UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

O Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos com Múltiplas Viagens

Giovana Sachett Maia

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Giovana Sachett Maia

O Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos com Múltiplas Viagens

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientadora: Profa. Dra. Franklina M. B. Toledo

USP – São Carlos
Julho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S121p Sachett, Giovana Maia
O Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos
com Múltiplas Viagens / Giovana Maia Sachett;
orientadora Fraklina M. B. Toledo. -- São Carlos,
2020.
87 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Problema de Roteamento de Veículos. 2.
Logística. 3. Frota Heterogênea. 4.
Múltiplas Viagens. I. Toledo, Fraklina M. B.,
orient. II. Título.

Giovana Sachett Maia

Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Multiple Trips

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Franklina M. B. Toledo

USP – São Carlos
July 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo suporte e apoio.

À minha orientadora Franklina pelo incentivo e dedicação.

À CAPES (PROEX-8937587/M) e ao CEPID-FAPESP (2013/07375-0) pelo apoio financeiro.

E aos meus amigos pelo descanso e diversão.

*“I read for pleasure
and that is the moment I learn the most.”
(Margaret Atwood)*

RESUMO

SACHETT, G. M. **O Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos com Múltiplas Viagens**. 2020. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

O aumento constante da quantidade de bens consumidos e os altos custos das operações de transporte fazem com que as decisões relacionadas à logística sejam cada dia mais relevantes. Nesse contexto, o Problema de Roteamento de Veículos (PRV) tem ganhado atenção especial. A fim de resolver o problema, busca-se determinar as melhores rotas a serem realizadas por uma frota de veículos de forma que todos os clientes sejam atendidos. Os problemas de roteamento que ocorrem na prática frequentemente têm características particulares. Neste trabalho, vamos abordar uma variante do PRV denominada problema de roteamento de veículos com frota heterogênea e múltiplas viagens, na qual consideramos diferentes tipos de veículos e a possibilidade de realizarem mais de uma única viagem. Inicialmente, um modelo matemático adaptado da literatura foi desenvolvido para o problema, e seus primeiros testes computacionais indicam que apenas instâncias de pequeno porte podem ser resolvidas em tempo computacional razoável, utilizando diretamente softwares comerciais de otimização. Em seguida, apresentamos um método heurístico para a solução do problema. O algoritmo possui três etapas principais: obtenção de uma solução inicial (heurística construtiva), busca por mínimos locais (ILS), e melhoria (modelo de cobertura). Na sequência, é abordado um segundo objetivo que busca minimizar o tempo da maior rota. Finalizamos a dissertação com a apresentação de uma abordagem biobjetivo para o problema, resolvida por meio de três técnicas: ponderação na função objetivo, método ϵ -restrito e Pareto-ILS. Com isso temos como objetivo propor abordagens mono e bi objetivo para a resolução do problema.

Palavras-chave: Problema de Roteamento de Veículos, Logística, Frota Heterogênea, Múltiplas Viagens.

ABSTRACT

SACHETT, G. M. **Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Multiple Trips**. 2020. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

The constant increase in the consumption of goods and the high costs of transport operations make decisions related to logistics increasingly more relevant. In this context, the Vehicle Routing Problem (VRP) has been in focus. In order to solve this problem, we aim to set the best routes for a fleet of vehicles to ensure that all clients will be served. The routing problems often have particular characteristics. In this work, we will address a variant of the PRV called the vehicle routing problem with heterogeneous fleet and multiple trips, in which we consider different types of vehicles and the possibility of making more than a single trip. Initially, a mathematical model, adapted from the literature, was developed. The first computational tests showed that only small instances can be solved in reasonable computational time, using commercial optimization software. Then, we present a heuristic method for the solution of the problem. The algorithm has three main steps: obtaining an initial solution (constructive heuristic), searching for local minimums (ILS), and improving the solution (coverage model). In sequence, a second objective that seeks to minimize the time of the longest route is approached. We conclude the dissertation with the presentation of a biobjective approach to the problem, which is solved using three techniques: weighting the objective function, *epsilon*-restricted method and Pareto-ILS. With that we aim to propose mono and bi objective approaches to solve the problem.

Keywords: Vehicle Rounting Problem, Logistics, Heterogeneous Fleet, Multiple trips.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de uma solução para a entrega de mercadorias a clientes.	21
Figura 2 – Problema de roteamento com frota heterogênea.	36
Figura 3 – Exemplo de subciclo ilegal composto pelos nós A, B e C.	38
Figura 4 – Exemplo de uma viagem para ilustrar as Restrições 3.6.	38
Figura 5 – Contra exemplo para a restrição de demandas (3.6).	39
Figura 6 – Comparação entre os resultados dos modelos.	43
Figura 7 – Exemplo do movimento <i>or-opt</i>	50
Figura 8 – Exemplo do movimento <i>2-opt</i>	51
Figura 9 – Exemplo do movimento <i>realocação</i>	52
Figura 10 – Exemplo do movimento <i>String Cross</i>	53
Figura 11 – Exemplo do movimento <i>String Exchange</i>	53
Figura 12 – Exemplo do movimento <i>String Relocate</i>	54
Figura 13 – Exemplo do movimento <i>Realocação</i>	55
Figura 14 – Comparações entre custos totais e maior rota.	63
Figura 15 – Exemplo do método ε -restrito.	72
Figura 16 – Valores atribuídos a ε	73
Figura 17 – Exemplos de aproximações da Fronteira de Pareto encontradas.	74
Figura 18 – Exemplos de aproximações da Fronteira de Pareto encontradas.	75
Figura 19 – Exemplo de iteração do método PILS.	76
Figura 20 – P^{approx} obtida para a Instância 2.	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Rotas dos veículos para o exemplo da Figura 2b.	36
Tabela 2 – Dados do Exemplo da Figura 4.	39
Tabela 3 – Dados do Exemplo da Figura 4.	40
Tabela 4 – Resultados computacionais considerando a minimização do custo.	42
Tabela 5 – Resultados computacionais considerando a minimização do tempo da maior rota.	42
Tabela 6 – Analisando vizinhanças utilizadas no método VND.	61
Tabela 7 – Comparação entre Somente SC com outras configurações de perturbações.	61
Tabela 8 – Minimizando o custo total das rotas.	62
Tabela 9 – Melhoria entre etapas.	62
Tabela 10 – Minimizando a maior rota.	63
Tabela 11 – Melhoria entre etapas.	63
Tabela 12 – Resultados computacionais para instâncias homogêneas.	65
Tabela 13 – Melhorias na função objetivo minimizando o custo total.	66
Tabela 14 – Melhorias na função objetivo minimizando a maior rota.	66
Tabela 15 – Tempos de execução para objetivo de minimizar a maior rota.	67
Tabela 16 – Tempos de execução para objetivo de minimizar o custo total.	67
Tabela 17 – Valores do tempo total e tempo da maior rota das soluções obtidas.	71
Tabela 18 – Valores do GAP e tempo de execução das soluções obtidas.	71
Tabela 19 – Custo total e maior rota de execução de cada instância para o método ε -restrito.	73
Tabela 20 – Gap e tempo de execução de cada instância para o método ε -restrito.	74
Tabela 21 – Melhores resultados obtidos com o método PILS.	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS	25
2.1	PRV clássico	26
2.1.1	<i>PRV - Modelo 3-índices</i>	26
2.1.2	<i>PRV - Modelo 2-índices</i>	27
2.1.3	<i>PRV - Modelo partição de conjuntos</i>	28
2.2	PRV com múltiplas viagens	28
2.2.1	<i>PRVMV - frota homogênea</i>	29
2.2.1.1	<i>PRVMV - Modelo de 4-índices</i>	29
2.2.1.2	<i>PRVMV - Modelo de 3-índices</i>	30
2.2.1.3	<i>PRVMV - Modelo de 2-índices</i>	31
2.2.2	<i>PRVMV - frota heterogêna</i>	32
2.3	Considerações finais	33
3	PROBLEMA ESTUDADO	35
3.1	Definição do Problema	35
3.2	Modelo para a Minimização do Custo das Rotas	36
3.3	Modelo para a Minimização Tempo Maior Rota	40
3.4	Experimentos computacionais	41
3.5	Considerações finais	44
4	MÉTODO DE SOLUÇÃO	45
4.1	Solução inicial - Heurística Construtiva	45
4.2	<i>Iterated Local Search (ILS)</i>	48
4.2.1	<i>Busca Local</i>	49
4.2.2	<i>Perturbação</i>	51
4.2.3	<i>Critério de Aceitação de Soluções</i>	54
4.3	Procedimento de Melhoria através de Modelo de Cobertura	54
4.4	Método Desenvolvido	56
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	59
5.1	Configuração da ILS	59
5.1.1	<i>Configuração da Busca Local</i>	59

5.1.2	<i>Configuração das Perturbações</i>	60
5.2	Instâncias com 30 clientes	60
5.3	Instâncias da Literatura - frota homogênea	63
5.4	Instâncias - frota heterogênea	64
6	OTIMIZAÇÃO BIOBJETIVO	69
6.1	Conceitos Básicos de Otimização Multiobjetivo	69
6.2	Método da Ponderação dos Objetivos	70
6.3	Método ε -restrito	71
6.4	Pareto-ILS	75
7	CONCLUSÕES	79
	REFERÊNCIAS	81

INTRODUÇÃO

Devido à necessidade cada vez maior de transportar bens de consumo, um processo de distribuição eficiente tem-se tornado cada dia mais relevante. Nesse contexto, surge o Problema de Roteamento de Veículos (*PRV*), que tem sido amplamente estudado desde que foi introduzido por [Dantzig e Ramser \(1959\)](#). O problema clássico consiste em definir rotas para uma frota de veículos visando atender às demandas de um conjunto de clientes. Existem diversas revisões sobre o tema, dentre elas destacamos aqui [Laporte \(1992\)](#), [Golden, Raghavan e Wasil \(2008\)](#), [Laporte \(2009\)](#) e [Toth e Vigo \(2002\)](#). Na Figura 1, ilustramos um exemplo de um *PRV* com duas rotas utilizadas para atender sete clientes.

Figura 1 – Exemplo de uma solução para a entrega de mercadorias a clientes.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva¹.

¹ <https://www.canva.com/>

Em particular nos dias de hoje, cada caso possui particularidades que não são tratados no exemplo anterior. Logo, é necessário acrescentar à definição inicial novas características do problema (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016). São cada vez mais frequentes na literatura trabalhos que abordam diversas restrições para o problema simultaneamente. Tais abordagens são chamadas de variantes ricas do problema. Em Lahyani, Khemakhem e Semet (2015) é apresentado, além de uma classificação taxonômica, uma definição para o que é um PRV rico. Uma revisão sobre métodos heurísticos para essa classe de problemas é apresentada por Vidal *et al.* (2013), e em Caceres-Cruz *et al.* (2014a), é feita uma revisão geral do tema, entre combinações de restrições e métodos de solução.

Como exemplos de variantes ricas do problema, temos: i) PRV com janelas de tempo, no qual cada cliente só pode ser atendido dentro de um certo intervalo de tempo pré-estabelecido (Kallehauge *et al.* (2005) e Desrochers, Desrosiers e Solomon (1992)); ii) PRV com *backhauls*, em que os clientes são separados em dois grupos sendo um deles com demandas a serem entregues e o outro com demandas a serem coletadas (Goetschalckx e Jacobs-Blecha (1989) e Cuervo *et al.* (2014)); iii) PRV com demanda fracionável, em que a demanda de um cliente pode ser entregue em partes possibilitando que o cliente seja visitado mais de uma vez (Archetti e Speranza (2012) e Dror, Laporte e Trudeau (1994)); iv) PRV com frota heterogênea, no qual a frota de veículos disponível possui mais de um tipo de veículo (Koç *et al.* (2016) e Baldacci, Battarra e Vigo (2008)); e v) PRV com múltiplas viagens, em que cada veículo pode ser utilizado mais de uma vez, ou seja, um mesmo veículo pode realizar múltiplas viagens (Cattaruzza, Absi e Feillet (2016) e Şen e Bülbül (2008)).

A maioria das frotas de veículos em um âmbito industrial é heterogênea (HOFF *et al.*, 2010). No entanto, apenas aproximadamente 16% dos estudos atuais considera essa característica (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016). Além disso, adquirir novos veículos é custoso. Logo uma boa opção é reutilizar os veículos quando a demanda total for maior que a frota disponível. Além do apelo econômico, a melhor utilização dos veículos também é descrita como uma estratégia para uma logística mais sustentável (LIN *et al.*, 2014).

Como destacado por Molina *et al.* (2018), o contexto de múltiplas viagens também é relevante no roteamento de veículos para missões humanitárias, onde há uma quantidade limitada de recursos, incluindo a quantidade de veículos. Neste caso, além do objetivo usual de minimizar o custo total das rotas, também é de essencial importância minimizar o tempo de espera das pessoas a serem atendidas, uma vez que o tempo que o veículo leva para chegar a uma pessoa é o tempo na qual a mesma esperará o resgate. A logística humanitária foi destacada como parte fundamental em processos de superação de crises (LUIS; DOLINSKAYA; SMILOWITZ, 2012).

Como destacado, embora relevante em diferentes contextos, o Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos com Múltiplas Viagens (PRVHMHV) foi pouco estudado na literatura (que será discutida mais profundamente no Capítulo 2). Não é de nosso conhecimento que modelos matemáticos específicos tenham sido propostos para o problema. Dessa forma, neste

estudo temos como objetivo apresentar um modelo matemático adaptado da literatura para o problema, uma heurística ILS capaz de obter soluções de boa qualidade para instâncias de dimensões reais, em tempo computacional viável e, por fim, buscamos apresentar abordagens biobjetivo que tratam dois objetivos conflitantes do problema: minimizar o tempo total das rotas da solução e minimizar o tempo da maior rota utilizada. Os resultados obtidos foram promissores, instâncias de até 30 clientes foram resolvidas em até 10 segundos.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos uma introdução ao problema de roteamento de veículos clássico, no qual também são descritas as duas variantes do problema diretamente relacionadas ao contexto estudado. Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura para o problema estudado. No Capítulo 3, o modelo matemático desenvolvido para o PRV com múltiplas viagens e frota heterogênea e testes computacionais utilizados para sua validação são descritos. Em seguida, o Capítulo 4 apresenta a heurística desenvolvida. Os resultados referentes ao método heurístico são descritos no Capítulo 5. No Capítulo 6 estudamos uma solução biobjetiva para o problema apresentado. Por fim, no Capítulo 7, as conclusões e sugestões para pesquisas futuras são apresentadas.

O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

O problema de roteamento de veículos (PRV) pode ser definido como um grafo $G = (N, A)$ no qual o conjunto de vértices $N = \{0, 1, \dots, n\}$ denota os nós a serem visitados, em que $\{1, \dots, n\}$ representa o conjunto de clientes e o nó 0 indica o depósito. Cada cliente tem uma demanda d_i a ser atendida. O conjunto de arestas A corresponde aos caminhos que ligam esses vértices, em que cada aresta (i, j) possui um peso c_{ij} que indica o custo ou o tempo associado a esse caminho. O conjunto de veículos disponíveis para as entregas é representado por $V = \{1, \dots, |V|\}$. Os veículos são homogêneos e cada um tem capacidade máxima de carregamento igual a Q . O objetivo é encontrar um conjunto de rotas para os veículos que atenda a todos os clientes visando minimizar a soma dos pesos das rotas. Destacamos que as rotas iniciam e terminam no depósito. Esse problema pode ser modelado matematicamente de diferentes formas (LETFORD; SALAZAR-GONZÁLEZ, 2015; TOTH; VIGO, 2001). Segundo Lenstra e Kan (1981), o PRV é um problema NP-Difícil.

