SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20 . 02 . 2003

Assinatura: *Ana Paula Jampaio Jurema*

Estimação não-paramétrica da taxa de falha acumulada de um processo pontual

*Fabrizio Teixeira Mendes**

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão P. Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos
Fevereiro/2003

* Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior

Prof. Dr. José Galvão Leite

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

À minha família,

minha namorada Roberta,

... e a todos os meus amigos,

Agradecimentos

À minha família, fundamental e sempre presente em todos os momentos. À meu orientador Dorival Leão pela oportunidade, amizade, por sua dedicação e pelo seu empenho na realização desse trabalho. Aos professores Jorge Alberto Achcar e José Galvão Leite participantes da banca de qualificação. Aos professores Marinho Gomes de Andrade e Reiko Aoki pelas disciplinas ministradas e pela constante ajuda que nos têm dado. À meu ex-orientador de iniciação científica Sérgio Luis Zani. À alguns ex-professores meus da graduação Sandra Semensatto de Godói, Janete, Renata Meneghetti e Sueli Mieke. À meus ex-companheiros de graduação e à amiga Livia que já não está mais aqui. Aos funcionários da biblioteca pelo auxílio que nos têm dado. À todos os funcionários do ICMC. À todo o pessoal legal do laboratório da Estatística (em ordem alfabética), Aline, Flávia, Gecirlei, Paulo, Ricardo, pela ajuda e pela amizade e a todos os amigos que, de uma forma ou outra contribuíram com um pedacinho para essa conquista. Desculpem-me se por acaso eu tiver esquecido alguém.

Resumo

Vários autores tem construído estimadores de Bayes não-paramétricos para a função de distribuição acumulada. A distribuição à priori tem, por exemplo, sido processos de Dirichlet, processos neutral to the right. Neste trabalho nós estudamos o problema de achar estimadores de Bayes não-paramétricos para a taxa de falha acumulada de um processo pontual baseado no modelo de intensidade multiplicativo de Aalen. Desta forma nós consideramos uma classe conjugada de processos de Lévy chamados de processos beta e apresentamos fórmulas para obter um processo posterior. O estimador de Bayes é comparado com dois outros estimadores não-paramétricos, Kaplan-Meier e Nelson-Aalen e um estimador paramétrico, a taxa de falha acumulada de uma distribuição Weibull.

Abstract

Several authors have constructed nonparametric Bayes estimators for a cumulative distribution function. The prior distribution have, for example, been Dirichlet processes, neutral to the right processes. In this work we studied the problem of finding nonparametric Bayes estimator to cumulative rate function of the a point processes based in the Aalen's multiplicative intensity model. This form we considered a conjugate class of Lévy processes called beta processes and presented formulas for obtaining a posterior processes. The Bayes estimator is compared with two nonparametric estimator, Kaplan-Meier and Nelson-Aalen and one parametric estimator, the cumulative rate function of the Weibull distribution.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estimadores Empíricos	2
1.1.1	Estimador de Kaplan-Meier	3
1.1.2	Estimador de Nelson-Aalen	5
1.1.3	Análise dos Dados	7
1.2	A estimação não-paramétrica	11
1.2.1	Modelo Estatístico	15
1.2.2	Estimador de Bayes	17
2	O Processo Pontual	23
2.1	O Espaço de Trajetórias	23
2.2	Processo Pontual	29
2.3	Decomposição de Doob-Meyer	34
2.4	Taxa de Falha do Processo Pontual	40
2.5	Representação do Processo Pontual	42
3	Processos de Lévy Puro Salto	45
3.1	Introdução	45
3.2	Processos de Lévy Puro Salto	45
3.3	Representação do Processo de Lévy	52
3.4	Processos Beta	54
4	Inferência Bayesiana	57
4.1	Introdução	57
4.2	Estimação Bayesiana Não-Paramétrica	58
4.3	Estimador Bayesiano Não-Paramétrico para a Taxa de Falha Acumulada	60

5	Considerações Finais	69
5.1	Conclusões	69
5.2	Propostas Futuras	73
6	Apêndice	75
6.1	Espaço de Cantor	75
6.2	Alguns Resultados Utilizados	77
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1.1	Gráfico das estimativas da taxa de falha via Nelson-Aalen e Weibull	9
1.2	Gráfico das estimativas da função de confiabilidade	11
1.3	Gráfico das estimativas da taxa de falha acumulada	11
1.4	Martingale para a taxa acumulada de uma Weibull	14
1.5	Martingale para a taxa acumulada estimada via Kaplan-Meier	14
1.6	Gráficos da Taxa de Falha acumulada estimada via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen, Weibull e Bayesiano Empírico	21
4.1	Taxa de Falha Acumulada	66
4.2	Função de Confiabilidade	66
4.3	Taxa de Falha	67
5.1	Taxa de Falha Acumulada	70
5.2	Taxa de Falha	73

Lista de Tabelas

1.1	Tempos de Vida dos Freios em Teste	2
1.2	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Kaplan-Meier . . .	5
1.3	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Nelson-Aalen . . .	6
1.4	Estimativas da taxa de falha via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen e Weibull . . .	8
1.5	Estimativas da taxa de falha acumulada	10
4.1	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via estimador Bayesiano	64
4.2	Estimativas para a taxa de falha, taxa de falha acumulada e função de confiabilidade baseadas no estimador Bayesiano não-paramétrico	65
5.1	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Kaplan-Meier . . .	71
5.2	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Nelson-Aalen . . .	71
5.3	Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via estimador Bayesiano	72

Capítulo 1

Introdução

O estudo da inferência não paramétrica permite uma análise mais flexível e geral dos dados, pois ela não se prende a nenhum tipo de distribuição paramétrica. A estimação não-paramétrica possui boas propriedades mesmo para pequenas amostras, essa flexibilidade no entanto, é custosa pois devemos trabalhar sobre um espaço de funções. Quando fazemos a análise estatística através de modelos obtidos por famílias paramétricas de distribuições, estamos restringindo um espaço de dimensão infinita à um de dimensão finita cujo objetivo é geralmente estimar um número finito de parâmetros.

Neste trabalho, consideramos $X_1, \dots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias positivas independentes e identicamente distribuídas com função distribuição acumulada F . Ao denotarmos por $T_1, \dots, T_n$ as estatísticas de ordem da amostra aleatória $(X_1, \dots, X_n)$, podemos associar um processo pontual por

$$N_t = \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \leq t\}} = \sum_{i=1}^n I_{\{T_i \leq t\}}.$$

Desde que N_t é um processo não-decrescente, concluímos que N_t é um submartingale. Utilizando a decomposição de Doob-Meyer, existe um único processo estocástico A (previsível) tal que

$$M_t = N_t - A_t = N_t - \int_0^t Y_s dA_s$$

é um martingale, onde $Y_s = n - N_{s-}$ e A é a taxa de falha acumulada. Além disso, a distribuição de probabilidade definida por N_t é unicamente determinada pelo processo A_t . Desde que Y_s é obtido diretamente da amostra, vamos analisar alguns estimadores empíricos e utilizar uma abordagem Bayesiana não-paramétrica para estimar a taxa de falha acumulada A_t . Para estudá-la utilizando o enfoque Bayesiano não-paramétrico vamos

definir uma probabilidade inicial sobre o espaço das funções taxas de falha acumulada e calcular o estimador de Bayes através da distribuição à posteriori.

Para ilustrar a aplicação das técnicas descritas acima, vamos considerar um conjunto de tempos de falha obtidos pela EMBRAER. Com objetivo de estudar a performance dos freios do avião ERJ 145, a EMBRAER realizou um estudo com 30 aviões. Um freio novo (sem defeito) foi colocado em cada aeronave e acompanhado até a sua falha. O tempo de falha (em horas) do freio de cada avião encontra-se abaixo:

19	43	44	148	169	171	205	232	248	250
263	271	282	290	347	349	398	477	514	595
603	662	700	701	706	709	710	763	777	869

Tabela 1.1: Tempos de Vida dos Freios em Teste

O objetivo da EMBRAER consiste em estimar a probabilidade de um freio falhar em cada instante de tempo. A modelagem que faremos dos dados será feita sem a presença de censuras, pois esses freios gastam-se muito rapidamente e todos os tempos de falha são observados. Também em nossa análise não iremos considerar a presença de falhas coincidentes (empates).

1.1 Estimadores Empíricos

Considere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $T \geq 0$ uma variável aleatória arbitrária com densidade $f(t)$ e função distribuição $F(t)$. Em confiabilidade temos interesse no estudo das funções de confiabilidade

$$S(t) = P[T > t] = 1 - F(t),$$

taxa de falha

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t | T > t]}{\Delta t}.$$

e taxa de falha acumulada

$$A(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Desde que T possui densidade temos

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t | T > t]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t]}{P[T > t]} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Assim, a taxa de falha acumulada de T fica da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t \lambda(s) ds = \int_0^t \frac{f(s)}{S(s)} ds \\ &= - \int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} = -\ln\{S(t)\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

A função de confiabilidade representa a probabilidade do freio sobreviver mais que o tempo t e a taxa de falha específica a razão de falha instantânea no tempo $T = t$ dado que a falha não ocorreu até o tempo t . Para $S(t)$ e $A(t)$ existem estimadores não-paramétricos, o produto limite ou Kaplan-Meier e o estimador de Nelson-Aalen. A fórmula 1.1 foi usada por Nelson(1972) para obter um estimador não paramétrico para a taxa de falha acumulada. Outra expressão que derivamos desta fórmula é

$$S(t) = \exp\{-A(t)\}.$$

1.1.1 Estimador de Kaplan-Meier

O estimador de Kaplan-Meier, proposto em 1958, também chamado de produto-limite, é um dos estimadores empíricos mais utilizados em análise de confiabilidade. Ele é uma função escada, constante entre dois tempos de falha consecutivos. Esta função dá um salto no instante da falha ou morte. Assim, dados os tempos de falha $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, podemos encontrar o estimador de Kaplan-Meier da função de confiabilidade da seguinte forma. Considere a função de confiabilidade até o tempo t_k

$$S(t_k) = P[T > t_k].$$

Vamos mostrar que a função de confiabilidade acima pode ser escrita na forma

$$S(t_k) = \prod_{j=1}^k (1 - P[t_{j-1} \leq T < t_j | t_{j-1}])$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Para isto, vamos verificar que o resultado é válido pelo método de indução. Para $k = 1$ temos

$$S(t_1) = P[T > t_1] = 1 - P[T \leq t_1] = 1 - P[t_0 \leq T < t_1].$$

Suponha que o resultado é válido para $k - 1$, vamos mostrar que ele é também válido

para k . Para isto, temos que

$$\begin{aligned}
 S(t_k) &= P[T > t_k] = 1 - P[T \leq t_k] = 1 - (P[\{T \leq t_{k-1}\} \cup \{t_{k-1} \leq T < t_k\}]) \\
 &= 1 - (P[T \leq t_{k-1}] + P[t_{k-1} \leq T < t_k]) = 1 - P[T \leq t_{k-1}] - P[t_{k-1} \leq T < t_k] \\
 &= S(t_{k-1}) - P[T > t_{k-1}]P[t_{k-1} \leq T < t_k | T > t_{k-1}] \\
 &= S(t_{k-1}) - S(t_{k-1})P[t_{k-1} \leq T < t_k | T > t_{k-1}] \\
 &= S(t_{k-1})(1 - P[t_{k-1} \leq T < t_k | T > t_{k-1}]) \\
 &= \prod_{j=1}^k (1 - P[t_{j-1} \leq T < t_j | t_{j-1}]).
 \end{aligned}$$

Portanto o resultado é válido para $k = 1, \dots, n$. Com isso, um estimador empírico para a função de confiabilidade pode ser dado por

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{k:t_k \leq t} (1 - \hat{q}_k)$$

onde os q_k são dados por

$$q_k = P[t_{k-1} < T \leq t_k | T > t_{k-1}] = \frac{P[t_{k-1} < T \leq t_k]}{P[T > t_{k-1}]},$$

e podem ser estimados empiricamente da seguinte forma

$$\hat{q}_k = \frac{d_k}{n_k}$$

onde n_k é o número de peças que não falharam em t_k e d_k é o número de falhas ocorridas em t_k , que vamos considerar igual a 1 (pois admitimos que não há falhas coincidentes). O estimador $\hat{q}_k$ é considerado um estimador empírico para a taxa de falha λ no intervalo $[t_{k-1}, t_k)$. Assim, o estimador produto-limite ou Kaplan-Meier para a função de confiabilidade é dado por

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{k:t_k \leq t} (1 - \hat{q}_k) = \prod_{k:t_k \leq t} (1 - \frac{1}{n_k})$$

e um estimador para sua variância por

$$\hat{V}[\hat{S}_{KM}(t)] = [\hat{S}_{KM}(t)]^2 \sum_{k:t_k \leq t} \frac{\hat{q}_k}{n_k(1 - \hat{q}_k)}.$$

Também, podemos usar o estimador de Kaplan-Meier para estimar a taxa de falha acumulada através da aplicação da Equação 1.1,

$$\hat{A}_{KM} = -\ln \left\{ \hat{S}_{KM}(t) \right\}.$$

O estimador da variância desse estimador é obtido via fórmula de Greenwood e é dado por

$$\widehat{V}[\widehat{A}_{KM}(t)] = \sum_{i: t_i \leq t} \frac{1}{n_i(n_i - 1)}.$$

Para mais detalhes ver Kaplan e Meier [1958, pg. 477] e Ansell e Phillips [1994, pg. 38].

A tabela 5.1 apresenta as estimativas da variância do estimador da taxa de falha acumulada via estimador de Kaplan-Meier.

tempos	variância	tempos	variância
tempos	variância	tempos	variância
19	0.001149	349	0.038095
43	0.002381	398	0.043590
44	0.003704	477	0.050000
148	0.005128	514	0.057576
169	0.006667	595	0.066667
171	0.008333	603	0.077778
205	0.010145	662	0.091667
232	0.012121	700	0.109524
248	0.014286	701	0.133333
250	0.016667	706	0.166667
263	0.019298	709	0.216667
271	0.022222	710	0.300000
282	0.025490	763	0.466667
290	0.029167	777	0.966667
347	0.033333	869	*

Tabela 1.2: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Kaplan-Meier

1.1.2 Estimador de Nelson-Aalen

Nesta seção vamos apresentar o estimador proposto por Nelson (1972) e estudado por Aalen (1978) para a função taxa de falha acumulada. Como visto anteriormente, o estimador para a taxa de falha $\lambda(t)$ é dado por:

$$\widehat{\lambda}(t) = \widehat{q}_i = \frac{1}{n_i}, \quad t_{i-1} \leq t < t_i.$$

Assim, um estimador empírico para a taxa de falha acumulada pode ser obtida na forma,

$$\widehat{A}(t) = \sum_{i: t_i \leq t} \left(\frac{1}{n_i} \right)$$

e um estimador para a função de confiabilidade por [Equação 1.1],

$$\widehat{S}_{NA}(t) = \exp\{-\widehat{A}(t)\}.$$

O estimador da taxa de falha acumulada de Nelson-Aalen pode ser escrito na forma de uma integral de Stieltjes,

$$\begin{aligned}\hat{A}(t) &= \sum_{k:t_k \leq t} \left(\frac{d_k}{n_k} \right) = \sum_{k:t_k \leq t} \left(\frac{1}{n_k} \right) = \sum_k \left(\frac{N_{t_k} - N_{t_{k-}}}{\sum_i I_{\{t_i > t_k\}}} \right) = \\ &= \sum_k \left(\frac{N_{t_k} - N_{t_{k-}}}{Y(t_k)} \right) = \int_0^t \frac{I_{\{Y(s) > 0\}}}{Y(s)} dN_s,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde $N_t = \sum_k I_{\{t_k < t\}}$ é uma função de contagem, que conta o número de falhas até o tempo t , $N_{t-} = \lim_{s \uparrow t} N_s$, $I_{\{ \cdot \}}$ é uma função indicadora e $Y(t) = \sum_i I_{\{t_i < t\}} = n - N_{t-}$. No caso de ocorrer $Y(s) = 0$, teremos $\hat{A}(t) = 0$.

A variância do estimador de Nelson-Aalen $\hat{A}(t)$ é estimada mais adiante na seção 1.2 via decomposição de Doob-Meyer [ver Equação 1.8]. Um estimador para a variância do estimador de Nelson-Aalen é dado por:

$$\widehat{Var}[\hat{A}(t)] = \int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s^2} = \sum_{k:t_k \leq t} \frac{1}{n_k^2}.$$

As estimativas da variância do estimador de Nelson-Aalen estão na Tabela 1.3

tempos	variância	tempos	variância
19	0.00111	349	0.03615
43	0.00230	398	0.04126
44	0.00358	477	0.04717
148	0.00495	514	0.05412
169	0.00643	595	0.06238
171	0.00803	603	0.07238
205	0.00976	662	0.08473
232	0.01165	700	0.10035
248	0.01372	701	0.12076
250	0.01599	706	0.14854
263	0.01849	709	0.18854
271	0.02126	710	0.25104
282	0.02434	763	0.36215
290	0.02780	777	0.61215
347	0.03171	869	1.61215

Tabela 1.3: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Nelson-Aalen

1.1.3 Análise dos Dados

Nesta seção, vamos aplicar os estimadores de Kaplan-Meier e Nelson-Aalen ao conjunto de dados fornecidos pela EMBRAER. A esse conjunto de dados verificamos, através do papel de probabilidade, que uma distribuição de Weibull com função densidade de probabilidade dada por

$$f(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{a} \right)^b \right], \quad a, b > 0.$$

fica bem ajustada. Suas taxa de falha e taxa de falha acumulada são dadas, respectivamente por:

$$h(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1}$$

e

$$H(t) = \left(\frac{t}{a} \right)^b.$$

As estimativas de máxima verossimilhança obtidas para os parâmetros dessa distribuição foram, parâmetro de escala $\hat{a} = 462,13$ e parâmetro de forma $\hat{b} = 1,6099$. Desde que seu parâmetro de forma é próximo de 1, sua taxa de falha é aproximadamente constante, como pode ser visto na Figura 1.1. A tabela 1.4 fornece as estimativas da taxa de falha $\lambda(t)$ e a tabela 1.5 as estimativas da taxa de falha acumulada $A(t)$ calculadas via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen e Weibull.

