VERIFICAÇÃO E COMPARAÇÃO DE VÁRIAS
TÉCNICAS PARA DETERMINAR A SEQUÊNCIA
DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS DE UMA DADA
DISTRIBUIÇÃO PESO (POSITIVA) OU SEUS
MOMENTOS.

Waldete Aparecida Pereira Augusto

Orientador:

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obten
ção do título de Mestre em Ciências de
Computação.

- São Carlos -

1988

Dedico este trabalho

À minha mãe Diva que nunca
poupou esforços para que
eu tivesse uma boa forma
ção.

À tia Lila e às minhas ir
mãs Valderez e Waldenice
que sempre colaboraram no
melhor de suas possibilida
des com todas as minhas
iniciativas.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga por sua orientação segura, disponibilidade, relevante acolhimento e pelo exemplo de integridade profissional.

À Profª Dra. Marielza Jorge Favaro pelo apoio que me foi dispensado nos momentos iniciais vividos junto ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo.

A todos os professores do ICMSC - USP pelo exemplo constante de sobriedade profissional e incentivos dados.

A todos os funcionários do ICMSC - USP pela atenção que me foi dedicada.

Ao CNPq, CAPES, FAPESP, FINEP que direta ou indiretamente ofereceram incentivos financeiros.

ABSTRACT

We consider the problem of numerically generating the recursion coefficients of orthogonal polynomials given an arbitrary weight distribution. We discuss two classical / methods, respectively due to Stieltjes and Chebyshev; and / modern implementations of them. We discuss also a "new" / method based on the method modified Chebyshev.

Finally we do a comparative study of these methods by means of some chosen examples.

Í N D I C E

I- INTRODUÇÃO

1.1- Considerações Gerais	1
---------------------------------	---

II- DEFINIÇÕES - PROPRIEDADES - APLICAÇÕES

2.1- Definições	8
2.2- Propriedades de Polinômios Ortogonais.....	15
2.3- Aplicações	20
a) Série de Fourier	20
b) Quadratura Numérica	22
c) Aproximação Spline	24
d) Somatória de Séries	28

III- MÉTODOS PARA CALCULAR OS COEFICIENTES DA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS

3.1- Introdução	30
3.2- Procedimento de Stieltjes	31
3.3- Procedimento Discretizado de Stieltjes	35
3.4- Método de Chebyshev	39
3.5- Algoritmo modificado de Chebyshev	43
3.6- Um método "novo" baseado no método modificado de Chebyshev	49

IV- ANÁLISE DOS MÉTODOS

4.1- Introdução	54
4.2- Polinômios de Legendre em $[-1,1]$	55

4.3- Polinômios de Legendre em $[0,1]$	57
4.4- Polinômios de Christoffel	59
4.5- Distribuição com singularidades Logarítmicas	62
4.6- Polinômio de Legendre em $[-b, -1/b] \cup [1/b, b]$	/
$b > 1$	64
 BIBLIOGRAFIA	 67
 APÊNDICES	 70

I- INTRODUÇÃO

1.1- Considerações Gerais

O propósito deste trabalho é a construção numérica dos polinômios ortogonais em relação a uma medida arbitrária sobre a reta real.

Um problema básico na teoria da construção de tais polinômios é a determinação de sua relação de recorrência de três- termos, ou ainda mais especificamente, a determinação dos coeficientes desta relação dada a medida em questão.

Nós analisaremos aqui detalhadamente métodos respectivamente devidos a Stieltjes e Chebyshev, bem como implementações / destes preocupando-nos com suas propriedades de estabilidade numérica.

Seja $d\alpha(t)$ uma medida não negativa sobre a reta real, para a qual todos os momentos

$$(1.1.1) \quad \mu_r = \int_{\mathbb{R}} t^r d\alpha(t) \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

são finitos. Com $d\alpha$ há associado um único sistema de polinômios ortogonais (mônicos); isto é, um único sistema de polinômios $\pi_r = \pi_r(\cdot; d\alpha)$ com as seguintes propriedades:

i) π_r tem grau r com o coeficiente do termo de maior grau 1.

$$ii) \int_{\mathbb{R}} \pi_r(t) \pi_s(t) d\alpha(t) \quad \left\{ \begin{array}{ll} >0 & \text{se } r = s \\ =0 & \text{se } r \neq s \end{array} \right.$$

Geralmente, o sistema $\{\pi_r\}$ consiste de infinitos polinômios, mas se $\alpha(t)$ tem exatamente N pontos de incrementos, este sistema é reduzido a um número finito N de polinômios: $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$. Neste caso a medida em questão é denotada por $d\alpha_N(t)$, e é denominada medida discreta e os polinômios associados são denominados polinômios ortogonais discretos.

Nosso interesse nesta pesquisa surgiu da pouca atenção dada recentemente ao problema; apesar de polinômios ortogonais terem surgido em conexão com questões concretas de análise aplicada tais como:

Integração numérica, aproximação mínimos quadrados, expansões de séries, frações contínuas, etc.

As razões, talvez, para esta falta de interesse devem-se sobretudo a dois fatos:

1º) Vários trabalhos práticos que envolvem polinômios ortogonais são baseados em medidas especiais $d\alpha(t)$ do tipo clássica, para as quais os polinômios ortogonais e os coeficientes de suas relações de recorrência de três termos são explicitamente conhecidos. Por exemplo:

(a) Polinômios de Legendre

$$d\alpha(t) = dt \quad \text{se } t \in [-1, 1]$$

$$d\alpha(t) = 0 \quad \text{se } t \notin [-1, 1]$$

$$\pi_0(t) = 1$$

$$\pi_1(t) = t$$

$$\pi_{n+1}(t) = t \pi_n(t) - \frac{n^2}{(4n^2 - 1)} \pi_{n-1}(t) \quad n \geq 1$$

(b) Polinômios de Chebyshev:

$$d\alpha(t) = (1-t^2)^{-1/2} dt \quad \text{se } t \in [-1, 1]$$

$$d\alpha(t) = 0 \quad \text{se } t \notin [-1, 1]$$

$$\pi_0(t) = 1$$

$$\pi_1(t) = t$$

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$$

$$\pi_{n+1}(t) = t \pi_n(t) - \frac{1}{4} \pi_{n-1}(t) \quad n > 1$$

(c) Polinômios de Hermite

$$d\alpha(t) = e^{-t^2} dt \quad \text{se } t \in \mathbb{R}$$

$$\pi_0(t) = 1$$

$$\pi_1(t) = t$$

$$\pi_{n+1}(t) = t \pi_n(t) - \frac{n}{2} \pi_{n-1}(t) \quad n \geq 1$$

d) Polinômios de Laguerre

$$d\alpha(t) = e^{-t} dt \quad \text{se } t \in [0, \infty)$$

$$d\alpha(t) = 0 \quad \text{se } t \in (-\infty, 0)$$

$$\pi_0(t) = 1$$

$$\pi_1(t) = t - 1$$

$$\pi_{n+1}(t) = (t - \{2n+1\}) \pi_n(t) - n^2 \pi_{n-1}(t) \quad n \geq 1$$

29) Até mesmo no caso de medidas gerais, o problema / considerado tem uma solução matemática direta, pois pode-se expressar ou computar polinômios ortogonais em termos dos momentos (1.1.1). Mas este ponto de vista funciona "teoricamente". Se executado em um computador com precisão limitada esta técnica mostra-se totalmente ineficiente devido ao explosivo crescimento dos erros de arredondamento. Outros procedimentos mais eficientes foram propostos e analisados por Forsythe [06] para polinômios ortogonais / discretos, em conexão com mínimos quadrados e mais recentemente / por Sack e Donovan [17], Gaustschi [08], [09] e Wheeler / [22], para distribuições contínuas em conexão com o problema de Quadratura Gaussiana.

Nós adotaremos então aqui, a posição que as quantidades fundamentais na teoria da construção de polinômios ortogonais, são os coeficientes da relação de recorrência de três termos. Como é bem conhecido, cada sistema $\{\pi_r(\cdot; d\alpha)\}$ de polinômios ortogonais (mônicos) satisfaz a relação de recorrência da forma:

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \pi_K(t) &= (t - \beta_K) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K \pi_{K-2}(t), \quad K = 1, 2, \dots \\ \pi_{-1}(t) &= 0 \quad \quad \quad \pi_0(t) = 1 \end{aligned}$$

onde α_K, β_K são constantes reais com $\alpha_K > 0$.

São os coeficientes α_K, β_K que fornecem a chave para o uso construtivo de polinômios ortogonais. Entre as razões principais para isto destacam-se duas:

i) Os coeficientes α_K , β_K fornecem um modo reduzido / de representar polinômios ortogonais, requerendo somente um arran- jo linear de parâmetros. Os coeficientes dos polinômios ortogonais ou seus zeros, precisam de arranjos bi-dimensionais.

ii) Dos coeficientes α_K , β_K pode-se construir a ma triz de Jacobi associada com $d\alpha$; isto é, a matriz simétrica tridia- gonal:

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & & & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \sqrt{\alpha_3} & & \ddots & \sqrt{\alpha_n} \\ 0 & & & \sqrt{\alpha_n} & \beta_n \end{bmatrix}$$

que permite calcular os zeros de π_n rápida e eficientemente / como os autovalores de J_n , através de algum procedimento de Álge- bra linear (por exemplo, o algoritmo QR ou QL).

Além disso as primeiras componentes dos corresponden- tes autovetores também fornecem imediatamente os números de / Christoffel associados a $d\alpha$.

Uma outra questão importante para o problema da cons- trução de polinômios ortogonais refere-se à medida $d\alpha(t)$, isto por

que, dependendo do que é conhecido sobre esta, existem diferentes procedimentos para se obter os coeficientes α_K , β_K . Se, por exemplo, sabe-se a medida somente através dos momentos, um procedimento apropriado é o algoritmo de Chebyshev, apesar deste não ser muito eficiente em determinados casos (momentos ordinários). Melhores resultados muitas vezes são obtidos se usamos momentos modificados no lugar de momentos ordinários (método modificado de Chebyshev). Ainda assim, o problema pode ser ou não bem condicionado. Isto depende de certas propriedades da medida dada e a maneira como os momentos modificados foram escolhidos.

Se mais é conhecido sobre a medida dada, por exemplo, se ela é absolutamente contínua, então um procedimento que pode ser empregado é baseado na observação de Stieltjes. Stieltjes observou que os desejados coeficientes de recorrência podem ser sucessivamente construídos alternando a conhecida fórmula para estes coeficientes (3.2.1) e os valores da relação de recorrência já obtidos.

Também foram propostos por Gautschi em [8] e [10] métodos baseados na idéia de discretizar a medida $d\alpha(t)$. Eles são aplicados sempre que a medida $d\alpha(t)$ tem a forma $d\alpha(t) = w(t) dt$; onde $w(t)$ (função peso) é contínua em algum intervalo aberto ou na união de um número finito de intervalos abertos e nula no conjunto complementar destes em relação a $\mathbb{R}$; por onde singularidades integráveis são permitidas nas extremidades do intervalo.

No capítulo dois veremos algumas definições, propriedades, bem como algumas aplicações que mostram a importância da construção de tais polinômios.

No capítulo três estudaremos com detalhes os métodos / citados anteriormente para determinação dos coeficientes da relação de recorrência de três-terminos.

No capítulo quatro faremos uma análise através de exemplos dos métodos estudados. Esta análise será feita basicamente / observando o erro calculado. Para o calculo deste, usamos os valores exatos dos coeficientes da relação de recorrência de três-terminos quando conhecidos ou os valores considerados exatos obtidos do TURBO-87, que funciona com melhor precisão.

Finalmente apresentaremos em apêndices alguns programas que foram básicos para a nossa pesquisa. Estes programas foram desenvolvidos em linguagem Pascal-Versão TURBO 3.01 (em ambiente / IBM-PC-DOS 3.1).

O TURBO-PASCAL trabalha com precisão de 6 bytes para / reais utilizando 5 bytes para mantissa e 1 byte para o expoente o que é equivalente a mais ou menos 10 casas decimais.

O TURBO-87 trabalha com 8 bytes para reais sendo 6 bytes para mantissa e 2 bytes para o expoente o que fornece uma / precisão de mais ou menos 15 casas decimais.

II- DEFINIÇÕES - PROPRIEDADES - APLICAÇÕES

O propósito deste capítulo é a apresentação de algumas definições, propriedades e aplicações de polinômios ortogonais que são úteis para o contexto deste trabalho.

2.1 - Definições

Um conjunto ortogonal de funções $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_l(t)$, l finito ou infinito, é definido pela relação

$$(2.1.1) \quad (\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) d\alpha(t) = \lambda_n \delta_{nm},$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots, l \text{ onde } \lambda_n > 0, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$$

e $\alpha(t)$ é uma função não decrescente e não constante no intervalo $/ a \leq t \leq b$.

Este tipo de integral é devido a Stieltjes e é referida normalmente como integral do tipo Riemann - Stieltjes.

Uma definição desta integral pode ser dada como a seguir:

Seja $\alpha(t)$ uma função definida como anteriormente e seja $f(t)$ uma função contínua e real em $[a, b]$. O intervalo $[a, b]$ po-

de ser finito ou infinito. Para cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ de $[a, b]$ sejam $s_1, s_2, \dots, s_n$ pontos tais que $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i) (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})), \text{ onde}$$

de $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$, são pontos escolhidos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\max |t_i - t_{i-1}|\} \rightarrow 0$$

Observamos que se $\alpha(t)$ é absolutamente contínua, isto é, contínua e diferenciável, então podemos escrever

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) w(t) dt,$$

onde $w(t) = f'(t)$ é maior ou igual a zero para $a \leq t \leq b$, mas não sempre igual a zero.

Por outro lado se $\alpha(t)$ é uma função escada com incrementos somente nos pontos t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ então podemos escrever

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \{\alpha(t_i^+) - \alpha(t_i^-)\}$$

Desta forma notamos que a integral de Stieltjes foi in

introduzida para unificar ambas as integrais (clássicas) e as somas em termos de notação.

Maiores informações sobre isto podem ser encontradas por exemplo em Rudin [16].

Uma sequência $\{\psi_n(t)\}$ de funções linearmente independente pode ser ortogonalizada pela formação de combinações lineares apropriadas. Por exemplo, podemos escrever

$$\phi_0(t) = \psi_0(t)$$

$$\phi_1(t) = a_{10}\phi_0(t) + \psi_1(t)$$

·
·
·
·
·

$$\phi_n(t) = a_{n0}\phi_0(t) + a_{n1}\phi_1(t) + \dots + a_{nn-1}\phi_{n-1}(t) + \psi_n(t)$$

e verificar que $\{\phi_n(t)\}$ é um sistema ortogonal se tomamos

$$a_{nm} = -(\psi_n, \phi_m) / (\phi_m, \phi_m) \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

Este modo de determinar uma sequência de funções ortogonais é conhecido como processo de Gram -Schmidt. Algumas referências da teoria de funções ortogonais são Szeő [19], Erdélyi [104], Tricomi [20]

No processo de Gram -Schmidt se escolhemos a sequência $\{\psi_n(t)\}$ de funções linearmente independente $\psi_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, obtemos uma sequência de funções $\{\phi_n(t)\}$ ortogonais (polinômios ortogonais), onde $\phi_n(t)$ é também um polinômio de grau exatamente n .

A definição (2.1.1) de funções ortogonais $\phi_n(t)$ $n=0,1, \dots$, no caso onde $\phi_n(t)$ é um polinômio de grau n , pode ser dada por

$$(2.1.2) \quad \int_a^b t^s \phi_n(t) d\alpha(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq n-1 \\ \omega_n > 0 & s=n \end{cases}$$

Isto pode ser verificado facilmente usando o fato de que t^s pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_s(t)$.

O polinômio ortogonal de grau K não é definido unicamente, no sentido de que se $\phi_K(t)$ satisfaz as relações (2.1.1) e (2.1.2) então $c_K \phi_K(t)$ também satisfaz estas condições, onde c_K é uma constante qualquer.

Por esta razão os polinômios ortogonais são apresentados como polinômios mônicos, isto é, o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1, ou como polinômios ortonormais que satisfazem a condição

$$\int_a^b \{\phi_K(t)\}^2 d\alpha(t) = 1 \quad \text{para } K=0,1,2,\dots,n$$

Uma relação na forma de determinante entre polinômios ortogonais e os assim chamados momentos

$$\mu_n = \int_a^b t^n d\alpha(t), \quad n=0,1,2,\dots \text{ é dada por}$$

$$(2.1.3) \quad \phi_n(t) = c_n \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix}$$

onde c_n é uma constante qualquer.

Esta relação pode ser verificada da seguinte maneira:

$$\text{Seja } \phi_n(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n)$$

Usando a relação (2.1.2) temos:

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n = 0 \\ a_0 \mu_1 + a_1 \mu_2 + \dots + a_n \mu_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_0 \mu_{n-1} + a_1 \mu_n + \dots + a_n \mu_{2n-1} = 0 \\ a_0 \mu_n + a_1 \mu_{n+1} + \dots + a_n \mu_{2n} = \omega_n \end{cases}$$

Este é um sistema de equações em $a_0, a_1, \dots, a_n$. Substituindo a última equação por:

$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = \phi_n(t)$ e aplicando a regra de Cramer obtemos:

$$a_n = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & 0 \\ 1 & t & \dots & t^{n-1} & \phi_n(t) \end{vmatrix} \quad \text{onde}$$

$$D = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \dots & t^n \end{vmatrix}$$

Daqui

$$(2.1.5) \quad \phi_n(t) = c_n \cdot D \quad \text{onde} \quad c_n = \frac{a_n}{\Delta_n} \quad \text{e}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Como a_n não é definido unicamente c_n é uma constante / qualquer.

