SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 27.11.2000

Assinatura:

Problemas de Corte e Empacotamento: Uma abordagem em Grafo E/OU

Andréa Carla Gonçalves Vianna

Orientador: *Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales*
Co-orientador: *Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos
Novembro de 2000

Ao meu marido, Carlos,
e aos meus filhos, Lucas e Laura.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Marcos Arenales pela orientação, dedicação, incentivo e amizade durante todo o doutorado.

Ao Professor Reinaldo Morabito pela orientação e sugestões.

Aos meus amigos pela ajuda e amizade, principalmente Edméa Cássia Baptista, Lúcia Kumoto Katsuki, Márcia Aparecida Zanolli Meira e Silva, Marco Antônio Rahal Sacoman e Vanilda Mizziara Mello Chueiri.

Aos meus pais, Valdemir e Cleide, meu marido e meus filhos, pelo amor, apoio, compreensão e paciência.

À toda minha família pelo carinho e apoio, que de maneira indireta, contribuíram sensivelmente para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

	Página
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Gráficos	xiii
Resumo	xiv
Abstract	xv
1. Introdução	1
2. Definição de Problemas de Corte	4
2.1. Classificação dos Problemas	4
2.2. O Problema de Corte Bidimensional	9
2.2.1. Padrão de corte com placa defeituosa	13
2.2.2. Padrão de corte com limitação no número de tipo de peças	14
2.2.3. Padrão com corte-cabeça	15
2.2.4. Padrão de corte com peças do tipo L	16
2.2.5. Padrão com corte não-guilhotinado	18
3. A abordagem em Grafo E/OU	21
3.1. Representação em Grafo E/OU	22
3.2. Representação de Padrões de Corte Especiais.....	26
3.2.1. Padrão de corte k-estagiado	26
3.2.2. Padrão de corte restrito	27
3.2.3. Padrão de corte com placa defeituosa	28
3.2.4. Padrão de corte com limitação no número de tipo de peças	30
3.2.5. Padrão com corte-cabeça	31
3.2.6. Padrão de corte com peças do tipo L	32
3.2.7. Padrão com corte não-guilhotinado	34
4. Método de Enumeração Implícita.....	37
4.1. Geração do conjunto de discretização	37
4.2. Limitantes Inferiores	43
4.2.1. Solução Homogênea	43
4.2.1.1. Problema Restrito.....	44
4.2.1.2. Problema k-estagiado	45

4.2.2. Solução Homogênea Composta	46
4.2.2.1. Problema Restrito.....	46
4.2.2.2. Problema com placa defeituosa	47
4.2.2.3. Problema com peças em L	48
4.2.3. Solução 2-estágios	49
4.3. Limitantes Superiores	51
4.3.1. Limitante superior trivial	51
4.3.2. Limitante superior para problemas restritos	52
4.3.3. Limitante superior para um problema com placa defeituosa	52
4.3.4. Limitante superior para problemas com peças do tipo L	53
4.4. Estratégia de busca	53
4.5. Algoritmo BT-HC	55
4.6. Conjectura do Problema de Corte Restrito	56
5. Heurísticas	57
6. Experiências Computacionais	62
6.1. Problema Irrestrito	63
6.1.1. Escolha seqüencial crescente dos cortes ...	64
6.1.2. Escolha seqüencial decrescente dos cortes .	65
6.1.3. Escolha aleatória dos cortes	67
6.1.4. Limitante Inferior: Solução Homogênea	68
6.1.5. Limitante Inferior: Solução 2-estágios	70
6.2. Problema Restrito	72
6.2.1. Limitante Inferior: Solução Homogênea Com- posta	75
6.2.2. Fracionamento do vetor b	77
6.3. Problema Estagiado	78
6.4. Problema com placa defeituosa	85
6.5. Problema com limitação no número de tipo de peças	88
6.6. Problema com corte-cabeça	91
6.7. Problema com peças do tipo L	94
7. Aplicação do Problema de Corte numa Indústria de Esqua- drias Metálicas	96

7.1. Algoritmo Guloso	98
7.2. Exemplo Prático	99
8. Conclusões e Perspectivas Futuras	104
Anexo 1	108
Anexo 2	124
Referências Bibliográficas	127

LISTA DE FIGURAS

	Página
2.1. Problema de corte unidimensional	6
2.2. Padrão de corte unidimensional	7
2.3. Problema de corte bidimensional	7
2.4. Padrão de corte bidimensional	8
2.5. Problema de corte tridimensional	8
2.6. Padrão de corte tridimensional	9
2.7. Corte guilhotinado horizontal e vertical	11
2.8. Padrões de corte guilhotinado	11
2.9. Padrão de corte guilhotinado 2-estágios, 3-estágios e 4-estágios	11
2.10. Padrão de corte guilhotinado 2-estágios não-exato ...	12
2.11. Placa defeituosa e placa a ser tratada	13
2.12. Padrão de corte em uma placa defeituosa	13
2.13. Produção com o máximo de 3 tipos de peças	14
2.14. Padrão de corte com limitação no número de tipo de peças	14
2.15. Corte-cabeça	15
2.16. Cortes do tipo degrau	16
2.17. Problema bidimensional com peças do tipo L	17
2.18. Padrão de corte com peças do tipo L	17
2.19. Problema de corte de espuma	18
2.20. Corte não-guilhotinado de 1ª ordem	18
2.21. Padrões de corte não-guilhotinado	19
2.22. Sequência de cortes na geração do corte não-guilhoti- nado da Figura 2.20	19
2.23. Padrão de corte não-guilhotinado de ordem superior ..	19
3.1. Representação de grafo	22
3.2. Representação de hipergrafo	22
3.3. Representação de grafo E/OU	23
3.4. Padrão de corte	24
3.5. Grafo E/OU representando o padrão da Figura 3.4	25
3.6. Grafo E/OU representando padrões de corte alternati-	

vos	26
3.7. Padrão de corte k-estagiado	27
3.8. Corte de um problema restrito	28
3.9. Padrão de corte numa placa defeituosa	29
3.10. Possíveis cortes numa placa com mais de um defeito ..	29
3.11. Corte com limitação no número de tipo de peças	31
3.12. Padrão de corte gerado pelo corte-cabeça	32
3.13. Padrão de corte com peças retangulares e/ou do tipo L	33
3.14. Possíveis cortes no nó retangular	34
3.15. Possíveis cortes no nó do tipo L	34
3.16. Padrão de corte não-guilhotinado e sua representação no grafo E/OU	35
3.17. Padrão de corte não-guilhotinado gerado através de cortes guilhotinado e do tipo degrau	36
4.1. Combinação linear dos comprimentos ($x=\ell_1+2.\ell_2$)	38
4.2. Simetria	39
4.3. Exclusão: $x=\ell_1+\ell_2$ pode ser excluído do conjunto X, no nó (ℓ, w)	40
4.4. Caminhos alternativos produzindo padrões equivalentes	42
4.5. Padrão de corte homogêneo	43
4.6. Padrão homogêneo com apenas cortes verticais	44
4.7. Padrão homogêneo quando $b_j^N < \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor$	45
4.8. Padrão de corte homogêneo composto	47
4.9. Soluções homogêneas de uma placa defeituosa	47
4.10. Soluções homogêneas com peças do tipo L	48
4.11. Soluções homogêneas dos retângulos	49
4.12. Solução homogênea do nó do tipo L	49
5.1. Eliminação de ℓ_j na geração do conjunto X	61
6.1. Solução do exemplo de Herz (1972)	69
6.2. Solução do exemplo de Beasley (1985) com $ X < 50$ e $ Y < 50$ (Heurística H5)	70
6.3. Solução do exemplo W1 (Wang, 1983)	73

6.4. Solução do exemplo W2 (Wang, 1983)	73
6.5. Solução do exemplo W3 (Wang, 1983)	74
6.6. Solução do exemplo OF1 (Oliveira e Ferreira, 1990) ..	75
6.7. Solução do exemplo OF2 (Oliveira e Ferreira, 1990) ..	75
6.8. Solução do problema 2-estágios	78
6.9. Solução do problema não-estagiado	79
6.10. Solução do problema restrito 2-estágios	79
6.11. Solução do problema restrito não-estagiado	80
6.12. Soluções ótimas dos exemplos restritos (m=3)	82
6.13. Soluções ótimas dos exemplos restritos (m=5)	83
6.14. Soluções ótimas dos exemplos restritos (m=10)	84
6.15. Soluções ótimas dos exemplos restritos (m=30)	84
6.16. Exemplo 1 (solução=166) e exemplo 2 (solução=167) ...	87
6.17. Exemplo 3 (solução=166) e exemplo 4 (solução=158) ...	88
6.18. Exemplo 5 (solução=167) e exemplo 6 (solução=164) ...	88
6.19. Exemplo 7 (solução=159) e exemplo 8 (solução=156) ...	88
6.20. Exemplo W2 com limitação de 2 e 3 tipos de peças	89
6.21. Exemplo W3 com limitação de 2 e 3 tipos de peças	90
6.22. Exemplo OF1 com limitação de 3 e 4 tipos de peças ...	90
6.23. Exemplo OF2 com limitação de 3 e 4 tipos de peças ...	91
6.24. Solução cabeça	92
6.25. Solução cabeça com limitação na posição do corte	92
6.26. Solução cabeça	93
6.27. Solução cabeça com limitação na posição do corte	93
6.28. Solução com peças do tipo L (m=3)	95
7.1. Problema de corte com k placas (k=3)	98
7.2. Relatório obtido com a execução do problema	100
7.3. Seis melhores padrões de cortes	101
7.4. Últimos padrões de cortes	102
8.1. Combinação de diferentes tipos de peças	105
8.2. Solução homogênea composta	106
9.3. Padrão de corte tabuleiro	107
A.1. Lista sequencial	110
A.2. Lista encadeada	110

A.3. Árvore binária ordenada	111
A.4. Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas guilhotinados	112
A.5. Estrutura do nó armazenado	112
A.6. Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas não-guilhotinados	112
A.7. Estrutura do nó gerado pelo corte não-guilhotinado ..	113
A.8. Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas guilhotinados (Morabito, 1992)	113
A.9. Estrutura gerada por Morabito (1992)	113

LISTA DE TABELAS

	Página
6.1. Exemplos pequenos	64
6.2. Exemplos grandes	65
6.3. Exemplos pequenos	66
6.4. Exemplos grandes	66
6.5. Exemplos pequenos	67
6.6. Exemplos grandes	68
6.7. Resultados obtidos do exemplo de Beasley (1985)	70
6.8. Exemplos pequenos	71
6.9. Exemplos grandes	71
6.10. Resultados obtidos dos exemplo de Wang (1983)	73
6.11. Resultados obtidos dos exemplos de Oliveira e Ferrei- ra (1990)	74
6.12. Exemplos com demanda pequena	76
6.13. Exemplos com demanda grande	76
6.14. Exemplos pequenos	77
6.15. Exemplos grandes	77
6.16. Exemplos pequenos	81
6.17. Exemplos grandes	81
6.18. Exemplo pequeno e grande com $m=3$	82
6.19. Exemplo pequeno e grande com $m=5$	83
6.20. Exemplo pequeno e grande com $m=10$	84
6.21. Exemplo pequeno e grande com $m=30$	85
6.22. Exemplo de Carnieri et al. (1993)	86
6.23. Defeitos e soluções obtidas por Carnieri et al. (1993)	86
6.24. Defeitos e soluções obtidas por Grafo E/OU	87
6.25. Exemplos de Wang (1993) com limitação no número de tipo de peças	89
6.26. Exemplos de Oliveira e Ferreira (1990) com limitação no número de tipo de peças	90
6.27. Exemplos com peças do tipo L	94
7.1. Dados das placas ($k=4$)	99
7.2. Dados das peças ($m=35$)	100

7.3. Resultados obtidos com a heurística H6	103
A.1. Discretização nos exemplos pequenos	116
A.2. Discretização nos exemplos grandes	117
A.3. Discretização nos exemplos pequenos (com simetria) ..	119
A.4. Discretização nos exemplos grandes (com simetria) ...	120
A.5. Discretização nos exemplos pequenos com $ X < 100$ e $ Y < 100$ (Heurística H3)	121
A.6. Discretização nos exemplos grandes com $ X < 100$ e $ Y < 100$ (Heurística H3)	122

LISTA DE GRÁFICOS

	Página
A.1. Discretização nos exemplos pequenos	118
A.2. Discretização nos exemplos grandes	118
A.3. Discretização nos exemplos pequenos com $ x < 100$ e $ y < 100$ (Heurística H3)	122
A.6. Discretização nos exemplos grandes com $ x < 100$ e $ y < 100$ (Heurística H3)	123

RESUMO

O problema de corte consiste no corte de objetos maiores para produção de peças menores, de modo que uma certa função objetivo seja otimizada, por exemplo, a perda seja minimizada. O problema de empacotamento pode também ser visto como um problema de corte, onde as peças menores são arranjadas dentro dos objetos.

Uma abordagem em grafo E/OU para a resolução de problemas de corte e empacotamento foi proposta inicialmente por Morabito (1989) para problemas de corte bidimensionais e, mais tarde, estendida para problemas tridimensionais (Morabito, 1992). Nesta abordagem foi utilizada uma técnica de busca híbrida, onde se combinou a busca em profundidade primeiro com limite de profundidade e a busca *hill-climbing*, utilizando-se heurísticas baseadas nos limitantes superiores e inferiores. Experiências computacionais mostraram a viabilidade de uso na prática desta abordagem.

Mais tarde, Arenales (1993) generalizou esta a abordagem em grafo E/OU mostrando como diferentes problemas de corte poderiam ser resolvidos, independentemente da dimensão, formas dos objetos e itens, baseado em simples hipóteses, sem realizar, entretanto, estudos computacionais.

O presente trabalho tem por objetivo estender a abordagem em grafo E/OU para tratar outros casos não analisados pelos trabalhos anteriores, tais como situações envolvendo diferentes processos de corte, bem como a implementação computacional de métodos baseados na abordagem em grafo E/OU, mostrando, assim, a versatilidade da abordagem para tratar diversas situações práticas de problemas de corte e sua viabilidade computacional.

Palavras-chave: Problemas de corte e empacotamento, busca em grafo E/OU, otimização combinatória, heurísticas.

ABSTRACT

The cutting problem consists of cutting larger objects in order to produce smaller pieces, in such a way as to optimizing a given objective function, for example, minimizing the waste. The packing problem can also be seen as a cutting problem, where the position that each smaller piece is arranged inside of the objects can be seen as the place it was cut from.

An AND/OR-graph approach to solve cutting and packing problems was initially proposed by Morabito (1989) for two-dimensional cutting problem and, later, extended to three-dimensional problems (Morabito, 1992). That approach uses a hybrid search, which combines depth-first search under depth bound and hill-climbing strategy. Heuristics were devised based on upper and lower bounds. Computational experiences demonstrated its practical feasibility.

The AND/OR-graph approach was later generalized by Arenales (1993) based on simple hypothesis. He showed that different cutting problems could be solved using the AND/OR-graph approach, independently of the dimension and shapes.

The main objective of this thesis is the practical extension of the AND/OR-graph approach to handle other cases not considered by previous works. It was considered different cutting processes, as well as the analysis of computational implementation, showing how can it be adapted to many classes of practical cutting and packing problems.

Keywords: Cutting and packing problems, AND/OR-graph search, combinatorial optimization, heuristics.

1. Introdução

O Problema de Corte, genericamente, consiste em cortar unidades maiores (objetos) em unidades menores (itens), otimizando uma determinada função (por exemplo, minimização da perda). Este tipo de problema aparece em diversos processos industriais de corte, tais como no corte de bobinas de papel e alumínio, barras de aço, chapas metálicas e de madeira, placas de circuito impresso, caixas de papelão, rolos de tecidos, entre outros.

Análogo ao Problema de Corte, o Problema de Empacotamento consiste em empacotar unidades menores em unidades maiores, otimizando determinada função (por exemplo, minimização do espaço ocioso) e satisfazendo um conjunto de restrições. Exemplos do Problema de Empacotamento ocorrem quando se carregam produtos embalados sobre paletês, ou dentro de contêineres e caminhões.

Estas duas classes de problemas de otimização estão intimamente relacionadas e são tratadas na literatura como Problemas de Corte e Empacotamento (Dyckhoff, 1990).

O número de aplicações para os Problemas de Corte e Empacotamento é muito grande. Na literatura existem diversas abordagens para resolvê-los, conforme mostram os exames especiais de periódicos em Brown (1971), Golden (1976), Hin-

xman (1980), Dyckhoff e Waescher (1990), Lirov (1992), Dowsland e Dowsland (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Dyckhoff e Finke (1992), Martello (1994a, 1994b), Bischoff e Waescher (1995), Mukhacheva (1997), Dyckhoff et al. (1997), Arenales et al. (1999) e Special Interest Group on Cutting and Packing (SICUP, 1999).

Uma abordagem de solução baseada numa busca em grafo E/OU para problemas que envolvam objetos de mesma forma, barras (caso unidimensional), retângulos (caso bidimensional) e caixas (caso tridimensional) foi apresentada por Morabito (1992). Nesta abordagem foi utilizada uma técnica de busca híbrida (semi-informada), onde se combinaram a busca em profundidade com limite e a busca *hill-climbing*. Utilizaram-se, também, heurísticas baseadas nos limitantes superiores e inferiores.

Arenales (1993) generalizou a abordagem, sem, entretanto, realizar estudos de casos e apresentar resultados computacionais.

O presente trabalho tem por objetivo estender a abordagem em grafo E/OU para tratar outros casos não analisados por trabalhos anteriores, envolvendo diferentes processos de corte, tais como corte com placa defeituosa, corte-cabeça, corte com limitação no número de tipo de itens, corte com peças não retangulares (por exemplo, tipo L), etc. Tem também por objetivo, a implementação computacional usando a abordagem em grafo E/OU para tratar diversas situações práticas dos problemas de corte.

O trabalho apresenta, ainda, limitantes inferiores diferentes dos propostos por Morabito e Arenales (1996), novas heurísticas para tornar a abordagem mais eficiente, e uma importante conjectura para o problema de corte restrito.

Organização da Tese

Esta tese está dividida em 8 capítulos. No segundo capítulo, é feita uma classificação dos problemas de corte, assim como um estudo do problema de corte bidimensional e suas particularidades, já que este é o objeto principal do presente estudo.

O capítulo 3 trata da representação em grafo E/OU do problema de corte para diferentes padrões. Neste é feito um estudo sobre a abordagem em grafo E/OU aplicada a cada classe de problema.

No capítulo 4 é visto um método de enumeração implícita para a busca no grafo E/OU, onde são utilizados limitantes. A estratégia de busca apresentada combina busca em profundidade com busca informada (*hill-climbing*). Heurísticas são incluídas no capítulo 5 para viabilizar computacionalmente a resolução do problema.

No sexto capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos com a implementação computacional nos diferentes problemas de corte bidimensional.

No capítulo 7 é feito um estudo de caso do problema de corte bidimensional restrito em uma Indústria de Esquadrias Metálicas, onde determina-se uma sequência de padrões de corte para atender uma demanda com uma perda mínima de material.

As conclusões e perspectivas futuras desta tese são discutidas no oitavo capítulo.

2. Definição de Problemas de Corte

Neste capítulo é apresentada uma classificação dos problemas de corte, segundo Dyckhoff (1990), e um estudo mais detalhado do problema de corte bidimensional.

2.1. Classificação dos Problemas

O Problema de Corte consiste, basicamente, em cortar unidades maiores em unidades menores, otimizando um determinado objetivo. Entretanto, os problemas podem aparecer numa diversidade muito grande de casos.

Diversas classificações de problemas de corte foram discutidas em exames, entre elas, Golden (1976), Hinxman (1980), Dyckhoff et al. (1985) . Em particular, Dyckhoff (1990) propôs um sistema de classificação a partir das quatro principais características dos problemas:

- a dimensão do problema
 - (1) unidimensional
 - (2) bidimensional
 - (3) tridimensional
 - (n) n-dimensional, para $n > 3$

- a forma de alocação das unidades
 - (V) seleção de unidades grandes
(um conjunto de unidades grandes deve ser escolhido para incluir todas as unidades pequenas)
 - (B) seleção de unidades pequenas
(um conjunto de unidades pequenas deve ser escolhido para ocupar todas as unidades grandes)
- sortimento de unidades grandes
 - (O) uma unidade
(uma única unidade grande)
 - (I) unidades de tamanhos iguais
(todas as unidades grandes são iguais)
 - (D) unidades de tamanhos diferentes
(as unidades grandes têm tamanhos diferentes)
- sortimento de unidades pequenas
 - (F) poucas unidades de tamanhos diferentes
(poucas unidades pequenas, geralmente de tamanhos diferentes)
 - (M) muitas unidades de muitos tamanhos diferentes
(muitas unidades pequenas e a maioria delas em tamanhos diferentes)
 - (R) muitas unidades de poucos tamanhos diferentes
(muitas unidades pequenas com poucos tamanhos diferentes)
 - (C) unidades de tamanhos iguais
(todas as unidades pequenas são iguais)

Estas quatro características permitem obter 96 tipos diferentes para problemas de corte e empacotamento e a tipologia é definida pela quadra $\alpha/\beta/\gamma/\sigma$. Cada um dos símbolos corresponde a uma das características citadas.