Tempos	Kaplan-Meier	Nelson-Aalen	Weibull
19	0.033902	0.03333	0.000497
43	0.035091	0.03448	0.000818
44	0.036368	0.03571	0.000830
148	0.037740	0.03704	0.001739
169	0.039221	0.03846	0.001886
171	0.040822	0.04000	0.001899
205	0.042560	0.04167	0.002121
232	0.044452	0.04348	0.002288
248	0.046520	0.04545	0.002383
250	0.048790	0.04762	0.002395
263	0.051293	0.05000	0.002470
271	0.054067	0.05263	0.002515
282	0.057158	0.05556	0.002577
290	0.060625	0.05882	0.002621
347	0.064539	0.06250	0.002925
349	0.068993	0.06667	0.002935
398	0.074108	0.07143	0.003180
477	0.080043	0.07692	0.003551
514	0.087011	0.08333	0.003717
595	0.095310	0.09091	0.004064
603	0.105361	0.10000	0.004097
662	0.117783	0.11111	0.004337
700	0.133531	0.12500	0.004487
701	0.154151	0.14286	0.004491
706	0.182322	0.16667	0.004511
709	0.223144	0.20000	0.004522
710	0.287682	0.25000	0.004526
763	0.405465	0.33333	0.004729
777	0.693147	0.50000	0.004782
869	*	1.00000	0.005120

Tabela 1.4: Estimativas da taxa de falha via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen e Weibull

Figura 1.1: Gráfico das estimativas da taxa de falha via Nelson-Aalen e Weibull

Observe na Figura 1.1 que a taxa de falha estimada de uma distribuição Weibull subestima a taxa de falha. Além disso, após 700 horas a taxa de falha empírica cresce, enquanto que a taxa estimada via distribuição de Weibull permanece constante.

Tempos	Kaplan-Meier	Nelson-Aalen	Weibull
19	0.03390	0.03333	0.00587
43	0.06899	0.06782	0.02186
44	0.10536	0.10353	0.02269
148	0.14310	0.14057	0.15992
169	0.18232	0.17903	0.19800
171	0.22314	0.21903	0.20179
205	0.26570	0.26070	0.27020
232	0.31015	0.30417	0.32976
248	0.35667	0.34963	0.36713
250	0.40547	0.39725	0.37191
263	0.45676	0.44725	0.40354
271	0.51083	0.49988	0.42348
282	0.56798	0.55543	0.45149
290	0.62861	0.61426	0.47229
347	0.69315	0.67676	0.63048
349	0.76214	0.74312	0.63634
398	0.83625	0.81485	0.78623
477	0.91629	0.89178	1.05231
514	1.00330	0.97541	1.18679
595	1.09861	1.06602	1.50207
603	1.20397	1.16602	1.53472
662	1.32176	1.27713	1.78359
700	1.45529	1.40213	1.95128
701	1.60944	1.54499	1.95377
706	1.79176	1.71165	1.97828
709	2.01490	1.91165	1.99183
710	2.30259	2.16165	1.99635
763	2.70805	2.49499	2.24167
777	3.40120	2.99499	2.30826
869	*	3.99499	2.76391

Tabela 1.5: Estimativas da taxa de falha acumulada

As Figuras 1.2 e 1.3 mostram, respectivamente as estimativas da função de confiabilidade e da taxa de falha acumulada via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen e distribuição weibull.

Figura 1.2: Gráfico das estimativas da função de confiabilidade

Figura 1.3: Gráfico das estimativas da taxa de falha acumulada

1.2 A estimação não-paramétrica

Neste trabalho, ao invés de utilizarmos os estimadores empíricos ou os estimadores paramétricos, vamos propor um estimador não paramétrico para a taxa de falha acumulada

$$A(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

bascado no trabalho de Hjort (1990) e Kim (1999). Através deste estimador, derivamos um estimador para a taxa de falha λ . Considere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $X_1, \dots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com distribuição F e função densidade f , definidas sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Com isso, podemos definir uma sequência de processos pontuais

$$G^i(t, \omega) = I_{\{X_i \leq t\}}(\omega)$$

para todo $t \in [0, \infty)$, $\omega \in \Omega$ e $i = 1, \dots, n$.

Utilizando o Teorema 3.26 em Jacod e Shiryaev [1987, pg. 98], obtemos que

$$G^i(t, \omega) - A(t \wedge X_i) = G^i(t, \omega) - \int_0^t I_{\{X_i(\omega) > s\}}(\omega) \lambda(s) ds \quad (1.3)$$

é um martingale com respeito à menor filtração para o qual X_i é um tempo de parada, para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, obtemos da decomposição de Doob-Meyer que $A(t \wedge X_i)$ é único. Como mostramos na seção 1.1, a função de confiabilidade é dada por

$$S(t) = \exp \{-A(t)\} = 1 - F(t).$$

Assim, a distribuição de probabilidade de X_i é unicamente determinada pela taxa de falha acumulada. Por outro lado, observamos que a distribuição de probabilidade do processo pontual G^i é determinada pelo compensador $A(\cdot \wedge X_i)$ [Equação 1.3]. No capítulo 2, estabelecemos um resultado mais geral. Considere o processo pontual,

$$N_t(\omega) = \sum_{i=1}^n G^i(t, \omega)$$

para todo $t \in [0, \infty)$ e $\omega \in \Omega$. Este processo conta o número de variáveis X_i 's que são menores ou iguais a t . Definimos,

$$Y_s(\omega) = n - N_s(\omega)$$

para todo $s \in [0, \infty)$ e $\omega \in \Omega$. Assim, obtemos da proposição 3.32 em Jacod e Shiryaev [1987, pg. 99], que

$$M_t = N_t - \int_0^t Y_s \lambda(s) ds$$

é um martingale com respeito à filtração gerada por N . Além disso, sabemos que a distribuição de probabilidade do processo N é determinada (ou caracterizada) pelo compensador [ver Capítulo 2]

$$A_t(\omega) = \int_0^t Y_s \lambda(s) ds = \int_0^t Y_s dA_s \quad (1.4)$$

Observe que o processo Y é determinado diretamente das observações $X_1, X_2, \dots, X_n$. Assim, para o compensador do processo pontual basta determinarmos a taxa de falha acumulada A .

Como uma ilustração, vamos apresentar os gráficos das estimativas de M_t nos casos onde a taxa de falha acumulada é estimada via o modelo Weibull e via o estimador de Kaplan-Meier. No caso do estimador de Nelson-Aalen o martingale encontrado foi igual a zero. As estimativas de

$$M_t = N_t - \int_0^t Y_s dA_s$$

foram obtidas conforme o procedimento:

$$\begin{aligned} M_{t_1} &= N_{t_1} - \int_0^{t_1} Y_s d\hat{A}_s = N_{t_1} - Y_{t_1} \int_0^{t_1} d\hat{A}_s = N_{t_1} - Y_{t_1} [\hat{A}_{t_1} - \hat{A}_{t_0}] , \\ M_{t_2} &= N_{t_2} - \int_0^{t_2} Y_s d\hat{A}_s = N_{t_2} - \left[\int_0^{t_1} Y_s d\hat{A}_s + \int_{t_1}^{t_2} Y_s d\hat{A}_s \right] \\ &= N_{t_2} - (Y_{t_1} [\hat{A}_{t_1} - \hat{A}_{t_0}] + Y_{t_2} [\hat{A}_{t_2} - \hat{A}_{t_1}]) , \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ M_{t_r} &= N_{t_r} - (Y_{t_1} [\hat{A}_{t_1} - \hat{A}_{t_0}] + Y_{t_2} [\hat{A}_{t_2} - \hat{A}_{t_1}] + \dots + Y_{t_r} [\hat{A}_{t_r} - \hat{A}_{t_{r-1}}]) , \end{aligned} \tag{1.5}$$

e assim por diante.

Figura 1.4: Martingale para a taxa acumulada de uma Weibull

Figura 1.5: Martingale para a taxa acumulada estimada via Kaplan-Meier

Observe no gráfico 1.5 que a estimativa do martingale considerando o estimador de Kaplan-Meier é negativo, o que sugere que o estimador de Kaplan-Meier seja um estimador viciado, com vício não negativo. Este resultado está demonstrado em Fleming e

Harrington [Lema 3.2.1, pg. 99].

1.2.1 Modelo Estatístico

A seguir, vamos apresentar um modelo para descrever os dados. Considere $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ as observações do tempo de falha. Conforme proposto anteriormente, vamos admitir que não temos falhas coincidentes, isto é, $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j = 1, \dots, n$. Sejam $t_1 < t_2, \dots < t_n$ a ordenação das observações $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A ordenação é feita para simplificar a notação e esta não altera o processo pontual associado,

$$\sum_{i=1}^n I_{\{x_i \leq s\}} = \sum_{i=1}^n I_{\{t_i \leq s\}}$$

para todo $s \in [0, \infty)$.

Considere $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [0, \infty)$ os sucessivos tempos de falha de itens em teste, para algum $k \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. Assim, definimos uma função $x : [0, \infty) \rightarrow S^\infty$ por

$$x(0) = (0, 0, 0, \dots)$$

$$x(s) = (I_{\{t_1, \infty\}}(s), \dots, I_{\{t_k, \infty\}}(s), 0, 0, \dots); \quad s \geq 0$$

onde $I_{\{t\}}(\cdot)$ é a função indicadora de conjunto e $S^\infty = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$ corresponde ao espaço de Cantor (ver apêndice).

Denotamos por $\Omega = \{x : [0, \infty) \rightarrow S^\infty \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [0, \infty), k \in \mathbb{N}\}$, o espaço de trajetórias e sobre ele vamos definir uma σ -álgebra $\mathfrak{F}$. Tomamos uma classe Θ de subconjuntos de Ω

$$\Theta = \{C[k; n; w_n] : w_n \in S, k \in \mathbb{Q}, k \geq 0, n \in \mathbb{N}\},$$

onde $C[k; n; w_n] = \{x \in \Omega : x(k) \in \pi_n^{-1}(\{w_n\})\}$ são chamados de cilindros e $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Aplicando algumas operações de conjunto em Θ construímos uma álgebra Υ , chamada álgebra dos cilindros e a σ -álgebra $\mathfrak{F}$ sobre Ω é a σ -álgebra gerada por Υ , isto é $\mathfrak{F} = \sigma\{\Upsilon\}$. A filtração gerada pelas trajetórias do processo pontual é definida pela seguinte família crescente de σ -álgebras

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{C[k; n; w_n], w_n \in S, k \in \mathbb{Q} \cap [0, t], k \geq 0, n \in \mathbb{N}\}, \quad t \in [0, \infty).$$

No capítulo 2 faremos uma análise detalhada do espaço de trajetórias e suas propriedades. Assim, para definirmos o processo pontual considere uma probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ e

$T_j : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ uma variável aleatória definida por

$$\begin{aligned} T_j(x) &= \inf\{s \in [0, \infty] : x(s) = \underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}_{j \text{ vezes}}, 0, 0, \dots\} = \\ &= t_j; \text{ se } j \leq k \\ &= +\infty; \text{ se } j > k. \end{aligned}$$

Esta variável aleatória é um tempo de parada [Teorema 2.2.1] e o processo definido por

$$N_t(x) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq t\}}(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty] \quad (1.6)$$

em $(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}, P)$ é um processo pontual.

O processo N_t é um submartingale e de acordo com a decomposição de Doob-Meyer, Liptser e Shirayev [1978, Teorema 3.8, pg. 65], existe um único processo previsível crescente A_t , tal que

$$M_t = N_t - A_t$$

é um martingale quadrado integrável. Aalen (1978) considera que o processo taxa de falha possa ser escrito como o produto de uma função determinística não-negativa desconhecida λ e um processo estocástico observável Y sobre um intervalo de tempo. Este modelo é denominado modelo de intensidade multiplicativa. Assim, temos que

$$\Lambda_t(x) = \int_0^t \lambda(s) Y_s(x) ds = \int_0^t Y_s(x) dA_s, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \Omega. \quad (1.7)$$

Observe que o modelo de intensidade multiplicativa generaliza o modelo apresentado na Equação 1.4. Aalen propôs que ao invés de λ fosse estimada uma função dela

$$A_t = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Utilizando a decomposição de Doob-Meyer podemos escrever de modo heurístico que $dN_t = dM_t + dA_t = dM_t + \lambda(t)Y_t dt$. Através do método dos momentos, obtemos como estimador para A_t ,

$$\hat{A}_t = \int_0^t \frac{dN_s}{Y_s}.$$

Levando em conta que Y possa assumir um valor nulo, reescrevermos o estimador $\hat{A}_t$ na forma

$$\hat{A}_t = \int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s},$$

onde $J_s = \lim_{h \downarrow 0} I_{\{Y_{s-h} > 0\}}$ e quando $Y_s = 0$ definimos $\frac{J_s}{Y_s} = 0$. Esse estimador corresponde ao estimador 1.2, que é estimador de Nelson-Aalen na forma de uma integral de Stieltjes. Utilizando a decomposição de Doob-Meyer, obtemos que,

$$\int_0^t \frac{J_s dM_s}{Y_s} = \int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s} - \int_0^t \frac{J_s d\Lambda_s}{Y_s}$$

é um martingale quadrado integrável. Assim,

$$E\left[\int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s}\right] = E\left[\int_0^t \frac{J_s d\Lambda_s}{Y_s}\right].$$

Agora, vamos calcular o erro quadrático médio e apresentar um estimador para a variância do estimador de Nelson-Aalen.

$$E\left[\left(\int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s} - \int_0^t \frac{J_s d\Lambda_s}{Y_s}\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^t \frac{J_s dM_s}{Y_s}\right)^2\right].$$

Desde que

$$\int_0^t \frac{J_s dM_s}{Y_s}$$

é um martingale quadrado integrável, concluímos da decomposição de Doob-Meyer, do Teorema 2.4.2 em Fleming e Harrington (1991, pg.67) e do modelo de intensidade multiplicativa, que

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t \frac{J_s dM_s}{Y_s}\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t \frac{J_s^2 d\Lambda_s}{Y_s^2}\right] = E\left[\int_0^t \frac{J_s Y_s dA_s}{Y_s^2}\right] \\ &= E\left[\int_0^t \frac{J_s d\Lambda_s}{Y_s}\right]. \end{aligned}$$

Substituindo dA_s por $J_s dN_s / Y_s$, obtemos um estimador empírico para a variância do estimador de Nelson-Aalen, conforme descrito abaixo

$$\widehat{Var}[\widehat{\Lambda}(t)] = \int_0^t \frac{J_s dN_s}{Y_s^2}. \quad (1.8)$$

Maiores informações sobre o estimador de Nelson-Aalen, como a consistência assintótica, podem ser encontradas em Aalen (1978) e Fleming e Harrington (1991).

1.2.2 Estimador de Bayes

Ao invés de utilizarmos o estimador não paramétrico de Nelson-Aalen, vamos utilizar um estimador Bayesiano não-paramétrico para a taxa de falha acumulada A , conforme proposto em Hjort (1990) e Kim (1999). Além disso, vamos derivar um estimador para a taxa de falha λ .

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias positivas independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F . O objetivo consiste em estimar F , onde o parâmetro de interesse toma valores em um espaço de funções. Assim, para aplicar o enfoque Bayesiano, precisamos definir uma probabilidade sobre o espaço das funções de distribuição acumulada. Para isto, basta construirmos um processo estocástico cujas trajetórias são funções de distribuição acumulada. Neste sentido, destacamos os processos de Dirichlet [Ferguson (1973),(1974)], processos tailfree e neutral to the right [Doksum (1974)]. Se F é absolutamente contínua com função densidade f , Dijkstra e Laud (1981) utilizaram processos gama estendidos como distribuição à priori para a taxa de falha λ . Ao invés de estimar a função de distribuição acumulada F , Iljort (1990) propôs um método Bayesiano para estimar a taxa de falha acumulada A . Se a F é absolutamente contínua, então, os resultados obtidos para estimar F podem ser facilmente adaptados para estimar A , pois

$$F(t) = 1 - \exp\{ -A(t) \}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Além disso, sabemos que F é absolutamente contínua se, e somente se, A também é absolutamente contínua. Por outro lado, todos os processos estocásticos utilizados para definir a distribuição à priori são processos de Lévy puro salto. Desta forma, os resultados apresentados para estimar F não são diretamente adaptados para estimar A e vice-versa. Assim, todos os processos estocásticos à priori apresentam trajetórias do tipo escada, consequentemente não são absolutamente contínuas. Neste trabalho, vamos apresentar métodos para estimar a taxa de falha acumulada A , como apresentado em Iljort (1990) e Kim (1999).

Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definido na seção 2.2, vamos assumir que o processo pontual N_t está definido em $[0, 1]$, embora ele possa ser generalizado para o intervalo $[0, \tau]$ e que o processo Λ_t satisfaz o modelo de intensidade multiplicativo

$$\Lambda_t = \int_0^t Y_s dA(s),$$

onde Y é um processo previsível (observável) e A é uma função determinística desconhecida, denominada taxa de falha acumulada. Abaixo, definimos o espaço das taxas de falha acumulada.

$$\mathcal{A} = \{ \text{classe das funções não decrescentes } A \text{ contínuas à direita} \\ \text{definidas em } [0, 1], \Delta A \leq 1, A(0) = 0 \}$$

Para esta classe considere $\Sigma_{\mathcal{A}}$ a σ -álgebra gerada pelos cilindros. O espaço das observações corresponde ao Ω definido na seção 2.2 com a σ -álgebra associada $\mathfrak{F}$. Para definir

uma probabilidade à priori sobre $\Sigma_{\mathcal{A}}$, vamos construir um processo estocástico com trajetórias em $\mathcal{A}$ chamados de processo de Lévy puro salto, conforme a definição abaixo

Definição 1.2.1 (Processo de Lévy puro salto). *Um Processo de Lévy puro salto é um processo estocástico A , satisfazendo:*

a) A é càdlàg (contínuo à direita e com limites à esquerda) e adaptado à filtração $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, $A \in \mathcal{A}$;

b) Para todo $t \in [0, 1]$ e $\omega \in \Omega$

$$A_t(\omega) = \sum_s \Delta A_s(\omega) I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s);$$

c) A tem incrementos independentes;

d) $A_0(\omega) = 0$; $\Delta A_t(\omega) \leq 1$; $\forall \omega \in \Omega$; $\forall t \in [0, 1]$.