Da relação (2.1.5) podemos ver que uma condição necessária para a existência de $\phi_n(t)$ é o determinante;

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \text{não ser nulo.}$$

Em (2.1.3) se $\phi_n(t)$ é um polinômio mônico então é fácil ver que $c_n = 1/\Delta_n$. Entretanto, se $\phi_n(t)$ é um polinômio ortonormal temos:

$$\int_a^b \{\phi_n(t)\}^2 d\alpha(t) = \int_a^b a_n t^n \phi_n(t) d\alpha(t) = 1$$

Isto é

$$a_0 \mu_n + a_1 \mu_{n+1} + \dots + a_n \mu_{2n} = \omega_n = 1/a_n$$

Usando esta equação em (2.1.4) e aplicando a regra de Cramer obtemos:

$$a_n = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & 0 \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & 1/a_n \end{vmatrix}$$

Daqui:

$$a_n^2 = \Delta_n / \Delta_{n+1} \text{ e então}$$

$$c_n = 1 / \{\Delta_n \Delta_{n+1}\}^{1/2}$$

A teoria analítica de polinômios ortogonais é apresentada de forma completa em Szeő [19].

2.2. Propriedades de Polinômios Ortogonais

O que torna interessante o estudo de polinômios ortogonais é a variedade de propriedades úteis que eles exibem. Nós vamos dar quatro delas:

a) A propriedade mais interessante e útil desses polinômios é que eles satisfazem a relação de recorrência de três termos da forma:

$$\pi_K(t) = (\gamma_K t - \beta_K) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K \pi_{K-2}(t) \quad K \geq 2$$

onde $\beta_K \in \mathbb{R}$, γ_K e $\alpha_K > 0$

É fácil ver que se o coeficiente do termo de maior grau de $\pi_K(t)$ nesta relação é a_K , então $a_K = \sum_{i=0}^{K-1} a_{K-i-1}$. Daqui para frente vamos considerar $\pi_K(t)$ como um polinômio mônico: isto é, $a_K = 1$.

Com isto a relação de recorrência pode ser dada como / em (1.1.2).

Para provar este resultado temos que considerar primeiro o polinômio $\pi_K(t)$, $K \geq 0$. Desde que $\pi_K(t)$ é um polinômio mônico de grau K , o polinômio $\{\pi_K(t) - t\pi_{K-1}(t)\}$ é um polinômio de grau $K-1$. / Portanto este polinômio pode ser expresso como:

$$\{\pi_K(t) - t\pi_{K-1}(t)\} = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i^{(K)} \pi_i(t)$$

Multiplicando os dois lados desta relação por $\pi_r(t)$ e usando a integral temos:

$$\int_a^b \pi_r(t) \{\pi_K(t) - t\pi_{K-1}(t)\} d\alpha(t) = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i^{(K)} \int_a^b \pi_r(t) \pi_i(t) d\alpha(t)$$

Para $r = K-1$ obtemos:

$$\alpha_{K-1}^{(K)} = \frac{\int_a^b t \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}{\int_a^b \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}$$

Da mesma forma para $r = K-2$ obtemos:

$$\alpha_{K-2}^{(K)} = - \frac{\int_a^b t \pi_{K-1}(t) \pi_{K-2}(t) d\alpha(t)}{\int_a^b \pi_{K-2}^2(t) d\alpha(t)}$$

Analogamente:

Para $r = K-3, K-4, \dots, 0$ obtemos, respectivamente:

$$\alpha_{K-3}^{(K)} = \alpha_{K-4}^{(K)} = \dots = \alpha_0^{(K)} = 0$$

Logo

$$\{\pi_K(t) - t \pi_{K-1}(t)\} = \alpha_{K-1}^{(K)} \pi_{K-1}(t) + \alpha_{K-2}^{(K)} \pi_{K-2}(t)$$

$$\text{e portanto } \pi_K(t) = (t + \alpha_{K-1}^{(K)}) \pi_{K-1}(t) + \alpha_{K-2}^{(K)} \pi_{K-2}(t)$$

Fazendo $\beta_K = -\alpha_{K-1}^{(K)}$ e $\alpha_K = -\alpha_{K-2}^{(K)}$ obtemos:

$$\pi_K(t) = (t - \beta_K) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K \pi_{K-2}(t) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pode-se verificar facilmente ainda que:

$$\alpha_K = \frac{\int_a^b \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}{\int_a^b \pi_{K-2}^2(t) d\alpha(t)}$$

b) Temos que

$$(2.2.1) \quad \{\pi'_{K+1}(t) \pi_K(t) - \pi'_K(t) \pi_{K+1}(t)\} = \{\pi_K(t)\}^2 + \alpha_{K+1} \{\pi_{K-1}(t)\}^2 + \\ + \alpha_{K+1} \alpha_K \{\pi_{K-2}(t)\}^2 + \dots + \alpha_{K+1} \alpha_K \dots \alpha_2 \{\pi_0(t)\}^2$$

onde $\pi'_K(t)$ é a derivada de $\pi_K(t)$.

Esta propriedade pode ser facilmente provada usando a relação de recorrência (1.1.2).

c) Os zeros dos polinômios ortogonais $\pi_K(t)$ associados com a distribuição $d\alpha(t)$ sobre o intervalo $[a, b]$ são reais e distintos e estão localizados no intervalo (a, b) .

A prova desta propriedade é baseada na propriedade de ortogonalidade. De

$$\int_a^b \pi_K(t) d\alpha(t) = 0$$

nós asseguramos a existência de pelo menos um ponto no interior do intervalo $[a, b]$ onde $\pi_K(t)$ troca de sinal.

Suponhamos que existam somente r pontos onde $\pi_K(t)$ troca de sinal em (a, b) .

Se os pontos onde $\pi_K(t)$ troca de sinal em (a, b) são $(t_1, t_2, \dots, t_r)$, construímos $\sigma(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_r)$ e $\pi_K(t) = \lambda(t) \cdot \sigma(t)$. Então $\lambda(t) > 0$ ou $\lambda(t) < 0$ em (a, b) e

$$\int_a^b \pi_K(t) \cdot \sigma(t) \, d\alpha(t) = \int_a^b \sigma^2(t) \lambda(t) \, d\alpha(t) \neq 0$$

Mas se $r < K$ isso é uma contradição novamente pela propriedade de ortogonalidade, pois $\sigma(t)$ pode ser escrito como $\sum_{i=0}^r a_i \pi_i(t)$.

Entretanto $r > K$ não podemos ter pois $\pi_K(t)$ tem somente K raízes pois é de grau K .

Portanto $r = K$; isto é: $\pi_K(t)$ deve trocar de sinal K vezes no intervalo (a, b) .

d) Seja $t_1 < t_2 < \dots < t_K$ os zeros de $\pi_K(t)$, com $t_0 = a$, $t_{K+1} = b$

Então cada intervalo $[t_v, t_{v+1}]$, $v = 0, 1, 2, \dots, K$, contém exatamente um zero de $\pi_{K+1}(t)$.

De fato se ξ e η , $\xi < \eta$ são dois zeros consecutivos de $\pi_K(t)$ temos $\pi'_K(\xi) \cdot \pi'_K(\eta) < 0$.

Por outro lado usando a relação (2.2.1) temos:

$$\begin{aligned} \pi'_K(\xi) \pi_{K+1}(\xi) &< 0 \\ \pi'_K(\eta) \pi_{K+1}(\eta) &< 0 \end{aligned}$$

Multiplicando estas desigualdades obtemos:

$$\{\pi'_K(\xi) \pi'_K(\eta)\} \cdot \{\pi_{K+1}(\xi) \cdot \pi_{K+1}(\eta)\} > 0$$

$$\text{Mas } \pi'_K(\xi) \cdot \pi'_K(\eta) < 0$$

$$\text{Portanto } \pi_{K+1}(\xi) \cdot \pi_{K+1}(\eta) < 0$$

Isto indica pelo menos um zero de $\pi_{K+1}(t)$ em $\xi < t < \eta$. Agora seja $\xi = t_K$ o maior zero de $\pi_K(t)$; então $\pi'_K(\xi) > 0$ e a relação / (2.2.1) produz $\pi_{K+1}(\xi) < 0$.

Mas $\pi_{K+1}(b)$ é positivo. Então obtemos pelo menos um zero de $\pi_{K+1}(t)$ à direita de $\xi = t_K$ e similarmente podemos provar / que existe pelo menos um zero à esquerda do menor zero t_1 de $\pi_{K+1}(t)$.

Consequentemente podemos ter somente um zero de $\pi_{K+1}(t)$ entre t_v e t_{v+1} , $v = 0, 1, 2, \dots, K$.

2.3 - Aplicações:

Nesta seção nós apresentaremos duas aplicações tradicionais de polinômios ortogonais: Serie de Fourier e Quadratura Numérica.

Nós consideraremos também algumas novas aplicações que necessitam de polinômios ortogonais com distribuição peso não convencional. Comentaremos aqui a aproximação Spline e a somatória de séries suavemente convergentes, envolvendo a Transformação de Laplace ou suas derivadas.

a) Série de Fourier.

Seja $\{\phi_n(t)\}$ um dado conjunto ortonormal, finito ou infinito. Para uma função real arbitrária $f(t)$ a correspondente expansão formal de Fourier é dada por

$$(2.3.1) \quad f(t) \sim f_0 \phi_0(t) + f_1 \phi_1(t) + \dots + f_n \phi_n(t) + \dots$$

Os coeficientes f_n , chamados de coeficientes de $f(t)$ / em relação a um dado sistema, são definidos por

$$(2.3.2) \quad f_n = (f, \phi_n) = \int_a^b f(t) \phi_n(t) d\alpha(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cada parte finita da série (2.3.1) tem a seguinte / propriedade de mínimo:

Seja $\phi_n(t)$, $f(t)$, f_n definidos como anteriormente. Se-
ja $l \geq 0$ um inteiro fixo e $a_0, a_1, \dots, a_l$ constantes reais arbitrâ-
as. Se escrevermos

$$(2.3.3) \quad g(t) = a_0 \phi_0(t) + a_1 \phi_1(t) + \dots + a_l \phi_l(t)$$

onde os coeficientes a_v são variáveis, então a integral

$$\int_a^b \{f(t) - g(t)\}^2 d\alpha(t)$$

torna-se mínimo se, e somente se, $a_v = f_v$, $v = 0, 1, 2, \dots, l$

A prova deste resultado pode ser dada da seguinte ma-
neira:

$$\text{Seja } E = \int_a^b [f(t) - g(t)]^2 d\alpha(t). \text{ É fácil ver que } /$$

usando (2.3.3) E pode ser escrito como:

$$E = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=0}^l a_i \phi_i(t)]^2 d\alpha(t)$$

Usando a propriedade de $\phi_n(t)$ ser ortonormal e a relação (2.3.2), após a expansão desta expressão quadrática obtemos:

$$E = \int_a^b (f(t))^2 d\alpha(t) - 2 \sum_{i=0}^l a_i f_i + \sum_{i=0}^l a_i^2$$

Escrevendo esta relação na forma

$$E = \int_a^b (f(t))^2 d\alpha(t) - \sum_{i=0}^l f_i^2 + \sum_{i=0}^l (f_i - a_i)^2$$

veremos que E é mínimo somente quando $a_i = f_i$, $i = 0, 1, \dots, l$.

b) Quadratura Numérica

Um dos principais problemas em integração numérica é escolher um conjunto de K pontos $t_r, r = 1, 2, \dots, K$ e um conjunto de pesos $\lambda_r, r = 1, 2, \dots, K$ tal que a soma

$$\sum_{r=1}^K \lambda_r f(t_r)$$

dê a melhor estimativa para a integral $\int_a^b f(t) d\alpha(t)$.

Os conjuntos de valores $\{t_r\}$ e $\{\lambda_r\}$ podem ser escolhidos de várias maneiras, contudo é aconselhável escolher t_r ($r=1,2,\dots,K$) como as raízes $t_r^{(K)}$ do polinômio ortogonal $\pi_K(t)$ associado a $W(t) dt$ no intervalo $[a,b]$ e λ_r como

$$\lambda_r^{(K)} = \frac{1}{\pi_K'(t_r^{(K)})} \int_a^b \frac{\pi_K(t)}{(t - t_r^{(K)})} d\alpha(t) \quad r=1,2,\dots,K$$

Com esta escolha podemos escrever

$$(2.3.4) \quad \int_a^b f(t) d\alpha(t) = \sum_{r=1}^K \lambda_r^{(K)} f(t_r^{(K)}) + R_K(f)$$

Esta fórmula é chamada de Quadratura de Gauss-Christoffel, tendo a propriedade que $R_K(f) = 0$ quando $f(t)$ é um polinômio de grau máximo $2K-1$.

Todos os números $\lambda_r^{(K)}$ conhecidos como números de Christoffel são positivos. Por exemplo, o sistema de equações não lineares

$$(2.3.5) \quad \sum_{r=1}^K \lambda_r^{(K)} (t_r^{(K)})^n = \int_a^b t^n d\alpha(t), \quad n=0,1,\dots,2K-1$$

caracterizam unicamente os nós $t_r^{(K)}$ e os pesos $\lambda_r^{(K)}$ em (2.3.4).

Na prática porém, (2.3.5) não é conveniente / por causa do mal condicionamento. É melhor recorreremos aos polinômios ortogonais $\pi_K(.) = \pi_K(. ; d\alpha)$; e, em particular, à sua relação de recorrência de três-termos dada como em (1.1.2).

Os coeficientes $\alpha_K = \alpha_K(d\alpha)$ (positivos) e os $\beta_K = \beta_K(d\alpha)$ (reais) determinados unicamente por $d\alpha$ geram a matriz de Jacobi como dissemos na introdução cujos autovalores são os nós $t_r^{(K)}$ de (2.3.5). Os números de Christoffel $\lambda_r^{(K)}$ podem também ser expressos em termos dos associados autovetores normalizados u_r ,

$$(2.3.6) \quad J_K u_r = t_r^{(K)} u_r, \quad u_r^t \cdot u_r = 1 \quad r = 1, 2, \dots, K.$$

Realmente,

$$(2.3.7) \quad \lambda_r^{(K)} = \mu_0 u_{r,1}^2, \quad r = 1, 2, \dots, K$$

onde $u_{r,1}$ é a primeira componente de u_r e $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\alpha(t)$ o primeiro /

momento. Desde que os autovalores para as matrizes tridiagonais / podem ser resolvidos muito eficientemente pelo algoritmo QR (ou QL) com deslocamentos apropriados, nós temos em (2.3.6) e (2.3.7) / um conveniente e efetivo método para calcular a fórmula de Gauss - Christoffel.

c) Aproximação Spline: Consideremos o problema de apro-
ximar uma dada função por uma função Spline de tal modo que o maior número de momentos sejam preservados. Consideraremos funções
definidas sobre o lado positivo do eixo real, R_+ .

Um estudo sobre estes tipos de aproximação por funções foi feito por Gautschi em [12] e [13]. Como não são tão conhecidos apresentaremos aqui algumas informações sobre eles.

(c.1) Aproximação sobre $\mathbb{R}_+$ por funções constantes por pedaços

Dada uma função f sobre $\mathbb{R}_+$, nós primeiramente consideraremos o problema de determinar

$$(2.3.8) \quad S(t) = \sum_{r=1}^K a_r H(t_r - t)$$

tal que

$$(2.3.9) \quad \int_0^{\infty} t^n s(t) dt = \int_0^{\infty} t^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, 2K-1$$

Aqui H é a função Heaviside, $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t \leq 0$. Os coeficientes a_r bem como os nós t_r em (2.3.8) são desconhecidos. Sendo $2K$ incógnitas, nós podemos impor $2K$ condições para as quais nós escolhemos a medida dos primeiros $2K$ momentos como em (2.3.9).

Nós assumiremos que f satisfaz as seguintes condições:

$$f \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad f'(t) \leq 0 \text{ em } \mathbb{R}_+$$

$$(2.3.10) \quad \int_0^{\infty} t^j f(t) dt, \quad \int_0^{\infty} t^j f'(t) dt \text{ existem, para /}$$

$$j = 0, 1, \dots$$

Segue em particular que

$$(2.3.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^m f(t) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Substituindo (2.3.8) em (2.3.9) obtemos:

$$\sum_{r=1}^K a_r \int_0^{t_r} t^n dt = \int_0^{\infty} t^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2K-1$$

que por integração por partes e usando (2.3.11) produz

$$(2.3.12) \quad \sum_{r=1}^K (a_r t_r) t_r^n = \int_0^{\infty} t^n [-t f'(t)] dt,$$

$$n = 0, 1, \dots, 2K-1$$

A comparação entre (2.3.12) e (2.3.5) mostra imediatamente que t_r são os zeros de $\pi_K(\cdot; d\alpha)$ e que $a_r = \lambda_r / t_r$, onde

$$(2.3.13) \quad d\alpha(t) = -t f'(t) dt \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+$$

e λ_r são os números de Christoffel para este $d\alpha$. Assim o problema de aproximação pode ser reduzido à construção da fórmula K - / pontos de Gauss - Christoffel para a medida (positiva) $d\alpha$ em

(2.3.13). Quando f é a distribuição de Maxwell; isto é:

$$(2.3.14) \quad f(t) = \pi^{-1/2} e^{-t^2} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

a medida (2.3.13) torna-se:

$$d\alpha(t) = 2\pi^{-1/2} t^2 e^{-t^2} dt \text{ sobre } \mathbb{R}_+$$

(c.2) Aproximação sobre $\mathbb{R}_+$ por função Spline de grau m .

Nosso interesse agora é generalizar o problema (2.3.8) e (2.3.9) considerando no lugar de (2.3.8) uma função Spline.

$$(2.3.15) \quad S(t) = \sum_{r=1}^K a_r (t_r - t)_+^m, \text{ de grau } m \text{ arbitrário}$$

(o sinal $+$ à direita é simbólico, isto é, $u_+^m = u^m$ se $u > 0$ $u_+^m = 0$ se $u \leq 0$). O problema considerado anteriormente corresponde a $m = 0$. Sob condições análogas a (2.3.10) mas envolvendo derivadas de ordem $m+1$ e usando $m+1$ integrações por partes, Gautschi e Milovanovic [14] mostram que o problema de aproximação pode novamente ser reduzido a um problema de quadratura de Gauss - Christoffel, desta vez para a medida

$$(2.3.16) \quad d\alpha(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} t^{m+1} f^{(m+1)}(t) dt \text{ sobre } \mathbb{R}_+$$

Os t_r em (2.3.15) são os zeros de $\pi_K(\cdot; d\alpha)$ enquanto os a_r são dados por $a_r = \lambda_r / t_r^{m+1}$ onde λ_r são os números de Christoffel associados com $d\alpha$.

