados no interior do recipiente. As restrições (4.4) asseguram que os itens não se sobrepõem. Por fim, o domínio das variáveis é definido em (4.5) e (4.6).

É importante destacar que, nesse modelo, os itens não podem sofrer rotações. Para considerar a rotação, podemos tomar o item rotacionado como sendo um novo tipo de item.

4.1.2 Modelo de trigonometria direta

Nesta seção, temos um modelo de programação inteira mista para a resolução do problema de corte de itens irregulares em faixa.

Primeiramente, a Figura 19 ilustra um item i e seus vértices. O ponto de referência do item é destacado em preto. Também são definidos $h_i^{\min}(h_i^{\max})$, que representa a distância entre o ponto de referência e o ponto mais acima (abaixo) do item, e $l_i^{\min}(l_i^{\max})$, que é a distância entre o ponto de referência e o ponto mais à esquerda (direita) do item. Estas distâncias são importantes para garantir que o item está inteiramente contido no recipiente.

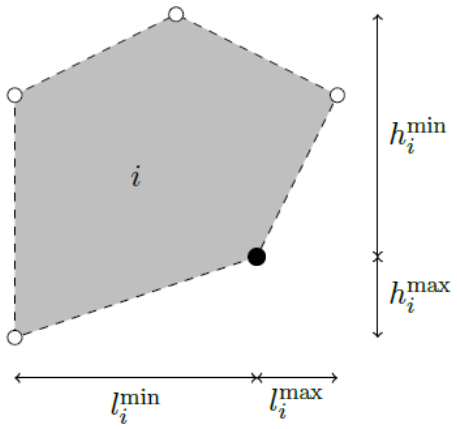


Figura 19 – Representação de um item e algumas medidas importantes dada em Mundim *et al.* (2015).

A maior vantagem deste modelo é como as restrições de não sobreposição são tratadas. Para evitar a sobreposição entre cada par de itens, utiliza-se apenas análises sobre os vértices dos polígonos que compõem os itens, ou seja, não é necessário ferramentas geométricas mais complexas que necessitam de cálculo a priori, como no caso do *no-fit polygon*. A única função utilizada é a *D-function*.

Considerando os pontos $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$ e $r = (r_x, r_y)$, a *D-function* é dada por:

$$D_{abr} = (a_x - b_x)(a_y - r_y) - (a_y - b_y)(a_x - r_x). \tag{4.7}$$

A Figura 20, apresenta os valores que D_{abr} pode assumir. Se $D_{abr} > 0$ (Figura 20(i)), o ponto r está a esquerda da reta que passa pelos pontos (a,b); se $D_{abr} = 0$ (Figura 20(ii)) o ponto r está sobre a reta que passa pelos pontos (a,b); e se $D_{abr} < 0$ (Figura 20(iii)), o ponto r está a direita da reta que passa pelos pontos (a,b).

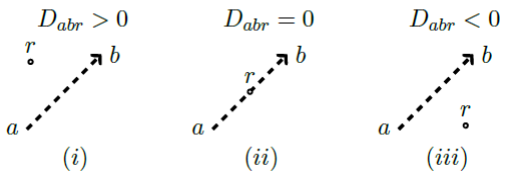


Figura 20 – Exemplo de valores para a *D-function* (extraída de Mundim *et al.* (2015)).

Para definir as restrições de não sobreposição dos itens, considere os pontos $a^k = (a_x^k, a_y^k)$ e $b^k = (b_x^k, b_y^k)$, dois vértices consecutivos que compõem uma aresta k de um item i. Define-se então g_x^{irj} e g_y^{irj} como as distâncias horizontal e vertical entre o ponto de posicionamento de um item i (x_i, y_i), e o vértice r de um item j. Com isto, podemos redefinir a *D-function* apresentada em (4.7) criando a desigualdade (4.8) que elimina a sobreposição entre os itens i e j:

$$D_{abg} = (a_x^k - b_x^k)(a_y^k - g_y^{irj}) - (a_y^k - b_y^k)(a_x^k - g_x^{irj}) \leq 0. \tag{4.8}$$

Esta expressão pode ser reescrita substituindo a distância ao vértice r do item j pela soma da distância ao ponto de referência do item j mais a distância deste ponto ao vértice r. Considere assim a distância horizontal e vertical entre o ponto de referência de um item j e o seu vértice r, dadas respectivamente por g_x^{irj} e g_y^{irj}. Utilizando esse fato, podemos reescrever a desigualdade (4.8) como

$$(a_x^k - b_x^k)(a_y^k + y_i - y_j - g_y^{irj}) + (a_y^k - b_y^k)(a_x^k + x_i - x_j - g_x^{irj}) \leq 0. \tag{4.9}$$

Com algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte desigualdade:

$$C_{ij}^{kr} + (a_x^k - b_x^k)(y_i - y_j) + (a_y^k - b_y^k)(x_i - x_j) \leq 0, \tag{4.10}$$

em que C_{ij}^{kr} é a constante definida por $(a_x^k - b_x^k)(a_y^k - g_y^{jrj}) - (a_y^k - b_y^k)(a_x^k - g_x^{jrj})$.

Vale a pena citar que não é necessário criar uma restrição para cada vértice r de um item j, visto que este somente é relevante para a definição da constante C_{ij}^{kr}. De fato, definindo C_{ij}^k como a constante dada por $\max_r C_{ij}^{kr}$, a restrição (4.10) pode ser simplificada como

$$C_{ij}^k + (a_x^k - b_x^k)(y_i - y_j) + (a_y^k - b_y^k)(x_i - x_j) \leq 0. \tag{4.11}$$

A restrição (4.10) (ou (4.11)) garante a não sobreposição entre dois itens, impondo que todos os vértices que estejam à direita de um item j estão à direita da reta definida pela aresta k de um item i. No entanto, não é necessário verificar esta condição para todas as arestas do item i, bastando que seja verificada para qualquer uma das arestas. Deste modo, precisa-se definir qual reta será ativada para garantir a não sobreposição entre os itens minimizando o comprimento da placa utilizado. Para isto, considere as variáveis v_{ij}^k, que assumem o valor 1 se a reta k de um item i é a reta que separa os itens i e j, e 0 caso contrário. Considere K_i o conjunto de retas que contêm uma aresta do polígono i. A nova restrição pode ser formulada como

$$C_{ij}^k + (a_x^k - b_x^k)(y_i - y_j) + (a_y^k - b_y^k)(x_i - x_j) \leq (1 - v_{ij}^k)M,$$

$$i = 1, \cdots, N, j = 1, ..., N, i \neq j, k \in K_i,$$

em que M é um número real suficientemente grande para manter a desigualdade sempre válida. Vale a pena citar que esta restrição só é válida para polígonos convexos.

Sabemos que, para cada par de itens i e j, uma desigualdade deve ser ativa para evitar a sobreposição entre os itens. Desta maneira, é necessário criar uma restrição que garanta que uma das desigualdades relacionadas a cada par de itens será válida. A seguir, apresentamos a restrição que garante que exatamente uma das restrições que separam os itens i e j é ativa:

$$\sum_{k \in K_i} v_{ij}^k + \sum_{k \in K_j} v_{ji}^k = 1, \quad 1 \leq i < j \leq N,$$

em que N é o número de itens.

Para exemplificar a restrição anterior, temos na Figura 21, dois itens (1 e 2) com os conjuntos de retas $K_1 = \{a,b,c,d\}$ e $K_2 = \{e,f,g,h\}$, que contêm uma aresta do polígono 1 e 2, respectivamente. Desta forma, podemos escrever a restrição da seguinte forma: $v_{12}^a + v_{12}^b + v_{12}^c + v_{12}^d + v_{21}^e + v_{21}^f + v_{21}^g + v_{21}^h = 1$.

Escolhendo, por exemplo, $v_{12}^a = 1$, temos que todas as outras variáveis devem ser iguais a zero. Desta forma, temos que a reta a está ativa.

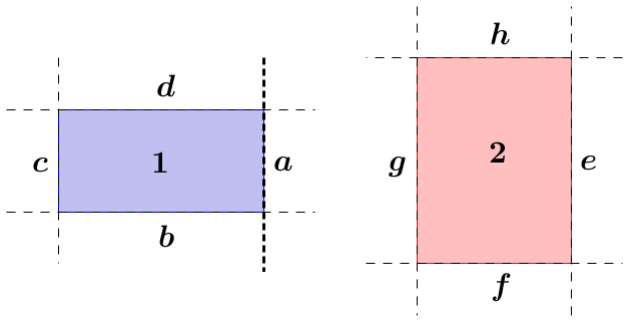


Figura 21 – Exemplo com dois itens e uma reta ativa em destaque (fonte: própria).

Além disso, é necessário que todos os itens a serem cortados estejam no interior do recipiente. Para isso, é utilizado o conceito de *inner-fit polygon*, em que, ele determina a região dentro do recipiente onde o ponto de referência do item pode ser alocado de forma que o item esteja completamente contido no recipiente. A Figura 22 ilustra o *inner-fit polygon* de um item i. Como o recipiente é retangular, esta restrição pode ser garantida utilizando informações geométricas simples sobre cada item. As restrições abaixo garantem que os itens estão inteiramente alocados dentro do recipiente:

$$l_i^{\min} \leq x_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$h_i^{\min} \leq y_i \leq H - h_i^{\max}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

onde H é a largura fixa do recipiente.

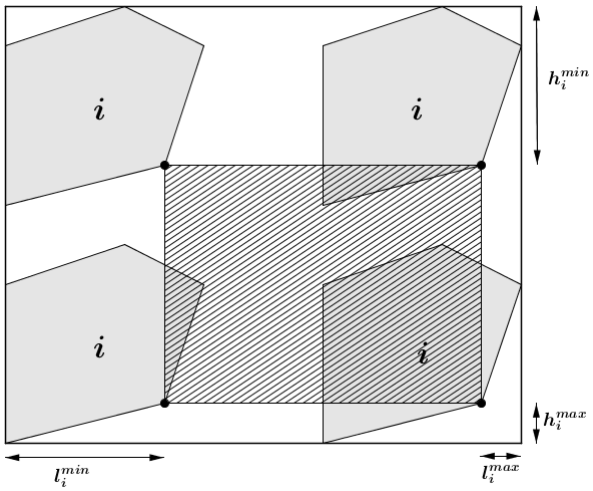


Figura 22 – Exemplo de *inner-fit polygon*, região hachurada, de um item i em um recipiente regular (adaptado de Mundim *et al.* (2015)).

Nosso objetivo é cortar todos os itens dentro da faixa de menor comprimento possível L do recipiente. Para dar suporte a esta função objetivo, introduzimos as restrições

$$x_i \leq L - l_i^{\max}, \quad i = 1, ..., N,$$

que garantem que o comprimento do recipiente utilizado pelo corte dos itens mais à direita seja contabilizado.

O modelo completo, denominado *Modelo de trigonometria direta* (MTD) (Mundim *et al.* (2015)), é apresentado a seguir.

$$\begin{aligned}
\min \quad & L & & (4.12)\\
s.a \quad & l_i^{\min} \leq x_i \leq L - l_i^{\max}, & i = 1, ..., N, \quad & (4.13)\\
& h_i^{\min} \leq y_i \leq H - h_i^{\max}, & i = 1, ..., N, \quad & (4.14)\\
& C_{ij}^k + (a_x^k - b_x^k)(y_i - y_j) + & & \\
& (a_y^k - b_y^k)(x_i - x_j) \leq (1 - v_{ij}^k)M, & i, j = 1, ..., N, i \neq j, k \in K_i, \quad & (4.15)\\
& \sum_{k \in K_i} v_{ij}^k + \sum_{k \in K_j} v_{ji}^k = 1, & 1 \leq i < j \leq N, \quad & (4.16)\\
& (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, & i = 1, ..., N, \quad & (4.17)\\
& v_{ij}^k \in \{0, 1\}, & i, j = 1, ..., N, i \neq j, k \in K_i. \quad & (4.18)
\end{aligned}$$

A função objetivo (4.12) minimiza o comprimento utilizado do recipiente que é definido nas restrições (4.13). As restrições (4.13) e (4.14) garantem que todos os itens são alocados no interior do recipiente. As restrições (4.14) asseguram que os itens não se sobrepõem. As

restrições (4.16) garantem que exatamente uma das restrições que separam os itens i e j será ativa. Por fim, o domínio das variáveis é definido em (4.17) e (4.18). Neste modelo não são permitidas rotações para os itens.

4.2 Métodos heurísticos

Com relação aos métodos heurísticos, vamos utilizar a heurística *Bottom-left* discreta, a heurística *Top-bottom-left* discreta, a heurística *Bottom-left* contínua, a heurística *Top-bottom-left* contínua, a heurítica *Top-bottom-left* contínua aleatória, e por fim, a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória (Baker *et al.* (1980)).

Todas as heurísticas citadas nesta seção lidam com problemas de *bin packing* e sempre buscam o ponto mais à esquerda do recipiente para a alocação de cada item. O intuito de alocar os itens o mais à esquerda é minimizar o comprimento de cada recipiente utilizado, como gostaríamos para a resolução do problema estudado neste trabalho.

A seguir, vamos explicar cada heurística separadamente.

4.2.1 Heurística Bottom-left contínua

Na heurística *Bottom-left* contínua, os pontos de alocação para os itens são limitados pelo fato de utilizarmos os pontos de intersecção entre os $NFP's$, $IFP's$ e o recipiente para encontrar uma posição válida de alocação para cada item. Sempre buscamos posições mais à esquerda e abaixo do recipiente para alocar um item. A seguir, temos o Algoritmo 1 que apresenta a heurística *Bottom-left* contínua.

Na heurística *Bottom-left* contínua, os itens são ordenados por seu comprimento em ordem decrescente. A estratégia utilizada consiste em alocar cada tipo de item até atender à demanda ou não conseguir empacotar mais nenhum item daquele tipo, passando para o próximo tipo de item. O algoritmo tem como entradas: $Itens$, que é a lista com os tipos de itens; $demanda$, que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; n, a quantidade de tipos de itens; L e C, a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente. Como saída temos S que é a solução obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente. Ao procurar um ponto melhor, candidato à inserção para o item (ou seja, um ponto mais à esquerda e abaixo do recipiente), tomamos pontos nas arestas dos $NFP's$ do item a ser inserido contra os itens já inseridos no recipiente, já que estes representam posições do recipiente em que o item irá tocar algum outro item já alocado. Ao considerar estes pontos, podemos nos deparar com pontos de inserção que não respeitam algumas das restrições de não sobreposição com itens já inseridos ou de manter o item dentro do recipiente. Nestes casos, trocamos o ponto candidato a ponto de inserção por outro, dado pela intersecção de arestas de $NFP's$ ou $IFP's$ cujas restrições foram violadas.

Para ilustrar o funcionamento da heurística *Bottom-left* contínua, temos, na Figura 23(a),

Algoritmo 1: Heurística *Bottom-left* contínua

```
   Entrada: Itens, demanda, n, L, C
   Saída: S
 1 início
 2     S ← ∅;
 3     k ← 0;
 4     i ← 1;
 5     Itens é ordenado, de forma decrescente, pelo comprimento de cada item;
 6     totalItens recebe o somatório do vetor demanda;
 7     enquanto totalItens > 0 faça
 8         k ← k + 1;
 9         Crie um recipiente_k vazio de largura L e comprimento C;
10         enquanto i < n faça
11             enquanto j < demanda_i faça
12                 T ← ∅;
13                 Insira no conjunto R as retas que passam pelas arestas do IFP do item i;
14                 para cada NFP_wi do item i (orbital) contra os itens w já alocados no recipiente_k faça
15                     Insira no conjunto R as retas que passam pelas arestas do NFP_wi;
16                 fim
17                 para cada par u, v de retas que pertence a R faça
18                     Calcule o ponto p de intersecção de u e v;
19                     se p está na borda ou fora dos NFPs dos itens já alocados e dentro do IFP do item i
                       então
20                         Insira p na lista T;
21                     fim
22                 fim
23                 se L ≠ ∅ então
24                     Busque na lista T o ponto cand_i mais à esquerda e abaixo do recipiente_k;
25                     A solução S recebe o item i na posição cand_i no recipiente_k;
26                     demanda_i ← demanda_i − 1;
27                     totalItens ← totalItens − 1;
28                 fim
29                 senão
30                     i ← i + 1;
31                     Volte para a linha 10;
32                 fim
33                 j ← j + 1;
34             fim
35             i ← i + 1;
36         fim
37     fim
38 fim
39 retorna S
```

um recipiente, os itens ordenados pelo comprimento de forma decrescente e uma demanda de duas unidades para cada tipo de item. Na Figura 23(b), temos que o primeiro item foi alocado na posição mais à esquerda e abaixo no recipeinte. Utilizamos esta mesma estratégia de alocação para os demais itens (Figuras 23(c)-(g)). Note que, a heurística *Bottom-left* contínua descrita nesta dissertação permite a alocação de um item à esquerda de um item que já está alocado no recipiente.

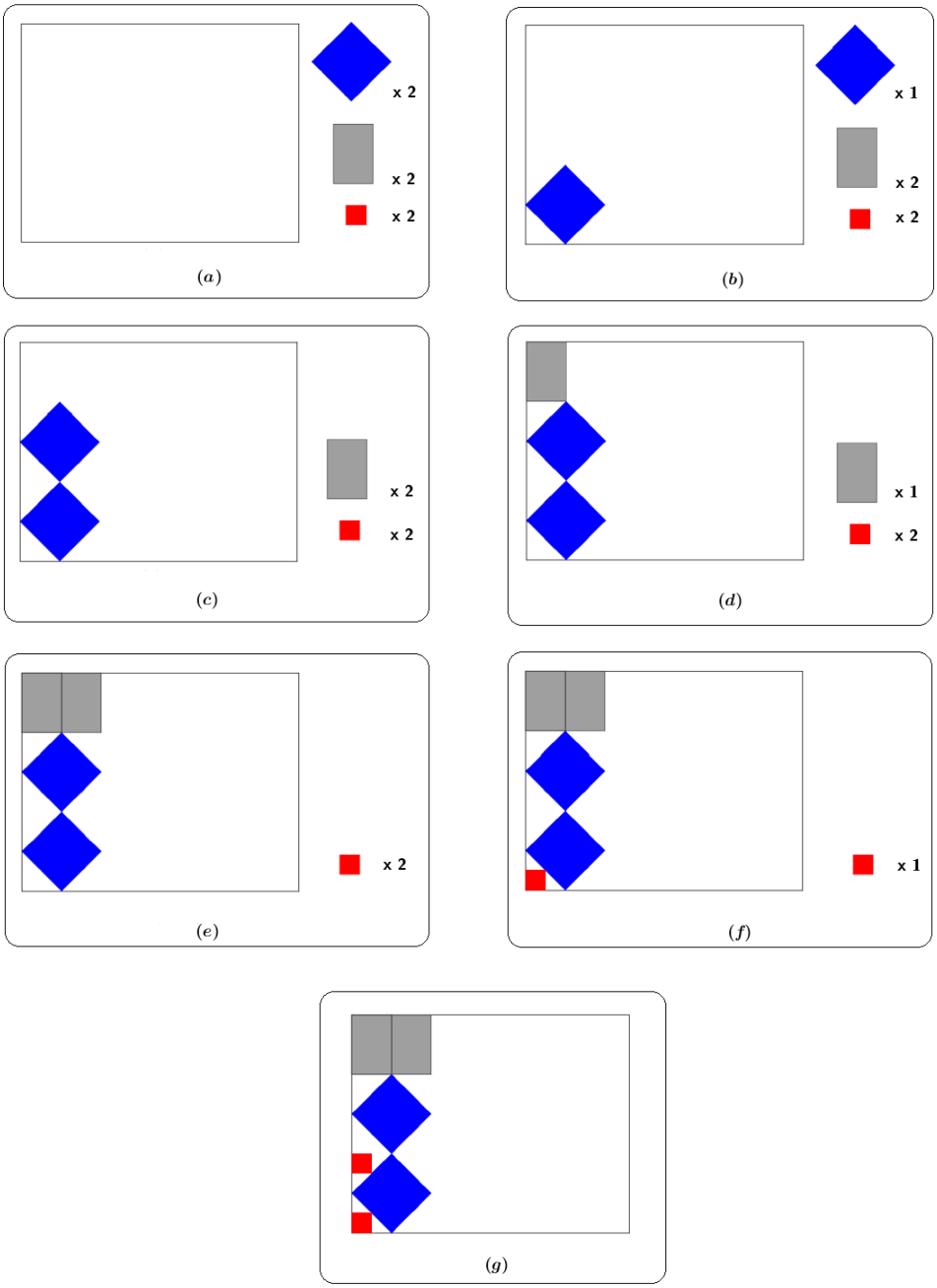


Figura 23 – Exemplo utilizando a heurística *Bottom-left* contínua (fonte: própria).

4.2.2 Heurística Top-bottom-left contínua

A heurística *Top-bottom-left* contínua é baseada na heurística *Bottom-left* contínua. O que difere estas duas heurísticas é a forma da busca de posições de alocação do item. Neste caso, buscamos posições sempre mais à esquerda e abaixo para um item e, para o item seguinte, posições mais à esquerda e acima do recipiente para alocá-lo. Para obtermos um algoritmo para a heurística *Top-bottom-left* contínua, basta substituir o trecho de código, a partir da linha 24 até a linha 27 do Algoritmo 1, pelo o código dado a seguir. Devemos inserir o comando $inferior \leftarrow 1$

antes da linha 5 do Algoritmo 1.

```
1  se inferior = 1 então
2      Busque na lista L o ponto cand_i mais à esquerda e abaixo do recipiente_k;
3      A solução S recebe o item i na posição cand_i no recipiente_k;
4      demanda_i ← demanda_i − 1;
5      totalItens ← totalItens − 1;
6  fim
7  senão
8      Busque na lista L o ponto cand_i mais à esquerda e acima do recipiente_k;
9      A solução S recebe o item i na posição cand_i no recipiente_k;
10     demanda_i ← demanda_i − 1;
11     totalItens ← totalItens − 1;
12 fim
```

Para ilustrar o funcionamento da heurística *Top-bottom-left* contínua, temos, na Figura 24(a), um recipiente, os itens ordenados pelo comprimento de forma decrescente e uma demanda de duas unidades para cada tipo de item. Na Figura 24(b), temos que o primeiro item foi alocado na posição mais à esquerda e abaixo no recipeinte. Na Figura 24(c), temos que o item seguinte foi alocado na posição mais à esquerda e acima no recipiente. Utilizamos esta mesma estratégia de alocação para os demais itens (Figuras 24(d)-(g)). Note que, a heurística *Top-bottom-left* contínua descrita nesta dissertação permite a alocação de um item à esquerda de um item que já está alocado no recipiente.

4.2.3 Heurística Bottom-left discreta

Na heurística *Bottom-left* discreta, o item sempre é alocado o mais abaixo e à esquerda possível no recipiente. Denominamo-na discreta pelo fato de utilizarmos uma malha discretizada em centímetros.