No Capítulo 3, fazemos um estudo detalhado sobre os processos de Lévy puro salto e suas representações. Esta classe de processos foi introduzida por Lévy e pode ser caracterizada pela estrutura da função característica. Também neste capítulo, mostramos que a classe de processos de Lévy puro salto pode ser caracterizada pelo compensador de saltos ν , também conhecido como medida de Lévy. Para isso, associamos uma medida aleatória μ , na forma

$$\mu(\omega; [0, t] \times B) = \sum_s I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s) I_{\{B\}}(\Delta A_s(\omega)),$$

para $\omega \in \Omega$, $t \in [0, 1]$, $B \in \beta((0, 1])$ e o compensador

$$\nu([0, t] \times B) = E[\mu(\cdot; [0, t] \times B)], \quad B \in \beta((0, 1]).$$

da medida aleatória μ . Do lema 3.1.3 temos que

$$\int_0^1 x \mu(\omega; [0, t] \times dx) = A_t(\omega), \quad t \in [0, 1], \quad \omega \in \Omega.$$

Dessa forma o processo de Lévy A é totalmente caracterizado pelo compensador ν . O processo beta é um processo de Lévy com o compensador definido por

$$\nu([0, t] \times B) = \int_0^t \int_D \frac{1}{x} b(x; \alpha(s), \beta(s)) dx dA_0(s), \quad t \in [0, 1], \quad B \in \beta((0, 1]) \quad (1.9)$$

onde

$$b(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

é a função densidade da distribuição beta com parâmetros $a > 0$ e $b > 0$,

$$A_0 = \int_0^t \lambda_0(s) ds$$

é uma taxa de falha acumulada inicial e α, β são funções contínuas estritamente positivas definidas em $[0, 1]$. Além disso, a classe dos processos de Lévy é conjugada [Doksum (1974), Ferguson e Phadia (1979)]. Além disso, o processo beta também é conjugado e o compensador à posteriori é dado por [Kim (1999)]:

$$\begin{aligned} \nu^p([0, t] \times D) &= \int_0^t \int_D (1-x)^{Y_s} \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx dA_0(s) \\ &\quad + \int_0^t \int_D \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx dN_s, \end{aligned}$$

$$N_s = \sum_i I_{\{T_i \leq s\}} \text{ e } Y_s = \sum_i I_{\{T_i \geq s\}} = n - N_{s-}.$$

Assim, o estimador de Bayes para o processo beta com relação à função de perda quadrática será dado pela esperança da distribuição à posteriori. Logo, do Teorema 3.2.1, temos que o estimador de Bayes é

$$\begin{aligned} \hat{A}_t &= E[A_t | N] = \int_0^t \int_0^1 x \nu^p(ds, dx) = \int_0^t \int_0^1 (1-x)^{Y_s} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx dA_0(s) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx dN_s \\ &= \int_0^t \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s)) \Gamma(\beta(s) + Y_s)}{\Gamma(\beta(s)) \Gamma(\alpha(s) + \beta(s) + Y_s)} \lambda_0(s) ds + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\alpha(s) + \beta(s) + Y_s - 1} dN_s. \end{aligned}$$

Kim e Lee (2002) mostraram que $\hat{A}_t$ é consistente para estimar A_t se, e somente se, $\alpha(s) = 1$, $\forall s \in [0, 1]$. Além disso, quando $\alpha(s) = 1$ obtemos o processo beta de Hjort(1990) com estimador de Bayes dado por:

$$\hat{A}_t = \int_0^t \frac{\beta(s) \lambda_0(s)}{\beta(s) + Y_s} ds + \int_0^t \frac{dN_s}{\beta(s) + Y_s}. \quad (1.10)$$

Vamos assumir que as taxa de falha acumulada e taxa de falha iniciais $A_0(s)$ e $\lambda_0(s)$ são da distribuição Weibull, e dadas respectivamente por

$$A_0(s) = \left(\frac{s}{a}\right)^b$$

e

$$\lambda_0(s) = \frac{b}{a^b} s^{b-1}.$$

Além disso, propomos que a função $\beta(s)$ seja determinada por $nS(s)$ onde

$$S(s) = \exp \left\{ - \left(\frac{s}{a}\right)^b \right\},$$

é a função de confiabilidade da distribuição Weibull, pois, conforme notado por Hjort [1990, pg. 1264], $\beta(s)$ pode ser interpretada como o conjunto de risco em s à priori. Vamos considerar $v = 1/a^b$ para simplificar a notação. Logo,

$$\hat{A}_t = \int_0^t \frac{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} \hat{v} \hat{b} s^{\hat{b}-1}}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s} ds + \int_0^t \frac{dN_s}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s} \quad (1.11)$$

onde $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são os estimadores de máxima verossimilhança e $\hat{v} = 1/\hat{a}^{\hat{b}}$.

Além disso no capítulo 4 propomos um estimador para a taxa de falha como sendo

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_s &= \frac{\beta(s)\lambda_0(s)}{\beta(s) + Y_s} + \frac{1}{\beta(s) + Y_s} \\ &= \frac{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} \hat{v} \hat{b} s^{\hat{b}-1}}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s} + \frac{1}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

As estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros a e b [apresentados na seção 1.1.3] são, respectivamente, $\hat{a} = 462.13$ e $\hat{b} = 1.6099$, logo $\hat{v} \simeq 5.128 \times 10^{-5}$.

O gráfico da Figura 1.6 mostra o comportamento dos estimadores da taxa de falha acumulada estimada via Kaplan-Meier, via Weibull e via inferência Bayesiana não-paramétrica [conforme 1.10] para os dados do freio do ERJ-145.

Figura 1.6: Gráficos da Taxa de Falha acumulada estimada via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen, Weibull e Bayesiano Empírico

Capítulo 2

O Processo Pontual

Neste capítulo iremos estudar o processo pontual, a decomposição de Doob-Meyer, a taxa de falha do processo pontual e apresentar os teoremas de existência e unicidade para o compensador do processo pontual. Para isso, deveremos ter bem definidos, o espaço amostral, a σ -álgebra e uma probabilidade com os quais iremos trabalhar.

2.1 O Espaço de Trajetórias

Considere $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [0, \infty)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, os sucessivos tempos de falhas de itens em teste. Assim, definimos a função $x : [0, \infty) \rightarrow S^\infty$ por

$$x(0) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

$$x(s) = (I_{\{[t_1, \infty)\}}(s), I_{\{[t_2, \infty)\}}(s), \dots, I_{\{[t_k, \infty)\}}(s), 0, 0, 0, \dots),$$

onde $I_{\{ \cdot \}}(\cdot)$ é a função indicadora de conjunto.

A função x definida acima representa todas as possibilidades de ocorrência para um experimento de confiabilidade onde, a cada item do experimento corresponde um tempo de falha t_j .

Lema 2.1.1. *A função $x : [0, \infty) \rightarrow S^\infty$ é mensurável.*

Dem:

$$\begin{aligned} x^{-1}[\pi_j^{-1}(\{1\})] &= [t_j, \infty) ; & j \leq k \\ x^{-1}[\pi_j^{-1}(\{0\})] &= [0, t_j) ; & j < k \\ x^{-1}[\pi_j^{-1}(\{1\})] &= \emptyset ; & j \geq k+1 \\ x^{-1}[\pi_j^{-1}(\{0\})] &= [0, \infty) ; & j > k+1 \end{aligned}$$

Mostramos que para qualquer $C \in \mathcal{H}$ (ver Apêndice) temos, $x^{-1}(C) \in \beta([0, \infty))$. Temos que mostrar que qualquer que seja $A \in \mathcal{G}$ (ver Apêndice) temos $x^{-1}(A) \in \beta([0, \infty))$. Considere então,

$$\mathcal{E} = \{A \subset S^\infty : x^{-1}(A) \in \beta([0, \infty))\}.$$

Dessa definição temos que $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, então

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma(\mathcal{E}).$$

Se $\mathcal{E}$ for uma σ -álgebra então $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$. Basta então mostrar que $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra. O conjunto vazio e $S^\infty \in \mathcal{E}$. Seja $A \in \mathcal{E}$ então, $x^{-1}(A^c) = [x^{-1}(A)]^c$, desde que $x^{-1}(A) \in \beta([0, \infty))$, temos que $A^c \in \mathcal{E}$. Considere agora $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ então,

$$x^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [x^{-1}(A_i)],$$

desde que $x^{-1}(A_i) \in \beta([0, \infty))$, temos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$. Portanto $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra. $\square$

Com isso fica definido nosso espaço de trajetórias, cujos elementos são as funções x , isto é

$$\Omega = \{x : [0, \infty) \rightarrow S^\infty \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [0, \infty), k \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos construir agora uma estrutura de mensurabilidade sobre o espaço de trajetórias Ω . Considere o cilindro

$$C[k; n; w_n] = \{x \in \Omega : x(k) \in \pi_n^{-1}(\{w_n\})\}$$

onde $w_n \in S = \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{Q}$, $k \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Denotamos

$$\Theta = \{C[k; n; w_n] : w_n \in S, k \in \mathbb{Q}, k \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$$

Definição 2.1.1. Uma classe $\mathcal{A}$ separa pontos em um conjunto Ω se, para todo $x, y \in \Omega$ distintos, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$I_{\{A\}}(x) \neq I_{\{A\}}(y),$$

onde $I_{\{A\}}(\cdot)$ é a função indicadora de conjunto.

Lema 2.1.2. A classe Θ é enumerável e separa pontos no espaço Ω .

Dem: Desde que S é finito, $\mathbb{Q}$ enumerável e $\mathbb{N}$ enumerável, obtemos do Teorema 2 em Kolmogorov e Fomim [1975, pag. 12] que Θ também é enumerável. Na sequência, vamos

mostrar que Θ separa pontos no espaço Ω . Considere x_1 e x_2 elementos de Ω distintos, isto é, $x_1(s) \neq x_2(s)$, para algum $s \in [0, \infty)$. Assim, existem seqüências

$$0 = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{k_i}^i \in [0, \infty)$$

para algum $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, tais que

$$\begin{aligned} x_1(s) &= (I_{\{t_1^1, \infty\}}(s), I_{\{t_2^1, \infty\}}(s), \dots, I_{\{t_{k_1}^1, \infty\}}(s), 0, 0, 0, \dots), \quad s \in [0, \infty) \\ x_2(s) &= (I_{\{t_1^2, \infty\}}(s), I_{\{t_2^2, \infty\}}(s), \dots, I_{\{t_{k_2}^2, \infty\}}(s), 0, 0, 0, \dots), \quad s \in [0, \infty) \end{aligned}$$

Desde que $x_1 \neq x_2$, o conjunto de pontos $\{t_1^1, \dots, t_{k_1}^1\}$ é diferente do conjunto de pontos $\{t_1^2, \dots, t_{k_2}^2\}$ para pelo menos um t_j^i . Considere l o primeiro índice tal que $t_l^1 \neq t_l^2$, admitimos que $t_l^1 < t_l^2$. Desde que $\mathbb{Q}$ é denso em $[0, \infty)$, existe um número racional m tal que $t_l^1 < m < t_l^2$. Com isso, obtemos que

$$I_{\{C[m; t_l^1]\}}(x_1) \neq I_{\{C[m; t_l^1]\}}(x_2),$$

onde $I_{\{ \cdot \}}(\cdot)$ é a função indicadora de conjunto. Portanto, a classe Θ separa pontos em Ω . $\square$

Na seqüência, vamos definir uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo a propriedade de compacidade introduzida por Marczewski(1953). Esta propriedade será utilizada para a construção de probabilidades sobre o espaço de trajetórias.

Definição 2.1.2. Uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto Ω é dita ser compacta se para cada seqüência $\{C_n, n \geq 1\}$ em $\mathcal{A}$ com intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ existe um inteiro

N tal que $\bigcap_{n=1}^N C_n = \emptyset$

A seguir, vamos mostrar que a classe Θ satisfaz a propriedade da compacidade.

Lema 2.1.3. A classe Θ é compacta.

Dem: Considere a seqüência $\{C_n\} \subset \Theta$ com $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Então, existem dois índices j_1 e $j_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} C_{j_1} &= \{x \in \Omega : x(k) \in \pi_n^{-1}(\{1\})\} \\ C_{j_2} &= \{x \in \Omega : x(k) \in \pi_n^{-1}(\{1\})\} \end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, se tomarmos $n_0 = \max\{j_1, j_2\}$ e teremos

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} C_j = \emptyset.$$

Portanto Θ é uma classe compacta. $\square$

Definição 2.1.3. Uma classe $\mathcal{E}$ de subconjuntos de um conjunto E é chamada uma semi-álgebra se ela satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\emptyset$ e E estão em $\mathcal{E}$;
- 2) $\mathcal{E}$ é fechada sobre intersecção finita;
- 3) se $S \in \mathcal{E}$, então S^c é a união de uma família finita de subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{E}$.

Considere a classe Δ formada por intersecção finita de elementos de Θ união com o $\emptyset$ e Ω ,

$$\Delta = \{C : C = B_1 \cap \dots \cap B_n, \ B_i \in \Theta, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\Omega\}.$$

Lema 2.1.4. A classe Δ é uma semi-álgebra compacta.

Dem: Desde que Δ é formada via intersecção finita de elementos de uma classe compacta (Θ), obtemos que Δ também é compacta, Neveu [1965, lema I.6.1, pg.26]. Só falta mostrar que Δ é uma semi-álgebra. Por construção $\emptyset$ e Ω estão contidos em Δ .

Considere agora dois elementos C_1 e C_2 de Δ , $C_1 = B_1^1 \cap \dots \cap B_{k_1}^1$ e $C_2 = B_1^2 \cap \dots \cap B_{k_2}^2$, assim

$$C_1 \cap C_2 = B_1^1 \cap B_1^2 \cap \dots \cap B_{k_1}^1 \cap B_{k_2}^2$$

é a intersecção finita de elementos de Θ pois cada $B_j^i \in \Theta$, portanto $C_1 \cap C_2 \in \Theta$. Seja $A \in \Delta$ então, $A = B_1 \cap \dots \cap B_k$, $B_i \in \Theta$. Assim $A^c = \cup[B_1' \cup \dots \cup B_k']$, onde $B_j' = B_j$ ou $B_j' = B_j^c$ e a união é tomada sobre todas as possíveis combinações de B_j' , exceto $B_j' = B_j$, $\forall j = 1, \dots, k$. Desde que todos os termos da união são disjuntos dois a dois, concluímos que Δ é uma semi-álgebra. $\square$ A partir da semi-álgebra compacta Δ podemos construir uma álgebra compacta de forma trivial.

Lema 2.1.5. A classe

$$\Upsilon = \{A : A = B_1 \cup \dots \cup B_n, \ B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j), \ n \in \mathbb{N}, \ B_i \in \Delta\}$$

é uma álgebra.

Dem: Desde que Υ é formada por união finita disjunta de elementos da classe compacta Δ , obtemos que Υ também é compacta, ver Neveu(1965, lema I.6.1, pg. 26). Agora, vamos provar que Υ é uma álgebra. Para isto, basta mostrarmos que a classe Υ é fechada por intersecção finita e pela operação de complementar. Considere A_1 e A_2 dois elementos em Υ . Então temos que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i, \quad i = 1, 2$$

onde $\{B_j^i : j = 1, \dots, n_i, i = 1, 2\}$ é uma família de elementos de Δ , tal que

$$B_j^i \cap B_l^i = \emptyset \quad (j \neq l), \quad i = 1, 2.$$

Então, temos que

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{j=1}^{n_1} \bigcup_{l=1}^{n_2} (B_j^1 \cap B_l^2).$$

Desde que os elementos da união são disjuntos dois a dois, concluímos que Υ é fechada por intersecção finita. Para finalizar vamos mostrar que Υ é fechada por operação de complementar. Seja $A \in \Upsilon$, então existe $B_1, \dots, B_n$ pertencentes a Δ com $B_i \cap B_j = \emptyset$, $(i \neq j)$,

$$A = \bigcup_{j=1}^n B_j.$$

Então, temos que

$$A^c = \bigcap_{j=1}^n B_j^c.$$

Desde que $B_j \in \Delta$ obtemos que $B_j^c \in \Upsilon$. Desta forma, concluímos que $A^c \in \Upsilon$. Portanto Υ é uma álgebra. $\square$. A classe Υ é chamada álgebra dos cilindros.

Definição 2.1.4. Um espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ é separável se existe uma sequência $\{E_n\}$ que gera a σ -álgebra, isto é, $\mathcal{E} = \sigma\{E_n\}$.

Definição 2.1.5. Um espaço mensurável separável $(E, \mathcal{E})$ é Hausdorff se existe uma sequência $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ que separa pontos em $(E, \mathcal{E})$, isto é, para cada x_1 e $x_2 \in E$ distintos, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_{\{E_m\}}(x_1) \neq I_{\{E_m\}}(x_2)$.

Considere $\mathfrak{F}$ a σ -álgebra gerada pela álgebra dos cilindros Υ . Tendo Ω e $\mathfrak{F}$ obtemos um espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{F})$ que é separável e Hausdorff, pois a álgebra Υ é enumerável e separa pontos em $(\Omega, \mathfrak{F})$. Vamos definir agora uma função de conjunto sobre a álgebra Υ . Dada uma função de conjunto $\lambda : \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo

a) $\lambda(\emptyset) = 0; \lambda(\Omega) = 1;$

b) se $A_1, A_2 \in \Upsilon$ com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2),$$

dizemos que λ é uma função de conjunto finitamente aditiva sobre a álgebra dos cilindros Υ .

Lema 2.1.6. *Toda função de conjunto $\lambda : \Upsilon \longrightarrow [0, 1]$ finitamente aditiva é σ -aditiva.*

Dem: Desde que Υ é uma álgebra, é suficiente mostrarmos que λ é contínua no vazio. Seja $\{C_n\} \subset \Upsilon$ uma sequência tal que $C_n \supset C_{n+1}$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, vamos mostrar que

$$\lim_n \lambda[C_n] = 0;$$

mas Υ é uma classe compacta, nesse caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$, satisfazendo $\bigcap_{n=1}^{n_0} C_n = \emptyset$, então

$$\lambda[C_n] = \lambda\left[\bigcap_{k=1}^n C_k\right] \leq \lambda\left[\bigcap_{k=1}^{n_0} C_k\right] = \lambda[\emptyset] = 0, \forall n \geq n_0.$$

Portanto, quando $C_n \downarrow \emptyset$ nós temos que $\lambda[C_n] \downarrow 0$. $\square$

Considere Γ a classe formada por intersecção enumerável de elementos de Υ , isto é,

$$\Gamma = \{A : A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n; B_i \in \Upsilon, i \in \mathbb{N}\}$$

Desde que Υ é uma álgebra, podemos formar elementos $D_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ satisfazendo

a) $D_n \in \Upsilon; \forall n \in \mathbb{N};$

b) $D_n \supset D_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N};$

c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = A.$

Desta forma, os elementos de Γ podem ser representados como intersecção enumerável de sequências monótonas decrescentes de elementos de Υ .