Um problema de corte de estoque definido pela

quadra 2/V/I/R significa que o problema é bidimensional (2), todas as unidades pequenas devem ser alocadas numa seleção de unidades grandes (V), todas de tamanhos iguais (I) e com muitas unidades pequenas de relativamente poucos tamanhos diferentes (R).

Considerando somente estas quatro características, os problemas apresentam ainda muitas diferenças quanto às suas restrições, por exemplo, problemas restritos e irrestritos, guilhotinado e não-guilhotinado etc.

A seguir, são definidos problemas de corte, classificando-os pelas suas dimensões.

O problema de corte unidimensional apresenta apenas uma das dimensões relevante para o processo de corte. Considere um objeto, por exemplo, uma barra como na Figura 2.1, que deve ser cortado ao longo de seu comprimento em itens de comprimento especificado. Cada item tem um valor associado, chamado de valor de utilidade. Então, o problema consiste em maximizar o valor de utilidade total.

O modo como os itens estão arranjados ao longo do objeto é chamado de padrão de corte. Para o problema da Figura 2.1, um possível padrão de corte é ilustrado na Figura 2.2.

Figura 2.1 - Problema de corte unidimensional

Figura 2.2 - Padrão de corte unidimensional

No problema de corte bidimensional são relevantes duas dimensões, sendo a geometria neste problema determinante, pois a forma e as medidas do objeto e dos itens determinam os padrões de corte.

As Figuras 2.3 e 2.4 representam, respectivamente, um problema de corte bidimensional com objeto e itens retangulares e um padrão de corte do problema.

Na próxima seção o problema de corte bidimensional é discutido com mais detalhes, pois este é o objeto de estudo do trabalho.

Figura 2.3 - Problema de corte bidimensional

Figura 2.4 - Padrão de corte bidimensional

No problema de corte tridimensional, três dimensões são relevantes; este problema surge, principalmente, na alocação de caixas dentro de caixas maiores. O problema de corte tridimensional e um possível padrão de corte são apresentados nas Figuras 2.5 e 2.6, respectivamente.

Figura 2.5 - Problema de corte tridimensional

Figura 2.6 - Padrão de corte tridimensional

2.2. O Problema de Corte Bidimensional

Esta classe de problemas de corte tem sido bastante estudada desde o trabalho pioneiro de Gilmore e Gomory (1965), onde um método de programação dinâmica foi proposto. Herz (1972), Christofides e Whitlock (1977), Wang (1983) e Beasley (1985) representam marcos importantes para esta classe de problemas. Mais tarde, Morabito et.al. (1992) e Morabito e Arenales (1996) estenderam o trabalho de Herz (1972), propondo métodos de enumeração implícita utilizando limitantes, como métodos de busca num grafo E/OU, constituindo a ferramenta principal para este trabalho.

Considere uma placa retangular (objeto) de dimensões (L, W) , onde L é o comprimento e W é a largura, e um conjunto de m peças retangulares (itens) de dimensão (ℓ_i, w_i) , onde ℓ_i é comprimento e w_i a largura da peça i , e valor de utilidade v_i , $i=1, \dots, m$. Um problema de corte bidimensional consiste em cortar a placa retangular em peças menores, de forma a otimizar um determinado objetivo, ou seja,

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^m v_i \cdot a_i$$

sujeito a: $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ corresponde a um padrão de corte

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro, } i=1, \dots, m,$$

onde a_i corresponde ao número de peças i alocadas na placa (L, W) . Obviamente, há regras para a definição de padrões de corte como será visto adiante.

O problema de corte é chamado irrestrito quando não há limitação no número de peças presentes no padrão. Caso contrário, o problema de corte é chamado restrito, ou seja,

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^m v_i \cdot a_i$$

sujeito a: $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ corresponde a um padrão de corte

$$0 \leq a_i \leq b_i, \text{ inteiro, } i=1, \dots, m,$$

onde b_i é a quantidade máxima de peça do tipo i no padrão, para $i=1, \dots, m$. Embora apenas um pequeno detalhe na formulação seja alterado, a limitação no número de peças no padrão introduz grandes dificuldades de resolução.

O corte é chamado guilhotinado quando, aplicado em um retângulo, produz dois novos retângulos, ou seja, o retângulo é cortado somente de modo horizontal ou vertical, conforme a Figura 2.7. Um padrão de corte é do tipo guilhotinado se for obtido por cortes guilhotinados sucessivos (Figura 2.8).

Figura 2.7 - Corte guilhotinado horizontal e vertical

Figura 2.8 - Padrões de corte guilhotinado

Um padrão de corte guilhotinado pode ser do tipo estagiado (k -estágios) ou não-estagiado. No primeiro estágio, todos os cortes são feitos de forma paralela a um dos lados da placa, por exemplo, cortes guilhotinados verticais; no segundo estágio, os cortes são ortogonais aos do estágio anterior e assim por diante. Se há um limite k para o número máximo de estágios, o problema é classificado como um problema de corte guilhotinado k -estagiado; caso contrário, o problema é não-estagiado (Figura 2.9).

Figura 2.9 - Padrões de corte guilhotinado 2-estágios, 3-estágios e 4-estágios

Um problema de corte k -estagiado é não-exato quando permite um estágio posterior somente para fazer a úl-

tima apara na direção perpendicular à direção dos cortes do estágio anterior. A Figura 2.10 apresenta um exemplo de um problema 2-estágios não-exato.

Figura 2.10 - Padrão de corte guilhotinado 2-estágios não-exato

Convém observar que o problema de corte estagiado foi definido e estudado no artigo pioneiro de Gilmore e Gomory (1965). Ainda hoje, o método por eles proposto para a resolução do problema em 2-estágios (o problema é decomposto em vários problemas unidimensionais) é o mais utilizado. Entretanto, quando a limitação no número de peças é incluída, o modelo matemático torna-se de otimização inteira não-linear (veja anexo 2) e seu método não é trivialmente estendido. Outros autores tratam o problema de corte guilhotinado estagiado restrito (Christofides e Whitlock, 1977; Christofides e Hadjiconstantinou, 1995). Em particular, Morabito e Arenales (1996) utilizaram a abordagem em grafo E/OU para estudar tal problema, porém, sem apresentar um estudo computacional quando ambas as restrições são impostas. No capítulo 6 é feito um estudo da abordagem em grafo E/OU, comparando com a relaxação lagrangiana apresentada em Gramani (1997).

Em alguns problemas práticos, por limitação dos equipamentos de corte ou propriedades do material, é necessário trabalhar com padrões que tenham restrições especiais, entre eles, padrão com placa defeituosa, padrão com limitação no número de tipo de itens, padrão com corte-cabeça e padrão com peças do tipo L.

2.2.1. Padrão de corte com placa defeituosa

A placa (L,W) considerada até o momento é uma placa perfeita, ou seja, é possível alocar peças (ℓ_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, em qualquer posição da placa.

Há casos em que isto nem sempre ocorre, por exemplo, uma chapa de madeira com pequenos defeitos de fabricação (placa defeituosa). Neste trabalho, são tratadas as áreas defeituosas de maneira retangular (Figura 2.11). A Figura 2.12 apresenta um padrão de corte em uma placa defeituosa.

Figura 2.11 - Placa defeituosa e placa a ser tratada

Figura 2.12 - Padrão de corte em uma placa defeituosa

Problemas de cortes com placas defeituosas foram pouco estudados na literatura (Carnieri et al., 1993; Hahn, 1968).

2.2.2. Padrão de corte com limitação no número de tipo de peças

Considere um problema onde, por motivo de restrição do equipamento, é necessário limitar o número máximo de tipos de peças no padrão. No exemplo da Figura 2.13, é possível produzir no máximo 3 tipos de peças por padrão de corte, pois o equipamento de corte (serra automática) possui apenas 3 saídas para os itens cortados. Um padrão de corte é representado na Figura 2.14.

Figura 2.13 - Produção com o máximo de 3 tipos de peças

Figura 2.14 - Padrão de corte com limitação no número tipo de peças

Neste caso, é necessário incluir no modelo

inicial variáveis binárias relacionadas com cada tipo de peça e novas restrições

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i \leq B \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

onde B é o número máximo permitido de tipos de peças no padrão; e $y_i = 1$, se o item i for produzido; $y_i = 0$, caso contrário.

Embora este problema surja na prática com serras automáticas de grande porte (por exemplo, certas serras encontradas nas fábricas de chapas duras), é muito pouco estudado na literatura. Em particular, Morabito e Garcia (1998) estudaram este problema (com algumas restrições adicionais, devido à característica do equipamento) e propuseram um método de programação dinâmica. Neste trabalho, uma abordagem por grafo E/OU é proposta.

2.2.3. Padrão com corte-cabeça

Considere um equipamento para guilhotinar placas com limitação mínima e máxima na posição do corte (Figura 2.15). Este corte é chamado de corte-cabeça, ou seja, após o corte a sub-placa à esquerda só pode gerar itens finais (problema unidimensional), enquanto que a outra sub-placa pode ser novamente posicionada para um novo corte. É permitido dar um giro de 90° na placa antes do novo corte.

Figura 2.15 - Corte-cabeça

Não foi encontrado registro na literatura de métodos de solução para esta classe de problemas, embora possa ser encontrado na prática (serra encontrada numa fábrica de chapas duras). Neste trabalho, mostra-se como a abordagem em grafo E/OU pode ser facilmente estendida para gerar padrões com corte-cabeça.

2.2.4. Padrão de corte com peças do tipo L

Até o momento, todas as placas e peças citadas nos problemas foram retangulares e os cortes guilhotinados. Considere agora peças retangulares e/ou do tipo L, de modo que cortes guilhotinados não produzem todos os itens. Os cortes neste padrão são, então, guilhotinados e/ou do tipo degrau. Cortes do tipo degrau são ilustrados pela Figura 2.16.

Figura 2.16 - Cortes do tipo degrau

Considere, conforme a Figura 2.17, uma placa retangular (L, W) , onde L é a largura e W o comprimento da placa, e um conjunto de m peças $(\ell_i^1, w_i^1, \ell_i^2, w_i^2)$, $i=1, \dots, m$, onde ℓ_i^1 e ℓ_i^2 são, respectivamente, o comprimento inferior e superior e w_i^1 e w_i^2 são, respectivamente, a largura à esquerda e à direita da peça i (se $\ell_i^1 = \ell_i^2$ ou $w_i^1 = w_i^2$, a peça i é retangular), com valor de utilidade v_i , $i=1, \dots, m$. O problema consiste em alocar estas peças maximizando o valor de utilidade total. A Figura 2.18 representa um padrão de corte com peças do tipo L.

Figura 2.17 - Problema bidimensional com peças do tipo L

Figura 2.18 - Padrão de corte com peças do tipo L

Embora haja uma literatura crescente para a determinação de padrões de corte com peças irregulares, um tratamento especial para peças do tipo L e retângulos não foi

encontrado na literatura. Este tipo de padrão foi detectado na prática de corte de espuma para produção de colchões, travesseiros, etc. (Embora o problema de corte de espuma seja tridimensional, o corte em L ocorre apenas na vertical, veja Figura 2.19). No próximo capítulo, a abordagem em grafo E/OU é estendida para a resolução desta classe de problemas.

Figura 2.19 - Problema de corte de espuma

2.2.5. Padrão com corte não-guilhotinado

Um corte é do tipo não-guilhotinado se ele produz novos retângulos arranjados de forma que não formam um padrão de corte guilhotinado. Arenales e Morabito (1995) definiram o corte da Figura 2.20 como um corte não-guilhotinado de 1ª ordem. Um padrão de corte não-guilhotinado é de 1ª ordem se for obtido por cortes sucessivos guilhotinados e/ou de 1ª ordem não-guilhotinados.

Figura 2.20 - Corte não-guilhotinado de 1ª ordem

A Figura 2.21 apresenta padrões de corte não-guilhotinado de 1ª ordem.

Figura 2.21 - Padrões de corte não-guilhotinado

O padrão de corte não-guilhotinado de 1ª ordem (Figura 2.20) pode ser gerado combinando cortes guilhotinado e/ou do tipo degrau (Figura 2.22).

Figura 2.22 - Sequência de cortes na geração do corte não-guilhotinado da Figura 2.20

Há padrões de corte não-guilhotinados de ordens superiores, conforme mostra a Figura 2.23. Estes padrões de corte não serão considerados neste trabalho.

Figura 2.23 - Padrão de corte não-guilhotinado de ordem superior

O problema de corte não-guilhotinado tem uma importante aplicação no carregamento de paletes e contêineres, conforme discutido em Morabito e Arenales (1994), Morabito e Morales (1998), Morabito et al. (2000).

No próximo capítulo, é apresentada a resolução do problema de corte bidimensional usando a abordagem em grafo E/OU para estes diversos tipos de padrões de corte.

3. A abordagem em Grafo E/OU

A abordagem em Grafo E/OU para a resolução de Problemas de Corte foi inicialmente proposta por Morabito (1989), para problemas de corte guilhotinado bidimensional irrestrito e não-estagiado. Morabito (1992) estendeu esta abordagem para problemas de corte guilhotinado irrestrito e restrito, considerando as dimensões unidimensional, bidimensional e tridimensional. Ainda restrito a problemas guilhotinados, Morabito e Arenales (1996) apresentaram a abordagem em grafo E/OU para a resolução de problemas estagiados e restritos.

Esta abordagem também foi proposta para problemas de corte não-guilhotinado em Salomão (1993) e, mais tarde, implementada em Arenales e Morabito (1995). Arenales (1993) mostrou como esta abordagem poderia ser generalizada para problemas de diferentes dimensões e formas geométricas, porém sem se preocupar com questões de implementações. Este trabalho constitui uma extensão do trabalho de Arenales (1993), pois além de discutir questões de implementação, incluindo-se peças irregulares do tipo L, estende a generalidade da abordagem em grafo E/OU para diferentes processos de cortagem encontrados na prática, apresentados no capítulo 2.

3.1. Representação em Grafo E/OU

Um grafo $G = (V, \varepsilon)$ consiste de um conjunto finito não-vazio de nós (ou vértices) $V = \{1, 2, \dots, r\}$ e um conjunto de arcos (ou arestas) $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$, cujos elementos são subconjuntos de V de tamanho 2, isto é, $e_u = (i, j)$, onde $i, j \in V$. Observe que um arco define a relação entre dois nós (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Representação de grafo

Uma maneira de generalizar um grafo é permitir arcos no conjunto ε de diferentes tamanhos, definindo uma relação entre um subconjunto de nós, por exemplo, um arco $e_u = (i, j, k)$, $i, j, k \in V$. Deste modo, o grafo é chamado de hipergrafo. A Figura 3.2 representa um hipergrafo, onde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\varepsilon = \{(1, 2), (2, 3, 4)\}$.

Figura 3.2 - Representação de hipergrafo

Outra maneira de generalizar um grafo é definir arcos como pares $e_u = (i, V_u)$, onde $i \in V$ e $V_u \subset V$, representando a relação entre um nó e um subconjunto de nós, por exemplo, um arco $e_u = (i, \{j, k\})$, onde $i \in V$ e $\{j, k\} \subset V$. Se V_u tem cardinalidade maior que 1, então e_u é chamado um arco E. Os vértices de V_u são sucessores de i . A Figura 3.3, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\varepsilon = \{(1, \{2, 3\}), (3, \{4, 5\})\}$, ilustra este tipo de grafo, conhecido por grafo E/OU (um grafo E/OU é um hipergrafo particular).

Figura 3.3 - Representação de grafo E/OU

Observe que um arco de um grafo define uma relação entre dois nós, um arco de um hipergrafo define uma relação entre um subconjunto de nós e, um arco de um grafo E/OU define uma relação entre um nó e um subconjunto de nós.

Um grafo E/OU pode ser definido para representar todos os possíveis padrões do problema de corte, onde os nós representam retângulos (no caso do problema de corte bidimensional guilhotinado, com objeto e peças retangulares) e os arcos representam cortes. Observe que um arco (corte) estabelece uma relação entre um nó N do grafo (retângulo), com dois outros nós N_1 e N_2 , portanto, um arco-E. Os nós N_1 e N_2 são chamados sucessores de N e, N predecessor de N_1 e N_2 . Os padrões são gerados examinando-se todas as possibilidades de corte (daí, arcos-OU) e uma delas é reproduzir o próprio retângulo (corte-

0, lê-se corte zero), ao qual nenhum outro corte será feito, indicando o final do processo de corte. Um corte-0 é representado por um arco comum. O nó inicial é representado pela placa (L,W) e os nós finais são aqueles originados de um corte-0 (sem perda de generalidade, associam-se aos retângulos finais um ou mais itens idênticos. Veja Figura 3.6). As Figuras 3.4 e 3.5 ilustram, respectivamente, um padrão de corte e sua representação no grafo E/OU, onde R_i ($i=8,9,10,13,16,17$) são os retângulos finais e C_k ($k=1,2,3,4,5$) os cortes aplicados durante o processo de cortagem. Nesta representação, um padrão de corte é representado por um caminho completo no grafo E/OU, que consiste no seguinte: a partir do nó inicial, escolha um e somente um arco (arco-E, corte-0) e, a partir de cada nó sucessor apontado por este arco, escolha novamente um e somente um arco e assim em diante, até que todos os sucessores sejam nós finais.

Figura 3.4 - Padrão de corte

Figura 3.5 - Grafo E/OU representando o padrão da Figura 3.4

Os cortes (verticais ou horizontais) podem ser restritos, sem perda de generalidade, a um conjunto finito formado pelas combinações lineares não-negativas dos tamanhos dos itens (veja seção 4.1), de modo que o grafo que representa todos os possíveis padrões de corte é finito. Arenales (1993) mostrou que esta afirmação é válida para qualquer problema de corte, independentemente das dimensões e das formas geométricas dos objetos e itens.

É fácil perceber que há somente um padrão correspondendo a cada caminho completo no grafo E/OU, mas pode haver diferentes caminhos completos correspondendo a um mesmo padrão de corte.

Figura 3.6 - Grafo E/OU representando padrões de corte alternativos

A seguir, a abordagem em grafo E/OU é estendida para padrões com restrições especiais, vistos no capítulo anterior.

3.2. Representação de Padrões de Corte Especiais

Nesta seção, são considerados problemas com algumas restrições adicionais que surgem durante o processo de corte.

3.2.1. Padrão de corte k -estagiado

Neste tipo de padrão restrito a cortes guilhotinados, conforme foi visto na seção 2.2, há um limite para o número de estágios de corte do problema.

Considere um nó N do grafo E/OU e N_1 e N_2 um par de sucessores de N , obtidos de um corte guilhotinado, seja ele do tipo vertical ou horizontal. Se o tipo do corte que gerou N_1 e N_2 for diferente do tipo do corte que gerou N , deve-se incrementar o número de estágios; caso contrário, o número de está-

gios permanece o mesmo. Portanto, quando for atingido o número k de estágios e este foi gerado por cortes horizontais, a partir de então é permitido somente cortes horizontais. O procedimento é análogo se atingir o número máximo de estágios com cortes verticais.

A representação do problema usando a abordagem grafo E/OU permanece a mesma, incluindo estas restrições na geração dos cortes (Figura 3.7).

Figura 3.7 - Padrão de corte k -estagiado

3.2.2. Padrão de corte restrito

Neste caso, o problema apresenta uma limitação no número de cada tipo de peças presentes no padrão. Portanto, a decisão de produzir uma peça do tipo i num determinado nó depende da produção desta peça nos demais nós do mesmo caminho. Convém lembrar que um caminho completo representa um padrão de

corde.