Em contraste ao caso $m = 0$, porém, a medida $d\alpha$ em (2.3.16) não é, em geral, positiva definida, como exemplifica Gautschi em [13]. Para a distribuição Maxwell (2.3.14), encontramos:

$$d\alpha(t) = \frac{\pi^{-1/2}}{m!} t^{m+1} H_m(t) e^{-t^2} dt \text{ sobre } R_+$$

onde H_m é o polinômio de Hermite de grau m . Se $m > 1$, H_m troca de sinal sobre R_+ . Por outro lado, se f é totalmente monótona sobre R_+ então a medida (2.3.16) é realmente positiva definida para todo $m \geq 0$ e nosso problema tem uma única solução com nós distintos positivos t_r e pesos positivos a_r .

(d) Somatória de Séries:

Séries envolvendo a transformação de Laplace

$$(2.3.17) \quad F(Z) = \int_0^{\infty} e^{-Zt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} Z \geq 1$$

ou uma de suas derivadas, para valores inteiros são notoriamente lentamente convergente. Por um lema de Watson (Olver [15]) a transformação de Laplace, $F(K)$ comporta-se como uma potência de K^{-1} quando $K \rightarrow \infty$ tal que as séries $\sum_{K=1}^{\infty} F(K)$, $\sum_{K=1}^{\infty} F'(K)$, etc, convergem somente condicionalmente ou lentamente. Por outro lado, se a função f em (2.3.17) é conhecida e bem comportada em $[0, \infty)$, é possível expressar tais séries como integrais com peso de f e computar as integrais por quadratura de Gauss - Christoffel. Assim por exemplo:

$$(2.3.18) \quad S_1 = - \sum_{K=1}^{\infty} F'(K) = \int_0^{\infty} f(t) \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ que sugere}$$

a quadratura de Gauss - Christoffel relativa à medida:

$$(2.3.19) \quad d\alpha_1(t) = \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ em } \mathbb{R}_+$$

Desde que $d\alpha_1(t) \sim t e^{-t} dt$ quando $t \rightarrow \infty$, poderia ser tentado aplicar a quadratura de Gauss - Laguerre diretamente para a integral em (2.3.18) escrevendo o integrando na forma $f(t) t (1 - e^{-t})^{-1} e^{-t}$ com a função peso de Laguerre em evidência. Isto porém, não é totalmente satisfatório, pois a convergência tende a diminuir devido aos dois polos $\pm 2\pi i$. É melhor, especialmente para trabalho de alta precisão, considerar $t(1 - e^{-t})^{-1} e^{-t}$ como uma função peso como é apresentado em (2.3.19).

III- MÉTODOS PARA CALCULAR OS COEFICIENTES DA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DE TRÊS TERMOS

3.1. Introdução:

Nós apresentaremos agora uma descrição detalhada dos métodos para determinar os coeficientes da relação de recorrência de três - termos dada uma medida arbitrária sobre a reta real. Esta questão como já dissemos anteriormente é o problema fundamental da teoria construtiva dos polinômios ortogonais.

Nós discutiremos primeiramente dois procedimentos básicos para a determinação de tais coeficientes: o procedimento de Stieltjes e o de Chebyshev. Estes dois procedimentos podem ser usados, por exemplo, quando conhecemos para algum inteiro $n > 0$, os primeiros $2n$ momentos $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1}$ de $d\alpha$ dados por (1.1.1) e queremos computar os primeiros n coeficientes $\alpha_K, \beta_K, K = 1, 2, \dots, n$. A solução deste problema dá acesso aos primeiros $n+1$ polinômios ortogonais $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$. Infelizmente como cita Gautschi [11] o problema é altamente sensível a pequenas perturbações nos momentos, tal que algum algoritmo que o resolve teoricamente está sujeito a severo crescimento de erros quando executado com precisão limitada.

Um outro procedimento para se determinar os desejados / coeficientes, também será discutido por nós e envolve os assim chamados momentos modificados $v_r = \int_{\mathbb{R}} p_r(t) d\alpha(t)$, onde $\{p_r\}$ é um apropria-

do sistema de polinômios, frequentemente já ortogonal em relação à alguma medida clássica. Este procedimento foi primeiramente proposto por Sack e Donovan [17] e é conhecido como método modificado de Chebyshev.

Além disso, estudaremos, como sugerido por Gautschi, estes métodos baseados na idéia de discretizar a medida $d\alpha(t)$ que, como já dissemos no início, são aplicados sempre que $d\alpha(t)$ tem a forma $d\alpha(t) = W(t) dt$.

Apresentaremos também um método "novo" baseado no método modificado de Chebyshev cujo desenvolvimento foi totalmente devido a algumas observações feita pelo Prof. Dr. A. Sri Ranga (Orientador).

3.2. Procedimento de Stieltjes:

Sabe-se que o sistema de polinômios ortogonais "monicos" em relação a medida $d\alpha(t)$ satisfaz a relação de recorrência / de três - termos da forma (1.1.2) onde α_K, β_K , são dados por:

$$\beta_K = \frac{\int_{\mathbb{R}} t \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}, \quad K = 1, 2, 3, \dots$$

(3.2.1)

(3.2.1)

$$\alpha_K = \frac{\int_{\mathbb{R}} \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_{K-2}^2(t) d\alpha(t)}, \quad K = 2, 3, 4, \dots$$

Em particular, $\alpha_K > 0$ para todo $K > 1$; α_1 em (1.1.2) é arbitrário mas é convenientemente definido como $\alpha_1 = 0$.

As fórmulas gerais (1.1.2) foram dadas por Christoffel [02] que tem diferentes expressões para os α_K , β_K . As fórmulas / (3.2.1) são devidas independentemente a Darboux [03] e Stieltjes [18].

Stieltjes observou que as relações (1.1.2) e (3.2.1) podem ser usadas para calcular sucessivamente $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$. Realmente, desde que $\pi_0 = 1$ o primeiro coeficiente β_1 pode ser computado de (3.2.1) com $K = 1$ que então permite obter $\pi_1(t)$ de (1.1.2). Conhecendo-se π_0, π_1 , pode-se obter α_2, β_2 de (3.2.1) e portanto π_2 de (1.1.2) e assim sucessivamente.

Este procedimento alternado entre (1.1.2) e (3.2.1) é chamado de Procedimento de Stieltjes. O problema surge em como calcular as integrais de (3.2.1), já que Stieltjes não se posicionou sobre a forma de fazê-lo.

Uma tentativa de fazer isto analiticamente é expressando tais integrais em termos dos momentos (1.1.1) e os coeficientes

de $\pi_K(t)$. Isto porém torna o método muito mal condicionado, pois / primeiramente temos que calcular os coeficientes de $\pi_K(t)$ o que pode ser feito comparando-se os coeficientes da relação de recorrência de três - termos com os coeficientes dos polinômios de mesmo grau. Explicando ainda melhor, podemos escrever:

$$\pi_K(t) = \sum_{i=0}^K \xi_i^{(K)} t^i \text{ e então usando a relação (1.1.2) fazemos}$$

$$\begin{aligned} \xi_K^{(K)} t^K + \xi_{K-1}^{(K)} t^{K-1} + \xi_{K-2}^{(K)} t^{K-2} + \dots + \xi_0^{(K)} &= (t - \beta_K) (\xi_{K-1}^{(K-1)} t^{K-1} + \dots + \xi_0^{(K-1)} t^0) - \alpha_K (\xi_{K-2}^{(K-2)} t^{K-2} + \xi_{K-3}^{(K-2)} t^{K-3} + \dots + \xi_0^{(K-2)} t^0) \end{aligned}$$

De onde podemos escrever

$$\left. \begin{aligned} \xi_K^{(K)} &= \xi_{K-1}^{(K-1)} \\ \xi_{K-1}^{(K)} &= \xi_{K-2}^{(K-1)} - \beta_K \xi_{K-1}^{(K-1)} \\ \xi_J^{(K)} &= \xi_{J-1}^{(K-1)} - \beta_K \xi_J^{(K-1)} - \alpha_K \xi_J^{(K-2)} \\ \xi_0^{(K)} &= -\beta_K \xi_0^{(K-1)} - \alpha_K \xi_0^{(K-2)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} J = K-2, K-3, \dots, 1 \\ K=2, 3, \dots \\ \text{se } K > 2 \end{array}$$

pois de $\pi_0(t)$ tiramos imediatamente que $\xi_0^{(0)} = 1$. Da mesma forma de $\pi_1(t)$ tiramos $\xi_1^{(1)} = 1$ e $\xi_0^{(1)} = -\beta_1$.

Mas numericamente este processo é muito instável pois / há acúmulo de erros de arredondamento.

Além disso após calcular os coeficientes de $\pi_K(t)$ precisamos também calcular $\int_a^b \pi_K^2(t) d\alpha(t)$. Este cálculo pode ser feito

então da seguinte forma:

$$\int_a^b \pi_K^2(t) d\alpha(t) = \int_a^b t^K \pi_K(t) d\alpha(t) = \sum_{i=0}^K \xi_i^{(K)} \mu_{K+i}$$

Novamente este processo também contribui para o erro total de arredondamento.

O mesmo acontece com o cálculo de $\int_a^b t^K \pi_K^2(t) d\alpha(t)$ /

que também pode ser expresso em termos dos momentos.

Um algoritmo para tal procedimento pode ser dado como a seguir:

Algoritmo de Stieltjes

Dados N: índice do último momento

$\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_N$: momentos

$$1) \xi_0^{(0)} = 1, \beta_1 = \nu_1/\nu_0, \xi_0^{(1)} = -\beta_1, \xi_1^{(1)} = 1$$

Soma 3= ν_0

2) Para $K=2,3,\dots$

Início

$$\delta_0^{(K)} = \xi_{K-2}^{(K-1)} \cdot \xi_0^{(K-1)}$$

Se $K > 2$

Para $J=1,2,\dots,K-2$

Início

$$\delta_J^{(K)} = \xi_{J-1}^{(K-1)} + \xi_{K-2}^{(K-1)} \cdot \xi_J^{(K-1)}$$

Fim

$$\delta_{K-1}^{(K)} = 2 \cdot \xi_{K-2}^{(K-1)}$$

$$\delta_K^{(K)} = 1$$


```

Soma 1=  $\sum_{J=0}^K \delta_J^{(K)} \cdot \mu_{K+J-1}$ 

Soma 2=  $\sum_{J=0}^{K-1} \xi_J^{(K-1)} \cdot \mu_{K+J-1}$ 

 $\beta_K = \text{Soma1/Soma2}$ 
 $\alpha_K = \text{Soma2/Soma3}$ 
Soma3 = Soma2
 $\xi_0^{(K)} = -\beta_K \cdot \xi_0^{(K-1)} - \alpha_K \cdot \xi_0^{(K-2)}$ 

Se K > 2
  Para J= 1,2,..., K-2
    Início
       $\xi_J^{(K)} = \xi_{J-1}^{(K-1)} - \beta_K \cdot \xi_J^{(K-1)} - \alpha_K \cdot \xi_J^{(K-2)}$ 
    Fim
   $\xi_{K-1}^{(K)} = \xi_{K-2}^{(K-1)} - \beta_K \cdot \xi_{K-1}^{(K-1)}$ 
   $\xi_K^{(K)} = 1$ 
Fim

```

A fim de escapar do mal condicionamento no procedimento de Stieltjes foi proposto em Gautschi [08] expressar as requeridas integrais por quadratura numérica. Isto porque os métodos de quadratura são muito bem comportados numericamente.

Este procedimento é conhecido como procedimento discretizado de Stieltjes.

3.3. Procedimento Discretizado de Stieltjes

Consideramos inicialmente

$$(3.3.1) \quad d\alpha(t) = w(t) dt \quad \text{em } [-1,1] \text{ onde } w \text{ é uma função peso /}$$

não negativa com momentos finitos $\mu_r = \int_{-1}^1 t^r w(t) dt, r=0,1,\dots, 2n-1.$

As integrais em (3.2.1) podem então ser calculadas por uma apropriada regra de quadratura como foi sugerido por Gautschi em [08]

$$(3.3.2) \quad \int_{-1}^1 p(t) w(t) dt = \sum_{m=1}^N W_m p(t_m) w(t_m) + R_N(pw) \quad N > n$$

com nós $t_m = t_m^{(N)} \in (-1,1)$ e pesos $W_m = W_m^{(N)} > 0$ em nosso caso

so $p(t) = t^{\frac{\pi^2}{K-1}}(t)$ e depois $p(t) = \pi^{\frac{2}{K-1}}(t).$

Para cada K para calcular as duas integrais precisamos saber os valores de $\pi^{\frac{2}{K-1}}(t)$ nos pontos t_m ($m= 1,2,\dots,N$). Isto pode ser feito utilizando a relação de recorrência de três - termos.

$$\pi_{K-1}(t_m) = (t_m - \beta_{K-1}) \pi_{K-2}(t_m) - \alpha_{K-1} \pi_{K-3}(t_m) \\ m= 1,2,3,\dots,N$$

Realmente esta modificação faz com que os resultados melhorem como poderemos ver com mais detalhes no próximo capítulo onde de ilustramos com exemplos esta modificação.

Mas resta-nos perguntar que tipo de quadratura deveria ser usada.

Nós consideramos em nosso trabalho, um tipo de quadratura Gaussiana conhecida por Quadratura de Gauss - Chebyshev onde podemos aproveitar o peso envolvido, por exemplo, no caso onde $w(t) = 1 / \sqrt{(1-K^2 t^2) (1-t^2)}$ onde $t \in [-1,1]$, $0 < K < 1$.

Nos outros casos decidimos adotar a regra de quadratura

de Fejér (a regra de quadratura interpolatória associada com os zeros do polinômio de Chebyshev).

Existem várias razões para esta escolha entre as quais destacam-se:

i) A quadratura de Fejér tem quase a mesma ordem de precisão dos métodos de Newton Cotes.

ii) Ela pode ser usada quando o peso envolvido apresenta singularidades nas extremidades do intervalo de integração.

Os métodos de Newton - Cotes fechados no caso de singularidades nas extremidades apresentam falhas.

iii) Foi testado por Gautschi [07] que a regra de Fejér é geralmente melhor que a regra do ponto médio (uma fórmula de Newton Cotes aberta) novamente no caso onde existe singularidades nas extremidades do intervalo.

iv) A melhor entre as razões para esta escolha é a seguinte:

Existe uma maneira simples para calcular os nós $t_m^{(N)}$ / (do polinômio de Chebyshev) e os pesos $w_m^{(N)}$ como observado por Fejér [05] por funções trigonométricas, isto é, $t_m^{(N)}$ pode ser escrito como

$$t_m^{(N)} = \cos \theta_m^{(N)} \quad \text{onde} \quad \theta_m^{(N)} = \frac{(2m-1)\pi}{2N}$$

e

$$w_m^{(N)} = \frac{2}{N} \left(1 - 2 \sum_{K=1}^{[N/2]} \frac{\cos 2K \theta_m^{(N)}}{4K^2 - 1} \right) \quad \text{para } m=1, 2, \dots, N$$

e conseqüentemente a regra de Fejér pode ser computada mais rapidamente do que por exemplo a regra de quadratura de Gauss Legendre.

Se o intervalo básico não é $[-1, 1]$ mas $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$

nós selecionamos uma função ϕ monotônica (uma função linear / se $[a,b]$ é finito) e transformamos o intervalo $[a,b]$ em $[-1,1]$ e usamos:

$$\int_a^b p(t) w(t) dt = \sum_{m=1}^N W_m p(\phi(t_m)) w(\phi(t_m)) \cdot \phi'(t_m) + R(pw)$$

ao invés de (3.3.2); onde agora $\phi(t_m)$ são as abscissas e $W_m w(\phi(t_m)) \phi'(t_m)$ são os saltos.

Deste modo intervalos finitos e infinitos podem ser manuzeados.

Um algoritmo para este método no intervalo $[a,b]$ pode ser dado como:

Algoritmo Discretizado de Stieltjes

$$\text{Seja } \int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^N w_j f(t_j)$$

Seja $dw(t) = w(t) dt$ em $[a,b]$

Dados $w(t)$: função peso

N : ordem da quadratura

W_m : pesos

t_m : zeros

1) Para $m = 1, 2, \dots, N$

Início

$$\pi_0(t_m) = 1$$

$$\text{Soma1} = \sum_{i=1}^N W_i t_m w(t_m)$$

$$\text{Soma2} = \sum_{i=1}^N W_i w(t_m)$$

Fim

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = \text{Soma1} / \text{Soma2}$$

$$\text{Soma3} = \text{Soma2}$$

2) Para $m = 1, 2, \dots, N$

Início

$$\pi_1(t_m) = t_m - \beta_1$$

Fim

3) Para $K = 1, 2, \dots$

Início

Para $m = 1, 2, \dots, N$

Início

$$\text{Soma1} = \sum_{i=1}^N W_i t_m \pi_K^2(t_m) w(t_m)$$

```

Soma2=  $\sum_{i=1}^N w_i \pi_K^2(t_m) w(t_m)$ 
Fim
 $\beta_{K+1} = \text{Soma1}/\text{Soma2}$ 
 $\alpha_{K+1} = \text{Soma2}/\text{Soma3}$ 
Soma3= Soma2
Para m= 1,2,...,N
Início
 $\pi_{K+1}(t_m) = (t_m - \beta_{K+1}) \pi_K(t_m) - \alpha_{K+1} \pi_{K-1}(t_m)$ 
Fim
Fim

```

3.4. Método de Chebyshev

Um outro método usado para a obtenção dos coeficientes α_K , β_K é devido a Chebyshev.