Lema 2.1.7. *Considere $\lambda : \Upsilon \longrightarrow [0, 1]$ uma função de conjunto finitamente aditiva. Então, existe uma única probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{S})$, tal que*

a) $P[B] = \lambda[B]; \forall B \in \Upsilon;$

b) Para todo $K \in \Gamma$, existe uma sequência $\{E_n\} \subset \Upsilon$ com $E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = K$.

Além disso, temos que

$$P[K] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda[E_n]$$

c) Para $A \in \mathfrak{S}$ temos que

$$P[A] = \sup\{P[K] : K \subset A, K \in \Gamma\}$$

Além disso, a classe Γ é compacta.

Dem: Desde que Γ é formada por intersecção enumerável de elementos da álgebra compacta Υ , obtemos que Γ também é uma classe compacta, ver Neveu [1965, lema I.6.1, pg. 26]. Como consequência do lema 2.1.6 temos que a função de conjunto λ é σ -aditiva. Então, obtemos do teorema da extensão de Carathéodory, que existe uma única probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{S})$ satisfazendo as propriedades a), b) e c). $\square$

A seguir, vamos mostrar que $(\Omega, \mathfrak{S})$ é um espaço de Radon, conforme introduzido em Leão, Fragoso, Ruffino (1999). Esta classe de espaços mensuráveis é importante para garantir a existência de probabilidade condicional regular, que serão utilizadas para garantir uma relação de existência e unicidade entre um processo previsível crescente e o processo pontual. $\square$

Teorema 2.1.1. O espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{S})$ é Radon, isto é, para toda probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{S})$, temos que

$$P[A] = \sup\{P[K] : K \subset A, K \in \Gamma\}$$

onde Γ é uma classe compacta.

Prova: Basta observarmos que toda probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{S})$ é uma função de conjunto $P : \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ finitamente aditiva, e aplicamos o lema 2.1.7. $\square$

2.2 Processo Pontual

Nesta seção vamos estudar probabilidades sobre $(\Omega, \mathfrak{S})$ e o processo estocástico associado. Para isto, começamos estudando filtrações sobre este espaço mensurável.

Definição 2.2.1. Uma família de sub- σ -álgebras $\{\mathfrak{S}_t, t \geq 0\}$ de uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ é chamada crescente se $s \leq t$ implica $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Uma família crescente de sub- σ -álgebras é chamada uma filtração.

Definição 2.2.2. Quando $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ é uma filtração, a σ -álgebra $\bigcap_{h>0} \mathfrak{F}_{t+h}$ é denotada por $\mathfrak{F}_{t+}$. O limite à esquerda $\mathfrak{F}_{t-}$ é a menor σ -álgebra contendo todos os conjuntos em $\bigcup_{h>0} \mathfrak{F}_{t-h}$ e é escrito como $\sigma\{\bigcup_{h>0} \mathfrak{F}_{t-h}\}$.

Definição 2.2.3. Uma filtração é contínua à direita se $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$.

Definimos uma filtração sobre o espaço de trajetórias Ω por

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}; \\ \mathfrak{F}_t &= \sigma\{C[k; n; w_n] : w_n \in S, k \in \mathbb{Q} \cap [0, t], n \in \mathbb{N}\}, \quad t \in [0, \infty); \\ \mathfrak{F}_\infty &= \sigma\left\{\bigcup_{t \in [0, \infty]} \mathfrak{F}_t\right\} = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

A seguir, vamos mostrar que a filtração é contínua à direita.

Lema 2.2.1. Temos que

$$\mathfrak{F}_t = \{A \in \mathfrak{F} : \text{se } x \in A \text{ e } x'(s) = x(s), s \leq t, \text{ então } x' \in A\}$$

Além disso, temos que $\{\mathfrak{F}_t\}$ é contínua à direita.

Prova: Denotamos por

$$\begin{aligned} G_0 &= \mathfrak{F}_0; \\ G_t &= \{A \in \mathfrak{F} : \text{se } x \in A \text{ e } x'(s) = x(s), s \leq t, \text{ então } x' \in A\}; \end{aligned}$$

Temos que mostrar que $\mathfrak{F}_t = G_t$, $t \in [0, \infty)$. Provemos que $\mathfrak{F}_t \subset G_t$. Para isto, basta mostrarmos que todo cilindro $C[k; n; w_n]$, $w_n \in S$, $k \in \mathbb{Q} \cap [0, t]$, $n \in \mathbb{N}$, pertence a G_t . Temos que,

$$C[k; n; w_n] : \{x \in \Omega : x(k) \in \pi_n^{-1}(\{w_n\})\}.$$

Assim, se $x \in C[k; n; w_n]$ e $x'(s) = x(s)$, $s \leq t$, então

$$x'(s) \in \pi_n^{-1}(\{w_n\})$$

para todo $k \in \mathbb{Q} \cap [0, t]$, $n \in \mathbb{N}$ e $w_n \in S$. Desta forma, obtemos que $\mathfrak{F}_t \subset G_t$. Agora vamos mostrar a volta, isto é, que $\mathfrak{F}_t \supset G_t$, $t \in [0, \infty)$. Se $A \in G_t$ temos que

$$A \not\subset C[k; n; w_n]$$

para todo racional $k > t$, $n \in \mathbb{N}$ e $w_n \in S$. Se $A = \Omega$ nada temos a fazer. Considere $A \subset \Omega$ e $A \neq \Omega$, existem elementos $s \in [0, t]$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $w_{n_0} \in S$ tais que

$$A \subset C[s; n_0; w_{n_0}] = \{x \in \Omega : x(s) \in \pi_{n_0}^{-1}(\{w_{n_0}\})\}.$$

Como $\mathbb{Q} \cap [0, t]$ é denso em $[0, t]$, existe uma sequência $\{k_j\} \subset \mathbb{Q} \cap [0, t]$ tal que $k_n \downarrow s$ ($k_j \geq k_{j+1} \geq s$). Então, utilizando a propriedade de continuidade à direita das funções indicadoras $I_{\{t_j, \infty\}}(\cdot)$, concluímos que

$$C[s; n_0; w_{n_0}] = \bigcap_{j=1}^{\infty} C[k_j; n_0; w_{n_0}] \in \mathfrak{F}_t.$$

Desde que $A \in \mathfrak{F}$, obtemos que

$$A \in \sigma\{C[k; n; w_n] : k \in \mathbb{Q} \cap [0, t], n \in \mathbb{N}, w_n \in S\} = \mathfrak{F}_t, t \in [0, \infty).$$

Desta forma concluímos que $G_t \subset \mathfrak{F}_t$. Considere, $A \in \mathfrak{F}_{t+}$. Seja $x \in A$ e $x' \in \Omega$ tal que $x(s) = x'(s)$ para $s \leq t$. Usando a continuidade das funções indicadoras, temos que $x' \in A$ e $A \in \mathfrak{F}_t$ pois do resultado anterior $G_t = \mathfrak{F}_t$. Dessa forma $\mathfrak{F}_{t+} \subset \mathfrak{F}_t$, portanto $\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$. $\square$

A seguir, apresentamos algumas definições que estaremos utilizando durante o trabalho.

Definição 2.2.4. Uma variável aleatória $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é denominada tempo de parada se $\{x : T(x) \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ para todo $t \in [0, \infty]$

Para todo $x \in \Omega$, temos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [0, \infty)$ com $k \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} x(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ x(s) &= (I_{\{t_1, \infty\}}(s), I_{\{t_2, \infty\}}(s), \dots, I_{\{t_k, \infty\}}(s), 0, 0, 0, 0, \dots), \quad s > 0. \end{aligned}$$

Assim, definimos uma função $T_j : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo

$$\begin{aligned} T_j(x) &= \inf\{s \in [0, \infty] : x(s) = (\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{j \text{ vezes}}, 0, 0, \dots) = \\ &= t_j; \text{ se } j \leq k \\ &= +\infty; \text{ se } j > k \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. A função $T_j : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é um tempo de parada com respeito à filtração $\mathfrak{F}_t$.

Prova: Para todo $t \in [0, \infty]$, temos que

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega : T_j(x) = 0\} &= \emptyset \\ \{x \in \Omega : T_j(x) \leq +\infty\} &= \Omega \\ \{x \in \Omega : T_j(x) \leq t\} &= \{x \in \Omega : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k, \ t_j \leq t, \ k \geq j.\} \end{aligned}$$

Seja $k_i \in \mathbb{Q}$ com $\{k_i\} \downarrow t$, então

$$C[k_i; t; 1] = \{x \in \Omega : x(k_i) \in \pi_t^{-1}(\{1\})\} \in \mathfrak{S}_{k_i}$$

Além disso, temos que

$$\{x \in \Omega : T_j(x) \leq k_i\} = C[k_i; 1; 1] \cap C[k_i; 2; 1] \cap C[k_i; 3; 1] \cap \dots \cap C[k_i; j; 1] \in \mathfrak{S}_{k_i}$$

Desde que $\{\mathfrak{S}_t\}$ é contínua à direita, concluímos que

$$\{x \in \Omega : T_j(x) \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \Omega : T_j(x) \leq k_i\} \in \mathfrak{S}_{t+} = \mathfrak{S}_t.$$

Portanto, $T_j : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é um tempo de parada. □

Com isso obtemos uma sequência de tempos de parada $\{T_j\}$ satisfazendo

- 1) $T_j(x) > 0; \forall x \in \Omega;$
- 2) $T_j(x) > T_{j+1}(x); \forall x \text{ t.q. } T_j(x) < \infty;$
- 3) $T_j(x) = T_{j+1}(x); \forall x \text{ t.q. } T_j(x) = \infty.$

Dados os tempos de parada $\{T_j\}$ podemos definir uma função de contagem $N : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, por

$$N_t(x) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq t\}}(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \quad (2.1)$$

Esta função é crescente em t , tem saltos unitários e admite limite à direita em t para todo $x \in \Omega$. Para mostrarmos que a função N_t é crescente em t , sejam $j \in \mathbb{N}$ e $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$, assim

$$I_{\{T_j(x) \leq t_1\}}(x) \leq I_{\{T_j(x) \leq t_2\}}(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega.$$

Então a função de contagem satisfaz

$$N_{t_1}(x) \leq N_{t_2}(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega.$$

Além disso, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_{t-h}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq t-h\}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq t\}} = N_t(x), \quad x \in \Omega.$$

Assim, N_t é contínua à direita e do mesmo teorema segue que N_t tem limite à esquerda

$$\lim_{h \rightarrow 0} N_{t+h}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq t+h\}}(x) = N_{t+}(x) < +\infty, \quad x \in \Omega.$$

Dado N_t , também podemos encontrar os tempos de parada, basta tomar $T_j = \inf\{t : N_t = j\}$. Na sequência vamos introduzir uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ e estudar as propriedades dos tempos de parada.

Definição 2.2.5. *Dado uma probabilidade P sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$, dizemos que o processo estocástico $N = (N_t, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}, P)$ é um processo pontual.*

O processo pontual será investigado mais profundamente quando utilizarmos alguns resultados importantes da teoria martingale, a decomposição de Doob-Meyer e os teoremas de existência e unicidade do compensador.

A seguir apresentamos alguns exemplos de processos pontuais que estarão servindo de ilustração para alguns resultados no decorrer desse capítulo, o processo de Poisson homogêneo e não-homogêneo.

Exemplo 2.2.1. *(Processo de Poisson Homogêneo)*

O processo de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ pode ser encontrado em muitas aplicações, ele é usado para modelar processos de chegada, como número de clientes que chegam em um caixa eletrônico, emissão de partículas radioativas, número de chamadas telefônicas que chegam num determinado intervalo de tempo etc.. Considere $T_1, \dots, T_k$ os tempos de chegada sucessivos em um processo de Poisson definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, então $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_k - T_{k-1}$ são independentes e identicamente distribuídos como uma distribuição exponencial com parâmetro $1/\lambda$ e a probabilidade induzida por $\{N_t : t \geq 0\}$ é a distribuição de Poisson com parâmetro λt ,

$$P[N_t = k] = \frac{\exp^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!},$$

segue daí, que o valor esperado de $\{N_t : t \geq 0\}$ é dado por $E[N_t] = \lambda t$ e a variância por $\text{var}[N_t] = \lambda t$. O parâmetro λ é chamado de intensidade ou taxa de falha do processo e no caso de λ ser uma função de t , teremos o processo de Poisson não-homogêneo. Quando

ele for igual a um, diremos processo de Poisson com parâmetro unitário. Para o processo de Poisson homogêneo temos que, para qualquer $t, s \geq 0$, $N_{s+t} - N_s$ é independente de $\{N_u : u \leq t\}$, isto é, o processo de Poisson tem incrementos independentes e para qualquer $t, s \geq 0$, a distribuição de $N_{s+t} - N_s$ é independente de t , isto é, o processo de Poisson tem incrementos estacionários. As trajetórias $t \rightarrow N_t$ do processo são funções escada, contínuas à direita, crescentes com saltos unitários e $N_0 = 0$. A densidade de probabilidade do n -ésimo tempo T_n de chegada do processo é uma *Gama*($n, \lambda(t)$) dada por

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

desde que $P[T_n \leq t] = P[N_t \geq n]$.

Exemplo 2.2.2. (*Processo de Poisson Não-Homogêneo*)

O processo de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ é um processo de Poisson não-homogêneo quando os incrementos não são estacionários, isto é, para qualquer $t, s \geq 0$, a distribuição de $N_{s+t} - N_s$ não é independente de t . Nesse caso a taxa de falha do processo para N_t é dada por uma função determinística $\lambda(t)$ e a taxa de falha acumulada é $A(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$. A distribuição de probabilidade de N_t é uma distribuição de Poisson com parâmetro $A(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

$$\begin{aligned} P[N_t = k] &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\} \cdot \frac{\left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\}^k}{k!} \\ &= \exp \{ -A(t) \} \frac{\{A(t)\}^k}{k!} \end{aligned}$$

A densidade de probabilidade do n -ésimo tempo T_n de chegada do processo é dada por

$$f_{T_n}(t) = \lambda(t) \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\} \frac{\left(\int_0^t \lambda(s) ds \right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2.3 Decomposição de Doob-Meyer

A decomposição de Doob-Meyer é um resultado fundamental na teoria dos processos estocásticos, ele garante que um processo pontual N_t pode ser decomposto como a soma de um martingale com um dado processo, chamado compensador. Para prosseguirmos, daremos algumas explicações e definições de alguns termos que serão essenciais e que serão bastante utilizados.

Definição 2.3.1. Um processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ é adaptado para uma filtração se, para cada $t \geq 0$, X_t é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável.

Definição 2.3.2. Seja $X = \{X_t : t \geq 0\}$ um processo estocástico contínuo à direita com limites à esquerda e $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$ uma filtração, definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. X é chamado um martingale com respeito à $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$ se

- 1) X é adaptado para $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$,
- 2) $E|X_t| < \infty$ para todo $t < \infty$,
- 3) $E[X_{t+s}|\mathfrak{F}_t] = X_t$ (P -q.c.) para $s \geq 0$ e $t \geq 0$.

X será chamado um submartingale se 3) for trocado por

$$E[X_{t+s}|\mathfrak{F}_t] \geq X_t \quad (P\text{-q.c.})$$

e um supermartingale se 3) for trocado por

$$E[X_{t+s}|\mathfrak{F}_t] \leq X_t \quad (P\text{-q.c.})$$

O processo N_t definido em 2.1 é um submartingale. O primeiro item de 2.3.2 verificamos do fato que cada tempo de parada T_j é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável, isto é, $\{x \in \Omega : T_j(x) \leq t\} \subset \mathfrak{F}_t$, a função $I_{\{x \in \Omega : T_j(x) \leq t\}}$ é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável e a soma de funções mensuráveis é mensurável. Para verificar o segundo item de 2.3.2 basta verificar que para todo intervalo finito o processo N_t salta somente um número finito de vezes, portanto é integrável para todo $t < \infty$. O terceiro item de 2.3.2 segue de

$$\begin{aligned} E[N_t|\mathfrak{F}_s] &= E[N_t + N_s - N_s|\mathfrak{F}_s] = E[N_t - N_s|\mathfrak{F}_s] + E[N_s|\mathfrak{F}_s] \\ &= E[N_t - N_s|\mathfrak{F}_s] + N_s \geq N_s, \quad t \geq s, \quad (P\text{-q.c.}) \end{aligned}$$

pois N_t é uma função crescente. Assim, N_t é um submartingale e segue desse resultado que o processo de Poisson também é um submartingale.

Definição 2.3.3. Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade com uma filtração $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$. A σ -álgebra em $[0, \infty) \times \Omega$ gerada por todos os conjuntos da forma

$$[0] \times A, \quad A \in \mathfrak{F}_0,$$

e

$$(a, b] \times A, \quad 0 \leq a < b < \infty, \quad A \in \mathfrak{F}_a,$$

é chamada a σ -álgebra previsível para a filtração $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$ e será denotada por $\mathfrak{F}^p$.

Definição 2.3.4. Um processo X é chamado previsível com respeito a uma filtração $\mathfrak{F}_t$ se, como uma aplicação de $[0, \infty) \times \Omega$ em R , ele é mensurável com respeito a σ -álgebra previsível. Nós chamamos X de um processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível.

A previsibilidade de um processo implica que nós podemos prever valores em qualquer ponto dado os valores em pontos precedentes como no caso de processos que são contínuos à esquerda. Qualquer processo com trajetórias contínuas quase-certamente é previsível. Por exemplo, o processo de Wiener é um processo previsível enquanto que o processo de Poisson não é, pois suas trajetórias são do tipo escada. [B.L.S. Prakasa Rao(1987)]

Definição 2.3.5. Um tempo de parada θ (com respeito à filtração $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$) é chamado previsível se um processo pontual $N_t = I_{\{\theta \leq t\}}$ é previsível.