O Algoritmo 2 apresenta a heurística *Bottom-left* discreta. Nela, os itens são ordenados por seu comprimento em ordem decrescente. A estratégia utilizada consiste em alocar cada tipo de item até atender à demanda ou não conseguir empacotar mais nenhum item daquele tipo, passando para o próximo tipo de item. A busca por posições de alocação é feita de acordo com o Canto Esquerdo mais próximo da borda Inferior (CEI). Para exemplificar, a Figura 25 apresenta uma discretização da mesa com lado de cinco centímetros, para as buscas de posições (CEI) em cada posição da malha, ordenada de forma crescente. Verificamos se o ponto de referência do item pode ser alocado ou não nas posições da malha através do *no-fit polygon* e *inner-fit polygon*. O algoritmo tem como entradas: *Itens*, que é a lista com os tipos de itens; *demanda*, que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; n, a quantidade de tipos de itens; L e C, a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente. Como saída temos S que é a solução

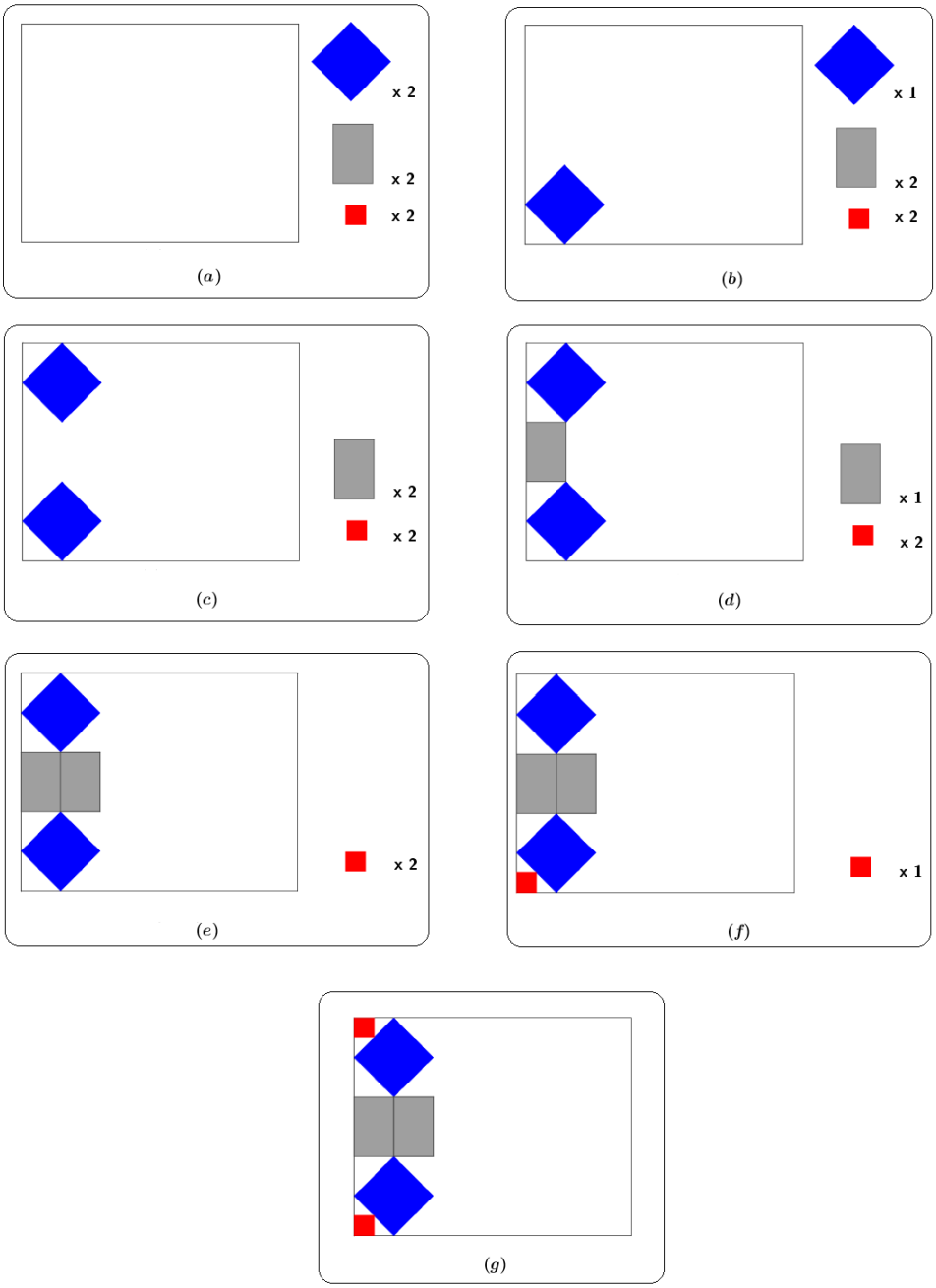


Figura 24 – Exemplo utilizando a heurística *Top-Bottom-left* contínua (fonte: própria).

obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente. Utilizamos este mesmo algoritmo no caso em que temos os itens dos forros de luva.

Para ilustrar o funcionamento da heurística *Bottom-left* discreta, temos, na Figura 26(a), um recipiente com sua discretização, os itens ordenados pelo comprimento de forma decrescente, com os seus pontos de referência em destaque (ponto preto) e uma demanda de duas unidades para cada tipo de item. Na Figura 26(b), temos que o primeiro item foi alocado na posição mais à esquerda e abaixo no recipiente respeitando a discretização do recipiente. Utilizamos esta mesma estratégia de alocação para os demais itens (Figuras 26(c)-(g)). Note que, a heurística *Bottom-left* discreta descrita nesta dissertação permite a alocação de um item à esquerda de um item que já

5	10	15	20	25
4	9	14	19	24
3	8	13	18	23
2	7	12	17	22
1	6	11	16	21

(CEI)

Figura 25 – Busca de posições factíveis: canto esquerdo inferior (CEI).

Algoritmo 2: Heurística *Bottom-left* discreta

Entrada: $Itens$, $demanda$, n, L, C
Saída: S

1 **início**
2 $S \leftarrow \emptyset$;
3 $k \leftarrow 0$;
4 $i \leftarrow 1$;
5 $Itens$ é ordenado, de forma decrescente, pelo comprimento de cada item;
6 $totalItens$ recebe o somatório do vetor $demanda$;
7 **enquanto** $totalItens > 0$ **faça**
8 $k \leftarrow k+1$;
9 Crie um $recipiente_k$ vazio de largura L e comprimento C;
10 **enquanto** $i < n$ **faça**
11 **enquanto** $j < demanda_i$ **faça**
12 Busque o ponto do $recipiente_k$, pela forma CEI, em que o item i pode ser alocado na rotação 0°;
13 **se** *o item i pode ser alocado no* $recipiente_k$ **então**
14 A solução S recebe o item i na posição encontrada e rotação de 0° no $recipiente_k$;
15 $demanda_i \leftarrow demanda_i - 1$;
16 $totalItens \leftarrow totalItens - 1$;
17 **fim**
18 **senão**
19 $i \leftarrow i+1$;
20 Volte para a linha 10;
21 **fim**
22 $j \leftarrow j+1$;
23 **fim**
24 $i \leftarrow i+1$;
25 **fim**
26 **fim**
27 **fim**
28 **retorna** S

está alocado no recipiente.

4.2.4 Heurística Top-bottom-left discreta

A heurística *Top-bottom-left* discreta é especialmente desenvolvida para o problema estudado e para as características geométricas dos itens que representam os aventais e os forros de luva. Primeiramente, observamos que a geometria dos itens e do recipiente sugerem alocar primeiro os itens maiores, de preferência próximos da borda superior ou inferior do recipiente e, em seguida, os itens menores, levando à obtenção de soluções de boa qualidade. Outra ideia,

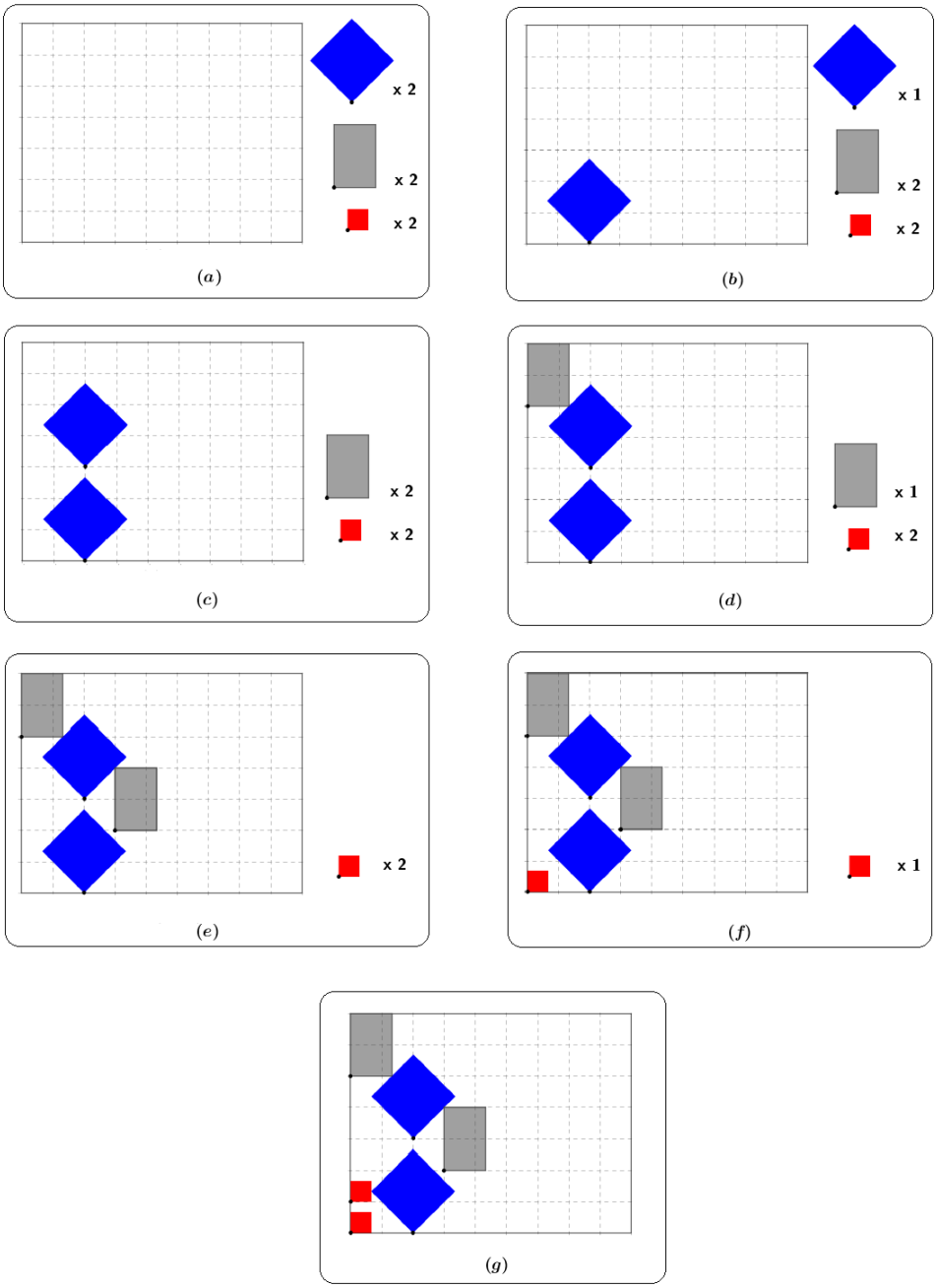


Figura 26 – Exemplo utilizando a heurística *Bottom-left* discreta (fonte: própria).

apresentada na Figura 27, é alocar os itens no canto inferior (avental G) e os itens no canto superior na rotação de 180 graus (avental M). Neste trabalho, discretizamos o recipiente que representa uma mesa com largura L e comprimento C.

Através de alguns experimentos computacionais preliminares, observamos que a alocação, apresentada na Figura 28, do item no canto superior (avental M) sem a rotação de 180 graus resultava em melhores resultados. Desta forma, a heurística *Top-bottom-left* discreta aloca os itens no canto inferior (avental G) e os itens no canto superior (avental M) na rotação de zero grau, mantendo a discretização do recipiente em centímetros.

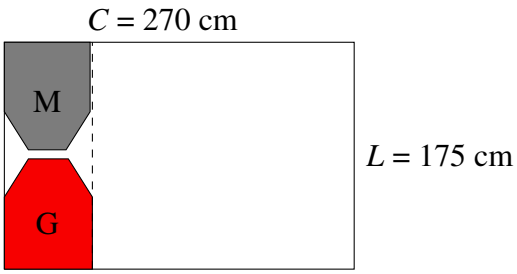


Figura 27 – Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de 180 graus para o item do canto superior (fonte: própria).

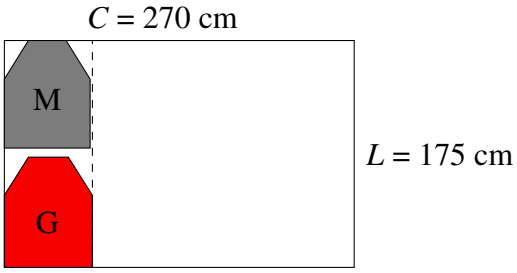


Figura 28 – Exemplo de alocação de dois aventais com a rotação de zero grau para o item do canto superior (fonte: própria).

O que difere este método de resolução para a heurística *Bottom-left* discreta é que a busca por posições de alocação é feita de duas maneiras, sempre intercaladas no algoritmo pela variável $inferior$: Canto Esquerdo mais próximo da borda Inferior (CEI) e Canto Esquerdo mais próximo da borda Superior (CES). Para exemplificar, a Figura 29 apresenta uma discretização da mesa com lado de cinco centímetros, para as buscas de posições (CEI) e (CES) em cada posição da malha, ordenada de forma crescente.

Desta maneira, precisamos acrescentar, entre as linhas 12 e 13 do Algoritmo 2, o trecho de código apresentado abaixo para que tenhamos o algoritmo da heurística *Top-bottom-left* discreta. Devemos inserir o comando $inferior \leftarrow 1$ antes da linha 5 do Algoritmo 2.

---

se $inferior = 1$ **então**
  Busque o ponto do $recipiente_k$, pela forma CEI, em que o item i pode ser alocado na rotação 0°;
  $inferior \leftarrow 0$;
fim
senão
  Busque o ponto do $recipiente_k$, pela forma CES, em que o item i pode ser alocado na rotação 0°;
  $inferior \leftarrow 1$;
fim

Note que para a heurística *Top-bottom-left* discreta optamos por não ilustrar seu funcionamento, pois ele é semelhante ao da heurística *Top-bottom-left* contínua (já ilustrada), com a diferença que podemos alocar os itens apenas nos pontos da discretização do recipiente, como na heurística *Bottom-left* discreta.

5	10	15	20	25
4	9	14	19	24
3	8	13	18	23
2	7	12	17	22
1	6	11	16	21

(CEI)

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

(CES)

Figura 29 – Busca de posições factíveis: canto esquerdo inferior (CEI) e canto esquerdo superior (CES).

4.2.5 Heurísticas Top-bottom-left contínua aleatória e Top-bottom-left discreta aleatória

A heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória é baseada na heurística *Top-bottom-left* contínua. O que difere as duas heurísticas é como a escolha do item, do canto (superior e inferior) do recipiente e da rotação para alocar os itens é feita, neste caso, de forma aleatória. Como desejamos verificar o comportamento da heurística aleatória, nos experimentos para esta heurística, os itens podem ter rotações de 0, 90, 180 e 270 graus para os aventais e bolsos, e 0 e 180 graus para os forros de luva. Desta forma, embaralhamos os itens e, para cada item, sorteamos um canto (superior ou inferior) e uma rotação para que o item seja alocado no recipiente.

O Algoritmo 3 apresenta a heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória. A partir do canto sorteado, definimos a posição em que o item será alocado e em qual rotação, dada pelo sorteio da mesma utilizando números aleatórios. Verificamos se o ponto de referência do item pode ser alocado ou não nas posições do recipiente (como é feito na heurística *Top-bottom-left* contínua). O algoritmo tem como entradas: $Itens$, que é a lista com os tipos de itens; $demanda$, que é um vetor com a demanda dos tipos de itens; n, a quantidade de tipos de itens; L e C, a largura e o comprimento do recipiente, respectivamente, e $maxIter$, que é o número de vezes que o algoritmo é executado. Como saída temos S que é a melhor solução obtida, formada pelas posições dos itens em cada recipiente.

O que difere a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória da heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória é apenas a busca por posição de alocação do item, a qual deve ser um ponto válido da malha, como é feito na heurística *Top-bottom-left* discreta. Esta mudança pode ser feita na linha 15 do Algoritmo 3.

Para ilustrar o funcionamento da heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória, temos, na Figura 30(a), um recipiente, uma lista de itens embaralhada, o sorteio do canto em que S representa o canto superior e I o canto inferior e, por fim, o sorteio da rotação dos itens, que neste exemplo pode ser 0 ou 90 graus. Desta forma, alocamos o item seguindo a sequência da lista de itens. Cada item é alocado na posição (S ou I) e na rotação (0 ou 90 graus) sorteadas (Figuras 30(b)-(g)). Note que, a heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória descrita nesta dissertação permite a alocação de um item à esquerda de um item que já está alocado no

Algoritmo 3: Heurística *Top-bottom-left* contínua (discreta) aleatória

```
   Entrada: Itens, demanda, n, L, C, maxIter
   Saída: S
 1 S ← ∅;
 2 S' ← ∅;
 3 para iter de 1 até maxIter faça
 4     início
 5         k ← 0;
 6         i ← 1;
 7         Itens é embaralhado;
 8         Para cada cópia de item, sortear um canto (superior ou inferior) e uma rotação;
 9         totalItens recebe o somatório do vetor demanda;
10         enquanto totalItens > 0 faça
11             k ← k + 1;
12             Crie um recipiente_k vazio de largura L e comprimento C;
13             enquanto i < n faça
14                 enquanto j < demanda_i faça
15                     Busque o ponto do recipiente_k pelo canto (superior ou inferior) sorteado, em que o item
                       i pode ser alocado na rotação sorteada;
16                     se o item i pode ser alocado no recipiente_k então
17                         A solução S' recebe o item i na posição encontrada e rotação de sorteada no
                           recipiente_k;
18                         demanda_i ← demanda_i − 1;
19                         totalItens ← totalItens − 1;
20                     fim
21                     senão
22                         i ← i + 1;
23                         Volte para a linha 13;
24                     fim
25                     j ← j + 1;
26                 fim
27                 i ← i + 1;
28             fim
29         fim
30     fim
31     se a soma dos comprimentos utilizados pelos k recipientes for menor então
32         S ← S' ;
33     fim
34 fim
35 retorna S
```

recipiente. Optamos por não ilustar o funcionamento da heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória, pois é o mesmo procedimento utilizado para a heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória com a diferença que os itens poderiam ser alocados apenas nos pontos da malha na qual o recipiente foi discretizado, igual na heurística *Bottom-left* discreta.

No próximo capítulo, vamos apresentar os experimentos computacionais utilizando os métodos de resolução descritos nesse capítulo.

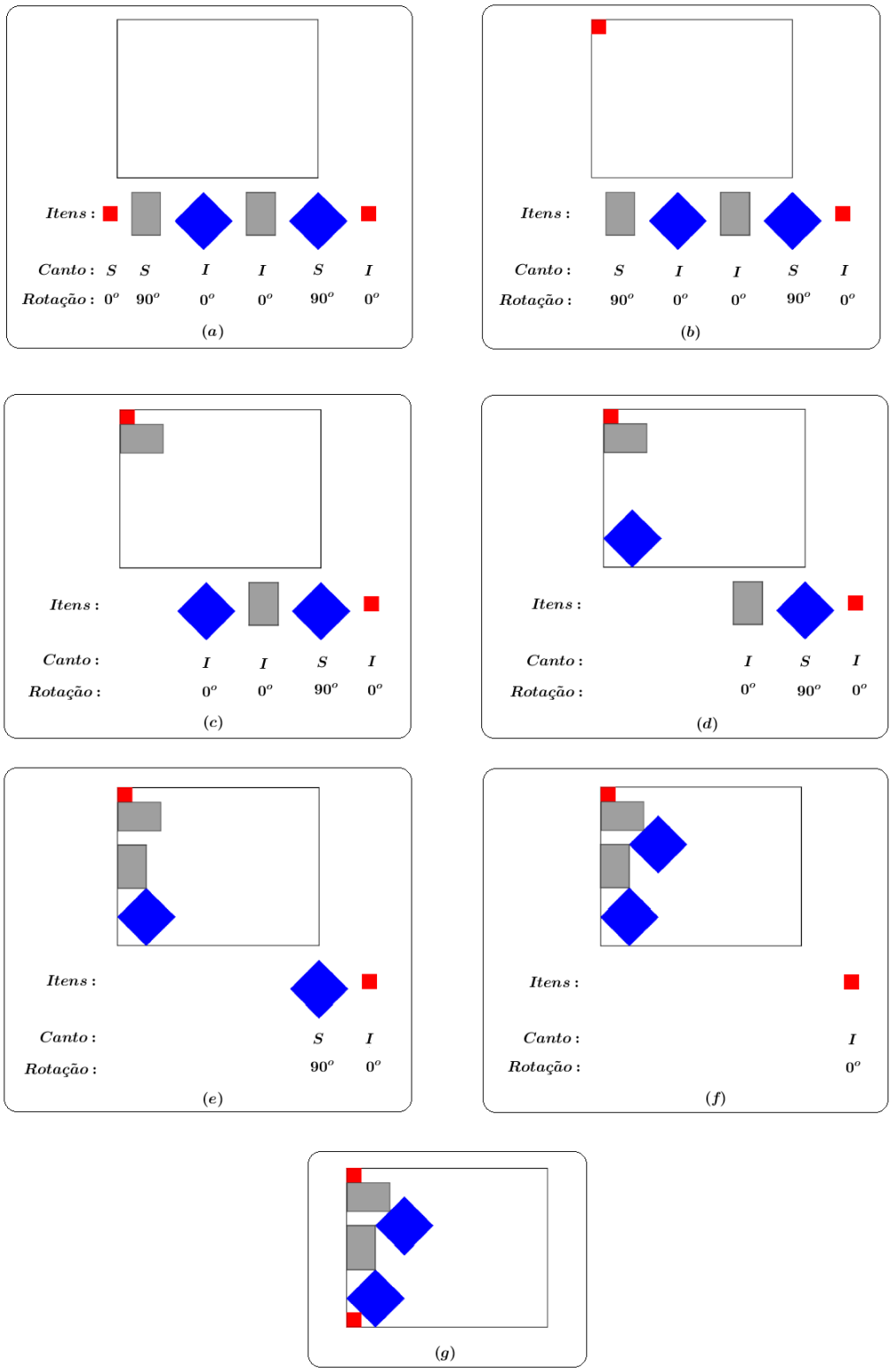


Figura 30 – Exemplo utilizando a heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória (fonte: própria).

CAPÍTULO

5

EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, apresentamos os experimentos computacionais realizados para o *Modelo dos pontos*, *Modelo de trigonometria direta*, heurísticas *Bottom-left* contínua e discreta, *Top-bottom-left* contínua e discreta e, por fim, as heurísticas *Top-bottom-left* contínua aleatória e a *Top-bottom-left* discreta aleatória . Implementamos as heurísticas em linguagem C/C++ e utilizamos o software de otimização IBM ILOG CPLEX 12.6 para a resolução do *Modelo dos pontos* e do *Modelo de trigonometria direta*. Todos os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-4790M com 16 GB de memória RAM utilizando o sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS. O tempo limite (TL) para os modelos provarem otimalidade foi restringido a 3600 segundos.