Considere um nó N , seus sucessores N_1 e N_2 , a_i^N o número de peças do tipo i produzidas no nó N e, b_i^N o número máximo de peças do tipo i que podem ser produzidas no nó N . Então, a soma do número de peças i produzidas em N_1 ($a_i^{N_1}$) com o número de peças i produzidas em N_2 ($a_i^{N_2}$) não deve ser superior a b_i^N , ou seja, $a_i^{N_1} + a_i^{N_2} \leq b_i^N$ (Figura 3.8).

Figura 3.8 - Corte de um problema restrito

Desta forma, o limite sobre o número de itens do tipo i para o nó N_2 depende do resultado do nó N_1 , o qual deve ser resolvido antes de N_2 . Isto define uma maneira particular de percorrer o grafo (estratégia gulosa) e, aparentemente, pode reduzir os padrões de corte, deixando de investigar possíveis padrões. Na seção 4.6 conjectura-se que a limitação na busca (resolve-se N_1 para então resolver N_2) não perde generalidade.

3.2.3. Padrão de corte com placa defeituosa

Considere o problema de corte com placa defeituosa apresentado na seção 2.2.1. Na representação através de

grafo E/OU, sem perda de generalidade, os cortes podem ser tais que o defeito esteja inteiramente num dos retângulos gerados, isto é, podem-se evitar cortes sobre o defeito.

Um sequência de cortes na placa defeituosa pode ser observada na Figura 3.9.

Figura 3.9 - Padrão de corte numa placa defeituosa

É possível que se tenha uma placa com mais de um defeito; usando o critério anterior, a sequência de cortes é feita de maneira análoga (Figura 3.10).

Figura 3.10 - Possíveis cortes numa placa com mais de um defeito

3.2.4. Padrão de corte com limitação no número de tipo de peças

Conforme apresentado na seção 2.2.2, neste tipo de padrão deve-se controlar o número de tipo de peças produzidas no decorrer dos cortes, evitando a geração de padrões inviáveis.

Considere um nó N , e seja B o número máximo de tipos admissível no padrão e a definição do conjunto $Y(N) = \{i \mid y_i^N = 1\}$, onde $y_i^N = 1$, se o item i já estiver sido utilizado no caminho até o nó N (inclusive o nó N), e zero, caso contrário. Note que no nó inicial, no início do processo, este conjunto é vazio.

Sejam N_1 e N_2 os sucessores de N . Inicialmente, resolve-se o nó N_1 , com $Y(N_1) = Y(N)$ e $\sum_{i=1}^m y_i^{N_1} \leq B$, isto é, N_1 herda todas as informações de seu predecessor N . Quando N_1 estiver resolvido, redefine-se $Y(N_1)$ tal que $Y(N_1) = Y(N_1) + \{i \mid y_i^{N_1} = 1\}$. Deve-se, então, resolver o nó N_2 com os dados herdados de N_1 , ou seja, $Y(N_2) = Y(N_1)$ e $\sum_{i=1}^m y_i^{N_2} \leq B$ (Figura 3.11). Tão logo N_2 esteja resolvido, redefine-se $Y(N_2)$ de modo análogo.

Note que $Y(N)$ não foi alterado, então, após N_1 e N_2 serem resolvidos, retorna-se ao nó N para investigação de novos caminhos. Tão logo o nó N esteja resolvido (isto é, quando todos os sucessores tiverem sido investigados), atualiza-se $Y(N) = Y(N_2)$, onde N_2 é o sucessor (juntamente com N_1) que fornece o melhor caminho a partir de N .

Figura 3.11 - Corte com limitação no número de tipo de peças

3.2.5. Padrão com corte-cabeça

Neste tipo de padrão de corte, visto na seção 2.2.3, cada corte realizado gera dois novos retângulos, onde um deles somente gera itens finais (cabeça) e o outro (principal), após dar ou não um giro de 90°, pode ser cortado novamente.

Uma seqüência de retângulos é obtida. Cada retângulo principal tem um atributo adicional que contabiliza o número de giros realizados até então, diz-se "giro" (esta variável é iniciada com zero e acrescida de um, cada vez que o retângulo principal for girado). Se o total de giros for limitado por G, então, quando giro=G, nenhum giro adicional é permitido.

Este tipo de padrão de corte no grafo E/OU é representado por um caminho conforme a Figura 3.12, onde um dos nós é considerado nó final com um padrão unidimensional associado. Deve-se observar nesta figura, que o número de giros foi incrementado, no último nível do grafo (giro=2), devido a serra utilizada neste corte ser vertical, necessitando assim de um giro para fazer os cortes.

Figura.3.13 - Padrão de corte com peças retangulares e/ou do tipo L

Para que se torne computacionalmente viável a resolução deste tipo de problema, é necessário definir algumas regras para a geração dos cortes:

- um nó que representa um retângulo pode gerar dois novos retângulos, através de um corte guilhotinado horizontal ou vertical, ou gerar, através de um corte degrau, dois novos objetos do tipo L, ou um novo retângulo e um objeto do tipo L. A Figura 3.14 ilustra os possíveis cortes neste tipo de nó.
- um nó que representa um objeto do tipo L pode ser cortado apenas por cortes guilhotinados, conforme a Figura 3.15. Desse modo, não é permitido gerar dois novos nós do tipo L. Esta restrição foi imposta para que se torne viável a resolução do problema, limitando as formas geométricas que surgem durante o processo de corte. Caso contrário, o número de formas geométricas dos objetos intermediários cresceria sem controle,

necessitando de um número de parâmetros crescente para representá-los. Segundo Arenales (1993), isto caracterizaria um problema irregular.

Figura 3.14 - Possíveis cortes no nó retangular

Figura 3.15 - Possíveis cortes no nó do tipo L

3.2.7. Padrão com corte não-guilhotinado

A representação em grafo E/OU de um padrão de corte não-guilhotinado de 1º ordem é ilustrada na Figura 3.16, onde cada arco (corte) emergindo de um nó N terá cinco nós sucessores distintos N_1 , N_2 , N_3 , N_4 e N_5 .

Figura 3.16 - Padrão de corte não-guilhotinado e sua representação no grafo E/OU

Observe que este processo pode continuar a partir de cada nó, com a possibilidade também de cortes guilhotinados, produzindo padrões não-guilhotinados de 1^a ordem.

O padrão de corte não-guilhotinado de 1^a ordem pode ser gerado também, através de cortes guilhotinado e do tipo degrau (seção 2.2.5), conforme a Figura 3.17.

Figura 3.17 - Padrão de corte não-guilhotinado gerado através de cortes guilhotinado e do tipo degrau

No próximo capítulo é apresentado um método de enumeração implícita para a resolução do problema de corte e seus diferentes padrões, baseado numa busca no grafo E/OU que descreve o espaço de soluções possíveis.

4. Método de Enumeração Implícita

Este capítulo apresenta um método de enumeração implícita para a busca no grafo E/OU, onde são utilizados limitantes, evitando assim caminhos não promissores. A estratégia de busca apresentada combina busca em profundidade com busca informada (*hill-climbing*).

4.1. Geração do conjunto de discretização

Durante o processo de busca é possível reduzir o número de nós explicitamente gerados, utilizando as regras apresentadas a seguir.

- **Padrões Normais**

Herz (1972) e, mais tarde, Christofides e Whittlock (1977) mostraram, sem perda de generalidade, que os cortes guilhotinados (Arenales e Morabito, 1995, estenderam para cortes não-guilhotinados) podem ser combinações lineares não-negativas das dimensões das peças, ou seja, é possível reduzir os cortes verticais ao longo do comprimento L aos elementos do conjunto X . Este resultado já vinha sendo utilizado na resolução do problema da mochila - problema de corte unidimensional

- segundo Salkin e Kluyver (1975)):

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ell_i, 1 \leq x \leq L - \ell_0, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}$$

onde $\ell_0 = \min\{\ell_i, i = 1, \dots, m\}$.

Figura 4.1 - Combinação linear dos comprimentos ($x = \ell_1 + 2\ell_2$)

Analogamente, o conjunto Y é definido para os cortes horizontais, ao longo da largura W :

$$Y = \left\{ y \mid y = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i, 1 \leq y \leq W - w_0, \beta_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}$$

onde $w_0 = \min\{w_i, i = 1, \dots, m\}$.

Os conjuntos X e Y são chamados de conjuntos de discretização. Os padrões de corte, tais que todos os cortes feitos pertencem aos conjuntos de discretização, são chamados padrões de corte normais. Existem outros conjuntos de discretização (por exemplo, *raster point sets*, Morabito e Morales, 1998), que não serão considerados neste trabalho.

• Simetria

Herz também mostrou, sem perda de generalidade, para o problema irrestrito, que o conjunto X pode ser reduzido

para evitar padrões simétricos. Demonstrou o seguinte teorema: Para todo padrão de corte na placa (L,W) , existe um padrão normal com mesmo valor de utilidade (soma dos valores de utilidade das peças produzidas) tal que a coordenada do primeiro corte é no máximo igual à metade da dimensão da placa.

Considere um nó (ℓ, w) e um corte vertical $x_1 \in X$ e $x_1 \leq \ell - \ell_0$, gerando os nós (x_1, w) e $(\ell - x_1, w)$. Considere, agora, um outro corte $x_2 = \ell - x_1$, logo $x_1 = \ell - x_2$. Se $x_2 \in X$, então os nós (x_2, w) e $(\ell - x_2, w)$ também são gerados, produzindo uma duplicação dos nós (x_1, w) e (x_2, w) (Figura 4.2). Se $x_2 \notin X$, basta considerar $\lfloor x_2 \rfloor_X$ (maior elemento de X menor ou igual a x_2) e todo padrão possível para a ramificação à esquerda na Figura 4.2, é também obtido com corte em $\lfloor x_2 \rfloor_X$. O conjunto X pode ser reduzido a:

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ell_i, 1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}$$

Figura 4.2 - Simetria

A eliminação de simetrias também é aplicada na geração do conjunto Y dos cortes horizontais.

- **Exclusão**

Herz também propôs outra regra para diminuir o conjunto de discretização, sem perda de generalidade. A regra de exclusão é usada para descartar elementos de X durante o processo de busca. Considere o retângulo (ℓ, w) e o corte $x = \ell_1 + \ell_2$, tal que $w_1 < w$ e $w_2 > w$ (Figura 4.3). Observe que este corte deve ser descartado pois, apesar de $x = \ell_1 + \ell_2$ e, portanto, $x \in X$, as peças (ℓ_1, w_1) e (ℓ_2, w_2) não podem ser alocadas no retângulo (ℓ, w) .

Figura 4.3 - Exclusão: $x = \ell_1 + \ell_2$ pode ser excluído do conjunto X, no nó (ℓ, w)

Assim, o conjunto X pode novamente ser reduzido a:

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \ell_i, (\text{se } w_1 > w \Rightarrow \alpha_1 = 0), 1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}$$

O conceito de exclusão é aplicado também na geração dos cortes horizontais do conjunto Y.

$\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x

Herz (1972) e, mais tarde, Christofides e Whittlock (1977) propuseram uma fórmula recursiva para a geração do conjunto de discretização X e Y , onde as regras de simetria e exclusão são aplicadas. Os conjuntos de discretização são determinados para o nó inicial (L, W) e, depois disto, eles são facilmente determinados para qualquer nó N .

Considere $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_m$ e $F_i(x)$ o mínimo da maior largura das peças $1, 2, \dots, i$ ($i \leq m$) que pode ser combinada para formar x . Então,

$$F_i(x) = \begin{cases} \min \left\{ F_{i-1}(x); \max \left\{ w_i, \min_p \left\{ F_{i-1}(x - p \cdot \ell_i), 1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{x}{\ell_i} \right\rfloor \text{ e inteiro} \right\} \right\} \right\} \\ \quad \ell_i \leq x \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor \\ F_{i-1}(x), 0 < x < \ell_i, \end{cases}$$

sendo $F_0(x) = \infty$, para $x = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$, e $F_i(0) = 0$.

Se $F_i(x) < \infty$, então $x = \sum_{j=1}^i \alpha_j \cdot \ell_j$, para $\alpha_j \geq 0$ e inteiro, $j = 1, \dots, i$; logo $x \in X$.

Já que $F_i(x)$ independe do nó, o conjunto de discretização X pode ser gerado antes do início do processo de busca. Depois, o conjunto de discretização do nó N , $X(N)$, pode ser gerado facilmente. Suponha que o nó N represente o retângulo (ℓ, w) ; então $x \in X(N) \Leftrightarrow F_m(x) \leq w$.

De maneira análoga, o conjunto Y é determinado.

• Ordenação de cortes

Considere o retângulo (ℓ, w) representado por um determinado nó N e seja $x_1 \in X$ o corte vertical aplicado ao re-

tângulo, originando dois novos retângulos (x_1, w) e $(\ell - x_1, w)$. A seguir, considere que o retângulo gerado $(\ell - x_1, w)$ seja novamente verticalmente cortado em $x_2 \in X$, originando os retângulos (x_2, w) e $(\ell - x_1 - x_2, w)$. Estes três retângulos, (x_1, w) , (x_2, w) e $(\ell - x_1 - x_2, w)$, também podem ser gerados aplicando inicialmente o corte $x_2 \in X$, gerando (x_2, w) e $(\ell - x_2, w)$ e, a seguir, aplicando-se o corte $x_1 \in X$ em $(\ell - x_2, w)$, gerando (x_1, w) e $(\ell - x_2 - x_1, w)$ (Figura 4.4).

Figura 4.4 - Caminhos alternativos produzindo padrões equivalentes

Sem perda de generalidade, esta duplicação pode ser evitada utilizando uma ordem arbitrária nos sucessivos cortes verticais. Por exemplo, suponha que um retângulo seja cortado verticalmente em x_1 ; então os cortes verticais subse-

qüentes podem ser maiores ou iguais a x_1 , sem perda de generalidade. Este critério é válido também para os cortes horizontais (Christofides e Whitlock, 1977).

Durante o processo de busca, enumerar explicitamente todos os caminhos do grafo é, na maioria das vezes, inviável. As soluções podem ser enumeradas implicitamente, ou seja, é possível descartar a expansão de um nó sem perder a solução ótima, usando limitantes.

4.2. Limitantes Inferiores

É usual, em problemas de otimização (maximização), a determinação de limitantes inferiores através da obtenção de soluções viáveis. Nos problemas de corte, soluções viáveis são facilmente determinadas.

4.2.1. Solução homogênea

Uma solução trivial para o subproblema do nó (x,y) é preenchê-lo somente com peças iguais, conforme os padrões das Figuras 4.5 e 4.6. Um padrão de corte que contém peças todas iguais é denominado padrão de corte homogêneo.

Figura 4.5 - Padrão de corte homogêneo

Figura 4.6 - Padrão homogêneo com apenas cortes verticais

Escolhendo-se o melhor dentre estes padrões, tem-se o limitante inferior dado por:

$$\begin{aligned} LI(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i \cdot \left\lfloor \frac{x}{\ell_i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor \right\} \\ &= v_j \cdot \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor \end{aligned}$$

ou, no caso de apenas cortes verticais:

$$LI(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i \cdot \left\lfloor \frac{x}{\ell_i} \right\rfloor \right\}$$

Particularmente, esta última solução será útil quando houver um problema estagiado, como é visto na seção 4.2.1.2..

4.2.1.1. Problema restrito

Quando o problema de corte é restrito, a solução homogênea no nó N que representa o retângulo (x, y) é definida por:

$$\begin{aligned}
 LI_R(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i \cdot \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{\ell_i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor, b_i^N \right\} \right\} \\
 &= v_j \cdot \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor, b_j^N \right\}
 \end{aligned}$$

onde b_j^N é o número máximo de peças do tipo j que podem ser produzidas no nó N .

Note que, se b_j^N for muito menor que $\left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor$, a solução homogênea apresenta uma perda muito grande (Figura 4.7), que pode ser usada por outros tipos de peças.

Figura 4.7 - Padrão homogêneo quando $b_j^N \ll \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor$

4.2.1.2. Problema k-estagiado

Neste tipo de problema, é necessário observar que, quando um determinado nó N , representando o retângulo (x, y) , atinge o número máximo de estágios com corte vertical, deve-se definir seu limitante inferior de modo que apenas cortes verticais sejam feitos na sequência. O mesmo deve ser feito quando o último estágio é atingido por cortes horizontais.

Assim sendo, quando um nó atinge o número máximo

$\ll$ denota muito menor que

de estágios, seu limitante inferior é calculado por:

$$LI_E(x, y) = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i \cdot \left\lfloor \frac{x}{\ell_i} \right\rfloor \right\}, & \text{se } (x, y) \text{ gerado por corte vertical} \\ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor \right\}, & \text{se } (x, y) \text{ gerado por corte horizontal} \end{cases}$$

4.2.2. Solução homogênea composta

4.2.2.1. Problema restrito

Esta solução é aplicada quando se tem um problema de corte restrito e $b_j^N < \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor$. A solução combina soluções homogêneas de diversos tipos de peças.

Considere o nó (x, y) e seu limitante inferior dado pela solução homogênea da peça j , ou seja,

$$LI_{RC}(x, y) = v_j \cdot \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor, b_j^N \right\}$$

Note que, se $b_j^N < \left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor$, às vezes, é possível alocar outro tipo de peça no retângulo (x, y) . Neste caso, o limitante inferior do nó (x, y) é dado pela soma da solução homogênea da peça j com a solução do retângulo $x, y - \lceil \theta_j \rceil w_j$ com

$$\theta_j = \min \left\{ \left\lfloor \frac{y}{w_j} \right\rfloor, \frac{b_j^N}{\left\lfloor \frac{x}{\ell_j} \right\rfloor} \right\}.$$

O procedimento é repetido no retângulo

$\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x

$(x, y - \theta_j \cdot w_j)$ e assim por diante, até que não seja mais possível alocar peças no retângulo. A solução homogênea composta do nó (x, y) é dada pela soma de todas estas soluções homogêneas.

Uma solução homogênea composta formada por dois tipos de peças é apresentada na Figura 4.8.

Figura 4.8 - Padrão de corte homogêneo composto

A solução homogênea composta também pode ser definida alocando as peças por colunas.

4.2.2.2. Problema com placa defeituosa

Quando se tem um problema com um nó representando um retângulo defeituoso de dimensão (x, y) e um defeito nas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , a solução trivial é preenchê-lo com peças sem sobrepor o defeito.

O preenchimento desta placa pode ser reduzido ao preenchimento dos retângulos formados ao redor do defeito, conforme a Figura 4.9. Note que o preenchimento pode ser feito dividindo a placa de maneira vertical (a) ou horizontal (b).

Figura 4.9 - Soluções homogêneas de uma placa defeituosa

Como cada retângulo é preenchido com o maior número de peças iguais (solução homogênea trivial), a soma deles fornece uma solução homogênea composta. Assim sendo, o limitante inferior de um problema com placa defeituosa é dado por:

$$LI_D = \max \left\{ \begin{array}{l} LI(x_1, y) + LI(x_2 - x_1, y - y_2) + LI(x_2 - x_1, y_1) + LI(x - x_2, y), \\ LI(x, y_1) + LI(x_1, y_2 - y_1) + LI(x - x_2, y_2 - y_1) + LI(x, y - y_2) \end{array} \right\}$$

O procedimento é análogo quando se tem mais defeitos sobre o retângulo.

4.2.2.3. Problema com peças em L

Neste tipo de problema, o nó N pode representar um retângulo ou uma peça do tipo L.

Para o nó retangular, utiliza-se a solução homogênea das peças, e para peças do tipo L pode-se combinar duas peças iguais formando um retângulo e, assim, formar uma solução homogênea para o nó N. A Figura 4.10 apresenta duas soluções homogêneas com peças do tipo L.

Figura 4.10 - Soluções homogêneas com peças do tipo L

Para o nó do tipo L, a solução é dada pela soma das soluções homogêneas dos retângulos (Figura 4.11). Note que calculam-se as duas soluções (a e b da Figura 11), e assume-se o maior valor obtido. Também é verificada a sobreposição de uma peça do tipo L no nó (Figura 4.12).

Figura 4.11 - Soluções homogêneas dos retângulos

Figura 4.12 - Solução homogênea do nó do tipo L

4.2.3. Solução 2-estágios

Esta solução apresenta um limitante inferior muito poderoso para o problema de corte irrestrito; entretanto, os cálculos não são tão simples. Morabito e Arenales (1995) mostraram que, muitas vezes, a solução ótima do problema em 2-estágios é melhor que a solução obtida por heurísticas, mesmo que não tenha limitação no número de estágios. Gilmore e Gomory (1965) apresentaram um método que envolve duas etapas.