De Liptser e Shirayev [1978, pg. 239] um tempo de parada θ é previsível se e somente se existe uma sequência crescente de tempos de parada $\{\theta_n, n \geq 1\}$, tais que $\theta_n < \theta$ e $\lim_n \theta_n = \theta$ (P -q.c.).

Definição 2.3.6. Um tempo de parada σ (com respeito à filtração $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$) é dito ser totalmente inacessível se $P[\theta = \sigma < \infty] = 0$ para cada tempo de parada θ previsível.

Definição 2.3.7. Um processo estocástico $X = \{X_t : t \geq 0\}$ é quadrado integrável se $\sup_t E|M_t|^2 < \infty$, $t \geq 0$.

Considere um martingale M quadrado integrável sobre $(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}, P)$ então,

$$E[M_t^2 | \mathfrak{F}_s] \leq (E[M_t | \mathfrak{F}_s])^2 = M_s^2, \quad t > s$$

o sinal de desigualdade é garantido pela desigualdade de Jensen. Dessa forma, M^2 é um submartingale e segue da decomposição de Doob-Meyer a seguinte definição,

Definição 2.3.8. A variação quadrática previsível de um martingale M quadrado integrável é um processo previsível crescente contínuo à direita $\langle M, M \rangle$ tal que

$$M = M^2 - \langle M, M \rangle$$

é um martingale.

Teorema 2.3.1. Supondo que $E[N_t] < \infty$, $t \in [0, \infty)$, então, existe um único (no sentido estocástico) processo crescente previsível A_t , adaptado para $\mathfrak{F}_t$ com $A_0 = 0$, tal que:

$$M = N - A$$

onde M é um martingale quadrado integrável e,

$$\langle M, M \rangle = \langle M \rangle = A,$$

também, o compensador A_t , $t \geq 0$, é contínuo $t < \infty$ (P -q.c.) se e somente se os tempos de salto do processo N_t , $t \geq 0$, são totalmente inacessíveis.

Prova O processo N_t é um submartingale com trajetórias contínuas à direita e portanto de classe DL (ver [Teorema 3.7, pag.62, Lipster e Shyriayev]) e da decomposição de Doob-Meyer [Liptser e Shiryayev Teorema 3.8, pag. 65]

$$M = N - A$$

é um martingale. Agora precisamos mostrar que M é quadrado integrável, portanto uniformemente integrável. Consideremos os seguintes instantes de salto $T_n : n = 1, 2, \dots$ de N , totalmente inacessíveis. Dado que o processo $(N_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t)$ é quadrado integrável, pois ele é não-decrescente e limitado, isto é,

$P[0 \leq N_{t \wedge T_n} \leq n] = 1$, para todo t . Assim, (ver [Meyer: Probabilités et Potentiel, seção VIII, teorema 31]),

$$M_{t \wedge T_n} = N_{t \wedge T_n} - A_{t \wedge T_n}$$

é martingale quadrado integrável. Agora precisamos mostrar que:

$$A_{t \wedge T_n} = \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}$$

que é o mesmo que mostrar

$$M_{t \wedge T_n}^2 - A_{t \wedge T_n} \tag{2.2}$$

é um martingale. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$ e $s < t$ arbitrário, define-se uma sequência $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$ de tempos de parada, tal que

$$S_0 = s, \quad \lim_k S_k = t$$

$$0 \leq A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}} \leq \epsilon \quad (P - q.c.) \tag{2.3}$$

$$0 \leq N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}} \leq \epsilon \quad (P - q.c.) \tag{2.4}$$

A existência da sequência está garantida pela continuidade do compensador. Então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} [M_{t \wedge T_n \wedge S_k} - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}} - A_{t \wedge T_n \wedge S_k} + A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 = \\
& \sum_{k=1}^{\infty} [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 - \\
& - 2 \sum_{k=1}^{\infty} [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}][A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Como, $(N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}})$ só pode assumir os valores 0 ou 1, temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 = \\
& \lim_m \sum_{k=1}^m [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}] = N_{t \wedge T_n} - N_{s \wedge T_n}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& | E[\sum_{k=1}^{\infty} [M_{t \wedge T_n \wedge S_k} - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 - (N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}) | \mathfrak{F}_s] | \leq \\
& | 2 \sum_{k=1}^{\infty} [N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}][A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}] | + \\
& | \sum_{k=1}^{\infty} [A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}]^2 | =
\end{aligned}$$

usando 2.2, temos que o termo do lado direito da desigualdade fica

$$= 2\epsilon[N_{t \wedge T_n} - N_{t \wedge T_n}] + \epsilon[N_{t \wedge T_n} - N_{t \wedge T_n}]$$

e como ϵ é arbitrário,

$$E[\sum_{k=1}^{\infty} (M_{t \wedge T_n \wedge S_k} - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}})^2 - (N_{t \wedge T_n \wedge S_k} - N_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}) | \mathfrak{F}_s] = 0$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned}
& E[(M_{t \wedge T_n \wedge S_k} - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}})^2 | \mathfrak{F}_s] = \\
& E[M_{t \wedge T_n \wedge S_k}^2 - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}^2 | \mathfrak{F}_s]
\end{aligned}$$

e como,

$$N_{t \wedge T_n} - A_{t \wedge T_n}$$

é um martingale segue que

$$E[N_{t \wedge T_n} - N_{s \wedge T_n} | \mathfrak{F}_s] = E[A_{t \wedge T_n} - A_{s \wedge T_n} | \mathfrak{F}_s]$$

Daí,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{\infty} (M_{t \wedge T_n \wedge S_k}^2 - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}^2) - (A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}) | \mathfrak{F}_s\right] &= \\ E\left[\lim_m \sum_{k=1}^m (M_{t \wedge T_n \wedge S_k}^2 - M_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}^2) - (A_{t \wedge T_n \wedge S_k} - A_{t \wedge T_n \wedge S_{k-1}}) | \mathfrak{F}_s\right] &= \\ = E[(M_{t \wedge T_n}^2 - M_{s \wedge T_n}^2) - (A_{t \wedge T_n} - A_{s \wedge T_n}) | \mathfrak{F}_s] &= 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$M_{t \wedge T_n}^2 - A_{s \wedge T_n}$$

é um martingale. Com isso conclui-se que

$$A_{t \wedge T_n} = \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} \quad (2.6)$$

Desde que $M_{t \wedge T_n}$ converge para M_t , segue do lema de Fatou que

$$E[M_t^2] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[N_{t \wedge T_n}] = E[N_t]$$

E pelo teorema da convergência dominada

$$\begin{aligned} E[M_t^2 | \mathfrak{F}_s] &= E[\lim_n M_{t \wedge T_n}^2 | \mathfrak{F}_s] = \\ &= \lim_n E[M_{t \wedge T_n}^2 | \mathfrak{F}_s] \leq \lim_n M_{s \wedge T_n}^2 = M_s^2 \end{aligned}$$

Assim, M^2 é um submartingale positivo, pela decomposição de Doob-Meyer existe um único processo crescente previsível B , tal que

$$M^2 - B$$

é um martingale. Agora usando 2.6 segue que

$$B_t = \lim_n B_{t \wedge T_n} = \lim_n A_{t \wedge T_n} = A_t,$$

a prova da segunda parte segue de [Liptser, Shiryaev, corolário 1, cap. 18]. Portanto a prova está concluída. $\square$

Exemplo 2.3.1.

Considere o processo de Poisson homogêneo N_t definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e adaptado para uma filtração $\mathfrak{F}_t$. Ele é um submartingale e sua taxa de falha acumulada é $A_t = \lambda t$, usando a decomposição de Doob-Meyer podemos verificar que $M_t = N_t - A_t$ é um martingale

$$\begin{aligned} E[M_t|\mathfrak{F}_s] &= E[N_t - A_t|\mathfrak{F}_s] = E[N_t - \lambda t|\mathfrak{F}_s] = E[N_t|\mathfrak{F}_s] - E[\lambda t|\mathfrak{F}_s] \\ &= E[N_t + N_s - N_s|\mathfrak{F}_s] - \lambda t = E[N_t - N_s|\mathfrak{F}_s] + E[N_s|\mathfrak{F}_s] - \lambda t \\ &= E[N_t - N_s] + N_s - \lambda t - N_s - \lambda s = M_s. \end{aligned}$$

O item 3) da definição de martingale está provado, os itens 1) e 2) seguem de forma trivial. Assim, A_t é o compensador do processo de Poisson homogêneo. Como ele é contínuo, do teorema segue que os tempos de salto desse processo são totalmente inacessíveis, isto quer dizer que para cada T instante de salto não existe uma sequência de tempos $\{T_n\}$ tais que $T_n < T$ e $\lim_n T_n = T$.

2.4 Taxa de Falha do Processo Pontual

Nesta seção faremos um estudo da taxa de falha α_t de um processo pontual N_t conforme Aalen (1978). Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$, $t \in [0, 1]$, o espaço de probabilidade adaptado com a filtração $\mathfrak{F}_t$ (contínua à direita) definidos no início deste capítulo [Seções 2.1 e 2.2]. Assim, vamos assumir que as seguintes suposições são válidas

- 1) $E[N_t] < \infty$, $t < \infty$;
- 2) Os tempos de salto $T_1 < T_2 < \dots$ de N_t são totalmete inacessíveis.

Além disso, vamos assumir que existe um processo não negativo α com trajetórias contínuas à esquerda, com limites à direita em cada ponto, adaptado à filtração $\mathfrak{F}_t$ e

$$\Lambda_t = \int_0^t \alpha_s ds.$$

O processo α é chamado taxa de falha (ou processo intensidade) de N com respeito à filtração $\mathfrak{F}_t$ e a probabilidade P .

Teorema 2.4.1. *Suponha N é um processo de pontual, e seja $T_1, T_2, \dots$ os sucessivos tempos de salto de N , isto é, os tempos t tais que $\Delta N_t = N_t - N_{t-} = 1$. Assim,*

$$P[T_{n+1} - T_n \leq t | \mathfrak{F}_{T_n}], \text{ é absolutamente contínuo em } t$$

se e somente se o compensador Λ de N pode ser escrito como

$$\Lambda_t = \int_0^t \alpha_s ds,$$

onde α_s é um processo estocástico.

Esse Teorema diz que se a distribuição entre os tempos de falha for absolutamente contínua o compensador do processo será absolutamente contínuo. O seguinte teorema pode ser encontrado em Fleming e Harrington [1991, pg. 131, Teorema 4.2.1] ou Aalen [1978, Lema 3.3, i e ii].

Teorema 2.4.2. *Seja $\{N_t : t \geq 0\}$ um processo pontual e $\{\Lambda_t : t \geq 0\}$ o compensador com respeito a uma filtração contínua à direita $\{\mathfrak{F}_t : t \geq 0\}$. Assuma $\Lambda_t = \int_0^t \alpha_s ds$ para algum processo α que é contínuo à esquerda, tem limite direita e é limitado por uma variável aleatória integrável Q , isto é, $\alpha_t \leq Q$, para todo t e $E[Q] < \infty$. Então,*

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[N_{t+h} - N_t | \mathfrak{F}_t] = \alpha_{t+}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[N_{t+h} - N_t = 1 | \mathfrak{F}_t] = \alpha_{t+}.$$

Prova para o item (1)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[N_{t+h} - N_t | \mathfrak{F}_t] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[M_{t+h} - M_t + A_{t+h} - A_t | \mathfrak{F}_t] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{E[M_{t+h} | \mathfrak{F}_t] - E[M_t | \mathfrak{F}_t] + E[A_{t+h} - A_t | \mathfrak{F}_t]\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[A_{t+h} - A_t | \mathfrak{F}_t] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E\left[\int_t^{t+h} \alpha_s ds | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= E\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \alpha_s ds | \mathfrak{F}_t\right] = E[\alpha_{t+} | \mathfrak{F}_t] = \alpha_{t+} \end{aligned}$$

vamos provar agora o item (2), fixemos t e seja $S > t$ o instante do primeiro salto depois de t . Desde que S é um tempo de parada, segue que $I_{(t,S]}(u)$ é uma família de variáveis aleatórias adaptada para $\mathfrak{F}_u$, desde que ele é contínuo à esquerda, ele é um processo previsível. Para $h > 0$, definimos a integral estocástica

$$\int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) dM(u)$$

este processo, com h variando no tempo é um martingale, assim

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[N_{t+h} - N_t \geq 1 | \mathfrak{F}_t] &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[\int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) dN(u) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[\int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) d\Lambda(u+) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= E\left[\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) d\Lambda(u+) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= E[\alpha(u+) | \mathfrak{F}_t] = \alpha(u+) \end{aligned}$$

Agora só precisamos mostrar que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[N_{t+h} - N_t \geq 2 | \mathfrak{F}_t] = 0$$

Considere agora S_1 o instante do segundo salto do processo N depois de t .

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[N_{t+h} - N_t \geq 2 | \mathfrak{F}_t] &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[\int_t^{t+h} I_{(S,S_1]}(u) dN(u) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E\left[\int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) d\Lambda(u+) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= E\left[\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} I_{(t,S]}(u) d\Lambda(u+) | \mathfrak{F}_t\right] = 0 \end{aligned}$$

e portanto o item (2) está demonstrado.

No Capítulo 4 vamos estimar a taxa de falha acumulada A do processo pontual N_t de forma Bayesiana não-paramétrica para o modelo de intensidade multiplicativa [Aalen (1978)], nesse caso a taxa de falha α tem a seguinte forma

$$\alpha_s = Y_s dA_s,$$

onde Y é um processo observável da amostra e A é uma função determinística desconhecida. Também vamos apresentar um estimador para a taxa de falha desse processo.

2.5 Representação do Processo Pontual

Nesta seção nós apresentamos os teoremas de existência e unicidade do compensador, esses teoremas garantem que

Teorema 2.5.1. *Seja $F_1(t) = P(T_1 \leq t)$, e seja*

$$F_i(t) = P(T_i \leq t | T_{i-1}, \dots, T_1), \quad i \geq 2,$$

funções distribuições condicionais regulares. Então o compensador $A = \{A_t, \mathfrak{F}_t\}, t < +\infty$, do processo pontual $N = \{N_t, \mathfrak{F}_t\}, t \geq 0$, pode ser definido pela fórmula

$$A = \sum_{i \geq 1} A_t^{(i)},$$

onde

$$A_t^{(i)} = \int_0^{t \wedge T_i} \frac{dF_i(u)}{1 - F_i(u-)}, \quad i \geq 1.$$

(A) Para fixados $s_{i-1}, \dots, s_1, s_0$, a função $Q_i(s_i : s_{i-1}, \dots, s_1, s_0)$ é não decrescente, contínua à direita, com saltos que não excedem uma unidade e, para $s_{i-1} < \infty$,

$$\lim_{s_i \downarrow s_{i-1}} Q_i(s_i : s_{i-1}, \dots, s_1, s_0) = 0;$$

(B) $Q_i(s_i : s_{i-1}, \dots, s_1, s_0) = 0$ fora do domínio

$$\{(s_i, s_{i-1}, \dots, s_1, s_0) : s_i > s_{i-1} > \dots > s_1 > s_0\};$$

(C) $A_t^i(x) = Q_i(t \wedge T_i(x) : T_{i-1}(x), \dots, T_1(x), 0)$.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Existência). *Seja $Q_i(s_i : s_{i-1}, \dots, s_1, s_0), i \geq 1$, uma sequência de funções Borel satisfazendo (A) e (B). Então, no espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{F})$ existe uma probabilidade μ tais que o processo*

$$A = (A_t(x), \mathfrak{F}_t, \mu), t \geq 0 \quad \text{com} \quad A_t(x) = \sum_{i \geq 1} A_t^i(x)$$

e

$$A_t^i(x) = Q_i(t \wedge T_i(x) : T_{i-1}(x), \dots, T_1(x), 0),$$

é um compensador do processo pontual $N = (N_t, \mathfrak{F}_t, \mu), t \geq 0$

Teorema 2.5.3 (Teorema de Unicidade). *Seja $A = (A_t(x), \mathfrak{F}_t, \mu)$ e $B = (B_t(x), \mathfrak{F}_t, \nu)$, $t \geq 0$, os compensadores dos processos pontuais $(N_t(x), \mathfrak{F}_t, \mu)$ e $(N_t(x), \mathfrak{F}_t, \nu), t \geq 0$, respectivamente. Seja $\theta = \theta(x)$ um tempo de parada (com respeito ao sistema $(\mathfrak{F}_t), t \geq 0$) tais que, μ (ou ν)(P-q.c.), $A_{t \wedge \theta} = B_{t \wedge \theta}$. Então as restrições $\mu/\mathfrak{F}_\theta$ e $\nu/\mathfrak{F}_\theta$ das medidas μ e ν para a σ -álgebra $\mathfrak{F}_\theta = \sigma(\bigcup_n \mathfrak{F}_{\theta \wedge T_n})$ coincidem.*

Capítulo 3

Processos de Lévy Puro Salto

3.1 Introdução

Neste trabalho estaremos assumindo que a taxa de falha acumulada A é um processo Lévy puro salto, chamado de processo Beta. Processos de Lévy têm surgido em vários trabalhos de análise bayesiana não paramétrica, Doksum (1974), Ferguson (1974), Ferguson e Phadia (1979), Hjort (1990), Kim (1999), Kim e Lee (2001) e aparentemente um dos primeiros trabalhos sobre o assunto foi de Ferguson e Klass (1972). A importância dessa classe de processos está no fato de serem conjugadas, resultado devido a Doksum (1974) e Ferguson e Phadia (1979). Interesse em fazer simulações têm feito alguns autores estudarem a representação desses processos, Damien, Laud e Smith (1995), Walker e Damien (1998,2000), Wolpert e Ickstad (1998). Aqui, vamos estudar os processos de Lévy puro salto via o compensador.