Na Seção 5.1 vamos descrever as instâncias utilizadas nos experimentos. Além disso, nas Seções 5.2 e 5.3, apresentamos os experimentos utilizando os modelos matemáticos e métodos heurísticos, respectivamente. Por fim, na Seção 5.4 temos a comparação entre o melhor modelo matemático e a melhor heurística.

5.1 Instâncias

Vamos utilizar as instâncias descritas nesta seção para os experimentos computacionais. Temos que um recipiente é representado por um retângulo com 175cm de largura e 270cm de comprimento. Temos três tipos de aventais: pequeno, médio e grande. Um par de luvas é composto por dois itens do forro da mão esquerda e dois itens do forro da mão direita, representados por polígonos e apresentados na Figura 31. Além disso, a parte de baixo do molde da luva representada na Figura 1 da Seção 2.1, foi aproximada por um polígono, de forma que isso não interfira nos resultados, ou seja, aproximamos sem que nenhuma parte do molde fosse perdida e nem que o molde apresentasse tamanho menor do que o verdadeiro. Observe que o polegar (“dedão”) não faz parte do forro de luva, pois ele é feito separadamente pela empresa, utilizando outro material.

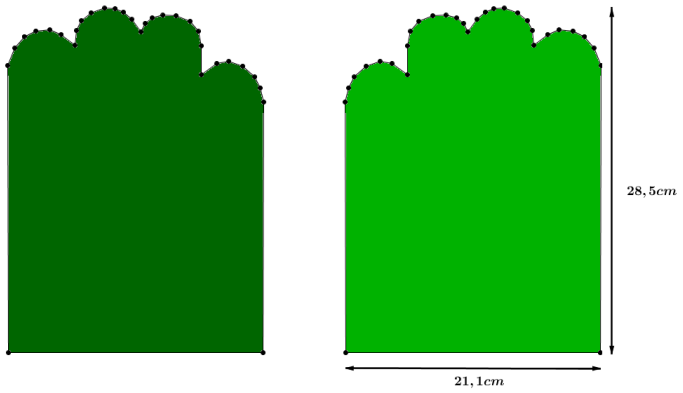


Figura 31 – Representação do forro de luva da mão direita e esquerda, respectivamente (fonte: própria).

Com relação aos aventais, temos três tamanhos diferentes (P, M e G) que podem ser vistos na Figura 32. Note que um avental é composto pelo avental propriamente dito (hexágono) e um bolso (retângulo) em ambos representados por polígonos.

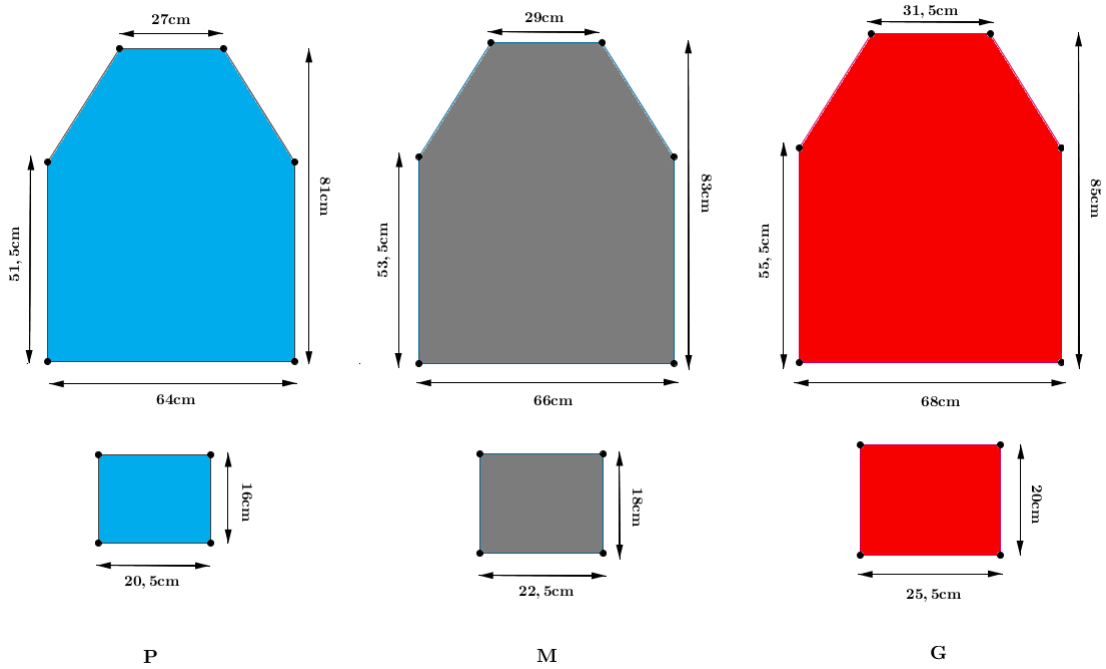


Figura 32 – Representação dos itens que compõem os aventais com seus respectivos tamanhos (fonte: própria).

Com relação aos nomes das instâncias, eles são definidos da seguinte maneira:

- $AV_{P,M,G}$: utilizando apenas aventais, onde P, M e G representam a quantidade de aventais de tamanho pequeno, médio e grande, respectivamente;

- L_{pares}: utilizando apenas forros de luva, onde *pares* representa a quantidade de pares de luvas;

- $T_{P,M,G,pares}$: utilizando aventais e forros de luva, onde P, M, G e *pares* representam a quantidade de aventais de tamanho pequeno, médio e grande, e a quantidade de pares de luvas, respectivamente.

5.2 Modelos matemáticos

Nesta seção, serão apresentados os experimentos computacionais utilizando as instâncias descritas na Seção 5.1 e os resultados obtidos pelo CPLEX para resolver os modelos apresentados na Seção 4.1.

5.2.1 Experimentos para verificar o limite dos modelos

Primeiramente, vamos realizar os experimentos visando a quantidade de itens que os modelos suportaram para serem resolvidos. Desta forma, estamos trabalhando com os modelos na forma original, resolvendo um problema de *strip packing*.

5.2.1.1 Modelo dos pontos

Nesta seção, apresentamos os experimentos utilizando o *Modelo dos pontos*. Vale comentar que foram realizados alguns experimentos computacionais utilizando o *Modelo dos pontos* com a discretização do eixo x mais fina (medida do comprimento do menor item) e a do eixo y mais grossa (medida da altura do maior item), e em ambos os eixos uma discretização fina (altura e largura do menor item). Os resultados obtidos não foram satisfatórios quando utilizamos as discretizações descritas anteriormente, pois a taxa de ocupação era menor, e quando a malha era muito fina (0,1 ou 0,2 centímetro) o software de otimização CPLEX não conseguiu resolver os problemas pela questão do número de variáveis e restrições serem elevados. Desta forma, optamos por utilizar a malha discretizada de meio em meio centímetro.

Primeiramente, verificamos o comportamento do *Modelo dos pontos* utilizando apenas um tipo de avental (P, M ou G).

Na Tabela 1, a primeira coluna apresenta o nome das instâncias; a segunda, o número total de itens cortados; a terceira, o comprimento utilizado no recipiente (CT, que significa comprimento total), em centímetros; a quarta, o tempo de resolução (T), em segundos; a quinta, a porcentagem de ocupação do recipiente (O), calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela área do recipiente, considerando que as dimensões do recipiente são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado; a sexta coluna apresenta o limitante inferior (LI), em centímetros; e por fim, o GAP em porcentagem (GAP) dado pela diferença entre o Limitante Superior (CT) e Limitante Inferior (LI), dividida pelo limitante superior, ou seja, $(CT - LI)/CT$.

Utilizando apenas aventais de tamanho P, a melhor taxa de ocupação obtida foi de $80,2\%$, alocando vinte e oito itens em um comprimento total de 495 centímetros de matéria-prima. Com

Tabela 1 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$AV_{2,0,0}$	4	80,0	5,9	70,9	80,0	0,0
$AV_{4,0,0}$	8	150,0	14,9	75,6	150,0	0,0
$AV_{6,0,0}$	12	215,0	18,9	79,2	215,0	0,0
$AV_{8,0,0}$	16	290,0	74,1	74,4	290,0	0,0
$AV_{10,0,0}$	20	365,0	131,2	77,7	365,0	0,0
$AV_{12,0,0}$	24	430,0	313,3	79,2	430,0	0,0
$AV_{14,0,0}$	28	495,0	1280,7	80,2	495,0	0,0
$AV_{16,0,0}$	32	580,0	TL	78,2	400,0	31,0
$AV_{18,0,0}$	36	655,0	TL	77,9	65,1	90,0
$AV_{20,0,0}$	40	725,0	TL	78,2	65,0	91,0
$AV_{0,2,0}$	4	85,0	0,4	71,7	85,0	0,0
$AV_{0,4,0}$	8	160,0	32,1	76,2	160,0	0,0
$AV_{0,6,0}$	12	230,0	48,0	79,5	230,0	0,0
$AV_{0,8,0}$	16	315,0	316,6	77,4	315,0	0,0
$AV_{0,10,0}$	20	390,0	471,9	78,2	390,0	0,0
$AV_{0,12,0}$	24	460,0	425,5	79,5	460,0	0,0
$AV_{0,14,0}$	28	535,0	737,7	79,8	535,0	0,0
$AV_{0,16,0}$	32	625,0	TL	78,0	70,0	88,8
$AV_{0,18,0}$	36	700,0	TL	78,4	90,0	87,1
$AV_{0,20,0}$	40	775,0	TL	78,7	125,7	83,7
$AV_{0,0,2}$	4	90,0	7,9	72,9	90,0	0,0
$AV_{0,0,4}$	8	160,0	8,3	82,0	160,0	0,0
$AV_{0,0,6}$	12	250,0	19,1	78,7	250,0	0,0
$AV_{0,0,8}$	16	320,0	262,8	82,0	320,0	0,0
$AV_{0,0,10}$	20	400,0	428,4	82,0	400,0	0,0
$AV_{0,0,12}$	24	480,0	260,0	82,0	480,0	0,0
$AV_{0,0,14}$	28	550,0	1531,4	83,5	550,0	0,0
$AV_{0,0,16}$	32	645,0	TL	81,4	410,0	36,4
$AV_{0,0,18}$	36	735,0	TL	80,3	69,9	90,4
$AV_{0,0,20}$	40	805,0	TL	81,5	49,9	93,7

relação aos aventais de tamanho M, a melhor taxa de ocupação foi de $79,8\%$, alocando vinte e oito itens, utilizando um comprimento total de 535 centímetros de matéria-prima. Por fim, com relação aos aventais de tamanho G, a melhor taxa de ocupação foi de $83,5\%$, alocando vinte e oito itens em um comprimento total de 550 centímetros de matéria-prima. Em todos os casos, temos que a solução encontrada é ótima, já que o GAP é nulo.

A Figura 33 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pelo *Modelo dos pontos* utilizando apenas um tipo de avental. Em alguns casos, temos mais de uma solução com a maior taxa de ocupação, desta forma, optamos por ilustrar apenas uma dessas soluções.

Além disso, realizamos experimentos com todos os tipos de aventais juntos. As colunas da Tabela 2 apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 1. Vamos representar, em todas as tabelas quando necessário, por um asterisco (*) as instâncias que não podem ser resolvidas por falta de memória computacional. Desta forma, as instâncias posteriores a essas serão omitidas, pois, claramente, teriam o mesmo problema, já que o número de itens seria maior e, consequentemente, o uso de memória computacional também.

Em média, a taxa de ocupação para o experimento utilizando todos os tipos de aventais, foi de $66,6\%$. Como os itens, na maioria dos casos não estão encostados uns com os outros, temos que as taxas de ocupação são baixas.

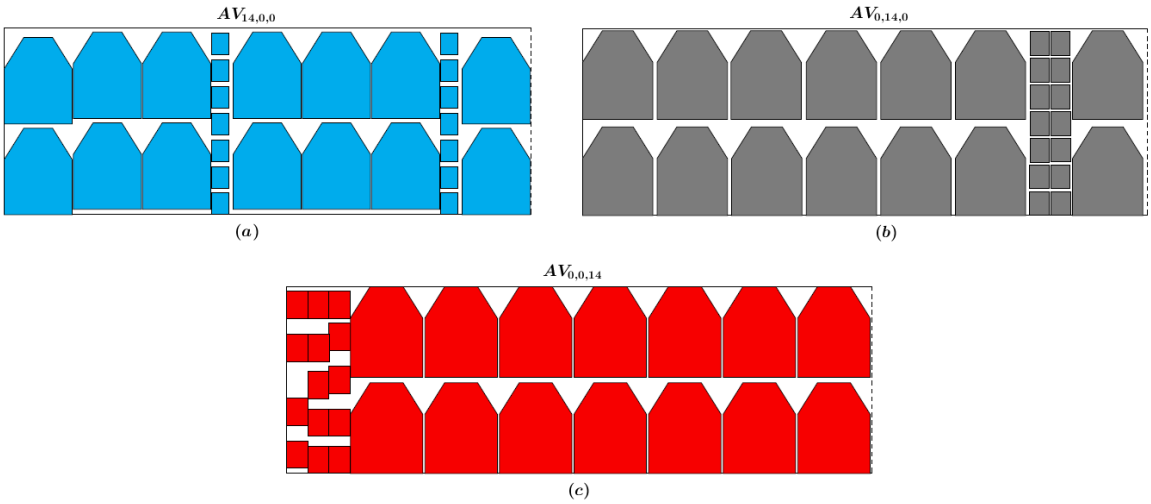


Figura 33 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente.

Tabela 2 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os tipos de aventais.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$AV_{1,1,1}$	6	135,0	183,5	67,9	135,0	0,0
$AV_{2,2,2}$	12	230,0	TL	79,7	219,9	4,3
$AV_{3,3,3}$	18	365,0	TL	75,4	10,0	97,2
$AV_{4,4,4}$	24	540,0	TL	67,9	5,0	99,0
$AV_{5,5,5}$	30	810,0	TL	56,6	1,3	99,8
$AV_{6,6,6}$	36	1080,0	TL	50,9	1,2	99,9
$AV_{7,7,7}$	42	*	*	*	*	*

Podemos verificar que a melhor taxa de ocupação foi dada quando utilizamos dois itens de cada tipo de avental, ou seja, um total de doze itens, já que para cada avental está associado um bolso. Desta forma, a ocupação foi de $79,7\%$ utilizando um comprimento total de 230 centímetros de matéria-prima e um GAP de $4,3\%$.

Com relação ao tempo de execução do método, podemos notar que em apenas uma instância ele não atingiu o tempo limite (uma hora).

A Figura 34 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo dos pontos* utilizando todos os tipos de aventais.

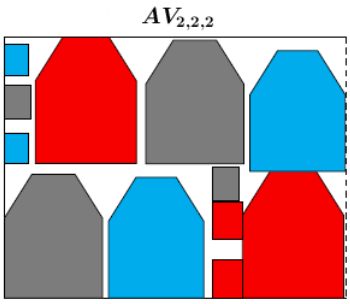


Figura 34 – Solução com a maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os tipos de aventais.

Para os experimentos utilizando os itens que representam os forros de luva, temos pela Tabela 3, que a melhor taxa de ocupação é dada por $63,3\%$ para cinco (ou dez) pares de forros de luva, utilizando um comprimento total de 100 (ou 200) centímetros de matéria-prima em $28,9$ (ou $1121,5$) segundos e GAP nulo.

Tabela 3 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando apenas os forros de luva.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
L_1	4	25,0	2,7	50,7	25,0	0,0
L_2	8	50,0	2,7	50,7	50,0	0,0
L_3	12	75,0	5,3	50,7	75,0	0,0
L_4	16	100,0	18,9	50,7	100,0	0,0
L_5	20	100,0	28,9	63,3	100,0	0,0
L_{10}	40	200,0	1121,5	63,3	200,0	0,0
L_{15}	60	310,0	TL	61,3	16,8	94,5
L_{20}	80	470,0	TL	53,9	8,6	98,1
L_{25}	100	535,0	TL	59,2	12,8	97,6
L_{30}	120	740,0	TL	51,3	12,1	98,3
L_{35}	140	810,0	TL	54,7	9,9	98,7

A Figura 35 ilustra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo dos pontos* utilizando cinco pares de forros de luva. Note que com dez pares temos a mesma taxa de ocupação, mas optamos por ilustrar apenas uma solução.

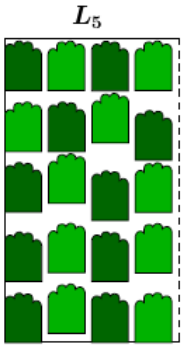


Figura 35 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando os forros de luva.

Com relação aos experimentos utilizando todos os itens juntos, temos, pela Tabela 4, que a maior taxa de ocupação é de $77,3\%$, obtida utilizando um item de cada tipo de avental e um par de forro de luva. Desta forma, temos um total de dez itens, utilizando 135 centímetros de matéria-prima. Este resultado atingiu a otimalidade em $77,3$ segundos. Em média, a taxa de ocupação foi de $68,8\%$.

A Figura 36 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo dos pontos* utilizando aventais e forros de luva.

5.2.1.2 Modelo de trigonometria direta

Primeiramente, verificamos o comportamento do *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas um tipo de avental (P, M ou G).

Tabela 4 – Resultados numéricos para o *Modelo dos pontos* utilizando todos os itens.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	135,0	403,0	77,3	135,0	0,0
$T_{2,2,2,2}$	20	295,0	TL	70,7	10,0	96,6
$T_{3,3,3,3}$	30	535,0	TL	58,5	0,8	99,8
$T_{4,4,4,4}$	40	*	*	*	*	*

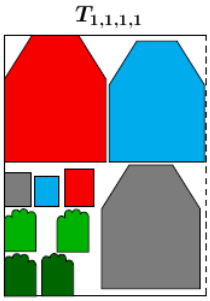


Figura 36 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo dos pontos* utilizando aventais e forros de luva.

Utilizando apenas aventais de tamanho P, temos, pela Tabela 5, que a melhor taxa de ocupação obtida foi de $87,9\%$, alocando vinte e oito itens, utilizando um comprimento total de $451,8$ centímetros de matéria-prima e um GAP de $13,2\%$. Com relação aos aventais de tamanho M, a melhor taxa de ocupação foi de 88%, alocando vinte e quatro itens, utilizando um comprimento total de $415,7$ centímetros de matéria-prima e um GAP de $12,5\%$. Por fim, com relação aos aventais de tamanho G, a melhor taxa de ocupação foi de $87,9\%$, alocando doze itens em um comprimento total de 488 centímetros de matéria-prima e um GAP de $19,9\%$.

A Figura 37 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pelo *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas um tipo de avental. Em alguns casos, temos mais de uma solução com a maior taxa de ocupação, então optamos por ilustrar apenas uma dessas soluções.

Além disso, realizamos experimentos com todos os tipos de aventais juntos. A Tabela 6 apresenta os resultados numéricos para esses experimentos. As colunas desta tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 1.

Podemos verificar que a melhor taxa de ocupação foi dada quando utilizamos dois itens de cada tipo de avental, ou seja, um total de doze itens, já que para cada avental está associado um bolso. Desta forma, a ocupação foi de $87,3\%$ utilizando um comprimento total de 210 centímetros de matéria-prima e um GAP de $5,7\%$. Em média, a taxa de ocupação para o experimento utilizando todos os tipos de aventais, foi de $80,8\%$.

Com relação ao tempo de execução do método, podemos notar que em apenas uma instância ele não atingiu o tempo limite (3600 segundos).

A Figura 38, mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo de*

Tabela 5 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$AV_{2,0,0}$	4	68,4	0,0	82,9	68,4	0,0
$AV_{4,0,0}$	8	131,8	6,1	86,1	131,8	0,0
$AV_{6,0,0}$	12	195,8	TL	86,9	192,0	1,9
$AV_{8,0,0}$	16	259,8	TL	87,4	224,0	13,7
$AV_{10,0,0}$	20	336,0	TL	84,4	280,0	16,6
$AV_{12,0,0}$	24	390,3	TL	87,2	336,0	13,9
$AV_{14,0,0}$	28	451,8	TL	87,9	392,0	13,2
$AV_{16,0,0}$	32	528,0	TL	86,0	448,0	15,1
$AV_{18,0,0}$	36	592,0	TL	86,2	504,0	14,8
$AV_{20,0,0}$	40	658,2	TL	86,2	560,0	14,9
$AV_{0,2,0}$	4	76,8	0,0	79,4	76,8	0,0
$AV_{0,4,0}$	8	146,3	12,2	83,3	146,3	0,0
$AV_{0,6,0}$	12	214,1	TL	85,4	198,0	7,5
$AV_{0,8,0}$	16	282,0	TL	86,5	242,2	14,0
$AV_{0,10,0}$	20	348,0	TL	87,6	302,8	12,9
$AV_{0,12,0}$	24	415,7	TL	88,0	363,4	12,5
$AV_{0,14,0}$	28	498,0	TL	85,7	424,0	14,8
$AV_{0,16,0}$	32	564,0	TL	86,5	484,5	14,0
$AV_{0,18,0}$	36	695,9	TL	78,8	545,1	21,6
$AV_{0,20,0}$	40	726,0	TL	84,0	605,7	16,5
$AV_{0,0,2}$	4	83,9	0,0	78,2	83,9	0,0
$AV_{0,0,4}$	8	156,0	28,8	84,1	156,0	0,0
$AV_{0,0,6}$	12	224,0	TL	87,9	195,4	12,7
$AV_{0,0,8}$	16	300,7	TL	87,3	260,5	13,2
$AV_{0,0,10}$	20	377,4	TL	86,9	325,7	13,7
$AV_{0,0,12}$	24	488,0	TL	80,7	390,8	19,9
$AV_{0,0,14}$	28	524,7	TL	87,5	456,0	13,0
$AV_{0,0,16}$	32	604,0	TL	86,9	521,1	13,7
$AV_{0,0,18}$	36	680,0	TL	86,8	586,2	13,7
$AV_{0,0,20}$	40	768,0	TL	85,4	651,4	15,1

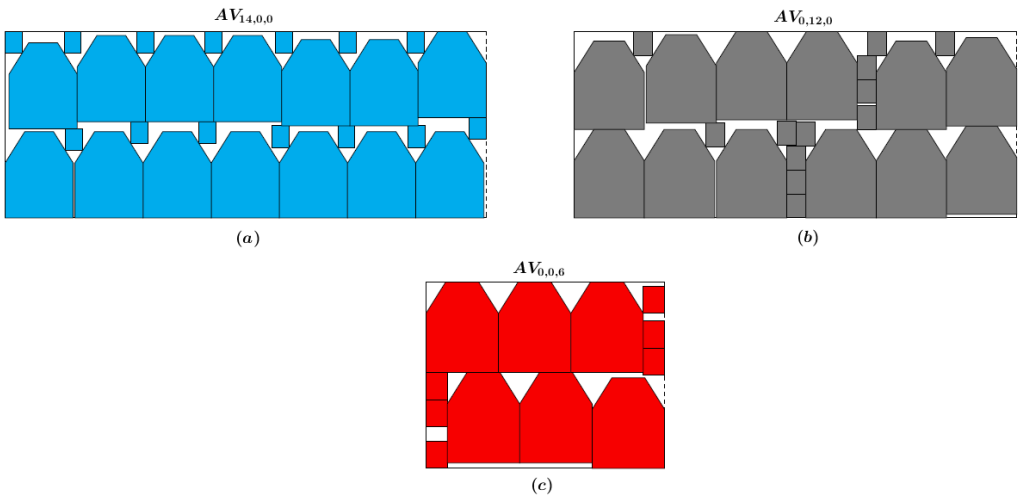


Figura 37 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente.

trigonometria direta utilizando todos os tipos de aventais.

