MÉTODO INTEGRAÇÃO PRODUTO DO TRAPÉZIO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS LINEARES DE ABEL GENERALIZADAS DE 1ª ESPÉCIE

PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA

Orientadora: Profa Dra Neide Maria Bertoldi Franco

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre na área de Ciências de Computação e Matemática Computacional.

SÃO CARLOS
1989

"O esforço é grande e o homem é pequeno.
Eu, Diogo Cão, navegador, deixei
Este padrão ao pé do areal moreno
E para deante naveguei.
A alma é divina e a obra imperfeita."

F.P.

Ao João, Mazé, Lú e amigas(os) da 24ª da turma do curso de Ciências Biológicas/UNESP-Botucatu.

AGRADECIMENTOS

- Profa Dra Neide Maria Bertoldi Franco
- FAPESP
- Profo Marsilio Boaventura, Heloisa Helena Marino e Waldemir Garcia Ferreira
- Membros do Departamento de Bioestatistica / UNESP - Botucatu
- Joao Carlos V. Tancler
- CNPq, CAPES e FINEP

TRAPEZOIDAL PRODUCT INTEGRATION METHOD TO RESOLVE GENERALIZED ABEL LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FIRST KIND

Paulo Fernando de Arruda Mancera

Adviser: Profa Dra Neide Maria Bertoldi Franco

ABSTRACT

This dissertation is concerned with the Trapezoidal Product Integration Method to resolve Generalized Abel Linear Integral Equations of first kind. Special attention is given to theorem of the convergence of the trapezoidal method.

Mathematical results and a discussion about the existence and uniqueness of the solutions of the Generalized Abel Linear Integral Equations are presented in chapter one.

Theorems related with the convergence of the trapezoidal method are shown in chapters two and three.

In chapter four it is analized the implicit backward difference product integration methods, proved its convergence, and also it is applied a sufficient condition to the root condition of the trapezoidal method.

Numerical result is shown in chapter five.

ÍNDICE

Capítulo 4

Capítulo 5

Apêndice A

INTRODUÇÃO

Equação Integral de Abel Generalizada de primeira espécie,

$$\int_0^t \frac{k(t,s)\ y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds = f(t),$$

$0 < \alpha < 1$, $0 \le t \le 1$, onde $k(t,s)$ é contínua para $0 \le s \le t \le 1$ e $k(t,t) \ne 0$, aparece com freqüência em problemas práticos; por exemplo: em biologia, espalhamento de raio X, microscopia, metalurgia, sismologia, entre outros ([ANDERSSEN - 77]).

Neste trabalho, analisamos o método integração produto do trapézio para resolução de Equações Integrais de Abel Generalizadas. Métodos integração produto têm sido obtidos por [LINZ - 69], e justificados teoricamente, para o método do ponto médio e do trapézio, por [WEISS - 72,72a]. [WEISS - 72a] mostrou que o método do trapézio apresentava convergência de ordem 2 para $\alpha \in [0.2117,1)$, e [EGGERMONT - 81] provou que essa convergência acontecia para $\alpha \in (0,1)$.

O enfoque principal deste trabalho é dado na análise dos teoremas de convergência do método integração produto do trapézio. Discutimos os métodos integração produto de diferenças descendentes implícitos, assim como, uma condição suficiente para a condição da raiz ([CAMERON - 81]). Aplicamos essa condição suficiente para analisar a convergência do método integração produto do trapézio, sendo esta a maior contribuição do trabalho.

No capítulo 1, apresentamos resultados de álgebra linear e análise matemática necessários para o desenvolvimento do trabalho , assim como , discutimos existência e unicidade de soluções para Equações Integrais de Abel Generalizadas. Nos capitulos 2 e 3, analisamos o método integração produto do trapézio, e, no 4, apresentamos os métodos integração produto de diferenças descendentes implícitos , e aplicamos uma condição suficiente para a condição da raiz na análise da convergência do método do trapézio. Finalmente, no capítulo 5, resultado numérico é apresentado.

No final, apresentamos a bibliografia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho.

Introduzimos algumas notações básicas e conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE ABEL GENERALIZADAS (EIAG)

Equações integrais da forma

$$\lambda\, y(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))\, ds = f(t),\ 0 \le t \le 1 \tag{1.1.1}$$

são conhecidas como Equações Integrais de Volterra (EIV) de primeira e segunda espécie, se $\lambda=0$ e $\lambda=1$, respectivamente.

Se $K(t,s,y(s)) = k(t,s)\, y(s)$, a equação (1.1.1) é linear em $y(s)$, caso contrário não linear.

Se $K(t,s,y(s)) = k(t,s,y(s))/(t - s)^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, (1.1.1) é chamada Equação Integral de Abel Generalizada de primeira espécie, se $\lambda=0$, e de segunda espécie, se $\lambda=1$.