Considere a placa de dimensões (L, W) e m peças de dimensões (ℓ_i, w_i) com o valor de utilidade v_i . Na primeira etapa, deve-se decidir qual o padrão de corte a ser utilizado em cada faixa (L, w_j) e, na segunda, quantas vezes este padrão é repetido na placa (L, W) .

Considere o conjunto $W_j = \{i \mid w_i \leq w_j\}$. Na primeira etapa, as peças (ℓ_i, w_i) , $i \in W_j$, são arranjadas em faixas do

tipo (L, w_j) , $j=1, \dots, m$, produzindo os valores V_j , que são determinados resolvendo os m problemas:

$$\begin{aligned} V_j = \text{maximizar} \quad & \sum_{i \in W_j} v_i \cdot \alpha_i^j \\ \text{sujeito a :} \quad & \sum_{i \in W_j} \ell_i \cdot \alpha_i^j \leq L \\ & \alpha_i^j \geq 0, \text{ inteiro, } i \in W_j \end{aligned} \quad j = 1, \dots, m$$

onde α_i^j é o número de peças tipo i arranjadas na faixa j .

A seguir, com o melhor padrão já definido para cada faixa w , deve-se decidir quantas vezes estas faixas são repetidas na placa (L, W) , isto é, deve-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{j=1}^m V_j \cdot \beta_j \\ \text{sujeito a :} \quad & \sum_{j=1}^m w_j \cdot \beta_j \leq W \\ & \beta_j \geq 0, \text{ inteiro, } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

sendo β_j o número de faixas j na placa (L, W) .

Note que são resolvidos, no máximo, $(m+1)$ problemas da mochila, já que pode-se ter $w_j = w_k$, com $j \neq k$, de modo que apenas um problema da mochila é resolvido para as duas faixas. Convém lembrar que, Morabito (1992) e Hifi (1997), mostram que este problema pode ser resolvido com apenas 2 problemas da mochila se for usado programação dinâmica.

O processo é repetido considerando os cortes do primeiro estágio paralelos à largura, ou seja, deve-se, inicialmente, decidir qual o padrão de corte a ser utilizado em cada faixa (ℓ_j, W) , para depois decidir quantas vezes este padrão é repetido na placa (L, W) ; o que resulta em outros $(m+1)$ problemas da mochila.

Observe que este método (decomposição numa sequência de problemas da mochila) resolve o modelo matemático do problema de corte bidimensional em 2-estágios, o qual pode ser formulado por (Gramani, 1997):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \cdot v_i \\ &\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{kj}^i \cdot \ell_i \leq L, \quad j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K_j \\ &\quad \sum_{j=1}^m w_j \cdot \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{kj} \leq W \\ &\quad \alpha_{kj}^i \geq 0, \beta_{kj} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

onde $(\alpha_{kj}^1, \alpha_{kj}^2, \dots, \alpha_{kj}^m)$ é o k -ésimo padrão unidimensional para a faixa (L, w_j) (chamado de padrão- (k, j)), K_j é o número máximo de padrões de corte da faixa (L, w_j) e, β_{kj} é o número de vezes que o padrão- (k, j) é repetido na placa (L, W) . Este modelo terá importância quando houver limitantes no número de peças no padrão (problema restrito) e o método de decomposição de Gilmore e Gomory não mais se aplica. Neste caso, a relaxação lagrangiana pode ser usada e uma sequência de problemas irrestritos são resolvidos, utilizando-se a decomposição acima. No Anexo 2, este caso é introduzido.

4.3. Limitantes Superiores

Como é usual em problemas de otimização (maximização), um limitante superior é obtido pela relaxação do problema.

4.3.1. Limitante superior trivial

Um limitante superior para o nó (x, y) é definido relaxando-se o problema de corte, considerando-se apenas que a área dos itens alocados não exceda a área do retângulo, ou

seja,

$$\begin{aligned} \text{LS}(x, y) = \text{maximizar } & \sum_{i \in A(x, y)} v_i \cdot a_i \\ \text{sujeito a : } & \sum_{i \in A(x, y)} (\ell_i \cdot w_i) \cdot a_i \leq (x \cdot y) \\ & a_i \geq 0, i \in A(x, y) \end{aligned}$$

onde $A(x, y) = \{i \mid \ell_i \leq x \text{ e } w_i \leq y\}$, com a seguinte solução trivial

$$\text{LS}(x, y) = \begin{cases} \max_{i \in A(x, y)} \left\{ v_i \cdot \left(\frac{x}{\ell_i} \right) \cdot \left(\frac{y}{w_i} \right) \right\} \\ 0, \text{ se } A(x, y) = \emptyset \end{cases}$$

Este limitante foi inicialmente utilizado por Herz (1972) e mais tarde por Morabito et al. (1992).

4.3.2. Limitante superior para problemas restritos

Suponha, por simplicidade de notação, que $v_1 / (\ell_1 \cdot w_1) \leq v_2 / (\ell_2 \cdot w_2) \leq \dots \leq v_m / (\ell_m \cdot w_m)$. Então, um limitante superior é dado por:

$$\text{LS}(x, y) = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \bar{a}_i$$

$$\text{onde } \bar{a}_1 = \min \left\{ b_1, \left(\frac{x}{\ell_1} \right) \left(\frac{y}{w_1} \right) \right\} \quad \text{e} \quad \bar{a}_k = \min \left\{ b_k, \left(x \cdot y - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_j \cdot w_j \cdot \bar{a}_j \right) / (\ell_k \cdot w_k) \right\},$$

$k=1, \dots, m$.

4.3.3. Limitante superior para um problema com placa defeituosa

Para o problema de corte com peças defeituosas, o limitante superior de um nó (x, y) é calculado pela sua área,

ou seja, a área total do nó (x,y) , decrementada das áreas de-feituosas.

4.3.4. Limitante superior para problemas com peças do tipo L

Nesta classe de problemas, o limitante superior é calculado pela área total do nó, seja ele retangular ou do tipo L.

4.4. Estratégia de busca

Há diversas maneiras de percorrer um grafo, chamadas estratégias de busca (Nilsson, 1971; Rich, 1983; Pearl, 1984). O objetivo é percorrer o grafo de modo a determinar um caminho completo mais valioso, uma vez que os padrões de corte são representados no grafo E/OU como caminhos completos (veja seção 3.1).

Uma estratégia de busca utilizada por Morabito (1989, 1992) para resolver problemas de corte e empacotamento, consistiu na combinação de duas estratégias básicas: *backtracking* (BT) e *hill-climbing* (HC). *Backtracking* é uma variação da estratégia de busca em profundidade (*depth-first*), que consiste em ramificar primeiro os nós gerados mais recentemente, de modo que todos os caminhos do grafo sejam percorridos. *Hill-climbing*, por outro lado, é uma estratégia de busca míope, baseada em otimização local, que escolhe a melhor solução (um nó ou, no caso da abordagem em grafo E/OU, um caminho completo) encontrada até então, e descarta as demais soluções. Esta escolha é baseada numa avaliação dos limitantes inferior e superior da solução.

Estas duas estratégias básicas podem ser combinadas, buscando uma solução mais promissora dentre descendentes de um nó, um pouco além de seus sucessores imediatos. Para

isto, é necessário a noção de profundidade de um nó no grafo. A profundidade de um nó no grafo é definida tal que, o nó raiz tem profundidade zero e, a profundidade de qualquer outro nó é igual à profundidade de seu predecessor imediato, acrescido de 1. As estratégias podem, então, ser combinadas, de modo que BT investiga todos os possíveis caminhos até uma profundidade máxima e, HC escolhe o mais promissor, descartando-se os demais (se a profundidade máxima for igual a 1, então tem-se HC pura, se infinito, tem-se BT puro). Cada nó no caminho mais promissor com profundidade máxima é novamente investigado por BT até a profundidade máxima, e assim por diante.

Considere um nó N , seus nós sucessores N_1 e N_2 e seja $v(N)$ o valor do nó N dado por uma solução viável (por exemplo, a solução homogênea, ou outra melhor quando disponível). Durante a expansão deste nó, utilizam-se os limitantes inferiores e superiores para evitar a geração de nós desnecessários, descartando caminhos não promissores. Assim,

- se $v(N) = LS(N)$, então a solução que fornece $v(N)$ é solução ótima para o nó N .
- se $v(N) < LI(N_1) + LI(N_2)$, então o valor do nó N é atualizado por $v(N) = LI(N_1) + LI(N_2)$ (uma nova solução viável é fornecida pela composição das soluções de nós sucessores).
- se $v(N) \geq LS(N_1) + LS(N_2)$, ou seja, se o valor de uma solução viável no nó N é melhor que a soma dos limitantes superiores de seus sucessores, então não é necessário investigar os nós N_1 e N_2 .

Observe que o valor de um caminho completo é a soma dos valores dos nós finais e, o melhor caminho a partir do nó N é determinado por aquele que apresenta o melhor valor $v(N)$.

Note que, com o limitante na profundidade do grafo e a estratégia *hill-climbing*, a otimalidade do problema de corte pode ser perdida.

A seguir, é apresentado o algoritmo para esta estratégia de busca híbrida.

4.5. Algoritmo BT-HC

Passo 0

Considere a placa (L,W) , as peças (ℓ_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, e MP , a profundidade máxima permitida na estratégia de busca.

Considere o nó raiz como o nó que contém as informações da placa inicial.

Passo 1 - Backtracking

Aplique a estratégia de busca *backtracking* com profundidade MP a partir do nó raiz, armazenando o caminho que apresenta o melhor valor para este nó.

Passo 2 - Hill-Climbing

Para cada nó final (profundidade MP) do caminho gerado pela estratégia *backtracking*, verifique se é possível expandi-lo. Se for, retorne ao Passo 1, considerando-o como nó raiz.

O algoritmo, apesar de percorrer todo o conjunto de discretização X e Y , ou seja, gerar muito cortes, não requer muita memória computacional, uma vez que ele armazena somente o melhor caminho em cada nó.

No algoritmo BT-HC há diversas sugestões para o cálculo do limitante inferior (solução viável) em cada nó:

- solução homogênea e homogênea composta no problema de corte irrestrito e restrito, respectivamente;

- solução 2-estágios no nó raiz e, nos demais nós, a solução homogênea;
- solução 2-estágios nos retângulos considerados relativamente grandes, ou seja, dado um nó (x, y) , se $(x > q \cdot \ell_{\max})$ e $(y > q \cdot w_{\max})$, onde q é um inteiro (por exemplo $q=3$, $\ell_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} \{\ell_i\}$ e $w_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} \{w_i\}$), aplica-se a solução 2-estágios, caso contrário, a solução homogênea. Convém observar que Hifi (1997) analisou o uso da solução 2-estágios para todos os nós, usando um procedimento de programação dinâmica.

4.6. Conjectura do Problema de Corte Restrito

Conjectura: No problema de corte restrito, se o conjunto de discretização estiver completo (isto é, regras de simetria e ordenação descartadas) e a estratégia *backtracking* for aplicada com profundidade ilimitada (isto é, HC descartada), a otimalidade do problema é garantida, ou seja, a forma de percorrer o grafo, sugerida na seção 3.2.2, onde apenas um nó sucessor herda a limitação de nó precedente, não é gulosa.

Esta conjectura garante que a abordagem baseada no grafo E/OU determina sempre a solução ótima para o problema de corte restrito quando se retiram a regra de simetria e ordenação e a limitação de profundidade do grafo. Assim sendo, abordagem em grafo E/OU gera implicitamente todas as combinações possíveis de padrões de corte, obtendo a melhor delas.

No capítulo 6 são apresentados alguns exemplos, onde se compararam as soluções obtidas com exemplos ótimos obtidos através de Relaxação Lagrangiana (Gramani, 1997).

No próximo capítulo são apresentadas algumas heurísticas visando diminuir o espaço de busca no grafo E/OU.

5. Heurísticas

Para reduzir o espaço de busca, recorre-se a algumas heurísticas que podem ser aplicadas no algoritmo, de forma a diminuir o espaço de busca (Morabito et al., 1992; Arenales e Morabito, 1995; Morabito e Arenales, 1996). Considere um nó qualquer N e seus sucessores N_1 e N_2 .

- H1 (Morabito et al., 1992)

Se $(1 + \lambda_1) \cdot v(N) \geq LS(N_1) + LS(N_2)$ com $\lambda_1 > 0$, os nós N_1 e N_2 são descartados como não-promissores.

Experimentos numéricos têm sugerido valores para λ_1 no intervalo $[0.01, 0.1]$, com bons resultados. Note que, se λ_1 tiver o valor nulo, os nós N_1 e N_2 podem ser descartados sem perda de generalidade.

Esta heurística faz uma aposta de que se os limitantes superiores para os nós sucessores (que não é necessariamente um limitante superior para o nó N) não for muito melhor que o valor da solução viável já disponível no nó, então isto é uma indicação de que este não é um bom caminho a ser investigado.

- H2 (Morabito et al., 1992)

Se $\lambda_2 \cdot \text{LI}(N) \geq \text{LI}(N_1) + \text{LI}(N_2)$ com $0 < \lambda_2 < 1$, os nós N_1 e N_2 são descartados.

Experimentos numéricos sugerem que o parâmetro λ_2 deva ter valores entre 0.90 e 0.95.

Esta heurística faz uma aposta de que se a solução composta pelas soluções homogêneas nos nós sucessores não forem razoavelmente melhor que a solução homogênea do nó N , então este caminho não é promissor.

Em Arenales e Morabito (1995), onde o problema de corte não-guilhotinado foi estudado, alguns experimentos computacionais para o problema de carregamento de paletes do produtor (apenas um tipo de retângulo, com possibilidade de giro de 90°) mostraram que os parâmetros λ_1 e λ_2 podem ser dependentes dos dados com resultados muito bons. Embora não tenha sido explorada esta alternativa nesta tese, um estudo mais cuidadoso da escolha destes parâmetros merece ainda atenção.

- H3 (Morabito e Arenales, 1996)

No caso do problema restrito, quando é aplicada a estratégia gulosa (seção 3.2.2) utilizando-se a busca em profundidade com limitação e *hill-climbing*, junto com as regras de ordenação e simetria (seção 4.1), perde-se a garantia de otimalidade do problema.

- H4

Uma sugestão no caso do problema restrito é que, ao invés de limitar $a_i^1 \leq b_i^N$ (H3), quando o nó N_1 for expandido, limitar o valor da peça i em uma porcentagem de b_i^N , ou seja, $a_i^1 \leq K \cdot b_i^N$

com $0 < K < 1$.

Experimentos numéricos sugerem que o parâmetro K deva ter valores no intervalo $[0.8, 1)$ (veja seção 6.2.2).

- H5 (Beasley, 1985)

Esta heurística introduz uma limitação no número de elementos dos conjuntos de discretização X e Y .

Considere N o conjunto com o índice das peças utilizadas para a geração do conjunto X , sendo, inicialmente, $N = \{1, 2, \dots, m\}$, X o número de elementos deste conjunto, onde

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i \in N} \alpha_i \cdot \ell_i, 1 \leq x \leq L - \min\{\ell_j, j \in N\}, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}$$

A heurística consiste em diminuir o tamanho do conjunto X da maneira que segue, sendo X_{Max} o tamanho máximo permitido:

Passo 0: $N = \{1, 2, \dots, m\}$

$$|X| = +\infty$$

Passo 1: Enquanto $X > X_{\text{Max}}$ faça

Geração do conjunto X

Se $X > X_{\text{max}}$ então

$$\ell_j = \min\{\ell_i, i \in N\}$$

$$N = N - \{j\}$$

Fim se

Fim enquanto

O procedimento é análogo para o conjunto de discretização Y .

- H6

Uma sugestão, ainda para diminuir o tamanho do conjunto de discretização, é eliminar ℓ_j tal que $|\ell_i - \ell_j| < \delta \cdot L$, $0 < \delta < 1$,

quando da geração do conjunto X (Figura 5.1). Note que este procedimento é diferente do utilizado por Hifi (1997), onde foi feita uma modificação na função recursiva de Christofides e Whitlock (1977), vista na seção 4.1.

Figura 5.1 - Eliminação de ℓ_j na geração do conjunto X

Neste caso, primeiramente redefine-se o conjunto N e, a seguir, gera-se o conjunto X uma única vez.

Passo 0: $N = \{1, 2, \dots, m\}$

$$l_0 = -\infty$$

$$\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_m$$

$$k = m$$

Passo 1: Repita

$$j = k-1$$

Enquanto $\ell_k - \ell_j < \delta.L$ e $(j \neq 0)$ faça

$$N = N - \{j\}$$

$$j = j - 1$$

Fim enquanto

$$k = j$$

Até $k = 0$

Passo 2: Geração do conjunto X tal que

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i \in N} \alpha_i \cdot \ell_i, 1 \leq x \leq L - \min\{\ell_j, j \in N\}, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro} \right\}.$$

A sugestão também é válida para a geração do conjunto Y.

Esta heurística surgiu devido a uma análise de

dados de problemas reais (veja capítulo 7), onde ocorriam, freqüentemente, dimensões relativamente próximas das peças demandadas.

- H7

Esta sugestão se refere à ordem de seleção dos pontos nos conjuntos de discretização X e Y, ou seja, o modo como eles serão examinados:

- percorrê-lo em ordem crescente, examinando assim, na estratégia *backtracking*, sempre os menores retângulos primeiro;
- percorrê-lo em ordem decrescente, preenchendo primeiro os retângulos maiores;
- percorrê-lo de maneira aleatória, ou seja, não é possível prever como serão feitos os cortes.

No capítulo 6 são apresentados os resultados computacionais obtidos com estas heurísticas para problemas estudados.

6. Experiências Computacionais

A implementação computacional foi desenvolvida na linguagem Pascal, utilizando o compilador Borland Pascal versão 7.0, em um microcomputador Pentium, 167 Mhz com 32 Mbytes de RAM.

Foram desenvolvidos algoritmos para cada classe de problema estudado, ou seja, problema irrestrito, restrito, estagiado, com placa defeituosa, com limitação no número de tipo de peças, com corte-cabeça e também com peças do tipo L.

A implementação foi feita para problemas de corte bidimensional, mas a abordagem em grafo E/OU pode ser facilmente estendida para problemas tridimensionais, necessitando apenas de alguns ajustes na estrutura de dados do programa, assim como no código computacional.

A estrutura de dados utilizada na implementação dos algoritmos, assim como a maneira como foi implementado o conjunto de discretização, encontra-se em Gonçalves-Vianna et al. (2000).

Em todos os algoritmos implementados há limitação em relação à quantidade de memória disponível, ou seja, antes de se gerar um novo nó verifica-se se há uma quantidade mínima de memória. Esta quantidade varia de acordo com o problema e os dados armazenados em cada nó.

Para análise dos resultados obtidos de algumas

classes de problemas foram gerados exemplos aleatoriamente. Estes exemplos foram divididos em duas classes, exemplos pequenos e grandes, de acordo com Morabito (1992).

- Exemplos pequenos: nesta classe de problema, os conjuntos de discretização resultam com poucos elementos. Os valores ℓ_i e w_i , $i=1, \dots, m$, foram gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos $[0.25L, 0.75L]$ e $[0.25W, 0.75W]$, respectivamente.
- Exemplos grandes: os conjuntos de discretização resultam com muitos elementos, tendo sido os valores ℓ_i e w_i , $i=1, \dots, m$, gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos $[0.10L, 0.50L]$ e $[0.10W, 0.50W]$, respectivamente.

Nas duas classes de problema, os valores v_i , $i=1, \dots, m$, foram obtidos por
$$v_i = \frac{\ell_i \cdot w_i}{L \cdot W}.$$

6.1. Problema Irrestrito

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o problema de corte irrestrito.

Foram feitos testes com diferentes tipos de conjuntos de discretização. Aqui, são apresentados os dados obtidos com o problema irrestrito não-estagiado, percorrendo os conjuntos de discretização de maneira ordenada crescente e decrescente e também aleatória. Na geração dos conjuntos, utilizaram-se as regras para geração dos conjuntos de discretização (seção 4.1), profundidade máxima de 4 na estratégia de busca e parâmetros $\lambda_1 = 1\%$ e $\lambda_1 = 95\%$ (Heurísticas H1 e H2, respectivamente, vistas no capítulo 5).

6.1.1. Escolha seqüencial crescente dos cortes

A seguir, nas Tabelas 6.1 e 6.2, são apresentados os resultados obtidos percorrendo os conjuntos de cortes de maneira ordenada seqüencial crescente, que foram limitados em 100 elementos (heurística H5, vista no capítulo 5). Para cada conjunto de problemas foram gerados 50 exemplos.