A Tabela 7 apresenta os resultados computacionais para os experimentos com os forros de luvas. As colunas desta tabela apresentam as mesmas informações que estão na Tabela 1.

Note que, a partir de quatro pares de forros de luvas (L_4), o método não consegue encon-

Tabela 6 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os tipos de aventais.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$AV_{1,1,1}$	6	130,0	0,0	70,5	130,0	0,0
$AV_{2,2,2}$	12	210,0	TL	87,3	198,0	5,7
$AV_{3,3,3}$	18	324,0	TL	84,9	272,5	15,8
$AV_{4,4,4}$	24	424,0	TL	86,5	363,4	14,2
$AV_{5,5,5}$	30	530,0	TL	86,5	454,2	14,2
$AV_{6,6,6}$	36	658,0	TL	83,6	545,1	17,1
$AV_{7,7,7}$	42	740,5	TL	86,6	636,0	14,1
$AV_{8,8,8}$	48	872,0	TL	84,1	726,8	16,6
$AV_{9,9,9}$	54	952,1	TL	86,6	817,7	14,1
$AV_{10,10,10}$	60	1066,4	TL	85,9	908,5	14,8
$AV_{11,11,11}$	66	1264,0	TL	79,8	999,4	20,9
$AV_{12,12,12}$	72	1352,0	TL	81,3	1090,2	19,3
$AV_{13,13,13}$	78	1500,0	TL	79,4	1181,1	21,2
$AV_{14,14,14}$	84	1893,8	TL	67,7	1272,0	32,8
$AV_{15,15,15}$	90	1670,0	TL	82,3	1362,8	18,3
$AV_{16,16,16}$	96	1774,0	TL	82,7	1453,7	18,0
$AV_{17,17,17}$	102	2036,5	TL	76,5	1544,5	24,1
$AV_{18,18,18}$	108	2118,0	TL	77,9	1635,4	22,7
$AV_{19,19,19}$	114	2196,6	TL	79,3	1726,2	21,4
$AV_{20,20,20}$	120	2362,6	TL	77,6	1817,1	23,0

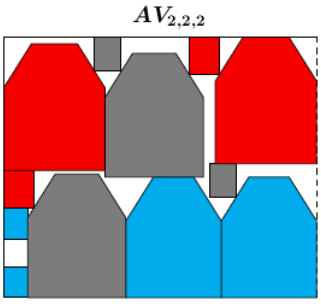


Figura 38 – Solução com a maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os tipos de aventais.

Tabela 7 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando apenas os forros de luva.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
L_1	4	21,1	0,7	60,0	21,1	0,0
L_2	8	42,2	TL	60,0	21,1	50,0
L_3	12	42,2	TL	90,1	24,0	43,1
L_4	16	-	TL	-	-	-

trar uma solução no tempo limite estipulado (3600 segundos). Desta forma, vamos representar, em todas as tabelas quando necessário, por " - " as instâncias que não conseguem encontrar uma solução dentro do tempo limite estipulado. A melhor taxa de ocupação foi dada por $90,1\%$ para três pares de forros de luva, utilizando um comprimento total de $42,2$ centímetros de matéria-prima e um GAP de $43,3\%$.

A Figura 39 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo de trigonometria direta* utilizando três pares de forros de luva.

Com relação aos experimentos utilizando todos os itens juntos temos, pela Tabela 8, que

Figura 39 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando os forros de luva.

a maior taxa de ocupação é de $86,3\%$, obtida utilizando dois itens de cada tipo de avental e dois pares de forros de luva. Desta forma, temos um total de vinte itens, utilizando $241,7$ centímetros de matéria-prima e um GAP de $18,2\%$. Note que, a partir de quarenta itens, o método de solução não consegue encontrar uma solução factível dentro do tempo limite estipulado.

Tabela 8 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando todos os itens.

Instância	Total de itens	CT(cm)	T(s)	O(%)	LI(cm)	GAP(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	130,0	21,9	80,2	130,0	0,0
$T_{2,2,2,2}$	20	241,7	TL	86,3	197,7	18,2
$T_{3,3,3,3}$	30	373,1	TL	83,9	296,5	20,5
$T_{4,4,4,4}$	40	-	TL	-	-	-

A Figura 40 ilustra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pelo *Modelo de trigonometria direta* utilizando aventais e forros de luva.

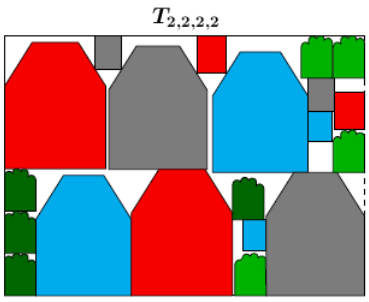


Figura 40 – Solução com maior taxa de ocupação para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando aventais e forros de luva.

5.2.1.3 Comparação entre os métodos de resolução exatos sem considerar camadas

Primeiramente, vamos analisar o comportamento dos métodos de resolução exatos utilizando apenas um tipo de avental. A Tabela 9 apresenta os resultados para os métodos de resolução exatos utilizando apenas um tipo de avental.

Na Tabela 9, a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: o comprimento utilizado do recipiente (CT que significa comprimento total utilizado), em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) dos recipientes, calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela área do recipiente, considerando que as dimensões do recipiente são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado. Em todas as tabelas dessa seção, os menores comprimentos encontrados são destacados, e vamos denotar o *Modelo dos pontos* por MP e o *Modelo de trigonometria direta* por MTD. Destacamos nas tabelas desta seção os menores comprimentos encontrados.

Tabela 9 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	**Total de itens**	**MP**			**MTD**		
		CT(cm)	**T(s)**	**O(%)**	**CT(cm)**	**T(s)**	**O(%)**
$AV_{2,0,0}$	4	80,0	5,9	70,9	**68,4**	0,0	82,9
$AV_{4,0,0}$	8	150,0	14,4	75,6	**131,8**	6,1	86,1
$AV_{6,0,0}$	12	215,0	18,9	79,2	**195,8**	TL	86,9
$AV_{8,0,0}$	16	290,0	74,1	74,4	**259,8**	TL	87,4
$AV_{10,0,0}$	20	365,0	131,2	77,7	**336,0**	TL	84,4
$AV_{12,0,0}$	24	430,0	313,3	79,2	**390,3**	TL	87,2
$AV_{14,0,0}$	28	495,0	1280,7	80,2	**451,8**	TL	87,9
$AV_{16,0,0}$	32	580,0	TL	78,2	**528,0**	TL	86,0
$AV_{18,0,0}$	36	655,0	TL	77,9	**592,0**	TL	86,2
$AV_{20,0,0}$	40	725,0	TL	78,2	**658,2**	TL	86,2
$AV_{0,2,0}$	4	85,0	0,4	71,7	**76,8**	0,0	79,4
$AV_{0,4,0}$	8	160,0	32,1	76,2	**146,4**	12,2	83,3
$AV_{0,6,0}$	12	230,0	48,0	79,5	**214,1**	TL	85,4
$AV_{0,8,0}$	16	315,0	316,6	77,4	**282,0**	TL	86,5
$AV_{0,10,0}$	20	390,0	471,9	78,2	**348,0**	TL	87,6
$AV_{0,12,0}$	24	460,0	425,5	79,5	**415,7**	TL	88,0
$AV_{0,14,0}$	28	535,0	737,7	79,8	**498,0**	TL	85,7
$AV_{0,16,0}$	32	625,0	TL	78,0	**564,0**	TL	86,5
$AV_{0,18,0}$	36	700,0	TL	78,4	**695,9**	TL	78,8
$AV_{0,20,0}$	40	775,0	TL	78,7	**726,0**	TL	84,0
$AV_{0,0,2}$	4	90,0	7,9	72,9	**83,9**	0,0	78,2
$AV_{0,0,4}$	8	160,0	8,3	82,0	**156,0**	28,8	84,1
$AV_{0,0,6}$	12	250,0	19,1	78,7	**224,0**	TL	87,9
$AV_{0,0,8}$	16	320,0	262,8	82,0	**300,7**	TL	87,3
$AV_{0,0,10}$	20	400,0	428,4	82,0	**377,4**	TL	86,9
$AV_{0,0,12}$	24	**480,0**	260,0	82,1	488,0	TL	80,7
$AV_{0,0,14}$	28	550,0	1531,4	83,5	**524,7**	TL	87,5
$AV_{0,0,16}$	32	645,0	TL	81,4	**604,0**	TL	86,9
$AV_{0,0,18}$	36	735,0	TL	80,3	**680,0**	TL	86,8
$AV_{0,0,20}$	40	805,0	TL	81,5	**768,0**	TL	85,4

Note que, com relação aos aventais de tamanho P, foi encontrado um maior número de melhores soluções para o *Modelo de trigonometria direta*, em que para todas as instâncias temos comprimentos menores que os comprimentos obtidos para o outro modelo. Desta forma, ele forneceu uma taxa de ocupação melhor para essas instâncias, já que a taxa de ocupação está diretamente relacionada ao comprimento utilizado do recipiente. Com relação ao tempo de resolução, observamos que o *Modelo dos pontos* apresentou tempo inferior para a maioria dos casos, excedendo o tempo limite de resolução em apenas três instâncias, ao contrário do *Modelo de trigonometria direta* que obteve solução sem que o tempo limite fosse excedido em apenas duas instâncias. Com relação aos aventais de tamanho M, novamente temos que o *Modelo*

de trigonometria direta foi superior que o *Modelo dos pontos*, encontrando melhores soluções para todas as instâncias. Com relação ao tempo de resolução, temos a mesma análise feita para o caso anterior. Por fim, utilizando apenas aventais de tamanho G, com exceção da instância $AV_{0,0,12}$, temos que o *Modelo de trigonometria direta* obteve melhores taxas de ocupação do que o *Modelo dos pontos*, mas este por sua vez obteve tempos, para a maioria das instâncias, melhores do que o *Modelo de trigonometria direta*. Podemos notar que a diferença entre as taxas de ocupação são grandes, o que ocorre pelo fato da solução do *Modelo dos pontos* estar diretamente relacionada com a discretização da malha utilizada. Isto não ocorre para o *Modelo de trigonometria direta*, já que este não tem a utilização de discretização em malha do recipiente para a alocação dos itens. A discretização pode ter uma vantagem em relação ao tempo, como podemos observar pelo *Modelo dos pontos*, pois dependendo da discretização utilizada temos menos pontos para alocar um item, limitando assim o espaço de busca para alocação.

Vamos analisar agora o comportamento dos modelos utilizando todos os tipos de aventais juntos. A Tabela 10, apresenta os resultados computacionais para os modelos apresentados nesse trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 9.

De acordo com a Tabela 10, observamos que o método de resolução que obteve melhores resultados foi o *Modelo de trigonometria direta*, já que encontrou melhores taxas de ocupação para todas as instâncias. Note que, a partir da instância $AV_{3,3,3}$, o *Modelo dos pontos* não conseguiu resolvê-las por falta de memória computacional. Isso decorre do fato desse modelo utilizar uma discretização para o recipiente. Como possuímos uma grande quantidade de itens para essas instâncias, temos uma grande quantidade restrições e variáveis, desta forma, a memória do computador não suporta e o próprio sistema termina com o processo de resolução. Com relação ao tempo de resolução, temos um comparativo apenas com as três primeiras instâncias, em que o *Modelo dos pontos* atingiu o tempo limite em apenas uma instância, enquanto o *Modelo de trigonometria direta* em duas instâncias.

Com relação aos experimentos utilizando apenas os forros de luva, temos, na Tabela 11, os resultados obtidos para os modelos presentes neste trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 9.

Observamos, pela Tabela 11, que a partir da instância L_3, não foi possível encontrar solução para o *Modelo de trigonometria direta* dentro do tempo estipulado (3600 segundos). Já para o *Modelo dos pontos* foram obtidas soluções para todas as instâncias. Isso ocorre pelo fato de utilizarmos uma discretização da malha e o item acaba sendo aproximado por um retângulo no *Modelo dos pontos*. Sendo assim, as possibilidades de aloção para estes itens são menores do que quando utilizamos o *Modelo de trigonometria direta*, em que utilizamos as arestas dos itens para gerar as posições de alocação do item. Portanto, no *Modelo dos pontos* temos um espaço de busca por posições menor do que no *Modelo de trigonometria direta* e, além disso, temos menos variáveis e restrições pelo fato de aproximarmos o item, já que utilizamos uma malha. Com

Tabela 10 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando todos os tipos de aventais juntos.

Instância	Total de itens	MP			MTD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{1,1,1}$	6	135,0	403,0	77,3	**130,0**	0,0	70,5
$AV_{2,2,2}$	12	295,0	295,0	70,7	**210,0**	TL	87,3
$AV_{3,3,3}$	18	535,0	TL	58,5	**324,0**	TL	84,9
$AV_{4,4,4}$	24	*	*	*	**424,0**	TL	86,5
$AV_{5,5,5}$	30	*	*	*	**530,0**	TL	86,5
$AV_{6,6,6}$	36	*	*	*	**658,0**	TL	83,6
$AV_{7,7,7}$	42	*	*	*	**740,5**	TL	86,6
$AV_{8,8,8}$	48	*	*	*	**872,0**	TL	84,1
$AV_{9,9,9}$	54	*	*	*	**952,1**	TL	86,6
$AV_{10,10,10}$	60	*	*	*	**1066,4**	TL	85,9
$AV_{11,11,11}$	66	*	*	*	**1264,0**	TL	79,8
$AV_{12,12,12}$	72	*	*	*	**1352,0**	TL	81,3
$AV_{13,13,13}$	78	*	*	*	**1500,0**	TL	79,4
$AV_{14,14,14}$	84	*	*	*	**1893,7**	TL	67,7
$AV_{15,15,15}$	90	*	*	*	**1670,0**	TL	82,3
$AV_{16,16,16}$	96	*	*	*	**1774,0**	TL	82,7
$AV_{17,17,17}$	102	*	*	*	**2036,5**	TL	76,5
$AV_{18,18,18}$	108	*	*	*	**2118,0**	TL	77,9
$AV_{19,19,19}$	114	*	*	*	**2196,5**	TL	79,3
$AV_{20,20,20}$	120	*	*	*	**2362,6**	TL	77,6

relação à qualidade de solução, temos que, quando o *Modelo de trigonometria direta* encontra uma solução, ela é melhor do que a solução encontrada pelo *Modelo dos pontos*. Mas, com relação ao tempo de resolução, observamos que o tempo do *Modelo dos pontos* é inferior do que o tempo de resolução do *Modelo de trigonometria direta*.

Tabela 11 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando os forros de luvas.

Instância	Total de itens	MP			MTD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
L_1	4	25,0	2,71	50,7	**21,1**	0,7	60,0
L_2	8	50,0	2,78	50,7	**42,2**	TL	60,0
L_3	12	75,0	5,38	50,7	**42,2**	TL	90,1
L_4	16	**100,0**	18,9	50,7	-	TL	-
L_5	20	**100,0**	28,9	63,3	-	-	-
L_{10}	40	**200,0**	1121,5	63,3	-	-	-
L_{15}	60	**310,0**	TL	61,3	-	-	-
L_{20}	80	**470,0**	TL	53,9	-	-	-
L_{25}	100	**535,0**	TL	59,2	-	-	-
L_{30}	120	**740,0**	TL	51,3	-	-	-
L_{35}	140	**810,0**	TL	54,7	-	-	-

Por fim, temos os experimentos utilizando os aventais e forros de luva. A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos para os modelos presentes neste trabalho. As colunas dessa tabela apresentam as mesmas informações presentes nas colunas da Tabela 9.

Tabela 12 – Comparação entre os métodos de resolução exatos utilizando os aventais e forros de luva.

Instância	Total de itens	MP			MTD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	135,0	403,0	77,3	**130,0**	21,9	80,2
$T_{2,2,2,2}$	20	295,0	295,0	70,7	**241,7**	TL	86,3
$T_{3,3,3,3}$	30	535,0	TL	58,5	**373,1**	TL	83,9
$T_{4,4,4,4}$	40	*	*	*	-	TL	-

Pela Tabela 12, temos que as melhores soluções obtidas são para o *Modelo de trigonometria direta*. Com relação ao tempo de resolução, temos que para *Modelo dos pontos* obteve-se solução sem que o limite de tempo fosse antingido em duas instâncias, enquanto que para o *Modelo de trigonometria direta* obteve-se solução sem atingir o limite de tempo estipulado em apenas uma instância. Note que a instância $T_{4,4,4,4}$ não foi resolvida para nenhum dos dois modelos, por falta de memória computacional no caso do *Modelo dos pontos*, e por não encontrar uma solução dentro do tempo estipulado no caso do *Modelo de trigonometria direta*.

A Figura 41 apresenta a quantidade de melhores soluções (soluções com comprimento menor ou igual quando comparado ao outro modelo) obtidas pelo *Modelos dos Pontos* e o *Modelo de trigonometria direta*. Note que o *Modelo de trigonometria direta* obteve cinquenta e cinco instâncias melhores em um total de sessenta e cinco, e o *Modelo dos pontos* obteve apenas nove melhores resultados.

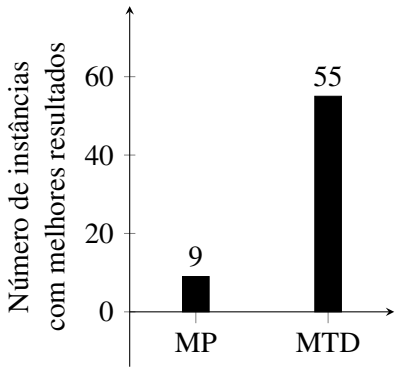


Figura 41 – Número de soluções melhores ou iguais obtidas pelo *Modelo dos pontos* (MP) e *Modelo de trigonometria direta* (MTD).

Podemos notar que nos experimentos utilizando os forros de luva o *Modelo dos pontos* obteve resultados para um maior número de instâncias que o *Modelo de trigonometria direta*, porém para as instâncias resolvidas pelo *Modelo de trigonometria direta* a qualidade da solução obtida é melhor que a qualidade da solução do *Modelo dos pontos*. Como o *Modelo de trigonometria direta* apresenta piores resultados do que o *Modelo dos pontos* apenas para os forros de luva, uma opção seria aproximar os forros de luva por retângulos no *Modelo de trigonometria direta*.

5.2.2 Experimentos considerando camadas

Nesta seção, vamos apresentar os resultados para o problema de corte de aventais e forros de luva descrito neste trabalho utilizando camadas.

O critério utilizado para gerar as camadas é dado pela análise dos experimentos anteriores, em que verifica-se quais instâncias não ultrapassam o comprimento limite da mesa, que é de 270 centímetros, e dentre essas instâncias escolhemos a que apresenta a maior taxa de ocupação. O número de camadas é estipulado pelo número de itens que podem ser empacotados em um

recipiente, fazendo combinações de forma que tenhamos um número par de itens por camadas. O tempo de resolução é dado pela soma dos tempos utilizados até encontrar a instância que não ultrapassa o limite da mesa.

Utilizando o critério descrito anteriormente, observamos, pela Seção 5.2.1.3, que o *Modelo de trigonometria direta* apresenta, para as instâncias que não ultrapassam o limite da mesa, maiores taxas de ocupação. Desta forma, vamos realizar os experimentos utilizando camadas apenas para o *Modelo de trigonometria direta*.

A Tabela 13 fornece o nome da instância, o número de camadas utilizadas, o número de itens por camadas, o comprimento do recipiente por camada, em centímetros, e o comprimento total do recipiente utilizado (CT), em centímetros, respectivamente. Vamos destacar na tabela os menores comprimentos encontrados. Em todos os casos o tempo de resolução é o tempo limite. Desta forma, optamos por não apresentá-lo na tabela.

Note que temos os menores comprimentos quando utilizamos apenas uma camada, com exceção da instância L_3, para a qual podemos utilizar duas camadas obtendo o mesmo comprimento de matéria-prima utilizado. No entanto, vale lembrar que ao cortar várias camadas de uma só vez, o tempo gasto no corte é menor, o que não é considerado pelo nosso método.

Tabela 13 – Resultados númericos para o *Modelo de trigonometria direta* utilizando camadas.

Instância	Número de camadas	Número de itens por camada	Comprimento do recipiente(cm)	CT(cm)
$AV_{8,0,0}$	1	16	259,8	**259,8**
	2	8	131,8	263,6
	4	4	68,4	273,6
$AV_{0,6,0}$	1	12	214,1	**214,1**
	2	6	132,0	264,0
	3	4	76,8	230,4
$AV_{0,0,6}$	1	12	224,0	**224,0**
	2	6	136,0	272,0
	3	4	83,9	251,7
$AV_{2,2,2}$	1	12	210,0	**210,0**
	2	6	130,0	260,0
L_3	1	12	42,2	**42,2**
	2	6	21,1	**42,2**
	3	4	21,1	63,3
	6	2	21,1	126,6
$T_{2,2,2,2}$	1	20	241,7	**241,7**
	2	10	130,0	260,0

5.3 Métodos heurísticos

Nesta seção, serão apresentados os experimentos computacionais utilizando as instâncias descritas na Seção 5.1 e os métodos heurísticos apresentados na Seção 4.2.

5.3.1 Experimentos sem considerar camadas

Vamos realizar os experimentos sem considerar as camadas, ou seja, estamos resolvendo o problema de corte de aventais e forros de luva considerando que podemos ter alocação de

itens em vários recipientes e as configurações dos itens nos recipientes não são necessariamente iguais.

5.3.1.1 Heurísticas Bottom-left contínua e Top-bottom-left contínua

Apresentamos os resultados computacionais para os experimentos utilizando a heurística *Bottom-left* contínua e a heurística *Top-bottom-left* contínua. Além disso, realizamos a comparação entre essas duas heurísticas.

Nas tabelas desta seção, a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: a soma do comprimento utilizado em cada recipiente (CT que significa comprimento total utilizado), em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) dos recipientes, calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela soma das áreas dos recipientes, considerando que as dimensões dos recipientes são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado. Em todas as tabelas desta seção, vamos denotar a heurística *Bottom-left* contínua por BLC e a heurística *Top-bottom-left* contínua por TBLC. Além disso, vamos destacar as soluções com comprimentos menores ou iguas quando comparados com a outra heurística.

Para os experimentos utilizando apenas um tipo de avental, temos, pela Tabela 14, que os resultados para as duas heurísticas são iguais.

A Figura 42 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pela heurística *Bottom-left* contínua utilizando apenas um tipo de avental. Em alguns casos, temos mais de uma solução com a maior taxa de ocupação, desta forma, optamos por ilustrar apenas uma dessas soluções. Além disso, como as soluções para as duas heurísticas são iguais, optamos por ilustar apenas as figuras da heurística *Bottom-left* contínua.