Os problemas de roteamento de veículos que surgem em contextos reais têm particularidades que requerem a adição de restrições para representá-las. Por exemplo, em um contexto de centros urbanos, temos uma alta demanda de soluções que reduzam os índices de poluição emitidos, seja por meio de rotas menores para veículos de pequeno porte ou de rotas para veículos que utilizam fontes de energia limpa, como os veículos elétricos. No entanto, esses veículos possuem autonomia reduzida para as rotas, ocasionada pela sua menor capacidade de transporte ou pela carga de sua bateria. Assim, atender todos os clientes pode se tornar uma dificuldade se o número de veículos for fixado, ou ser muito custoso caso um grande número de veículos fosse utilizado. Dessa forma, tratar a distribuição considerando que os veículos podem realizar múltiplas viagens torna-se economicamente atrativo. Outra estratégia que visa à redução de custos é a utilização de frotas compostas por diferentes tipos de veículos (frotas heterogêneas).

Nesta direção, abordamos duas variantes do PRV mais próximas do problema estudado.

Na Seção 2.2, tratamos o problema de roteamento de veículos com múltiplas viagens, tanto com frota homogênea quanto com frota heterogênea. Um resumo dos artigos mais recentes que abordam o problema é apresentado em seguida. Antes, no entanto, na Seção 2.1, apresentamos três modelos clássicos da literatura para o PRV.

2.1 PRV clássico

Nesta seção, apresentamos três modelos clássicos da literatura para o problema de roteamento de veículos. Primeiramente, são descritos dois modelos de fluxo com três e dois índices e, em seguida, um modelo baseado em partição de conjuntos. Os modelos de fluxo são apresentados como proposto por Toth e Vigo (2001), e o modelo de partição de conjuntos de acordo com Toth e Vigo (2014).

2.1.1 PRV - Modelo 3-índices

Um dos modelos clássicos da literatura para o PRV é denominado modelo 3-índices. Para representar o problema, são utilizados dois conjuntos de variáveis binárias: x_{ij}^k que assume o valor 1 se o veículo k percorre o arco (i, j) e 0, caso contrário; e y_i^k que indica se o veículo k visita o cliente i se seu valor é 1, e assume o valor 0, caso contrário. Apesar do problema estudado não ser orientado, ou seja, $c_{ij} = c_{ji}$ sempre, o modelo seguinte é orientado, assim como os outros descritos, uma vez que não temos $x_{ij}^k = x_{ji}^k$. O modelo 3-índices é dado por (2.1) – (2.8).

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ij}^k \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in V} y_i^k = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in V} y_0^k = |V| \quad (2.3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^k = \sum_{j \in N} x_{ji}^k = y_i^k \quad \forall i \in N, \forall k \in V \quad (2.4)$$

$$\sum_{i \in N} d_i y_i^k \leq Q \quad \forall k \in V \quad (2.5)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij}^k \geq y_h^k \quad \forall S \subseteq N \setminus \{0\}, \forall h \in S, \forall k \in V \quad (2.6)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in V \quad (2.7)$$

$$y_i^k \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, \forall k \in V \quad (2.8)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos das rotas de entrega aos clientes. As restrições (2.2) garantem que cada cliente é visitado uma única vez, enquanto a restrição (2.3)

impõe que a quantidade de veículos utilizados é igual a quantidade de veículos disponível. As restrições (2.4) garantem a continuidade das rotas, ou seja, o veículo que atende o cliente i é o mesmo veículo que chega no cliente e que deixa o cliente. Em (2.5), temos que a demanda total de cada rota respeita a capacidade máxima do veículo, enquanto (2.6) impõem a eliminação de subciclos, ou seja, que exista uma rota que não passe pelo depósito. O domínio das variáveis é definido em (2.7) e (2.8).

2.1.2 PRV - Modelo 2-índices

Um segundo modelo clássico da literatura é chamado modelo de 2-índices. Neste trabalho, o modelo 2-índices é apresentado como proposto em Toth e Vigo (2001) ((2.9) – (2.14)), no qual as variáveis x_{ij}^k deixam de ter o índice k que define o veículo e se tornam x_{ij} que representa se o arco (i, j) é percorrido ou não, e as variáveis y_i^k não são mais necessárias. É possível remover esse índice e essas variáveis uma vez que os veículos são homogêneos e dessa forma não é necessário identificá-los.

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (2.9)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0} = |V|, \quad (2.12)$$

$$\sum_{i \in N} x_{0i} = |V|, \quad (2.13)$$

$$\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} d_i}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subset N, \quad (2.14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.15)$$

A função objetivo (2.9) minimiza os custos das rotas e as restrições (2.10) e (2.11) garantem que todo cliente é visitado uma única vez. As restrições (2.12) e (2.13) definem que todos os veículos deixam e retornam ao depósito. Em seguida, as restrições (2.14) asseguram um limitante inferior para a quantidade de veículos a visitar cada subconjunto de clientes, buscando que as demandas sejam todas atendidas e respeitando a capacidade máxima dos veículos, além de eliminar subciclos. O domínio das variáveis é dado por (2.15).

2.1.3 PRV - Modelo partição de conjuntos

Por fim, temos o modelo baseado em partição de conjuntos, como descrito em (TOTH; VIGO, 2014). Neste modelo, Ω é o conjunto de rotas factíveis, c_r é o custo da rota $r \in \Omega$, λ_r é uma variável binária que assume o valor 1 se a rota r é utilizada na solução do problema, ou igual a 0, caso contrário. Por fim, definimos o parâmetro a_{ir} igual a 1 se o cliente i é visitado na rota r , ou igual a 0, caso contrário. O modelo é dado por (2.16) – (2.19).

$$\text{minimizar } \sum_{r \in \Omega} c_r \lambda_r \quad (2.16)$$

sujeito a:

$$\sum_{r \in \Omega} a_{ir} \lambda_r = 1 \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (2.17)$$

$$\sum_{r \in \Omega} \lambda_r = |V|, \quad (2.18)$$

$$\lambda_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in \Omega \quad (2.19)$$

A função objetivo (2.16) minimiza a soma dos custos das rotas utilizadas. As restrições (2.17) garantem que no conjunto de rotas escolhidas cada cliente é visitado uma única vez e (2.18) determina que o número de rotas escolhidas é igual ao número de veículos disponíveis. O domínio das variáveis é dado por (2.19).

Neste modelo, é importante ressaltar que o número de rotas, em geral, é muito grande. Dessa forma, tal formulação é utilizada principalmente com o método de geração de colunas, no qual cada coluna representa uma rota e essas são geradas durante a resolução do problema. Assim, não é necessário obter todas as rotas a priori. Para uma revisão sobre geração de colunas sugerimos o artigo (LÜBBECKE; DESROSIERS, 2005) e o tutorial (CARVALHO, 2017).

2.2 PRV com múltiplas viagens

O PRVMV foi primeiramente descrito por (FLEISCHMANN, 1990). Os autores desenvolveram uma heurística para o PRVMV que também considera janelas de tempo e frota heterogênea. Apesar de importante no contexto em que a frota de veículos possui capacidades ou autonomias limitadas, essa variação ganhou pouca visibilidade até recentemente. No entanto, nos últimos anos, o problema vem recebendo cada vez mais atenção (CATTARUZZA; ABSI; FEILLET, 2016).

O PRVMV é uma extensão do PRV, dessa forma respeita as características destacadas no início deste capítulo. No entanto, também devemos considerar o tempo máximo (T_{max}) em que cada veículo deve retornar ao depósito após encerrar todas as suas entregas, ou seja, o tempo total de sua rota. Não é mais necessário que o veículo faça apenas uma viagem, dessa forma, ele

pode retornar ao depósito, ser recarregado e realizar outra viagem. Portanto, a rota de um veículo pode ser composta por mais de uma viagem, sendo que cada viagem tem início e término no depósito. Logo, o tempo total de uma rota é dado pela soma dos tempos de suas viagens.

Assim como para o PRV, diferentes modelos foram propostos na literatura para tratar o PRVMV. A seguir, apresentamos três modelos descritos em [Cattaruzza, Absi e Feillet \(2016\)](#) para o PRVMV com frota homogênea. Por fim, o PRVMV com frota heterogênea é descrito.

2.2.1 PRVMV - frota homogênea

[Cattaruzza, Absi e Feillet \(2016\)](#) adaptam três modelos da literatura para o PRVMV com frota homogênea. No primeiro, as variáveis de decisão são definidas com quatro índices; no segundo, as variáveis têm três índices; no último, as variáveis têm apenas dois índices. Esses modelos são descritos a seguir.

2.2.1.1 PRVMV - Modelo de 4-índices

Primeiramente, apresentamos o modelo com 4-índices para o problema de roteamento de veículos com múltiplas viagens e frota homogênea. Este modelo é uma adaptação do modelo de 3-índices do PRV, dessa forma é incluído o quarto índice para que seja demarcada a viagem na qual representada pela variável. As variáveis do problema são descritas a seguir e o modelo 4-índices é dado por (2.20) – (2.27).

Parâmetros adicionais

ϕ conjunto de viagens viáveis.

Variáveis

x_{ij}^{kl} é igual a 1 se o veículo k ao realizar a viagem l atravessa a aresta (i, j) , e é igual a 0 caso contrário;

y_i^{kl} é igual a 1 se o veículo k ao realizar a viagem l visita o cliente i , e é igual a 0 caso contrário.

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \sum_{k \in V} \sum_{l \in \phi} x_{ij}^{kl} \quad (2.20)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in V} \sum_{l \in \phi} y_i^{kl} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (2.21)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^{kl} = \sum_{i \in N} x_{ji}^{kl} = y_i^{kl} \quad \forall j \in N, k \in V, l \in \phi, \quad (2.22)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} d_i y_i^{kl} \leq Q \quad \forall k \in V, l \in \phi, \quad (2.23)$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} x_{ij}^{kl} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N \setminus \{0\}, |S| \geq 2, k \in V, l \in \phi \quad (2.24)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in \phi} c_{ij} x_{ij}^{kl} \leq T_{max} \quad \forall k \in V, \quad (2.25)$$

$$x_{ij}^{kl} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, l \in \phi, (i, j) \in A, \quad (2.26)$$

$$y_i^{kl} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, l \in \phi, i \in N. \quad (2.27)$$

Como nos modelos anteriores, a função objetivo do problema (2.20) visa minimizar a soma dos tempos de viagem. As restrições (2.21) e (2.22) garantem que todo cliente é visitado exatamente uma vez e que o veículo que chega ao cliente numa dada viagem é o mesmo que deixa o cliente nessa viagem, respectivamente. Com as restrições (2.23), temos que cada viagem de cada veículo respeita sua capacidade máxima de carregamento. As restrições (2.24) impedem a formação de subciclos, e as restrições (2.25) asseguram o tempo máximo de cada rota, ou seja, das viagens designadas a um dado veículo. As demais restrições estabelecem o domínio das variáveis. É importante ressaltar que nesse modelo o tamanho do conjunto ϕ é exponencial.

2.2.1.2 PRVMV - Modelo de 3-índices

Uma formulação com variáveis de decisão de três índices foi proposta para o PRVMV. O modelo (2.28) – (2.36) é derivado do modelo de 2-índices do PRV, e é apresentado a seguir.

Variáveis	
x_{ij}^k	é igual a 1 se o veículo k atravessa a aresta (i, j) , e é igual a 0 caso contrário;
y_i^k	é igual a 1 se um veículo k visita o cliente i , e é igual a 0 caso contrário;
q_{ij}^k	indica a quantidade de carga transportada no arco (i, j) pelo veículo k .

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \sum_{k \in V} x_{ij}^k \quad (2.28)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in V} y_i^k = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (2.29)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^k = \sum_{i \in N} x_{ji}^k = y_i^k \quad \forall j \in N, k \in V, \quad (2.30)$$

$$q_{ij}^k \leq Q x_{ij}^k \quad \forall k \in V, \quad (2.31)$$

$$\sum_{j \in N} q_{ij}^k - \sum_{j \in N} q_{ji}^k = d_i y_i^k \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in V, \quad (2.32)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \leq T_{max} \quad \forall k \in V, \quad (2.33)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, (i, j) \in A, \quad (2.34)$$

$$y_i^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, i \in N, \quad (2.35)$$

$$q_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in V, (i, j) \in A. \quad (2.36)$$

A função objetivo (2.28) e as restrições (2.29), (2.30) e (2.33) são análogas às restrições (2.21), (2.22) e (2.23) do modelo 4-índices, respectivamente. As restrições (2.31) asseguram que a capacidade máxima de carregamento do veículo é respeitada em cada uma de suas viagens, enquanto as restrições (2.32) garantem o atendimento da demanda e impedem a formação de subciclos (mais detalhes sobre subciclos são dados no Capítulo 3). As restrições (2.34) – (2.36) definem o domínio das variáveis do modelo.

2.2.1.3 PRVMV - Modelo de 2-índices

Por fim, temos o modelo de 2-índices (2.37) – (2.47), cujas variáveis são definidas a seguir.

Variáveis	
x_{ij}	é igual a 1 se o arco (i, j) é utilizado em alguma rota, e é igual a 0 caso contrário;
x'_{ij}	é igual a 1 se uma viagem que terminada no nó i é sucedida por uma viagem que inicia no nó j ;
q_i	indica a quantidade de carga transportada no veículo no nó i ;
t_i	indica o instante em que o cliente i é visitado.

Para um melhor entendimento da variável x'_{ij} , suponha um veículo que realiza duas viagens: $[0, A, B, 0]$ e em seguida $[0, C, D, 0]$, dessa forma temos que a variável x'_{BC} tem valor igual a 1, uma vez que o veículo termina uma viagem com o cliente B e inicia a viagem seguinte com o cliente C.

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} \quad (2.37)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (2.38)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = \sum_{j \in N} x_{ji} \quad \forall i \in N, \quad (2.39)$$

$$q_i - d_i \leq q_j + Q(1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \forall j \in N, \quad (2.40)$$

$$t_i + c_{ij} \leq t_j + T_{\max}(1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N, \forall j \in N \setminus \{0\}, \quad (2.41)$$

$$t_i + c_{i0} + c_{0j} \leq t_j + M(1 - x'_{ij}) \quad \forall i, j \in N \setminus \{0\}, \quad (2.42)$$

$$c_{0i} \leq t_i \leq T_{\max} - c_{i0} \quad \forall i \in N, \quad (2.43)$$

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} x'_{ij} \leq x_{i0}, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (2.44)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} x'_{ij} \leq x_{0j}, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, \quad (2.45)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j} - \sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{j \in N \setminus \{0\}} x'_{ij} \leq |V|, \quad (2.46)$$

$$0 \leq q_i \leq Q \quad \forall i \in N, \quad (2.47)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \quad (2.48)$$

$$x'_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \quad (2.49)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in N. \quad (2.50)$$

A função objetivo (2.37) minimiza o custo de deslocamento total. Assim como no modelo de 2-índices do PRV, as restrições (2.38) garantem que cada cliente é atendido em uma única visita, e as restrições (2.39) asseguram a continuidade das rotas. O atendimento da demanda é dado pelas restrições (2.40). As restrições (2.41), (2.42) e (2.43) garantem que a união de viagens para a constituição da rota de cada veículo está limitada ao tempo total permitido. As restrições (2.44), (2.45) e (2.46) garantem que o número máximo de veículos é respeitado. As restrições (2.47) asseguram que a capacidade máxima de carregamento dos veículos não é ultrapassada. As demais restrições definem o domínio das variáveis.