Neste trabalho, nos detemos em EIAG lineares de primeira espécie , ou seja, equações da forma

$$\int_0^t \frac{k(t,s)\, y(s)}{(t - s)^{\alpha}}\, ds = f(t),\ 0 < \alpha < 1,\ 0 \le t \le 1. \tag{1.1.2}$$

Equações da forma (1.1.2) aparecem, por exemplo, em problemas de condução de calor, onde o fluxo de calor $q(t)$ da superfície para o interior de um sólido semi-infinito é procurado, numa dada temperatura. A equação é dada por

$$(1.1.3) \qquad \frac{a^{1/2}}{k\ \pi^{1/2}} \int_0^t \frac{1}{(1-\theta)^{1/2}}\, q(\theta)\, d(\theta) = T_s(t) - T_o,$$

$T_s(t)$ é a temperatura na superfície, a é a difusidade térmica do sólido e k é a condutividade de calor. Este problema foi estudado por [WAGNER - 54].

1.2 - RESULTADOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA

Definição 1.2.1:(*1)

A função beta, $\beta(z,w)$, é definida por

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{w-1}\,dt,$$

com $\mathbb{R}(z) > 0$, $\mathbb{R}(w) > 0$, z e $w \in \mathbb{C}$, sendo conhecida como integral de Euler de primeira espécie.

Definição 1.2.1:(*1)

A função gama, $\Gamma(z)$, é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\ dt,$$

com $\mathbb{R}(z) > 0$, $z \in \mathbb{C}$, sendo conhecida como integral de Euler de segunda espécie.

(*1) (vide, por exemplo, [SPAIN - 70]).

Observação 1.2.1:(*1)

A função $\beta(z,w)$ pode ser escrita como

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\ \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} .$$

Se $w = 1-z$, então $\beta(z,w) = \pi/\text{sen}\ \pi z$, desde que $\Gamma(z)\Gamma(w) = \pi/\text{sen}\ \pi z$ e $\Gamma(1)=1$.

Observação 1.2.2:(*2)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Observação 1.2.3:(*3)

$$(1-z)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha}{-\alpha} z^n , \ | z | < 1 .$$

Observação 1.2.4:(*4)

Se $\mu \neq -1, -2, -3, \dots$ então,

$$\binom{n+\mu}{\mu} = \frac{n^\mu}{\Gamma(\mu+1)} + \sum_{s=1}^{p} c_s\, n^{\mu-p} + O\,(n^{\mu-p-1}).$$

Definição 1.2.3:(*5)

A função,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} , \ \mathbb{R}(s) > 1$$

é chamada função zeta de Riemann.

(*2) (vide, por exemplo, [AVILA - 79]).

(*3) (vide, por exemplo, [CAMERON - 81]).

(*4) (vide, por exemplo, [HARDY - 49]).

(*5) (vide, por exemplo, [ABRAMOWITZ - 65]).

Definição 1.2.4:(*6)

Dizemos que uma função $f(z)$ tem um zero de ordem m em $z=z_o$, se $f^{-1}(z)$ tem uma singularidade de ordem m em $z=z_o$.

Teorema 1.2.1:(*7)

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $x_o \in X$, então f é limitada numa vizinhança de x_o, ie, existe δ tal que, com $U_\delta = X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$, o conjunto $f(U_\delta)$ é limitado.

Teorema 1.2.2:(Teorema do Valor Médio para Integrais Impróprias)(*8)

Sejam $f(x)$ contínua em $a \le x \le b$ e $g(x)$ contínua em $a \le x < b$. Suponhamos que $\lim_{x \to b^-} g(x)$ não existe, mas $g(x)$ é integrável no sentido impróprio em $a \le x \le b$. Se $g(x)$ não muda de sinal em $a \le x < b$, então existe θ, $a < \theta < b$, tal que

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = f(\theta) \int_a^b g(x)\ dx \quad .$$

Proposição 1.2.1:(Fórmula de Dirichlet para Integrais)(*9)

Para $F(s,r,t) = K(s,r)\ K(r,t)$, temos que

$$\int_a^s dr \int_a^r F(s,r,t)\ dt = \int_a^s dt \int_t^s F(s,r,t)\ dr \ ,$$

desde que a integração seja feita numa região triangular.

(*6) (vide,por exemplo, [CAMERON - 84]).

(*7) (vide, por exemplo, [LIMA - 82]).

(*8) (vide, por exemplo, [FRANCO - 82]).

(*9) (vide, por exemplo, [YOSIDA - 60]).

Teorema 1.2.3:(Fórmula do Erro na Interpolação)(*10)

Sejam $f(x) \in C^{n+1}$, num intervalo I, e $P_n(x)$ o polinômio interpolador de grau menor ou igual a n, com $P_n(x_k)=f(x_k)$, $x_k \in I$ $(k=0,1,...,n)$.

Então,

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} q_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\eta(x)) ,$$

onde $$q_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$
e

$\min_j x_j < \eta(x) < \max_j x_j$,com $\eta(x)$ dependendo de x.

Observação 1.2.5:(*11)

i - $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, se $f(x)/g(x)$ é limitado numa vizinhança de a .

ii - $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

a pode ser finito ou infinito .

1.3 - REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE SÉRIE FORMAL DE POTÊNCIA

Para desenvolver esta seção nos baseamos em [HENRICI - 74].

Definição 1.3.1:

Uma série formal de potência sobre um corpo F é uma seqüência infinita $\{ a_0, a_1, a_2, ... \}$ de elementos de F.