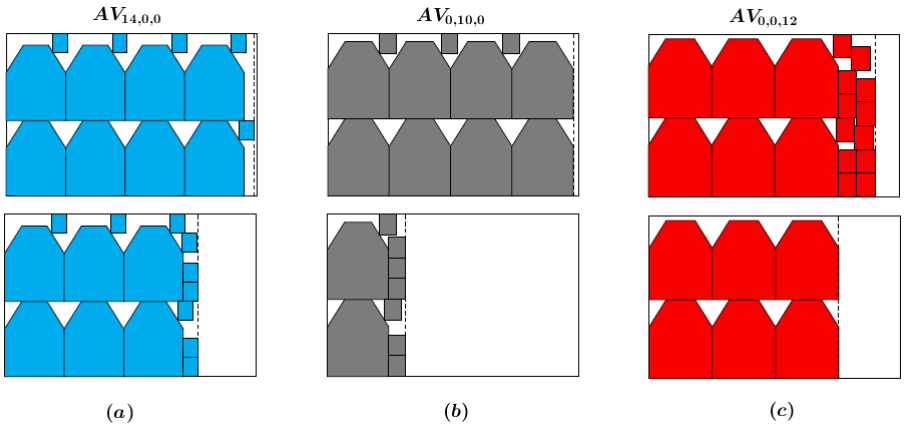


Figura 42 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente.

Com relação ao experimento utilizando todos os tipos de aventais, temos, pela Tabela 15,

Tabela 14 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando um tipo de avental.

Instância	Total de itens	BLC			TBLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{2,0,0}$	4	**74,3**	0,0	76,3	**74,3**	0,0	76,3
$AV_{4,0,0}$	8	**143,0**	0,0	79,3	**143,0**	0,0	79,3
$AV_{6,0,0}$	12	**208,0**	0,0	81,8	**208,0**	0,0	81,8
$AV_{8,0,0}$	16	**282,3**	0,0	80,4	**282,3**	0,0	80,4
$AV_{10,0,0}$	20	**346,3**	0,0	81,9	**346,3**	0,0	81,9
$AV_{12,0,0}$	24	**410,3**	0,0	82,9	**410,3**	0,0	82,9
$AV_{14,0,0}$	28	**474,3**	0,0	83,7	**474,3**	0,0	83,7
$AV_{16,0,0}$	32	**548,7**	0,0	82,7	**548,7**	0,0	82,7
$AV_{18,0,0}$	36	**614,9**	0,0	83,0	**614,9**	0,0	83,0
$AV_{20,0,0}$	40	**687,0**	0,0	82,6	**687,0**	0,0	82,6
$AV_{0,2,0}$	4	**79,6**	0,0	76,6	**79,6**	0,0	76,6
$AV_{0,4,0}$	8	**150,0**	0,0	81,3	**150,0**	0,0	81,3
$AV_{0,6,0}$	12	**216,0**	0,0	84,7	**216,0**	0,0	84,7
$AV_{0,8,0}$	16	**282,0**	0,0	86,5	**282,0**	0,0	86,5
$AV_{0,10,0}$	20	**348,0**	0,0	87,6	**348,0**	0,0	87,6
$AV_{0,12,0}$	24	**421,9**	0,0	86,7	**421,9**	0,0	86,7
$AV_{0,14,0}$	28	**493,6**	0,0	86,5	**493,6**	0,0	86,5
$AV_{0,16,0}$	32	**564,0**	0,0	86,5	**564,0**	0,0	86,5
$AV_{0,18,0}$	36	**630,0**	0,0	87,1	**630,0**	0,0	87,1
$AV_{0,20,0}$	40	**696,0**	0,0	87,6	**696,0**	0,0	87,6
$AV_{0,0,2}$	4	**85,5**	0,0	76,7	**85,5**	0,0	76,7
$AV_{0,0,4}$	8	**156,0**	0,0	84,1	**156,0**	0,0	84,1
$AV_{0,0,6}$	12	**224,0**	0,0	87,9	**224,0**	0,0	87,9
$AV_{0,0,8}$	16	**309,5**	0,0	84,8	**309,5**	0,0	84,8
$AV_{0,0,10}$	20	**380,0**	0,0	86,3	**380,0**	0,0	86,3
$AV_{0,0,12}$	24	**448,0**	0,0	87,9	**448,0**	0,0	87,9
$AV_{0,0,14}$	28	**533,5**	0,0	86,1	**533,5**	0,0	86,1
$AV_{0,0,16}$	32	**604,0**	0,0	86,9	**604,0**	0,0	86,9
$AV_{0,0,18}$	36	**672,0**	0,0	87,9	**672,0**	0,0	87,9
$AV_{0,0,20}$	40	**757,5**	0,0	86,6	**757,5**	0,0	86,6

que a heurística *Bottom-left* contínua obteve comprimento menor em três instâncias, a heurística *Top-bottom-left* contínua em seis instâncias, e comprimentos iguais para as duas heurísticas em onze instâncias.

A Figura 43 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Top-bottom-left* contínua utilizando todos os tipos de aventais.

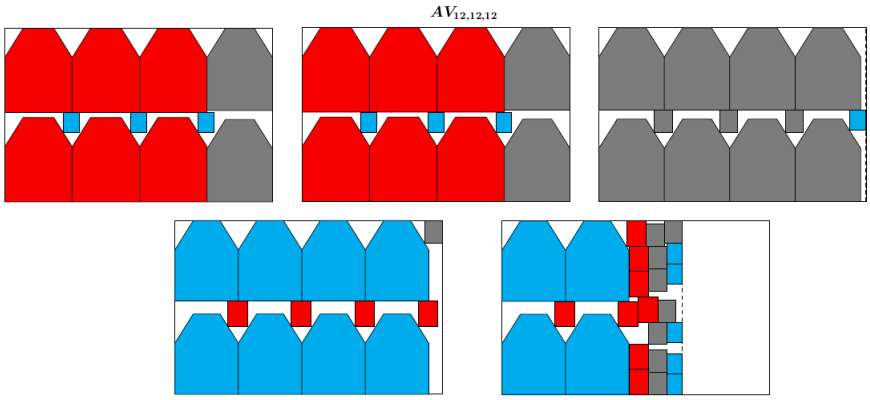


Figura 43 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* contínua utilizando todos os tipos de aventais.

Tabela 15 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando todos os tipos de aventais juntos.

Instância	Total de itens	BLC			TBLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{1,1,1}$	6	**130,0**	0,0	70,5	**130,0**	0,0	70,5
$AV_{2,2,2}$	12	**216,0**	0,0	84,9	**216,0**	0,0	84,9
$AV_{3,3,3}$	18	**328,0**	0,0	83,8	**328,0**	0,0	83,8
$AV_{4,4,4}$	24	**421,3**	0,0	87,0	**421,3**	0,0	87,0
$AV_{5,5,5}$	30	591,1	0,0	77,5	**590,0**	0,0	77,7
$AV_{6,6,6}$	36	**637,3**	0,0	86,3	**637,3**	0,0	86,3
$AV_{7,7,7}$	42	**746,7**	0,0	85,9	786,7	0,0	81,5
$AV_{8,8,8}$	48	**841,6**	0,0	87,1	**841,6**	0,0	87,1
$AV_{9,9,9}$	54	**988,2**	0,0	83,5	996,3	0,0	82,8
$AV_{10,10,10}$	60	1053,3	0,0	87,0	**1050,8**	0,0	87,2
$AV_{11,11,11}$	66	1172,3	0,0	86,0	**1169,9**	0,0	86,2
$AV_{12,12,12}$	72	1269,6	0,0	86,6	**1260,3**	0,0	87,3
$AV_{13,13,13}$	78	1407,4	0,0	84,7	**1402,5**	0,0	85,0
$AV_{14,14,14}$	84	**1478,9**	0,0	86,8	**1478,9**	0,0	86,8
$AV_{15,15,15}$	90	**1583,9**	0,0	86,8	**1583,9**	0,0	86,8
$AV_{16,16,16}$	96	**1687,9**	0,0	86,9	**1687,9**	0,0	86,9
$AV_{17,17,17}$	102	**1806,6**	0,0	86,2	**1806,6**	0,0	86,2
$AV_{18,18,18}$	108	**1899,6**	0,0	86,8	**1899,6**	0,0	86,8
$AV_{19,19,19}$	114	**2002,5**	0,0	87,0	2015,7	0,0	86,4
$AV_{20,20,20}$	120	2103,9	0,0	87,1	**2101,9**	0,0	87,2

Observando a Tabela 16, que apresenta os resultados dos experimentos utilizando apenas forros de luva, notamos que os comprimentos encontrados pelas duas heurísticas são iguais e o tempo de resolução é muito parecido. Para a instância L_1, temos que o comprimento é igual ao comprimento encontrado para o *Modelo de trigonometria direta* (veja Tabela 7).

Tabela 16 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando os forros de luvas.

Instância	Total de itens	BLC			TBLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
L_1	4	**21,1**	0,0	60,0	**21,1**	0,0	60,0
L_2	8	**42,2**	0,0	60,0	**42,2**	0,0	60,0
L_3	12	**42,2**	0,0	90,1	**42,2**	0,0	90,1
L_4	16	**63,3**	0,0	80,0	**63,3**	0,0	80,0
L_5	20	**84,4**	0,0	75,0	**84,4**	0,0	75,0
L_{10}	40	**147,7**	0,0	85,8	**147,7**	0,0	85,8
L_{15}	60	**211,0**	0,0	90,1	**211,0**	0,0	90,1
L_{20}	80	**295,4**	0,0	85,8	**295,4**	0,0	85,8
L_{25}	100	**358,7**	0,1	88,3	**358,7**	0,1	88,3
L_{30}	120	**422,0**	0,1	90,1	**422,0**	0,1	90,1
L_{35}	140	**506,3**	0,1	87,6	**506,3**	0,2	87,6

A Figura 44 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Bottom-left* contínua utilizando quinze pares de forros de luva. Além disso, como os comprimentos e as ocupações para as duas heurísticas são iguais, optamos por ilustar apenas a figura da heurística *Bottom-left* contínua.

Por fim, para os experimentos utilizando todos os tipos de itens, temos, pela Tabela 17, que a heurística *Bottom-left* contínua apresenta comprimento menor para quatro instâncias, a heurística *Top-bottom-left* contínua para uma instância, e comprimentos iguais para as duas

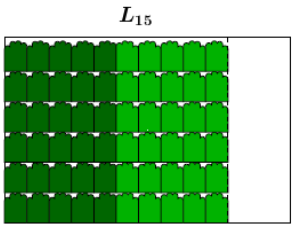


Figura 44 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando os forros de luva.

heurísticas em duas instâncias. Para a instância $T_{1,1,1,1}$, temos que o comprimento é igual ao comprimento encontrado para o *Modelo de trigonometria direta* (veja Tabela 8).

Tabela 17 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* contínua e *Top-bottom-left* contínua utilizando os aventais e forros de luva.

Instância	Total de itens	BLC			TBLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	**130,0**	0,0	80,2	**130,0**	0,0	80,2
$T_{2,2,2,2}$	20	**239,1**	0,0	87,3	243,8	0,0	85,6
$T_{3,3,3,3}$	30	**370,1**	0,0	84,6	371,4	0,0	84,3
$T_{4,4,4,4}$	40	**486,5**	0,0	85,5	**486,5**	0,0	85,8
$T_{5,5,5,5}$	50	**610,7**	0,0	85,4	615,2	0,0	84,8
$T_{6,6,6,6}$	60	**722,0**	0,0	86,7	724,2	0,0	86,4
$T_{7,7,7,7}$	70	848,7	0,0	86,0	**848,1**	0,0	86,1

A Figura 45 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Bottom-left* contínua utilizando aventais e forros de luva.

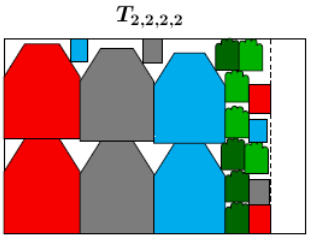


Figura 45 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando aventais e forros de luva.

Analisando todas as instâncias, no caso sessenta e oito, temos que a heurística *Bottom-left* contínua e a heurística *Top-bottom-left* contínua apresenta para sessenta e uma instâncias comprimentos menores ou iguais quando comparadas uma com a outra. Como critério de desempate, utilizamos a diferença do comprimento da heurística *Bottom-left* contínua com a heurística *Top-bottom-left* contínua divido pelo menor valor entre as duas e por fim multiplicamos por cem. Analisando as diferenças (em porcentagem) notamos que os resultados são bem próximos, mas para fins de comparações a heurística *Bottom-left* contínua obteve resultados um pouco melhores. Desta forma, vamos considerar a heurística *Bottom-left* contínua como melhor quando comparada com a heurística *Top-bottom-left* contínua.

5.3.1.2 Heurísticas Bottom-left discreta e Top-bottom-left discreta

Nesta seção, vamos apresentar os resultados computacionais para os experimentos utilizando a heurística *Bottom-left* discreta e a heurística *Top-bottom-left* discreta. Além disso, realizaremos a comparação entre essas duas heurísticas.

As colunas das tabelas desta seção apresentam as mesmas informações das colunas da seção anterior.

Para os experimentos utilizando apenas um tipo de avental, temos, pela Tabela 18, que a heurística *Bottom-left* discreta obteve comprimento menor em uma instância, a heurística *Top-bottom-left* discreta em dez instâncias, e comprimentos iguais para as duas heurísticas em dezenove instâncias.

Tabela 18 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando um tipo de avental.

Instância	Total de itens	BLD			TBLD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{2,0,0}$	4	74,4	0,7	76,2	**74,3**	0,7	76,3
$AV_{4,0,0}$	8	**143,2**	1,5	79,2	**143,2**	1,5	79,2
$AV_{6,0,0}$	12	**208,0**	2,3	81,8	**208,0**	2,3	81,8
$AV_{8,0,0}$	16	282,4	3,1	80,3	**282,3**	3,1	80,4
$AV_{10,0,0}$	20	346,4	3,9	81,9	**346,3**	3,8	81,9
$AV_{12,0,0}$	24	410,4	4,7	82,9	**410,3**	4,6	83,0
$AV_{14,0,0}$	28	474,4	5,7	83,7	**474,3**	5,5	83,7
$AV_{16,0,0}$	32	548,8	6,4	82,7	**548,6**	6,3	82,7
$AV_{18,0,0}$	36	615,1	7,5	83,0	**614,9**	7,4	83,0
$AV_{20,0,0}$	40	687,2	8,5	82,5	**686,9**	8,3	82,6
$AV_{0,2,0}$	4	79,7	0,7	76,5	**79,6**	0,7	76,6
$AV_{0,4,0}$	8	**150,0**	1,6	81,3	**150,0**	1,6	81,3
$AV_{0,6,0}$	12	**216,0**	2,4	84,7	**216,0**	2,5	84,7
$AV_{0,8,0}$	16	**282,0**	3,2	86,5	**282,0**	3,2	86,5
$AV_{0,10,0}$	20	**348,0**	4,3	87,6	**348,0**	4,1	87,6
$AV_{0,12,0}$	24	**422,0**	5,3	86,7	422,1	4,9	86,7
$AV_{0,14,0}$	28	493,7	6,3	86,4	**493,6**	5,9	86,5
$AV_{0,16,0}$	32	**564,0**	6,7	86,5	**564,0**	6,4	86,5
$AV_{0,18,0}$	36	**630,0**	8,1	87,1	**630,0**	7,4	87,1
$AV_{0,20,0}$	40	**696,0**	9,2	87,6	**696,0**	8,7	87,6
$AV_{0,0,2}$	4	**85,5**	0,8	76,7	**85,5**	0,8	76,7
$AV_{0,0,4}$	8	**156,0**	1,6	84,1	**156,0**	1,7	84,1
$AV_{0,0,6}$	12	**224,0**	2,6	87,9	**224,0**	2,6	87,9
$AV_{0,0,8}$	16	**309,5**	3,5	84,8	**309,5**	3,5	84,8
$AV_{0,0,10}$	20	**380,0**	4,3	86,3	**380,0**	4,4	86,3
$AV_{0,0,12}$	24	**448,0**	5,3	87,9	**448,0**	5,3	87,9
$AV_{0,0,14}$	28	**533,5**	6,3	86,1	**533,5**	6,3	86,1
$AV_{0,0,16}$	32	**604,0**	7,2	86,9	**604,0**	7,2	86,9
$AV_{0,0,18}$	36	**672,0**	8,2	87,9	**672,0**	8,1	87,9
$AV_{0,0,20}$	40	**757,5**	9,3	86,6	**757,5**	9,3	86,6

A Figura 46 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pela heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas um tipo de avental. Em alguns casos, temos mais de uma solução com a maior taxa de ocupação, mas optamos por ilustrar apenas uma dessas soluções.

Com relação ao experimento utilizando todos os tipos de aventais, temos, pela Tabela 19, que a heurística *Bottom-left* discreta obteve comprimento menor em seis instâncias, a heurística

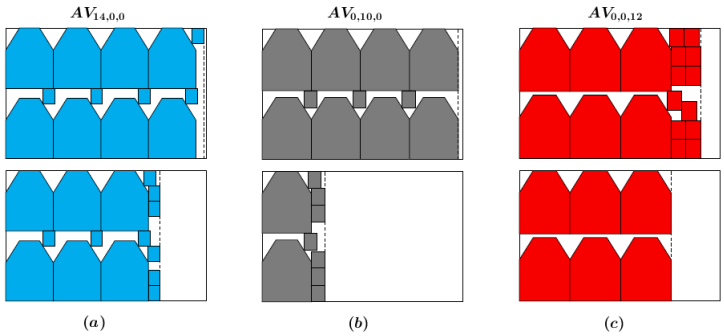


Figura 46 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente.

Top-bottom-left discreta em oito instâncias, e comprimentos iguais para as duas heurísticas em seis instâncias.

Tabela 19 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando todos os tipos de aventais juntos.

Instância	Total de itens	BLD			TBLD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{1,1,1}$	6	**130,0**	3,4	70,5	**130,0**	3,4	70,5
$AV_{2,2,2}$	12	**216,0**	7,2	84,9	**216,0**	7,7	84,9
$AV_{3,3,3}$	18	**328,0**	10,5	83,8	**328,0**	10,7	83,8
$AV_{4,4,4}$	24	**421,4**	15,1	87,0	421,5	14,9	87,0
$AV_{5,5,5}$	30	591,2	18,7	77,5	**590,0**	18,4	77,7
$AV_{6,6,6}$	36	**637,4**	22,6	86,3	637,5	22,7	86,3
$AV_{7,7,7}$	42	**746,8**	26,2	85,9	786,8	25,7	81,5
$AV_{8,8,8}$	48	841,7	29,2	87,1	**841,6**	29,2	87,1
$AV_{9,9,9}$	54	**988,3**	33,1	83,5	996,4	34,0	82,8
$AV_{10,10,10}$	60	**1053,4**	39,2	87,0	1053,5	39,5	87,0
$AV_{11,11,11}$	66	**1172,4**	42,8	86,0	**1172,4**	42,9	86,0
$AV_{12,12,12}$	72	1269,9	47,1	86,6	**1260,4**	46,8	87,3
$AV_{13,13,13}$	78	1407,7	50,7	84,6	**1402,7**	50,2	84,9
$AV_{14,14,14}$	84	**1479,1**	56,4	86,8	**1479,1**	55,3	86,8
$AV_{15,15,15}$	90	1584,2	60,8	86,8	**1584,0**	61,0	86,8
$AV_{16,16,16}$	96	1688,2	62,4	86,9	**1688,0**	61,3	86,9
$AV_{17,17,17}$	102	1807,0	69,4	86,2	**1806,8**	69,0	86,2
$AV_{18,18,18}$	108	**1899,9**	74,5	86,8	**1899,9**	72,7	86,8
$AV_{19,19,19}$	114	**2003,0**	79,5	86,9	2015,9	76,8	86,4
$AV_{20,20,20}$	120	2104,2	83,9	87,1	**2102,0**	83,0	87,2

A Figura 47 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando todos os tipos de aventais.

Observando a Tabela 20, que apresenta os resultados dos experimentos utilizando apenas forros de luva, notamos que os comprimentos encontrados pelas duas heurísticas são iguais e o tempo de resolução é muito parecido.

A Figura 48 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas forros de luva e sessenta itens. Além disso, como as soluções para as duas heurísticas são iguais, optamos por ilustrar apenas a figura da heurística *Top-bottom-left* discreta.

Por fim, para os experimentos utilizando todos os tipos de itens, temos, pela Tabela 21,

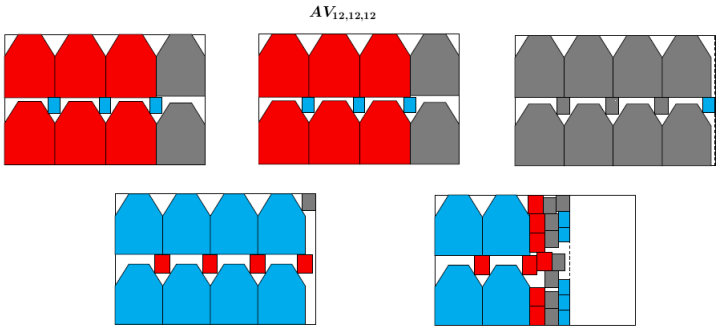


Figura 47 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando todos os tipos de aventais.

Tabela 20 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando os forros de luvas.

Instância	Total de itens	BLD			TBLD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
L_1	4	**21,1**	0,1	60,0	**21,1**	0,1	60,0
L_2	8	**42,2**	0,2	60,0	**42,2**	0,2	60,0
L_3	12	**42,2**	0,3	90,1	**42,2**	0,3	90,1
L_4	16	**63,3**	0,4	80,0	**63,3**	0,4	80,0
L_5	20	**84,4**	0,5	75,0	**84,4**	0,5	75,0
L_{10}	40	**147,7**	1,0	85,8	**147,7**	1,0	85,8
L_{15}	60	**211,0**	1,6	90,1	**211,0**	1,6	90,1
L_{20}	80	**295,4**	2,4	85,8	**295,4**	2,3	85,8
L_{25}	100	**358,7**	3,1	88,3	**358,7**	3,0	88,3
L_{30}	120	**422,0**	4,0	90,1	**422,0**	3,9	90,1
L_{35}	140	**506,4**	4,9	87,6	**506,4**	4,7	87,6

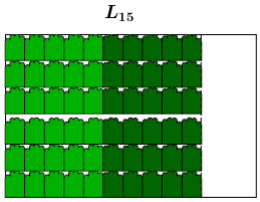


Figura 48 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Top-bottom-left* discreta utilizando apenas os forros de luva e sessenta itens.

que a heurística *Bottom-left* discreta apresenta comprimento menor para seis instâncias enquanto que a heurística *Top-bottom-left* discreta não apresenta nenhuma instância com comprimento menor que a heurística *Bottom-left* discreta. Apenas para uma instância as heuríticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta apresentaram comprimentos iguais. Além disso, temos que os tempos de resolução são bem próximos para as duas heurísticas.