Chebyshev [01] observou que os coeficientes β_K , α_K podem ser obtidos diretamente em termos das quantidades

$$(3.4.1) \quad \sigma_{K,s} = \int_a^b t^{K+s} \pi_K(t) d\alpha(t)$$

pois temos a relação de recorrência (1.1.2) e a relação (3.2.1) a qual nos fornece α_K , β_K .

$$\text{Escrevendo } \pi_{K-1}(t) = t^{K-1} + \xi_{K-2}^{(K-1)} t^{K-2} + \xi_{K-3}^{(K-1)} t^{K-3} + \dots +$$

$$\xi_0^{(K-1)}$$

temos que

$$\int_a^b t \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t) = \int_a^b t \{ t^{K-1} + \xi_{K-2}^{(K-1)} t^{K-2} + \xi_{K-3}^{(K-1)} t^{K-3} + \dots + \xi_0^{(K-1)} \} \pi_{K-1}(t) d\alpha(t)$$

que pela propriedade de ortogonalidade de $\pi_{K-1}(t)$ obtemos

$$\int_a^b t \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t) = \int_a^b t^K \pi_{K-1}(t) d\alpha(t) + \xi_{K-2}^{(K-1)} \int_a^b t^{K-1} \pi_{K-1}(t) d\alpha(t)$$

Com o uso da definição de $\sigma_{K,s}$ isto pode ser escrito na forma

$$(3.4.1) \quad \int_a^b t \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t) = \sigma_{K-1,1} + \xi_{K-2}^{(K-1)} \sigma_{K-1,0}$$

Analogamente podemos escrever

$$(3.4.2) \quad \int_a^b \pi_{K-1}^2(t) d\alpha(t) = \sigma_{K-1,0}$$

Usando as relações (3.4.1) e (3.4.2) em (3.2.1) obtemos imediatamente

$$(3.4.3) \quad \beta_K = \frac{\sigma_{K-1,1}}{\sigma_{K-1,0}} + \xi_{K-2}^{(K-1)}$$

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{K-1,0}}{\sigma_{K-2,0}}$$

Entretanto podemos notar da relação de recorrência de três - termos por comparação dos coeficientes cor-

respondentes que

$$\xi_{K-2}^{(K-1)} = \xi_{K-3}^{(K-2)} - \beta_{K-1}$$

Além disso da relação (3.4.3) sendo

$$\beta_{K-1} = \frac{\sigma_{K-2,1}}{\sigma_{K-2,0}} + \xi_{K-3}^{(K-2)}$$

Obtemos a relação

$$(3.4.4) \quad \beta_K = \frac{\sigma_{K-1,1}}{\sigma_{K-1,0}} - \frac{\sigma_{K-2,1}}{\sigma_{K-2,0}}$$

Os valores de $\sigma_{K,s}$ usados nas relações (3.4.3) e / (3.4.4) podem ser calculados recursivamente dos momentos μ_s , pois

$$\int_a^b t^{K+s} \pi_K(t) d\alpha(t) = \int_a^b t^{K+s} (t - \beta_K) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K t^{K+s} \pi_{K-2}(t) d\alpha(t)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{K+s} \pi_K(t) d\alpha(t) = & \int_a^b t^{K+s+1} \pi_{K-1}(t) d\alpha(t) - \beta_K \int_a^b t^{K+s} \pi_{K-1}(t) d\alpha(t) \\ & - \alpha_K \int_a^b t^{K+s} \pi_{K-2}(t) d\alpha(t) \end{aligned}$$

Que fornece

$$\sigma_{K,s} = \sigma_{K-1,s+2} - \beta_K \sigma_{K-1,s+1} - \alpha_K \sigma_{K-2,s+2}$$

$$\sigma_{-1,0} = 0$$

$$\sigma_{0,s} = \mu_s$$

Um algoritmo para este método pode ser dado com a seguinte:

Algoritmo de Chebyshev

Dados N: índice do último momento

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$: momentos

1) Para $s = 0, 1, 2, \dots, N$

Início

$$\sigma_{-1,s} = 0$$

$$\sigma_{0,s} = \mu_s$$

Fim

$$2) \quad \beta_1 = \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}} ; \alpha_1 = 0$$

3) Para $K = 1, 2, \dots, N/2$

Início

Para $s = 0, 1, \dots, N-2K$

Início

$$\sigma_{K,s} = \sigma_{K-1,s+2} - \beta_K \sigma_{K-1,s+1} - \alpha_K \sigma_{K-2,s+2}$$

Fim

$$\beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}}{\sigma_{K,0}} - \frac{\sigma_{K-1,1}}{\sigma_{K-1,0}}$$

$$\alpha_{K+1} = \frac{\sigma_{K,0}}{\sigma_{K-1,0}}$$

Fim

Logo, dados os primeiros $2n$ momentos $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1}$ isto produzirá os primeiros n coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Sendo baseado nos momentos μ_s , o algoritmo infelizmente sofre dos mesmos efeitos de mal condicionamento como no método

de Stieltjes quando implementado em termos dos momentos. Em muitos casos é possível entretanto estabilizar o algoritmo introduzindo momentos modificados no lugar de momentos ordinários.

3.5- Algoritmo modificado de Chebyshev:

Se $\{p_K(t)\}$ denota um sistema de polinômios (monicos) / satisfazendo a relação de recorrência

$$p_K(t) = (t - b_K) p_{K-1}(t) - a_K p_{K-2}(t), \quad K = 1, 2, \dots$$

$$p_{-1}(t) = 0 \quad p_0(t) = 1$$

onde a_K e b_K são assumidos conhecidos, chamamos então

$$v_r = \int_{\mathbb{R}} p_r(t) d\alpha(t), \quad r = 0, 1, \dots$$

os momentos modificados da medida $d\alpha$ relativo ao sistema polinomial $\{p_r\}$. Se $a_K = b_K = 0$ para todo K , então $p_K(t) = t^K$ e os momentos modificados são reduzidos a momentos ordinários (1.1.1).

O algoritmo a ser apresentado é devido a Wheeler [22] e generaliza diretamente o algoritmo original de Chebyshev. Desde que parte dos momentos modificados, nós o chamamos de algoritmo modificado de Chebyshev.

O algoritmo basicamente, obtém os desejados coeficientes de recorrência $\alpha_K(d\alpha)$, $\beta_K(d\alpha)$ em termos das quantidades

$$\sigma_{K,1}^{(1)} = \int_R p_K(t) p_{K+1}(t) d\alpha(t), \quad K \leq 1$$

Um algoritmo então pode ser dado como a seguir:

Algoritmo Modificado de Chebyshev

Dado N: Índice do último momento

1) Para $l = 0, 1, 2, \dots, N$

Início

$$\sigma_{-1,1}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{0,1}^{(1)} = \int_a^b p_1(t) d\alpha(t) = v_1$$

Fim

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{0,1}^{(1)}}{\sigma_{0,0}^{(1)}} + b_1; \quad \alpha_1 = 0$$

2) Para $K = 1, 2, \dots, N/2$

Início

Para $l = 0, 1, 2, \dots, N-2K$

Início

$$\sigma_{K,1}^{(1)} = \sigma_{K-1,1+2}^{(1)} + (b_{K+1} - \beta_K) \sigma_{K-1,1+1}^{(1)} - \alpha_K \sigma_{K-2,1+2}^{(1)} + \alpha_{K+1} \sigma_{K-1,1}^{(1)}$$

Fim

$$\beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}^{(1)}}{\sigma_{K,0}^{(1)}} - \frac{\sigma_{K-1,1}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}} + b_{K+1}$$

$$\alpha_{K+1} = \frac{\sigma_{K,0}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}}$$

Fim

As fórmulas deste algoritmo podem ser verificadas da seguinte maneira:

Escrevendo

$$p_K(t) = t^K + p_{K-1}^{(K)} t^{K-1} + \dots + p_1^{(K)} t + p_0^{(K)}$$

obtemos por uso da propriedade da ortogonalidade de $\pi_K(t)$

$$\sigma_{K,0}^{(1)} = \int_a^b p_K(t) \pi_K(t) d\alpha(t) = \int_a^b t^K \pi_K(t) d\alpha(t)$$

que pode ser escrito como

$$(3.5.1) \quad \sigma_{K,0}^{(1)} = \sigma_{K,0}$$

onde $\sigma_{K,1}$ é definida no método de Chebyshev ordinário.

Analogamente obtemos

$$(3.5.2) \quad \sigma_{K,1}^{(1)} = \sigma_{K,1} + p_K^{(K+1)} \sigma_{K,0}$$

Da relação (3.5.1) é fácil ver que

$$\alpha_{K+1} = \frac{\sigma_{K,0}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}} = \frac{\sigma_{K,0}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}}$$

Entretanto de (3.5.1) e (3.5.2) vimos que

$$\beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}}{\sigma_{K,0}} - \frac{\sigma_{K-1,1}}{\sigma_{K-1,0}} \quad \text{pode ser escrito como:}$$

$$\beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}^{(1)}}{\sigma_{K,0}^{(1)}} - \frac{\sigma_{K-1,1}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}} + \{p_{K-1}^{(K)} - p_K^{(K+1)}\}$$

Comparando o coeficiente de t^K na relação

$$p_{K+1}(t) = (t - b_{K+1}) p_K(t) - a_{K+1} p_{K-1}(t)$$

obtemos $\{p_{K-1}^{(K)} - p_K^{(K+1)}\} = b_{K+1}$

A fórmula "recursiva" para calcular $\sigma_{K,1}^{(1)}$ pode ser demonstrada como a seguir.

$$\text{Temos } \pi_K(t) = (t - \beta_K) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K \pi_{K-2}(t)$$

Multiplicando esta relação por $p_{K+1}(t)$ e fazendo uso / da relação

$$p_{K+1+1}(t) = (t - b_{K+1+1}) p_{K+1}(t) - a_{K+1+1} p_{K+1-1}(t)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} p_{K+1}(t) \pi_K(t) &= p_{K-1+1+2}(t) \pi_{K-1}(t) + b_{K+1+1} p_{K-1+1+1}(t) \pi_{K-1+1}(t) \\ &+ a_{K+1+1} p_{K-1+1}(t) \pi_{K-1}(t) - \beta_K p_{K-1+1+1}(t) \pi_{K-1}(t) - \alpha_K p_{K-2+1+2}(t) \pi_{K-2}(t) \end{aligned}$$

A integração desta equação em relação a $d\alpha(t)$ fornece imediatamente a formula recursiva desejada.

Isto é:

$$(3.5.3) \quad \sigma_{K,1}^{(1)} = \sigma_{K-1,1+2}^{(1)} + (b_{K+1+1} - \beta_K) \sigma_{K-1,1+1}^{(1)} - \alpha_K \sigma_{K-2,1+2}^{(1)} + a_{K+1+1} \sigma_{K-1,1}^{(1)}$$

A verificação do algoritmo desta forma se completa.

O funcionamento deste algoritmo depende do conhecimento dos valores exatos dos momentos modificados v_r , porém na prática os v_r são calculados através de algum método numérico.

Com esse objetivo é que para calcularmos os momentos modificados $v_1 = \int_a^b p_1(t) d\alpha(t)$ com cada escolha de a_1 e b_1 tentamos

por exemplo representá-los em termos dos momentos ordinários como / no método de Stieltjes pois podemos escrever:

$$p_1(t) = p_{1-1}^{(1)} t^{1-1} + p_{1-1}^{(1)} t^{1-1} + \dots + p_1^{(1)} t + p_0^{(1)}$$

e assim obtermos por integração desta equação em relação a $d\alpha(t)$

$$(3.5.4) \quad v_1 = p_{1-1}^{(1)} \mu_{1-1} + p_{1-1}^{(1)} \mu_{1-1} + \dots + p_1^{(1)} \mu_1 + p_0^{(1)} \mu_0$$

Mas, como em Stieltjes, o método apresentou problemas de erros de arredondamento. É possível entretanto como sugerido em / Gaustchi [10] aplicar a mesma discretização que foi usada no procedimento de Stieltjes para os momentos modificados e então calcular os coeficientes α_K , β_K pelo algoritmo modificado de Chebyshev /

o qual é conhecido como algoritmo discretizado de Chebyshev modificado. Realmente neste caso o método mostrou-se consideravelmente melhor.

Devemos atentar também para a escolha dos coeficientes a_1 , b_1 pois dependendo desta, podemos obter melhores resultados. Por exemplo se nossa função peso é $W(t) = 1/\sqrt{(1-K^2t^2)(1-t^2)}$ em $[-1, 1]$ a melhor escolha pode ser a de α_K , β_K de Chebyshev, isto é $\alpha_K = 1/4$, $\beta_K = 0$.

Nós achamos que o melhoramento pode ser pelo fato de que os coeficientes α_K , β_K devem ser calculados aproximadamente igual a $1/4$ e 0 pois eles convergem respectivamente para tais valores.

Para testar esta idéia nós também usamos a_1 , b_1 como $a_{1+1} = \frac{1^2}{4 \cdot 1^2 - 1}$, $b_{1+1} = 0$ (os respectivos coeficientes do polinômio de Legendre) que forneceram resultados quase idênticos aos da escolha anterior.

Para obter uma fórmula geral para a escolha de a_1 , b_1 , nós usamos os seguintes fatos:

Quando $da(t) = W(t) dt$, no intervalo $[a, b]$ os limites de α_K , β_K dependem somente do intervalo $[a, b]$, isto é somente dos valores a e b e podem ser dados como a seguir.

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} \alpha_K &\rightarrow \frac{(b-a)^2}{16} \\ \beta_K &\rightarrow \frac{(b+a)}{2} \end{aligned}$$

Podemos ver que quando

$$[a,b] = [-1,1]$$

$$\alpha_K \rightarrow 1/4, \quad \beta_K \rightarrow 0$$

Por este motivo nós escolhemos

$$a_K = \frac{(b-a)^2}{16} \quad b_K = \frac{b+a}{2}$$

e notamos que o método realmente apresentou melhores resultados.

Como uma tentativa de ainda melhorar o resultado usamos os valores de α_K , β_K obtidos na primeira vez como os valores de a_K e b_K e repetimos o processo.

Sempre com o objetivo de obter melhores resultados, foi desenvolvido um "novo" método baseado no método modificado de Chebyshev como dissemos na introdução deste capítulo e o qual discutiremos a seguir.

3.6 - Um método "novo" baseado no método modificado de Chebyshev.

Sejam α_i , β_i conhecidos para $i = 1, 2, \dots, K$

Definimos os polinômios $p_r(t)$, $r = 0, 1, 2, \dots, 2K+1$ pela relação de recorrência

$$(3.6.1) \quad p_r(t) = (t - b_r) p_{r-1}(t) - a_r p_{r-2}(t), \quad r = 1, 2, \dots, 2K+1$$

onde $p_{-1}(t) = 0$, $p_0(t) = 1$ e $a_r = \alpha_r$, $b_r = \beta_r$, $r = 1, 2, \dots, K$.

Então os momentos modificados $v_r = \int_a^b p_r(t) d\alpha(t)$ são /

iguais a zero para $r = 1, 2, \dots, 2K-1$.

Desde que $p_r(t) = \pi_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, K$ é fácil verificar que $v_r = 0$, $r = 1, \dots, K$. O fato de $v_r = 0$, $r = K+1, \dots, 2K-1$ segue da relação três - termos (3.6.1) usando

$$\begin{cases} \int_a^b t^s p_r(t) d\alpha(t) = 0 & s = 0, 1, \dots, r-1 \\ & r = 1, 2, \dots, K \end{cases}$$

Os valores dos momentos modificados v_r para $r = 2K$ e $r = 2K+1$ podem ser calculados, usando algum método de quadratura. Depois usando v_{2K} e v_{2K+1} e a relação que vem de (3.5.3) segue que

$$\begin{aligned} (3.6.2) \quad \sigma_{n,i}^{(1)} &= \sigma_{n-1,i+2}^{(1)} + (b_{n+i+1} - \beta_n) \sigma_{n-1,i+1}^{(1)} - \alpha_n \sigma_{n-2,i+2}^{(1)} \\ &\quad + a_{n+i+1} \sigma_{n-1,i}^{(1)} \quad i = 2K - 2n, 2K - 2n + 1 \\ &\quad n = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

Notamos que a maioria dos elementos que aparecem nesta relação são nulos. Com esta observação conseguimos reduzi-lá para:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,0}^{(1)} &= \alpha_{n+1} \sigma_{n-1,0}^{(1)} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, K-1 \\ \sigma_{K,0}^{(1)} &= v_{2K} + a_{K+1} \sigma_{K-1,0}^{(1)} \\ (3.6.3) \quad \sigma_{n,i}^{(1)} &= \sigma_{n-1,i+2}^{(1)} + (b_{n+i+1} - \beta_n) v_{2K}, \quad i = 2K - 2n + 1 \\ &\text{para } n = 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Calculando $\sigma_{K,0}^{(1)}$ e $\sigma_{K,1}^{(1)}$ podemos calcular α_{K+1} , β_{K+1} por

$$\alpha_{K+1} = \frac{\sigma_{K,0}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}}$$

$$(3.6.4) \quad \beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}^{(1)}}{\sigma_{K,0}^{(1)}} - \frac{\sigma_{K-1,1}^{(1)}}{\sigma_{K-1,0}^{(1)}} + b_{K+1}$$

Entretanto

$$\sigma_{K-1,1}^{(1)} = \int_a^b p_K(t) \pi_{K-1}(t) d\alpha(t)$$

Mas, $p_K(t) = \pi_K(t)$. Então pela propriedade de ortogonalidade de $\sigma_{K-1,1}^{(1)}$ também é igual o zero. Portanto, a relação (3.6.4) pode / ser simplificada e escrita como

$$\beta_{K+1} = \frac{\sigma_{K,1}^{(1)}}{\sigma_{K,0}^{(1)}} + b_{K+1}$$

Podemos então escrever o seguinte algoritmo:

Algoritmo do Método "novo" de Chebyshev modificado

$$\text{Seja } \int_a^b f(t) dt \approx \sum_{j=1}^{NQ} \lambda_j f(t_j)$$

Seja $d\alpha(t) = w(t) = dt$ em $[a,b]$

Dados NQ : ordem da quadratura

ν_0, ν_1 : momentos ordinários

λ_j : pesos

t_j : zéros

```

1)  $\sigma_{0,0} = \mu_0$ 
    $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \mu_1/\mu_0$ 

2) Para J= 1,2,...,NQ
   Inicio
    $P_0(t_J) = 1$ 
    $P_1(t_J) = t_J - \beta_1$ 
   Fim

3) Para K= 1,2,...
   Inicio
   Para r= K+1,...,2K+1
   Inicio
   Para J= 1,2,...,NQ
   Inicio
    $P_r(t_J) = (t_J - \beta_r) P_{r-1}(t_J) - \alpha_r P_{r-2}(t_J)$ 
   Fim
   Fim

    $v_{2K} = \sum_{J=1}^{NQ} \lambda_J w(t_J) P_{2K}(t_J)$ 
    $v_{2K+1} = \sum_{J=1}^{NQ} \lambda_J w(t_J) P_{2K+1}(t_J)$ 

    $\sigma_{0,1} = v_{2K+1}$ 

   Para n= 1,2,...,K
   Inicio
    $\sigma_{n,1} = \sigma_{n-1,1} + (b_{2K-(n-2)} - \beta_n) v_{2K}$ 
   Fim

    $\sigma_{K,0} = v_{2K} + \alpha_{K+1} \cdot \sigma_{K-1,0}$ 
    $\alpha_{K+1} = \sigma_{K,0} / \sigma_{K-1,0}$ 
    $\beta_{K+1} = b_{K+1} + \sigma_{K,1} / \sigma_{K,0}$ 

   Para J= 1,2,...,NQ
   Inicio
    $P_{K+1}(t_J) = (t_J - \beta_{K+1}) P_K(t_J) - \alpha_{K+1} P_{K-1}(t_J)$ 
   Fim
   Fim

```

No método modificado de Chebyshev uma das exigências, como dissemos anteriormente, é o conhecimento dos momentos modificados. Sem conhecer estes momentos com precisão razoável não podemos esperar melhores resultados.