(*10) (vide, por exemplo, [ALBRECHT - 73]).

(*11) (vide, por exemplo, [EGGERMONT - 81]).

A série formal de potência é denotada por

$$(1.3.1) \qquad P := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad .$$

A inversa com relação à multiplicação de uma série formal de potência P é chamada recíproca de P, e é denotada por P^{-1}.

Podemos exibir propriedades algébricas da série formal de potência (1.3.1) através da associação da mesma com a matriz triangular infinita

$$(1.3.2) \qquad A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & & & a_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{bmatrix} \quad .$$

Matrizes da forma $a_{i,j} = a_{j-i}$, para $j \geq i$, e $a_{i,j} = 0$, para $j < i$, são chamadas de matrizes semi-circulantes.

A N-ésima seção A_N de uma matriz infinita A é uma sub-matriz finita,composta pelas N primeiras linhas e N primeiras colunas de A.

A associação entre (1.3.1) e (1.3.2) é denotada por $P \to A$, e dizemos que A é a matriz semi-circulante associada de P. Reciprocamente, se uma matriz semi-circulante A é dada, chamamos a série formal de potência, cujos coeficientes são os elementos da primeira linha de A, a associada de A.

É imediato que a matriz semi-circulante de uma soma de duas séries formais de potência é a soma das matrizes semi-circulantes associadas, ie, (1.3.3) se $P \to A$ e $Q \to B$, então $P + Q \to A + B$.

Assim como,

(1.3.4) se $P \to A$ e $Q \to B$, então $PQ \to AB$.

<u>De fato:</u>

Sejam $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ matrizes semi-circulantes.

Então, $C = AB = (c_{i,j})$ satisfaz

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=o}^{\infty} a_{i,k}\, b_{k,j} = \sum_{k=i}^{j} a_{i,k}\, b_{k,j} \\ &= \sum_{k=i}^{j} a_{k-i}\, b_{j-k} = \sum_{m=o}^{j-i} a_m\, b_{j-i-m} \\ &= c_{j-i} \quad , \end{aligned}$$

e $PQ = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$.

Note que $PQ = QP$, assim , obtemos que matrizes semi-circulantes comutam.

As relações (1.3.3) e (1.3.4) expressam o fato que a aplicação $\to$, do conjunto das séries formais de potência no conjunto das matrizes semi-circulantes, é um isomorfismo.

Se $a_o \neq 0$, então a série recíproca P^{-1} existe, e

se $P \to A$ e $P^{-1} \to B$, então $AB = BA = I$.

Tomando a N-ésima seção de A e de B temos que

(1.3.5) $(AB)_N = A_N B_N$, $(N=1,2,\dots)$.

Se $B = A^{-1}$, então $B_N = A_N^{-1}$.

Teorema 1.3.1:(Fórmula de Wronski) {[HENRICI - 74]}

Se $P := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ é uma série formal de potência, $a_0 \neq 0$, então os coeficientes da série recíproca $P^{-1} =: b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$ são dados por

$$(1.3.6) \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots\dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots\dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\; a_0 & a_1 \end{vmatrix} ,$$

$(n=1,2,\dots)$, com $b_0 = 1/a_0$.

Para matrizes semi-circulantes podemos ver que $||A_N||_\infty$ é uniformemente limitada, se $P_N = \sum_{r=0}^{N} a_r z^r$ possui série de Taylor absolutamente convergente no círculo unitário. Analogamente, $||A_N^{-1}||_\infty$ é uniformemente limitada se P_N^{-1}, a série recíproca, possui série de Taylor absolutamente convergente no círculo unitário. Exploraremos estes fatos no capítulo 4.

1.4 - TEORIA GERAL DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE ABEL GENERALIZADAS

Nesta seção apresentamos a solução da equação (1.1.2) com $K(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, e um teorema de existência e unicidade de solução.

Consideremos a equação (1.1.2) com $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, ie,

$$\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds = f(t)\ , \quad 0 < \alpha < 1,\ 0 \le t \le 1 \qquad (1.4.1)$$

Então, a solução é dada por

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi}\ \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \qquad (1.4.2)$$

De fato:

Multiplicando ambos os membros de (1.4.1) por $(T-t)^{\alpha-1}$, e integrando na variável t de 0 até T, obtemos que

$$\int_0^T \int_0^t \frac{(T-t)^{\alpha-1} y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds\, dt = \int_0^T (T-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \ . \qquad (1.4.3)$$

Agora, pela proposição 1.2.1,

$$\int_0^T \int_0^t \frac{(T-t)^{\alpha-1}\, y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds\, dt = \int_0^T \left[\int_s^T (T-t)^{\alpha-1} (t-s)^{-\alpha}\, dt \right] y(s) ds$$
$$= \beta(1-\alpha,\alpha) \int_0^T y(s)\, ds \ , \qquad (1.4.4)$$

desde que, para $(t-s) = u(T-s)$,

$$\int_s^T (T-t)^{\alpha-1} (t-s)^{-\alpha}\, dt = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha}\, du$$
$$= \beta(1-\alpha,\alpha) \qquad (\text{definição } 1.2.1) \ .$$

Note que $\beta(1-\alpha,\alpha)$ existe, pois $0 < \alpha < 1$.