A Figura 49 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística *Bottom-left* discreta utilizando aventais e forros de luva.

De forma geral, temos que a heurística *Bottom-left* discreta obteve quarenta e nove instâncias com comprimentos menores ou iguais e a heurística *Top-bottom-left* discreta obteve cinquenta e seis instâncias com comprimentos menores ou iguais. Portanto, a heurística

Tabela 21 – Resultados numéricos para as heurísticas *Bottom-left* discreta e *Top-bottom-left* discreta utilizando os aventais e forros de luva.

Instância	Total de itens	BLD			TBLD		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	**130,0**	6,8	80,2	**130,0**	6,6	80,2
$T_{2,2,2,2}$	20	**241,1**	14,2	86,5	247,1	14,2	84,4
$T_{3,3,3,3}$	30	**369,3**	20,8	84,7	372,0	20,8	84,1
$T_{4,4,4,4}$	40	**479,7**	28,8	87,0	486,3	28,5	85,8
$T_{5,5,5,5}$	50	**614,2**	34,6	84,9	615,5	34,6	84,7
$T_{6,6,6,6}$	60	**723,8**	43,6	86,5	725,3	43,2	86,3
$T_{7,7,7,7}$	70	**848,6**	49,6	86,1	858,4	48,9	85,1

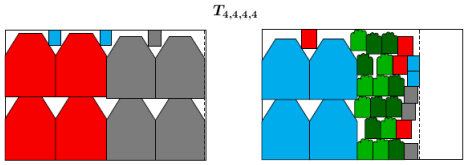


Figura 49 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística *Bottom-left* discreta utilizando aventais e forros de luva.

Top-bottom-left discreta é melhor quando comparamos o número de soluções obtidas com comprimentos menores ou iguais. A maior diferença de comprimento a favor da heurística *Bottom-left* discreta foi de $12,9$ centímetros. Para a heurística *Top-bottom-left* discreta a maior diferença de comprimento a favor dela foi de $9,5$ centímetros. Podemos observar que os valores dos comprimentos e tempos entre as duas heurísticas são bem próximos. Isso ocorre pelo fato das características dos dois métodos de resolução serem semelhantes.

5.3.1.3 Heurísticas Top-bottom-left contínua aleatória e Top-bottom-left discreta aleatória

Nesta seção, vamos apresentar os resultados computacionais para os experimentos utilizando as heurísticas *Top-bottom-left* contínua aleatória e *Top-bottom-left* discreta aleatória. Temos quatro versões destas heurísticas, que são as heurísticas *Top-bottom-left* contínua aleatória utilizando dez iterações (TBLCA-10), a *Top-bottom-left* contínua aleatória utilizando cem iterações (TBLCA-100), a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória utilizando dez iterações (TBLDA-10) e a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória utilizando cem iterações e um tempo limite de resolução (TL) de uma hora (TBLDA-100).

Nas tabelas desta seção, temos que a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: a soma do comprimento utilizado em cada recipiente (CT que significa comprimento total utilizado), em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) dos recipientes, calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela soma das áreas dos recipientes, considerando que as dimensões dos recipientes são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado.

Para cada instância realizamos os experimentos dez vezes para obter os valores mínimo,

máximo e médio, do comprimento total (CT), tempo de resolução (T) e ocupação (O).

Utilizando as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100, temos, pelas Tabelas 22, 23, 24 e 25 que a heurística TBLCA-100 sempre obteve soluções com comprimentos menores ou iguais aos comprimentos da heurística TBLCA-10. Mas, note que os tempos de resolução da heurística TBLCA-100 são superiores aos tempos da heurística TBLCA-10, já que utiliza mais iterações. Como temos mais iterações para a heurística TBLCA-100 e por se tratar de uma heurística aleatória, ela consegue obter mais soluções e consequentemente soluções melhores. Ao utilizar cem iterações temos, em média, que o tempo de resolução é dez vezes maior e o ganho de qualidade de solução é, em média, para todos os experimentos, de $2,3\%$ na ocupação.

Com relação as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100, temos, pelas Tabelas 26, 27, 28 e 29 as mesmas análises feitas para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100, com a diferença que com relação aos resultados para os experimentos utilizando apenas forros de luva, os resultados das heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 são iguais. Novamente, era esperado que a heurística TBLDA-100 obtivesse melhores resultados já que utiliza um maior número de iterações explorando assim mais soluções. O ganho na qualidade de solução no caso de utilizar cem iterações é, em média, para todos os experimentos, de $1,8\%$ na ocupação.

Sendo assim, vamos comparar as heurística TBLCA-100 e TBLDA-100, para verificar qual obteve um maior número de soluções com comprimentos médios menores ou iguais quando comparadas estas duas heurísticas.

Para os experimentos utilizando apenas um tipo de avental, temos, pelas Tabelas 22 e 26, que a heurística TBLCA-100 obteve comprimento médio menor em dezenove instâncias e a heurística TBLDA-100 em doze instâncias.

A Figura 50 mostra as soluções com maiores taxas de ocupação encontradas pela heurística TBLCA-100 utilizando apenas um tipo de avental.

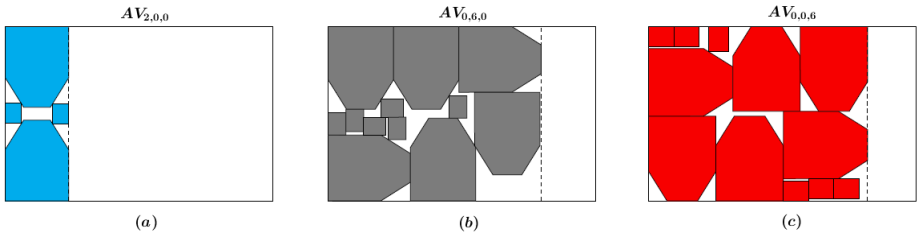


Figura 50 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLCA-100 utilizando apenas aventais (a) P, (b) M e (c) G, respectivamente.

Com relação ao experimento utilizando todos os tipos de aventais, temos, pelas Tabelas 23 e 27,que a heurística TBLCA-100 obteve comprimento médio menor em dezoito instâncias e a heurística TBLDA-100 em duas instâncias. Note que os tempos de resolução médios são maiores para a heurística TBLDA-100.

A Figura 51 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística

TBLCA-100 utilizando todos os tipos de aventais.

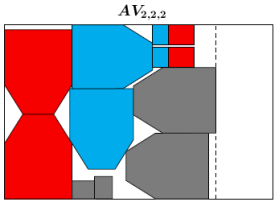


Figura 51 – Solução com a maior taxa de ocupação para a heurística TBLCA-100 utilizando todos os tipos de aventais.

Observando as Tabelas 24 e 28, que apresentam os resultados dos experimentos utilizando apenas forros de luva, notamos que a TBLCA-100 obteve comprimento médio menor em uma instância, a heurística TBLDA-100 em nove instâncias, e comprimentos médios iguais para as heurísticas em uma instância.

A Figura 52 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística TBLDA-100 utilizando apenas forros de luva e sessenta itens.

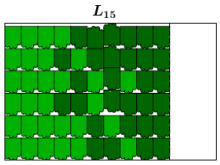


Figura 52 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLDA-100 utilizando apenas os forros de luva e sessenta itens.

Por fim, para os experimentos utilizando todos os tipos de itens, temos, pelas Tabelas 25 e 29, que a heurística TBLDA-100 apresenta comprimento médio menor para quatro instâncias enquanto que a heurística TBLCA-100 apresenta três instâncias com comprimento médio menor que a heurística TBLDA-100. O tempo de resolução é maior para a heurística TBLDA-100.

A Figura 53 mostra a solução com maior taxa de ocupação encontrada pela heurística TBLDA-100 utilizando aventais e forros de luva.

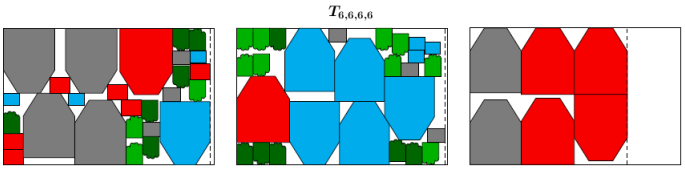


Figura 53 – Solução com maior taxa de ocupação para a heurística TBLDA-100 utilizando aventais e forros de luva.

De forma geral, temos que a heurística TBLDA-100 obteve quarenta e sete instâncias com comprimentos médios menores ou iguais e a heurística TBLCA-100 obteve dezoito instâncias com comprimentos menores ou iguais. Portanto, a heurística TBLDA-100 é melhor quando comparamos o número de soluções obtidas com comprimentos médios menores ou iguais.

Tabela 22 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	TBLCA-10									TBLCA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$AV_{2,0,0}$	4	64,0	81,0	72,5	0,0	0,0	0,0	70,1	88,7	79,4	64,0	74,4	69,2	0,0	0,0	0,0	76,3	88,7	82,5
$AV_{4,0,0}$	8	141,0	156,9	148,9	0,0	0,0	0,0	72,4	80,5	76,4	139,3	145,0	142,2	0,0	0,0	0,0	78,3	81,5	79,9
$AV_{6,0,0}$	12	209,0	229,5	219,3	0,0	0,0	0,0	74,2	81,5	77,8	204,0	226,0	215,0	0,1	0,1	0,1	75,3	83,5	79,4
$AV_{8,0,0}$	16	293,4	342,6	318,0	0,0	0,0	0,0	66,3	77,4	71,8	288,5	338,4	313,5	0,1	0,1	0,1	67,1	78,7	72,9
$AV_{10,0,0}$	20	371,9	413,0	392,4	0,0	0,0	0,0	68,7	76,3	72,5	350,9	391,9	371,4	0,1	0,1	0,1	72,4	80,9	76,6
$AV_{12,0,0}$	24	440,7	474,9	457,8	0,0	0,0	0,0	71,7	77,3	74,5	423,9	458,5	441,2	0,2	0,2	0,2	74,3	80,3	77,3
$AV_{14,0,0}$	28	512,9	603,7	558,3	0,0	0,0	0,0	65,8	77,5	71,6	494,6	600,6	547,6	0,2	0,2	0,2	66,2	80,3	73,2
$AV_{16,0,0}$	32	591,1	666,6	628,9	0,0	0,1	0,1	68,1	76,8	72,5	587,4	654,0	620,7	0,3	0,3	0,3	69,4	77,3	73,4
$AV_{18,0,0}$	36	644,4	728,8	686,6	0,1	0,1	0,1	70,1	79,3	74,7	644,0	720,1	682,0	0,3	0,4	0,3	70,9	79,3	75,1
$AV_{20,0,0}$	40	742,6	852,7	797,7	0,1	0,1	0,1	66,6	76,4	71,5	722,6	848,8	785,7	0,4	0,5	0,5	66,9	78,5	72,7
$AV_{0,2,0}$	4	79,6	83,0	81,3	0,0	0,0	0,0	73,5	76,6	75,1	79,6	81,3	80,4	0,0	0,0	0,0	75,0	76,6	75,8
$AV_{0,4,0}$	8	149,0	166,6	157,8	0,0	0,0	0,0	73,2	81,9	77,5	144,0	149,0	146,5	0,0	0,0	0,0	81,9	84,7	83,3
$AV_{0,6,0}$	12	215,0	249,0	232,0	0,0	0,0	0,0	73,5	85,1	79,3	215,0	232,0	223,5	0,1	0,1	0,1	78,9	85,1	82,0
$AV_{0,8,0}$	16	298,0	349,9	324,0	0,0	0,0	0,0	69,7	81,9	75,8	293,0	330,0	311,5	0,1	0,1	0,1	73,9	83,3	78,6
$AV_{0,10,0}$	20	365,5	451,2	408,4	0,0	0,0	0,0	67,6	83,4	75,5	364,7	399,5	382,1	0,1	0,2	0,1	76,3	83,6	80,0
$AV_{0,12,0}$	24	435,3	500,1	467,7	0,0	0,0	0,0	73,2	84,1	78,6	431,0	478,4	454,7	0,2	0,2	0,2	76,5	84,9	80,7
$AV_{0,14,0}$	28	528,0	620,9	574,4	0,0	0,0	0,0	68,8	80,9	74,8	527,4	601,2	564,3	0,2	0,2	0,2	71,0	81,0	76,0
$AV_{0,16,0}$	32	629,5	684,5	657,0	0,0	0,1	0,1	71,3	77,5	74,4	597,0	681,1	639,0	0,3	0,3	0,3	71,6	81,7	76,7
$AV_{0,18,0}$	36	713,0	757,3	735,1	0,0	0,1	0,1	72,5	77,0	74,7	676,2	742,6	709,4	0,3	0,4	0,3	73,9	81,2	77,6
$AV_{0,20,0}$	40	788,2	867,4	827,8	0,1	0,1	0,1	70,3	77,4	73,9	775,9	834,2	805,0	0,4	0,5	0,5	73,1	78,6	75,9
$AV_{0,0,2}$	4	85,0	85,0	85,0	0,0	0,0	0,0	77,2	77,2	77,2	85,0	85,0	85,0	0,0	0,0	0,0	77,2	77,2	77,2
$AV_{0,0,4}$	8	153,0	170,0	161,5	0,0	0,0	0,0	77,2	85,8	81,5	153,0	156,0	154,5	0,0	0,0	0,0	84,2	85,8	85,0
$AV_{0,0,6}$	12	229,5	258,0	243,7	0,0	0,0	0,0	76,3	85,8	81,1	221,0	229,5	225,3	0,1	0,1	0,1	85,8	89,1	87,5
$AV_{0,0,8}$	16	309,0	348,5	328,8	0,0	0,0	0,0	75,3	85,0	80,2	306,0	332,2	319,1	0,1	0,1	0,1	79,1	85,8	82,4
$AV_{0,0,10}$	20	394,5	471,1	432,8	0,0	0,0	0,0	69,7	83,2	76,4	374,0	418,7	396,3	0,1	0,2	0,2	78,4	87,8	83,1
$AV_{0,0,12}$	24	472,8	508,1	490,5	0,0	0,0	0,0	77,5	83,3	80,4	472,0	508,0	490,0	0,2	0,2	0,2	77,5	83,5	80,5
$AV_{0,0,14}$	28	586,9	661,0	624,0	0,0	0,0	0,0	69,5	78,3	73,9	566,0	595,0	580,5	0,2	0,2	0,2	77,2	81,2	79,2
$AV_{0,0,16}$	32	641,7	728,3	685,0	0,0	0,1	0,1	72,1	81,8	77,0	618,0	715,7	666,8	0,3	0,3	0,3	73,4	85,0	79,2
$AV_{0,0,18}$	36	728,6	869,7	799,2	0,0	0,1	0,1	67,9	81,1	74,5	725,5	855,5	790,5	0,3	0,3	0,3	69,1	81,4	75,3
$AV_{0,0,20}$	40	861,2	892,1	876,7	0,1	0,1	0,1	73,6	76,2	74,9	817,1	884,0	850,5	0,4	0,4	0,4	74,3	80,3	77,3

Tabela 23 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando todos os tipos de aventais.

Instância	Total de itens	TBLCA-10									TBLCA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$AV_{1,1,1}$	6	130,0	132,7	131,4	0,0	0,0	0,0	69,1	70,5	69,8	125,3	130,0	127,7	0,1	0,1	0,1	70,5	73,2	71,9
$AV_{2,2,2}$	12	215,0	249,0	232,0	0,0	0,0	0,0	73,7	85,3	79,5	212,6	220,5	216,6	0,2	0,2	0,2	83,2	86,3	84,7
$AV_{3,3,3}$	18	333,3	396,0	364,7	0,0	0,0	0,0	69,5	82,5	76,0	332,0	350,3	341,1	0,3	0,3	0,3	78,5	82,9	80,7
$AV_{4,4,4}$	24	449,6	509,7	479,6	0,1	0,1	0,1	72,0	81,6	76,8	446,0	469,8	457,9	0,5	0,5	0,5	78,1	82,2	80,2
$AV_{5,5,5}$	30	581,4	626,0	603,7	0,1	0,1	0,1	73,2	78,9	76,1	569,1	601,4	585,2	0,7	0,7	0,7	76,2	80,6	78,4
$AV_{6,6,6}$	36	679,9	770,7	725,3	0,1	0,1	0,1	71,4	80,9	76,2	671,1	734,8	703,0	0,9	1,0	0,9	74,9	82,0	78,4
$AV_{7,7,7}$	42	818,8	948,4	883,6	0,1	0,1	0,1	67,7	78,4	73,0	793,8	942,4	868,1	1,2	1,3	1,2	68,1	80,9	74,5
$AV_{8,8,8}$	48	953,2	1029,4	991,3	0,2	0,2	0,2	71,3	77,0	74,1	929,8	1006,6	968,2	1,6	1,6	1,6	72,9	78,9	75,9
$AV_{9,9,9}$	54	1061,6	1204,1	1132,9	0,2	0,2	0,2	68,5	77,7	73,1	1024,5	1179,6	1102,1	1,9	2,0	1,9	70,0	80,6	75,3
$AV_{10,10,10}$	60	1200,0	1264,1	1232,0	0,3	0,3	0,3	72,5	76,4	74,5	1168,5	1229,8	1199,1	2,4	2,4	2,4	74,6	78,5	76,5
$AV_{11,11,11}$	66	1289,6	1410,8	1350,2	0,3	0,4	0,4	71,5	78,2	74,9	1275,2	1406,5	1340,9	2,8	2,9	2,9	71,7	79,1	75,4
$AV_{12,12,12}$	72	1420,8	1508,0	1464,4	0,4	0,5	0,4	73,0	77,5	75,2	1414,7	1501,1	1457,9	3,3	3,5	3,4	73,3	77,8	75,5
$AV_{13,13,13}$	78	1582,9	1682,1	1632,5	0,5	0,5	0,5	70,9	75,3	73,1	1529,0	1679,1	1604,1	4,0	4,0	4,0	71,0	78,0	74,5
$AV_{14,14,14}$	84	1673,9	1821,1	1747,5	0,5	0,6	0,5	70,5	76,7	73,6	1614,6	1764,1	1689,3	4,5	4,7	4,6	72,8	79,5	76,1
$AV_{15,15,15}$	90	1821,8	1967,6	1894,7	0,6	0,7	0,6	69,9	75,5	72,7	1774,4	1935,8	1855,1	5,2	5,4	5,3	71,1	77,5	74,3
$AV_{16,16,16}$	96	1880,6	2052,2	1966,4	0,7	0,8	0,8	71,5	78,0	74,8	1875,3	2003,5	1939,4	5,9	6,2	6,1	73,2	78,2	75,7
$AV_{17,17,17}$	102	2014,5	2207,7	2111,1	0,7	0,8	0,8	70,6	77,4	74,0	2006,4	2134,7	2070,6	6,7	7,1	6,9	73,0	77,7	75,4
$AV_{18,18,18}$	108	2179,7	2326,5	2253,1	0,8	0,9	0,8	70,9	75,7	73,3	2089,1	2286,3	2187,7	7,6	7,9	7,8	72,2	79,0	75,6
$AV_{19,19,19}$	114	2301,3	2451,1	2376,2	0,9	1,0	1,0	71,1	75,7	73,4	2286,7	2425,2	2355,9	8,7	9,1	8,9	71,8	76,2	74,0
$AV_{20,20,20}$	120	2421,0	2534,4	2477,7	1,0	1,1	1,1	72,4	75,8	74,1	2370,5	2501,6	2436,0	9,5	9,9	9,7	73,3	77,4	75,3

Tabela 24 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando apenas os forros de luva.

Instância	Total de itens	TBLCA-10									TBLCA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
L_1	4	21,1	21,1	21,1	0,2	0,2	0,2	60,1	60,1	60,1	21,1	21,1	21,1	2,1	2,2	2,1	60,1	60,1	60,1
L_2	8	42,0	42,5	42,3	0,7	0,9	0,8	59,6	60,4	60,0	42,0	42,1	42,1	8,1	8,4	8,2	60,2	60,4	60,3
L_3	12	56,5	61,1	58,8	2,0	2,1	2,1	62,2	67,3	64,8	52,1	56,1	54,1	20,4	21,3	20,8	67,8	73,0	70,4
L_4	16	69,5	73,5	71,5	3,4	3,6	3,5	69,0	72,9	71,0	64,5	70,5	67,5	33,5	34,5	34,0	71,9	78,6	75,3
L_5	20	87,5	90,1	88,8	4,8	4,9	4,9	70,3	72,4	71,4	84,1	86,1	85,1	47,9	49,8	48,9	73,6	75,4	74,5
L_{10}	40	167,0	177,1	172,1	12,1	12,3	12,2	71,6	75,9	73,7	161,0	166,5	163,8	123,6	126,5	125,0	76,1	78,7	77,4
L_{15}	60	248,5	260,5	254,5	19,4	21,7	20,5	73,0	76,5	74,7	246,5	252,5	249,5	198,6	203,4	201,0	75,3	77,1	76,2
L_{20}	80	338,0	366,1	352,1	26,9	27,7	27,3	69,2	75,0	72,1	330,0	338,0	334,0	269,8	272,4	271,1	75,0	76,8	75,9
L_{25}	100	421,1	445,0	433,1	35,8	39,2	37,5	71,2	75,2	73,2	409,0	427,0	418,0	357,9	376,8	367,4	74,2	77,5	75,8
L_{30}	120	506,0	532,5	519,3	44,3	46,8	45,5	71,4	75,1	73,3	487,0	508,0	497,5	445,8	455,7	450,7	74,9	78,1	76,5
L_{35}	140	584,1	623,0	603,6	52,9	55,0	53,9	71,2	75,9	73,6	580,1	602,6	591,4	526,4	533,5	530,0	73,6	76,5	75,0

Tabela 25 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLCA-10 e TBLCA-100 utilizando todos os tipos de itens juntos.