Entretanto, com o conhecimento dos momentos modificados a parte do método que apresentaria erros de arredondamento é a referente à relação (3.6.2).

Em nosso método conseguimos reduzir consideravelmente este problema (veja a equação (3.6.3)). Notamos ainda que com a escolha

de $b_{2K-(n-2)} = \beta_n, n = 1, 2, \dots, K$, o problema de erro de arredondamento em (3.6.3) é completamente eliminado.

Com a eliminação completa de arredondamento o problema / torna-se o cálculo de duas integrais v_{2K} e v_{2K+1} .

O cálculo destas integrais torna-se quase igual ao cálculo das integrais no método de Stieltjes, com a escolha $a_r = 0$, para $r = K+1, \dots, n$.

Entretanto este método fornece um processo "recursivo" para melhorar os valores de α_{K+1} e β_{K+1} . Isto pode ser feito repetindo o processo para cada K com a mudança

$$a_{K+1} = \alpha_{K+1} \quad \text{e} \quad b_{K+1} = \beta_{K+1}$$

A maior vantagem deste método pode ser observada quando a integral em questão tem singularidades nas extremidades do intervalo $[a, b]$.

No caso, por exemplo, em que há singularidade no ponto "a" podemos escolher

$$b_r = a, \quad a_r = 0, \quad r = K+1, \dots, n$$

como uma tentativa de cancelar esta singularidade.

IV- ANÁLISE DOS MÉTODOS

4.1- Introdução:

Neste capítulo ilustraremos com alguns exemplos os pontos fortes e fracos dos métodos que foram apresentados no capítulo anterior. Os exemplos usados neste capítulo foram escolhidos para ilustrar a maioria das situações que podem apresentar dificuldades. Poderia ser interessante incluir também alguns exemplos de casos onde a distribuição é discreta. Não nos referiremos, no entanto, a este caso.

Em cada exemplo considerado será analisado o erro cometido quando calculamos os primeiros dez valores dos coeficientes α_K , β_K dos métodos estudados.

Este erro será calculado fazendo a diferença entre os valores exatos dos coeficientes quando conhecidos (ou os valores obtidos do TURBO-37) com os valores aproximados obtidos do Turbo "Comum".

Os valores exatos e os erros serão colocados em tabelas consistindo de duas colunas sendo que a primeira coluna fornece os erros de α_n e a outra os de β_n . As colunas serão encabeçadas por abreviaturas.

Estas abreviaturas são dadas como seguir:

VEA- Valor exato de alfa

VEB- Valor exato de beta

PS- Procedimento de Stieltjes

Este algoritmo requer os valores dos momentos ordinários
PDS- Procedimento discretizado de Stieltjes.

Neste procedimento os coeficientes são calculados /
usando uma regra conveniente de quadratura.

MC- Método de Chebyshev. Este método também requer o co-
nhecimento dos momentos ordinários.

AMC1: Algoritmo modificado de Chebyshev. Este algoritmo
usa os momentos modificados que são calculados /
usando os momentos ordinários.

AMC2: Algoritmo modificado de Chebyshev.

Neste método os momentos modificados são calcula-
dos através de uma fórmula de quadratura.

NM: Novo método - também usa quadratura para calcular os
momentos modificados.

4.2- Polinômios de Legendre em $[-1,1]$

No estudo de polinômios ortogonais o primeiro conjunto /
de polinômios ortogonais que alguém pode encontrar são os chamados
Polinômios de Legendre. Em virtude disto é natural que esta seja a
nossa primeira escolha.

A distribuição destes polinômios pode ser escrita como
 $d\alpha(t) = dt$ em um intervalo $[a,b]$. O intervalo mais comumente encon-
trado é o intervalo $[-1,1]$.

Os momentos ordinários associados a este intervalo são /
facilmente obtidos. Por exemplo, podemos escrever

$$(4.2.1) \quad \mu_{2r+1} = 0 \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Os coeficientes α_r , β_r da relação de recorrência de três termos satisfazem

$$\alpha_{r+1} = \frac{r^2}{4r^2 - 1} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta_{r+1} = 0$$

os quais nos fornecem os valores exatos destes coeficientes. Isto é muito útil já que temos assim uma forma de comparar estes valores / com os valores aproximados obtidos pelos vários métodos estudados. Os valores de α_n , β_n , para $n = 1, 2, \dots, 10$, são dados na tabela / (4.1) e os erros cometidos nos métodos usados são dados na tabela / (4.2).

TABELA 4.1.
VALORES EXATOS DE LEGENFRE EM $[-1, 1]$

n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	0.00000 (+00)
2	3.33333 (-01)	0.00000 (+00)
3	2.66667 (-01)	0.00000 (+00)
4	2.57143 (-01)	0.00000 (+00)
5	2.53968 (-01)	0.00000 (+00)
6	2.52525 (-01)	0.00000 (+00)
7	2.51748 (-01)	0.00000 (+00)
8	2.51128 (-01)	0.00000 (+00)
9	2.50980 (-01)	0.00000 (+00)
10	2.50774 (-01)	0.00000 (+00)

$$(4.2.1) \quad \mu_{2r+1} = 0 \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Os coeficientes α_r , β_r da relação de recorrência de três termos satisfazem

$$\alpha_{r+1} = \frac{r^2}{4r^2 - 1} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta_{r+1} = 0$$

os quais nos fornecem os valores exatos destes coeficientes. Isto é muito útil já que temos assim uma forma de comparar estes valores / com os valores aproximados obtidos pelos vários métodos estudados. Os valores de α_n , β_n , para $n = 1, 2, \dots, 10$, são dados na tabela / (4.1) e os erros cometidos nos métodos usados são dados na tabela / (4.2).

TABELA 4.1.
VALORES EXATOS DE LEGENFRE EM $[-1, 1]$

n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	0.00000 (+00)
2	3.33333 (-01)	0.00000 (+00)
3	2.66667 (-01)	0.00000 (+00)
4	2.57143 (-01)	0.00000 (+00)
5	2.53968 (-01)	0.00000 (+00)
6	2.52525 (-01)	0.00000 (+00)
7	2.51748 (-01)	0.00000 (+00)
8	2.51128 (-01)	0.00000 (+00)
9	2.50980 (-01)	0.00000 (+00)
10	2.50774 (-01)	0.00000 (+00)

TABELA 4.2

ERROS COMETIDOS COM LEGENDRE EM $[-1,1]$

n	PS	PDS	MC	AMC1	AMC2	NM
1	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
2	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
3	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
4	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
5	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
6	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
7	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
8	3(-10) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	1(-10) 0(+00)	2(-09) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 0(+00)
9	2(-09) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	6(-10) 0(+00)	2(-09) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 1(-10)
10	2(-08) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	3(-09) 0(+00)	7(-09) 0(+00)	0(+00) 0(+00)	0(+00) 4(-10)

Para usar os métodos PS, MC e AMC1 precisamos utilizar os valores dos momentos ordinários dados pela relação (4.2.1). Entretanto, como esperávamos podemos ver da tabela (4.2) que estes métodos forneceram piores resultados relativamente aos outros.

Nos outros métodos utilizamos a quadratura de Fejér. Os métodos PDS e AMC2 forneceram equivalentemente melhores resultados. No método AMC2 os valores de a_i e b_i foram escolhidos como $a_i = 1/4$, $b_i = 0$. Valores de (a_i, b_i) como $(a_i = 1, b_i = 0)$ ou $(a_i = 0, b_i = 0)$ forneceram piores resultados.

O novo método com escolha de $a_i = b_i = 0$, $i = k+1, \dots, 2K+1$ produziu também bons resultados. Como citado anteriormente com esta escolha o método tornou-se quase igual ao procedimento de Stieljes.

4.3. Polinômios de Legendre em $[0,1]$

Para verificar o comportamento destes métodos com mudança de intervalo nós escolhemos de novo o caso de Legendre com $[a,b] = [0,1]$. Os valores exatos de α_n , β_n , $n = 1, 2, \dots, 10$ são dados pela tabela 4.3. A tabela 4.4 fornece os resultados dos erros cometidos.

TABELA 4.3

VALORES EXATOS DE LEGENDRE EM $[0,1]$		
n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	5.00000 (-01)
2	8.33333 (-02)	5.00000 (-01)
3	6.66667 (-02)	5.00000 (-01)
4	6.42857 (-02)	5.00000 (-01)
5	6.34920 (-02)	5.00000 (-01)
6	6.31313 (-02)	5.00000 (-01)
7	6.29371 (-02)	5.00000 (-01)
8	6.28205 (-02)	5.00000 (-01)
9	6.27450 (-02)	5.00000 (-01)
10	6.26935 (-02)	5.00000 (-01)

TABELA 4.4

ERROS COMETIDOS COM LEGENDRE $[0,1]$					
R	PS	PDS	MC	AMC2	NM
1	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
2	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
3	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
4	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 6 (-10)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
5	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	1 (-09) 4 (-08)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
6	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	5 (-08) 7 (-07)	0 (+00) 0 (+00)	1 (-10) 0 (+00)
7	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	5 (-07) 1 (-05)	0 (+00) 0 (+00)	1 (-10) 0 (+00)
8	3 (-10) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	2 (-05) 8 (-04)	0 (+00) 0 (+00)	1 (-10) 0 (+00)
9	2 (-09) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	2 (-03) 5 (-02)	0 (+00) 0 (+00)	2 (-10) 0 (+00)
10	2 (-08) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	7 (-02) 2 (+01)	0 (+00) 0 (+00)	3 (-10) 2 (-09)

Como podemos ver os métodos PDS, AMC2 e NM forneceram melhores resultados.

No método AMC2, foi escolhido $a_i = 0.0625$ $b_i = 0.5$ $i = 1, 2, \dots$

Esses valores foram assim escolhidos pois como já havíamos dito no capítulo anterior pela relação (3.5.5) $\alpha_n \rightarrow 0.0625$ e $\beta_n \rightarrow 0.5$.

Foi observado que outras escolhas de a_i e b_i bem longe destes valores produziram piores resultados.

Podemos também ver, pelas tabelas 4.2 e 4.4, que o comportamento do MC em $[0,1]$ é pior que em $[-1,1]$. A razão para isto pode ser pelo fato que no intervalo $[-1,1]$ os momentos ímpares que são zero podem resultar em um melhoramento.

4.4- Polinômios de Christoffel

Este caso foi encontrado em Gautschi [17] o qual se baseou em um exemplo de Christoffel [02]. Temos aqui

$$d\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-K^2 t^2)(1-t^2)}} \text{ em } [-1,1] \text{ com } 0 < K \leq 1$$

Para este caso Gautschi mesmo sugeriu o uso da Quadratura de Chebyshev para aproveitar parte desta distribuição. Na realidade com esta quadratura eliminamos as singularidades produzida por $\sqrt{1-t^2}$.

Nós testamos este exemplo com os métodos PDS, MC, AMC2 e NM com dois valores de K, respectivamente, 0.5 e 0.99. A escolha de K= 0.99 é para verificar o comportamento destes métodos com duas singularidades perto das extremidades (mas para fora). A influência destas singularidades permanecem ainda com a escolha da quadratura de Chebyshev.

Os resultados dos erros cometidos com K= 0.5 são encontrados na tabela 4.6 e os com K= 0.99 na tabela 4.8. Os respectivos valores exatos de α_n e β_n para K= 0.5 e 0.99 são dados nas tabelas / 4.5 e 4.7, respectivamente. Estes valores foram calculados usando o TURBO-87 com um dos melhores métodos de nossa análise. Com exceção do MC, os outros forneceram excelentes resultados. Entretanto, em geral, para K= 0.99 os resultados mostraram a influência das singularidades de $1/\sqrt{1-(0.99)^2 t^2}$.

TABELA 4.5

VALORES EXATOS DE $W(t) = 1/\sqrt{(1-K^2 t^2)} (1-t^2)^{1/2}$ em $[-1,1]$ com K= 0.5		
n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	0.00000 (+00)
2	5.17961 (-01)	0.00000 (+00)
3	2.41175 (-01)	0.00000 (+00)
4	2.49844 (-01)	0.00000 (+00)
5	2.49994 (-01)	0.00000 (+00)
6	2.50000 (-01)	0.00000 (+00)
7	2.50000 (-01)	0.00000 (+00)
8	2.50000 (-01)	0.00000 (+00)
9	2.50000 (-01)	0.00000 (+00)
10	2.50000 (-01)	0.00000 (+00)

TABELA 4.6

ERROS COMETIDOS COM $W(t) = 1 / \sqrt{(1-K^2 t^2) (1-t^2)}$ em $[-1,1]$ com $K= 0.5$

n	PDS	MC	AMC2	NM
1	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
2	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
3	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
4	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
5	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
6	0 (+00) 0 (+00)	1 (-10) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
7	0 (+00) 0 (+00)	6 (-10) 1 (-10)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
8	0 (+00) 0 (+00)	9 (-10) 1 (-09)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 2 (-10)
9	0 (+00) 0 (+00)	3 (-08) 1 (-08)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 5 (-10)
10	0 (+00) 0 (+00)	2 (-07) 4 (-08)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 2 (-09)

TABELA 4.7

VALORES EXATOS DE $W(t) = 1 / \sqrt{(1-K^2 t^2) (1-t^2)}$ em $[-1,1]$ $K= 0.99$

n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	0.00000 (+00)
2	7.07679 (-01)	0.00000 (+00)
3	1.58603 (-01)	0.00000 (+00)
4	2.36410 (-01)	0.00000 (+00)
5	2.45536 (-01)	0.00000 (+00)
6	2.48081 (-01)	0.00000 (+00)
7	2.49052 (-01)	0.00000 (+00)
8	2.49490 (-01)	0.00000 (+00)
9	2.49710 (-01)	0.00000 (+00)
10	2.49827 (-01)	0.00000 (+00)

TABELA 4.8

ERROS COMETIDOS COM $w(t) = 1 / \sqrt{(1-K^2 t^2)} (1-t^2)$ em $[-1,1]$ com $K = 0.99$

n	PDS	MC	AMC2	NM
1	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
2	4 (-08) 0 (+00)	4 (-08) 0 (+00)	4 (-08) 0 (+00)	4 (-08) 0 (+00)
3	1 (-08) 0 (+00)	1 (-08) 0 (+00)	1 (-08) 0 (+00)	1 (-08) 0 (+00)
4	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)
5	6 (-09) 0 (+00)	6 (-09) 0 (+00)	6 (-09) 0 (+00)	6 (-08) 0 (+00)
6	9 (-08) 0 (+00)	8 (-09) 0 (+00)	9 (-08) 0 (+00)	9 (-08) 0 (+00)
7	1 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	1 (-08) 0 (+00)	1 (-08) 0 (+00)
8	2 (-08) 0 (+00)	6 (-09) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)
9	2 (-08) 0 (+00)	6 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)
10	3 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	3 (-08) 0 (+00)	3 (-08) 0 (+00)

4.5- Distribuição com singularidades logarítmicas

Escolhemos neste exemplo $w(t) = \ln(1/t)$ em $[0,1]$. Para este caso nós podemos calcular os momentos ordinários como:

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \ln(1/t) dt = - \int_0^1 t^n \ln(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Usando integração por partes obtemos

$$\mu_n = - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{1}{t} dt$$

que fornece $\mu_n = 1 / (n+1)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Como conhecemos os valores exatos dos momentos ordinários, usamos os métodos PS e MC. Os valores exatos dos coeficientes alfa e beta são dados na tabela 4.9. Mas, devido a herança natural dos problemas de erros de arredondamento destes métodos, os resultados não foram bons.

Com o uso dos métodos PDS e AMC2 os resultados mostraram-se melhores que PS e MC como pode ser visto na tabela 4.10. No método AMC2, a_i e b_i foram escolhidos como $a_i = 0.0625$ e $b_i = 0.5$. Outras escolhas forneceram piores resultados.

Com o novo método (NM) conseguimos obter o melhor resultado para este caso. Nós conseguimos chegar a estes resultados com a escolha $a_i = b_i = 0$

Podemos ver que com isto estamos introduzindo um fator t^m que cancela a singularidade de $\ln(1/t)$ no ponto 0.