A tabela foi dividida em 6 colunas, onde a primeira, segunda e terceira colunas se referem ao número de peças (m) e dimensões da placa (L,W), respectivamente. A quarta, quinta e sexta colunas contém, respectivamente, a média aritmética das soluções, do número de nós e do tempo computacional (em segundos) obtidos com cada conjunto de exemplos.

Tabela 6.1 - Exemplos pequenos

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.8776	8.00	0.01
10	100	100	0.9362	20.30	0.01
20	100	100	0.9792	52.52	0.05
Média			0.9310	26.94	0.02
5	1000	1000	0.8583	7.14	0.00
10	1000	1000	0.9383	28.00	0.02
20	1000	1000	0.9530	70.72	0.06
30	1000	1000	0.9690	209.16	0.21
Média			0.9297	78.76	0.07
5	3000	3000	0.9240	8.10	0.00
10	3000	3000	0.9382	18.18	0.02
20	3000	3000	0.9565	70.54	0.08
30	3000	3000	0.9651	194.54	0.28
Média			0.9460	72.84	0.10
Média total			0.9356	59.51	0.06

Tabela 6.2 - Exemplos grandes

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.9661	35.00	0.03
10	100	100	0.9893	350.60	0.40
20	100	100	0.9964	83.00	0.37
Média			0.9839	156.20	0.27
5	1000	1000	0.9758	15.80	0.02
10	1000	1000	0.9914	254.60	0.58
20	1000	1000	0.9926	309.87	1.16
30	1000	1000	0.9908	457.32	3.30
Média			0.9877	259.40	1.27
5	3000	3000	0.9832	34.20	0.06
10	3000	3000	0.9958	361.80	0.51
20	3000	3000	0.9932	595.40	3.51
30	3000	3000	0.9445	895.12	12.03
Média			0.9792	471.63	4.03
Média total			0.9836	295.74	1.86

Observe na segunda linha da Tabela 6.2, quando $m=10$, $L=100$ e $W=100$, que o número de nós é superior ao da terceira linha, quando $m=20$. Isto ocorreu porque dois exemplos do conjunto de problemas gerados, para $m=20$, obtiveram a solução com um número muito grande de nós, elevando desta maneira a média aritmética dos nós do conjunto.

6.1.2. Escolha sequencial decrescente dos cortes

A seguir, são apresentados os resultados obtidos com os mesmos exemplos da seção anterior, percorrendo os conjuntos de cortes de maneira ordenada decrescentemente, limitados também em 100 elementos.

Tabela 6.3 - Exemplos pequenos

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.8775	9.01	0.02
10	100	100	0.9360	18.23	0.02
20	100	100	0.9783	44.66	0.04
Média			0.9306	23.97	0.03
5	1000	1000	0.8498	6.55	0.01
10	1000	1000	0.9380	22.70	0.03
20	1000	1000	0.9529	69.96	0.07
30	1000	1000	0.9687	165.03	0.20
Média			0.9274	66.06	0.08
5	3000	3000	0.9234	5.98	0.01
10	3000	3000	0.9381	15.11	0.03
20	3000	3000	0.9559	59.01	0.01
30	3000	3000	0.9649	136.01	0.24
Média			0.9456	54.03	0.07
Média total			0.9345	48.02	0.06

Tabela 6.4 - Exemplos grandes

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.9660	36.20	0.03
10	100	100	0.9890	366.10	0.47
20	100	100	0.9964	130.12	0.46
Média			0.9838	177.47	0.32
5	1000	1000	0.9758	15.96	0.02
10	1000	1000	0.9912	301.01	0.61
20	1000	1000	0.9926	371.22	1.22
30	1000	1000	0.9908	484.83	3.20
Média			0.9876	293.26	1.26
5	3000	3000	0.9832	37.27	0.05
10	3000	3000	0.9961	390.12	0.55
20	3000	3000	0.9932	621.87	3.13
30	3000	3000	0.9438	900.01	16.10
Média			0.9791	487.32	4.96
Média final			0.9835	319.35	2.18

Deve-se observar que a média do número de nós da segunda linha da Tabela 6.4, com $m=10$, também é superior a mé-

dia do número de nós da terceira linha, quando $m=20$. Os mesmo exemplos que obtiveram um número de nós elevado na determinação da solução percorrendo o conjunto de discretização de maneira ordenada crescente (conforme observado em 6.1.1.), aqui também obtiveram um número superior aos demais exemplos deste conjunto.

6.1.3. Escolha aleatória dos cortes

Neste caso, os conjuntos de discretização são percorridos de maneira aleatória (heurística H7, do capítulo 5). As Tabelas 6.5 e 6.6 apresentam os mesmos exemplos utilizados com a escolha seqüencial dos cortes.

Tabela 6.5 - Exemplos pequenos

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.8776	8.40	0.01
10	100	100	0.9360	20.88	0.01
20	100	100	0.9789	57.64	0.09
Média			0.9308	28.97	0.04
5	1000	1000	0.8580	7.44	0.01
10	1000	1000	0.9383	30.10	0.03
20	1000	1000	0.9530	78.14	0.13
30	1000	1000	0.9688	427.01	0.44
Média			0.9295	135.67	0.15
5	3000	3000	0.9238	8.68	0.00
10	3000	3000	0.9371	19.80	0.03
20	3000	3000	0.9562	177.54	0.12
30	3000	3000	0.9650	506.98	1.01
Média			0.9455	178.25	0.29
Média final			0.9353	114.30	0.16

Tabela 6.6 - Exemplos grandes

m	L	W	Solução	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.9660	43.89	0.07
10	100	100	0.9893	525.76	0.88
20	100	100	0.9963	173.40	0.75
Média			0.9839	247.68	0.57
5	1000	1000	0.9758	17.80	0.01
10	1000	1000	0.9914	450.60	1.19
20	1000	1000	0.9926	245.17	1.02
30	1000	1000	0.9908	187.69	4.56
Média			0.9877	225.32	1.70
5	3000	3000	0.9832	77.80	0.10
10	3000	3000	0.9960	593.03	1.41
20	3000	3000	0.9929	347.49	4.23
30	3000	3000	0.9439	885.38	6.81
Média			0.9790	475.93	3.14
Média final			0.9835	316.31	1.80

Em geral, os resultados obtidos percorrendo os conjuntos de discretização de maneira ordenada seqüencial crescente são um pouco melhores que os obtidos percorrendo o conjunto de maneira decrescente e aleatória (nos exemplos pequenos, 0.12% e 0.03%, respectivamente; nos exemplos grandes, 0.01% em ambos os casos), porém a melhoria foi desprezível, que sugere que a ordenação não é um fator relevante para desempenho da abordagem.

6.1.4. Limitante Inferior: Solução Homogênea

A seguir são apresentados dois exemplos da literatura para o problema de corte irrestrito.

Herz (1972) apresentou um problema irrestrito, com uma placa de dimensão (127,98) e 5 peças de dimensões (18,65), (24,27), (21,13), (36,17) e (54,20), com $v_1=1170$, $v_2=273$, $v_3=648$, $v_4=612$, $v_5=1080$, com solução ótima igual a 12348 e 99,21% de aproveitamento da área. A Figura 6.1 apresenta o

resultado obtido com a abordagem em grafo E/OU, utilizando as regras de geração do conjuntos de discretização, vistas na seção 4.1, limite de profundidade igual a 3 e os parâmetros $\lambda_1 = 10\%$ e $\lambda_2 = 95\%$. Este resultado foi obtido em 0.39s. Observe que esta solução é igual a solução ótima obtida por Herz (1972).

Figura 6.1 - Solução do exemplo de Herz (1972)

Beasley (1985) apresentou um problema irrestrito com dados reais (uma placa de dimensão (3000,3000) e 32 tipos de peças) com uma solução heurística de 98.48% de aproveitamento da área, limitando a cardinalidade dos conjuntos de discretização em 100 unidades. Utilizando as heurísticas apresentadas no capítulo 5, H1 e H2, que limitam o espaço de busca, e também a heurística H5, que limita o tamanho do conjunto de discretização, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 6.7. As colunas Xmax e Ymax indicam a limitação dos conjuntos de discretização X e Y, respectivamente.

Tabela 6.7 - Resultados obtidos do exemplo de Beasley (1985)

Xmax	Ymax	λ_1	λ_2	Solução	Nº nós	t(s)
50	50	0.05	1.00	0.97844	1	0.02
50	50	0.01	0.95	0.99126	33	0.06
50	50	0.01	0.90	0.99126	33	0.05
100	100	0.01	0.95	0.99572	18735	14.23
50	50	0.001	0.95	0.99975	5741	4.33

A Figura 6.2 apresenta a melhor solução obtida com a abordagem em grafo E/OU, com o tamanho dos conjuntos de discretização limitado em 50. Observe que esta solução é melhor do que a solução heurística obtida por Beasley (1985), apesar de não saber se ela é ótima.

PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL IRESTRITO (1-beasley.b1)									
(SOLUÇÃO HOMOGÊNEA)									
Placa 3000 x 3000 (Perda 0.02%)									
(14)	(14)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
(14)	(14)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
(15)	(15)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
(15)	(15)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
(15)	(15)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)
		(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)

Corte: 75 peças (2) - 378 x 200
 4 peças (14) - 555 x 755
 6 peças (15) - 555 x 496

(ESC)-\$a1

Figura 6.2 - Solução do exemplo de Beasley (1985) com

$$|X| < 50 \text{ e } |Y| < 50 \quad (\text{Heurística H5})$$

6.1.5. Limitante Inferior: Solução 2-estágios

As Tabelas 6.8 e 6.9 apresentam os resultados obtidos com problemas irrestritos não-estagiados (conjuntos com 50 exemplos de cada classe), com os conjuntos de discretização ordenados e limitados em 100 elementos, variando somente o limitante inferior. Este limitante é calculado através da

solução homogênea na Solução 1. Na Solução 2, o limitante é dado através da solução 2-estágios, no nó inicial, e, nos demais nós do grafo, é dado pela solução homogênea.

Tabela 6.8 - Exemplos pequenos

m	L	W	Solução 1	t(s)	Solução 2	t(s)
5	100	100	0.8776	0.01	0.8776	0.03
10	100	100	0.9367	0.01	0.9367	0.05
20	100	100	0.9792	0.05	0.9792	0.12
Média			0.9312	0.02	0.9312	0.07
5	1000	1000	0.8583	0.00	0.8583	0.03
10	1000	1000	0.9383	0.02	0.9383	0.10
20	1000	1000	0.9530	0.06	0.9530	0.30
30	1000	1000	0.9690	0.21	0.9693	0.48
Média			0.9297	0.07	0.9297	0.23
5	3000	3000	0.9240	0.00	0.9240	0.07
10	3000	3000	0.9382	0.02	0.9382	0.21
20	3000	3000	0.9565	0.08	0.9565	0.63
30	3000	3000	0.9651	0.28	0.9651	1.03
Média			0.9460	0.10	0.9460	0.49
Média final			0.9356	0.06	0.9356	0.26

Tabela 6.9 - Exemplos grandes

m	L	W	Solução 1	t(s)	Solução 2	t(s)
5	100	100	0.9661	0.03	0.9661	0.02
10	100	100	0.9893	0.40	0.9893	0.09
20	100	100	0.9964	0.37	0.9964	0.17
Média			0.9839	0.27	0.9839	0.09
5	1000	1000	0.9758	0.02	0.9758	0.04
10	1000	1000	0.9914	0.58	0.9917	0.16
20	1000	1000	0.9926	1.16	0.9926	0.55
30	1000	1000	0.9908	3.30	0.9908	0.99
Média			0.9877	1.27	0.9877	0.44
5	3000	3000	0.9832	0.06	0.9832	0.09
10	3000	3000	0.9958	0.51	0.9958	0.36
20	3000	3000	0.9932	3.51	0.9945	1.02
30	3000	3000	0.9445	12.03	0.9448	1.74
Média			0.9792	4.03	0.9796	0.80
Média final			0.9836	1.86	0.9837	0.44

Como se pode observar nas tabelas apresentadas, o tempo computacional diminui bastante com o uso de um limitante inferior mais poderoso (solução 2-estágios no nó inicial) nos exemplos grandes. O tempo médio obtido com a Solução 2 é 23,65% do tempo médio obtido com a solução homogênea. Nos exemplos pequenos, o tempo médio computacional obtido com a solução homogênea é 23.07% da Solução 2.

6.2. Problema Restrito

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o problema de corte restrito. Os exemplos foram novamente classificados, de acordo com a demanda das peças:

- Exemplos com demanda pequena: nesta classe de problema, os valores de b_i , $i=1, \dots, m$, foram gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos que variam de 10% a 50% de $\frac{L}{\ell_i} \cdot \frac{W}{w_i}$.
- Exemplos com demanda grande: os valores de b_i , $i=1, \dots, m$, foram gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos que variam de 40% a 80% de $\frac{L}{\ell_i} \cdot \frac{W}{w_i}$.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos pela abordagem em grafo E/OU aplicados aos exemplos propostos por Wang (1983), denotados por W1, W2 e W3 (todos com 20 tipos de peças). Nos exemplos de Wang (1993), o valor de utilidade das peças, v_i ($i=1, \dots, 20$), assume um valor diferente da área da peça. A Tabela 6.10 apresenta os resultados obtidos com $|X| < 100$, $|Y| < 100$, a profundidade máxima igual a 3, $\lambda_1 = 0.1\%$ e $\lambda_2 = 95\%$.

Tabela 6.10 - Resultados obtidos dos exemplo de Wang (1983)

Exemplo	Solução	Nº nós	t(s)
W1	2277	1	0.00
W2	2694	221	0.16
W3	2721	365	0.22

Todas as soluções encontradas com abordagem em grafo E/OU apresentadas pela Tabela 6.10 são ótimas. As Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 mostram os padrões de corte obtidos.

Figura 6.3 - Solução do exemplo W1 (Wang, 1983)

Figura 6.4 - Solução do exemplo W2 (Wang, 1983)

Figura 6.5 - Solução do exemplo W3 (Wang, 1983)

A Tabela 6.11 apresenta os resultados dos exemplos apresentados por Oliveira e Ferreira (1990). Os resultados foram obtidos com a abordagem em grafo E/OU utilizando os parâmetros $\lambda_1 = 0.1\%$ e $\lambda_2 = 95\%$. Observe que a solução ótima do primeiro exemplo só é alcançada com profundidade igual a 5.

Tabela 6.11 - Resultados obtidos dos exemplos
de Oliveira e Ferreira (1990)

Exemplo	Profundidade	Solução	Nº nós	t(s)
OF1	3	2713	3759	0.55
	5	2737	5581	1.06
OF2	3	2690	2769	1.69

As Figuras 6.6 e 6.7 apresentam os padrões ótimos obtidos pelas soluções da Tabela 6.11.

Figura 6.6 - Solução do exemplo OF1 (Oliveira e Ferreira, 1990)

Figura 6.7 - Solução do exemplo OF2 (Oliveira e Ferreira, 1990)

6.2.1. Limitante Inferior: Solução Homogênea Composta

As Tabelas 6.12 e 6.13 apresentam os resultados obtidos com problemas restritos não-estagiados, com $|x| < 100$, $|y| < 100$, a profundidade máxima igual a 3, $\lambda_1 = 0.1\%$ e $\lambda_2 = 95\%$, variando somente o limitante inferior. Este limitante é calculado através da solução homogênea (seção 4.2.1.1) na Solução 1. Na Solução 2, o limitante é dado atra-

vés da solução homogênea composta (seção 4.2.2.1). A tabela apresenta a média obtida com 50 exemplos de cada classe de problemas.

Tabela 6.12- Exemplos com demanda pequena

m	L	W	Solução 1	Nº nós	t(s)	Solução 2	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.8725	67.50	0.06	0.9066	33.21	0.00
10	100	100	0.8395	186.96	0.07	0.8486	87.13	0.07
20	100	100	0.9588	481.77	0.22	0.9588	355.34	0.27
Média			0.8903	245.41	0.12	0.9047	158.56	0.11
5	1000	1000	0.6489	32.80	0.01	0.6612	18.12	0.01
10	1000	1000	0.7991	122.92	0.05	0.8052	77.56	0.05
20	1000	1000	0.8287	521.34	0.56	0.8301	110.09	1.12
Média			0.7589	225.69	0.21	0.7655	68.59	0.39
Média final			0.8246	235.55	0.17	0.8351	113.58	0.25

Observe nesta tabela que a média final da solução homogênea composta apresenta melhor resultado (1.27%) com um número de nós menor (48.22%), entretanto com um tempo computacional maior (47,06%). Apesar do tempo computacional ser superior quando se utiliza esta solução, na prática este tempo é totalmente viável.

Tabela 6.13 - Exemplos com demanda grande

m	L	W	Solução 1	Nº nós	t(s)	Solução 2	Nº nós	t(s)
5	100	100	0.8248	45.68	0.02	0.8252	36.60	0.02
10	100	100	0.9251	209.64	0.07	0.9259	190.20	0.10
20	100	100	0.9691	623.64	0.34	0.9689	581.44	0.50
Média			0.9063	292.99	0.14	0.9067	269.41	0.21
5	1000	1000	0.7875	39.60	0.01	0.7952	36.92	0.01
10	1000	1000	0.9096	188.24	0.07	0.9102	170.36	0.09
20	1000	1000	0.9548	720.16	0.41	0.9552	648.60	0.57
Média			0.8840	316.00	0.16	0.8869	285.29	0.22
Média final			0.8952	304.50	0.15	0.8968	277.35	0.22

Com os resultados apresentados acima, e com uma variedade grande de outros exemplos testados, conclui-se que a solução homogênea composta é um bom limitante inferior para problemas com demanda pequena.

6.2.2. Fracionamento do vetor b

Aplicando a heurística H4, proposta no capítulo 5, não se obtiveram resultados significativos, como é possível observar nos exemplos das tabelas 6.14 e 6.15, com uma placa (100,100) e 10 peças. Foram também gerados 50 exemplos para cada classe de problemas.

Tabela 6.14 - Exemplos pequenos

K	Solução	Nº nós	t(s)
0.30	0.8344	44.24	0.04
0.50	0.9249	192.76	0.08
0.80	0.9251	199.36	0.08
1.00	0.9251	209.64	0.08

Tabela 6.15 - Exemplos grandes

K	Solução	Nº nós	t(s)
0.30	0.5982	59.56	0.04
0.50	0.7598	156.12	0.06
0.80	0.7498	135.72	0.06
1.00	0.8486	186.96	0.07

Observe que quando K assume o valor 1, percorre-se o grafo de maneira gulosa, conforme foi visto na seção 3.2.2.

Com os testes realizados, pode-se concluir que a variação do parâmetro K tende a 1, para que se possa obter resultados significativos. Assim sendo, pode-se descartar a estratégia de fracionamento do vetor b, pois apesar do tempo computacional crescer, o resultado obtido também melhora quan-

do não é feito o fracionamento.

6.3. Problema Estagiado

O problema de corte estagiado foi implementado para problemas irrestritos e restrito.

A seguir, são apresentados resultados obtidos com um problema irrestrito. As Figuras 6.8 e 6.9 apresentam a solução 2-estágios e não-estagiada, respectivamente, de um problema com uma placa (100,100) e 5 peças de dimensões (14,29), (15,45), (22,13), (26,30) e (39,45). Para a execução dos problemas, limitou-se a profundidade da estratégia de busca *backtracking* em 3 e os parâmetros $\lambda_1 = 10\%$ e $\lambda_2 = 95\%$. O tempo computacional obtido com o caso estagiado e não estagiado foi de 0.82s e 1.59s, respectivamente.

Figura 6.8 - Solução do problema 2-estágios

Figura 6.9 - Solução do problema não-estagiado

Incluindo um limite máximo para a produção de cada peça, b_i , no exemplo acima, de 7, 12, 5, 9 e 3 unidades, respectivamente, obtiveram-se os resultados apresentados pela Figuras 6.10 e 6.11 para o problema 2-estágios restrito e não-estagiado restrito.

Figura 6.10 - Solução do problema restrito 2-estágios

Figura 6.11 - Solução do problema restrito não-estagiado

As Tabelas 6.16 e 6.17 apresentam resultados obtidos com problemas guilhotinados 2-estágios irrestrito. Foram feitos testes com 50 exemplos de cada classe de problema. A coluna Solução Grafo E/OU apresenta a média das soluções heurísticas obtidas com o algoritmo grafo E/OU limitado para 2-estágios, com profundidade máxima limitada em 3. A coluna Solução 2-estágios apresenta a média dos resultados obtidos com a solução ótima 2-estágios de Gilmore e Gomory (1965), apresentada na seção 4.2.3.