Assim,

$$\int_0^T y(s)\ ds = \frac{1}{\beta(1-\alpha,\alpha)} \int_0^T (T - t)^{\alpha-1} f(t)\ dt.$$

Diferenciando ambos os membros, obtemos que

$$y(T) = \frac{1}{\beta(1-\alpha,\alpha)} \frac{d}{dT} \int_0^T (T - t)^{\alpha-1} f(t)\ dt$$

$$= \frac{\text{sen}\ \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dT} \int_0^T (T - t)^{\alpha-1} f(t)\ dt,$$

pela observação 1.2.1.

Portanto, a solução de (1.4.1) é

$$y(t) = \frac{\text{sen}\ \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s)\ ds \quad .$$

O resultado que apresentamos a seguir é um teorema de existência e unicidade para EIAG.

Teorema 1.4.1:([CAMERON - 81], [WEISS - 72,72a])

Se

i - $k(t,t) \neq 0,\ t \in [0,1]$;

ii - $k(t,s)$ e $\frac{\partial}{\partial t} k(t,s)$ são contínuas em $0 \leq s \leq t \leq 1$;

iii - $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t - s)^{1-\alpha}}\ ds \in C\ [0,1]$,

então, (1.1.2) tem uma única solução $y(t) \in C\ [0,1]$.

Para demonstrar que (1.1.2) tem uma única solução transformamos-a numa EIAG de segunda espécie, e então, por teoremas de existência e unicidade de solução para equações integrais de segunda espécie temos o resultado procurado.

Teoremas de existência e unicidade para EIV e EIAG de segunda espécie são encontrados em [HOCHSDAT - 73] e [YOSIDA - 60], por exemplo.

Agora, transformamos (1.1.2) numa equação de segunda espécie.

Suponhamos $\frac{\partial}{\partial t} k(t,s)$ contínua, $|k(t,t)| > 0$ e, sem perda de generalidades, $k(t,t) = 1$.

Definimos o operador H por

$$(1.4.4) \qquad H\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds .$$

Aplicando (1.4.4) em (1.1.2) obtemos que

$$(1.4.5) \qquad \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \left[\int_z^t \frac{k(s,z)}{(t-s)^{1-\alpha} (s-z)^{\alpha}} ds \right] y(z)\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds .$$

Seja $s = z + r(t - z)$. Então,

$$\int_z^t \frac{k(s,z)}{(t-s)^{1-\alpha} (s-z)^{\alpha}} ds = \int_0^1 \frac{k(z+r(t-z),z)}{r^{\alpha} (1-r)^{1-\alpha}} dr .$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\ \frac{d}{dt}\int_0^t\left[\int_z^t \frac{k(s,z)}{(t-s)^{1-\alpha}\ (s-z)^{\alpha}}\, ds\right] y(z)\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\ \frac{d}{dt}\int_0^t\left[\int_0^1 \frac{k(z+r(t-z),z)}{r^{\alpha}\ (1-r)^{1-\alpha}}\, dr\right] y(z)\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left\{ k(t,t)\ y(t)\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha}\ (1-r)^{1-\alpha}}\, dr\right.$$

$$\left. + \int_0^t\left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\, k(z+r(t-z),z)\ \frac{r}{r^{\alpha}\ (1-r)^{1-\alpha}}\, dr\right] y(z)\, dz\right\}$$

$$= y(t) + \int_0^t\left[\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} k(z+r(t-z),z)\left(\frac{r}{1-r}\right)^{1-\alpha} dr\right] y(z)\, dz,$$

usando o fato que $k(t,t) = 1$ e a observação 1.2.1 .

Então,

$$(1.4.6)\quad y(t) + \int_0^t\left[\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\, k(z+r(t-z),z)\left(\frac{r}{1-r}\right)^{1-\alpha} dr\right] y(z)\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\ \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds\ .$$

(1.4.6) é uma equação integral de segunda espécie, que tem uma única solução.

Notemos que a recíproca também é verdadeira.

Portanto, (1.1.2) tem uma única solução $y(t) \in C\,[0,1]$.

1.5 - LEMA DE GRONWALL

Para provar a convergência de um método integração produto é necessário obter um limitante entre a diferença da solução exata e da aproximada em $t = t_i$. Comumente, esse erro é expresso na forma

$$| \varepsilon_i | \leq hM \sum_{j=0}^{i-1} | \varepsilon_j | + \delta , \quad (i=1,2,...,N) .$$

Isto pode ser feito utilizando o seguinte lema, conhecido como lema de Gronwall.