TABELA 4.9

VALORES EXATOS DE $W(t) = \ln(1/t)$ em $(0,1]$

n	VEA	VEB
1	0.00000 (+00)	2.50000 (-01)
2	4.86111 (-02)	4.64286 (-01)
3	5.86848 (-02)	4.85482 (-01)
4	6.07286 (-02)	4.92103 (-01)
5	6.14820 (-02)	4.95028 (-01)
6	6.18408 (-02)	4.96580 (-01)
7	6.20391 (-02)	4.97501 (-01)
8	6.21599 (-02)	4.98094 (-01)
9	6.22390 (-02)	4.98498 (-01)
10	6.22940 (-02)	4.98875 (-01)

TABELA 4.10

ERROS COMETIDOS COM $W(t) = 1/t$ em $(0,1]$									
n	PS		PDS		MC		AMC2		NM
1	0(+00)	0(+00)	0(+00)	6(-06)	0(+00)	0(+00)	0(+00)	6(-06)	0(+00) 0(+00)
2	0(+00)	0(+00)	3(-07)	2(-06)	0(+00)	0(+00)	3(-07)	2(-06)	0(+00) 0(+00)
3	0(+00)	0(+00)	5(-07)	2(-06)	0(+00)	0(+00)	5(-07)	2(-06)	0(+00) 1(-09)
4	0(+00)	0(+00)	5(-07)	2(-06)	0(+00)	0(+00)	5(-07)	2(-06)	1(-09) 1(-08)
5	2(-10)	9(-09)	5(-07)	2(-06)	0(+00)	2(-09)	5(-07)	2(-06)	5(-09) 3(-08)
6	2(-08)	1(-07)	6(-07)	3(-06)	7(-10)	1(-07)	6(-07)	2(-06)	1(-08) 9(-08)
7	3(-07)	1(-05)	7(-07)	3(-06)	2(-07)	7(-06)	7(-07)	3(-06)	3(-08) 2(-07)
8	1(-05)	2(-04)	7(-07)	3(-06)	9(-06)	2(-04)	7(-07)	3(-06)	7(-08) 4(-07)
9	2(-04)	4(-03)	8(-07)	4(-06)	3(-04)	6(-03)	8(-07)	4(-06)	1(-07) 9(-07)
10	5(-03)	5(-02)	3(-07)	9(-05)	9(-03)	2(-01)	3(-07)	9(-05)	5(-07) 5(-06)

4.6- Polinômio de Legendre em $[-b, -1/b] \cup [1/b, b]$ $b > 1$

Consideramos este caso para verificar o comportamento dos métodos para distribuições definidas sobre a união de intervalos. Neste caso os valores de α_n , β_n não tem limites como os exemplos anteriores. Foi mostrado em Van Assche [21] que no caso em que os intervalos são $[-b, -a]$ e $[a, b]$ então os limites de α_{2n} e α_{2n+1} são $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$ e $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, mas não sempre na mesma ordem.

Os momentos ordinários para este caso podem ser dados por:

$$\mu_{2n} = \frac{1}{(2n+1)(b^2-1)} \frac{b^{4n+2} - 1}{b^{2n}}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_{2n+1} = 0$$

Testamos os métodos PS, MC e AMC1 com este exemplo com $b = 1.5$. Os resultados são apresentados na tabela 4.12. Os valores exatos são dados na tabela 4.11.

TABELA 4.11

VALORES EXATOS DE LEGENDRES EM $[-b, -1/b] \cup [1/b, b]$

n	V.E.A	V.EB
1	0.00000 (+00)	0.00000 (+00)
2	1.23148 (+00)	0.00000 (+00)
3	2.22779 (-01)	0.00000 (+00)
4	1.14656 (+00)	0.00000 (+00)
5	1.88344 (-01)	0.00000 (+00)
6	1.16281 (+00)	0.00000 (+00)
7	1.79918 (-01)	0.00000 (+00)
8	1.16860 (+00)	0.00000 (+00)
9	1.77004 (-01)	0.00000 (+00)
10	1.17080 (+00)	0.00000 (+00)

TABELA 4.12

ERROS COMETIDOS COM LEGENDRE EM $[-b, -1/b] \cup [1/b, b]$

n	PS	MC	AMC1
1	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
2	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
3	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
4	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
5	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)	0 (+00) 0 (+00)
6	7 (-10) 0 (+00)	7 (-10) 0 (+00)	7 (-10) 0 (+00)
7	2 (-09) 0 (+00)	2 (-09) 0 (+00)	2 (-09) 0 (+00)
8	1 (-08) 0 (+00)	10 (-09) 0 (+00)	10 (-09) 0 (+00)
9	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)	2 (-08) 0 (+00)
10	10 (-07) 0 (+00)	8 (-07) 0 (+00)	8 (-07) 0 (+00)

Como podemos ver os resultados fornecidos são muito bons.

Conclusão:

Como podemos observar os dois procedimentos básicos para se determinar os coeficientes da relação de recorrência de três-
termos (Stieltjes e Chebyshev) necessitam de substancial trabalho de
implementação a fim de torná-los eficientes. Embora isso possa pare-
cer um fraco dos métodos é o que contribui para sua beleza pois é
necessário habilidade e imaginação para obtenção de melhores resulta-
dos.

BIBLIOGRAFIA

- [01] P.L. CHEBYSHEV: Sur l' Interpolation Par la Méthode des /
Moindres Carrés, Mém. Acad, Impér. Sci. St. Pétersbourg, (7) 1,
nº 15 (1859) pp. 1 - 24 [Oeuvres I, pp. 473 - 498].
- [02] E.B. CHRISTOFFEL, Sur Une Classe Particulière de Fonctions
Entières et de Fractions Continues, Ann. Mat. Pura Appl., (2) 8
(1877) pp 1-10 [Ges. Math Abhandlungen II, pp. 42-50]
- [03] G. DARBOUX: Mémoire Sur L' Approximation des Fonctions de
Très Grands Nombres Et Sur Une Classe Étendue de Développements
en Série; J. Math. Pures Appl., (3) 4 (1878) pp. 5-56; 377-416
- [04] A. ERDÉLY: Higher Transcendental Functions - McGraw - Hill
Book Company, Inc. Vol II - 1953.
- [05] L. FEJÉR: Mecanische Quadraturen Mit positiven Cotesschen
Zahlen, Math. Z. 37 (1933), pp. 287 - 309.
- [06] G.E. FORSYTHE: Generation And Use of Orthogonal /
Polynomials For Data - Fitting With a Digital Computer, J. Soc.
Indust. Appl. Math., 5 (1957), pp. 74-88.
- [07] W. GAUTSCHI: Numerical Quadrature In The Presence Of a /
Singularity SIAM J. Numer. Anal, Vol. 4 (1967) pp. 357-362.
- [08] W. GAUTSCHI: Construction Of Gauss - Christoffel /
Quadrature Formulas, Math. Comp., 22 (1968), pp 251-270.
- [09] W. GAUTSCHI: On The Construction Of Gaussian Quadrature /
Rules, From Modified Moments, Math. Comp., 24 (1970), pp 245-
260.
- [10] W. GAUTSCHI: A Survey Of Gauss Christoffel Quadrature /
Formulae, In E.B. Christoffel: The Influence Of his Work in

- Mathematics And The Physical Sciences, Internacional /
 Christoffel Symposium, A Collection Of Articles in Honour Of
 Christoffel on The 150 th anniversary Of his birth, P.L. /
 Butzer And F. Fehér Eds. Birkhäuser, Basel, 1981, pp. 72-147.
- [11] W. GAUTSCHI: On Generating Orthogonal Polynomials - SIAM
 J. Sci. Statist. Comput - Vol 3 - (1982) - pp. 289-317.
- [12] W. GAUTSCHI: Orthogonal Polynomials - Construtive Theory
 And Applications, J. Comp. And Appl, Math 12 & 13 (1983) pp.61
 -76.
- [13] W. GAUTSCHI: Some New Applications Of Orthogonal /
 Polynomials Dep. Of Comp. Scienses Purdue University.
- [14] W. GAUTSCHI And G.V. MILOVANOVIC: Spline Approximations
 to Spherically Symmetric Distributions, In Preparation.
- [15] F.W.J. OLVER: Asymptotics And Special Functions, Academic
 Press, Mew York And London, 1974.
- [16] W. RUDIN: Principles Of Mathematical Analysis - Mcgraw /
 Hill Book Company, Inc. (1953).
- [17] R.A SACK AND A.F. DONOVAN: An Algoritm For Gaussian /
 Quadrature Given Modified Moments, Númer. Math., 18 (1971/72)
 pp. 465 - 478.
- [18] T.J. STIELTJES: Quelques Recherches Sur Théorie Des /
 Quadratures Dites Mecaniques, Ann. Sci. École Norm. Paris Ser.
 3,1 (1884) pp. 409-426 [Oeuvres I, pp. 377-396].
- [19] G. SZÉGO: Orthogonal Polynomials, AMS Colloquium /
 Publications Vol XXIII, Amer. Math. Soc. New York - 1959.
- [20] F. TRICOMI: Série ortogonali di Funzioni (Corso di Analisi
 Superiore del - 1947-1948) - Istituto Editoriale Gheroni.
- [21] W. VAN ASSCHE: Asymptotic properties Of Orthogonal /
 Polynomials Fron Their Recurrence Formula, I; J. Appr. Theory,
 44, (1985) pp. 258-276.

[22] J.C. WHEELER: Modified Moments And Gaussian Quadrature, /
Rocky Mountain J. Math., 4 (1974), pp. 287-296.

A P Ê N D I C E S

APENDICE 1}

{Programa que calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos usando o procedimento de Stieltjes atraves dos momentos normais exatos}

{OBS: Os momentos exatos foram calculados atraves de formularios quando conhecidos}

{OBS: Foi usado neste programa a funcao peso de Legendre no intervalo[-1,1]}

{DESCRICAO DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS:

N	: Referencia do arquivo onde ficam os resultados;
N1	: Indice do ultimo momento;
M	: Numero de momentos;
MU	: Momentos exatos;
ALFA E BETA	:coeficientes da relacao de recorrência de tres termos que no caso foram calculados atraves do metodo de Stieltjes}

```
PROGRAM STIEL1;
TYPE MAT=ARRAY[0..60,0..60] OF REAL;
      VEC=ARRAY[0..60] OF REAL;
VAR IMP,N,N1,M,I,T,T1,U,W,P,K,K1,S      :INTEGER;
    SOMA1,SOMA2,SOMA3                    :REAL;
    MU,BETA,ALFA                          :VEC;
    Q,ROW                                :MAT;
    NOME1                                :STRING[2];
    NOME                                  :STRING[12];
    ARG                                  :TEXT;
```

```
BEGIN
  IMP:=0;
  WRITELN('PARA OS RESULTADOS SAIREM NA IMPRESSORA');
  WRITELN('  ENTRE COM 1 :');
  READLN(IMP);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st, 'OS RESULTADOS DO PROGRAMA STIEL1');
  IF IMP=1 THEN BEGIN WRITELN(1st); WRITELN(1st); WRITELN(1st); END;
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N1:');
  READLN(N1);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N1:2);
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N:');
  READLN(N);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N:2);
  STR(N,NOME1);
  NOME:='ALFEX'+NOME1+'.DAT';
  ASSIGN(ARG,NOME);
  REWRITE(ARG);
  M:=N1+1;
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,M:2);
```

{Calculo do valor exato dos momentos normais}

```
FOR I:= 0 TO M DO
BEGIN
  IF (I MOD 2=0) THEN MUII:=2/(I+1)
  ELSE MUII:=0.0;
END;
```

{Calculo dos coeficientes dos dois primeiros polinomios $Q_0(t)$ e $Q_1(t)$ obtidos por comparacao com a relacao de recorrência de tres termos bem como o calculo do coeficiente $\alpha[i], \beta[i]$ }

```
Q[0,0]:=1.0;
BETAC[1]:=MUI[1]/MUI[0];
ALFAC[1]:=0.0;
Q[1,0]:=-BETAC[1];
Q[1,1]:=1.0;
```

{Atribuicao do primeiro momento ao denominador de α }

```
SOMA3:=MUI[0];
T1:=M+1;
IF (M MOD 2=0) THEN
BEGIN
  T:=M DIV 2;
END
ELSE T:=T1 DIV 2;
FOR I:=2 TO T DO
BEGIN
  U:=I-1;
  IF U>1 THEN BEGIN
    IF IMP=1 THEN WRITE(1st,U:2,' ',ALFACU:12:9,' ');
    WRITE(U:2,' ',ALFACU:12:9);
    WRITE(ARQ,ALFACU);
  END
  ELSE BEGIN
    IF IMP=1 THEN WRITE(1st,U:2,' ',ALFACU:12:9);
    WRITE(U:2,' ',ALFACU:12:9);
    WRITE(ARQ,ALFACU);
  END;
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,' ',BETACU:12:9);
  WRITELN(' ',BETACU:12:9);
  WRITELN(ARQ,BETACU);
END;
```

{calculo dos coeficientes do integrando do numerador de $\beta[i]$ }

```
W:=I-2;
ROW[I,0]:=Q[U,W]*Q[U,0];
IF I>2 THEN
BEGIN
  FOR K:=1 TO W DO
  BEGIN
    P:=K-1;
    ROW[I,K]:=Q[U,P]+Q[U,W]*Q[U,K];
  END;
END;
```

```

ROW[I,U]:=2*Q[U,W];
ROW[I,I]:=1.0;
SOMA1:=0;
SOMA2:=0;

{Calculo da integral do numerador de beta em termos dos momentos}

FOR K:=0 TO I DO
BEGIN
    S:=I+K-1;
    SOMA1:=SOMA1+ROW[I,K]*MU[S];
END;

{Calculo da integral do denominador de beta e do numerador de alfa
em termos dos momentos}

FOR K:=0 TO U DO
BEGIN
    S:=I+K-1;
    SOMA2:=SOMA2+Q[U,K]*MU[S];
END;

{Calculo dos coeficientes da relacao de recorrencia de tres termos,
alfa[I],beta[I] obtidos pelo metodo de Stieltjes}

BETAC[I]:=SOMA1/SOMA2;
ALFAC[I]:=SOMA2/SOMA3;

{Atribuicao do valor do denominador de beta ao denominador de alfa
para ser usado no estagio seguinte}

SOMA3:=SOMA2;

{Calculo dos coeficientes do integrando do denominador de beta e
do numerador de alfa obtidos por comparacao com a relacao de recor-
rencia de tres termos}

IF (I<T) THEN
BEGIN
    Q[I,0]:=-BETAC[I]*Q[U,0]-ALFAC[I]*Q[W,0];
    IF (I>2) THEN
    BEGIN
        FOR K:=1 TO W DO
        BEGIN
            K1:=K-1;
            Q[I,K]:=Q[U,K1]-BETAC[I]*Q[U,K]-ALFAC[I]*Q[W,K];
        END;
    END;
    Q[I,U]:=Q[U,W]-BETAC[I]*Q[U,U];
    Q[I,I]:=1.0;
END;

END;
IF (N1 MOD 2=0) THEN BEGIN
    IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,T:2,' ',ALFAC[T]:12:9);
    WRITELN(T:2,' ',ALFAC[T]:12:9);
    WRITELN(ARQ,ALFAC[T]);
END

```



```

ELSE BEGIN
  IF IMP=1 THEN BEGIN
    WRITE(1st,T:2,'      ',ALFACTJ:12:9);
    WRITELN(1st,'      ',BETACTJ:12:9);
    END;
  WRITE(T:2,'      ',ALFACTJ:12:9);
  WRITE(ARQ,ALFACTJ);
  WRITELN('      ',BETACTJ:12:9);
  WRITELN(ARQ,BETACTJ);
  END;
  CLOSE(ARQ)
END.