A resolução do problema 2-estágios usando a abordagem em grafo E/OU apresenta resultado ótimo, ou perto do ótimo, devido à limitação da profundidade do grafo. Nos exemplos pequenos a diferença das médias dos resultados é de 0.0025 e, nos exemplos grande de 0.0051. Note que, em problemas pequenos, o tempo de execução médio na abordagem grafo E/OU é menor que 1/4 do tempo de execução médio na abordagem 2-estágio; em problemas grandes, este tempo é de quase 3 vezes.

Tabela 6.16 - Exemplos pequenos

m	L	W	Solução Grafo E/OU	t(s)	Solução 2-estágios	t(s)
5	100	100	0.8476	0.00	0.8576	0.02
10	100	100	0.9367	0.01	0.9367	0.05
20	100	100	0.9762	0.05	0.9780	0.10
Média			0.9201	0.02	0.9241	0.05
5	1000	1000	0.8411	0.00	0.8411	0.05
10	1000	1000	0.9290	0.02	0.9327	0.09
20	1000	1000	0.9507	0.05	0.9519	0.27
50	1000	1000	0.9689	0.21	0.9693	0.46
Média			0.9224	0.07	0.9238	0.22
5	3000	3000	0.8791	0.00	0.8860	0.07
10	3000	3000	0.9113	0.02	0.9115	0.20
20	3000	3000	0.9452	0.08	0.9460	0.60
50	3000	3000	0.9573	0.28	0.9578	1.11
Média			0.9232	0.10	0.9253	0.50
Média final			0.9219	0.06	0.9244	0.26

Tabela 6.17 - Exemplos grandes

m	L	W	Solução Grafo E/OU	t(s)	Solução 2-estágios	t(s)
5	100	100	0.9601	0.03	0.9604	0.03
10	100	100	0.9874	0.39	0.9890	0.04
20	100	100	0.9952	0.38	0.9958	0.12
Média			0.9809	0.27	0.9817	0.06
5	1000	1000	0.9358	0.03	0.9486	0.05
10	1000	1000	0.9624	0.58	0.9712	0.12
20	1000	1000	0.9851	0.51	0.9911	0.24
30	1000	1000	0.9895	2.04	0.9925	0.61
Média			0.9682	0.79	0.9759	0.26
5	3000	3000	0.9832	0.06	0.9901	0.08
10	3000	3000	0.9738	0.51	0.9805	0.32
20	3000	3000	0.9932	3.34	0.9954	0.82
30	3000	3000	0.9245	3.48	0.9359	1.44
Média			0.9687	1.85	0.9755	0.67
Média final			0.9726	0.97	0.9777	0.33

Com os resultados obtidos por Gramani (1997)

utilizando Relaxação Lagrangiana para problemas de corte guilhotinados 2-estágios restrito (veja anexo 2), pôde-se comparar os resultados da abordagem em grafo E/OU, utilizando o conjunto de discretização completo e a estratégia *backtracking* com profundidade ilimitada (conjectura do problema de corte restrito da seção 4.6). A seguir, são apresentados problemas, pequenos e grandes, com 3, 5, 10 e 30 peças, respectivamente, e suas soluções. Estes problemas apresentam soluções ótimas, reforçando, assim, a conjectura do problema de corte restrito.

- Exemplos com 3 peças

Considere uma placa (100,100). A Tabela 6.18 apresenta os dados de um problema pequeno e grande com 3 peças. Obtiveram-se as soluções que são ótimas, o que reforça a conjectura da seção 4.6, de 0.8066 e 0.8312, para o problema pequeno e grande. Os tempos computacionais obtidos foram de 3.19s e 6.92s, respectivamente. A Figura 6.12 apresenta os padrões ótimos.

Tabela 6.18 - Exemplo pequeno e grande com $m=3$

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	35	27	2
2	27	48	3
3	32	56	3

0,0945
0,1296
0,1792

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	38	11	2
2	38	26	3
3	47	48	2

0,0418
0,0988
0,2256

Figura 6.12 - Soluções ótimas dos exemplos restritos ($m=3$)

- Exemplos com 5 peças

A seguir, são apresentados um problema pequeno e grande com uma placa (100,100) e 5 peças. A Tabela 6.19 mostra os dados destes problemas. As soluções, que também são ótimas, obtidas para cada exemplo foram 0.8855 e 0.9744, com um tempo computacional 1.42s e 0.49s, respectivamente (Figura 6.13).

Tabela 6.19 - Exemplo pequeno e grande com $m=5$

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	71	50	2
2	27	65	2
3	57	66	3
4	43	72	1
5	45	72	1

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	47	14	14
2	40	18	5
3	28	35	2
4	35	41	4
5	49	43	4

Figura 6.13 - Soluções ótimas dos exemplos restritos ($m=5$)

- Exemplos com 10 peças

São gerados novamente exemplos com placa (100,100) com 10 tipos de peças (Tabela 6.20). As soluções, que também são ótimas, para o exemplo pequeno e grande são 0.9242 e 0.9828, respectivamente, com tempo computacional de 1.86s e 19.71s. A Figura 6.14 ilustra estas soluções.

Tabela 6.21 - Exemplo pequeno e grande com $m=30$

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	38	27	6
2	42	27	1
3	41	28	3
4	65	31	3
5	52	32	1
6	54	32	1
7	28	37	2
8	29	40	3
9	30	41	2
10	54	43	2
11	43	43	2
12	61	43	1
13	35	46	4
14	68	47	1
15	56	50	1
16	70	51	1
17	32	52	1
18	26	52	2
19	68	54	1
20	40	55	2
21	71	57	1
22	55	58	1
23	33	59	1
24	45	65	1
25	30	67	1
26	62	68	1
27	72	68	1
28	46	70	1
29	46	73	1
30	65	74	1

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	16	10	24
2	17	10	20
3	17	12	38
4	37	16	7
5	11	16	3
6	18	17	2
7	24	18	10
8	29	19	15
9	14	19	35
10	32	20	10
11	16	22	23
12	36	24	3
13	25	25	12
14	13	27	9
15	35	28	4
16	43	32	2
17	12	35	6
18	21	36	7
19	25	38	1
20	26	40	4
21	21	43	3
22	39	43	2
23	11	43	16
24	19	45	9
25	27	46	2
26	40	46	4
27	21	48	1
28	24	49	3
29	13	49	12
30	16	49	1

6.4. Problema com placa defeituosa

Os problemas de corte com placas defeituosas foram pouco estudados na literatura (Carnieri et al., 1993).

Na implementação deste problema não foi considerada uma quantidade máxima de cada tipo de peças, mas a implementação da abordagem em grafo E/OU permite este ajuste incluindo informações adicionais em cada nó.

A seguir, são mostrados os resultados obtidos com o exemplo apresentado por Carnieri et al. (1993), em uma placa de dimensões (100,200) e 5 peças conforme os dados Tabela 6.22.

Tabela 6.22 - Exemplo de Carnieri et al. (1993)

i	ℓ_i	w_i	v_i
1	40	30	10
2	68	26	12
3	50	20	8
4	60	35	18
5	45	22	9

Foram 8 testes com este exemplo, mudando a posição do defeito. As posições dos defeitos, assim como os resultados obtidos por Carnieri et al. (1993), são apresentados na Tabela 6.23.

Tabela 6.23 - Defeitos e soluções obtidas por Carnieri et al. (1993)

Exemplo	Defeito		Solução
1	(50,100)	(54,105)	166
2	(40,100)	(44,105)	160
3	(60,100)	(66,105)	162
4	(20,125)	(30,132)	158
5	(71,125)	(79,132)	164
6	(30,30)	(40,40)	164
7	(40,80)	(58,110)	157
8	(40,80)	(58,118)	154

Com a implementação usando grafo E/OU obtiveram-se os resultados da Tabela 6.24. Note que para todos os exemplos foi encontrada uma solução igual ou melhor, entretanto, em alguns casos foi necessário não utilizar a regra de simetria para obter tal solução.

As Figuras 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19, apresentam o melhor padrão de corte obtido nos exemplos da Tabela 6.24.

Tabela 6.24 - Defeitos e soluções obtidas por grafo E/OU

Exemplo	λ_1	λ_2	Prof.	Simetria	Nº.nós	Solução	t(s)
1	0.01	0.95	3	s	2767	166	3.18
2		0.95	3	s	2249	167	2.31
3		0.95	3	s	8133	164	8.07
4		0.95	3	n	5203	158	2.47
				s	3531	155	2.31
			4	n	31527	158	15.21
				s	8837	155	4.55
		0.90	3	n	9423	158	3.68
				s	6889	157	3.46
			4	n	74255	158	30.05
				s	20235	157	8.67
5		0.95	3	n	19321	167	14.01
				s	15369	162	20.82
			4	n	91915	167	69.65
				s	19477	165	32.30
		0.90	3	n	37487	167	24.34
				s	23033	162	31.42
6		0.95	3	s	1309	160	0.77
			4	s	9657	164	4.94
		0.90	3	s	1085	160	0.44
			4	s	7103	164	2.41
7		0.95	3	s	697	159	0.60
8		0.95	3	s	591	153	0.60
		0.90	3	s	2351	156	1.81

As Figuras 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19, apresentam o melhor padrão de corte obtido nos exemplos da Tabela 6.24.

Figura 6.16 - Exemplo 1 (solução=166) e exemplo 2 (solução=167)

Figura 6.17 - Exemplo 3 (solução=166) e exemplo 4 (solução=158)

Figura 6.18 - Exemplo 5 (solução=167) e exemplo 6 (solução=164)

Figura 6.19 - Exemplo 7 (solução=159) e exemplo 8 (solução=156)

6.5. Problema com limitação no número de tipo de peças

O problema com limitação no número de tipos de

peças, conforme a seção 2.2.2, surgiu devido à restrição do número de saídas do equipamento de corte. Embora ele ocorra, na prática, com serras automáticas de grande porte, não é muito explorado na literatura.

O problema foi implementado para o caso restrito.

A seguir, são apresentados alguns resultados obtidos limitando o número de tipo de peças nos exemplos de Wang (1983) e Oliveira e Ferreira (1990) (mostrados na seção 6.2).

Utilizando os mesmos parâmetros da seção 6.2 e limitando o número de tipos de peças em 2 e 3, nos exemplos W2 e W3, obtiveram-se os resultados da Tabela 6.25. As Figuras 6.20 e 6.21 apresentam os padrões obtidos.

Tabela 6.25 - Exemplos de Wang (1983) com limitação no número de tipo de peças

Exemplo	Nº de tipos	Solução	Nº nós	t(s)
W1	2	0.8623	411	2.14
	3	0.9238	315	1.21
W3	2	0.8407	699	3.35
	3	0.9368	329	1.15

Figura 6.20 - Exemplo W2 com limitação de 2 e 3 tipos de peças

Figura 6.21 - Exemplo W3 com limitação de 2 e 3 tipos de peças

O mesmo procedimento foi repetido com os exemplos de Oliveira e Ferreira. Os resultados são apresentados na Tabela 6.26 e os padrões de corte nas Figuras 6.22 e 6.23. A profundidade utilizada na estratégia *backtracking* foi 5 e 3 para OF1 e OF2, respectivamente.

Tabela 6.26 - Exemplos de Oliveira e Ferreira (1990) com limitação no número de tipo de peças

Exemplo	Nº de tipos	Solução	Nº nós	t(s)
OF1	3	0.9689	10357	25.04
	4	0.9539	6331	11.64
OF2	3	0.9129	4521	11.69
	4	0.9379	4139	9.83

Figura 6.22 - Exemplo OF1 com limitação de 3 e 4 tipos de peças

Figura 6.23- Exemplo OF2 com limitação de 3 e 4 tipos de peças

6.6. Problema com corte-cabeça

Conforme foi citado na seção 2.2.3, não há registro, na literatura, de métodos de solução para esta classe de problemas, embora se encontre este problema na prática.

A seguir, são apresentados alguns resultados, variando a limitação mínima e máxima da posição do corte e também o número total de giros, comentado na seção 3.2.5.

Considere um problema com uma placa de dimensões (1000,1000) e 5 tipos de peças com dimensões (143,277), (357,215), (369,156), (221,139) e (493,138). Uma solução cabeça, com os parâmetros no grafo E/OU de limite de profundidade igual a 3, $\lambda_1 = 10\%$ e $\lambda_2 = 95\%$, é apresentada na Figura 6.24, com valor 0.9701 (17.47s). Neste padrão não houve limitação para a posição do corte e também no número total de giros.

Figura 6.24 - Solução cabeça

Com a limitação da posição de corte no intervalo $[100,300]$, obteve-se uma solução 0.9623 de com 4.5s. A Figura 6.25 apresenta o padrão de corte obtido. Observe que o corte-cabeça agora está na horizontal, isto é, tem um giro.

Figura 6.25 - Solução cabeça com limitação na posição do corte

Limitando o número de giros em 2, obteve-se o mesmo padrão da Figura 6.26.

A seguir, é apresentado um outro exemplo com uma

placa (100,100) e 10 peças de dimensões (16,12), (10,14), (42,15), (19,22), (26,23), (26,25), (31,26), (39,34), (15,38) e (33,45). A solução obtida, sem nenhuma restrição, é apresentada na Figura 6.26, com valor 0.9908 e tempo computacional de 46.8s.

Figura 6.26 - Solução cabeça

Com uma limitação mínima de 12 unidades na posição do corte, tem-se uma solução de 0.9800, com um tempo computacional de 2.74s (Figura 6.27). Observe que o corte foi feito de maneira horizontal, satisfazendo a restrição de limitação.

Figura 6.27 - Solução cabeça com limitação na posição do corte

Observe que com um limite para a posição do corte, o tempo computacional diminui bastante, aumentando também a perda obtida.

6.7. Problema com peças do tipo L

A implementação do problema com peças do tipo L e/ou retangulares foi desenvolvida para o caso irrestrito. Foram necessárias alterações na estrutura de dados utilizada, já que neste problema são necessários mais dois parâmetros para armazenar as dimensões de cada peça, seja ela do tipo L ou retangular.

No algoritmo foi necessário implementar diferentes maneira de gerar dois novos nós, já que neste tipo de problema é possível realizar cortes guilhotinados e/ou degrau.

Os testes foram feitos com exemplos onde as dimensões das peças $\ell_i^1, w_i^1, \ell_i^2, w_i^2$, $i=1, \dots, m$, foram geradas aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos respectivos intervalos $[0.2L, 0.4L]$, $[0.2W, 0.4W]$, $[0.4L, 0.6L]$, e $[0.4W, 0.6W]$. A Tabela 6.27, a seguir, apresenta a média dos resultados obtidos com uma classe de 20 exemplos. Utilizou-se profundidade máxima de 3 na estratégia de busca e parâmetros $\lambda_1 = 1\%$ e $\lambda_2 = 95\%$.

Tabela 6.27 - Exemplos com peças do tipo L

m	Solução	t(s)
3	0.7560	13.17
4	0.8576	24.42
5	0.8880	42.02

Lembre-se que o limitante inferior deste problema, apresentado na seção 4.2.1.3, calcula pelo menos duas soluções em cada nó e, escolhe a melhor entre elas.

A seguir, é apresentado um exemplo com uma placa

de dimensões $(100,100)$ e 3 tipos de peças com dimensões $(30,30,30,30)$, $(30,35,50,40)$ e $(55,55,55,55)$. A Figura 6.28 ilustra o padrão de corte obtido, com valor 0.9200 e tempo computacional de 19.01s.

Figura 6.28 - Solução com peças do tipo L ($m=3$)

Para tentar melhorar os resultados alcançados com os problemas com peças do tipo L, deve-se, em pesquisas futuras, estudar limitantes inferiores diferentes, combinando peças diferentes na formação de soluções homogêneas compostas e, também heurísticas diferentes para a escolha dos cortes a serem realizados.

A implementação computacional da abordagem em Grafo E/OU permite que se combinem diferentes tipos de problemas sem muita dificuldade. Assim sendo, por exemplo, é fácil implementar, a partir das implementações anteriores, um problema restrito com corte-cabeça e limitação no número máximo de tipo de itens. Além disso, a abordagem em Grafo E/OU também permite que se incluam outras restrições, não consideradas neste estudo, com relativa facilidade.

7. Aplicação do Problema de Corte numa Indústria de Esquadrias Metálicas

Deu-se, neste trabalho, ênfase na aplicação de uma abordagem em grafo E/OU para problemas de corte, em particular, para o problema de determinar o melhor padrão de corte para um objeto, produzindo itens com tamanhos, quantidades e valores de utilidade fornecidos. Além disso, restrições de processo e/ou formas geométricas foram estudadas utilizando-se da abordagem em grafo E/OU. Conforme a classificação de Dyckhoff (1990), os problemas de corte estudados nesta tese são do tipo 2/B/O/*, isto é, bidimensionais; itens devem ser selecionados para comporem o padrão, apenas uma unidade do objeto é considerada, sendo que os itens podem ser repetidos em grande quantidade ou não, terem tamanhos variados ou não. Observe que nos problemas estudados, não havia demanda associada aos itens (apenas tamanhos, quantidades e valores de utilidade eram associados). Quando uma demanda deve ser satisfeita, de modo que vários objetos em estoque devem ser cortados para atendê-la, o problema é referido por Problema de Corte de Estoque (*Cutting Stock Problem*), enquanto que o problema estudado nesta tese é chamado simplesmente de Problema de Corte. (Nos artigos pioneiros de Gilmore e Gomory, 1961, 1965 e 1966, estes problemas eram chamados de Problemas da Mochila - *Knap-*

sack Problem, independentemente da dimensão). Os problemas de corte são de fundamental importância na resolução de problemas de corte de estoque. Na clássica abordagem de geração de colunas (Gilmore e Gomory, 1963), um problema de corte deve ser resolvido a cada iteração do método simplex, constituindo-se no gerador de colunas. Outras abordagens de solução são utilizadas na prática, principalmente quando há itens com baixa demanda. A seguir, será vista uma heurística gulosa que, a cada iteração, gera o melhor padrão de corte e o utiliza o quanto for necessário.

Foi feito um estudo de caso numa Indústria de Esquadrias Metálicas, onde se determina uma sequência de padrões de corte para atender uma demanda com uma perda mínima de material.

Considere k placas retangulares de dimensões (L_j, W_j) , onde L_j é o comprimento e W_j a largura da placa j , em quantidade B_j , $j=1, \dots, k$, e um conjunto de m peças retangulares de dimensão (ℓ_i, w_i) , $i=1, \dots, m$, onde ℓ_i é comprimento e w_i a largura da peça i , conforme o exemplo da Figura 7.1. O problema consiste em cortar exatamente b_i peças (neste caso, b_i é demanda, pois deve ser atendida), $i=1, \dots, m$, a partir das placas retangulares, maximizando seu aproveitamento. Assim, se por um lado, os padrões não devem produzir mais do que b_i unidades da peça i , várias placas devem ser cortadas, de modo que o número total de peças tipo i cortadas seja exatamente igual a b_i .

O algoritmo utilizado para a resolução deste problema foi do tipo iterativo guloso (heurística de aspiração, Hinxmam (1980)), onde, a cada iteração, determina-se a placa que apresenta o melhor aproveitamento, ou seja, o melhor padrão de corte, e, após o corte, as disponibilidades das placas e demandas das peças são atualizadas.

Figura 7.1 - Problema de corte com k placas ($k=3$)

7.1. Algoritmo Guloso

Considere os seguintes dados:

- k : número de placas retangulares (L_j, W_j) , $j=1, \dots, k$
- L_j : comprimento da placa j , $j=1, \dots, k$
- W_j : largura da placa j , $j=1, \dots, k$
- B_j : disponibilidade da placa j , $j=1, \dots, k$
- m : número de peças retangulares (ℓ_i, w_i) , $i=1, \dots, m$
- ℓ_i : comprimento da peça i , $i=1, \dots, m$
- w_i : largura da peça i , $i=1, \dots, m$
- b_i : demanda da peça i , $i=1, \dots, m$
- a^* : vetor associado ao melhor padrão
- k^* : tipo da placa referente ao melhor padrão
- β^* : número de repetições do padrão a^* na placa k^*

Início

Enquanto (demanda das peças não for atendida) e (houver disponibilidade de placas) faça:

- Determine o melhor padrão de corte para a placa tipo j com $B_j > 0$, $j=1, \dots, k$.
- Armazene o melhor padrão de corte encontrado (a^* : melhor padrão de corte encontrado, k^* : tipo da placa referente ao melhor padrão).
- Corte a placa k^* , conforme o padrão a^* , o maior número

de vezes possível ($\beta^* = \min\left\{\left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor, B_k\right\}$). Durante este processo a demanda das peças e a disponibilidade da placa k^* é atualizada $b_i = b_i - \beta^* \cdot a_i, i = 1, \dots, m; B_{k^*} = B_{k^*} - \beta^*$.