Lema 1.5.1:

Se x_j $(j=0,1,...,N)$ é uma seqüência de números reais com

$$| x_i | \leq hM \sum_{j=0}^{i-1} | x_j | + \delta , \quad (i=1,2,...,N),$$

onde $M > 0$, independe de h, e $\delta > 0$, então

$$(1.5.1) \qquad | x_i | \leq (hM | x_o | + \delta) e^{Mih}, \quad (i=1,2,...,N) .$$

1.6 - MÉTODO NUMÉRICO : MÉTODO INTEGRAÇÃO PRODUTO

Seja

$$(1.6.1) \qquad I(f) = \int_o^t F(s)\, ds = \int_o^t \omega(s)\, f(s)\, ds = I(\omega,f) ,$$

$0 \leq t \leq 1$, onde a notação acima considera a possibilidade do integrando F(s) ser fatorado numa parte suave f(s) e numa não suave $\omega(s)$. As técnicas de quadraturas numéricas usuais para o cálculo de I(f) aproximam F(s) por algum elemento de uma família de funções suaves $\{ F_n(s) \}$, dependendo de um parâmetro n, que podem ser integradas analiticamente.

[YOUNG - 54] identificou e aplicou a técnica (1.6.1). Considerou que técnicas de quadraturas numéricas para tais integrais deveriam levar em conta, explicitamente, o fato de que as fatorações do integrando F(s) existissem. Então o objetivo é escolher uma fatoração de F(s) em partes suave e não suave f(s) e $\omega(s)$, respectivamente. Escolhe-se uma família de funções suaves $\{ f_n(s) \}$, aproximação para f, tal que as integrais

$$I(\omega, f_n(s)) = \int_0^t \omega(s)\, f_n(s)\, ds \tag{1.6.2}$$

possam ser calculadas analiticamente.

Uma escolha comum de $\{ f_n(s) \}$ é

$$f(s) \simeq f_n(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \phi_i(s) \tag{1.6.3}$$

tal que

$$I(\omega, \phi_i(s)) = \int_0^t \omega(s)\, \phi_i(s)\, ds \tag{1.6.4}$$

é calculada analiticamente.

Justificativas para a introdução de métodos integração produto para resolução de EIAG são apresentadas por vários autores, por exemplo, [WEISS - 72,72a], [ATKINSON - 74], entre outros.

Nos capítulos posteriores analisamos o método integração produto do trapézio para resolução de EIAG.

Apresentamos o Método Integração Produto do Trapézio para resolução de Equações Integrais de Abel Generalizadas.

Analisamos teoremas de convergência para esse método ([WEISS - 72a]). Mostramos que a ordem de convergência é dois para $\alpha \in [0.2117,1]$.

2.1 - PRELIMINARES

Seja $\{ t_i = ih, (i=0,1,...,N=1/h)\}$ uma malha com tamanho de passo h.

Definimos o operador restrição

$$\Delta_h : C[0,1] \to \mathbb{R}^{N+1}$$

tal que

$$\Delta_h \ \phi(t) = (\phi(t_0), \ \phi(t_1),...,\phi(t_N))^t .$$

Sejam y_i e f_i aproximações para $y(t_i)$ e $f(t_i)$, respectivamente, $k_{i,j} = k(t_i,t_j)$ e $\varepsilon_i = y_i - y(t_i)$.

Definição 2.1.1: ([WEISS - 72a])

Dizemos que um método é convergente se, e somente se,

$$|| y_N - \Delta_h y ||_\infty \to 0 \ , \text{ quando } N \to \infty \ .$$

É convergente de ordem p, se p é o maior valor para o qual existe uma constante C > 0, finita, e um $h_o > 0$, tal que

$$|| y_N - \Delta_h y ||_\infty \leq Ch^p \ ,$$

para todo $h \in (0,h_o]$.

A seguir, apresentamos um lema do tipo Gronwall, importante à conclusão do teorema de convergência.

Lema 2.1.1: ([WEISS - 72])

Sejam $x_i \in \mathbb{R}$ (i=0,1,2,...) satisfazendo

$$| x_o | \leq | b_o |$$

e

$$| x_i | \leq \Big| \sum_{j=o}^{i-1} a_{i,j} x_j + b_i \Big| \quad (i=1,2,\ldots),$$

onde

$$\rho_i = 1 - \sum_{j=o}^{i-1} |a_{i,j}| > 0 \ ,$$

$$| b_o | \leq K \ ,$$

e

$$| b_i | \leq K\rho_i \quad (i=1,2,\ldots), \text{ com } K > 0.$$

Então,

$$| x_i | \leq K \ , \quad (i=0,1,2,\ldots), \ K > 0.$$

Prova:

A demonstração é feita por indução.

a. Para $i=0$, temos que $|x_o| \le |b_o| \le K$, por hipótese.

b. Suponhamos válido para $i=p-1$, ou seja, $|x_{p-1}| \le K$.

c. Mostremos para $i=p$.

$$|x_p| \le \left|\sum_{j=0}^{p-1} a_{p,j}\, x_j + b_p\right| = |a_{p,o}x_o + a_{p,1}\, x_1 + \ldots + a_{p,p-1}\, x_{p-1} + b_p|$$

$$\le |a_{p,o}|K + |a_{p,1}|K + \ldots + |a_{p,p-1}|K + K\left(1 - \sum_{j=0}^{p-1} |a_{p,j}|\right)$$

$$= K \ .$$

Portanto,

$$|x_i| \le K \ , \ (i=0,1,2,\ldots) \ .$$

2.2 - MÉTODO INTEGRAÇÃO PRODUTO DO TRAPÉZIO (MIPT)