3.2 Processos de Lévy Puro Salto

Para a obtenção de alguns resultados nessa seção precisamos que a base estocástica $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)_{t \geq 0}$ seja completa. Para completar uma dada base estocástica $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)_{t \geq 0}$ procedemos conforme Jacod e Shiryaev [(1987), pg. 2]. Neste sentido, completamos primeiro a σ -álgebra $\mathfrak{F}$, denotando por $\mathcal{N}^P$ a classe de todos os subconjuntos dos conjuntos de probabilidade nula (com respeito à P) e por $\mathfrak{F}^P$ a menor σ -álgebra gerada por $\mathfrak{F} \cup \mathcal{N}^P$. Da mesma forma, tomamos a menor σ -álgebra gerada por $\mathfrak{F}_t$ e $\mathcal{N}^P$ e denotamos por $\mathfrak{F}_t^P$. Assim, $(\Omega, \mathfrak{F}^P, \mathfrak{F}_t^P, P)_{t \geq 0}$ é a dada base estocástica completada e, além disso, a filtração definida por $\mathfrak{F}_t^P$ não perde a propriedade de continuidade à direita

[Protter (1990), Teorema 31, pg. 22]. Para evitar carregar a notação vamos considerar que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)_{t \geq 0}$ é uma base estocástica completa.

Definição 3.2.1 (Processo de Lévy puro salto). *Um Processo de Lévy puro salto é um processo estocástico A definido sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)_{t \geq 0}$, satisfazendo:*

a) A é càdlàg e adaptado à filtração $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$;

b) Para todo $t \in [0, 1]$ e $\omega \in \Omega$

$$A_t(\omega) = \sum_s \Delta A_s(\omega) I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s);$$

c) A tem incrementos independentes;

d) $A_0(\omega) = 0$; $\Delta A_t(\omega) \leq 1$; $\forall \omega \in \Omega$; $\forall t \in [0, 1]$.

Desde que A tem trajetórias càdlàg, ele tem no máximo um número finito de saltos de tamanho maior que ε ($\varepsilon > 0$, fixado) no intervalo $(0, 1]$ [Billingsley(1968), Lema 1, pg. 110]. Logo, A terá no máximo um número enumerável de saltos. Assim, a representação (b) está bem definida. Observe que podemos caracterizar o processo de Lévy puro salto através das distribuições dos saltos e do tamanho do salto. Para isto, associamos uma medida aleatória μ , na forma

$$\mu(\omega; [0, t] \times B) = \sum_s I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s) I_{\{B\}}(\Delta A_s(\omega))$$

para $\omega \in \Omega$, $t \in [0, 1]$ e $B \in \beta((0, 1])$

Para todo $B \in \beta((0, 1])$, definimos tempos de parada com respeito à filtração $\mathfrak{F}_t$ [ver, Delacherie e Meyer (1978), Teorema 44, pg. 66] da seguinte forma

$$\begin{aligned} T_0^B(\omega) &= 0; \omega \in \Omega \\ T_1^B(\omega) &= \inf\{t > T_0^B(\omega) : I_{\{\Delta A_t(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{B\}}(\Delta A_t(\omega)) = 1\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ T_n^B(\omega) &= \inf\{t > T_{n-1}^B(\omega) : I_{\{\Delta A_t(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{B\}}(\Delta A_t(\omega)) = 1\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

A partir da sequência de tempos de parada $\{T_n^B\}$, podemos interpretar μ como um processo pontual da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mu(\omega; [0, t] \times B) &= \sum_s I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s) I_{\{B\}}(\Delta A_s(\omega)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{T_i^B < t\}}(\omega).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Lema 3.2.1. *Para todo $B \in \beta((0, 1])$, tomamos uma medida sobre $([0, 1] \times (0, 1]; \beta([0, 1] \times (0, 1]))$, na forma*

$$\nu([0, t] \times B) = E[\mu(\cdot; [0, t] \times B)]$$

Além disso, o processo estocástico

$$M_t^B(\omega) = \mu(\omega; [0, t] \times B) - \nu([0, t] \times B)\tag{3.2}$$

é um martingale com respeito a filtração $\{\mathfrak{F}_t\}$ e ν é única, no sentido de que se existe $\tilde{\nu}$, uma medida sobre $([0, 1] \times (0, 1]; \beta([0, 1] \times (0, 1]))$ satisfazendo 3.2, então $\tilde{\nu} = \nu$.

Prova: Vamos mostrar que de fato ν é uma medida sobre $([0, 1] \times [0, 1]; \beta([0, 1] \times (0, 1]))$. Assim, devemos mostrar que ν satisfaz:

i) $\nu(\emptyset) = 0$;

ii) $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \times B_i)$, $A_i \in \beta([0, 1])$, $B_i \in \beta((0, 1])$,
 $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$, $i \neq j$.

O item i) sai direto do fato de μ ser medida. Considere $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$ com $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$, $i \neq j$ e $A_i \in \beta([0, 1])$ e $B_i \in \beta((0, 1])$. Utilizando o Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\begin{aligned}\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)) &= E[\mu(\cdot, \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i))] = E[\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\cdot, A_i \times B_i)] \\ &= E[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(\cdot, A_i \times B_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sum_{i=1}^n \mu(\cdot, A_i \times B_i)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E[\mu(\cdot, A_i \times B_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} E[\mu(\cdot, A_i \times B_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \times B_i).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Agora, vamos mostrar que $M_t^B(\omega)$ é um martingale. Assim, para $s \leq t$

$$\begin{aligned} E[M_t^B | \mathfrak{F}_s] &= E[\mu(., [0, t] \times B) - \nu([0, t] \times B) | \mathfrak{F}_s] \\ &= E[\mu(., [0, s] \times B) - \nu([0, s] \times B) + \mu(., (s, t] \times B) - \nu((s, t] \times B) | \mathfrak{F}_s] \\ &\quad \text{incrementos independentes} \\ &= \mu(., [0, s] \times B) - \nu([0, s] \times B) + E[\mu(., (s, t] \times B) - \nu((s, t] \times B)] \\ &= \mu(., [0, s] \times B) - \nu([0, s] \times B) - M_s^B \end{aligned}$$

A unicidade da decomposição de Doob-Meyer [Teorema 2.3.1, capítulo 2] garante que ν é o compensador do processo pontual μ . Além disso, concluímos que μ é uma medida aleatória de Poisson no sentido de Jacod e Shiryaev [1987, pag. 70], pois o compensador é determinístico. A medida ν é única, no sentido que, se uma outra medida $\tilde{\nu}$ sobre $[0, 1] \times (0, 1]$ satisfaz as condições do Lema então $\nu = \tilde{\nu}$, de acordo com a decomposição de Doob-Meyer. $\square$

Lema 3.2.2. *Seja $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e integrável (em relação a μ). Então, para todo $B \in \beta((0, 1])$*

$$\int_B f(x) \mu(\omega; [0, t] \times dx) = \sum_s f(\Delta A_s(\omega)) I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{B\}}(\Delta A_s(\omega)) I_{\{[0, t]\}}(s)$$

Prova: Segue do fato que μ é uma medida de contagem. $\square$

Assim, se tomarmos $B = (0, 1]$ e $f(x) = x$ para todo x , concluímos que

$$\int_0^1 x \mu(\omega; [0, t] \times dx) = A_t(\omega);$$

para todo $t \in [0, 1]$ e $\omega \in \Omega$. Com isso, obtemos que o processo de Lévy puro salto pode ser caracterizado pela medida aleatória μ .

O seguinte teorema fornece fórmulas que nos permite calcular a esperança e a variância do processo de Lévy A .

Teorema 3.2.1. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e integrável (em relação a μ) e ν o compensador do processo pontual μ associado ao processo de Lévy puro salto A . Então, para todo $B \in \beta((0, 1])$*

$$E\left[\int_B f(x) \mu(., [0, t] \times dx)\right] = \int_B f(x) \nu([0, t] \times dx) \quad (3.4)$$

e

$$E\left[\left(\int_B f(x) \mu(., [0, t] \times dx) - \int_B f(x) \nu([0, t] \times dx)\right)^2\right] =$$

$$= \int_B f^2(x) \nu([0, t] \times dx) = \text{Var} \left[\int_B f(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right]. \quad (3.5)$$

Prova: Vamos provar 3.4, para isso, vamos primeiro considerar $f(x)$ como sendo uma função simples $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j I_{B_j}(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} E \left[\int_B f_n(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] &= E \left[\int_B \sum_{j=1}^n a_j I_{B_j}(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^n a_j \int_{B \cap B_j} \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^n a_j \mu(\cdot; [0, t] \times B \cap B_j) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \nu([0, t] \times B \cap B_j) \\ &= \int_B f(x) \nu([0, t] \times dx). \end{aligned}$$

Vamos supor agora que $f(x)$ é uma função mensurável não-negativa. Seja f_n uma sequência de funções simples, tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $f_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j^n I_{B_j^n}(x)$. Então, aplicando o Teorema 6.2.1 e o Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\begin{aligned} E \left[\int_B f(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] &= E \left[\int_B \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] \\ &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \sum_{j=1}^n a_j^n I_{B_j^n}(x) \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \right] \\ &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j^n \mu(\cdot; [0, t] \times B \cap B_j^n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{j=1}^n a_j^n \mu(\cdot; [0, t] \times B \cap B_j^n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) \nu([0, t] \times dx) \\ &= \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \nu([0, t] \times dx) \\ &= \int_B f(x) \nu([0, t] \times dx) \end{aligned}$$

Considere $f(x)$ uma função mensurável geral. Temos que toda função mensurável é decomposta como a diferença entre suas partes positiva e negativa, isto é $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- são funções mensuráveis não-negativas. Dessa forma, aplicando o resultado

anterior

$$\begin{aligned}
 E\left[\int_B f(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] &= E\left[\int_B [f^+(x) - f^-(x)]\mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] \\
 &= E\left[\int_B f^+(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx) - \int_B f^-(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] \\
 &= E\left[\int_B f^+(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] - E\left[\int_B f^-(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] \\
 &= \int_B f^+(x)\nu([0, t] \times dx) - \int_B f^-(x)\nu([0, t] \times dx) \\
 &= \int_B [f^+(x) - f^-(x)]\nu([0, t] \times dx) \\
 &= \int_B f(x)\nu([0, t] \times dx).
 \end{aligned}$$

Assim, a prova de 3.4 está terminada. Resta-nos provar 3.5. Seja,

$$M_t^i = \mu(\omega; [0, t] \times B_i) - E[\mu(\cdot; [0, t] \times B_i)]$$

Os M_t^i são L^p -martingales, para todo $p \geq 0$ e $E[M_t^i] = 0$. Supondo que B_i e B_j são disjuntos. Nós temos

$$E[M_t^i M_t^j] = E\left[\sum_k (M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i) \sum_l (M_{t_{l+1}}^j - M_{t_l}^j)\right]$$

para qualquer partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Usando a propriedade martingale, temos

$$E[M_t^i M_t^j] = E\left[\sum_k (M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)(M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j)\right]$$

e da desigualdade $|ab| \leq (a^2 + b^2)$

$$\sum_k (M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)(M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j) \leq \left(\sum_k (M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)\right)^2 + \left(\sum_k (M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j)\right)^2$$

Além disso,

$$\left(\sum_k (M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)\right)^2 \leq (\mu(\omega; [0, t] \times B_i))^2 + (E[\mu(\cdot; [0, t] \times B_i)])^2.$$

Portanto as somas são dominadas por uma variável aleatória integrável. Desde que M_t^i e M_t^j tem trajetórias de variação finita em $[0, t]$, nós podemos tomar uma sequência $(\pi_n)_{n \geq 1}$ de partições onde o $\max_k |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$, nós temos

$$E[M_t^i M_t^j] = E\left[\sum_{0 < s \leq t} \Delta M_s^i \Delta M_s^j\right] = E\left[\sum_{0 < s \leq t} \Delta \mu(\cdot; [0, s] \times B_i) \Delta \mu(\cdot; [0, s] \times B_j)\right] = 0;$$

A esperança acima é 0 porque, se $\Delta\mu(\omega; [0, s] \times B_i) = 1$ no instante s então, $\Delta A_s \in B_i$, caso contrário é 0 e como B_i e B_j são disjuntos, ΔA_s não pode saltar no mesmo instante para lugares distintos. Considere agora $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j I_{B_j}(x)$ uma função simples, temos

$$\begin{aligned}
 & E\left[\int_B f(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx) - \int_B f(x)\nu([0, t] \times dx)\right]^2 \\
 = & E\left[\int_B \sum_{j=1}^n a_j I_{B_j}(x)\mu(\cdot; [0, t] \times dx) - \int_B \sum_{j=1}^n a_j I_{B_j}(x)\nu([0, t] \times dx)\right]^2 \\
 = & E\left[\sum_{j=1}^n a_j \mu(\cdot; [0, t] \times B \cap B_j) - \sum_{j=1}^n a_j \nu([0, t] \times B \cap B_j)\right]^2 \\
 = & E\left[\sum_{j=1}^n a_j [\mu(\cdot; [0, t] \times B \cap B_j) - \nu([0, t] \times B \cap B_j)]\right]^2 \\
 = & E\left[\sum_{j=1}^n a_j M_t^j\right]^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 E[M_t^j]^2 + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_r a_s E[M_t^r M_t^s] \\
 = & \sum_{j=1}^n a_j^2 \nu([0, t] \times B \cap B_j) - \int_B \sum_{j=1}^n a_j^2 I_{B_j}(x) \nu([0, t] \times dx) \\
 = & \int_B f^2(x) \nu([0, t] \times dx).
 \end{aligned}$$

O resto da prova segue da mesma forma como foi feito para 3.4. $\square$

Considere o processo,

$$\begin{aligned}
 H_t(\omega) &= A_t(\omega) - E[A_t] = \\
 &= A_t(\omega) - \int_0^1 x \nu([0, t] \times dx),
 \end{aligned}$$

pois,

$$E[A_t] = E\left[\int_0^1 x \mu(\cdot; [0, t] \times dx)\right] = \int_0^1 x \nu([0, t] \times dx) \quad (3.6)$$

Proposição 3.2.1. *O processo H_t é um martingale com respeito à filtração $\{\mathfrak{F}_t\}$.*

Prova: É semelhante à prova feita no lema 3.2.1. $\square$

Desde que A é um submartingale, obtemos da decomposição de Doob-Meyer que $E[A_t]$ é o compensador do processo de Lévy puro-salto A_t .

3.3 Representação do Processo de Lévy

Considere $A : \Omega \times (0, 1] \rightarrow [0, 1]$ um processo de Lévy puro salto. Então, A tem a seguinte representação

$$A_t(\omega) = \sum_s \Delta A_s(\omega) I_{\{A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s), \quad t \in [0, 1], \quad \omega \in \Omega.$$

Nesta seção, vamos introduzir uma representação para o processo de Lévy que será utilizada para obtermos um algoritmo de simulação de tais processos. Nossa representação é uma generalização da representação de Ferguson e Klass(1972) e Walker e Damien (2000).

Seja $B_k^{(n)} = (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ um intervalo diádico para $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, utilizando a Equação 3.1, temos que

$$\mu(\omega, [0, t] \times B_k^{(n)}) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{T_i^{B_k^{(n)}}(\omega) \leq t\}}(\omega).$$

Ao denotarmos

$$S_i^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} T_i^{B_k^{(n)}}(\omega)$$

obtemos que $S_i^{(n)}$ é um tempo de parada, e

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu(\omega, [0, t] \times B_k^{(n)}) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{T_i^{B_k^{(n)}}(\omega) \leq t\}}(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} I_{\{T_i^{B_k^{(n)}}(\omega) \leq t\}}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{S_i^{(n)}(\omega) \leq t\}}(\omega), \end{aligned}$$

pois,

$$\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \{T_i^{B_k^{(n)}}(\omega) \leq t\} = \{S_i^{(n)}(\omega) \leq t\}.$$

Assim, concluímos que

$$\mu(\omega, [0, t] \times (0, 1]) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu(\omega, [0, t] \times B_k^{(n)}) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{S_i^{(n)}(\omega) \leq t\}}(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ao tomarmos,

$$S_i(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_i^{(n)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

obtemos que S_i é um tempo de parada, e

$$\mu(\omega, [0, t] \times (0, 1]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{S_i^{(n)}(\omega) \leq t\}}(\omega) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\{S_i^{(n)}(\omega) \leq t\}}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{S_i(\omega) \leq t\}}(\omega),$$

pois,

$$\{\omega : S_i^{(n)}(\omega) \leq t\} = \{\omega : S_i(\omega) \leq t\}$$

Assim, concluímos que a medida aleatória μ pode ser representada por

$$\mu(\omega; [0, t] \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{B\}}(\Delta A_{S_i(\omega)}(\omega)) I_{\{S_i(\omega) \leq t\}}(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$, $t \in [0, 1]$ e $B \in \beta((0, 1])$.

Além disso, obtemos que para todo $t \in [0, 1]$ e $\omega \in \Omega$,

$$A_t(\omega) = \int_0^1 x \mu(\omega; [0, t] \times dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta A_{S_i(\omega)}(\omega) I_{\{S_i(\omega) \leq t\}}(\omega) = \int_0^t \Delta A_s dG_s(\omega),$$

onde $G_t(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{S_i(\omega) < t\}}(\omega)$ corresponde ao processo pontual que conta o número de saltos do processo de Lévy puro salto A . Com isso, obtemos o seguinte lema.