2.2.2 PRVMV - frota heterogênea

Os modelos descritos na seção anterior tratam apenas problemas nos quais a frota de veículos é homogênea. Como o problema estudado é inspirado no PRVMV em um contexto urbano, visando obter rotas econômicas e que reduzam os índices de poluição emitidos, estudamos a variante do problema com uma frota heterogênea. Neste caso, a frota de veículos pode ser composta por veículos distintos de pequeno porte que podem realizar múltiplas viagens. Na

literatura, este problema é classificado como Problema de Roteamento de Veículos Heterogêneos com Múltiplas Viagens (PRVHMV).

Ao nosso conhecimento, os artigos que abordam o PRV com frota heterogênea e múltiplas viagens simultaneamente são [Fleischmann \(1990\)](#), [Prins \(2002\)](#) e [Caceres-Cruz *et al.* \(2014b\)](#). Em [Fleischmann \(1990\)](#), temos a proposta de um algoritmo de economias, baseado em [Clarke e Wright \(1964\)](#), no qual em cada iteração é verificada a factibilidade da solução com relação à frota de veículos e ao tempo máximo de cada rota. [Prins \(2002\)](#) apresenta algoritmos sequenciais para criação de rotas e, em seguida, métodos de busca local para melhoria das soluções obtidas. Primeiramente, são estudados casos com uma única viagem e, na sequência, os métodos apresentados são adaptados para múltiplas viagens. Em particular, considerando uma frota infinita, é obtida uma solução inicial para o problema. Em seguida, esta solução é adaptada unindo viagens para que a frota existente possa comportar a solução com uso de múltiplas viagens. Também baseado na heurística de [Clarke e Wright \(1964\)](#), [Caceres-Cruz *et al.* \(2014b\)](#) desenvolveram um algoritmo híbrido para o PRVHMV. Para cada par de vértices, é calculada a economia ao uní-los numa mesma viagem. Um procedimento construtivo é utilizado para encontrar uma solução, no qual a probabilidade de cada vértice ser escolhido é proporcional à sua economia. Por fim, a solução é melhorada por meio de duas buscas locais, sendo que na primeira, uma tabela *hash* é utilizada para atualizar cada rota com opções melhores que atendam os mesmos clientes (essas outras opções são salvas em outras iterações do algoritmo) e, na segunda, a solução atual é dividida em conjuntos, utilizando um critério de proximidade. Cada conjunto é considerado como um pequeno problema e os passos anteriores do algoritmo são utilizados para solucioná-lo.

Apesar de algumas abordagens do PRV com frota heterogênea consideraram o custo c_{ij} dependente de cada veículo, de forma que veículos diferentes tenham um custo diferente, nas abordagens do PRVHMV esse não foi o caso. De maneira que nesse mestrado também não consideramos que o tipo de veículo tenha influência no custo ou no tempo.

2.3 Considerações finais

Como podemos observar, poucos trabalhos tratam frota heterogênea e múltiplas viagens e não é de nosso conhecimento que os modelos da literatura tenham sido adaptados para tratar esta variante do problema. No entanto, com o aumento de entregas nas cidades e a necessidade de redução dos níveis de poluição, o estudo deste problema se torna a cada dia mais relevante. Neste contexto, abordamos o problema de roteamento de veículos com frota heterogênea em que os veículos podem executar múltiplas viagens.

Além disso, nos modelos apresentados anteriormente, assim como na grande variedade de modelos presentes na literatura, temos como principal abordagem o objetivo de minimizar o custo total das rotas. No entanto, ao se considerar apenas esse aspecto do problema, outras

características relevantes podem ser prejudicadas. Por exemplo, ao definir as rotas da frota de veículos minimizando seu custo total, não damos foco para balanceamento das rotas, o que geralmente produz soluções com rotas excessivamente diversas com relação ao tempo de percurso. Este problema é mais relevante no contexto de múltiplas viagens. Logo, também nesta dissertação, tratamos o problema biobjetivo em que buscamos minimizar o custo total das rotas e o tempo da maior rota.

PROBLEMA ESTUDADO

Neste capítulo, definimos as características do problema estudado e as hipóteses consideradas, bem como sua modelagem matemática para tratar o problema. Mais especificamente, na Seção 3.1, descrevemos o problema de roteamento de veículos heterogêneos com múltiplas viagens (*PRVHMV*). Em seguida, na Seção 3.2 é detalhada uma formulação matemática desenvolvida para tratar o problema em que o objetivo é minimizar o custo total das rotas. Este modelo é uma adaptação do trabalho de (AGHEZZAF; RAA; LANDEGHEM, 2006). Na Seção 3.3, reescrevemos o modelo para considerar como objetivo a minimização do tempo da maior rota. Os resultados de experimentos computacionais realizados para analisar o modelo são resumidos na Seção 3.4.

3.1 Definição do Problema

Consideramos uma frota com veículos heterogêneos em questão de capacidade e que podem realizar mais de uma viagem em suas rotas. No entanto, a soma do tempo total das viagens de cada veículos não pode ultrapassar um limite de tempo pré-definido. O problema mantém as demais características descritas na Seção 2.1 para o PRV, como atender todas as demandas dos clientes e respeitar a capacidade máxima do veículo. Além disso, com base na abordagem apresentada por Molina *et al.* (2018), estudamos duas funções objetivo para o problema. Uma delas busca minimizar o tempo total de execução das rotas, enquanto a outra busca minimizar o tempo da maior rota a ser executada. Consideramos que custo e tempo são proporcionais, portanto facilmente convertidos.

A Figura 2a ilustra um exemplo de um problema de roteamento de veículos com múltiplas viagens com uma frota heterogênea composta por dois veículos com capacidade 7 (azul) e 10 (verde), respectivamente. Os sete clientes tem demanda total igual a 24, que é maior do que a capacidade de carga dos veículos. Logo caso não fossem permitidas múltiplas viagens, teríamos um problema sem solução viável. Na Figura 2b, temos uma solução para esse problema na qual

o veículo azul realiza duas viagens e o veículo verde uma viagem. As rota dos veículos são dadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Rotas dos veículos para o exemplo da Figura 2b.

Veículo	Rota	Capacidade
Veículo azul	0 -> G -> F -> 0 -> E -> D -> 0	7
Veículo verde	0 -> A -> B -> C -> 0	10

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 2 – Problema de roteamento com frota heterogênea.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Vale ressaltar as definições de rota e viagem: viagem é uma sequência de clientes a serem atendidos que possui o depósito exclusivamente como ponto de partida e ponto final, enquanto uma rota é composta por uma ou mais viagens. Portanto uma rota pode possuir o depósito como uma parada entre outros clientes, para que seja feito o recarregamento do veículo. A cada veículo é designada uma única rota que é composta pela união das viagens atribuídas a esse veículo.

3.2 Modelo para a Minimização do Custo das Rotas

O modelo desenvolvido é uma adaptação do modelo de 3-índices (AGHEZZAF; RAA; LANDEGHEM, 2006) para tratar frotas heterogêneas. Destacamos que os autores abordaram o caso de múltiplas viagens para uma frota homogênea. A seguir, definimos os parâmetros e as variáveis utilizados e, em seguida, o modelo que é dado por (3.1) – (3.10).

Parâmetros	
$V = \{1, \dots, V \}$	é o conjunto de veículos;
Q^k	é a capacidade máxima de carregamento do veículo k ;
$N = \{0, 1, \dots, n\}$	é o conjunto de nós sendo que o nó 0 representa o depósito e os demais os clientes;
A	é o conjunto de arestas que ligam os nós do problema, ou seja, representam o caminho entre cada par de nós;
c_{ij}	é o tempo de trajeto entre o nó i e o nó j , portanto, o peso da aresta (i, j) ;
d_i	é a demanda do cliente i ;
T_{max}	é o tempo máximo que um veículo está disponível.
Variáveis	
x_{ij}^k	é igual a 1 se o veículo k atravessa a aresta (i, j) , e é igual a 0 caso contrário;
y_i^k	é igual a 1 se o veículo k visita o cliente i , e é igual a 0 caso contrário;
q_{ij}^k	é igual a capacidade ocupada do veículo k quando ele atravessa o arco (i, j) .

$$f_c(x) = \text{minimizar} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \sum_{k \in V} x_{ij}^k \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in V} y_i^k = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{0i}^k = \sum_{i \in N} x_{i0}^k \quad \forall k \in V, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^k = \sum_{i \in N} x_{ji}^k = y_j^k \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, k \in V, \quad (3.4)$$

$$q_{ij}^k \leq Q^k x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in V, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in N} q_{ij}^k - \sum_{j \in N} q_{ji}^k = d_i y_i^k \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in V, \quad (3.6)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \leq T_{max} \quad \forall k \in V, \quad (3.7)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, (i, j) \in A, \quad (3.8)$$

$$y_i^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in V, i \in N, \quad (3.9)$$

$$q_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in V, (i, j) \in A. \quad (3.10)$$

A função objetivo $f_c(x)$ (3.1) minimiza a soma dos tempos das rotas. As restrições (3.2) garantem que um cliente é visitado uma única vez. Com (3.3) temos que a quantidade de vezes que um veículo sai do depósito é a mesma que ele retorna. Logo, toda viagem é iniciada e concluída no depósito. As restrições (3.4) asseguram a continuidade das rotas, ou seja, o veículo que inicia o atendimento do cliente j é o mesmo que o conclui. A capacidade máxima de cada veículo é imposta pelas restrições (3.5) que, em conjunto com as restrições (3.6), impedem que haja subciclos ilegais nas viagens (um subciclo ilegal consiste em uma viagem que não passa pelo depósito, exemplificado pela Figura 3). As restrições (3.7) garantem que o tempo máximo da rota de cada veículo seja respeitado. O domínio das variáveis é dado pelas restrições (3.8) –

Figura 3 – Exemplo de subciclo ilegal composto pelos nós A, B e C.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

(3.10).

As principais diferenças entre os dois modelos é a inclusão do índice k no parâmetro Q^k de modo a incluir as características de frota heterogênea nas restrições (3.5).

Figura 4 – Exemplo de uma viagem para ilustrar as Restrições 3.6.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

A Figura 4 e a Tabela 2 ilustram um exemplo para as Restrições (3.6). Nele é representada uma viagem do veículo k , o qual atende os clientes A, B e C. A demanda dos clientes e carga do veículo em cada arco são dadas na Tabela 2. Para realizar as entregas é necessário que o veículo saia do depósito com toda a demanda a ser atendida. Dessa forma, no arco 0C, o veículo está carregado com 22 unidades de demanda, ao terminar a entrega no cliente C, o veículo segue pelo arco CB. Como o cliente C foi atendido, são retiradas 6 unidades da carga do veículo, portanto o

Tabela 2 – Dados do Exemplo da Figura 4.

Demandas	Carga do veículo nos arcos
$d_A = 7$	$q_{0C}^k = 22$
$d_B = 9$	$q_{CB}^k = 16$
$d_C = 6$	$q_{BA}^k = 7$
	$q_{A0}^k = 0$

Fonte: Elaborada pela autora.

veículo percorre o arco CB com 16 unidades de carga e assim por diante. Dessa forma, podemos generalizar a carga de um arco como a carga no veículo que ele tinha antes de passar pelo cliente ($\sum_{j \in N} q_{ij}^k$) menos a demanda do cliente que foi atendido. Temos que:

$$\sum_{j \in N} q_{ij}^k - d_i y_i^k = \sum_{j \in N} q_{ji}^k$$

que corresponde ao conjunto de Restrições (3.6). Como é possível ver, a carga no veículo sempre vai diminuindo até chegar em 0 quando ele volta para o depósito, desta forma as restrições impedem que ocorram ciclos que não contenham o depósito (chamados ciclos ilegais).

Figura 5 – Contra exemplo para a restrição de demandas (3.6).

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Como contra exemplo podemos pensar na viagem da Figura 5, onde o valor das variáveis q_{ij} são apresentados pela Tabela 3. No entanto, ao serem calculadas as restrições para $j = A, B, C$ temos:

$$j = B :$$

Tabela 3 – Dados do Exemplo da Figura 4.

Demandas	Carga do veículo nos arcos
$d_A = 7$	$q_{AC}^k = 22$
$d_B = 9$	$q_{CB}^k = 16$
$d_C = 6$	$q_{BA}^k = 7$

Fonte: Elaborada pela autora.

$$(q_{AB} + q_{CB}) - d_B = (q_{BA} + q_{BC}) \quad (3.11)$$

$$0 + 16 - 9 = 7 + 0 \quad (3.12)$$

$$7 = 7 \quad (3.13)$$

$j = C :$

$$(q_{AC} + q_{BC}) - d_C = (q_{CA} + q_{CB}) \quad (3.14)$$

$$22 + 0 - 6 = 0 + 16 \quad (3.15)$$

$$16 = 16 \quad (3.16)$$

$j = A :$

$$(q_{BA} + q_{CA}) - d_A = (q_{AB} + q_{AC}) \quad (3.17)$$

$$7 + 0 - 7 = 0 + 22 \quad (3.18)$$

$$0 = 22 \quad (3.19)$$

No entanto, com $j = A$ temos uma inconsistência, uma vez que, como queríamos, viagens sem o depósito não são permitidas, portanto o conjunto de restrições apresentado previne subciclos.

3.3 Modelo para a Minimização Tempo Maior Rota

Como abordado no Capítulo 1, há situações em que é necessário minimizar o tempo de atendimento dos clientes, mais especificamente, o momento em que o último cliente é atendido, como em caso de desastres naturais. Para isso, a seguir apresentamos uma nova formulação para o problema em que o foco está na minimização do tempo da maior rota a ser executada. Temos então as expressões (3.20) – (3.22), que em conjunto com (3.2) - (3.10), descrevem o novo modelo.

$$f_t(z) = \text{minimizar } z \quad (3.20)$$

sujeito a:

$$(3.2) - (3.10)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \leq z \quad \forall k \in V, \quad (3.21)$$

$$z \geq 0. \quad (3.22)$$

em que z é igual ao tempo da maior rota (variável).

Nesse modelo, é alterada a função objetivo para que minimizemos o valor de z , que representa o tempo da maior rota executada. Em (3.21), determinamos o domínio de z .

3.4 Experimentos computacionais

Para a realização dos experimentos computacionais, o modelo apresentado foi implementado em Python e as instâncias foram resolvidas através do software de otimização Gurobi 8.0.1, com configuração padrão dos parâmetros e tempo limite de execução de 1.800 segundos. Os testes foram realizados em um computador Intel(R) Core(TM) i7-8565U, e memória RAM de 16GB com sistema operacional Mint versão 19.1.

Foram geradas 10 instâncias com base no método de geração descrito em [Prins \(2002\)](#). No entanto, como o problema estudado é de difícil resolução, geramos instâncias menores para que pudéssemos realizar uma melhor análise dos modelos. As instâncias utilizadas foram geradas com 30 clientes espalhados uniformemente em uma malha de dimensão 60 e o depósito é localizado no centro da malha. Cada cliente i possui uma demanda $q_i \in U[1, 30]$ (distribuição uniforme). O tempo máximo da rota é 200 e a frota é composta por três veículos com capacidades 80, 70 e 60. O número de clientes, o tamanho da malha e o intervalo de valores para as demandas foram escolhidos de forma a reproduzir as instâncias de [Prins \(2002\)](#) em menor escala. As capacidades dos veículos e o tempo máximo de rota foram escolhidos de forma empírica com o objetivo de gerar instâncias que necessitassem de múltiplas viagens (com o total de capacidades dos veículos sendo menor que o total das demandas) e ao mesmo tempo um único veículo não fosse capaz de concluir todas as entregas (com o tempo máximo de rota sendo menor que o tempo necessário para isso).