A equação (1.1.2) pode ser reescrita na forma

$$\text{(2.2.1)} \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{k(t_i,s)\; y(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\, ds = f_i \ , \ (i=1,2,\ldots,N) \ .$$

Substituindo $k(t_i,s)\; y(s)$ por

$$[\ (t_{j+1} - s)k_{i,j}\; y_j + (s - t_j)k_{i,j+1}\; y_{j+1}\ ] \ / \ h \ ,$$

$\{t_j \le s \le t_{j+1},\ (j=0,1,\ldots,i-1)\}$, e fazendo $s - t_j = t$ obtemos que

$$\sum_{j=o}^{i-1}\left[\frac{k_{i,j}\ y_j}{h}\int_o^h \frac{(h-t)}{((i-j)h-t)^{\alpha}}\,dt + \frac{k_{i,j+1}\ y_{j+1}}{h}\int_o^h \frac{t}{((i-j)h-t)^{\alpha}}\,dt\right]$$

$$= f_i \ , \ (i=1,2,\ldots,N).$$

Seja $(i-j)h-t = \ell h - t = u$, com $\ell = i - j$.

Logo,

$$\frac{h^{1-\alpha}\ \phi(\alpha)}{h^{1-\alpha}\ \phi(\alpha)}\sum_{j=o}^{i-1}\left[\frac{k_{i,j}\ y_j}{h}\int_{(l-1)h}^{lh}\frac{u-(\ell-1)h}{u^{\alpha}}\,du + \frac{k_{i,j+1}\ y_{j+1}}{h}\int_{(l-1)h}^{lh}\frac{\ell h-u}{u^{\alpha}}\,du\right]$$

$$= f_i \ , \ (i=1,2,\ldots,N).$$

Então,

$$(2.2.2)\quad \sum_{j=1}^{i} y_j\ k_{i,j}\ W_{i-j} = \frac{f_i}{h^{1-\alpha}\ \phi(\alpha)} - y_o\ k_{i,o}\ \overline{W}_i, \ (i=1,2,\ldots,N)$$

onde

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} ,$$

$$W_o = \frac{1}{h^{2-\alpha}\ \phi(\alpha)}\int_o^h \frac{h-u}{u^{\alpha}}\,du = 1 ,$$

$$W_l = \frac{1}{h^{2-\alpha}\ \phi(\alpha)}\left[\int_{(l-1)h}^{lh}\frac{u-(\ell-1)h}{u^{\alpha}}\,du + \int_{lh}^{(l+1)h}\frac{(\ell+1)h-u}{u^{\alpha}}\,du\right]$$

$$= (\ell+1)^{2-\alpha} - 2\,\ell^{2-\alpha} + (\ell-1)^{2-\alpha} , \ (\ell=1,2,\ldots,N-1)$$

e

$$\bar{W}_l = \frac{1}{h^{2-\alpha}\,\phi(\alpha)} \int_{(l-1)h}^{lh} \frac{u-(\ell-1)h}{u^{\alpha}}\,du$$

$$= \frac{1}{\phi(\alpha)}\left[\frac{1}{2-\alpha}\left(\ell^{2-\alpha} - (\ell-1)^{2-\alpha}\right) - \frac{\ell-1}{1-\alpha}\left(\ell^{1-\alpha} - (\ell-1)\right)\right],$$

$(\ell=1,2,\ldots,N)$.

(2.2.2) é o Método Integração Produto do Trapézio,o qual fornece a solução em um ponto de cada vez.

O valor inicial, y_o, é dado por

$$(2.2.3) \qquad y_o = \tilde{y}_o = \lim_{t\to o} \frac{(1-\alpha)\ t^{\alpha-1}\cdot f(t)}{k_{o,o}} \quad ,$$

o qual existe, desde que (1.1.2) tem uma única solução contínua.

A seguir, obtemos uma expressão para o erro no método do trapézio, quando $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$. A mesma será usada na demonstração do teorema de convergência.

Sejam $\bar{M}(s)$,

$$\bar{M}(s) = [(t_{j+1} - s)\ y_j + (s - t_j)\ y_{j+1}]\ /\ h\ ,$$

$\{t_j \le s \le t_{j+1}, (j=0,1,\ldots,i-1)\}$, $(i=1,2,\ldots,N)$, e

$$e(s) = \bar{M}(s) - y(s)\ .$$

Por subtração , obtemos que

$$\frac{1}{h^{1-\alpha}\,\phi(\alpha)}\left[\int_0^{t_i}\frac{\bar{M}(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\,ds - \int_0^{t_i}\frac{e(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\,ds - f_i\right] = 0,$$

(i=1,...,N), de (2.2.2).

Então,

$$(2.2.4)\qquad \sum_{j=1}^{i}\varepsilon_j\,W_{i-j} = -\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)}\left[\int_0^{t_i}\frac{e(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\,ds\right] - \varepsilon_o\,\bar{W}_i,$$

(i=1,2,...,N) .