Lema 3.3.1. *Considere A um processo de Lévy puro salto, então*

$$A_t(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta A_{S_i(\omega)}(\omega) I_{\{S_i(\omega) < t\}}.$$

Na maioria dos processos de Lévy puro salto encontrados na prática, o compensador ν é dado por

$$\nu([0, t] \times B) = \int_0^t \int_B f_s(x) dx ds$$

Lema 3.3.2. *O compensador do processo de salto G_t é dado por:*

$$\nu([0, t] \times (0, 1]) = \int_0^t \left[\int_0^1 f_s(x) dx \right] ds ; t \in [0, 1].$$

Prova: Inicialmente, temos que

$$\nu(\omega; [0, t] \times B) - \nu([0, t] \times B)$$

é um martingale. Assim, concluímos que

$$\sum_{i=1}^n I_{\{S_i \leq t\}} - \int_0^t \left[\int_0^1 f_s(x) dx \right] ds$$

é um martingale com respeito a filtração $\mathfrak{F}_t$. Finalmente, obtemos da unicidade da decomposição de Doob-Meyer que o compensador é único. $\square$

Observe que o processo pontual G_t é um processo de Poisson não-homogêneo com taxa de falha

$$\int_0^1 f_s(x) dx.$$

3.4 Processos Beta

Vamos fazer uma aplicação aos processos beta [Kim(1999),Hjort(1990)]. Assim, considere λ_0 , α e β funções contínuas estritamente positivas definidas em $[0, 1]$ e $A_0 = \int_0^t \lambda_0(s)ds$, para todo $t \in [0, 1]$. Vamos denotar por $b(x : a, b)$ a densidade da distribuição beta com parâmetros $a, b > 0$, ou seja

$$b(x : a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Assim, o processo beta com parâmetros $(A_0, \alpha(t), \beta(t))$ é um processo de Lévy A com compensador dado por

$$\begin{aligned} \nu([0, t] \times B) &= \int_0^t \int_B \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx dA_0(s) \\ &= \int_0^t \int_B \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) ds \\ &= \int_0^t \int_B \frac{1}{x} \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s))}{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(\beta(s))} x^{\alpha(s)-1} (1-x)^{\beta(s)-1} dx \lambda_0(s) ds. \end{aligned}$$

Considerando o Teorema 3.2.1, vamos calcular o valor esperado e a variância do processo de Lévy A .

$$\begin{aligned} E[A_t] &= \int_0^1 x \nu([0, t] \times dx) = \int_0^1 \int_0^t b(x : \alpha(s), \beta(s)) dA_0(s) dx \\ &= \int_0^t \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s))}{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(\beta(s))} x^{\alpha(s)-1} (1-x)^{\beta(s)-1} dx \lambda_0(s) ds \\ &= \int_0^t \lambda_0(s) ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var[A_t] &= \int_0^1 x^2 \nu([0, t] \times dx) = \int_0^1 \int_0^t x b(x : \alpha(s), \beta(s)) dA_0(s) dx \\ &= \int_0^t \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s))}{\Gamma(\alpha(s))\Gamma(\beta(s))} x^{\alpha(s)} (1-x)^{\beta(s)-1} dx \lambda_0(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\alpha(s) + \beta(s)} \lambda_0(s) ds. \end{aligned}$$

Quando $\alpha(s) \equiv 1$ para todo $s \in [0, 1]$ teremos o processo beta de Hjort(1990) com parâmetros 1 e $\beta(s)$. Logo,

$$Var[A_t] = \int_0^t \frac{\lambda_0(s)}{1 + \beta(s)} ds.$$

Os saltos do processo beta é um processo de Poisson não-homogêneo com taxa de falha

$$\int_0^1 \frac{1}{x} b(x; \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) = E\left[\frac{1}{X_s}\right] \lambda_0(s),$$

onde X_s tem distribuição beta com parâmetros $\alpha(s)$ e $\beta(s)$, para todo $s \in [0, 1]$.

Capítulo 4

Inferência Bayesiana

4.1 Introdução

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias positivas independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F . O objetivo consiste em estimar F , onde o parâmetro de interesse (F) pertence a um espaço de funções. Assim, para aplicar o enfoque Bayesiano, precisamos definir uma probabilidade sobre o espaço das funções de distribuição acumulada. Para isto, basta construirmos um processo estocástico cujas trajetórias são funções de distribuição acumulada. Neste sentido, destacamos os processos de Dirichlet [Ferguson (1973),(1974)], processos tailfree e neutral to the right [Doksum (1974)]. Se F é absolutamente contínua com função densidade f , Dykstra e Laud (1981) utilizaram processos gama estendido como distribuição à priori para a taxa de falha λ . Ao invés de estimar a função de distribuição acumulada F , Hjort (1990) propôs um método Bayesiano para estimar a taxa de falha acumulada A . Se F é absolutamente contínua, então, os resultados obtidos para estimar F podem ser facilmente adaptados para estimar A , pois

$$F(t) = 1 - \exp\{ -A(t) \} , \forall t \in [0, \infty).$$

Além disso, sabemos que F é absolutamente contínua se, e somente se, A também é absolutamente contínua [Liptser e Shirayev, Corolário, pg. 249, (1978)]. Por outro lado, todos os processos estocásticos utilizados para definir a distribuição à priori são processos de Lévy puro salto. Assim, todos os processos estocásticos à priori apresentam trajetórias do tipo escada, consequentemente não são absolutamente contínuas. Desta forma, os resultados apresentados para estimar F não são diretamente adaptados para estimar A e vice-versa. Neste trabalho, vamos apresentar métodos para estimar a taxa de falha

acumulada A , como apresentado em Hjort (1990) e Kim (1999).

Considere a base estocástica $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)_{t \geq 0}$ satisfazendo as condições usuais, vamos assumir que o processo pontual N_t está definido em $[0, 1]$, embora ele possa ser generalizado para o intervalo $[0, \tau]$ e que o processo Λ_t satisfaz o modelo de intensidade multiplicativo

$$\Lambda_t = \int_0^t Y_s dA(s),$$

onde Y é um processo previsível (observável) e A é uma função determinística desconhecida, denominada taxa de falha acumulada. Abaixo, definimos o espaço das taxas de falha acumulada.

$$\mathcal{A} = \{ \text{classe das funções não decrescentes } A \text{ contínuas à direita} \\ \text{definidas em } [0, 1], \Delta A \leq 1, A(0) = 0 \}$$

Para esta classe considere $\Sigma_{\mathcal{A}}$ a σ -álgebra gerada pelos cilindros. O espaço das observações corresponde ao Ω definido na seção 2.2 com a σ -álgebra associada $\mathfrak{F}$.

4.2 Estimação Bayesiana Não-Paramétrica

Para aplicarmos o enfoque Bayesiano, tomamos uma probabilidade à priori sobre o espaço $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}})$ induzida por um processo de Lévy com trajetórias em $\mathcal{A}$. Na sequência, utilizamos o modelo de intensidade multiplicativa de Aalen,

$$\Lambda_t = \int_0^t Y_s dA(s) .$$

para construir uma única probabilidade P^A sobre $(\Omega \times \mathcal{A}; \mathfrak{F} \times \Sigma_{\mathcal{A}})$ [Teorema 2.5.2], tal que a marginal sobre $\mathcal{A}$ coincide com a probabilidade induzida pelo processo de Lévy A . Além disso, dado A , o compensador do processo pontual satisfaz o modelo de intensidade multiplicativa.

A distribuição à posteriori de A dado N está bem definida pois Ω é um espaço de Radon e $\mathcal{A}$ é um espaço métrico completo (com a topologia de Skorohod). Aqui, vamos estudar o processo à posteriori $A|N$. Hjort (1990) mostrou que se o produto integrado

$$F_t = 1 - \prod_{s \leq t} [1 - \Delta A_s]$$

for finito ($P-q.c$) e se A é um processo de Lévy puro salto, então, o processo à posteriori $A|N$ também é um processo de Lévy puro salto. Além disso, Hjort (1990) introduziu a

classe dos processos beta e mostrou que se A é um processo beta, então, o processo à posteriori também é beta.

Finalmente, Kim (1999) utilizou a caracterização dos processos de Lévy puro salto via o compensador [Capítulo 3] para generalizar os resultados de Hjort (1990). Sem a utilização da hipótese da existência do produto integrado, Kim (1999) calculou o compensador do processo à posteriori $A|N$ dado como priori um processo de Lévy puro salto.

Um processo de Lévy puro salto tem a seguinte representação [ver Definição 3.2.1, Capítulo 3]

$$A_t(\omega) = \sum_s \Delta A_s(\omega) I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s),$$

indicando que sua trajetória é uma função escada crescente com ΔA_s o tamanho do salto e $I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s)$ correspondente ao tempo do salto. Definimos uma medida μ em $\Omega \times [0, 1] \times (0, 1]$ como

$$\mu(\omega; [0, t] \times B) = \sum_s I_{\{\Delta A_s(\omega) > 0\}}(\omega) I_{\{[0, t]\}}(s) I_{\{B\}}(\Delta A_s(\omega))$$

para $\omega \in \Omega$, $t \in [0, 1]$ e $B \in \beta((0, 1])$. Com isso, obtemos que

$$A_t(\omega) = \int_0^1 x \mu(\cdot; [0, t] \times dx) \quad (4.1)$$

e a medida μ caracteriza o processo de Lévy puro salto. Obtemos de Jacod [1979, pg. 80] que μ é uma medida aleatória de Poisson. Se definirmos uma medida σ -finita ν em $[0, 1] \times (0, 1]$ por

$$\nu([0, t] \times B) = E[\mu(\omega, [0, t] \times B)], \quad t \in [0, 1], \quad B \in \beta((0, 1]),$$

obtemos do Teorema 3.2.1 que

$$E[A_t] = \int_0^1 x \nu([0, t] \times dx) = \int_0^1 \int_0^t x \nu(ds \times dx)$$

e

$$Var[A_t] = \int_0^1 x^2 \nu([0, t] \times dx) = \int_0^1 \int_0^t x^2 \nu(ds \times dx)$$

Além disso, obtemos do Teorema 3.1.1 em Jacod (1979, pg. 70) que o compensador ν caracteriza a medida aleatória μ . Assim, obtemos da Equação 4.1 que o compensador ν caracteriza o processo de Lévy puro salto.

Vamos supor que o compensador à priori para o processo de Lévy A é dado por

$$\nu([0, t] \times B) = \int_0^t \int_B dF_s(x) ds, \quad t \in [0, 1], \quad B \in \beta((0, 1]) \quad (4.2)$$

onde F_s são medidas finitas em $[0,1]$ tais que $\int_0^1 y dF_s(y) < \infty$, para todo $s \in [0, 1]$.

Concluimos do Teorema 3.1 em Kim (1999) que, dado as observações do processo pontual o processo à posteriori é também um processo de Lévy e o compensador à posteriori é dado por

$$\begin{aligned} \nu^p([0, t] \times B) &= \int_0^t \int_B (1-x)^{Y_s} dF_s(x) ds \\ &\quad + \int_0^t c^{-1}(s) \int_B x^{\Delta N_s} (1-x)^{Y_s - \Delta N_s} dF_s(x) \frac{1}{\Delta N_s} dN_s, \end{aligned}$$

onde $N_s = \sum_{i=1}^n I_{\{T_i \leq t\}}$, $\Delta N_s = N_s - N_{s-}$, $Y_s = \sum_{i=1}^n I_{\{T_i \geq t\}}$ e

$$c(s) = \int_0^1 x^{\Delta N_s} (1-x)^{Y_s - \Delta N_s} dF_s(x).$$

Desta forma o estimador de Bayes de A será dado pela esperança condicional

$$\begin{aligned} E[A_t|N] &= \int_0^t \int_0^1 x \nu^p(ds, dx) = \int_0^t \int_0^1 x (1-x)^{Y_s} dF_s(x) ds \\ &\quad + \int_0^t c^{-1}(s) \int_0^1 x x^{\Delta N_s} (1-x)^{Y_s - \Delta N_s} dF_s(x) \frac{1}{\Delta N_s} dN_s. \end{aligned}$$

4.3 Estimador Bayesiano Não-Paramétrico para a Taxa de Falha Acumulada

Considere A um processo de Lévy com compensador ν dado por 4.2. Vamos definir funções de distribuição G_t sobre $[0, 1]$ por

$$G_t(x) = \frac{\int_0^x y dF_t(y)}{\lambda_0(t)}$$

onde $\lambda_0(t) = \int_0^1 x dF_t(x)$. Logo,

$$dG_t(x) \lambda(t) = x dF_t(x),$$

e a esperança e variância ficam, respectivamente,

$$\begin{aligned} E[A_t] &= \int_0^t \int_0^1 x \nu(ds \times dx) = \int_0^t \int_0^1 x dF_s(x) ds = \int_0^t \int_0^1 x dF_s(x) ds \\ &= \int_0^t \int_0^1 dG_s(x) \lambda_0(s) ds = \int_0^t \lambda_0(s) ds. \end{aligned}$$

e

$$Var[A_t] = \int_0^t \int_0^1 x dG_s(x) \lambda_0(s) ds.$$

Então para escolhermos um processo de Lévy correspondendo à uma informação à priori dado pela média e variância, simplesmente escolhemos uma função $\lambda_0(s)$ e uma função $G_t(x)$ apropriadas.

Se considerarmos as funções de distribuição $G_t(x)$ como sendo distribuições beta com parâmetros $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ e denotando por $b(x : a, b)$ a função densidade de probabilidade da distribuição beta com parâmetros a e b , obtemos

$$\begin{aligned}
 \nu^p([0, t] \times B) &= \int_0^t \int_B (1-x)^{Y_s} dF_s(x) ds \\
 &\quad + \int_0^t c^{-1}(s) \int_B x^{\Delta N_s} (1-x)^{Y_s - \Delta N_s} dF_s(x) \frac{1}{\Delta N_s} dN_s \\
 &= \int_0^t \int_B (1-x)^{Y_s} \frac{1}{x} dG_s(x) \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t c^{-1}(s) \int_B x(1-x)^{Y_s-1} \frac{1}{x} dG_s(x) \lambda_0(s) dN_s \\
 &= \int_0^t \int_B (1-x)^{Y_s} \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t c^{-1}(s) \int_B x(1-x)^{Y_s-1} \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) dN_s \\
 &= \int_0^t \int_B (1-x)^{Y_s} \frac{1}{x} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \int_B b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx dN_s.
 \end{aligned}$$

Com isso, o estimador de Bayes é dado por:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(t) &= E[A(t)|N] = \int_0^t \int_0^1 x \nu^p(ds \times dx) \\
 &= \int_0^t \int_0^1 (1-x)^{Y_s} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^1 x b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx dN_s \\
 &= \int_0^t \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s)) \Gamma(\alpha(s) + Y_s)}{\Gamma(\beta(s)) \Gamma(\alpha(s) + \beta(s) + Y_s)} \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\alpha(s) + \beta(s) + Y_s - 1} dN_s.
 \end{aligned}$$

Como exemplo vamos considerar o processo Beta definido por Hjort (1990) ($\alpha(s) = 1 \forall s \in [0, 1]$), na forma,

$$\lambda_0(t) = \frac{dA_0(t)}{dt}, \quad G_t(x) = \int_0^x \beta(t)(1-y)^{\beta(t)-1} dy$$

onde $G_t(x)$ corresponde à distribuição Beta com parâmetros 1 e $\beta(t)$. Ao tomarmos o processo beta como distribuição à priori, obtemos que

$$\begin{aligned}\widehat{A}(t) &= E[A(t)|N] = \int_0^t \int_B x \nu^p(ds \times dx) \\ &= \int_0^t \frac{\beta(s)\lambda_0(s)}{\beta(s) + Y_s} ds + \int_0^t \frac{dN(s)}{\beta(s) + Y_s}.\end{aligned}$$

Hjort (1990) propõe que um estimador para a taxa de falha, baseado no estimador Bayesiano da taxa de falha acumulada, seja dado por

$$\widehat{\lambda}(s) = \frac{\beta(s)\lambda_0(s)}{\beta(s) + Y_s} + \frac{1}{\beta(s) + Y_s} \quad (4.3)$$

Propomos que a função $\beta(s)$ seja determinada por $nS(s)$, onde

$$S(s) = \exp \left\{ - \left(\frac{s}{a} \right)^b \right\},$$

é a função de confiabilidade da distribuição Weibull, pois, conforme notado por Hjort [1990, pg. 1264], $\beta(s)$ pode ser interpretada como o conjunto de risco em s à priori. Tomando $v = 1/a^b$ temos,

$$\widehat{A}(t) = \int_0^t \frac{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} \widehat{v} \widehat{b} s^{\widehat{b}-1}}{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} + Y(s)} ds + \int_0^t \frac{dN_s}{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} + Y(s)}, \quad (4.4)$$

onde $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ e $\widehat{v} = 1/\widehat{a}^{\widehat{b}}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de a , b e v , respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}(s) &= \frac{\beta(s)\lambda_0(s)}{\beta(s) + Y_s} + \frac{1}{\beta(s) + Y_s} \\ &= \frac{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} \widehat{v} \widehat{b} s^{\widehat{b}-1}}{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} + Y_s} + \frac{1}{n \exp\{-\widehat{v}s^{\widehat{b}}\} + Y_s}.\end{aligned} \quad (4.5)$$

As estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros a e b apresentados na seção 1.1.3 são, respectivamente, $\widehat{a} = 462.13$ e $\widehat{b} = 1.6099$ com $\widehat{v} \simeq 5.128 \times 10^{-5}$.

A variância do processo posteriori é dada por

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{A}_t) &= \int_0^t \int_0^1 x^2 - \sum_{s \leq t} \left(\int_0^1 x \nu^p(\{x\}, dx) \right)^2 \\
 &= \int_0^t \int_0^1 x(1-x)^{Y_s} b(x : \alpha(s), \beta(s)) dx dA_0(s) \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^1 x^2 b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx dN_s \\
 &\quad - \int_0^t \left(\int_0^1 x b(x : \alpha(s), \beta(s) + Y_s - 1) dx \right)^2 dN_s \\
 &= \int_0^t \alpha(s) \frac{\Gamma(\alpha(s) + \beta(s)) \Gamma(\beta(s) + Y_s)}{\Gamma(\beta(s)) \Gamma(\alpha(s) + \beta(s) + Y_s + 1)} dA_0(s) \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\alpha(s)(\beta(s) + Y_s - 1)}{(\alpha(s) + \beta(s) + Y_s - 1)^2 (\alpha(s) + \beta(s) + Y_s)} dN_s.
 \end{aligned}$$

Considerando novamente o processo beta de Hjort(1990) com $\alpha(s) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{A}_t) &= \int_0^t \frac{\beta(s)}{(\beta(s) + Y_s + 1)(\beta(s) + Y_s)} \lambda_0(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{(\beta(s) + Y_s - 1)}{\beta(s) + Y_s)^2 (\beta(s) + Y_s + 1)} dN_s.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{A}_t) &= \int_0^t \frac{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} \hat{v} \hat{b} s^{\hat{b}-1}}{(n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} ds + Y_s + 1)(n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s)} \\
 &\quad + \int_0^t \frac{(n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s - 1)}{(n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s)^2 (n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y_s + 1)} dN_s.
 \end{aligned}$$

onde $v = 1/a^b$. A tabela 5.3 apresenta as estimativas da variância do estimador Bayesiano.

tempos	variância	tempos	variância
19	0.000006	349	0.445029
43	0.015270	398	0.513938
44	0.016049	477	0.612978
148	0.137069	514	0.653615
169	0.167770	595	0.729415
171	0.170754	603	0.735929
205	0.222701	662	0.778753
232	0.265045	700	0.801861
248	0.290313	701	0.802419
250	0.293469	706	0.805126
263	0.313941	709	0.806685
271	0.326492	710	0.807181
282	0.343659	763	0.829560
290	0.356061	777	0.834200
347	0.442106	869	0.853104

Tabela 4.1: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via estimador Bayesiano

Faremos agora a aplicação do estimador de Bayes 4.3 aos dados dos freios. A Tabela 4.2 apresenta as estimativas para a taxa de falha, taxa de falha acumulada e função de confiabilidade baseadas no estimador Bayesiano não-paramétrico, calculadas conforme o procedimento da Seção 1.1 [veja Equação 1.6]. Apresentamos também, os gráficos com as estimativas para a taxa de falha, taxa de falha acumulada e função de confiabilidade calculados via Kaplan-Meier, Nelson-Aalen, Weibull e Bayesiano não-paramétrico.