```

(APENDICE 2)

{Programa que calcula os coeficientes da relação de recorrência de três termos usando o método de Stieltjes com quadratura de Fejer}

{OBS: A função peso utilizada foi a de Legendre com intervalo de integração [0,1]}

{DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS:

N: ordem da quadratura usada e também referência do arquivo onde guardamos os resultados;
M: até que valor alfa e beta será calculado;
A,B: extremidades do intervalo de integração;
SOMA1:denota a fórmula de quadratura soma1= $w[n,k]*f(x[n,k])$ valor aproximado da integral do numerador de beta (método Stieltjes);
SOMA2:denota a fórmula de quadratura soma2= $w[n,k]*f(x[n,k])$ valor aproximado da integral do denominador de beta e do numerador de alfa (método de Stieltjes);
SOMA3:denota a fórmula de quadratura soma3= $w[n,k]*f(x[n,k])$ valor aproximado da integral do denominador de alfa (método de Stieltjes)
ALFA,BETA: coeficientes da relação de recorrência de três termos que no caso foram calculados através do método de Stieltjes usando quadratura de Fejer }

```
PROGRAM QUADFSTIL;
TYPE MAT= ARRAY[0..60,0..60] OF REAL;
      VEC= ARRAY[0..60] OF REAL;
VAR N,M,K,S,S1,S2,IMP           :INTEGER;
    SOMA1,SOMA2,R,B,A,SOMA3     :REAL;
    W,BETA,ALFA,X               :VEC;
    Q                            :MAT;
    NOME1                        :STRING[2];
    NOME                         :STRING[12];
    ARQ                          :TEXT;
```

```
PROCEDURE FEJER(N:INTEGER;VAR X,W:VEC);
```

{Calcula X[K] zeros dos polinômios de Chebyshev ,bem como os pesos W[K]}

```
CONST PI=3.1415926536;
VAR T,K,K1,M,MM                :INTEGER;
    XT,TETA,WT,ALFA            :REAL;
```

```
BEGIN
  T:=N DIV 2;
  FOR K:=1 TO T DO
    BEGIN
      TETA:=((2*K-1)*PI)/(2*N); TT
```

```

K1:=N+1-K;
XT:=COS(TETA);
X[K1]:=XT;
X[K]:= -XT;
WT:=1;
FOR M:=1 TO T DO
BEGIN
    ALFA:=2*M*TETA;
    MM:=4*M*M-1;
    WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;
END;
WT:=WT*2/N;
W[K]:=WT;
W[K1]:=WT;
END;
IF (N-2*T)=1 THEN
BEGIN
    K:=T+1;
    X[K]:=0;
    WT:=1;
    FOR M:=1 TO T DO
    BEGIN
        ALFA:=M*PI;
        MM:=4*M*M-1;
        WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;
    END;
    W[K]:=WT*2/N;
END;
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
    WRITELN(X[K]:12:9,'      ',W[K]:12:9);
END;
END; {OF PROCEDURE FEJER}

```

```

FUNCTION FUNPESO(VAR X:REAL):REAL;

```

{Calcula para cada x[k] a funcao peso, no caso foi considerada a funcao peso de Legendre}

```

BEGIN
    FUNPESO:=1.0;
END; {OF FUNCTION FUNPESO}

```

```

BEGIN
    IMP:=0;
    WRITELN('PARA O RESULTADO SAIR NA IMPRESSORA');
    WRITELN(' ENTRE COM 1 : ');
    READLN(IMP);
    IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,'OS RESULTADOS DO PROGRAMA QUADFSTIL');
    IF IMP=1 THEN BEGIN WRITELN(1st); WRITELN(1st); writeln(1st); END;
    WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N:');

```

{Le e escreve o valor de N ordem da quadratura usada e referencia do arquivo onde guardamos os resultados}

```

READLN(N);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N:2);
STR(N,NOME1);

```

```

NOME:='ALFEX'+NOME1+'.DAT';
ASSIGN(ARG,NOME);
REWRITE(ARG);
WRITELN('ENTRE COM OS VALORES DE M:');
READLN(M);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,M:2);
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE A: ');

{Le e escreve o valor de A,B extremidades do intervalo de integracao}

READLN(A);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,A:12:9);
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE B:');
READLN(B);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,B:12:9);
FEJER(N,X,W);
SOMA1:=0;
SOMA2:=0;
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN

{Muda o intervalo de integracao de [0,1] para [-1,1] para poder usar
quadratura de Fejer}

R:=((B-A)/2)*X[K]+(B+A)/2;

{Calcula a primeira aproximacao para as integrais do numerador e denomina-
dor de beta respectivamente}

Q[0,K]:=1.0;
SOMA1:=SOMA1+W[K]*((B-A)/2)*(R*FUNPESO(R));
SOMA2:=SOMA2+W[K]*((B-A)/2)*FUNPESO(R);
END;

{Calcula o coeficiente alfa[1] e beta[1] da relacao de recorrência de tres
termos usando o metodo de Stieltjes com quadratura}

ALFA[1]:=0;
BETA[1]:=SOMA1/SOMA2;
IF IMP=1 THEN BEGIN
WRITE(1st,'ALFA[',1:2,',]=',ALFA[1]:12:9);
WRITELN(1st,'BETA[',1:2,',]=',BETA[1]:12:9);
END;
WRITE('ALFA[',1:2,',]=',ALFA[1]:12:9);
WRITE(ARG,ALFA[1]);
WRITELN('BETA[',1:2,',]=',BETA[1]:12:9);
WRITELN(ARG,BETA[1]);

{Faz a mudanca de intervalo para [-1,1] assim como calcula o polinomio
Q1(t) nos pontos R atraves da relacao de recorrência de tres termos}

FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
R:=((B-A)/2)*X[K]+(B+A)/2;
Q[1,K]:=(R-BETA[1]);
END;

{Calcula as aproximacoes das integrais do numerador de beta , as aproxima-
coes para integrais do denominador de beta e numerador de alfa bem como
atribui o valor da aproximacao do denominador de beta para o denominador
de alfa}

```

```

FOR S:=2 TO M DO
BEGIN
  SOMA1:=0;
  SOMA3:=SOMA2;
  SOMA2:=0;
  S1:=S-1;
  S2:=S-2;
  FOR K:=1 TO N DO
  BEGIN
    R:=((B-A)/2)*X[K]+(B+A)/2;
    SOMA1:=SOMA1+W[K]*((B-A)/2)*FUNPESO(R)*R*Q[S1,K]*Q[S1,K];
    SOMA2:=SOMA2+W[K]*((B-A)/2)*FUNPESO(R)*Q[S1,K]*Q[S1,K];
  END;

  {Calcula os coeficientes alfa[S],beta[S] da relacao de recorrência de
  tres termos}

  BETAS[S]:=SOMA1/SOMA2;
  ALFAS[S]:=SOMA2/SOMA3;

  {Faz a mudanca do intervalo [0,1] para [-1,1] e calcula os polinomios
  Q[S] nos pontos R atraves da relacao de recorrência de tres termos}

  FOR K:=1 TO N DO
  BEGIN
    R:=((B-A)/2)*X[K]+(B+A)/2;
    Q[S,K]:=(R-BETAS[S])*Q[S1,K]-ALFAS[S]*Q[S2,K];
  END;
  IF IMP=1 THEN BEGIN
    WRITE(1st,'ALFA',S:2,'J=',ALFAS[S]:12:9);
    WRITELN(1st,'          BETA',S:2,'J=',BETAS[S]:12:9);
  END;
  WRITE('ALFA',S:2,'J=',ALFAS[S]:12:9);
  WRITE(ARQ,ALFAS[S]);
  WRITELN('          BETA',S:2,'J=',BETAS[S]:12:9);
  WRITELN(ARQ,BETAS[S]);
END;
CLOSE(ARQ);
END.

```

{APENDICE 3}

{Programa que calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos através do metodo de Chebyshev utilizando momentos ordinarios}.

{DESCRICAO DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS:}

{N1: INDICE DO ULTIMO MOMENTO}
{N: INDICE DO NOME DO ARQUIVO}
{M: NUMERO DE MOMENTOS}
{SIGM: QUANTIDADES ATRAVES DAS QUAIS PODEMOS OBTER OS COEFICIENTES ALFA E BETA
{ALFA E BETA: COEFICIENTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS QUE NO CAS FORAM CALCULADOS ATRAVES DO ALGORITMO DE TCHEBYSHEV}

{OBS: OS MOMENTOS EXATOS FORAM CALCULADOS ATRAVES DE FORMULARIO }

{OBS: No caso foi considerado Legendre em [0,1]}

```
PROGRAM CHEBYSHEV;  
TYPE MAT=ARRAY[0..60,0..60] OF REAL;  
      VEC=ARRAY[0..60] OF REAL;  
VAR N1,N,M,K,R,S,P,Q,T,J,U,V,IMP      :   INTEGER;  
    A,B                                :   REAL;  
    MU,ALFA,BETA                        :   VEC;  
    SIGM                                :   MAT;  
    NOME1                               :   STRING[2];  
    NOME                                :   STRING[12];  
    ARG                                  :   TEXT;
```

```
BEGIN  
  IMP:=0;  
  WRITELN('PARA O RESULTADO SAIR NA IMPRESSORA');  
  WRITELN('ENTRE COM 1 :');  
  READLN(IMP);  
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,'OS RESULTADOS DO PROGRAMA CHEBYSHEV');  
  IF IMP=1 THEN BEGIN WRITELN(1st);WRITELN(1st);WRITELN(1st);END;  
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N1:');
```

{Le e escreve o valor de N1 o indice do ultimo momento}

```
  READLN(N1);  
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N1:2);  
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N:');  
  READLN(N);  
  STR(N,NOME1);  
  NOME:='ALFEX'+NOME1+'.DAT';  
  ASSIGN(ARG,NOME);  
  REWRITE(ARG);  
  M:=N1+1;  
  WRITELN(M:2);
```

```

{Calcula os momentos normais exatos}

FOR J:=0 TO M DO
BEGIN
    MUE[J]:=1/(J+1);
END;

{Atribui a SIGME[0,J] o valor dos momentos ordinarios }

FOR J:=0 TO M DO
BEGIN
    SIGME[0,J]:=MUE[J];
END;

{Calcula alfa[1] e beta[1] coeficientes da relacao de recorrência de tres
termos através das quantidades SIGME[0,1] e SIGME[0,0]}

    ALFA[1]:=0;
    BETA[1]:=SIGME[0,1]/SIGME[0,0];

{Calcula SIGME[1,S] quantidades estas que serviraõ para o calculo do pro-
ximos coeficientes alfa e beta}

    K:=N1-2;
    FOR S:=0 TO K DO
        BEGIN
            P:=S+2;
            Q:=S+1;
            SIGME[1,S]:=SIGME[0,P]-BETA[1]*SIGME[0,Q];
        END;
    T:=(N1 DIV 2)+1;
    WRITELN; IF (IMP=1) THEN WRITELN(1st);
    FOR J:=2 TO T DO
        BEGIN
            P:=J-1;
            WRITE('ALFA',P:2,'J=',ALFA[P]:12:9);
            WRITE(ARQ,ALFA[P]); {ESCREVE NO ARQUIVO}
            WRITELN('    BETA',P:2,'J=',BETA[P]:12:9);
            WRITELN(ARQ,BETA[P]);
            IF IMP=1 THEN
                BEGIN
                    WRITE(1st,'ALFA',P:2,'J=',ALFA[P]:12:9);
                    WRITELN(1st,'    BETA',P:2,'J=',BETA[P]:12:9);
                END;
        END;

{Calcula os coeficientes alfa[J] e beta[J] através das quantidades SIGME[P,0],
SIGME[0,0],SIGME[P,1],SIGME[0,1] ja obtidas}

    Q:=J-2;
    ALFA[J]:=SIGME[P,0]/SIGME[0,0];
    BETA[J]:=(SIGME[P,1]/SIGME[P,0])-(SIGME[0,1]/SIGME[0,0]);

{Calcula as proximas quantidades SIGME[J,S] para obter o restante dos coefi-
cientes da relacao de recorrência de tres termos }

    R:=N1-(2*J);
    IF R>0 THEN
        FOR S:=0 TO R DO

```

```

      BEGIN
        U:=S+2;
        V:=S+1;
        SIGM[J,S]:=SIGM[P,U]-BETAC[J]*SIGM[P,V]-ALFAC[J]*SIGM[Q,U];
      END;
    END;
  WRITE('ALFAC',T:2,'J=',ALFACTJ:12:9);
  WRITE(ARQ,ALFACTJ);
  IF M MOD 2=1 THEN BEGIN
    WRITELN;
    WRITELN(ARQ);
  END
  ELSE BEGIN
    WRITELN('  BETAC',T:2,'J=',BETACTJ:12:9);
    WRITELN(ARQ,BETACTJ)
  END;
  IF IMP=1 THEN
  BEGIN
    WRITE(1st,'ALFAC',T:2,'J=',ALFACTJ:12:9);
    IF M MOD 2=1 THEN BEGIN
      WRITELN(1st);
    END
    ELSE BEGIN
      WRITELN(1st,'  BETAC',T:2,'J=',BETACTJ:12:9);
    END;
  END;
  CLOSE(ARQ);

```

END.

{APENDICE 4}

{Programa que calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos usando o algoritmo modificado de Chebyshev .Este programa usa os momentos modificados que sao calculados usando os momentos ordinarios}

{DESCRICAO DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS:

N :INDICE DO NOME DO ARQUIVO
 N1 :INDICE DO ULTIMO MOMENTO
 M :NUMERO DE MOMENTOS
 ALFA E BETA :COEFICIENTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS }

```
PROGRAM CHEBMODIF;
TYPE MAT=ARRAY[0..60,0..60] OF REAL;
     VEC=ARRAY[0..60] OF REAL;
VAR N,N1,M,R,S,T,I,IT,Q,J,L,K,W1,V,U,IMP      : INTEGER; -
    SOMA1,SOMA2,TERMO                          : REAL;
    A,B,MU,BETA,ALFA                          : VEC;
    P,SIGM                                      : MAT;
    NOME1                                       : STRING[20];
    NOME                                       : STRING[120];
    ARG                                        : TEXT;
```

BEGIN

```
IMP:=0;
WRITELN('PARA OS RESULTADOS SAIREM NA IMPRESSORA');
WRITELN(' ENTRE COM 1 : ');
READLN(IMP);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,'OS RESULTADOS DO PROGRAMA CHEBMODIF:');
IF IMP=1 THEN BEGIN WRITELN(1st); WRITELN(1st); WRITELN(1st); END;
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N1:');
```

{LE E ESCRIBE O VALOR DE N1 INDICE DO ULTIMO MOMENTO}

```
READLN(N1);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N1:2);
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N:');
READLN(N);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N:2);
STR(N,NOME1);
NOME:='ALFEX'+NOME1+'.DAT';
ASSIGN(ARG,NOME);
REWRITE(ARG);
```

```
{CALCULA OS MOMENTOS NORMAIS EXATOS USANDO O FORMULARIO:
MUC[N]=1/((N+1)*(N+1))}
```

```
MUC[0]:=1.0;
FOR J:=1 TO N1 DO
BEGIN
  IT:=(J+1)*(J+1);
  MUC[J]:=1/IT;
  WRITELN('MUC',J:2,'=' ,MUC[J]:12:9);
END;
IF (N1 MOD 2=1) THEN M:=N1+1
ELSE
BEGIN
  M:=N1+2;
  MUC[N1+1]:=0.0;
END;
```

```
FOR R:=1 TO M DO
BEGIN
  ACR:=0.0625;
  BCR:=0.5;
END;
```

```
{CALCULA OS MOMENTOS MODIFICADOS ATRAVES DOS MOMENTOS NORMAIS CALCULADOS
ACIMA BEM COMO OS COEFICIENTES ALFA[1] E BETA[1] DA RELACAO DE RECOR-
RENCIA DE TRES TERMOS}
```

```
BEGIN
  PC[0,0]:=1.0;
  SIGM[0,0]:=PC[0,0]*MUC[0];
  PC[1,1]:=PC[0,0];
  PC[0,1]:=-B[1];
  SIGM[0,1]:=PC[1,1]*MUC[1]+PC[0,1]*MUC[0];
  BETA[1]:=(SIGM[0,1]/SIGM[0,0])+B[1];
  ALFA[1]:=0.0;
```

```
{CALCULA OS COEFICIENTES DO POLINOMIO PC[I] OBTIDOS POR COMPARACAO
COM A RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS}
```

```
FOR I:=2 TO N1 DO
BEGIN
  S:=I-1;
  Q:=I-2;
  PC[I,1]:=PC[S,S];
  PC[S,1]:=PC[Q,S]-B[I]*PC[S,S];
  IF (I>2) THEN
  FOR J:=1 TO Q DO
  BEGIN
    R:=J-1;
    PC[J,1]:=PC[R,S] - B[I]*PC[J,S] - AC[I]*PC[J,0];
  END;
  PC[0,1]:=-B[I]*PC[0,S]-AC[I]*PC[0,0];
END;
FOR L:=2 TO N1 DO
BEGIN
  SOMA1 := 0.0;
```

```

SOMA2 := 0.0;
FOR K:=L DOWNT0 0 DO
BEGIN
    TERMO := PCK,LJ*MUCKJ;
    IF (TERMO >= 0.0) THEN SOMA1 := SOMA1 + TERMO
    ELSE SOMA2 := SOMA2 + TERMO;
END;
SIGM[0,LJ] := SOMA1 + SOMA2;
END;

```

{CALCULA AS QUANTIDADES SIGM[L,R] ATRAVES DAS QUAIS OBTEREMOS OS OUTROS COEFICIENTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS}

```

J:=N1-2;
FOR R:=0 TO J DO
BEGIN
    L:=R+1;
    W1:=R+2;
    SIGM[1,RJ]:=SIGM[0,W1J]+(B[W1J]-BETAC[1J])*SIGM[0,LJ]+A[W1J]*SIGM[0,RJ];
END;
S:=(N1 DIV 2)+1;
FOR L:=2 TO S DO
BEGIN
    T:=L-1;
    IF IMP=1 THEN BEGIN
        WRITE(1st,'ALFAC',T:2,'J=',ALFACTJ:12:9);
        WRITELN(1st,'          BETAC',T:2,'J=',BETACTJ:12:9);
    END;
    WRITE('ALFAC',T:2,'J=',ALFACTJ:12:9);
    WRITE(ARG,ALFACTJ);
    WRITELN('          BETAC',T:2,'J=',BETACTJ:12:9);
    WRITELN(ARG,BETACTJ);
    W1:=L-2;

```

{CALCULA OS COEFICIENTES RESTANTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS}

```

    ALFACLJ:=(SIGM[T,0J]/SIGM[W1,0J]);
    BETACLJ:=(SIGM[T,1J]/SIGM[T,0J])-(SIGM[W1,1J]/SIGM[W1,0J])+BCLJ;
    V:=N1-(2*L);
    IF V>0 THEN
        FOR R:=0 TO V DO
        BEGIN
            J:=R+2;
            Q:=R+1;
            U:=L+R+1;
            TERMO := SIGM[T,JJ] + (B[UJ]-BETACLJ)*SIGM[T,QJ];
            SIGM[L,RJ]:=TERMO - ALFACLJ*SIGM[W1,JJ]+A[UJ]*SIGM[T,RJ];
        END;
    END;
    WRITE('ALFAC',S:2,'J=',ALFACSJ:12:9);
    WRITE(ARG,ALFACSJ);
    IF N1 MOD 2=0 THEN BEGIN
        WRITELN;
        WRITELN(ARG);
    END
ELSE BEGIN
    WRITELN('          BETAC',S:2,'J=',BETACSJ:12:9);
    WRITELN(ARG,BETACSJ);
END;
IF IMP=1 THEN

```

```

BEGIN
  WRITE(1st,'ALFAC',S:2,'J=',ALFA[S]:12:9);
  IF N1 MOD 2=0 THEN WRITELN(1st)
  ELSE WRITELN(1st,'      BETAC',S:2,'J=',BETA[S]:12:9);
END;
WRITELN; WRITELN;
IF IMP=1 THEN
BEGIN
  WRITELN(1st); WRITELN(1st);
END;
END;
CLOSE(ARQ);
END.