Dois experimentos computacionais foram realizados para avaliar os modelos. No primeiro, é considerada a função objetivo (3.1). Em seguida, é considerada a função (3.20). Na Tabela 4, são apresentados os resultados do primeiro experimento. Na primeira coluna, é descrita a instância e, na segunda coluna, o valor do custo total da rota da melhor solução encontrada dentro do tempo limite (Custo Total). Em seguida, é apresentado o tempo da maior rota (Maior Rota) e, por fim, nas duas últimas colunas são apresentados em formato decimal o desvio da solução

ótima ($GAP = \frac{Custo - LI}{Custo}$, em que LI é o limitante inferior encontrado ao resolver a instância) e o tempo utilizado na resolução da instância (Tempo). Na última linha da tabela, é apresentado o GAP médio. Em seguida, temos a Tabela 5 que apresenta as mesmas informações da Tabela 4 para o segundo experimento.

Tabela 4 – Resultados computacionais considerando a minimização do custo.

Instância	Custo Total	Maior Rota	GAP	Tempo (s)
1	398,82	167,67	3%	1800,20
2	364,77	190,00	0%	538,82
3	460,58	176,21	4%	1800,24
4	499,61	198,94	6%	1800,29
5	477,10	176,87	5%	1800,26
6	430,23	195,50	3%	1800,25
7	526,00	199,20	5%	1800,22
8	418,89	197,13	9%	1800,27
9	434,18	167,35	8%	1800,24
10	488,23	196,70	4%	1800,20
Média			7%	

Tabela 5 – Resultados computacionais considerando a minimização do tempo da maior rota.

Instância	Custo Total	Maior Rota	GAP	Tempo (s)
1	437,90	149,44	12%	1800,18
2	401,43	135,48	8%	1800,25
3	480,55	161,58	7%	1800,21
4	523,93	176,41	10%	1800,24
5	498,67	166,96	8%	1800,21
6	475,68	159,19	10%	1800,24
7	531,78	180,72	6%	1800,20
8	436,88	146,28	11%	1800,23
9	446,87	151,37	9%	1800,25
10	532,80	178,86	12%	1800,24
Média			5%	

Como podemos observar, uma solução ótima foi obtida apenas para a Instância 2 considerando o objetivo de minimizar o custo total das rotas. Para as demais instâncias o tempo total de 1.800 segundos foi atingido, logo não foi possível provar que a solução obtida é ótima. Não notamos nenhuma característica particular na Instância 2 que justifique este resultado. Os resultados mostraram que mesmo as instâncias pequenas são de difícil resolução. O GAP médio para cada um dos experimentos foi de 7% e 5%.

Os resultados mostram que existe uma diferença entre abordar o custo total das rotas e minimizar o tempo da maior rota executada. Quando focamos em minimizar o custo total das rotas, o custo das soluções é em média 6,1% melhor que quando minimizamos o tempo da maior rota. No entanto, quando minimizamos o tempo da maior rota, há um ganho de 16,8%

Figura 6 – Comparação entre os resultados dos modelos.

(a) Valores do custo total.

(b) Valores da maior rota.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a biblioteca Matplotlib em Python.

em relação a maior rota obtida nos experimentos que visam minimizar o custo total (ver Tabela 4). Dessa forma, podemos ver que os objetivos abordados são conflitantes, ou seja, quando focamos em um, o outro tende a ter valores piores. Na Figura 6, apresentamos dois gráficos que ilustram esse conflito. Na Figura 6a, são apresentados os valores do custo total das soluções e, na Figura 6b, são representados os valores da Maior Rota. Nas figuras, a cor azul representa os resultados obtidos quando o objetivo é minimizar o custo total, enquanto a cor laranja representa os resultados quando minimizamos o tempo da maior rota.

3.5 Considerações finais

Como esperado, o problema é de difícil resolução e mesmo para instâncias com apenas 30 clientes, uma solução ótima não foi obtida no tempo estabelecido. Logo, no próximo capítulo apresentamos um método heurístico desenvolvido para tratar o problema. Além disso, os resultados apontam o conflito entre os objetivos avaliados: minimização do custo total e minimização da maior rota. Portanto, no Capítulo 6, descrevemos uma proposta biobjetivo para o problema.

MÉTODO DE SOLUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos uma meta-heurística para resolver o problema estudado. O método é composto por três etapas: obtenção de uma solução inicial; obtenção de ótimos locais utilizando uma *Iterated Local Search* (ILS); e, por fim, melhoria das soluções pela resolução de um modelo de cobertura. Cada uma dessas etapas é descrita ao decorrer do capítulo, sendo a Seção 4.1 dedicada à estratégia utilizada para obter uma solução inicial, sendo seguida pela descrição da ILS desenvolvida (Seção 4.2). Por fim, na Seção 4.3, é apresentado um modelo de cobertura utilizado para melhoria da solução.

4.1 Solução inicial - Heurística Construtiva

Como ponto de partida, foi implementada a heurística construtiva descrita em [Fleischmann \(1990\)](#) para obter as rotas dos veículos. Esse método é baseado na heurística de economias de [Clarke e Wright \(1964\)](#), no entanto, são adicionados passos para que sejam considerados veículos heterogêneos e múltiplas viagens. No Algoritmo 1, apresentamos o pseudo-código da heurística construtiva. Vale ressaltar que a heurística trata apenas o objetivo de minimizar a soma dos custos das rotas.

O algoritmo possui uma fase inicial na qual são definidas viagens unitárias para cada cliente, que consistem em sair do depósito, visitar o cliente e retornar ao depósito. Em seguida, é utilizado o algoritmo de designação de rotas (Algoritmo 2) para atribuir as viagens aos veículos. Quando não é possível atribuir uma viagem a um dos veículos, é incluído um veículo fictício para realizar essa viagem. Tal veículo corresponde a uma réplica do menor veículo real com capacidade suficiente para realizar a viagem em questão.

No passo seguinte, para cada par de clientes é calculada a economia obtida se houver união das viagens em que estão os clientes. São calculadas as economias apenas quando os clientes do par estão no início ou no fim de viagens distintas. Inicialmente, isso é verdade para

todos os clientes, uma vez que temos apenas viagens diretas do depósito ao cliente definidas no passo anterior.

Com o conjunto de viagens definido, feita a atribuição ao conjunto de veículos estendido (veículos da frota e veículos fictícios) e com as economias calculadas, iniciamos a fase de união de viagens, buscando a redução dos custos. Esta etapa é concluída quando não existe mais nenhuma economia viável. Mais detalhadamente, para cada par de clientes (i, j) em que, obrigatoriamente, cada um inicie ou termine uma viagem, é criada uma viagem T . Seja T_i a viagem que contém i e T_j a viagem que contém j . A viagem T é a união dessas duas viagens de forma que o arco (i, j) (ou o arco (j, i)) seja acrescentado a viagem. Por exemplo, seja $T_i = [0, i, a, b, 0]$ e $T_j = [0, c, d, j, 0]$, teríamos então $T = [0, c, d, j, i, a, b, 0]$. Por outro lado, se tivéssemos $T_i = [0, i, a, b, 0]$ e $T_j = [0, j, c, d, 0]$ teríamos $T = [0, b, a, i, j, c, d, 0]$, para isso foi necessário inverter a ordem da viagem T_i , o que não causa uma alteração no custo total, uma vez que nosso problema é simétrico.

Seja T uma viagem e $v(T)$ o veículo que realiza a viagem T . Para verificar a possibilidade de incluir a viagem T na solução, são realizados três testes. Primeiramente, se a viagem T puder ser atendida por $v(T_i)$ ou por $v(T_j)$, as viagens T_i e T_j são excluídas, e T é incluída na rota de um dos dois veículos. É dada preferência ao veículo que não seja fictício, mas não há um critério em relação à carga dos veículos. Não sendo possível atribuir a rota T a nenhum dos veículos, verificamos se há um outro veículo que pode realizar a viagem T . Nessa etapa, os veículos são verificados em ordem crescente da capacidade, e novamente é dada preferência a veículos não fictícios.

Caso não seja possível atribuir a viagem a nenhum veículo, é criado um conjunto de viagens $S' = S \cup T \setminus \{T_i, T_j\}$ e é executada a designação das viagens aos veículos - Algoritmo 2. Caso ainda não seja encontrada uma configuração factível, a rota T é descartada e o algoritmo segue para avaliar a próxima economia. No fim de cada iteração, se algum veículo fictício não possui viagens atribuídas a ele, esse veículo é removido da frota estendida.

Algoritmo 1 – Heurística Construtiva Solução Inicial

```

# Fase inicial - definição viagens e rotas solução inicial
 $S \leftarrow \emptyset$       # Conjunto de rotas
para  $i \in N \setminus \{0\}$  faça
|    $S \leftarrow S \cup \{[0, i, 0]\}$ 
fim
Heurística_Designação_Viagens_Adaptada( $S$ )
# Cálculo de economias
 $E \leftarrow \emptyset$ 
para  $i \in N \setminus \{0\}$  faça
|   para  $j \in N \setminus \{0, i\}$  faça
|   |    $e_{ij} \leftarrow c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$ 
|   |    $E \leftarrow E \cup \{e_{ij}\}$ 
|   fim
fim
# União de viagens
para  $(i, j) \in E$  faça
|   se  $i$  e  $j$  são clientes iniciais ou finais de viagens diferentes então
|   |    $T_i \leftarrow$  viagem que passa por  $i$ 
|   |    $T_j \leftarrow$  viagem que passa por  $j$ 
|   |    $T \leftarrow$  união das viagens  $T_i$  e  $T_j$ 
|   |   se  $T$  pode ser atendida por  $v(T_i)$  ou  $v(T_j)$  então
|   |   |    $S \leftarrow S \cup T \setminus \{T_i, T_j\}$ 
|   |   |   Atribua  $T$  ao veículo  $v(T_i)$  ou  $v(T_j)$ , prioridade veículo não-fictício.
|   |   senão
|   |   |   se  $\exists$  veículo para atender  $T$  então
|   |   |   |    $S \leftarrow S \cup T \setminus \{T_i, T_j\}$ 
|   |   |   |    $T$  é adicionada ao veículo
|   |   |   senão
|   |   |   |    $S' \leftarrow S \cup \{T\} \setminus \{T_i, T_j\}$ 
|   |   |   |   Heurística_Designação_Viagens( $S'$ )
|   |   |   |   se uma solução viável for obtida então
|   |   |   |   |    $S \leftarrow S'$ 
|   |   |   |   |   Designação obtida é armazenada
|   |   |   |   senão
|   |   |   |   |    $T$  é descartada
|   |   |   fim
|   |   fim
|   fim
|   Remova os veículos fictícios não utilizados
fim
fim

```

Heurística Designação Viagens

No Algoritmo 1, é necessário constantemente designar viagens aos veículos de forma a conseguir utilizar viagens mais econômicas. Uma viagem T pode ser designada a veículo k se a carga total da viagem (qt_T) for igual ou inferior a sua capacidade (Q^k). Além disso, um conjunto

de viagens pode ser designado a um mesmo veículo se o tempo máximo da rota for respeitado ($tt_T \leq T_{max}$). Caso uma viagem não possa ser designada a nenhum dos veículos, o método para, pois não encontrou uma solução factível. No Algoritmo 2, detalhamos o procedimento heurístico desenvolvido.

Algoritmo 2 – Heurística Designação Viagens

Entrada: Conjunto S de viagens

Ordene S de forma decrescente pela carga utilizada e, em caso de empate, pelo tempo de viagem decrescente.

Ordene V de forma crescente em relação a carga máxima do veículo.

$v(T) \leftarrow 0, \quad T \in S$

para $T \in S$ **faça**

para $k \in V$ **faça**

se ($qt_T \leq Q^k$) e ($tt_T \leq T_{max}$) **então**

$v(T) \leftarrow k$

 Pare, pois foi encontrado um veículo para a viagem T .

fim

fim

se $v(T) = 0$ **então**

 Pare, pois não foi encontrada solução factível.

fim

fim

A adaptação realizada na fase inicial do procedimento consiste em: caso sejam testados todos os veículos, ou seja, se $v(T) = 0$ no fim do laço, ao invés de parar o algoritmo pois nenhuma solução factível foi encontrada aqui seria criado um veículo fictício e adicionado ao conjunto de veículos da instância. Esse veículo corresponde a uma cópia do menor veículo capaz de atender à viagem.

4.2 Iterated Local Search (ILS)

Como segunda etapa do método de solução proposto foi utilizada uma *Iterated Local Search* (ILS). Tal algoritmo tem se mostrado eficiente em outros trabalhos na literatura como é possível ver em (SUBRAMANIAN *et al.*, 2010), (PENNA; SUBRAMANIAN; OCHI, 2013), (KRAMER; CORDEAU; IORI, 2019), (SILVA; SUBRAMANIAN; OCHI, 2015) entre outros.

A ILS busca percorrer o espaço de busca encontrando vários mínimos locais (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2003). Tendo como ponto de partida a solução inicial descrita anteriormente, desenvolvemos uma ILS para buscar melhores soluções para o problema estudado. O Algoritmo 3 resume o método desenvolvido, em que: *MaxIter* é o número máximo de iterações realizadas pela ILS, s é uma solução inicial e s^* é a melhor solução encontrada pela ILS. As estratégias de Busca Local, de Perturbação e o Critério de Aceitação de soluções utilizados na ILS são descritos a seguir.

Algoritmo 3 – Iterated Local Search (ILS)

```

s ← Solução Inicial
s* ← BuscaLocal(s)
iterILS ← 0
enquanto  $iterILS < MaxIter$  faça
    s' ← perturbação(s*)
    s'* ← BuscaLocal(s')
    se Critério_Aceitação(s*, s'*) então
        | s* ← s'*
    fim
    iterILS ← iterILS + 1
fim
Retorne s* # melhor solução encontrada

```

4.2.1 Busca Local

A etapa de busca local no método ILS consiste no momento de intensificação da busca, ou seja, o momento em que tentamos melhorar a solução em sua vizinhança. Para isso utilizamos três vizinhanças que são avaliadas de acordo com o objetivo definido no início da execução do método. O procedimento de busca utilizado é uma *Variable Neighborhood Descent* (VND) (MLADENović; HANSEN, 1997). A VND consiste em, dado um conjunto de vizinhanças $\mathcal{M} = \{1, \dots, |\mathcal{M}|\}$ e uma solução inicial s , iniciar a busca local pela vizinhança $m = 1$, e quando um ótimo local de s é encontrado a vizinhança utilizada muda para a vizinhança $m + 1$. Caso encontremos uma melhoria em uma vizinhança que não seja a primeira, voltamos para o início da lista de vizinhanças. Assim, esse processo é repetido até que seja encontrado um ótimo local para todas as vizinhanças. No Algoritmo 4, resumimos a VND utilizada. A função $Vizinho(s, m)$ retorna o primeiro movimento encontrado que gera melhoria na função objetivo, seja ela minimizar o custo total ou minimizar o tempo da maior rota. Caso não exista um vizinho melhor, a função retorna a solução s .

Algoritmo 4 – Variable Neighborhood Descent (VND)

```

s ← Solução inicial
 $\mathcal{M} = \{1, \dots, |\mathcal{M}|\}$  # conjunto de vizinhanças
m ← 1
enquanto  $m \leq |\mathcal{M}|$  faça
    enquanto houver melhoria faça
        s' ← Vizinho(s, m)
        se (s' melhor que s) então
            | s ← s'
            | m ← 1
        fim
    fim
    m ← m + 1
fim

```

Foram utilizados três tipos de vizinhanças de Bräysy e Gendreau (2005). Cada vizinhança é representada pelos movimentos descritos a seguir. O movimento *or-opt* consiste em remover um arco de uma viagem e reinserí-lo em uma posição distinta, seja da mesma viagem ou de outra viagem. Na Figura 7, ilustramos um exemplo desse movimento em que o arco (A, B) foi retirado e depois reinserido entre os nós 0 e C. Para isso é necessário que os arcos (F,A), (B, E) e (0, C) sejam substituídos por (F, E), (0, A) e (B, C). Na Figura 7, assim como nas Figuras 8 e 9, os arcos removidos são destacados em vermelho enquanto os arcos inseridos são destacados em azul.