Instância	Total de itens	TBLCA-10									TBLCA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$T_{1,1,1,1}$	10	130,0	134,0	132,0	0,5	0,6	0,5	77,9	80,3	79,1	130,0	132,0	131,0	5,0	5,5	5,3	79,1	80,3	79,7
$T_{2,2,2,2}$	20	253,0	270,0	261,5	1,2	1,6	1,4	77,3	82,5	79,9	253,0	262,0	257,5	13,8	14,3	14,0	79,7	82,5	81,1
$T_{3,3,3,3}$	30	387,1	402,0	394,6	2,2	2,5	2,3	77,9	80,9	79,4	379,0	393,5	386,3	23,2	26,0	24,6	79,6	82,6	81,1
$T_{4,4,4,4}$	40	514,5	522,5	518,5	3,2	3,8	3,5	79,9	81,1	80,5	501,5	513,0	507,3	35,1	39,6	37,4	81,4	83,3	82,3
$T_{5,5,5,5}$	50	648,5	669,0	658,8	4,4	5,6	5,0	78,0	80,5	79,2	623,6	646,5	635,1	48,1	50,3	49,2	80,7	83,7	82,2
$T_{6,6,6,6}$	60	751,5	780,0	765,8	6,0	6,6	6,3	80,3	83,3	81,8	737,5	766,0	751,8	60,3	64,1	62,2	81,8	84,9	83,3
$T_{7,7,7,7}$	70	879,5	905,5	892,5	7,3	8,8	8,0	80,7	83,1	81,9	878,0	898,6	888,3	74,2	77,5	75,8	81,3	83,2	82,3

Tabela 26 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	TBLDA-10									TBLDA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$AV_{2,0,0}$	4	67,9	80,0	74,0	6,2	6,6	6,4	70,9	83,6	77,3	67,0	71,8	69,4	62,5	64,2	63,4	79,0	84,7	81,9
$AV_{4,0,0}$	8	140,1	145,0	142,6	13,2	13,8	13,5	78,3	81,0	79,7	136,3	144,0	140,2	130,4	134,0	132,2	78,8	83,3	81,1
$AV_{6,0,0}$	12	208,0	226,0	217,0	19,9	21,4	20,6	75,3	81,9	78,6	200,3	209,0	204,7	188,5	184,9	186,7	81,5	85,0	83,2
$AV_{8,0,0}$	16	290,0	307,0	298,5	28,2	29,0	28,6	74,0	78,3	76,1	290,0	290,0	290,0	259,4	265,2	262,3	78,3	78,3	78,3
$AV_{10,0,0}$	20	354,0	388,3	371,2	36,2	37,9	37,0	73,1	80,2	76,6	354,0	357,5	357,5	327,9	331,0	329,4	79,4	79,4	79,4
$AV_{12,0,0}$	24	445,2	458,3	451,8	44,2	46,5	45,3	74,3	76,5	75,4	443,2	450,2	446,7	402,1	408,8	405,4	75,6	76,8	76,2
$AV_{14,0,0}$	28	550,5	594,5	572,5	48,6	50,5	49,5	66,8	72,2	69,5	548,2	552,2	550,2	447,7	500,4	474,1	71,9	72,5	72,2
$AV_{16,0,0}$	32	600,4	692,6	646,5	56,8	59,1	58,0	65,6	75,6	70,6	597,5	608,0	602,8	519,5	581,6	550,5	74,7	76,0	75,3
$AV_{18,0,0}$	36	758,6	779,5	769,1	65,3	66,8	66,1	65,5	67,3	66,4	756,5	762,5	759,5	589,6	656,7	623,1	67,0	67,5	67,3
$AV_{20,0,0}$	40	847,0	870,0	858,5	71,8	72,8	72,3	65,2	67,0	66,1	842,5	847,0	844,8	647,9	727,9	687,9	67,0	67,4	67,2
$AV_{0,2,0}$	4	75,7	83,0	79,4	6,5	7,2	6,9	73,5	80,6	77,0	75,7	81,3	78,5	68,6	69,6	69,1	75,0	80,6	77,8
$AV_{0,4,0}$	8	149,0	167,0	158,0	14,6	14,9	14,8	73,1	81,9	77,5	147,3	149,0	148,2	145,4	159,4	152,4	81,9	82,8	82,3
$AV_{0,6,0}$	12	215,0	232,0	223,5	22,4	23,3	22,9	78,9	85,1	82,0	213,8	215,0	214,4	231,2	235,4	233,3	85,1	85,6	85,4
$AV_{0,8,0}$	16	298,0	317,0	307,5	30,4	31,7	31,0	77,0	81,9	79,4	298,0	303,5	300,8	284,9	287,5	286,2	80,4	81,9	81,1
$AV_{0,10,0}$	20	369,5	384,8	377,2	38,8	40,4	39,6	79,3	82,5	80,9	369,5	381,0	375,3	355,0	361,6	358,3	80,0	82,5	81,3
$AV_{0,12,0}$	24	473,7	524,6	499,2	49,3	51,1	50,2	69,8	77,3	73,5	460,8	473,7	467,3	440,4	453,1	446,7	77,3	79,4	78,3
$AV_{0,14,0}$	28	548,0	569,5	558,8	56,1	58,0	57,1	75,0	77,9	76,4	547,0	552,5	549,8	509,0	570,9	540,0	77,3	78,1	77,7
$AV_{0,16,0}$	32	652,5	675,0	663,8	64,9	66,4	65,7	72,3	74,8	73,5	639,7	653,5	646,6	583,8	657,7	620,7	74,7	76,3	75,5
$AV_{0,18,0}$	36	746,2	796,1	771,2	73,6	75,2	74,4	69,0	73,6	71,3	740,2	750,8	745,5	667,4	754,1	710,8	73,1	74,2	73,6
$AV_{0,20,0}$	40	835,5	842,0	838,8	82,7	83,6	83,2	72,4	73,0	72,7	824,0	836,5	830,3	739,5	906,9	823,2	72,9	74,0	73,5
$AV_{0,0,2}$	4	85,0	85,0	85,0	7,0	7,5	7,2	77,2	77,2	77,2	84,5	85,0	84,8	71,4	74,1	72,8	77,2	77,7	77,5
$AV_{0,0,4}$	8	153,0	161,5	157,3	15,1	16,6	15,9	81,3	85,8	83,6	153,0	153,0	153,0	137,5	157,5	147,5	85,8	85,8	85,8
$AV_{0,0,6}$	12	221,0	246,5	233,8	23,8	24,7	24,2	79,9	89,1	84,5	221,0	229,5	225,3	214,5	219,3	216,9	85,8	89,1	87,5
$AV_{0,0,8}$	16	297,5	317,5	307,5	30,9	32,9	31,9	82,7	88,3	85,5	297,5	306,0	301,8	286,7	281,4	284,0	85,8	88,3	87,0
$AV_{0,0,10}$	20	374,0	394,0	384,0	37,7	39,8	38,8	83,3	87,8	85,5	374,0	377,0	375,5	358,8	363,9	361,3	87,1	87,8	87,4
$AV_{0,0,12}$	24	445,0	461,5	453,3	46,1	52,2	49,1	85,4	88,5	86,9	445,0	453,1	449,1	442,2	467,8	455,0	86,9	88,5	87,7
$AV_{0,0,14}$	28	518,5	530,8	524,7	61,7	62,9	62,3	86,6	88,6	87,6	518,5	522,2	520,4	538,3	624,2	581,2	88,0	88,6	88,3
$AV_{0,0,16}$	32	595,0	605,5	600,3	71,9	73,4	72,6	86,7	88,3	87,5	593,2	595,0	594,1	631,0	735,5	683,3	88,3	88,5	88,4
$AV_{0,0,18}$	36	682,6	682,6	682,6	74,0	81,8	77,9	86,6	86,6	86,6	677,7	682,6	680,2	703,8	856,8	780,3	86,6	87,2	86,9
$AV_{0,0,20}$	40	756,5	756,6	756,6	82,5	88,5	85,5	86,8	86,8	86,8	756,5	756,5	756,5	786,8	923,1	855,0	86,8	86,8	86,8

Tabela 27 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando todos os tipos de aventais.

Instância	Total de itens	TBLDA-10									TBLDA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$AV_{1,1,1}$	6	130,0	139,9	135,0	29,8	31,9	30,9	65,5	70,5	68,0	124,8	130,0	127,4	306,0	311,4	308,7	70,5	73,5	72,0
$AV_{2,2,2}$	12	219,5	240,5	230,0	60,6	65,7	63,2	76,3	83,6	79,9	218,5	223,5	221,0	611,0	625,0	618,0	82,1	83,9	83,0
$AV_{3,3,3}$	18	357,5	389,3	373,4	97,5	101,5	99,5	70,7	77,0	73,8	351,0	366,4	358,7	958,9	999,0	979,0	75,1	78,4	76,7
$AV_{4,4,4}$	24	438,0	466,2	452,1	130,0	138,1	134,1	78,7	83,7	81,2	426,1	449,8	438,0	1311,2	1343,7	1327,4	81,5	86,1	83,8
$AV_{5,5,5}$	30	571,2	578,0	574,6	160,1	166,5	163,3	79,3	80,3	79,8	559,8	573,5	566,7	1603,8	1636,9	1620,4	79,9	81,9	80,9
$AV_{6,6,6}$	36	696,7	725,2	711,0	214,6	225,7	220,2	75,9	79,0	77,4	674,4	696,0	685,2	2140,4	2193,0	2166,7	79,1	81,6	80,3
$AV_{7,7,7}$	42	800,5	864,0	832,3	248,3	254,4	251,4	74,3	80,2	77,2	789,5	825,6	807,6	2455,4	2530,9	2493,2	77,8	81,3	79,5
$AV_{8,8,8}$	48	922,0	982,9	952,5	288,6	300,4	294,5	74,6	79,6	77,1	892,5	936,5	914,5	2917,2	2959,4	2938,3	78,3	82,2	80,3
$AV_{9,9,9}$	54	1067,8	1139,8	1103,8	327,9	333,8	330,9	72,4	77,3	74,8	1025,0	1062,0	1043,5	3227,7	3293,1	3260,4	77,7	80,5	79,1
$AV_{10,10,10}$	60	1188,5	1235,7	1212,1	358,9	368,8	363,9	74,2	77,2	75,7	1138,8	1174,6	1156,7	3599,8	3632,6	3616,2	78,1	80,5	79,3
$AV_{11,11,11}$	66	1315,7	1361,8	1338,8	400,5	413,5	407,0	74,1	76,7	75,4	1274,6	1297,8	1286,2	3617,3	3640,4	3628,8	77,7	79,1	78,4
$AV_{12,12,12}$	72	1384,0	1496,6	1440,3	441,9	450,1	446,0	73,5	79,5	76,5	1368,7	1425,4	1397,1	3601,1	3636,3	3618,7	77,2	80,4	78,8
$AV_{13,13,13}$	78	1514,6	1597,5	1556,1	483,2	494,0	488,6	74,6	78,7	76,7	1488,0	1544,6	1516,3	3602,2	3633,6	3617,9	77,2	80,1	78,6
$AV_{14,14,14}$	84	1663,2	1716,9	1690,1	517,0	532,5	524,7	74,8	77,2	76,0	1635,4	1690,9	1663,2	3608,5	3641,4	3624,9	75,9	78,5	77,2
$AV_{15,15,15}$	90	1835,5	1853,6	1844,6	540,6	554,1	547,3	74,2	74,9	74,6	1737,6	1781,9	1759,8	3606,8	3644,5	3625,6	77,2	79,2	78,2
$AV_{16,16,16}$	96	1878,4	1975,1	1926,8	609,9	631,8	620,8	74,3	78,1	76,2	1857,2	1923,4	1890,3	3606,3	3656,8	3631,6	76,3	79,0	77,6
$AV_{17,17,17}$	102	1980,7	2087,9	2034,3	649,5	663,7	656,6	74,7	78,7	76,7	2015,5	2039,6	2027,6	3608,5	3657,8	3633,2	76,4	77,3	76,9
$AV_{18,18,18}$	108	2139,3	2196,4	2167,9	680,5	712,7	696,6	75,2	77,2	76,2	2098,2	2162,1	2130,2	3600,2	3650,5	3625,4	76,3	78,7	77,5
$AV_{19,19,19}$	114	2266,8	2326,6	2296,7	734,0	742,5	738,2	74,9	76,9	75,9	2260,7	2210,6	2309,4	3600,4	3659,1	3629,7	78,8	77,1	77,9
$AV_{20,20,20}$	120	2382,6	2476,4	2429,5	771,7	793,4	782,6	74,1	77,0	75,5	2380,7	2426,7	2403,7	3611,2	3677,3	3644,2	75,6	77,0	76,3

Tabela 28 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando apenas os forros de luva.

Instância	Total de itens	TBLDA-10									TBLDA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
L_1	4	21,1	21,1	21,1	1,5	1,5	1,5	60,1	60,1	60,1	21,1	21,1	21,1	15,1	15,3	15,2	60,1	60,1	60,1
L_2	8	42,2	42,2	42,2	2,1	2,2	2,2	60,1	60,1	60,1	42,2	42,2	42,2	21,5	21,8	21,6	60,1	60,1	60,1
L_3	12	42,2	42,2	42,2	3,2	3,2	3,2	90,1	90,1	90,1	42,2	42,2	42,2	31,8	32,3	32,0	90,1	90,1	90,1
L_4	16	63,3	63,3	63,3	4,1	4,3	4,2	80,1	80,1	80,1	63,3	63,3	63,3	42,0	43,8	42,9	80,1	80,1	80,1
L_5	20	84,4	84,4	84,4	5,1	5,2	5,2	75,1	75,1	75,1	84,4	84,4	84,4	52,1	54,0	53,1	75,1	75,1	75,1
L_{10}	40	147,7	147,7	147,7	10,6	10,6	10,6	85,8	85,8	85,8	147,7	147,7	147,7	102,5	109,0	105,7	85,8	85,8	85,8
L_{15}	60	211,0	211,0	211,0	16,7	16,9	16,8	90,1	90,1	90,1	211,0	211,0	211,0	168,0	172,7	170,3	90,1	90,1	90,1
L_{20}	80	295,4	295,4	295,4	23,6	24,1	23,8	85,8	85,8	85,8	295,4	295,4	295,4	238,1	249,1	243,6	85,8	85,8	85,8
L_{25}	100	358,7	358,7	358,7	27,8	30,7	29,2	88,3	88,3	88,3	358,7	358,7	358,7	270,1	307,3	288,7	88,3	88,3	88,3
L_{30}	120	422,0	422,0	422,0	40,1	41,4	40,8	90,1	90,1	90,1	422,0	422,0	422,0	396,6	411,4	404,0	90,1	90,1	90,1
L_{35}	140	506,4	506,4	506,4	48,3	48,7	48,5	87,6	87,6	87,6	506,4	506,4	506,4	466,6	493,9	480,2	87,6	87,6	87,6

Tabela 29 – Resultados numéricos para as heurísticas TBLDA-10 e TBLDA-100 utilizando todos os tipos de itens juntos.

Instância	Total de itens	TBLDA-10									TBLDA-100								
		CT(cm)			T(s)			O(%)			CT(cm)			T(s)			O(%)		
		Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med
$T_{1,1,1,1}$	10	130,0	149,0	139,5	30,5	32,0	31,2	70,1	80,3	75,2	127,7	142,3	135,0	291,4	294,5	292,9	73,3	81,7	77,5
$T_{2,2,2,2}$	20	254,2	299,1	276,7	66,0	66,5	66,3	69,8	82,1	76,0	254,2	264,3	259,3	614,2	617,4	615,8	79,0	82,1	80,6
$T_{3,3,3,3}$	30	376,6	389,9	383,3	100,1	102,7	101,4	80,3	83,1	81,7	375,4	382,4	378,9	927,4	933,9	930,7	81,9	83,4	82,6
$T_{4,4,4,4}$	40	497,9	528,8	513,4	120,7	135,8	128,3	79,0	83,9	81,4	494,0	510,8	502,4	1206,4	1214,6	1210,5	81,7	84,5	83,1
$T_{5,5,5,5}$	50	623,0	648,0	635,5	169,7	148,0	158,8	80,5	83,8	82,2	616,1	638,6	627,4	1534,1	1672,6	1603,3	81,7	84,7	83,2
$T_{6,6,6,6}$	60	743,0	785,2	764,1	202,8	212,6	207,7	79,8	84,3	82,0	734,3	753,1	743,7	1852,2	2010,5	1931,4	83,2	85,3	84,2
$T_{7,7,7,7}$	70	864,9	931,4	898,2	242,9	246,9	244,9	78,4	84,5	81,5	859,8	875,9	867,9	2167,2	2313,0	2240,1	83,4	85,0	84,2

5.3.1.4 Comparação entre os métodos de resolução heurísticos sem considerar camadas

Pelas seções anteriores, temos que as melhores heurísticas são a *Bottom-left* contínua, *Top-bottom-left discreta* e a *Top-bottom-left discreta* aleatória utilizando cem iterações e um tempo limite de uma hora (TBLDA-100).

Nas Tabelas 30, 31, 32 e 33, a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: a soma do comprimento utilizado em cada recipiente (CT que significa comprimento total utilizado), em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) dos recipientes, calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela soma das áreas dos recipientes, considerando que as dimensões dos recipientes são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado. Em todas as tabelas desta seção, vamos denotar as heurísticas da seguinte forma: heurística *Bottom-left* contínua por BLC, a heurística *Top-bottom-left* discreta por TBLD, e a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória com cem iterações por TBLDA-100, onde apresentaremos, neste caso, as médias dos valores. Vamos destacar os comprimentos menores ou iguais quando comparados com as outras heurísticas.

Tabela 30 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando apenas um tipo de avental.

Instância	Total de itens	BLC			TBLD			TBLDA-100		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{2,0,0}$	4	74,3	0,0	76,3	74,3	0,7	76,3	**69,4**	63,4	81,9
$AV_{4,0,0}$	8	143,0	0,0	79,3	143,2	1,5	79,2	**140,2**	132,2	81,1
$AV_{6,0,0}$	12	208,0	0,0	81,8	208,0	2,3	81,8	**204,7**	186,7	83,2
$AV_{8,0,0}$	16	**282,3**	0,0	80,4	**282,3**	3,1	80,4	290,0	262,3	78,3
$AV_{10,0,0}$	20	**346,3**	0,0	81,9	**346,3**	3,8	81,9	357,5	329,4	79,4
$AV_{12,0,0}$	24	**410,3**	0,0	82,9	**410,3**	4,6	83,0	446,7	405,4	76,2
$AV_{14,0,0}$	28	**474,3**	0,0	83,7	**474,3**	5,5	83,7	550,2	474,1	72,2
$AV_{16,0,0}$	32	548,7	0,0	82,7	**548,6**	6,3	82,7	602,8	550,5	75,3
$AV_{18,0,0}$	36	**614,9**	0,0	83,0	**614,9**	7,4	83,0	759,5	623,1	67,3
$AV_{20,0,0}$	40	687,0	0,0	82,6	**686,9**	8,3	82,6	844,8	687,9	67,2
$AV_{0,2,0}$	4	79,6	0,0	76,6	79,6	0,7	76,6	**78,5**	69,1	77,8
$AV_{0,4,0}$	8	150,0	0,0	81,3	150,0	1,6	81,3	**148,2**	152,4	82,3
$AV_{0,6,0}$	12	216,0	0,0	84,7	216,0	2,5	84,7	**214,4**	233,3	85,4
$AV_{0,8,0}$	16	**282,0**	0,0	86,5	**282,0**	3,2	86,5	300,8	286,2	81,1
$AV_{0,10,0}$	20	**348,0**	0,0	87,6	**348,0**	4,1	87,6	375,3	358,3	81,3
$AV_{0,12,0}$	24	**421,9**	0,0	86,7	422,1	4,9	86,7	467,3	446,7	78,3
$AV_{0,14,0}$	28	**493,6**	0,0	86,5	**493,6**	5,9	86,5	549,8	540,0	77,7
$AV_{0,16,0}$	32	**564,0**	0,0	86,5	**564,0**	6,4	86,5	646,6	620,7	75,5
$AV_{0,18,0}$	36	**630,0**	0,0	87,1	**630,0**	7,4	87,1	745,5	710,8	73,6
$AV_{0,20,0}$	40	**696,0**	0,0	87,6	**696,0**	8,7	87,6	830,3	823,2	73,5
$AV_{0,0,2}$	4	85,5	0,0	76,7	85,5	0,8	76,7	**84,8**	72,8	77,5
$AV_{0,0,4}$	8	156,0	0,0	84,1	156,0	1,7	84,1	**153,0**	147,5	85,8
$AV_{0,0,6}$	12	**224,0**	0,0	87,9	**224,0**	2,6	87,9	225,3	216,9	87,5
$AV_{0,0,8}$	16	309,5	0,0	84,8	309,5	3,5	84,8	**301,8**	284,0	87,0
$AV_{0,0,10}$	20	380,0	0,0	86,3	380,0	4,4	86,3	**375,5**	361,3	87,4
$AV_{0,0,12}$	24	**448,0**	0,0	87,9	**448,0**	5,3	87,9	449,1	455,0	87,7
$AV_{0,0,14}$	28	533,5	0,0	86,1	533,5	6,3	86,1	**520,4**	581,2	88,3
$AV_{0,0,16}$	32	604,0	0,0	86,9	604,0	7,2	86,9	**594,1**	683,3	88,4
$AV_{0,0,18}$	36	**672,0**	0,0	87,9	**672,0**	8,1	87,9	680,2	780,3	86,9
$AV_{0,0,20}$	40	757,5	0,0	86,6	757,5	9,3	86,6	**756,5**	855,0	86,8

Tabela 31 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando todos os tipos de aventais juntos.

Instância	Total de itens	BLC			TBLD			TBLDA-100		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{1,1,1}$	6	130,0	0,0	70,5	130,0	3,4	70,5	**127,4**	308,7	72,0
$AV_{2,2,2}$	12	**216,0**	0,0	84,9	**216,0**	7,7	84,9	221,0	618,0	83,0
$AV_{3,3,3}$	18	**328,0**	0,0	83,8	**328,0**	10,7	83,8	358,7	979,0	76,7
$AV_{4,4,4}$	24	**421,3**	0,0	87,0	421,5	14,9	87,0	438,0	1327,4	83,8
$AV_{5,5,5}$	30	591,1	0,0	77,5	**590,0**	18,4	77,7	566,7	1620,4	80,9
$AV_{6,6,6}$	36	**637,3**	0,0	86,3	637,5	22,7	86,3	685,2	2166,7	80,3
$AV_{7,7,7}$	42	**746,7**	0,0	85,9	786,8	25,7	81,5	807,6	2493,2	79,5
$AV_{8,8,8}$	48	**841,6**	0,0	87,1	**841,6**	29,2	87,1	914,5	2938,3	80,3
$AV_{9,9,9}$	54	**988,2**	0,0	83,5	996,4	34,0	82,8	1043,5	3260,4	79,1
$AV_{10,10,10}$	60	**1053,3**	0,0	87,0	1053,5	39,5	87,0	1156,7	3616,2	79,3
$AV_{11,11,11}$	66	**1172,3**	0,0	86,0	1172,4	42,9	86,0	1286,2	3628,8	78,4
$AV_{12,12,12}$	72	1269,6	0,0	86,6	**1260,4**	46,8	87,3	1397,1	3618,7	78,8
$AV_{13,13,13}$	78	1407,4	0,0	84,7	**1402,7**	50,2	84,9	1516,3	3618,7	78,8
$AV_{14,14,14}$	84	**1478,9**	0,0	86,8	1479,1	55,3	86,8	1663,2	3624,9	77,2
$AV_{15,15,15}$	90	**1583,9**	0,0	86,8	1584,0	61,0	86,8	1759,8	3625,6	78,2
$AV_{16,16,16}$	96	**1687,9**	0,0	86,9	1688,0	61,3	86,9	1890,3	3625,6	78,2
$AV_{17,17,17}$	102	**1806,6**	0,0	86,2	1806,8	69,0	86,2	2027,6	3633,2	76,9
$AV_{18,18,18}$	108	**1899,6**	0,0	86,8	1899,9	72,7	86,8	2130,2	3625,4	77,5
$AV_{19,19,19}$	114	**2002,5**	0,0	87,0	2015,9	76,8	86,4	2309,4	3629,7	77,9
$AV_{20,20,20}$	120	2103,9	0,0	87,1	**2102,0**	83,0	87,2	2403,7	3644,2	76,3

Tabela 32 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando os forros de luva.