```

{APENDICE 5}

{Programa que calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos atraves do metodo modificado de Chebyshev. Neste programa os momentos modificados sao calculados atraves de uma formula de quadratura}

{Obs: A funcao peso utilizada sera a de Legendre no intervalo [0,1]}

{DESCRICAO DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS:

N: ordem da quadratura usada e tambem referencia do arquivo onde guardamos os resultados;
M: numero de momentos;
A[k], B[k]: coeficientes dos polinomios $P[k]$ usados para calcular os momentos modificados bem como as quantidades que servira para calcular os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos.
X1, X2: extremidades do intervalo de integracao
SIGM: Quantidades atraves das quais vamos calcular os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos atraves do metodo modificado de Chebyshev.
ALFA, BETA: coeficientes da relacao de recorrência de tres termos. }

```

PROGRAM MODTQUAD;
TYPE MAT=ARRAY[0..60,0..60] OF REAL;
      VEC=ARRAY[0..60] OF REAL;
VAR IMP,N,M,R,K,L,J,W1,S,T,V,Q,U,I      :INTEGER;
      X1,X2,S1                             :REAL;
      A,B,W,X,BETA,ALFA                   :VEC;
      SIGM,P                               :MAT;
      NOME1                                :STRING[2];
      NOME                                  :STRING[12];
      ARQ                                   :TEXT;

```

```

PROCEDURE FEJER(N:INTEGER;VAR X,W:VEC);

```

{CALCULA X[K]: ZEROS DOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV $T_N(X)$ BEM COMO OS PESOS $W[K]$ }

```

CONST PI=3.1415926536;
VAR T,K,K1,M,MM:INTEGER;
      XT,TETA,WT,ALFA:REAL;

```

```

BEGIN
  T:=N DIV 2;
  FOR K:=1 TO T DO
    BEGIN
      TETA:=( (2*K-1)*PI)/(2*N);
      L1:=N+1-K;
      XT:=COS(TETA);
      X[L1]:=XT;

```

```

XCKJ:=-XT;
WT:=1;
FOR M:=1 TO T DO
BEGIN
  ALFA:=2*M*TETA;
  MM:=4*M*M-1;
  WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;
END;
WT:=WT*2/N;
WCKJ:=WT;
WCK1J:=WT;
END;
IF (N-2*T)=1 THEN
BEGIN
  K:=T+1;
  XCKJ:=0;
  WT:=1;
  FOR M:=1 TO T DO
  BEGIN
    ALFA:=M*PI;
    MM:=4*M*M-1;
    WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;
  END;
  WCKJ:=WT*2/N;
END;
END; {OF PROCEDURE FEJER}

```

```

FUNCTION FUNPESO(X:REAL):REAL;
{CALCULA PARA CADA XCKJ O VALOR DA FUNCAO PESO.NO CASO FOI CONSIDERADA A FUNC
PESO W(X)=1.0}

```

```

BEGIN
  FUNPESO:=1.0;
END; {OF FUNCTION FUNPESO}

```

```

BEGIN
  IMP:=0;
  WRITELN('PARA O RESULTADO SAIR NA IMPRESSORA');
  WRITELN('  ENTRE COM 1  : ');
  READLN(IMP);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,'OS RESULTADOS DO PROGRAMA CHEMODFE');
  IF IMP=1 THEN BEGIN WRITELN(1st); WRITELN(1st); WRITELN(1st); END;
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE N:');
  READLN(N);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,N:2);
  STR(N,NOME1);
  NOME:='ALFEX'+NOME1+'.DAT';
  ASSIGN(ARG,NOME);
  REWRITE(ARG);
  FEJER(N,X,W);
  WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE M:');
  {LE E ESCRVE O VALOR DE M }
  READLN(M);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,M:2);
  WRITELN;

```

{LE E ESCRIBE O VALOR DE X1 E X2 }

```
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE X1: ');
READLN(X1);
IF IMP=1 THEN WRITELN(1st, X1:12:9);
WRITELN(X1:12:9);
WRITELN('ENTRE COM O VALOR DE X2: ');
READLN(X2);
IF IMP=1 THEN BEGIN
    WRITELN(1st, X2:12:9);
    WRITELN(1st); WRITELN(1st); END;
WRITELN(X2:12:9); WRITELN; WRITELN;
```

```
FOR R:=1 TO M DO
BEGIN
    ACRJ:=0.0625;
    BCRJ:=0.5;
    IF IMP=1 THEN WRITELN(1st, ACRJ:12:9, ' ', BCRJ:12:9);
    WRITELN(ACRJ:12:9, ' ', BCRJ:12:9);
END;
```

{CALCULA OS MOMENTOS MODIFICADOS USANDO QUADRATURA DE FEJER}

```
SIGME0,0J:=0;
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
    S1:=((X2-X1)/2)*X[KJ]+(X2+X1)/2;
    PI0,KJ:=1.0;
    SIGME0,0J:=SIGME0,0J+W[KJ]*((X2-X1)/2)*FUNPESO(S1);
END;
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
    S1:=((X2-X1)/2)*X[KJ]+(X2+X1)/2;
    PI1,KJ:=(S1-B[1J]);
END;
SIGME0,1J:=0;
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
    S1:=((X2-X1)/2)*X[KJ]+(X2+X1)/2;
    SIGME0,1J:=SIGME0,1J+W[KJ]*((X2-X1)/2)*FUNPESO(S1)*PI1,KJ;
END;
```

{CALCULA OS COEFICIENTES ALFAC1J E BETAC1J DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS USANDO AS QUANTIDADES ACIMA CALCULADAS}

```
BETAC1J:=(SIGME0,1J/SIGME0,0J)+B[1J];
ALFAC1J:=0;
FOR L:=2 TO M DO
BEGIN
    R:=L-1;
    Q:=L-2;
    SIGME0,LJ:=0;
    FOR K:=1 TO N DO
    BEGIN
        S1:=((X2-X1)/2)*X[KJ]+(X2+X1)/2;
        PCL,KJ:=(S1-B[QJ])*PLR,KJ-A[QJ]*PIQ,KJ;
        SIGME0,LJ:=SIGME0,LJ+W[KJ]*((X2-X1)/2)*FUNPESO(S1)*PCL,KJ;
    END;
END;
```

{CALCULA AS QUANTIDADES SIGMET,RJ DO METODO MODIFICADO DE CHESYSHEV, QUANTIDADES ESTAS QUE SERVIRAO PARA CALCULAR OS COEFICIENTES RESTANTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS}

```

J:=M-2;
FOR R:=0 TO J DO
BEGIN
  LI:=R+1;
  W1:=R+2;
  SIGMET,RJ:=SIGMET,0,W1+(BETW1-BETACL1)*SIGMET,0,LI+ACW1*SIGMET,0,RJ;
END;
S:=(M DIV 2)+1;
FOR L:=2 TO S DO
BEGIN
  T:=L-1;
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,ALFACTJ:12:9,'      ',BETACTJ:12:9);
  WRITELN(ALFACTJ:12:9,'      ',BETACTJ:12:9);
  WRITELN(ARG,ALFACTJ,'      ',BETACTJ);
  W1:=L-2;

```

{CALCULA O RESTANTE DOS COEFICIENTES DA RELACAO DE RECORRENCIA DE TRES TERMOS
ALFACLJ, BETACLJ}

```

ALFACLJ:=(SIGMET,0J/SIGMETW1,0J);
BETACLJ:=((SIGMET,1J/SIGMET,0J)-(SIGMETW1,1J/SIGMETW1,0J))+BELLJ;
V:=M-(2*L)+1;
IF V>0 THEN
FOR R:=0 TO V DO
BEGIN
  J:=R+2;
  Q:=R+1;
  U:=L+R+1;
  SIGMET,RJ:=SIGMET,JJ+(BEUJ-BETACLJ)*SIGMET,QJ-ALFACLJ*SIGMETW1,JJ;
  SIGMET,RJ:=SIGMET,RJ+ACUJ*SIGMET,RJ;
END;
END;
IF (M MOD 2=1) THEN BEGIN
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,ALFACSJ:12:9);
  WRITELN(ALFACSJ:12:9);
  WRITELN(ARG,ALFACSJ);
END;
CLOSE(ARG);
END.

```


{APENDICE 6}

{Programa que calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos através do metodo de Chebyshev modificado onde os momentos modificados são calculados através de uma formula de quadratura no caso foi considerada a quadratura de Fejer}

{Este programa é referente ao algoritmo um "metodo novo baseado no metodo modificado de Chebyshev"}

```

PROGRAM CHEBMOD4;
  TYPE MAT1 = ARRAY[0..25,0..101] of REAL;
       MAT2 = ARRAY[0..30,0..30] of REAL;
       VEC1 = ARRAY[0..127] of REAL;
       VEC2 = ARRAY[0..30] of REAL;
  VAR I,I1,I2,II,IM,IMP,IT,J,J1,R,R1,R2 : INTEGER;
      L,LA,LB,LL,M,M1,N,N1,S,S1,S2,SA : INTEGER;
      V,V1,NG,K : INTEGER;
      SOMA1,SOMA2,TERMO,F : REAL;
      MU,A,B,X,X1,W,X2 : VEC1;
      ALFA,BETA : VEC2;
      P : MAT1;
      SIGM : MAT2;
      NOME1 : STRING[21];
      NOME : STRING[12];
      ARQ : TEXT;

```

```

PROCEDURE FEJER(NG:INTEGER; VAR X,W:VEC1);

```

{Calcula X[K] :zeros dos polinomios de Chebyshev TN(X) bem como os pesos W[K]}

```

CONST PI=3.1415926536;
VAR T,K,K1,M,MM :INTEGER;
    XT,TETA,WT,ALFA :REAL;

```

```

BEGIN
  T:=NG DIV 2;
  FOR K:=1 TO T DO
    BEGIN
      TETA:=((2*K-1)*PI)/(2*NG);
      K1:=NG+1-K;
      XT:=COS(TETA);
      XCK1:=XT;
      XCK:= -XT;
      WT:=1;
      FOR M:=1 TO T DO
        BEGIN
          ALFA:=2*M*TETA;
          MM:=4*M*M-1;
          WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;
        END;
      WT:=WT*2/NG;
      LCK1:=WT;
      WCK1:=WT;
    END;
  IF (NG-2*T)=1 THEN

```

7 BEGIN

```
K:=T+1;  
X[K]:=0;  
WT:=1;  
FOR M:=1 TO T DO  
  BEGIN  
    ALFA:=M*PI;  
    MM:=4*M*M-1;  
    WT:=WT-2*COS(ALFA)/MM;  
  END;  
  WEK:=WT*2/NO;  
END;  
END; {OF PROCEDURE FEJER}
```

FUNCTION FUNPESO(X:REAL):REAL;

{Calcula para cada X[K] o valor da funcao peso, no caso foi considerada a funcao peso $W(X)=1$ }

```
BEGIN  
  FUNPESO:=1.0;  
END; {OF FUNCTION FUNNPESO}
```

BEGIN

IM := 1; IMP := 0;

ClrScr;

Writeln;

Writeln('Para os RESULTADOS sairem na IMPRESSORA ');

WRITE(' entre com 1 : ');

Readln(IMP);

IF IMP=1 THEN

BEGIN

Writeln(1st);

Writeln(1st,'OS RESULTADOS DO PROGRAMA TCHEBMOD4-1');

Writeln(1st); Writeln(1st);

END;

Writeln;

Writeln('Entre com o valor de NO:');

{Le e escreve o valor de NO ordem da quadratura usada}

Readln(NO);

Writeln(NO:2);

FEJER(NO,X,W);

Writeln('Entre com o valor de indice de');

WRITE(' Ultimo MOMENTO : ');

{Le valor do indice do ultimo momento}

Readln(N1);

GoToXY(1,10);

Writeln('Entre com a referencia do ARQUIVO ');

WRITE(' para saida do RESULTADOS : ALFEX .DAT ');

LOWVIDEO; GoToXY(41,11);

```

READLN(N);
NORMVIDEO;
STR(N,NOME1);
NOME := 'ALFEX' + NOME1 + '.DAT';
ASSIGN(ARG,NOME);
REWRITE(ARG);

```

```

WRITELN;
FOR K:=1 TO NQ DO
BEGIN
    X1[K] := XCK;
    X2[K] := 1.0;
END;

```

```

FOR J := 0 TO N1 DO
BEGIN
    IT := (J+1);
    IF (J MOD 2 = 0) THEN MUC[J] := 2.0/IT
    ELSE MUC[J] := 0.0;
    SOMA1 := 0;

```

{Calcula os momentos normais atraves da quadratura de Fejer}

```

    FOR K:=1 TO NQ DO
    BEGIN
        SOMA1 := SOMA1 + WCK*FUNPESO(X1[K]*X2[K];
        X2[K] := X2[K]*X1[K];
    END;
    SOMA1 := SOMA1;
    WRITELN('          ',J:2,'          ',MUC[J],'          ',SOMA1);
    IF IMP=1 THEN
    BEGIN
        WRITE(1st,'MuC',J:2,'3 =',MUC[J]:10:7,'          ');
        IF (J MOD 3 = 1) THEN WRITELN(1st);
    END;
END;

WRITELN;

```

```

IF (N1 MOD 2 = 1) THEN M := N1+1
ELSE BEGIN
    M := N1+2;
    MUI[N1+1] := 0.0;
END;

```

{Calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos alfa[1] e beta[1] bem como alfa[2] e beta[2]}

```

ALFA[1] := 0.0;
BETA[1] := MUI[1]/MUC[1];
SOMA1 := MUC[2] - MUC[1]*BETA[1];
SOMA2 := MUI[2] - MUI[1]*BETA[1];
ALFA[2] := SOMA1/MUC[1];
BETA[2] := (SOMA2/SOMA1) - BETA[1];

IF IMP=1 THEN
BEGIN
    WRITELN(1st);
    WRITE(1st,' 1  ',ALFA[1]);

```

```

        WRITELN(1st,'          ',BETAC[1]);
        WRITE(1st,' 2  ',ALFAC[2]);
        WRITELN(1st,'          ',BETAC[2]);
    END;
    WRITELN(' 1          ',ALFAC[1],'          ',BETAC[1]);
    WRITELN(' 2          ',ALFAC[2],'          ',BETAC[2]);
    WRITELN(ARG,ALFAC[1],BETAC[1]);
    WRITELN(ARG);
    WRITELN(ARG,ALFAC[2],BETAC[2]);
    WRITELN(ARG);

```

{Calcula os valores dos polinomios P[1] e P[2] nos pontos X1[K] utilizando a relacao de recorrência de tres termos }

```

    FOR K:=1 TO NQ DO
    BEGIN
        PC1,K] := (X1[K]-BETAC[1]);
        PC2,K] := (X1[K]-BETAC[2])*PC1,K] - ALFAC[2];
    END;
    SIGMC[0,0] := MUC[0];
    SIGMC[0,1] := 0.0;
    SIGMC[0,2] := 0.0;
    SIGMC[0,3] := 0.0;
    SIGMC[1,0] := SOMA1;

```

```

    BC1] := BETAC[1];    AC1] := ALFAC[1];
    BC2] := BETAC[2];    AC2] := ALFAC[2];
    FOR J := 3 TO M-1 DO
    BEGIN
        BCJ] := 0.0;    ACJ] := 0.0;
    END;

```

```

    M1 := 4;
    WHILE M1 < M DO
    BEGIN

```

```

        WRITELN;
        S := M1 DIV 2;
        S1 := S-1;
        SA := S+1;
        BISAJ := 0.0;    AISAJ := 0.0;
        FOR J:=SA+1 TO M1+1 DO
        BEGIN
            BCJJ := BETAC[M1-J+2];    ACJJ := 0.0;
        END;
        FOR II := 1 TO IM DO
        BEGIN
            FOR I := SA TO M1+1 DO
            BEGIN

```

{Calcula os valores do polinomio P[II] nos pontos X1[K] atraves da relacao de recorrência}

```

            FOR K := 1 TO NQ DO
                PCII,K] := (X1[K]-BCII)*PCII-1,K] - ACII*PCII-2,K];
            END;

```

{Calcula os valores dos momentos modificados V(n) para n = M1,M1+1. Os valores de V(n) para n = 1,2,...,M1-1, são zero.}

```

            FOR I := M1 TO M1+1 DO
            BEGIN

```

```

SOMA1 := 0.0;
FOR K := 1 TO NO DO
  SOMA1 := SOMA1 + WCK]*FUNPESO(X1[K])*PCI,K];
  SIGM[0,I] := SOMA1;
  WRITELN(' * * ',I:2,' ',I:2,' ',SIGM[0,I]);
END;

```

{calcula os coeficientes da relacao de recorrência de tres termos
ALFA[SA] e BETA[SA]}

```

FOR R := 1 TO S DO
  BEGIN
    R1 := R-1;
    V1 := M1 - 2*R;    V := V1+1;
    SIGMR,V] := SIGMR1,V+2] + (B[R+V+1]-BETA[R])*SIGM[0,M1];
  END;
  SIGMS,0] := SIGM[0,M1];
  WRITE(ARQ,'----- SIGM',S:2,',0]=',SIGMS,0]);
  WRITELN(ARQ,'          SIGM',S:2,',1]=',SIGMS,1]);
  ALFA[SA] := SIGMS,0]/SIGMS1,0];
  BETA[SA] := (SIGMS,1]/SIGMS,0]) + B[SA];

  IF IMP=1 THEN WRITE(1st,SA:2,' ',ALFA[SA]);
  IF IMP=1 THEN WRITELN(1st,' ',BETA[SA]);
  WRITELN(SA:2,' ',ALFA[SA],', ',BETA[SA]);
  WRITELN(ARQ,SA:2,' ',ALFA[SA]:15:12,' ',BETA[SA]:15:12);
  B[SA] := BETA[SA];    A[SA] := ALFA[SA];
END;
FOR K:=1 TO NO DO

```

{Calcula os valores do polinomio P[SA] nos pontos X1[k] atraves da
relacao de recorrência de tres termos}

```

P[SA,K] := (X1[K]-B[SA])*P[S,K] - A[SA]*P[S1,K];
WRITELN(ARQ);
WRITELN(ARQ,ALFA[SA],BETA[SA]);
WRITELN(ARQ);
SIGM[0,M1] := 0.0;
SIGM[0,M1+1] := 0.0;
M1 := M1 + 2;

```

```

END;
CLOSE(ARQ);
END.

```