O movimento *2-opt* se dá removendo dois arcos e religando os clientes em outra configuração, sendo a Figura 8 um exemplo desse movimento. Nela são removidos os arcos (A, D) e (B, 0) e substituídos por (A, B) e (D, 0). Vale ressaltar que nesse movimento, quando é executado com arcos de uma mesma viagem, um trecho da rota tem sua ordem invertida, no exemplo dado a sequência inicial continha [D, C, B] e após o movimento a viagem fica com o trecho [B, C, D].

Por fim, temos o operador *realocação* que consiste em trocar um cliente de posição na viagem como ilustra a Figura 9. Nela o cliente A é mudado de posição, para os arcos (0,B), (F, A) e (A, E) são substituídos por (0, A), (A, B) e (F, A).

Todos esses movimentos podem ser realizados numa mesma viagem como ilustra o exemplo da Figura 8 ou em viagens diferentes como ilustram os exemplos das Figuras 7 e 9). No algoritmo VND as vizinhanças são visitadas na seguinte ordem: *2-opt*, *or-opt* e por fim *realocação*.

Figura 7 – Exemplo do movimento *or-opt*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Figura 8 – Exemplo do movimento 2-opt.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

4.2.2 Perturbação

A estratégia de perturbação tem como objetivo aumentar a variabilidade das soluções encontradas. No método desenvolvido, ela consiste em movimentos aleatórios de clientes isolados ou conjuntos de clientes. Esses movimentos são divididos em quatro tipos:

- i) **String Cross:** dois arcos de viagens aleatórias são cruzados. Esse movimento permite que partes maiores da viagem sejam trocadas. Na Figura 10, são removidos os arcos (B, C) e (E, F) que são substituídos por (C, E) e (B, F). Esse movimento se assemelha à vizinhança 2-opt da busca local, a diferença é que no movimento de perturbação os arcos a serem removidos são escolhidos aleatoriamente.
- ii) **String Exchange:** clientes são trocados entre viagens. No exemplo da Figura 11, os clientes C e E são removidos de suas viagens originais e inseridos em outra viagem. Vale ressaltar que em soluções com mais de duas viagens, o par de viagens envolvido nesse movimento é escolhido aleatoriamente assim como cada cliente a ser removido.
- iii) **String Relocation:** um cliente é retirado de uma viagem e inserido em outra. A Figura 12 ilustra uma situação em que o cliente D é removido de uma viagem e inserido em outra. Novamente, as viagens envolvidas no movimento são escolhidas aleatoriamente, assim como o cliente.
- iv) **Realocação:** uma porcentagem de clientes é removida das viagens (nesse trabalho foi utilizado 10%) e, em seguida, os clientes são realocados em viagens aleatórias. Na Figura 13,

Figura 9 – Exemplo do movimento *realocação*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

temos um exemplo desse movimento dividido em 3 etapas: a Figura 13a ilustra as viagens antes da perturbação, na Figura 13b, 10% dos clientes são removidos (aqui é utilizado o teto do valor da porcentagem), na próximo passo, Figura 13c, os clientes removidos são reinseridos na melhor posição possível em uma viagem escolhida aleatoriamente.

Uma vez que esses movimentos são aleatórios nem sempre encontrem soluções factíveis. Não permitimos que os movimentos infactibilizem as soluções, ou seja, se um movimento perturba uma solução de forma que ela fique infactível essa nova solução não é aceita. Buscando evitar que muitas iterações tenham perturbações infactíveis e assim aumentar a diversidade das soluções obtidas as perturbações são aplicadas de acordo com o Algoritmo 5 descrito a seguir. Nele tentamos perturbar a solução 10 vezes, mas limitamos o número de tentativas a 50. Tais valores foram escolhidos de forma empírica.

Algoritmo 5 – Algoritmo de perturbações.

```

 $s \leftarrow$  Solução inicial
 $m \leftarrow$  Movimento de perturbação aleatório
 $vezes\_perturbada \leftarrow 0$ 
 $iteracoes \leftarrow 0$ 
enquanto  $vezes\_perturbada \leq 10$  e  $iteracoes \leq 50$  faça
     $s' \leftarrow Perturbacao(s, m)$ 
    se ( $s'$  é factível) então
         $s \leftarrow s'$ 
         $vezes\_perturbada \leftarrow vezes\_perturbada + 1$ 
         $iteracoes \leftarrow iteracoes + 1$ 
    senão
         $iteracoes \leftarrow iteracoes + 1$ 
    fim
fim
 $m \leftarrow m + 1$ 

```

Figura 10 – Exemplo do movimento *String Cross*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Figura 11 – Exemplo do movimento *String Exchange*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Figura 12 – Exemplo do movimento *String Relocate*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

4.2.3 Critério de Aceitação de Soluções

O critério de aceitação mais simples é aceitar uma nova solução se ela for melhor que a atual de acordo com o critério estabelecido. No entanto, para o problema estudado, a ILS pode ter como solução inicial uma solução infactível em relação ao tempo total da rota. Neste caso, o critério para que uma nova solução seja aceita pela ILS penaliza a infactibilidade na função objetivo. Caso seja comparada uma solução infactível com uma factível sempre é escolhida a factível.

4.3 Procedimento de Melhoria através de Modelo de Cobertura

Como mostra a literatura ([SARTORI; BURIOL, 2018](#)), existe a possibilidade de obter uma solução de melhor qualidade ao combinarmos rotas de diferentes soluções factíveis conhecidas. Durante o processo de busca, a ILS encontra diferentes soluções, logo diferentes viagens e rotas são obtidas. Embora esse processo possa ser custoso se tivermos muitas viagens, para um número limitado é viável. Logo, para o problema estudado utilizamos esta estratégia apenas com as soluções encontradas pela ILS.

Dessa forma, durante a ILS armazenamos as viagens das soluções factíveis obtidas e ao final do método, resolvemos um problema de cobertura que dado um conjunto de viagens, encontra a melhor solução que combinando as viagens atende os clientes com o menor custo total. Lembramos que as viagens são armazenadas de soluções factíveis e, portanto, sua demanda é compatível com a capacidade de pelo menos um dos veículos. No entanto, é preciso garantir que o tempo limite de percurso das rotas não seja violado.

Figura 13 – Exemplo do movimento *Realocação*.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Esse modelo é inspirado no modelo de partição de conjuntos descrito na Seção 2.1.3. Assim, primeiramente temos o modelo matemático (4.1) – (4.9), com o objetivo de minimizar o custo total das rotas.

Parâmetros	
V	é o conjunto de veículos;
N	é o conjunto de clientes; S
$\mathcal{V}$	é o conjunto de viagens;
n	é o número de clientes;
Q^i	é a capacidade do veículo i ;
qt_l	é a carga da viagem T_l ;
tt_l	é o tempo da viagem T_l ;
a_{il}	assume o valor 1 se o cliente i é atendido pela viagem l e 0 o caso contrário;
T_{max}	é o tempo máximo que um veículo está disponível.

Variáveis	
λ_l^k	é igual a 1 se o veículo k faz a viagem l , e é igual a 0 caso contrário.

$$\text{minimizar } \sum_{k \in V} \sum_{l \in S} tt_l \lambda_l^k \quad (4.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{l \in S} \sum_{k \in V} a_{il} \lambda_l^k = 1, \quad \forall i \in N \quad (4.2)$$

$$\sum_{l \in S} tt_l \lambda_l^k \leq T_{max} \quad \forall k \in V, \quad (4.3)$$

$$(Q^k - qt_l) \lambda_l^k \geq 0 \quad \forall l \in S, k \in V, \quad (4.4)$$

$$\lambda_l^k \in \{0, 1\} \quad \forall l \in S, k \in V. \quad (4.5)$$

Neste modelo, a função objetivo (4.1) minimiza o custo total das viagens escolhidas. As restrições (4.2) garantem que todos os clientes são atendidos uma única vez pelo conjunto de viagens escolhido. Com (4.3) e (4.4) temos que o tempo máximo de rota de cada veículo é respeitado assim como sua capacidade. Por fim, (4.5) determinam o domínio das variáveis.

As restrições (4.4) são necessária pois, apesar de só serem consideradas viagens que possam ser atendidas por algum veículo, ainda é possível que apenas parte dos veículos consiga atendê-la. Dessa forma é necessário a verificação se a demanda da viagem é compatível com a carga do veículo a ser atribuído.

A seguir, temos o modelo que busca minimizar o tempo da maior rota. A função objetivo é alterada para (4.6), e são acrescentadas as restrições (4.8) que garantem que a variável z representa o custo da maior rota.

$$\text{minimizar } z \quad (4.6)$$

sujeito a:

$$(4.2) - (4.5), \quad (4.7)$$

$$\sum_{l \in S} tt_l \lambda_l^k \leq z \quad \forall k \in V, \quad (4.8)$$

$$z \geq 0. \quad (4.9)$$

4.4 Método Desenvolvido

Nesta seção, descrevemos no Algoritmo 7 o pseudo código completo do método desenvolvido. Nele, além dos algoritmos descritos nas seções anteriores, utilizamos o Algoritmo 6 que tem como objetivo adicionar novas viagens a um conjunto mantendo sempre as viagens com melhor custo. Assim, podemos guardar as viagens verificadas na etapa do algoritmo ILS para que sejam utilizadas na etapa de melhoria através do modelo de cobertura.

Algoritmo 6 – Atualiza Viagens

Entrada: Viagens_Atuais; Novas_Viagens

```

para  $v \in \text{Novas\_Viagens}$  faça
  se  $\exists v' \in \text{Viagens\_Atuais}$  tal que  $\text{clientes}(v) = \text{clientes}(v')$  então
    se  $\text{custo}(v) \leq \text{custo}(v')$  então
      |  $v$  substitui  $v'$  em Viagens_Atuais
    fim
  senão
    |  $v$  é adicionada a Viagens_Atuais
  fim
fim

```

No Algoritmo 7, são unidos os métodos utilizados nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3. Dessa forma, tem-se o método completo desenvolvido nessa dissertação.

Algoritmo 7 – Método Desenvolvido

Fase inicial - definição viagens e rotas solução inicial

 $S \leftarrow \text{Heuristica_Construtiva}(\text{Instancia})$ # Solução Inicial# Segunda Fase - ILS partindo da solução inicial S Viagens_Possiveis $\leftarrow \emptyset$ $s^* \leftarrow \text{BuscaLocal}(s)$ iterILS $\leftarrow 0$ **enquanto** $\text{itersILS} < \text{MaxIter}$ **faça**| $s' \leftarrow \text{perturbação}(s^*)$ | $s'^* \leftarrow \text{BuscaLocal}(s')$ | **se** $\text{Critério_Aceitação}(s^*, s'^*)$ **então**| | $s^* \leftarrow s'^*$ | | Atualiza_Viagens(Viagens_Possiveis, s^*)| **fim**| iterILS $\leftarrow \text{iterILS} + 1$ **fim**

Fase Final - Melhoria através do modelo de cobertura

Solução_Final $\leftarrow \text{Melhoria_Modelo_Cobertura}(\text{Instancia}, \text{Viagens_Possiveis})$

EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, são descritos os experimentos computacionais realizados para a análise do método desenvolvido. Na Seção 5.1, avaliamos diferentes combinações das componentes da ILS a fim de obter a combinação que apresente os melhores resultados para as instâncias analisadas. Em seguida, na Seção 5.2, são apresentados resultados para instâncias de pequeno porte. Na sequência, Seção 5.3, comparamos os métodos com resultados da literatura do Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplas Viagens, os quais não possuem veículos heterogêneos. Por fim, na Seção 5.4, descrevemos adaptações das instâncias da literatura para que seja abordado o problema com frota heterogênea, assim como os resultados dos métodos do Capítulo 4 para essas instâncias adaptadas.

5.1 Configuração da ILS

Nesta etapa, são avaliados os movimentos de perturbação e as vizinhanças de busca local apresentadas no Capítulo 4. Para isso foram utilizados as mesmas instâncias com 30 clientes do Capítulo 3. Em todos os experimentos não houve impacto relevante no tempo de execução do algoritmo, desta forma o tempo não foi usado como um critério para a avaliação dos métodos. Além disso, para as comparações aqui descritas foi utilizado o objetivo de minimizar o custo total das rotas.

5.1.1 Configuração da Busca Local

Como foi descrito no capítulo anterior, para a etapa de busca local da ILS foi utilizada uma VND com 3 tipos de vizinhança. Realizamos três experimentos computacionais para analisar a influência das vizinhanças no processo de busca: **i)** cada vizinhança é avaliada isoladamente; **ii)** as vizinhanças são avaliadas aos pares; **iii)** todas as vizinhanças são avaliadas em conjunto. Para todos os testes foi utilizada a perturbação *String Cross* (SC) Na Tabela 6, é apresentado para cada uma das 10 instâncias o valor da melhor solução obtida para cada configuração de

vizinhanças. Cada configuração é representada pelo conjunto de vizinhanças utilizado. Por exemplo, na configuração {2-opt} a vizinhança 2-opt é utilizada isoladamente, na configuração {2-opt, R} é utilizado o par de vizinhanças 2-opt e Realocação, na ordem descrita no Capítulo 4. Como é possível observar na Tabela 6, utilizar todas vizinhanças em conjunto levou aos melhores resultados com exceção da Instância 7, que é 0,64 inferior quando comparada ao par de vizinhanças Or-opt e Realocação (R), o que não é uma diferença significativa. Os melhores resultados obtidos são destacados em negrito na tabela.

5.1.2 Configuração das Perturbações

No capítulo anterior, foram descritos quatro tipos de perturbações: *String Cross* (SC), *String Exchange* (SE), *String Relocation* (SR) e Reinserção (Re). Para a análise da performance da heurística em relação a cada um deles foram rodados três experimentos computacionais: **i)** somente um tipo de perturbação é utilizado; **ii)** um tipo de perturbação é excluído; **iii)** todas as perturbações são utilizadas. Novamente cada combinação é representada pelo conjunto de movimentos utilizados. Em testes preliminares a perturbação SC teve destaque, portanto aqui apresentamos a comparação das outras configuração em relação a esse método. Na Tabela 7, são apresentados para cada instância o *GAP* em relação aos resultados obtidos ao usar apenas a perturbação SC. Sendo $Best_{Est}$ o valor da melhor solução obtido pela configuração abordada e $Best_{SC}$ o valor obtido utilizando apenas SC, o *GAP* é calculado por:

$$GAP = \frac{(Best_{Est} - Best_{SC})}{Best_{SC}} * 100.$$

Como é possível ver observando a coluna do *GAP* médio encontrado para cada comparação, sempre há um *GAP* positivo, ou seja, SC sempre apresenta soluções melhores.

5.2 Instâncias com 30 clientes

Nesta seção, resolvemos as instâncias com 30 clientes descritas no Capítulo 4 para avaliarmos os resultados obtidos ao final de cada etapa da meta-heurística. Na Tabela 8, apresentamos os valores do custo total (C.T.), maior rota (M.R.) e tempo de execução (T) em cada etapa da meta-heurística. Na tabela, os valores do tempo de execução representam o tempo da meta-heurística para cada etapa.