Instância	Total de itens	BLC			TBLD			TBLDA-100		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
L_1	4	**21,1**	0,0	60,0	**21,1**	0,1	60,0	**21,1**	15,2	60,1
L_2	8	**42,2**	0,0	60,0	**42,2**	0,2	60,0	**42,2**	21,6	60,1
L_3	12	**42,2**	0,0	90,1	**42,2**	0,3	90,1	**42,2**	32,0	90,1
L_4	16	**63,3**	0,0	80,0	**63,3**	0,4	80,0	**63,3**	42,9	80,1
L_5	20	**84,4**	0,0	75,0	**84,4**	0,5	75,0	**84,4**	53,1	75,1
L_{10}	40	**147,7**	0,0	85,8	**147,7**	1,0	85,8	**147,7**	105,7	85,8
L_{15}	60	**211,0**	0,0	90,1	**211,0**	1,6	90,1	**211,0**	170,3	90,1
L_{20}	80	**295,4**	0,0	85,8	**295,4**	2,3	85,8	**295,4**	243,6	85,8
L_{25}	100	**358,7**	0,1	88,3	**358,7**	3,0	88,3	**358,7**	288,7	88,3
L_{30}	120	**422,0**	0,1	90,1	**422,0**	3,9	90,1	**422,0**	404,0	90,1
L_{35}	140	**506,3**	0,1	87,6	506,4	4,7	87,6	506,4	480,2	87,6

Tabela 33 – Comparação entre as melhores heurísticas utilizando os aventais e forros de luva.

Instância	Total de itens	BLC			TBLD			TBLDA-100		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$T_{1,1,1,1}$	10	**130,0**	0,0	80,2	**130,0**	6,6	80,2	135,0	292,9	77,5
$T_{2,2,2,2}$	20	**239,1**	0,0	87,3	247,1	14,2	84,4	259,3	615,8	80,6
$T_{3,3,3,3}$	30	**370,1**	0,0	84,6	372,0	20,8	84,1	378,9	930,7	82,6
$T_{4,4,4,4}$	40	486,5	0,0	85,5	**486,3**	28,5	85,8	511,4	1210,5	81,7
$T_{5,5,5,5}$	50	**610,7**	0,0	85,4	615,5	34,6	84,7	627,4	1603,3	83,2
$T_{6,6,6,6}$	60	**722,0**	0,0	86,7	725,3	43,2	86,3	743,7	1931,4	84,2
$T_{7,7,7,7}$	70	**848,7**	0,0	86,0	858,4	48,9	85,1	859,8	2240,1	84,2

Vamos comparar a melhor heurística contínua (*Bottom-left* contínua), a melhor heurística discreta (*Top-bottom-left* discreta), e a melhor heurística aleatória (*Top-bottom-left* discreta aleatória (TBLDA-100)). Pelas Tabelas 30, 31, 32 e 33, temos que o maior número de soluções melhores ou iguais obtidas foi dada pela heurística *Bottom-left* contínua, pois obteve quarenta e sete soluções melhores ou iguais enquanto que a heurística *Bottom-left* discreta e a heurística

TBLDA-100 obtiveram trinta e cinco e vinte e quatro soluções melhores ou iguais, respectivamente. Desta forma, o melhor método heurístico, ou seja, o que forneceu um maior número de soluções com comprimentos menores ou iguais entre os métodos heurísticos foi a heurística *Bottom-left* contínua.

A Figura 54 apresenta a quantidade de melhores soluções (soluções com comprimento menor ou igual quando comparado ao outro método) obtidas pela heurística *Top-bottom-left* discreta, a heurística *Bottom-left* contínua e a heurística TBLDA-100. Temos que, a heurística *Bottom-left* contínua obteve resultados melhores ou iguais para quarenta e sete instâncias em um total de sessenta e oito instâncias.

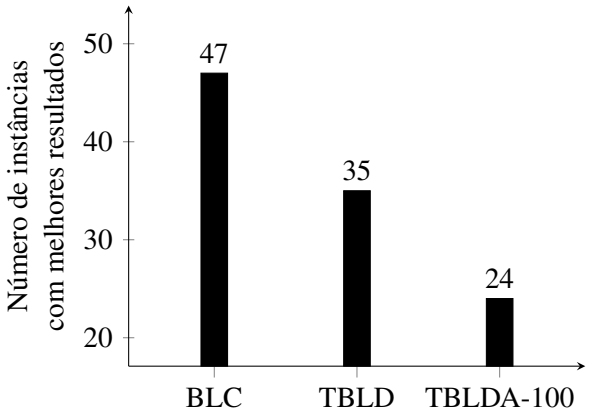


Figura 54 – Número de soluções melhores ou iguais obtidas pela comparação entre as heurísticas *Bottom-left* contínua (BLC), *Top-bottom-left* discreta (TBLD) e TBLDA-100.

5.3.2 Experimentos considerando camadas

Nesta seção, vamos apresentar os resultados para o problema de corte de aventais e forros de luva descrito neste trabalho utilizando camadas.

O critério utilizado para gerar as camadas é dado pela análise dos experimentos anteriores, em que verifica-se quais instâncias utilizam apenas um recipiente para empacotar os itens, e dentre essas instâncias escolhemos a que apresenta a maior taxa de ocupação. O número de camadas é estipulado pelo número de itens que podem ser empacotados no recipiente, fazendo combinações de forma que tenhamos um número par de itens por camadas. O tempo de resolução é dado pela soma dos tempos utilizados até encontrar a instância com maior taxa de ocupação que não ultrapassa o limite da mesa.

Observamos pela Seção 5.3.1.4 que a heurística *Bottom-left contínua* apresenta as maiores taxas de ocupação para um maior número de instâncias que não ultrapassam o limite da mesa. Desta forma, vamos realizar os experimentos utilizando camadas apenas para a heurística *Bottom-left* contínua.

A Tabela 34 fornece o nome da instância, o número de camadas utilizadas, o número de itens por camadas, o comprimento do recipiente por camada, em centímetros, o tempo de

resolução (T), em segundos, e o comprimento total do recipiente utilizado (CT), em centímetros, respectivamente. Vamos destacar na tabela os menores comprimentos encontrados.

Note que temos os menores comprimentos quando utilizamos apenas uma camada, com exceção da instância L_{15}, em que podemos utilizar duas, cinco ou dez camadas utilizando o mesmo comprimento de matéria-prima. No entanto, vale lembrar que ao cortar várias camadas de uma só vez, o tempo gasto no corte é menor, o que não é considerado pelo nosso método.

Tabela 34 – Resultados númericos para a heurística *Bottom-left* contínua utilizando camadas.

Instância	Número de camadas	Número de itens por camada	Comprimento do recipiente(cm)	T(s)	CT(cm)
$AV_{6,0,0}$	1	12	208,00	0,0	**208,0**
	2	6	128,00	0,0	256,0
	3	4	74,35	0,0	223,0
$AV_{0,6,0}$	1	12	216,0	0,0	**216,0**
	2	6	132,0	0,0	264,0
	3	4	79,6	0,0	238,8
$AV_{0,0,6}$	1	12	224,0	0,0	**224,0**
	2	6	136,0	0,0	272,0
	3	4	85,5	0,0	256,5
$AV_{2,2,2}$	1	12	216,0	0,0	**216,0**
	2	6	130,0	0,0	260,0
L_{15}	1	60	211,0	0,0	**211,0**
	2	30	105,5	0,0	**211,0**
	3	20	84,4	0,0	253,2
	5	12	42,2	0,0	**211,0**
	6	10	42,2	0,0	253,2
	10	6	21,1	0,0	**211,0**
$T_{2,2,2,2}$	1	20	239,1	0,0	**239,1**
	2	10	130,0	0,0	260,0

5.4 Comparação entre o melhor modelo matemático e a melhor heurística

Nesta seção, vamos comparar o melhor modelo matemático (*Modelo de trigonometria direta*) com a melhor heurística (*Bottom-left* contínua). Como o *Modelo de trigonometria direta* é utilizado para resolver um problema de *strip packing* e a heurística *Bottom-left* contínua leva em conta o comprimento do recipiente (270*cm*), para realizar a comparação vamos tomar apenas as instâncias que não ultrapassam o comprimento de 270*cm* utilizando o *Modelo de trigonometria direta*.

Na Tabela 35 a primeira coluna apresenta os nomes das instâncias. A segunda, o número total de itens cortados. A terceira, quarta e quinta, os nomes dos métodos de resolução divididos em três partes, que contêm: o comprimento utilizado (CT) em centímetros; o tempo de resolução (T), em segundos e a porcentagem de ocupação (O) do recipiente, calculada como a soma das áreas dos itens cortados dividida pela soma da área do recipiente, considerando que as dimensões do recipiente são dadas pela largura fixa e o comprimento utilizado. Além disso, vamos denotar o *Modelo de trigonometria* direta por MTD e a heurística *Bottom-left* contínua por BLC, destacar as soluções ótimas e TL representa o tempo limite que é de 3600 segundos.

Tabela 35 – Resultados numéricos para o *Modelo de trigonometria direta* e a heurística *Bottom-left* contínua.

Instância	Total de itens	MTD			BLC		
		CT(cm)	T(s)	O(%)	CT(cm)	T(s)	O(%)
$AV_{2,0,0}$	4	**68,4**	0,0	82,9	74,3	0,0	76,3
$AV_{4,0,0}$	8	**131,8**	6,1	86,1	143,0	0,0	79,3
$AV_{6,0,0}$	12	195,8	TL	86,9	208,0	0,0	81,8
$AV_{8,0,0}$	16	259,8	TL	87,4	282,3	0,0	80,4
$AV_{0,2,0}$	4	**76,8**	0,0	79,4	79,6	0,0	76,6
$AV_{0,4,0}$	8	**146,3**	12,2	83,3	150,0	0,0	81,3
$AV_{0,6,0}$	12	214,1	TL	85,4	216,0	0,0	84,7
$AV_{0,0,2}$	4	**83,9**	0,0	78,2	85,5	0,0	76,7
$AV_{0,0,4}$	8	**156,0**	28,8	84,1	156,0	0,0	84,1
$AV_{0,0,6}$	12	224,0	TL	87,9	224,0	0,0	87,9
$AV_{1,1,1}$	4	**130,0**	0,0	70,5	130,0	0,0	70,5
$AV_{2,2,2}$	8	210,0	TL	87,3	216,0	0,0	84,9
L_1	4	**21,1**	0,7	60,0	21,1	0,0	60,0
L_2	8	42,2	TL	60,0	42,2	0,0	60,0
L_3	12	42,2	TL	90,1	42,2	0,0	90,1
$T_{1,1,1,1}$	10	**130,0**	21,9	80,2	130,0	0,0	80,2
$T_{2,2,2,2}$	20	241,7	TL	86,3	239,1	0,0	87,3

Note que para quatro instâncias a heurística *Bottom-left* contínua obteve solução igual a solução ótima encotrada pelo *Modelo de trigonometria direta*. Para as instâncias $AV_{0,0,6}$, L_2 e L_3 as soluções apresentam o mesmo comprimento, porém o *Modelo de trigonometria direta* não provou a otimalidade. Por fim, para a instância $T_{2,2,2,2}$, temos que o comprimento obtido pela heurística *Bottom-left* contínua é menor que o comprimento obtido pelo *Modelo de trigonometria direta*, isso se deu pelo fato do *Modelo de trigonometria direta* atingir o tempo limite estipulado (3600 segundos) e não conseguir uma solução menor que a heurística *Bottom-left* contínua.

CAPÍTULO

6

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Um estudo sobre o problema de corte de aventais e forros de luva foi realizado, assim como uma revisão bibliográfica referente aos problemas de corte de itens irregulares. Além disso, foi apresentada uma formulação do problema de corte de aventais e forros de luva juntamente com métodos de resolução para este tipo de problema.

Alguns experimentos computacionais foram realizados utilizando dois modelos matemáticos: *Modelo dos pontos* e *Modelo de trigonomeria direta* e seis métodos heurísticos: *Bottom-left* discreta e contínua, *Top-bottom-left* discreta e contínua e *Top-bottom-left* discreta aleatória e contínua aleatória.

O *Modelo dos pontos* utiliza uma discretização do recipiente de meio em meio centímetro e os itens podem ser alocados apenas nos pontos desta malha. O *Modelo de trigonometria direta* utiliza o conceito de trigonometria direta para verificar a sobreposição entre os itens, fazendo com que ele necessite apenas das informações dos itens, tornando-se um modelo simples mas com excelentes resultados. Para as heurísticas *Bottom-left* discreta e contínua, temos que as posições de alocação dos itens são sempre o mais à esquerda e abaixo possível do recipiente. O que difere uma da outra é que no caso da heurística *Bottom-left* discreta temos uma discretização do recipiente de um em um centímetro. Para as heurísticas *Top-bottom-left* discreta e contínua, temos que as posições de alocação dos itens são sempre intercaladas no algoritmo: para um item a posição mais à esquerda e abaixo possível do recipiente e para o item seguinte a posição mais à esquerda e acima do recipiente. O que difere uma da outra é que no caso da heurística *Top-bottom-left* discreta temos uma discretização do recipiente de um em um centímetro. A heurística *Top-bottom-left* contínua aleatória é semelhante a heurística *Top-bottom-left* contínua, o que difere essas duas é a escolha do item a ser alocado, a rotação do item e a posição de alocação do item (cima ou baixo), que é feita de forma aleatória. O mesmo vale para a heurística *Top-bottom-left* discreta aleatória, a qual se assemelha a heurística *Top-bottom-left* discreta.

Uma comparação entre os modelos matemáticos foi feita e os resultados mostraram que

o *Modelo de trigonometria direta* obteve melhores soluções, ou seja, um menor desperdício de matéria-prima. O mesmo foi feito para as heurísticas, o que resultou que a heurística *Bottom-left* contínua obteve melhores resultados. Com relação aos tempos computacionais, temos que a heurística *Bottom-left* contínua obteve tempos menores.

Com relação às contribuições deste trabalho, foram submetidos dois artigos relacionados com esse projeto. Um para o Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), que ocorreu no período de 18 a 25 de Agosto de 2015, no qual o artigo foi aceito e um para a revista PODes - Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento.

Como propostas para continuidade deste trabalho, podemos: (a) analisar o cenário após o corte, pois ao realizar o corte, geramos recipientes irregulares (locais onde não foram alocados itens) que podem ser utilizados no próximo corte para alocar novos itens; (b) considerar na função objetivo, além de minimizar o comprimento de matéria-prima gasto para a realização do corte, o tempo gasto para cortar os itens, tornando assim o problema bi-objetivo, e tentar analisar o impacto das camadas; (c) considerar as questões de estoque dos itens, o que não está sendo abordado neste trabalho; (d) utilizar uma metaheurística mais sofisticada, como por exemplo, um algoritmo genético a fim de obter melhores soluções; e (e) retornar para fábrica para verificar se os resultados obtidos pelos métodos propostos são satisfatórios do ponto de vista prático.

REFERÊNCIAS

AGARWAL, P.; FLATO, E.; HALPERIN, D. Polygon decomposition for efficient construction of minkowski sums. **Computational Geometry**, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 39–61, 2002. Citado na página 39.

ALVAREZ-VALDES, R.; MARTINEZ, A.; TAMARIT, J. A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. **International Journal of Production Economics**, v. 145, n. 2, p. 463 – 477, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 46.

ANSELL. **Gloves**. 2003. <http://www.ansellhealthcare.com/america/latamer/glove/english/intro.htm>. Acessado: 14-05-2015. Citado na página 27.

AVNAIM, F.; BSISSONNAT, J. Simultaneous containment of several polygons. In: ACM. **Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry**. [S.l.], 1987. p. 242–247. Citado na página 39.

BAKER, B.; JR, E.; RIVEST, R. Orthogonal packings in two dimensions. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 9, n. 4, p. 846–855, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 57.

BENNELL, J.; DOWSLAND, K. Hybridising tabu search with optimisation techniques for irregular stock cutting. **Management Science**, 47, n. 8, p. 1160–1172, 2001. Citado na página 39.

BENNELL, J.; OLIVEIRA, J. The geometry of nesting problems: A tutorial. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 184, n. 2, p. 397–415, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 15, 25, 33, 34, 35, 37 e 38.

BURKE, E.; HELLIER, R.; KENDALL, G.; WHITWELL, G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem. **Operations Research**, 54, n. 3, p. 587–601, 2006. Citado na página 39.

CHERNOV, N.; STOYAN, Y.; ROMANOVA, T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. **Computational Geometry**, Elsevier, v. 43, n. 5, p. 535–553, 2010. Citado na página 37.

CHISHOLM, H.; HOOPER, F. H. **Encyclopædia Britannica**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1910. Citado na página 27.

COUROBUSINESS. **Luvas e raspas: oportunidades em Bocaina/SP**. 2004. <http://www.courobusiness.com.br/convenio/50.php>. Accessed: 2014-10-24. Citado na página 28.

COX, H. **The Law Times: The Journal and Record: The Law and The Lawyers**. [S.l.]: The Law Times, 1905. Citado na página 27.

CRAFTY. **The History and Resurrection of Aprons**. 2006. <http://www.ebay.com/gds/The-History-and-Resurrection-of-Aprons-/10000000001991368/g.html>. Accessed: 2014-11-04. Citado na página 28.

DOWSLAND, K.; DOWSLAND, W.; BENNELL, J. Jostling for position: local improvement for irregular cutting patterns. **Journal of the Operational Research Society**, JSTOR, p. 647–658, 1998. Citado na página 44.

DOWSLAND, K.; VAID, S.; DOWSLAND, W. An algorithm for polygon placement using a bottom-left strategy. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 371–381, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 42.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990. Citado na página 34.

EGEBLAD, J.; NIELSEN, B.; ODGAARD, A. Fast neighborhood search for two-and three-dimensional nesting problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1249–1266, 2007. Citado na página 44.

ELKERAN, A. A new approach for sheet nesting problem using guided cuckoo search and pairwise clustering. **European Journal of Operational Research**, v. 231, n. 3, p. 757 – 769, 2013. Citado na página 25.

FERREIRA, J.; ALVES, J.; ALBUQUERQUE, C.; OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J.; MATOS, J. A flexible custom computing machine for nesting problems. **Proceedings of XIII DCIS, Madrid, Spain**, p. 348–354, 1998. Citado na página 37.

FISCHETTI, M.; LUZZI, I. Mixed-integer programming models for nesting problems. **Journal of Heuristics**, v. 15, n. 3, p. 201–226, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 25, 45 e 46.

GOMES, A.; OLIVEIRA, J. A 2-exchange heuristic for nesting problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 359–370, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 34, 40 e 43.

GOMES, A.; OLIVEIRA, J. F. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. **European Journal of Operational Research**, 171, n. 3, p. 811–829, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 25, 34, 43 e 44.

HALAVATI, R.; SHOURAKI, S. B.; ZADEH, S. H. A novel evolutionary approach for two dimensional bin packing. **The CSI Journal on Computer Science and Engineering**, v. 6, n. 1, p. 58–67, 2008. Citado na página 25.

HANAN, L.; BRUCE, M.; PIPATPONG, P.; CIHAN, D. Composite stock cutting through simulated annealing. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 57–74, 1992. Citado na página 34.

HERODOTUS. **The History of Herodotus by Herodotus**. [S.l.]: Encyclopedia Britannica, 1952. Citado na página 27.

IMAMICHI, T.; YAGIURA, M.; NAGAMOCHI, H. An iterated local search algorithm based on nonlinear programming for the irregular strip packing problem. **Discrete Optimization**, v. 6, n. 4, p. 345 – 361, 2009. Citado na página 25.

JENKINS, J. K. **Encyclopedia of the Exquisite**. [S.l.]: Nan A. Talese, 2010. Citado na página 27.

KONOPASEK, M. Mathematical treatments of some apparel marking and cutting problems. **US Department of Commerce Report**, v. 99, n. 26, p. 90857–10, 1981. Citado na página 37.

LEAO, A. A.; TOLEDO, F. M.; OLIVEIRA, J. F.; CARRAVILLA, M. A. A semi-continuous mip model for the irregular strip packing problem. **International Journal of Production Research**, Taylor & Francis, v. 53, n. 1, p. 1–10, 2015. Citado na página 25.

LOPEZ-CAMACHO, E.; OCHOA, G.; TERASHIMA-MARíN, H.; BURKE, E. K. An effective heuristic for the two-dimensional irregular bin packing problem. **Annals of Operations Research**, v. 206, n. 1, p. 241?264, 2013. Citado na página 25.

LOPEZ-CAMACHO, E.; TERASHIMA-MARíN, H.; ROSS, P. Defining a problem-state representation with data mining within a hyper-heuristic model which solves 2d irregular bin packing problems. **Lecture Notes in Computer Science**, v. 6433, n. 1, p. 204–213, 2010. Citado na página 25.

MAHADEVAN, A. **Optimization in computer-aided pattern packing**. Tese (Doutorado) — North Carolina State University, 1984. Citado na página 39.

MAHE, Y. **History of gloves and their significance**. 2013. <http://www.fashionintime.org/history-gloves-significance/>. Accessed: 14-05-2015. Citado na página 27.

MUNDIM, L.; CHERRI, L. H.; ANDRETTA, M.; TOLEDO, F.; CARRAVILLA, M.; OLIVEIRA, J. F. Um modelo inteiro misto com trigonometria direta para o corte de polígonos convexos aplicado à indústria. **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 15, 25, 46, 49, 53 e 56.

OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J. Algorithms for nesting problems. In: **Applied simulated annealing**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 255–273. Citado 3 vezes nas páginas 15, 34 e 36.

OLIVEIRA, J.; GOMES, A.; FERREIRA, J. Topos–a new constructive algorithm for nesting problems. **OR-Spektrum**, Springer, v. 22, n. 2, p. 263–284, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 42.

PELOSO, R. da S. **A capital da luva de raspa completa 117 anos**. 2008. <http://www.uniara.com.br/ageuniara/artigos.asp?Artigo=3812>. Accessed: 2014-10-24. Citado na página 28.

SEGENREICH, S.; BRAGA, L. F. Optimal nesting of general plane figures: A monte carlo heuristical approach. **Computers & graphics**, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 229–237, 1986. Citado 5 vezes nas páginas 15, 34, 35, 36 e 37.

STOYAN, Y. G.; NOVOZHILOVA, M.; KARTASHOV, A. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 92, n. 1, p. 193–210, 1996. Citado na página 37.

TOLEDO, F. M. B.; CARRAVILLA, M. A.; RIBEIRO, C.; OLIVEIRA, J. F.; GOMES, A. M. The dotted-board model: a new mip model for nesting irregular shapes. **International Journal of Production Economics**, v. 145, n. 2, p. 478 – 487, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 15, 25, 34, 46, 49, 50 e 52.

UMETANI, S.; YAGIURA, M.; IMAHORI, S.; IMAMICHI, T.; NONOBE, K.; IBARAKI, T. Solving the irregular strip packing problem via guided local search for overlap minimization. **International Transactions in Operational Research**, v. 16, n. 6, p. 661–683, 2009. Citado na página 25.

WÄSCHER, G.; HAUβNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1109 – 1130, 2007. Citado na página 26.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado na página 34.

WENG, W.; KUO, H. Irregular stock cutting system based on autocad. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 42, n. 9, p. 634–643, 2011. Citado na página 34.

YEH, J. P. **Evolução das luvas tricotadas**. 2012. <http://www.yeling.com.br/blog/2012/12/evolucao-das-luvas-tricotadas/>. Accessed: 2014-10-24. Citado na página 27.