Tempos	Taxa de Falha	Taxa de Falha Acumulada	Confiabilidade
19	0.016721	0.019646	0.980355
43	0.017146	0.044861	0.955139
44	0.017453	0.062726	0.937274
148	0.019041	0.088660	0.911340
169	0.019778	0.127118	0.872882
171	0.020214	0.136941	0.863059
205	0.021345	0.186252	0.813748
232	0.022458	0.197955	0.802045
248	0.023399	0.179659	0.820341
250	0.024016	0.506024	0.493976
263	0.025001	0.546953	0.453047
271	0.025904	0.583018	0.416982
282	0.026981	0.624492	0.375508
290	0.028031	0.663448	0.336552
347	0.031310	0.776873	0.223127
349	0.032418	0.812277	0.187723
398	0.036177	0.925268	0.074732
477	0.042633	1.095398	0.004602
511	0.047301	1.203102	0.000000
595	0.056593	1.390725	0.000000
603	0.060766	1.461405	0.000000
662	0.071252	1.632253	0.000000
700	0.081580	1.775332	0.000000
701	0.088971	1.865968	0.000000
706	0.098568	1.973760	0.000000
709	0.110012	2.089853	0.000000
710	0.123888	2.215979	0.000000
763	0.161643	2.511446	0.000000
777	0.200741	2.752520	0.000000
869	0.345930	3.418700	0.000000

Tabela 4.2: Estimativas para a taxa de falha, taxa de falha acumulada e função de confiabilidade baseadas no estimador Bayesiano não-paramétrico

Figura 4.1: Taxa de Falha Acumulada

Figura 4.2: Função de Confiabilidade

Figura 4.3: Taxa de Falha

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Conclusões

Neste trabalho nós apresentamos um estimador Bayesiano não-paramétrico para a taxa de falha acumulada A de um processo pontual N_t baseado numa classe de processos de Lévy puro salto chamados de processos beta [Hjort (1990), Kim (1999)] e também sugerimos um estimador para a taxa de falha λ . Kim e Lee (2001) mostraram que a distribuição à posteriori do processo beta com parâmetros $(A_0(s), \alpha(s), \beta(s))$ [conforme definido no Capítulo 4] é consistente se, e somente se $\alpha(s) = 1, \forall s \in [0, 1]$ e, além disso deram condições suficientes para a consistência de processos de Lévy mais gerais. Assim, o processo beta definido por Hjort, processos gama e processos de Dirichlet tem distribuição à posteriori consistente. Estes estimadores apresentaram desempenho próximo ao dos estimadores de Kaplan-Meier e Nelson-Aalen, conforme os gráficos e tabelas apresentados nos capítulos anteriores.

Por exemplo, observe na Figura 5.1 como os gráficos da taxa de falha acumulada estimada via estimadores de Kaplan-Meier e Nelson-Aalen são acompanhados pelo estimador Bayesiano.

Figura 5.1: Taxa de Falha Acumulada

Isso não surpreende quando observamos o comportamento desse estimador,

$$\hat{A}(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)\lambda(s)ds}{\beta(s) + Y(s)} + \int_0^t \frac{dN(s)}{\beta(s) + Y(s)}, \quad (5.1)$$

se a função $\beta(s) \rightarrow 0$, o estimador de Bayes converge para o estimador de Nelson-Aalen e se $\beta(s) \rightarrow \infty$ obtemos a taxa acumulada A_0 dada como priori. No caso do estimador para a taxa de falha,

$$\hat{\lambda}(s) = \frac{\beta(s)\lambda_0(s)}{\beta(s) + Y(s)} + \frac{1}{\beta(s) + Y(s)} \quad (5.2)$$

observamos que se $\beta(s) \rightarrow 0$, então $\hat{\lambda}$ coincide com o estimador proposto por Kaplan-Meier [ver Capítulo 1]. Assim, uma $\beta(s)$ apropriada pode levar a melhores resultados.

As tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam as estimativas da variância dos estimadores da taxa de falha acumulada, baseados nos estimadores de Kaplan-Meier, Nelson-Aalen e Bayesiano. Observe nas tabelas que o estimador

$$\hat{A}(t) = \int_0^t \frac{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} \hat{v} \hat{b} s^{\hat{b}-1}}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y(s)} ds + \int_0^t \frac{dN_s}{n \exp\{-\hat{v}s^{\hat{b}}\} + Y(s)}, \quad (5.3)$$

possui variância maior que os estimadores empíricos.

tempos	variância	tempos	variância
19	0.001149	349	0.038095
43	0.002381	398	0.043590
44	0.003704	477	0.050000
148	0.005128	514	0.057576
169	0.006667	595	0.066667
171	0.008333	603	0.077778
205	0.010145	662	0.091667
232	0.012121	700	0.109524
248	0.014286	701	0.133333
250	0.016667	706	0.166667
263	0.019298	709	0.216667
271	0.022222	710	0.300000
282	0.025490	763	0.466667
290	0.029167	777	0.966667
347	0.033333	869	*

Tabela 5.1: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Kaplan-Meier

tempos	variância	tempos	variância
19	0.00111	349	0.03615
43	0.00230	398	0.04126
44	0.00358	477	0.04717
148	0.00495	514	0.05412
169	0.00643	595	0.06238
171	0.00803	603	0.07238
205	0.00976	662	0.08473
232	0.01165	700	0.10035
248	0.01372	701	0.12076
250	0.01599	706	0.14854
263	0.01849	709	0.18854
271	0.02126	710	0.25104
282	0.02434	763	0.36215
290	0.02780	777	0.61215
347	0.03171	869	1.61215

Tabela 5.2: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via Nelson-Aalen

tempos	variância	tempos	variância
19	0.000006	349	0.445029
43	0.015270	398	0.513938
44	0.016049	477	0.612978
148	0.137069	514	0.653615
169	0.167770	595	0.729415
171	0.170754	603	0.735929
205	0.222701	662	0.778753
232	0.265045	700	0.801861
248	0.290313	701	0.802419
250	0.293469	706	0.805126
263	0.313941	709	0.806685
271	0.326492	710	0.807181
282	0.343659	763	0.829560
290	0.356061	777	0.834200
347	0.442106	869	0.853104

Tabela 5.3: Estimativas da variância da taxa de falha acumulada via estimador Bayesiano

Na Figura 5.2 apresentamos os gráficos da taxa de falha estimada via estimador de Nelson-Aalen e o estimador proposto 5.2 para a taxa de falha. Nota-se no gráfico que até 700 horas, a estimativa da taxa de falha via estimador 5.2 acompanha bem o gráfico da taxa de falha estimada via Nelson-Aalen. Esses resultados mostram a flexibilidade do estimador Bayesiano não-paramétrico para modelagem de dados de confiabilidade, apresentando-se como uma alternativa aos modelos existentes.

Embora tenhamos apresentado o estimador baseado em dados não censurados, podemos admitir dados com diferentes tipos de censuras conforme exemplos de Kim (1999) e além disso, o processo à priori A pode apresentar tempos de descontinuidades fixados [ver Apêndice].

Figura 5.2: Taxa de Falha

5.2 Propostas Futuras

Propomos estudar os seguintes tópicos que não foram desenvolvidos durante esse trabalho, embora haja :

- Propriedades assintóticas dos estimadores obtidos da taxa de falha e da taxa de falha acumulada;
- simulações dos Processos de Lévy.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Espaço de Cantor

O espaço de Cantor é um espaço formado pelo produto cartesiano de infinitas cópias de $S = \{0, 1\}$

$$S^\infty = S \times S \times \times S \dots$$

Munido da topologia discreta ele é um espaço compacto pois cada S é compacto (teorema de Tychonoff).

A projeção coordenada é uma aplicação

$$\pi : S^\infty \longrightarrow S$$

dada por

$$\pi_k(w) = w_k, k \in \mathbb{N}$$

e $w = (w_1, w_2, w_3 \dots) \in S^\infty$.

Essas projeções geram uma classe $\mathcal{H}$ definida da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \{\pi_k^{-1}(\{w_k\}) : w_k \in S, k \in \mathbb{N}\}.$$

Desta definição de $\mathcal{H}$ temos os seguintes resultados diretos:

- (1) $\pi_k^{-1}(\{1\}) \cup \pi_k^{-1}(\{0\}) = S^\infty$;
- (2) $\pi_k^{-1}(\{1\}) \cap \pi_k^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Lema 6.1.1. *A classe $\mathcal{H}$ separa pontos em S^∞ , isto é, dados x e y pontos distintos de S^∞ existe um elemento Δ de $\mathcal{H}$ tal que*

$$I_{\{\Delta\}}(x) \neq I_{\{\Delta\}}(y)$$

Dem: Tomemos dois elementos x e y em S^∞ .

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \dots), \quad \alpha_i = 0 \text{ ou } 1$$

$$y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, \dots), \quad \beta_i = 0 \text{ ou } 1$$

distintos, isto é, x e y são diferentes em pelo menos uma coordenada, digamos na k -ésima coordenada, assim $\alpha_k \neq \beta_k$. Consideremos as imagens inversas

$$\pi_k^{-1}(\{\alpha_k\}) \quad \text{e} \quad \pi_k^{-1}(\{\beta_k\})$$

pelo resultado anterior (2) temos

$$\pi_k^{-1}(\{\alpha_k\}) \cap \pi_k^{-1}(\{\beta_k\}) = \emptyset,$$

dessa forma, basta tomarmos $\Delta = \pi_k^{-1}(\{\alpha_k\})$ para termos

$$I_{\{\Delta\}}(x) = 1 \neq I_{\{\Delta\}}(y) = 0 \quad \square$$

Lema 6.1.2. *A classe $\mathcal{H}$ de subconjuntos de S^∞ é compacta, isto é, para toda sequência $\{C_n\} \subset \mathcal{H}$ satisfazendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaz $\bigcap_{n=1}^{n_0} C_n = \emptyset$.*

Dem:

Considere a sequência $\{C_n\} \subset \mathcal{H}$ com $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Nesse caso existem m e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$C_m = \pi_k^{-1}(\{1\}) \quad \text{e} \quad C_n = \pi_k^{-1}(\{0\})$$

para algum $k \in \mathbb{N}$. Se nós tomarmos $n_0 = \max\{m, n\}$, teremos $\bigcap_{n=1}^{n_0} C_n = \emptyset$. $\square$

Vamos considerar agora uma classe formada por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{H}$

$$\Delta = \{A \subset S^\infty : A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_n, \quad B_i \in \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{S^\infty\}$$

Lema 6.1.3. *A classe Δ acima é uma semi-álgebra.*

Considere agora a classe $\mathcal{D}$ de todos os subconjuntos finitos de números naturais

$$\mathcal{D} = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Lema 6.1.4. *A classe Δ anterior pode ser escrita como*

$$\Delta = \{\pi_{v_1}^{-1}(\{w_{v_1}\}) \cap \dots \cap \pi_{v_n}^{-1}(\{w_{v_n}\}) : (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{D}, (w_{v_1}, \dots, w_{v_n}) \in S^n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{S^\infty\}$$

Lema 6.1.5. *A álgebra $\mathcal{A}$ gerada pela classe Δ é dada por*

$$\mathcal{A} = \{A \subset S^\infty : A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n, B_i \in \Delta, i = 1, \dots, n, B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j), n \in \mathbb{N}\}$$

Vamos denotar por $\mathcal{G}$ a σ -álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

6.2 Alguns Resultados Utilizados

Definição 6.2.1. *Uma função f , definida em um espaço mensurável X é chamada simples se existe uma classe finita disjunta $\{E_1, \dots, E_n\}$ de conjuntos mensuráveis e um conjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de números reais tais que*

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n I_{E_i^n}(x).$$

Teorema 6.2.1. *Seja f uma função mensurável não negativa. Então existe uma sequência $\langle \varphi_n \rangle$ de funções mensuráveis simples tais que, para cada x , $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$.*

Definição 6.2.2. *Um tempo $t \in \mathbb{R}_+$ é chamado um tempo de descontinuidade fixado para um processo com incrementos independentes X se $P[\Delta X_t \neq 0] > 0$.*

O conjunto dos tempos de descontinuidade fixados é no máximo contável (esta propriedade é verdadeira para processos càdlàg). Processos com incrementos independentes estacionários não possuem tempos de descontinuidade fixados.

Referências Bibliográficas

- [1] O. Aalen (1978) - Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes, *Ann. Statist.*, **6**,pg. 701-726.
- [2] J. I. Ansell e M. J. Phillips (1994) - Practical Methods for Reliability Data Analysis, Oxford Science Publications, New York.
- [3] D. P. Bertsekas e S. P. Shreve (1978) - Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case, Academic Press, New York.
- [4] P. Billingsley (1968) - Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, New York.
- [5] K. L. Chung (1974) - A course in Probability Theory, Ed. 2, Academic Press, New York.
- [6] P. Damien, P. W. Laud e A. F. M. Smith, (1995) - Random Variate Generation from Infinitely Divisible Distributions with Applications to Bayesian Inference, *J. R. Statist. Soc. B*, **57**, pg. 547-564.
- [7] K. Doksum (1974) - Tailfree and Neutral Random Probabilities an Their Posterior Distributions, *Ann. Probability*, **2**, pg. 183-201.
- [8] R. L. Dykstra e Purushottam Laud (1981) - A Bayesian Nonparametric Approach to Reliability, *Ann. Statist.*, **9**, pg. 357-367.
- [9] T. R. Fleming e D. P. Harrington (1990) - Counting Processes and Survival Analysis, John Wiley and Sons, New York.
- [10] T. S. Ferguson e M. J. Klass (1972) - A Representation of Independent Increment Processes Without Gaussian Components, *Ann. of Math. Statist.*, V. 43,**5**, pg. 1634-1643.

- [11] T. S. Ferguson (1973) - A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems, *Ann. Statist.*, **1**, pg. 209-230.
- [12] T. S. Ferguson (1974) - Prior Distributions on Spaces of Probability Measures, *Ann. Statist.*, **2**, pg. 615-629.
- [13] T. S. Ferguson e E. G. Phadia (1979) - Bayesian Nonparametric Estimation Based on Censored Data, *Ann. Statist.*, **7**, pg. 163-186.
- [14] N. L. Hjort (1990) - Nonparametric Bayes Estimators Based on Beta Processes in Models for Life History Data, *Ann. Stat.*, **18**, N.3 pg. 1259-1294.
- [15] J. Jacod (1979) - *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, **714**.
- [16] J. Jacod e A.N. Shiryaev (1987) - *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [17] E. L. Kaplan e P. Meier (1958) - Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, *American Statistical Association Journal*, **53**, pg. 457-481.
- [18] Y. Kim (1999) - Nonparametric Bayesian Estimators for Counting Processes, *Ann. Stat.*, **27**, N.2, pg. 589-599.
- [19] Y. Kim e J. Lee (2001) - On Posterior Consistency of Survival Models, *Ann. Stat.*, **29**, N.3, pg. 666-686.
- [20] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin (1970) - *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York.
- [21] J. P. Klein (1991) - Small Sample Moments of Some Estimators of the Variance of the Kaplan-Meier and Nelson-Aalen Estimators, *Scand. J. Statistics*, **18**, pg. 333-340.
- [22] D. Leão, M. D. Fragoso and P. Ruffino (1999) - Characterization of Radon spaces, *Probability and Statistical Letters*, **42**, pg. 409-413.
- [23] D. Leão, M. D. Fragoso and P. Ruffino (2001) - Regular Conditional Probability, Desintegration of Probability and Radon Spaces, Submitted *Annals of Probability*.
- [24] R. S. Liptser e A. N. Shiryaev (1977) - *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer-Verlag, New York.

- [25] R. S. Liptser e A. N. Shiryaev (1978) - Statistics of Random Processes II: General Theory, Springer-Verlag, New York.
- [26] Jacod, J. e Shiryaev, A. N. (1987) - Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer-Verlag, New York.
- [27] E. Marczewski (1953) - On compact measures, *Fundamentae Mathematica*, **40**, pg. 409-413.
- [28] M. Métivier (1982) - Semimartingales: A course in Stochastic Processes , de Gruyter Studies in Mathematics, **2**.
- [29] P. Meyer (1966) - Probabilités et Potentiel (Lère édition), Hermann, Paris.
- [30] W. Nelson (1972) - Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data, *Technometrics* ,**42**, N.1 .
- [31] J. Neveu (1965) - Mathematical Foundations of The Calculus of Probability, Holden-Day,Inc, San Francisco, California.
- [32] W. J. Padget e L. J. Wei (1981) - A Bayesian Nonparametric Estimator of Survival Probability Assuming Increasing Failure Rate, *Comm. Statist. Theory Methods* **10**, pg. 49-63.
- [33] B. L. S. Prakasa Rao (1987) - Asymptotic Theory of Statistical Inference, **21**, Wiley, New York.
- [34] P. Protter (1990) - Stochastic Integration and Differential Equations: a new approach, *Applications of Mathematics*, **21**, Springer-Verlag, Berlin.
- [35] S. G. Walker e P. Damien, (1998) - A full Bayesian Nonparametric Analysis Involving a Neutral to the Right processes, *Scand. J. Statist.* ,**25**, pg. 669-680.
- [36] S. G. Walker e P. Damien, (2000) - Representations of Lévy processes without Gaussian components, *Biometrika*,**87**, 2, pg. 477-483.
- [37] R. L. Wolpert e K. Ickstadt, (1998) - Gamma/Poisson Random Field Models for Spatial Statistics, *Biometrika*, **85**, pg. 251-267.