Substituindo i por i+1 em (2.2.4), e fazendo a diferença, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{i+1}\varepsilon_j\,W_{i+1-j} - \sum_{j=1}^{i}\varepsilon_j\,W_{i-j} = -\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)}\int_0^{t_{i+1}}\frac{e(s)}{(t_{i+1} - s)^{\alpha}}\,ds$$

$$+\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)}\int_0^{t_i}\frac{e(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\,ds - \varepsilon_o\,\bar{W}_{i+1} + \varepsilon_o\,\bar{W}_i.$$

Logo,

$$(2.2.5)\qquad \varepsilon_{i+1} = \sum_{j=1}^{i}\varepsilon_j\,(W_{i-j} - W_{i+1-j})$$

$$-\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)}\left[\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e(s)\left(\frac{1}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}} - \frac{1}{(t_i-s)^{\alpha}}\right)ds\right.$$

$$\left.+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{e(s)}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}}\,ds\right] + \varepsilon_o(\bar{W}_i - \bar{W}_{i+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{i}\varepsilon_j\,a_{i-j} + b_i\ ,(i=1,2,...,N-1),$$

onde

$$a_o = 3 - 2^{2-\alpha}\qquad ,$$

$$a_{i-j} = W_{i-j} - W_{i+1-j}\ ,\ (i=1,2,...,N-1),$$

$$b_i = -\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)}\left[\sum_{j=o}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e(s)\left(\frac{1}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}} - \frac{1}{(t_i-s)^{\alpha}}\right] ds\right.$$

$$\left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{e(s)}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}} ds \right] + \varepsilon_o(\overline{W}_i - \overline{W}_{i+1})$$

$$= -\frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)} \beta_i^1 + \beta_i^2 ,$$

com

$$(2.2.6) \qquad \beta_i^1 = \sum_{j=o}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e(s)\left(\frac{1}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}} - \frac{1}{(t_i-s)^{\alpha}}\right] ds$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{e(s)}{(t_{i+1}-s)^{\alpha}} ds$$

e

$$\beta_i^2 = \varepsilon_o(\overline{W}_i - \overline{W}_{i+1}) \ , \ (i=1,2,...,N-1).$$

O lema a seguir faz estimativas para β_i^1 e β_i^2,o qual será usado na demonstração do teorema 2.2.1 .

Lema 2.2.1:([WEISS - 72a])

Se

$$| \varepsilon_o | \le C_1 \ h^2,$$

então

$$| \beta_i^1 | \le C_2 \ h^{3-\alpha} \ i^{-\alpha}$$

e

$$| \beta_i^2 | \le C_3 \ h^2 \ i^{-1-\alpha} \ , \ (i=1,2,...,N-1),$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas.

Prova:

Por um teorema de interpolação, temos que

$$e(s) = \frac{1}{2}(s - t_j)(t_{j+1} - s)\, y^{(2)}(t_j) + r_j(s),$$

$$\{t_j \le s \le t_{j+1} \ (j=0,..N-1)\}, \text{com } |r_j(s)| \le \frac{1}{8} F_3 h^3, \ F_3 = \max_{0 \le t \le 1} y^{(3)}(t).$$

Podemos reescrever β_i^1 como

$$\beta_i^1 = h^{3-\alpha} \left(y^{(2)}(t_i)\, \gamma - \sum_{j=0}^{i-1} y^{(2)}(t_j)\, \theta_{i-j-1} \right) + \delta_i \ ,$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2\, h^{3-\alpha}} \int_0^h s^{1-\alpha} (h - s)\, ds \ ,$$

$$\theta_l = \frac{1}{2\, h^{3-\alpha}} \int_0^h s\,(h - s) \left(\frac{1}{(\ell h + s)^{\alpha}} - \frac{1}{((\ell+1)h + s)^{\alpha}} \right) ds,$$

$$\delta_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{r_i(s)}{(t_{i+1} - s)^{\alpha}}\, ds - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{1}{(t_i - s)^{\alpha}} - \frac{1}{(t_{i+1} - s)^{\alpha}} \right) r_j(s)\, ds.$$

Então,

$$|\delta_i| \le M_1 h^{4-\alpha} \ , \ M_1 > 0 \ (i=1,...,N-1) \ ,$$

$$0 < \theta_0 \ , \ 0 < \theta_l < M_2\, \ell^{-1-\alpha} \ , \ M_2 > 0 \ , \ \ell \ge 1 \ ,$$

e

$$\left|\gamma - \sum_{l=0}^{i-1} \theta_l \right| \le M_3\, i^{-\alpha} \ , \ M_3 > 0 \ , \ i \ge 1.$$

Por somas parciais, temos que

$$\sum_{j=0}^{i-1} y^{(2)}(t_j)\ \theta_{i-j-1} = y^{(2)}(t_{i-1}) \sum_{l=0}^{i-1} \theta_l$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{i-1} (y^{(2)}(t_{i-\nu-1}) - y^{(2)}(t_{i-\nu})) \sum_{l=\nu}^{i-1} \theta_l,$$

(i=2,...,N-1).

Então,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{i-1} (y^{(2)}(t_{i-\nu-1}) - y^{(2)}(t_{i-\nu})) \sum_{l=\nu}^{i-1} \theta_l \right| \le M_4\ h\ i^{1-\alpha},$$

(i=2,...,N-1), $M_4 > 0$.