Com esses resultados é possível ver que há um ganho médio de 4,9% comparando os valores da solução inicial e da solução obtida pela ILS e um ganho médio de 2,8% quando comparada a solução da ILS com a solução do modelo de cobertura. (Tabela 8)

Na Tabela 10, apresentamos resultados análogos aos da Tabela 8, no entanto, o objetivo é minimizar o tempo da maior rota. Nesse caso, também é possível ver a melhoria que cada etapa da meta-heurística proporciona. Temos uma melhoria de 8,3% quando comparamos a solução

Tabela 6 – Analisando vizinhanças utilizadas no método VND.

Config.	Instância									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
{2-opt}	408,56	389,30	473,96	534,61	486,55	451,91	562,58	423,33	437,87	519,91
{Or-opt}	407,39	384,37	469,37	534,61	481,70	449,03	553,64	421,64	434,18	507,33
{R}	407,17	384,51	469,45	535,10	481,00	449,04	556,13	421,77	434,18	507,33
{2-opt, Or-opt}	426,66	391,31	483,36	540,87	493,39	498,11	563,65	436,16	448,54	525,70
{2-opt, R}	425,16	391,31	484,01	543,33	500,56	487,42	568,09	437,04	447,78	528,83
{Or-opt, R}	407,39	384,49	469,45	535,16	480,81	449,04	553,04	421,70	434,18	507,33
{2-opt, Or-opt, R}	407,17	384,37	469,37	534,61	480,81	449,02	553,68	421,64	434,18	507,33

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 7 – Comparação entre Somente SC com outras configurações de perturbações.

Configuração	Instância										Média
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
{SE}	3,04	0,04	1,85	4,50	0,96	10,48	4,44	3,28	0,61	3,68	3,29
{Re}	4,51	1,74	2,97	7,10	6,07	11,33	5,87	3,59	3,10	5,18	5,15
{SR}	3,04	0,04	1,85	4,50	0,96	10,48	4,44	3,28	0,61	3,68	3,62
{SR, SC, Re}	-0,13	-0,03	-0,06	0,07	0,31	-0,04	0,86	-0,05	-0,03	-0,00	0,09
{SR, SC, SE}	-0,28	-0,03	-0,18	-0,00	0,40	-0,05	0,42	-0,05	-0,20	-0,00	0,00
{SE, SC, Re}	-0,23	-0,02	-0,33	0,07	0,40	0,04	0,54	-0,05	-0,12	-0,00	0,03
{SR, SE, Re}	3,04	0,04	1,85	4,50	0,96	10,48	4,44	3,28	0,61	3,68	3,29
{SR, SC, SE, Re}	-0,17	-0,03	-0,03	0,11	0,59	-0,04	1,12	-0,04	-0,12	-0,00	0,14

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 8 – Minimizando o custo total das rotas.

Instância	Solução Inicial			ILS			Modelo Cobertura		
	C.T.	M.R.	T(s)	C.T.	M.R.	T(s)	C.T.	M.R.	T(s)
1	426,75	189,29	0,03	407,17	181,68	4,56	398,82	174,00	0,22
2	391,31	188,78	0,01	384,37	194,68	10,32	371,59	188,39	0,36
3	485,24	193,16	0,01	469,37	176,21	7,26	460,58	176,21	0,29
4	572,57	194,10	0,02	535,46	195,68	6,60	506,08	197,30	0,13
5	509,82	182,55	0,01	479,05	199,27	4,49	479,05	176,87	0,14
6	500,17	187,06	0,01	449,02	188,73	9,98	435,72	193,31	0,31
7	581,41	197,03	0,01	570,16	192,19	3,48	531,48	197,32	0,05
8	437,04	180,17	0,01	421,58	180,34	5,77	418,75	175,91	0,24
9	448,54	176,64	0,00	434,18	167,35	8,27	434,18	167,35	0,29
10	533,60	195,02	0,01	507,33	194,53	6,32	488,23	196,70	0,18

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 9 – Melhoria entre etapas.

GAP_{Si_ILS}			GAP_{ILS_MC}		
Pior	Média	Melhor	Pior	Média	Melhor
1,8%	4,9%	11,4%	0,0%	2,8%	7,3%

Fonte: Elaborada pela autora.

inicial com a solução da ILS e uma melhoria de 6,9% quando a solução da ILS é comparada com a solução obtida pelo modelo de Cobertura.

As Tabelas 9 e 11 mostram os ganhos obtidos comparando as etapas do algoritmo, sendo o ganho percentual quando comparamos o valor da solução inicial com o valor da solução da ILS (GAP_{Si_ILS}) e o ganho percentual quando comparados o valor da solução obtida pela ILS e pelo Modelo de Cobertura (GAP_{ILS_MC}) a comparação entre o Modelo de cobertura e a solução ILS. Nessas tabelas, são apresentados os ganhos percentuais médios, assim como o melhor e o pior caso para cada etapa.

Na Figura 14, apresentamos gráficos em barras com o intuito de facilitar a avaliação entre as diferenças das etapas da meta-heurística. São quatro gráficos que ilustram o custo total e o valor da maior rota das soluções obtidas para os dois objetivos. Nas figuras, é visível o ganho que os métodos proporcionam.

Quando comparamos as soluções obtidas com as soluções obtidas ao resolver o problema utilizando o modelo do Capítulo 3, os resultados apresentados pela meta-heurística são competitivos, em média 0,6% maiores quando minimizamos o custo total e 1,8% quando minimizamos a maior rota. No entanto, a meta-heurística utiliza consideravelmente menos tempo (apenas duas instâncias demandam mais que dez segundos). Portanto, concluímos que a meta-heurística é competitiva para as instâncias de pequeno porte.

Tabela 10 – Minimizando a maior rota.

Instância	Solução Inicial			ILS			Modelo Cobertura		
	C.T.	M.R.	T(s)	C.T.	M.R.	T(s)	C.T.	M.R.	T(s)
1	426,75	189,29	0,02	455,24	162,79	4,70	441,81	149,44	1,01
2	391,31	188,78	0,01	460,36	161,54	4,29	408,62	140,58	1,74
3	485,24	193,16	0,01	520,77	175,45	3,96	489,08	164,68	0,87
4	572,57	194,10	0,02	564,92	189,08	3,10	543,35	181,20	0,43
5	509,82	182,55	0,01	491,17	165,97	4,22	496,77	165,89	0,57
6	500,17	187,06	0,01	517,61	175,98	4,32	478,52	160,26	1,48
7	581,41	197,03	0,01	578,06	194,96	8,29	546,43	185,41	0,09
8	437,04	180,17	0,01	476,28	166,36	5,12	446,76	152,40	0,92
9	448,54	176,64	0,01	477,15	162,47	4,83	453,87	152,63	1,28
10	533,60	195,02	0,01	565,10	189,11	3,49	542,72	182,37	0,74

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 11 – Melhoria entre etapas.

GAP_{Si_ILS}			GAP_{ILS_MC}		
Pior	Média	Melhor	Pior	Média	Melhor
1,1%	8,3%	10,0%	0,0%	6,9%	9,2%

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 14 – Comparações entre custos totais e maior rota.

- (a) Custos totais com objetivo de minimizar o custo total. (b) Maior rota com objetivo de minimizar a maior rota.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a biblioteca Matplotlib em Python.

5.3 Instâncias da Literatura - frota homogênea

Ao nosso conhecimento, não existem instâncias reportadas na literatura que correspondam ao PRVHMV. Para a avaliação da meta-heurística, utilizamos instâncias adaptadas por Taillard, Laporte e Gendreau (1996) para frota homogênea. Neste grupo de instâncias, o número de clientes varia entre 50 e 200. Como são instâncias adaptadas da literatura para serem necessárias múltiplas viagens, são utilizados dois valores para o parâmetro T_{max} que limita o tempo

máximo de rota. Tais valores são baseados no valor s^* da melhor solução encontrada para o caso em que múltiplas viagens não são permitidas, onde s^* é o custo total da solução. Sendo $|V|$ o número de veículos utilizado em cada instância, temos $Th_1 = \frac{1.05s^*}{|V|}$ e $Th_2 = \frac{1.10s^*}{|V|}$ os parâmetros utilizados.

Na Tabela 12, a primeira coluna representa a instância, na segunda coluna temos o número de veículos utilizados, os quais variam de 1 até $v - 1$ sendo v o número de veículos disponível no caso em que múltiplas viagens não são permitidas. Em seguida, utilizando o parâmetro $T_{max} = Th_1$, é apresentado o valor da melhor solução obtida pela meta-heurística e o *GAP* dessa solução em relação à solução da literatura disponível em [Cattaruzza, Absi e Feillet \(2016\)](#). As duas colunas finais apresentam os valores referentes a $T_{max} = Th_2$. Temos que $GAP = \frac{Var_{metodo} - Var_{lit}}{Var_{lit}} * 100$, onde Var_{metodo} é o valor da solução obtida pelo método e Var_{lit} é o valor da solução da literatura. Destacamos com * as instâncias para as quais a meta-heurística não obteve solução factível e com ** as instâncias para as quais a meta-heurística não obteve solução factível e não foi reportada solução factível na literatura.

Em geral, é mais fácil encontrar soluções factíveis quando T_{max} é maior, o que é esperado, uma vez que isso permite soluções mais custosas e, portanto, aumenta a região de factibilidade. Como podemos observar, a meta-heurística é competitiva com a literatura quando abordamos instâncias homogêneas.

5.4 Instâncias - frota heterogênea

Para avaliar a meta-heurística desenvolvida considerando frota heterogênea e múltiplas viagens, adaptamos as instâncias utilizadas na Seção 5.3. Para a criação de uma frota diversificada, são utilizados veículos com três tipos de capacidade: $Q * (1 - p)$, Q , $Q * (1 + p)$. Onde Q é a capacidade dos veículos na instância homogênea e p é uma porcentagem. Os veículos são distribuídos de acordo com a seguinte regra:

- $|V| \% 3 = 0$: cada tipo de veículo recebe a mesma quantidade $|V|/3$ de veículos;
- $|V| \% 3 = 1$: os tipo de veículo $Q * (1 - p)$ e $Q * (1 + p)$ recebem $(|V| - 1)/3$ veículos, sendo que o tipo de veículos com capacidade Q recebe $(|V| - 1)/3 + 1$;
- $|V| \% 3 = 2$: o tipo de veículo Q recebe $(|V| - 2)/3$ veículos e os tipos $Q * (1 - p)$ e $Q * (1 + p)$ recebem $(|V| - 2)/3 + 1$.

Além disso, uma vez que se trata de uma frota na qual alguns veículos possuem maior capacidade que outros, a divisão do tempo total entre as rotas fica desbalanceada, e utilizando T_{max} como na Seção 5.3 as instâncias se tornam infactíveis. Dessa forma, utilizamos $T_{max} = \frac{1.50s^*}{|V|}$.

Tabela 12 – Resultados computacionais para instâncias homogêneas.

Instância	$ \mathcal{V} $	Th_1		Th_2	
		C.T.	GAP	C.T.	GAP
CMT1	1	540,86	3,10	557,68	6,30
	2	535,36	0,44	550,22	3,84
	3	**	**	535,25	-3,15
	4	**	**	*	*
CMT2	1	869,14	4,06	876,14	4,89
	2	847,69	1,49	864,85	3,54
	3	844,80	1,14	887,17	6,22
	4	836,41	0,14	870,23	4,19
	5	837,45	0,20	882,10	5,61
	6	*	*	857,23	2,15
	7	**	**	862,35	2,09
CMT3	1	866,21	4,85	847,54	2,59
	2	836,57	1,26	847,74	2,62
	3	839,09	1,57	848,84	2,75
	4	833,49	0,49	845,16	2,30
	5	*	*	835,12	0,33
	6	*	*	834,69	0,04
CMT4	1	1062,70	3,07	1074,63	4,22
	2	1060,31	2,84	1085,22	5,31
	3	1050,96	2,19	1081,05	4,79
	4	1049,10	1,75	1083,89	5,12
	5	1047,59	1,60	1052,27	2,08
	6	*	*	1099,70	6,72
	7	*	*	1048,63	1,21
	8	*	*	*	*
CMT5	1	1345,56	3,31	1402,97	7,93
	2	1331,17	2,23	1376,36	5,44
	3	1339,69	2,95	1363,97	4,84
	4	1341,75	2,83	1379,26	5,80
	5	1346,33	3,56	1369,57	5,30
	6	*	*	1368,84	4,80
	7	*	*	1335,61	29,48
	8	*	*	1353,56	3,42
	9	*	*	*	*
	10	*	*	*	*
CMT11	1	1050,16	0,77	1056,86	1,42
	2	1065,68	2,26	1050,76	0,83
	3	1064,21	2,12	1055,08	1,24
	4	*	*	*	*
	5	*	*	1058,19	1,54
CMT12	1	821,59	0,25	821,59	0,25
	2	820,92	0,17	822,00	0,30
	3	820,64	0,13	820,96	0,17
	4	819,56	-0,0	821,63	0,25
	5	*	*	825,18	0,05
	6	*	*	823,15	0,0
Average GAP		1,8		3,6	

Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 13 – Melhorias na função objetivo minimizando o custo total.

Instância	$p = 0,0$			$p = 0,1$			$p = 0,2$		
	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior
CMT1	9,66	7,33	11,37	19,76	18,39	20,58	19,45	17,67	20,45
CMT2	6,47	4,98	7,77	10,32	8,24	13,80	16,35	12,65	23,77
CMT3	3,95	1,59	5,24	12,48	12,13	12,81	25,63	25,35	26,20
CMT4	2,49	0,59	4,14	12,62	6,55	14,83	23,51	5,35	27,83
CMT5	2,95	1,78	6,24	14,73	12,62	15,47	25,81	24,24	26,86
CMT11	1,80	1,13	2,12	17,81	13,96	22,20	31,00	28,7	32,49
CMT12	2,20	2,14	2,36	23,77	23,59	23,81	29,80	29,33	29,91

Tabela 14 – Melhorias na função objetivo minimizando a maior rota.

Instância	$p = 0,0$			$p = 0,1$			$p = 0,2$		
	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior
CMT1	24,69	19,48	27,47	21,68	14,54	25,44	22,03	11,95	27,92
CMT2	32,27	22,74	37,65	23,62	20,06	30,29	21,30	14,19	29,62
CMT3	24,22	3,20	38,49	24,60	14,96	30,90	17,43	12,13	22,32
CMT4	32,06	16,01	40,28	26,13	13,45	32,49	18,84	14,74	21,75
CMT5	31,28	21,13	36,56	28,78	23,11	31,96	21,92	17,70	25,70
CMT11	38,64	30,08	44,07	10,62	3,40	16,89	7,60	5,16	11,21
CMT12	37,55	32,61	42,38	14,76	5,26	24,36	16,88	12,24	22,62

Nas Tabelas 13 e 14, apresentamos a média dos ganhos obtidos comparando a solução inicial com o resultado obtido ao final da meta-heurística, assim como a menor melhoria e a maior melhoria. Nas tabelas, a melhoria é dada por:

$$melhoria = \frac{Var_{SI} - Var_C}{Var_{SI}} * 100$$

sendo Var_{SI} o valor da solução inicial e Var_C o valor obtido pelo modelo de cobertura. É possível observar que há um ganho significativo.

Nas Tabelas 15 e 16, são apresentados para cada valor de p a média dos tempos de execução, o menor tempo e o maior, para cada uma das instâncias avaliadas. Os tempos são apresentados em segundos.

Com os resultados obtidos é possível concluir que para os dois objetivos abordados a utilização do método completo traz melhorias para a solução em cada uma das etapas utilizadas.