Fim enquanto

Fim

7.2. Exemplo Prático

A seguir, nas Tabelas 7.1 e 7.2, são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo guloso, usando dados fornecidos por uma Indústria de Esquadrias Metálicas (Icometal Indústria e Comércio de Esquadrias Metálicas Ltda., situada em Campinas). A linguagem utilizada na implementação computacional, assim como o equipamento utilizados estão relacionados no capítulo 6.

A rigor, os dados fornecidos pela empresa são de clientes variados. Um pré-processamento foi feito para agrupar itens idênticos e uma ordenação (comprimentos em ordem crescente) nos itens.

Para este exemplo foram gerados 34 tipos de padrões de corte, em 4.17s, com uma perda total de 18.32% (Figura 7.2).

Tabela 7.1 - Dados das placas ($k=4$)

Placa	L_j	W_j	B_j
1	1000	2000	105
2	1200	2000	85
3	1000	3000	70
4	1200	3000	58

Tabela 7.2 - Dados das peças ($m=35$)

i	ℓ_i	w_i	b_i
1	350	780	2
2	350	1000	4
3	500	900	24
4	500	1845	4
5	580	1845	2
6	670	780	2
7	670	1000	4
8	730	780	2
9	730	840	24
10	730	1425	24
11	730	2000	50
12	765	840	2
13	765	2000	2
14	770	840	2
15	770	1430	2
16	770	2000	4
17	780	900	11
18	840	900	3

i	ℓ_i	w_i	b_i
19	840	1090	8
20	900	1000	2
21	900	1365	10
22	900	1430	6
23	900	1780	2
24	900	2000	70
25	910	1365	2
26	910	1785	2
27	910	2000	2
28	935	1365	2
29	935	1785	2
30	935	2000	2
31	1000	1090	32
32	1000	1175	2
33	1030	2020	2
34	1090	1430	8
35	1175	1780	2

TCOMETAL INDUSTRIA E COMERCIO DE ESQUADRIAS METALICAS LTDA	
Número de Peças:	4
Número de Peças:	35
Número de Padões de Corte:	34
Área Recortada:	484200000.00
Área Aproveitada:	393497100.00
Área Perdida:	88702900.00
Perda Percentual:	18.32%
Página/Página-Troca Página ESD-3a1	

Figura 7.2 - Relatório obtido com a execução do problema

Como o algoritmo é guloso, a perda dos primeiros padrões obtidos é pequena. Note, na Figura 7.3, que o padrão 1 se repete 12 vezes na placa (1000,2000), com perda 0.50%; o padrão 2 é repetido 2 vezes na placa (1200,2000), com perda 1.18% e, assim, sucessivamente.

Figura 7.3 - Seis melhores padrões de cortes

Nos últimos padrões de corte, a perda é muito grande (Figura 7.4), o que sugere um algoritmo interativo, de maneira que o usuário possa introduzir peças com valores de utilidade menores, seja sob a forma de novos pedidos ou de peças para estoque.

Figura 7.4 - Últimos padrões de cortes

Utilizando a heurística H6 apresentada no capítulo 5, que diminui o conjunto de discretização, obtiveram-se os resultados da Tabela 7.3. Nesta tabela a primeira coluna mostra a variação de δ , a segunda, a perda percentual obtida, a terceira, o número de padrões de corte (NPC) e, a última, o tempo computacional obtido. Note que, com $\delta=30\%$, o resultado obtido apresenta uma perda muito próxima da perda obtida, sem a diminuição dos conjuntos de discretização, com um tempo computacional inferior. Embora, do ponto de vista prático, a di-

minuição do tempo, neste caso, seja irrelevante, com o aumento de placas e peças, pode tornar-se significativo.

Tabela 7.3 - Resultados obtidos com a heurística H6

δ	Perda	NPC	t(s)
5%	18.92%	34	2.69
10%	18.52%	33	2.25
20%	19.02%	33	1.70
30%	18.42%	36	1.76

8. Conclusões e Perspectivas Futuras

A resolução de Problemas de Corte e Empacotamento é de grande importância técnica e econômica em aplicações industriais e, além disso, é um desafio acadêmico devido à dificuldade de encontrar métodos que apresentem soluções exatas em tempos computacionais razoáveis.

Este trabalho propôs a extensão da abordagem em grafo E/OU (Morabito, 1989, 1992; Arenales, 1993), para a resolução de Problemas de Corte e Empacotamento que envolvam cortes e objetos mais gerais, bem como processos de cortagem mais elaborados.

O estudo considerou problemas irrestritos e restritos, cortes guilhotinados e não-guilhotinados, estagiados e não-estagiados, entre outros. Em particular, a abordagem em grafo E/OU foi estendida para tratar os seguintes casos não considerados nos trabalhos anteriores:

- diferentes limitantes inferiores
(problema irrestrito e estagiado);
- problema restrito e estagiado;
- problema com placa defeituosa;
- problema com corte-cabeça;
- problema com limitação no número de tipos de itens;
- problemas não guilhotinado (com peças do tipo L).

Pôde-se verificar a versatilidade do método baseado na representação em grafo E/OU para tratar diversas situações do problema de corte e, também, que sua implementação computacional apresenta bons resultados, com tempos computacionais razoáveis, demonstrando ser uma poderosa ferramenta na resolução de problemas de corte e empacotamento.

Uma outra contribuição deste trabalho foi na investigação de diferentes tipos de limitantes no processo de busca, levando-se em conta as características de cada classe de problema.

Para a implementação computacional, desenvolveu-se uma estrutura de dados (apresentado no anexo 1) que trata a representação em grafo E/OU de maneira genérica, permitindo, assim, que se incluam restrições e diferentes itens sem muita dificuldade. Portanto, é possível adaptar, por exemplo, esta abordagem para o problema de corte tridimensional sem maiores dificuldades.

Como perspectivas para novas pesquisas, tem-se o problema com peças do tipo L, onde o cálculo dos limitantes inferiores podem ser melhorados. Uma alternativa é a combinação de peças de tipos diferentes, conforme a Figura 8.1, para formar uma solução homogênea composta (Figura 8.2). Isso pode ser uma alternativa mais eficiente do ponto de vista computacional, do que aumentar o limite de profundidade de busca em mais um nível no problema com solução homogênea simples.

Figura 8.1 - Combinação de diferentes tipos de peças

Figura 8.2 - Solução homogênea composta

A implementação do padrão de corte não-guilhotinado de 1^a ordem, seção 2.2.5, pode ser desenvolvida usando a estrutura de dados apresentada neste trabalho, incluindo algumas informações nos nós do grafo e no código computacional. Observe que este padrão pode ser gerado com o problema de peças do tipo L, implementado nesta tese.

Um outro tópico seria a investigação de buscas alternativas, visando diminuir o tempo computacional, tais como buscas híbridas, onde a combinação de *backtracking* e *hill-climbing* poderia ser feita até um certo nível de profundidade, ou dos tamanhos dos objetos intermediários, quando então os nós seriam resolvidos por programação dinâmica ou por alguma heurística mais elaborada, dependendo do problema.

Uma outra perspectiva para o uso da abordagem em grafo E/OU é na resolução do problema com padrão de corte tabuleiro. Este padrão de corte é do tipo guilhotinado 2-estágios, conforme ilustra a Figura 8.3. É importante em problemas de corte que surgem na indústria de móveis, pois apesar de apresentar perdas maiores do que padrões 2-estágios, é mais fácil de ser cortado, acelerando a produção em períodos de alta demanda. Isto pode ser fundamental, pois a serra pode ser o gargalo de produção (Morabito e Arenales, 2000).

Figura 8.3 - Padrão de corte tabuleiro

Há expectativas de que alguns outros problemas importantes de corte e empacotamento possam ser tratados pela abordagem em grafo E/OU, já que restrições de processo de corte puderam ser incorporadas na busca sem dificuldades, como demonstrado nesta tese, tais como, problemas de empacotamento tridimensionais, onde ocorrem restrições de peso e estabilidade. Além disso, o empacotamento deve levar em conta uma ordem de desempacotamento. Isto poderia ser visto como um problema de corte de objeto não homogêneo; já padrões de corte gerando o mesmo número de itens não são equivalentes. Além do problema de corte com itens do tipo L, tratado nesta tese, outras "irregularidades" podem ser investigadas.

Anexo 1

Este anexo contém as seções 4 e 5.1 do relatório técnico de Gonçalves-Vianna *et al.* (2000a). A seção 4, do relatório técnico, trata da estrutura de dados e da implementação do algoritmo da abordagem em grafo E/OU estudado nesta tese. A seção 5.1 apresenta os resultados obtidos com a geração do conjunto de discretização.

4. Implementação Computacional

O algoritmo descrito foi implementado na linguagem Pascal, utilizando o compilador Borland Pascal versão 7.0, em um microcomputador Pentium, 167 Mhz com 32 Mbytes de RAM.

Inicialmente, foi feita a implementação da geração do conjunto de discretização utilizando as fórmulas de Christofides e Whitlock (1977), descritas na seção 3.2.1 de Gonçalves-Vianna *et al.* (2000a).

Como as fórmulas são recursivas, escreveu-se uma rotina de geração de cortes também usando a técnica de programação de recursividade.

A recursividade é uma técnica em que uma rotina, no processo de execução de suas tarefas, chama a si própria. Por este motivo, é necessária uma área de memória para salvar

o seu contexto antes dessa chamada recursiva (pilha de registros), a fim de que este possa ser restaurado ao final dessa chamada. Sua principal vantagem é a redução do código-fonte da rotina; entretanto, o uso de recursividade apresenta algumas desvantagens, entre elas o baixo desempenho na execução, devido ao tempo gasto no gerenciamento da pilha de registros e o espaço por ela ocupado, e a dificuldade de depuração dos programas (Villas et al., 1993).

Foram feitos diversos testes com a rotina recursiva, observando-se que o tempo computacional aumenta exponencialmente em função da dimensão do problema (veja seção 5.1 de Gonçalves-Vianna et al. (2000a)). Os dados foram gerados novamente, em um microcomputador Pentium II, com 128 Mbytes de RAM; entretanto o tempo computacional obtido é grande quando comparado com o tempo obtido de uma versão não recursiva.

Portanto, apesar da clareza e elegância do algoritmo recursivo na implementação das fórmulas de Christofides e Whitlock (1977), o desempenho ficou muito longe do esperado.

A rotina foi, então, implementada de maneira iterativa; o código ficou bem mais extenso e não tão fácil de se compreender, mas o desempenho do algoritmo compensa estas perdas.

Exemplos de comparações entre as duas técnicas de programação, recursiva e iterativa, para a geração do conjunto de discretização são vistas no próximo capítulo.

A estrutura de dados utilizada para o armazenamento dos conjuntos de discretização (X e Y), lembrando que eles são definidos inicialmente e, durante o processo de busca, são facilmente determinados para qualquer nó (x,y), foi uma lista seqüencial usando alocação estática. Neste tipo de alocação, a estrutura de dados utilizada deve estar completamente definida e é alocado um espaço finito e pré-determinado de memória, não permitindo alteração durante o processo de execução do programa.

No caso do conjunto de discretização, foi definido um vetor (em Pascal, *array*) com no máximo 100 posições. Portanto, se o conjunto tiver apenas 20 elementos, as demais posições ficarão vazias, porém ocupando espaço de memória. Caso seja necessário, não é possível ter mais de 100 cortes, já que o tamanho máximo do vetor deve ser definido durante a fase de programação. A vantagem desta estrutura de dados é o acesso direto a cada posição do vetor. Um exemplo deste tipo de estrutura armazenando um vetor de números inteiros é ilustrado pela Figura A.1.

Figura A.1 - Lista seqüencial

Também implementou-se a geração do conjunto utilizando uma lista encadeada usando alocação dinâmica (Figura A.2). Este tipo de alocação permite que a estrutura de dados não tenha um tamanho pré-definido, ficando limitado à memória do computador.

Figura A.2 - Lista encadeada

Note que são alocados apenas os elementos que são definidos; entretanto, para acessar o último elemento da lista, é necessário percorrer todos os anteriores. Este tipo de estrutura também oferece uma flexibilidade para o caso de muitas inserções e remoções de elementos na lista.

Um outro tipo de estrutura de dados, que pode ser utilizado para a representação do conjunto de discretização, é uma árvore binária ordenada (Figura A.3). Nesta estrutura, assim como na estrutura com listas encadeadas, não é necessário definir seu tamanho previamente.

Figura A.3 - Árvore binária ordenada

Este tipo de estrutura necessita de um tempo computacional maior que a lista encadeada para sua construção, entretanto, como ela está ordenada, o tempo computacional para a procura de um elemento é menor.

No caso do conjunto de discretização, após a implementação usando dois tipos de estrutura de dados, lista seqüencial e lista encadeada, optou-se pela primeira, já que a heurística utilizada (vista na seção 3.3, de Gonçalves-Vianna et al., 2000a) limita o tamanho do conjunto e o acesso aos elementos da lista seqüencial é mais rápido, uma vez que, depois dos conjuntos de discretização gerados, basta percorrê-los para gerar os conjuntos de um determinado nó.

Na implementação do algoritmo de busca, utilizou-se alocação dinâmica para a representação do grafo, tendo sido armazenados os seguintes dados para cada nó:

Informações do nó N
Endereço do nó N_1
Endereço do nó N_2

Figura A.4 - Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas guilhotinados

As informações do nó N se referem à dimensão do objeto representado pelo nó, ao valor $v(N)$ obtido até o nó e aos limitantes inferior e superior, entre outros dados. Este conjunto de informações varia de acordo com o problema e as restrições impostas por ele.

Este tipo de estrutura permite que se tenha um grafo gerado conforme a Figura A.5. Lembre que o algoritmo armazena um único caminho do grafo.

Figura A.5 - Estrutura do nó armazenado

Com este tipo de estrutura, se o problema permitir gerar mais que dois nós (por exemplo, o problema de corte não-guilhotinado), basta que se inclua nos dados do nó o endereço dos demais nós, ou seja,

Informações do nó N
Lista encadeada com o endereço dos nós gerados

Figura A.6 - Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas não-guilhotinados

Note que o tamanho da lista encadeada depende do número de sucessores e, no caso do corte não-guilhotinado, cada nó do grafo gera no máximo 5 novos nós (Figura A.7).

Figura A.7 - Estrutura do nó gerado pelo corte não-guilhotinado

A implementação do problema bidimensional irrestrito foi comparada com a implementação feita por Morabito (1992). Nesta implementação, a estrutura de dados foi definida de forma que cada nó do grafo armazene as informações dos dois nós (N_1 e N_2) gerados após o corte, ou seja,

Informações do nó anterior
Informações sobre o nó N_1
Informações sobre o nó N_2

Figura A.8 - Dados armazenados em cada nó do grafo em problemas guilhotinados (Morabito, 1992)

que pode ser esquematizada pela Figura A.9.

Figura A.9 - Estrutura gerada por Morabito (1992)

Para o problema de corte bidimensional guilhotinado, estes dois tipos de estruturas são equivalentes (Figuras A.5 e A.9). Entretanto, para um problema que permita outros tipos de corte, por exemplo, o corte não-guilhotinado, esta segunda estrutura necessita de mais memória.

Os resultados computacionais obtidos com esta implementação são apresentados na próxima seção.

5. Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais da geração do conjunto de discretização (seção 3.2.1 de Gonçalves-Vianna, 2000a) e do algoritmo BT-HC descrito na seção 3.2.4 (Gonçalves-Vianna, 2000a) para o problema de corte bidimensional irrestrito, alterando o modo de seleção de pontos do conjunto de discretização.

5.1. Conjunto de discretização

Para análise dos resultados obtidos na geração do conjunto de discretização foram gerados exemplos aleatoriamente. Estes exemplos foram divididos em duas classes, exemplos pequenos e grandes, de acordo com Morabito (1992).

- Exemplos pequenos: nesta classe de problema, os conjuntos de discretização resultam com poucos elementos. Os valores ℓ_i e w_i , $i=1, \dots, m$, foram gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos $[0.25L, 0.75L]$ e $[0.25W, 0.75W]$, respectivamente.
- Exemplos grandes: os conjuntos de discretização resultam com muitos elementos, tendo sido os valores ℓ_i e w_i , $i=1, \dots, m$, gerados aleatoriamente e, em seguida, arredondados, dentro dos intervalos $[0.10L, 0.50L]$ e $[0.10W, 0.50W]$, respectivamen-

te.

A Tabela A.1 mostra os resultados obtidos na geração dos conjuntos de discretização dos problemas pequenos. A fórmula utilizada para o cálculo foi apresentada na seção 3.2.1 (de Gonçalves-Vianna, 2000a), entretanto, para a geração das Tabelas A.1 e A.2, não se considerou a regra de simetria. A tabela foi dividida em 9 colunas, onde a primeira indica o número de exemplos contidos numa classe de problemas e, a segunda, terceira e quarta se referem ao número de peças (m) e dimensões da placa (L, W), respectivamente. Nas duas colunas seguintes, tem-se a média aritmética do número de elementos dos conjuntos X e Y juntamente com o desvio padrão. As últimas três colunas referem-se ao tempo computacional obtido, em segundos, utilizando na geração dos conjuntos a recursividade com alocação dinâmica (1), a recursividade com alocação estática (2) e o algoritmo iterativo com alocação estática (3). Note que, são apresentados dois tempos computacionais distintos para cada classe de problemas, o tempo obtido em um microcomputador Pentium, 167 Mhz, com 32 Mbytes de RAM (linha superior), e o tempo obtido com um microprocessador Pentium II, 200 Mhz, com 128 Mbytes de RAM (linha inferior).

Nas tabelas, os tempos computacionais indicados por (*) foram superiores a uma hora.

Tabela A.1 - Discretização nos exemplos pequenos

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	5	100	100	15.40(5.28)	13.50(5.52)	0.05 0.02	0.06 0.03	0.00 0.00
100	10	100	100	34.70(8.34)	36.50(7.74)	0.29 0.10	0.16 0.05	0.00 0.00
100	20	100	100	56.80(2.93)	56.20(3.52)	1.44 0.35	0.78 0.17	0.00 0.01
100	30	100	100	65.90(2.34)	65.20(2.23)	6.06 0.86	2.92 0.41	0.01 0.00
100	5	1000	1000	17.70(6.83)	15.30(9.02)	1.16 0.37	0.56 0.17	0.00 0.01
100	10	1000	1000	48.10(13.50)	49.50(19.58)	3.23 1.00	1.53 0.46	0.01 0.01
100	20	1000	1000	139.80(31.88)	143.30(22.67)	13.81 3.36	7.44 1.52	0.01 0.01
100	30	1000	1000	250.00(36.00)	280.00(28.00)	63.89 7.96	29.85 3.89	0.02 0.02
100	50	1000	1000	359.20(32.23)	405.20(25.69)	194.12 26.74	95.49 13.38	0.06 0.03
50	5	3000	3000	12.80(6.21)	9.40(4.22)	2.64 0.90	1.24 0.44	0.01 0.01
50	10	3000	3000	49.00(22.91)	54.20(29.58)	10.12 2.91	4.96 1.31	0.02 0.00
50	20	3000	3000	218.00(71.61)	135.20(34.37)	37.23 9.62	18.45 4.36	0.07 0.01
50	30	3000	3000	365.20(67.49)	263.00(37.14)	139.87 21.73	71.44 10.68	0.09 0.02
50	50	3000	3000	660.60(37.98)	700.00(98.68)	(*) 68.60	(*) 35.03	0.13 0.05
50	50	5000	5000	842.80(109.21)	1005.20(165.39)	(*) 132.35	(*) 66.13	0.23 0.09

Tabela A.2 - Discretização nos exemplos grandes

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	5	100	100	49.80(10.65)	52.40(17.96)	1.54 0.43	0.71 0.20	0.00 0.00
100	10	100	100	73.70(4.17)	76.00(6.23)	10.45 2.27	4.74 1.03	0.00 0.00
100	20	100	100	83.70(3.61)	84.20(2.23)	51.94 13.70	23.55 6.17	0.00 0.00
100	30	100	100	88.20(1.17)	88.50(1.28)	190.09 71.55	99.34 32.27	0.01 0.00
100	5	1000	1000	70.70(42.67)	97.40(70.70)	11.57 4.09	5.74 1.86	0.01 0.01
100	10	1000	1000	323.40(130.66)	276.30(60.32)	45.03 15.67	22.09 7.05	0.00 0.01
100	20	1000	1000	541.30(65.84)	565.10(91.14)	403.91 171.32	196.94 76.92	0.03 0.01
100	30	1000	1000	656.50(17.50)	666.00(23.00)	(*) 384.67	(*) 171.71	0.06 0.00
100	50	1000	1000	735.80(29.92)	756.40(11.72)	(*) 915.12	(*) 303.01	0.09 0.04
50	5	3000	3000	124.40(74.95)	101.80(69.71)	49.63 16.40	23.23 7.42	0.01 0.01
50	10	3000	3000	364.00(34.97)	432.60(213.94)	(*) 31.64	(*) 14.23	0.05 0.03
50	20	3000	3000	1329.00(133.43)	1337.00(224.56)	(*) 412.44	(*) 185.21	0.10 0.04
50	30	3000	3000	1804.80(147.21)	1757.00(115.54)	(*) 1019.23	(*) 433.09	0.15 0.06
50	50	3000	3000	2076.80(55.36)	1898.40(72.17)	(*) (*)	(*) (*)	0.25 0.09
50	50	5000	5000	2898.00(61.24)	2880.80(186.17)	(*) (*)	(*) (*)	0.60 0.15

Observe que o tempo computacional para a geração dos conjuntos de discretização cresce exponencialmente com o tamanho do problema. A execução dos problemas em processadores mais velozes (tempos computacionais apresentados na linha inferior de cada classe de problema) não torna viável a utiliza-

ção da técnica de recursividade, pois apesar do tempo computacional diminuir bastante na execução destes problemas, ele ainda é muito grande em relação ao tempo obtido com o algoritmo recursivo, além de na prática ser inviável, pois os computadores utilizados têm uma memória menor que 128 Mbytes. Logo, pode-se concluir que a aplicação da recursividade na geração dos conjuntos não é um bom exemplo de sua utilização, sendo de grande valia para outras aplicações.