Tabela 15 – Tempos de execução para objetivo de minimizar a maior rota.

Instância	$p = 0,0$			$p = 0,1$			$p = 0,2$		
	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior
1	4,69	4,27	5,24	4,22	3,41	4,62	6,48	5,53	8,29
2	16,07	9,53	24,85	14,17	11,25	17,10	25,05	9,12	55,48
3	9,91	8,68	11,54	7,87	7,01	9,00	11,51	7,74	15,15
4	15,33	11,88	20,11	13,26	9,99	17,66	16,20	12,60	19,46
5	23,69	20,16	27,50	360,02	18,32	1313,04	197,47	20,24	321,97
11	9,22	8,78	9,80	9,91	8,11	12,80	14,66	10,81	17,50
12	7,99	7,48	9,07	12,95	7,58	30,85	10,16	8,75	11,37

Tabela 16 – Tempos de execução para objetivo de minimizar o custo total.

Instância	$p = 0,0$			$p = 0,1$			$p = 0,2$		
	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior	Média	Menor	Maior
1	11,15	8,43	13,48	9,97	9,90	10,11	18,80	11,26	23,62
2	34,59	15,02	64,49	91,10	53,39	112,49	90,01	59,07	113,67
3	31,69	8,97	56,22	84,56	21,55	150,79	165,07	148,14	172,14
4	69,78	12,32	273,64	158,10	28,79	298,74	440,85	34,10	649,52
5	60,69	24,38	229,87	734,83	408,97	1699,24	1657,77	1359,67	1862,68
11	11,41	9,52	13,90	108,54	35,26	206,64	389,73	366,32	411,31
12	19,31	10,02	53,97	93,26	45,28	123,95	128,38	119,33	136,24

OTIMIZAÇÃO BIOBJETIVO

Como ressaltado anteriormente, considerar como objetivos minimizar o custo total e minimizar o tempo da maior rota leva a diferenças significativas nas soluções, uma vez que para focar em um objetivo, precisamos abrir mão do outro. Com isso em mente, este capítulo tem como foco conceitos e métodos para conciliar os objetivos.

Dessa forma, na Seção 6.1 discutimos brevemente conceitos de teoria multiobjetivo utilizados no capítulo. As Seções 6.2, 6.3 e 6.4 são dedicadas aos métodos utilizados para a solução do problema estudado.

6.1 Conceitos Básicos de Otimização Multiobjetivo

Buscando abordar os dois objetivos descritos, nesta seção, damos enfoque para a teoria de otimização multiobjetivo. Vale ressaltar que descrevemos aqui conceitos básicos, para maior aprofundamento nesse tema, recomendamos Deb (2014). A seguir apresentamos três conceitos importantes que são utilizados no decorrer deste capítulo, sendo que os dois objetivos abordados são denotados por f_1 e f_2 .

- **Dominância:** Uma solução s domina uma solução s' se, e somente se, $(f_1(s) \leq f_1(s')$ e $f_2(s) < f_2(s')$) ou $(f_1(s) < f_1(s')$ e $f_2(s) \leq f_2(s')$). Ou seja, é estabelecida a relação de dominância se uma solução é melhor que outra em todos os objetivos avaliados. A dominância de s sobre s' é denotada por $s \preceq s'$
- **Ótimo de Pareto:** uma solução é dita ótima de Pareto se não existe (ou ainda não foi encontrada) uma solução alternativa que a domine.
- **Fronteira de Pareto:** é o conjunto composto pelas soluções ótimas de Pareto.

Além disso, um método de abordagem multiobjetivo pode ser considerado *a priori*, interativa ou *a posteriori*. Uma abordagem é considerada *a priori* quanto a relevância de cada objetivo é estabelecida de antemão, por exemplo quando os objetivos são substituídos por uma única função objetivo que representa uma soma ponderada dos objetivos. Quando as tomadas de decisão em detrimento ou benefício de um objetivo são tomadas durante a execução do método por um agente é dita uma abordagem interativa. Por fim, uma abordagem *a posteriori* é dita uma abordagem que resulta em um conjunto de soluções que não se dominam e o agente decide nesse conjunto qual solução utilizar.

6.2 Método da Ponderação dos Objetivos

Como primeira abordagem, resolvemos o modelo apresentado no Capítulo 3 alterando a função objetivo para uma soma ponderada dos dois objetivos abordados. As mesmas restrições do modelo da Seção 3.3 são consideradas.

$$f_t(z, x) = \text{minimizar } |V|z + \sum_{k \in V} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \quad (6.1)$$

sujeito a:

$$(3.2) - (3.10)$$

$$(3.21) - (3.22).$$

Nas Tabelas 17 e 18, resumimos os resultados obtidos ao resolver as instâncias descritas no Capítulo 3. Na Tabela 17, a primeira coluna define a instância resolvida, as três colunas a seguir mostram os valores do custo total das rotas da solução para os objetivos de minimizar o custo total (Objetivo 1), minimizar a rota máxima (objetivo 2) e a função objetivo como uma soma ponderada desses dois objetivos, respectivamente. Os resultados para os objetivos 1 e 2 foram reportados no Capítulo 3. Analogamente, as três colunas finais mostram o tempo da maior rota obtidos para os três tipos de funções objetivo descritas. A Tabela 18 está estruturada de forma análoga à Tabela 17, no entanto, nela são descritos o GAP e o tempo de execução de cada experimento.

Notamos na Tabela 17, que ao resolver o problema para a soma ponderada do custo total e do tempo da maior rota, temos os tempos da maior rota similares, no entanto, os custos totais são ligeiramente maiores que os obtidos tratando os objetivos separadamente. Em média, há uma perda de 3,8% no custo total e 0,7% no custo da rota máxima quando comparamos os valores obtidos pela ponderação em relação aos valores obtidos analisando os resultados de cada objetivo separadamente. Os GAPs médios são semelhantes, no entanto, não foi obtida nenhuma solução comprovadamente ótima para a soma ponderada dos objetivos.

Tabela 17 – Valores do tempo total e tempo da maior rota das soluções obtidas.

Instância	Custo Total			Tempo da Maior Rota		
	Objetivo 1	Objetivo 2	Ponderação	Objetivo 1	Objetivo 2	Ponderação
1	398,82	437,90	422,05	167,67	149,44	149,44
2	364,77	401,43	390,13	190,00	135,48	136,55
3	460,58	480,55	471,54	176,21	161,58	161,58
4	499,61	523,93	511,02	198,94	176,41	176,41
5	477,10	498,67	494,32	176,87	166,96	166,96
6	430,23	475,68	455,77	195,50	159,19	160,66
7	526,00	531,78	522,18	199,20	180,72	183,56
8	418,89	436,88	426,80	197,13	146,28	148,31
9	434,18	446,87	440,25	167,35	151,37	154,34
10	488,23	532,80	529,19	196,70	178,86	178,86

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 18 – Valores do GAP e tempo de execução das soluções obtidas.

Instância	GAP			Tempo de Execução		
	Objetivo 1	Objetivo 2	Ponderação	Objetivo 1	Objetivo 2	Ponderação
1	0,03	0,12	0,09	T.L.	T.L.	T.L.
2	0,00	0,08	0,06	538,82	T.L.	T.L.
3	0,04	0,07	0,05	T.L.	T.L.	T.L.
4	0,06	0,10	0,07	T.L.	T.L.	T.L.
5	0,05	0,08	0,07	T.L.	T.L.	T.L.
6	0,03	0,10	0,09	T.L.	T.L.	T.L.
7	0,05	0,06	0,06	T.L.	T.L.	T.L.
8	0,09	0,11	0,10	T.L.	T.L.	T.L.
9	0,08	0,09	0,09	T.L.	T.L.	T.L.
10	0,04	0,12	0,11	T.L.	T.L.	T.L.
Média	0,05	0,09	0,08			

Fonte: Elaborada pela autora.

6.3 Método ε -restrito

Em seguida, utilizamos o método ε -restrito clássico para otimização biobjetivo. Tal método consiste em fixar uma das funções objetivo analisadas e limitar a outra a um ε . Dessa forma, temos um novo modelo correspondente a:

$$\text{minimizar } f_1(x) \quad (6.2)$$

sujeito a:

$$x \in \mathcal{X}, \quad (6.3)$$

$$f_2(x) \leq \varepsilon. \quad (6.4)$$

Figura 15 – Exemplo do método ε -restrito.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

em que: $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são as funções objetivo estudadas, x é o vetor solução correspondente a solução s , $\mathcal{X}$ é o espaço de soluções e ε é um limitante para a função objetivo. O método tem como objetivo encontrar um conjunto de soluções eficientes. Sua proposta consiste em minimizar uma das funções objetivo enquanto limita a perda que ocorrerá na outra.

Na Figura 15, ilustramos a ideia do método. Nela, s_1 e s_2 representam os pares ordenados com os valores das funções f_1 e f_2 obtidos para a Instância 1. A solução s_1 é obtida minimizando a função objetivo f_1 , enquanto a solução s_2 é obtida minimizando a função objetivo f_2 . Neste exemplo, escolhemos minimizar o valor da função objetivo f_2 e limitar f_1 por ε , dessa forma, por mais que o foco seja a função f_2 , a função f_1 será no máximo ε . Esse processo é realizado para diferentes valores de ε , ou seja, um certo número de vezes até que o conjunto de soluções seja satisfatório ou o tempo limite dedicado a esse processo seja atingido.

Para avaliar este método, resolvemos as mesmas instâncias da seção anterior. Como primeiro experimento utilizamos o método tendo como função objetivo minimizar o tempo da rota máxima (f_2), enquanto o valor do custo total da solução (f_1) foi limitado a ε , sendo ε igual ao valor médio do custo total das soluções nos experimentos anteriores, quando cada objetivo é minimizado desconsiderando o outro (como ilustrado na Figura 15). No entanto, no tempo limite estipulado, só foi possível encontrar uma solução factível para duas instâncias (2 e 8), dessa forma, os experimentos desse capítulo foram continuados tendo como função objetivo minimizar f_1 e limitando o valor de f_2 .

Figura 16 – Valores atribuídos a ϵ .

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Tabela 19 – Custo total e maior rota de execução de cada instância para o método ϵ -restrito.

Inst.	Custo Total					Maior Rota				
	$f_1(s_1)$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$f_1(s_2)$	$f_2(s_1)$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$f_2(s_2)$
1	437,90	420,04	406,70	406,70	398,82	149,44	152,95	153,27	153,27	167,67
2	401,43	385,81	374,65	374,65	364,77	135,48	136,46	155,91	155,91	190,00
3	480,55	*	483,39	*	460,58	161,58	*	167,62	*	176,21
4	523,93	511,51	524,87	506,40	499,61	176,41	177,78	185,68	176,51	198,94
5	498,67	482,78	485,47	483,46	477,10	166,96	168,28	170,54	171,52	176,87
6	475,68	451,21	451,21	449,09	430,23	159,19	162,73	162,73	163,72	195,50
7	531,78	*	*	528,94	526,00	180,72	*	*	183,56	199,20
8	436,88	430,40	419,41	419,07	418,89	146,28	155,76	171,24	175,91	197,13
9	446,87	437,80	437,80	437,80	434,18	151,37	151,89	151,89	151,89	167,35
10	532,80	*	519,24	*	488,23	178,86	*	184,27	*	196,70

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 16, exemplificamos no eixo de f_2 os valores atribuídos a ϵ . Sendo s_1 a solução obtida ao considerar apenas o objetivo f_2 e s_2 a solução ao considerarmos apenas o objetivo f_1 . Mais formalmente, foram utilizados os valores:

$$\epsilon_1 = f_2(s_1) + 0,25(f_2(s_2) - f_2(s_1)) \quad (6.5)$$

$$\epsilon_2 = f_2(s_1) + 0,50(f_2(s_2) - f_2(s_1)) \quad (6.6)$$

$$\epsilon_3 = f_2(s_1) + 0,75(f_2(s_2) - f_2(s_1)) \quad (6.7)$$

Na Tabela 19, são repetidos os valores das soluções apresentadas na Tabela 17 para fins de comparações, e são incluídos os resultados obtidos para cada valor de ϵ utilizado. É possível observar que existe uma tendência de que a medida que o custo total diminui o custo da rota máxima aumenta. Mesmo que esse padrão não seja sempre mantido, isso acontece com soluções que possuem um GAP mais alto, como por exemplo a Instância 4 com rota máxima limitada a ϵ_2 , que aumenta o valor do custo total em relação a coluna $f_1(s_1)$ e ϵ e possui um GAP de 12%. São representadas por "*" as execuções do método que não obtiveram solução factível.

Na Tabela 20, apresentamos os GAPs obtidos e o tempo de execução utilizado, sendo que T.L. representa o tempo limite delimitado de execução do método (T.L. = 1.800 segundos).

Tabela 20 – Gap e tempo de execução de cada instância para o método ε -restrito.

Inst.	GAP					Tempo Execução				
	$f_1(s_1)$	ε_1	ε_2	ε_3	$f_1(s_2)$	$f_2(s_1)$	ε_1	ε_2	ε_3	$f_2(s_2)$
1	0,12	0,07	0,04	0,04	0,03	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
2	0,08	0,04	0,00	0,03	0,00	T.L.	T.L.	1468,46	T.L.	538,82
3	0,07	*	0,09	*	0,04	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
4	0,10	0,09	0,12	0,06	0,06	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
5	0,08	0,05	0,05	0,06	0,05	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
6	0,10	0,06	0,07	0,07	0,03	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
7	0,06	*	*	0,06	0,05	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
8	0,11	0,11	0,08	0,09	0,09	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
9	0,09	0,08	0,08	0,08	0,08	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
10	0,12	*	0,11	*	0,04	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.	T.L.
Média	0,09	0,07	0,07	0,06	0,5					

Fonte: Elaborada pela autora.

Nas Figuras 17 e 18, ilustramos para as instâncias 3, 4, 1 e 8 os pares ordenados dos valores das funções objetivo obtidos utilizando o método ε -restrito. Na Figura 17a, observamos que o método não obteve uma solução não dominada, dessa forma, foram plotadas dois pares que correspondem às soluções obtidas utilizando cada função objetivo separadamente. Em seguida, as Figuras 17b, 18a e 18b mostram exemplos de instâncias para as quais foram obtidas soluções além do par de soluções iniciais. Sendo que dessas, para o exemplo da Figura 18b foram obtidas soluções não dominadas em todas as execuções do método ε -restrito.

Figura 17 – Exemplos de aproximações da Fronteira de Pareto encontradas.

(a) 2 soluções não dominadas foram encontradas. (b) 3 soluções não dominadas foram encontradas.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a biblioteca Matplotlib em Python.

Figura 18 – Exemplos de aproximações da Fronteira de Pareto encontradas.

(a) 4 soluções não dominadas foram encontradas. (b) 5 soluções não dominadas foram encontradas.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a biblioteca Matplotlib em Python.

6.4 Pareto-ILS

No Capítulo 4, apresentamos uma meta-heurística para resolver o problema estudado que aborda os dois objetivos separadamente. Aqui adaptamos o método para obter um conjunto de soluções eficientes considerando os dois objetivos simultaneamente. Dessa forma, foi implementada uma Pareto-ILS (PILS) para a resolução do problema, a qual é apresentada por Geiger (2008).