Nos gráficos A.1 e A.2, a seguir, é possível observar que o tempo cresce exponencialmente conforme o tamanho do problema. Note também que o uso de um microprocessador mais veloz e uma quantidade maior de memória RAM diminui significativamente o tempo computacional, porém ainda é muito maior comparado ao tempo obtido com o processo iterativo.

Gráfico A.1 - Discretização nos exemplos pequenos

Gráfico A.2 - Discretização nos exemplos grandes

A seguir, nas Tabelas A.3 e A.4, os conjuntos foram novamente gerados, considerando a regra de simetria,

apresentada na seção 3.2.1 (de Gonçalves-Vianna, 2000a). O tamanho dos conjuntos diminui visivelmente, assim como o tempo computacional, resultando na diminuição do espaço de busca do problema.

Tabela A.3 - Discretização nos exemplos pequenos (com simetria)

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	5	100	100	2.80 (0.75)	2.50 (1.12)	0.03 0.01	0.02 0.00	0.00 0.00
100	10	100	100	5.40 (1.69)	6.20 (1.17)	0.05 0.01	0.03 0.00	0.00 0.00
100	20	100	100	11.00 (1.26)	10.20 (1.66)	0.17 0.03	0.08 0.01	0.00 0.00
100	30	100	100	16.60 (1.62)	16.10 (1.76)	0.55 0.04	0.27 0.02	0.00 0.00
100	5	1000	1000	2.90 (1.37)	2.20 (1.40)	0.24 0.05	0.13 0.03	0.00 0.00
100	10	1000	1000	5.00 (1.26)	5.70 (1.35)	0.51 0.11	0.25 0.05	0.01 0.00
100	20	1000	1000	10.40 (2.46)	9.70 (2.19)	1.37 0.25	0.64 0.13	0.00 0.00
100	30	1000	1000	16.00 (1.43)	17.50 (1.55)	2.88 0.41	2.72 0.24	0.03 0.00
100	50	1000	1000	23.00 (2.83)	26.00 (3.16)	11.05 0.82	4.76 0.46	0.01 0.00
50	5	3000	3000	2.00 (1.41)	1.60 (1.36)	0.68 0.16	0.35 0.09	0.00 0.00
50	10	3000	3000	4.80 (2.23)	5.40 (2.42)	1.19 0.35	0.80 0.15	0.01 0.00
50	20	3000	3000	10.80 (1.17)	9.40 (2.24)	3.98 0.72	1.87 0.34	0.00 0.00
50	30	3000	3000	15.60 (2.42)	13.80 (1.72)	16.12 1.20	7.82 0.67	0.00 0.00
50	50	3000	3000	25.00 (1.90)	24.60 (3.01)	29.63 2.40	14.31 1.32	0.02 0.02
50	50	5000	5000	25.80 (2.79)	26.20 (3.87)	51.60 4.28	24.48 2.34	0.03 0.02

Tabela A.4 - Discretização nos exemplos grandes (com simetria)

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	5	100	100	12.20(3.66)	14.10(7.49)	0.04 0.01	0.03 0.01	0.00 0.00
100	10	100	100	24.00(3.87)	26.10(6.17)	0.19 0.04	0.09 0.02	0.00 0.00
100	20	100	100	33.70(3.61)	34.20(2.23)	0.86 0.14	0.36 0.06	0.01 0.00
100	30	100	100	38.20(1.17)	38.50(1.28)	2.09 0.33	1.04 0.16	0.00 0.00
100	5	1000	1000	10.90(5.84)	15.10(9.37)	0.35 0.15	0.29 0.07	0.00 0.00
100	10	1000	1000	37.90(20.41)	29.00(7.46)	1.48 0.39	0.68 0.18	0.01 0.00
100	20	1000	1000	84.10(31.19)	104.10(46.35)	6.23 1.32	3.06 0.60	0.01 0.00
100	30	1000	1000	157.00(17.00)	166.00(23.00)	19.01 3.07	8.96 1.46	0.03 0.02
100	50	1000	1000	235.80(29.92)	256.40(11.72)	79.46 10.95	38.94 5.32	0.02 0.01
50	5	3000	3000	16.80(8.30)	15.00(8.49)	2.19 0.54	1.01 0.24	0.01 0.01
50	10	3000	3000	28.40(1.36)	33.60(14.01)	3.63 0.99	1.70 0.46	0.01 0.00
50	20	3000	3000	121.60(32.78)	133.00(53.56)	20.04 4.19	8.73 1.90	0.02 0.01
50	30	3000	3000	340.80(113.39)	301.20(77.90)	63.50 13.58	30.78 6.33	0.04 0.01
50	50	3000	3000	577.00(55.13)	405.00(66.84)	158.14 33.18	123.41 16.14	0.07 0.02
50	50	5000	5000	558.00(130.33)	517.00(148.21)	1045.16 40.49	516.74 20.16	0.10 0.03

Entretanto, nos exemplos, quando $L > 100$ (comprimento) ou $W > 100$ (largura), o tamanho do conjunto de discretização é muito grande, o que, às vezes, inviabiliza o processo de busca. Note nestas tabelas que com o uso da simetria, o tempo computacional utilizando a técnica de recursividade di-

minuiu bastante, sendo nos problemas pequenos, muitas vezes próximos dos tempos obtidos com o processo iterativo.

Utilizando a heurística H3, apresentada na seção 3.3 (de Gonçalves-Vianna, 2000a), que limita o tamanho dos conjuntos de discretização, obtêm-se os resultados apresentados nas Tabelas A.5 e A.6, com $|X| < 100$ e $|Y| < 100$.

Tabela A.5 - Discretização nos exemplos pequenos com $|X| < 100$ e $|Y| < 100$ (Heurística H3)

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	20	1000	1000	89.10(4.23)	87.40(5.78)	13.02 3.37	12.74 3.52	0.03 0.01
100	30	1000	1000	88.50(1.50)	97.00(1.00)	158.87 7.96	82.30 14.60	0.06 0.01
100	50	1000	1000	93.40(4.20)	94.60(5.18)	304.12 26.73	419.75 62.33	0.04 0.02
50	20	3000	3000	89.60(6.53)	86.80(10.54)	48.28 9.63	34.65 9.37	0.08 0.02
50	30	3000	3000	92.30(3.74)	90.20(6.14)	147.06 21.75	206.08 39.03	0.11 0.02
50	50	3000	3000	91.80(3.94)	93.50(3.61)	(*) 68.65	(*) 189.46	0.17 0.06
50	50	5000	5000	92.80(4.83)	92.10(5.63)	2040.01 132.35	4265.03 296.12	3.06 0.09

O tempo computacional com o uso da heurística de Beasley (1985) cresce um pouco com o uso da técnica iterativa, mas também com a técnica recursiva, já que o processo repete-se várias vezes até que o tamanho do conjunto de discretização seja menor que o desejado. Com isto, quando compara-se os tempos computacionais de ambas as técnicas, descarta-se mesmo a recursiva (Gráficos A.3 e A.4).

Tabela A.6 - Discretização nos exemplos grandes com
 $|X| < 100$ e $|Y| < 100$ (Heurística H3)

Qte	m	L	W	$ X $ (DP)	$ Y $ (DP)	t(s) (1)	t(s) (2)	t(s) (3)
100	10	1000	1000	83.10(12.59)	71.30(12.02)	87.06 15.64	16.70 3.76	0.02 0.01
100	20	1000	1000	85.20(7.97)	88.30(8.23)	1808.47 171.03	127.99 14.54	0.03 0.01
100	30	1000	1000	89.00(1.00)	94.50(4.50)	(*) 502.22	484.77 39.17	0.02 0.01
100	50	1000	1000	91.00(1.63)	94.33(0.94)	(*) 613.23	(*) 97.12	0.09 0.01
50	5	3000	3000	50.00(15.34)	58.60(23.09)	77.45 16.40	19.42 5.05	0.02 0.02
50	10	3000	3000	80.00(13.48)	84.80(12.70)	109.60 31.62	36.43 9.21	0.05 0.01
50	20	3000	3000	88.67(11.09)	89.00(8.83)	2603.17 273.64	319.26 40.37	0.09 0.03
50	30	3000	3000	93.67(4.50)	93.00(5.35)	(*) 1092.23	10391.1 234.37	0.08 0.03
50	50	3000	3000	92.50(1.50)	96.00(2.00)	(*) 1590.12	(*) 407.22	0.08 0.03
50	50	5000	5000	94.80(5.21)	92.00(4.67)	(*) 2011.34	(*) 576.33	0.13 0.04

Gráfico A.3 - Discretização nos exemplos pequenos com
 $|X| < 100$ e $|Y| < 100$ (Heurística H3)

Gráfico A.4 - Discretização nos exemplos grandes com $|X| < 100$ e $|Y| < 100$ (Heurística H3)

Anexo 2

Formulação Matemática do Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado Restrito em 2-Estágios

Considere uma placa de dimensões (L, W) e m peças de dimensões (ℓ_i, w_i) com valor de utilidade v_i , $i=1, \dots, m$, e b_i a quantidade máxima de peça do tipo i no padrão.

O problema de corte bidimensional guilhotinado restrito em 2-estágios tem por objetivo determinar o padrão de corte ótimo de modo que a soma dos valores de utilidades das peças alocadas na placa seja maximizada e, as restrições de limitação do número de peças alocadas bem como do número de estágios não sejam violadas.

Modelo Matemático

O modelo matemático é semelhante ao modelo irrestrito, apresentado na seção 4.2.3, incluindo apenas as restrições de limitação do número máximo de peças:

$$a_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

onde a_i é o número de peças do tipo i no padrão. Note que estas restrições são não-lineares.

Assim, a formulação matemática do problema é:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \cdot v_i \\ & \text{sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{kj}^i \cdot \ell_i \leq L, j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K_j \\ & \quad \sum_{j=1}^m w_j \cdot \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{kj} \leq W \\ & \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ & \quad \alpha_{kj}^i \geq 0, \beta_{kj} \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

O modelo matemático do problema é não-linear, dificultando sua resolução. Gramani (1997) propôs um método de resolução baseado na Relaxação Lagrangiana e no Método do Subgradiente.

Relaxação Lagrangiana e Método do Subgradiente

Utilizando Relaxação Lagrangiana, inicialmente, relaxa-se as restrições não-lineares do modelo de corte, reduzindo o problema a uma sequência de problemas irrestritos.

A função lagrangiana é dada por:

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \cdot v_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{kj}^i \cdot \beta_{kj} \right)$$

E, o problema lagrangiano é:

$$\begin{aligned}
 h(\lambda) = \text{maximizar} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{K_j} (v_i - \lambda_i) \alpha_{kj}^i \beta_{kj} \cdot v_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot b_i \\
 \text{sujeito a :} \quad & \sum_{i=1}^m \alpha_{kj}^i \cdot \ell_i \leq L, j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K_j \\
 & \sum_{j=1}^m w_j \cdot \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{kj} \leq W \\
 & \alpha_{kj}^i \geq 0, \beta_{kj} \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Note que para cada λ , o problema lagrangiano produz subproblemas irrestritos que podem ser resolvidos pelo método da seção 4.2.3. e, fornece um limitante superior da solução ótima do problema restrito. Para determinar o multiplicador lagrangiano que fornece o menor limitante superior utiliza-se o método do subgradiente. Para mais detalhes, veja Gramani (1997) e Gonçalves-Vianna (2000b).

Referências Bibliográficas

- ARENALES, M. *Uma Teoria para o Problema de Corte*. São Carlos: USP, 1993. Tese (Livre-docência) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- ARENALES, M., MORABITO, R. An AND/OR-graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*. 84, 599-617, 1995.
- ARENALES, M., MORABITO, R., YANASSE, H. (eds) Special issue: cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*. 19(2), 107-299, 1991.
- BEASLEY, J. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*. 36, 297-306, 1985.
- BISCHOFF, E., WAESCHER, G. (eds) Special issue: cutting and packing. *European Journal of Operational Research*. 84(3), 1995.
- BROWN, A. *Optimum Packing and Depletion*. New York: Elsevier Science, 1971.

- CARNIERI, C., MENDOZA, G.A., LUPOLD, W.G. Optimal Cutting of Dimension Parts from Lumber with defect: a Heuristic Solution Procedure. *Forest Products Journal*. 66-72, 1993.
- CHRISTOFIDES, N., HADJICONSTANTINO, E. An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts. *European Journal of Operational Research*. 83, 21-38, 1995.
- CHRISTOFIDES, N., WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*. 25, 30-44, 1977.
- DOWSLAND, K., DOWSLAND, W. Packing Problems. *European Journal of Operational Research*. 56, 2-14, 1992.
- DYCKHOFF, H. A Typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 44, 145-159, 1990.
- DYCKHOFF, H., ABEL, D., GAT, T. Trim Loss and Related Problems. *Omega*. 13, 59-72, 1985.
- DYCKHOFF, H., FINKE, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Heidelberg: Springer, 1992.
- DYCKHOFF, H., SCHEITHAUER, G., TERNO, J. *Cutting and Packing*. In *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, edited by M. Amico, F. Maffioli and S. Martello. New York: Wiley, 393-414, 1997.
- DYCKHOFF, H., WAESCHER, G. (eds) Special issue: cutting and packing. *European Journal of Operational Research*. 44(2), 1990.

GILMORE, P., GOMORY, R. A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem. *Operations Research*. 9, 849-859, 1961.

GILMORE, P., GOMORY, R. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II. *Operations Research*. 11, 863-888, 1963.

GILMORE, P., GOMORY, R. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*. 14, 94-120, 1965.

GILMORE, P., GOMORY, R. The Theory and Computation of Knapsack Functions. *Operations Research*. 14, 1045-1074, 1966.

GOLDEN, B. Approaches to the cutting stock problem. *AIIE Transactions*. 8, 265-274. 1976.

GONÇALVES-VIANNA, A. C., ARENALES, M., MORABITO, R. Estrutura de dados utilizada na abordagem em Grafo E/OU para a Resolução de Problemas de Corte. Relatório Técnico nº 126, ICMC-USP. 2000a.

GONÇALVES-VIANNA, A. C., ARENALES, M. e GRAMANI, M. C. N. *Two-Stage and Constrained Two-Dimensional Guillotine Cutting Problems*, artigo em preparação. 2000b.

GRAMANI, M. C. N. *Problema de corte bidimensional guilhotinado e restrito em 2-estágios*. São Carlos: USP, 1997. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997.

- HAHN, S. On the Optimal Cutting of Defective Sheets. *Operations Research*. 16, 1100-1114, 1968.
- HERZ, J. Recursive Computational Procedure for Two Dimensional Stock Cutting. *IBM Journal of Research and Development*. 16, 462-469, 1972.
- HIFI, M. The DH/KD algorithm: a hybrid approach for unconstrained two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*. 97, 41-52, 1997.
- HINXMAN, A. The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Research*. 5, 8-18, 1980.
- LIROV, Y. (ed.) Special issue: cutting problem, geometric resource allocation. *Mathematical and Computer Modelling*. 16(1), 1992.
- MARTELLO, S. (ed.) Special issue: Knapsack, packing and cutting - Part I: One dimensional knapsack problems. *INFOR*, 32(2), 1994a.
- MARTELLO, S. (ed.) Special issue: Knapsack, packing and cutting - Part II: Multidimensional knapsack and cutting stock problems. *INFOR*. 32(4), 1994b.
- MORABITO, R. *Corte de Estoque Bidimensional*. São Carlos: USP, 1989. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989.
- MORABITO, R. *Uma Abordagem em Grafo E/OU para o Problema do Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. São Carlos: USP, 1992. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.

- MORABITO, R., ARENALES, M. An AND/OR-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*. 1, 59-73, 1994.
- MORABITO, R., ARENALES, M. Performance of two heuristics for solving large scale two-dimensional guillotine cutting problems. *INFOR*. 33(2), 145-155, 1995.
- MORABITO, R., ARENALES, M. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach. *European Journal of Operational Research*. 94, 548-560, 1996.
- MORABITO, R., ARENALES, M. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*. 38(12), 2725-2742, 2000.
- MORABITO, R., ARENALES, M., ARCARO, V. F. An AND-OR-Graph representation to generate cutting patterns for the two-dimensional cutting problem. In: *Alio-Euro Workshop on Practical Combinatorial Optimization*. Rio de Janeiro, 1-20, 1989.
- MORABITO, R., ARENALES, M., ARCARO, V. F. An AND-OR-graph approach for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*. 58, 263-271, 1992.
- MORABITO, R., GARCIA, V. The cutting stock problem in a hard-board industry: a case study. *Computers & Operations Research*. 25, 469-485, 1998.
- MORABITO, R., MORALES, S. A simple and effective recursive procedure to the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*. 49, 819-828, 1998.

- MORABITO, R., MORALES, S., WIDMER, J. A. Loading optimization of palletized products on trucks. *Transportation Research. Part E* 36, 285-296, 2000.
- MUKHACHEVA, E.A (ed.) *Decision Making Under Conditions of Uncertainty: Cutting-Packing Problems*. Ufa, Russia: The International Scientific Collection, 1997.
- NILSSON, N.J. *Problem-solving methods in artificial intelligence*. New York: McGraw-Hill, 1971.
- OLIVEIRA, J., FERREIRA, J. An improved version of Wang's algorithm for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*. 44, 256-266, 1990.
- PEARL, J. *Heuristic: intelligence search strategies for computer problem solving*. Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1984.
- RICH, E. *Artificial Intelligence*. New York: McGraw-Hill, 1983.
- SALKIN, H., DE KLUYVER, C. *The Knapsack Problem: A Survey*. *Naval Research Logistics Quartely* 22, 127-144, 1975.
- SALOMÃO, S. N. A. *Uma abordagem em grafo E/OU para o problema de corte bidimensional não-guilhotinado*. São Carlos: USP, 1993. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- SICUP, Special Interest Group on Cutting and Packing,
<http://www.prodlog.wiwi.unihalle.de/sicup>.
- SWEENEY, P., PATERNOSTER, E. Cutting and packing problems: a

categorized application-oriented research bibliography.

Journal of the Operational Research Society. 43, 691-706.,
1992.

VILLAS, M. V., FERREIRA, A. G. M., LEROY, P. G., MIRANDA, C.,
BOCKMAN, C. L. *Estruturas de dados: conceitos e técnicas de
implementação.* Rio de Janeiro: Campus, 1993.

WANG, P. Two algorithms for constrained two-dimensional
cutting stock problems. *Operations Research.* 31, 573-587,
1983.