Assim como a ILS desenvolvida, a PILS busca aliar intensificação e diversificação. Para isso, em cada iteração, vizinhos da solução atual são adicionados na aproximação da fronteira de Pareto (P^{approx}) sendo o único critério para isso não serem dominados por outra solução do conjunto. Ao decorrer do método todas as soluções em P^{approx} devem ser investigadas com respeito a suas vizinhanças. Na Figura 19, ilustramos uma iteração do método em que a solução s é a solução atual. Nesse exemplo, são utilizadas 3 vizinhanças, as quais suas soluções correspondentes são s_1 , s_2 e s_3 . A solução s já teve suas vizinhanças investigadas, portanto é representada pela cor amarela, enquanto as soluções s_1 , s_2 e s_3 que não foram investigadas são representadas pela cor cinza. As soluções s_1 e s_2 não dominam a solução s , portanto as vizinhanças seguintes seguem sendo verificadas, já a solução s_3 domina a solução s , logo s é substituída por s_3 e as vizinhanças de s_3 seguem sendo exploradas. Dessa forma, o algoritmo segue investigando s_3 , caso não encontre nenhum vizinho que a domine, o método investigará as vizinhanças de s_1 e s_2 ou outra solução no conjunto P^{approx} que ainda não tenha sido investigada. O pseudo-código da PILS é descrito em Algoritmo 8.

Figura 19 – Exemplo de iteração do método PILS.

Fonte: Elaborada pela autora utilizando a ferramenta Canva.

Algoritmo 8 – Pareto ILS - PILS

```

 $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_i\}$       # conjunto de vizinhanças
 $s \leftarrow$  Solução Inicial
 $P^{prox} \leftarrow \{s\}$ 
 $iterILS \leftarrow 0$ 
enquanto  $iterILS < MaxIter$  faça
     $m \leftarrow 1$ 
    enquanto  $m < |\mathcal{M}|$  faça
         $s' \leftarrow Vizinho(s, m)$ 
         $P^{prox} \leftarrow P^{prox} \cup \{s'\}$ 
        se  $s' \preceq s$  então
             $s \leftarrow \{s'\}$ 
             $m \leftarrow 1$ 
            Reorganiza  $\mathcal{M}$  em ordem aleatória
        senão
             $m \leftarrow m + 1$ 
    fim
fim
    Marca as vizinhanças de  $s$  como "investigadas"
     $iterILS \rightarrow iterILS + 1$ 
    se  $\exists s' \in P^{prox}$  com vizinhanças ainda não investigadas então
         $s \leftarrow s'$ 
    senão
        Escolha  $s' \in P^{prox}$ 
         $s'' \leftarrow Pertubação(s')$ 
         $s \leftarrow s''$ 
    fim
fim

```

Na Tabela 21, apresentamos os melhores resultados obtidos pela PILS para cada objetivo. A primeira coluna enumera a instância resolvida. As três colunas seguintes apresentam o custo total da solução obtida utilizando: a solução inicial dada em 4.1, o método ILS da Seção 4.2 (com o objetivo de minimizar o custo total) e por fim a PILS. Em seguida, reportamos os valores da maior rota obtida, aqui a ILS é utilizada com o objetivo de minimizar a maior rota. Por fim, a última coluna apresenta o número de elementos da fronteira de Pareto aproximada, ou seja, o número de soluções que não se dominam, que foram obtidos pelo método PILS. Obtivemos, em média, 3 soluções não dominadas por instância.

Tabela 21 – Melhores resultados obtidos com o método PILS.

Instância	Custo Total			Maior Rota			$ P^{approx} $
	Sol_Ini	ILS	P-ILS	Sol_Ini	ILS	P-ILS	
1	426,747	407,175	420,727	189,288	165,864	173,312	5
2	391,308	384,371	384,783	188,775	163,275	167,571	7
3	485,244	469,375	485,244	193,158	175,058	173,229	5
4	585,705	536,475	564,393	199,692	190,658	191,093	5
5	509,816	483,465	503,587	182,549	174,633	182,468	4
6	500,169	449,024	495,577	187,063	176,141	180,649	5
7	581,407	555,958	570,156	197,028	196,099	191,261	5
8	437,036	421,578	434,723	180,167	173,793	177,374	5
9	448,537	434,177	437,688	176,644	163,944	167,345	3
10	533,599	507,329	525,985	195,025	187,318	190,681	5

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 20, apresentamos as soluções obtidas para a Instância 2, uma vez que essa foi a instância que mais teve soluções não dominadas. Na figura, também incluímos as soluções obtidas pelo método ILS da Seção 4.2 que são as soluções mais extremas.

Figura 20 – P^{approx} obtida para a Instância 2.

Fonte: Elaborada pela autora.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, abordamos o problema de roteamento de veículos com múltiplas viagens e frota heterogênea. Em especial, nos inspiramos em problemas de roteamento no contexto urbano, em que os veículos são de pequeno porte e realizam entregas com distâncias pequenas. Além disso, utilizamos um segundo objetivo que busca abordar contextos de missões humanitárias.

Como discutimos no Capítulo 2, embora relevante, este problema foi pouco estudado na literatura, não sendo de nosso conhecimento que um modelo matemático tenha sido proposto para representá-lo. Primeiramente, adaptamos um modelo da literatura para o problema, no entanto, como mostram os resultados do Capítulo 3, apenas instâncias com até 30 clientes podem ser resolvidas em tempo computacional aceitável. Logo, instâncias de maior dimensão dificilmente seriam resolvidas em tempo computacional razoável utilizando o modelo matemático apresentado e a estratégia de resolução adotada. Portanto, seguimos essa dissertação desenvolvendo um método heurístico para tratar o problema. Tal método é dividido em 3 etapas: **i)** Solução inicial: que utiliza uma heurística construtiva da literatura para obter soluções iniciais para o problema; **ii)** ILS: um método que alia diversificação, com métodos de perturbação, e intensificação, com métodos de buscas locais; **iii)** Modelo de Cobertura: que busca, com viagens factíveis obtidas durante a execução do método ILS, encontrar um conjunto de viagens mais eficientes para assim obter uma melhor solução.

No Capítulo 5, inicialmente, a ILS desenvolvida é calibrada a fim de obter uma melhor configuração. Em seguida, apresentamos os resultados obtidos para instâncias de pequeno porte que são comparados aos resultados do Capítulo 3. A meta-heurística obteve resultados em média a 0,6% e 1,8% maiores quando minimizamos o custo total e a maior rota, respectivamente. No entanto, temos um ganho significativo no tempo de resolução. A fim de mostrar a competitividade do método, instâncias da literatura para problemas com frota homogênea foram resolvidas. Os resultados mostraram que embora o método não seja especializado para frota homogênea, ele é competitivo, estando em média a 1,8% dos melhores resultados da literatura quando é utilizado o

menor limitante para o tempo máximo de rotas e em média 3,6% quando foi utilizado o limitante maior. Por fim, foram avaliadas instâncias com frota heterogênea para as quais o método se mostrou robusto.

Como ressaltado anteriormente, nessa dissertação abordamos dois objetivos para o problema estudado. No primeiro, minimizamos o custo total das rotas e, no segundo, minimizamos o custo da maior rota para minimizar o tempo de espera dos atendimentos. Como esperado, os objetivos são conflitantes, ou seja, ao minimizar um deles o outro pode ser prejudicado. Assim, no Capítulo 6, apresentamos três abordagens biobjetivo para o problema.

As abordagens biobjetivo mesmo sendo iniciais mostraram-se relevantes. Esta é, portanto, uma linha a ser explorada em pesquisas futuras. Além disso, também propomos como pesquisas futuras melhorias na meta-heurística desenvolvida, pois ela é competitiva em relação à literatura, mas novas vizinhanças e estratégias de melhoria podem ser incorporadas ao método visando obter resultados ainda melhores.

REFERÊNCIAS

- AGHEZZAF, E.-H.; RAA, B.; LANDEGHEM, H. V. Modeling inventory routing problems in supply chains of high consumption products. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 169, n. 3, p. 1048–1063, 2006. Citado nas páginas [35](#) e [36](#).
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G. Vehicle routing problems with split deliveries. **International transactions in operational research**, Wiley Online Library, v. 19, n. 1-2, p. 3–22, 2012. Citado na página [22](#).
- BALDACCI, R.; BATTARRA, M.; VIGO, D. Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In: **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 3–27. Citado na página [22](#).
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I. V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 99, p. 300–313, 2016. Citado na página [22](#).
- BÄRÄYSSY, O.; GENDREAU, M. Vehicle routing problem with time windows, part i: Route construction and local search algorithms. **Transportation science**, INFORMS, v. 39, n. 1, p. 104–118, 2005. Citado na página [50](#).
- CACERES-CRUZ, J.; ARIAS, P.; GUIMARANS, D.; RIERA, D.; JUAN, A. A. Rich vehicle routing problem: Survey. **ACM Computing Surveys (CSUR)**, ACM New York, NY, USA, v. 47, n. 2, p. 1–28, 2014. Citado na página [22](#).
- CACERES-CRUZ, J.; GRASAS, A.; RAMALHINHO, H.; JUAN, A. A. A savings-based randomized heuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem with multi-trips. **Journal of Applied Operational Research**, v. 6, n. 2, p. 69–81, 2014. Citado na página [33](#).
- CARVALHO, J. Valério de. Geração de colunas em 17.500 caracteres. **Pesquisa Operacional Para O Desenvolvimento**, v. 9, n. 1, p. 1–9, 2017. Citado na página [28](#).
- CATTARUZZA, D.; ABSI, N.; FEILLET, D. Vehicle routing problems with multiple trips. **4OR**, Springer, v. 14, n. 3, p. 223–259, 2016. Citado nas páginas [22](#), [28](#), [29](#) e [64](#).
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations research**, Inform, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964. Citado nas páginas [33](#) e [45](#).
- CUERVO, D. P.; GOOS, P.; SÖRENSEN, K.; ARRÁIZ, E. An iterated local search algorithm for the vehicle routing problem with backhauls. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 237, n. 2, p. 454–464, 2014. Citado na página [22](#).
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. **Management science**, Inform, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959. Citado na página [21](#).
- DEB, K. Multi-objective optimization. In: **Search methodologies**. [S.l.]: Springer, 2014. p. 403–449. Citado na página [69](#).

- DESROCHERS, M.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. **Operations research**, INFORMS, v. 40, n. 2, p. 342–354, 1992. Citado na página 22.
- DROR, M.; LAPORTE, G.; TRUDEAU, P. Vehicle routing with split deliveries. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 50, n. 3, p. 239–254, 1994. Citado na página 22.
- FLEISCHMANN, B. The vehicle routing problem with multiple use of vehicles. **Forschungsbericht Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hamburg**, 1990. Citado nas páginas 28, 33 e 45.
- GEIGER, M. J. Foundations of the pareto iterated local search metaheuristic. **arXiv preprint arXiv:0809.0406**, 2008. Citado na página 75.
- GOETSCHALCKX, M.; JACOBS-BLECHA, C. The vehicle routing problem with backhauls. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 42, n. 1, p. 39–51, 1989. Citado na página 22.
- GOLDEN, B. L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 43. Citado na página 21.
- HOFF, A.; ANDERSSON, H.; CHRISTIANSEN, M.; HASLE, G.; LØKKETANGEN, A. Industrial aspects and literature survey: Fleet composition and routing. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 2041–2061, 2010. Citado na página 22.
- KALLEHAUGE, B.; LARSEN, J.; MADSEN, O. B.; SOLOMON, M. M. Vehicle routing problem with time windows. In: **Column generation**. [S.l.]: Springer, 2005. p. 67–98. Citado na página 22.
- KOÇ, Ç.; BEKTAŞ, T.; JABALI, O.; LAPORTE, G. Thirty years of heterogeneous vehicle routing. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 249, n. 1, p. 1–21, 2016. Citado na página 22.
- KRAMER, R.; CORDEAU, J.-F.; IORI, M. Rich vehicle routing with auxiliary depots and anticipated deliveries: An application to pharmaceutical distribution. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier, v. 129, p. 162–174, 2019. Citado na página 48.
- LAHYANI, R.; KHEMAKHEM, M.; SEMET, F. Rich vehicle routing problems: From a taxonomy to a definition. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 241, n. 1, p. 1–14, 2015. Citado na página 22.
- LAPORTE, G. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 59, n. 3, p. 345–358, 1992. Citado na página 21.
- _____. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, INFORMS, v. 43, n. 4, p. 408–416, 2009. Citado na página 21.
- LENSTRA, J. K.; KAN, A. R. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. **Networks**, Wiley Online Library, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981. Citado na página 25.

- LETCHFORD, A. N.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J.-J. Stronger multi-commodity flow formulations of the capacitated vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 244, n. 3, p. 730–738, 2015. Citado na página 25.
- LIN, C.; CHOY, K. L.; HO, G. T.; CHUNG, S. H.; LAM, H. Survey of green vehicle routing problem: past and future trends. **Expert systems with applications**, Elsevier, v. 41, n. 4, p. 1118–1138, 2014. Citado na página 22.
- LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search. In: **Handbook of metaheuristics**. [S.l.]: Springer, 2003. p. 320–353. Citado na página 48.
- LÜBBECKE, M. E.; DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. **Operations research**, INFORMS, v. 53, n. 6, p. 1007–1023, 2005. Citado na página 28.
- LUIS, E.; DOLINSKAYA, I. S.; SMILOWITZ, K. R. Disaster relief routing: Integrating research and practice. **Socio-economic planning sciences**, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 88–97, 2012. Citado na página 22.
- MLADENović, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. **Computers & operations research**, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997. Citado na página 49.
- MOLINA, J.; LÓPEZ-SÁNCHEZ, A.; HERNÁNDEZ-DÍAZ, A.; MARTÍNEZ-SALAZAR, I. A multi-start algorithm with intelligent neighborhood selection for solving multi-objective humanitarian vehicle routing problems. **Journal of Heuristics**, Springer, v. 24, n. 2, p. 111–133, 2018. Citado nas páginas 22 e 35.
- PENNA, P. H. V.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L. S. An iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. **Journal of Heuristics**, Springer, v. 19, n. 2, p. 201–232, 2013. Citado na página 48.
- PRINS, C. Efficient heuristics for the heterogeneous fleet multitrip vrp with application to a large-scale real case. **Journal of Mathematical Modelling and Algorithms**, Springer, v. 1, n. 2, p. 135–150, 2002. Citado nas páginas 33 e 41.
- SARTORI, C. S.; BURIOL, L. S. A matheuristic approach to the pickup and delivery problem with time windows. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Logistics**. [S.l.], 2018. p. 253–267. Citado na página 54.
- ŞEN, A.; BÜLBÜL, K. A survey on multi trip vehicle routing problem. İstanbul Bilgi Üniversitesi, 2008. Citado na página 22.
- SILVA, M. M.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L. S. An iterated local search heuristic for the split delivery vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 53, p. 234–249, 2015. Citado na página 48.
- SUBRAMANIAN, A.; DRUMMOND, L. M. d. A.; BENTES, C.; OCHI, L. S.; FARIAS, R. A parallel heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 1899–1911, 2010. Citado na página 48.
- TAILLARD, É. D.; LAPORTE, G.; GENDREAU, M. Vehicle routing with multiple use of vehicles. **Journal of the Operational research society**, Taylor & Francis, v. 47, n. 8, p. 1065–1070, 1996. Citado na página 63.

TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. ISBN 0-89871-498-2. Citado nas páginas 25, 26 e 27.

TOTH, P.; VIGO, D. An overview of vehicle routing problems. In: **The vehicle routing problem**. [S.l.]: SIAM, 2002. p. 1–26. Citado na página 21.

_____. **Vehicle routing: problems, methods, and applications**. [S.l.]: SIAM, 2014. Citado nas páginas 26 e 28.

VIDAL, T.; CRAINIC, T. G.; GENDREAU, M.; PRINS, C. Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 231, n. 1, p. 1–21, 2013. Citado na página 22.