Agora, temos que

$$\left| y^{(2)}(t_i)\ \gamma - \sum_{j=0}^{i-1} y^{(2)}(t_j)\ \theta_{i-j-1} \right|$$

$$\le \left|y^{(2)}(t_i)\ (\gamma - \sum_{l=0}^{i-1} \theta_l)\right| + \left|y^{(2)}(t_i) - y^{(2)}(t_{i-1})\right| \sum_{l=0}^{i-1} \theta_l + M_4 h i^{1-\alpha}$$

$$\le F_2\ M_3\ i^{-\alpha} + \gamma\ F_3\ h + M_4\ h\ i^{1-\alpha},\ F_2 = \max_{0\le t\le 1}\ y^{(2)}(t), (i=1,...,N-1).$$

Desde que

$$h = 1/N \le 1/i \quad (i=1,...,N) \ ,$$

segue que

$$|\ \beta_i^1\ | \le C_2\ h^{3-\alpha}\ i^{-\alpha}\ , \quad (i=1,...,N-1)\ .$$

A outra desigualdade do lema é obtida através da expansão assintótica de ($\overline{W}_i - \overline{W}_{i+1}$).

A seguir, provamos um teorema de convergência para o MIPT, quando $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$.

Teorema 2.2.1: ([WEISS - 72a])

Se $y(t)$ é três vezes diferenciável e $y^{(3)}(t)$ é limitada para $0 \leq t \leq 1$, então, para $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, e $\alpha \in (\alpha_1,1)$, com $\alpha_1 \simeq 0.2117$, (2.2.2) é convergente de ordem 2.

Prova:

A idéia básica da demonstração consiste em três etapas:

I - estimativa de $|b_i|$ $(i=1,2,...,N-1)$;

II - construção da equação erro (2.2.5);

III - aplicação do lema 2.1.1 .

Temos que ,

$$|b_i| \leq \left| \frac{\beta_i^1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)} \right| + \left| \beta_i^2 \right| \leq C_4\, h^2\, i^{-\alpha} , \tag{2.2.7}$$

$(i=1,2,...,N-1)$, usando o lema 2.2.1, com $C_4 > 0$.

Agora,

$$\sum_{l=0}^{i-1} a_l = \sum_{l=0}^{i-1} (W_l - W_{l+1}) = 1 - W_i \ ,(i \geq 1), \tag{2.2.8}$$

desde que $W_0=1$; onde

$$a_l > 0 \ , \ \ell \geq 1 \ ; \tag{2.2.9}$$

$$0 \leq a_0 < 1 \ , \ \alpha \in [\alpha_0,1) \ ; \tag{2.2.10}$$

(2.2.11) $$-1 < a_o < 0 \ , \ \alpha \in (0,\alpha_o) \ ,$$

com $a_o = 3 - 2^{2-\alpha}$ e $\alpha_o \simeq 0.4150$.

Escrevendo $a_o^1 = 0$ e $a_l^1 = a_l + a_o \ a_{l-1}$, $\ell \geq 1$, temos que

$$a_1^1 > 0 \ , \ \alpha \in (0,1) \ ;$$

(2.2.12) $$a_l^1 \geq 0 \ , \ \ell \geq 2 \ , \ \alpha \in [\alpha_1, 1),$$

com $\alpha_1 \simeq 0.2117$; e

$$a_2^1 < 0 \ , \ \alpha \in (0,\alpha_1).$$

Estas desigualdades são conseqüências da estrutura do $\{a_l(\alpha), \ \ell \geq 0\}$

Podemos reescrever a equação erro (2.2.5) como

(2.2.13) $$\varepsilon_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j \ a_{i-j}^1 + b_i + a_o \ b_{i-1}, \ (i=2,3,\ldots,N-1).$$

Temos, pela equação (2.2.8), que

$$\sum_{l=0}^{i-1} a_l^1 = \sum_{l=1}^{i-1} a_l + a_o \sum_{l=1}^{i-1} a_{l-1} = 1 - (W_i + a_o \ W_{i-1}) \ ,$$

para $i \geq 2$; e

$$W_i = a_i + W_{i+1} = \sum_{\nu=i}^{\infty} a_\nu \ , \ i \geq 0 \ .$$

De (2.2.12), segue que ,

$$W_i + a_o\, W_{i-1} = \sum_{\nu=i}^{\infty} (a_\nu + a_o\, a_{\nu-1})$$

$$= \sum_{\nu=i}^{\infty} a_\nu^1 \quad , i \geq 2 \ , \ \alpha \in [\alpha_1, 1) \ .$$

Como,

$$W_i = (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)\ i^{-\alpha} + O(i^{-2-\alpha}) \ ,$$

obtemos que

(2.2.14) $$\sum_{l=o}^{i-1} a_l^1 = 1 - (W_i + a_o W_{i-1}) \leq 1 - C_5\, i^{-\alpha} \ ,$$

$(i=2,3,\ldots,N-1)$, $\alpha \in [\alpha_1, 1)$ e $C_5 > 0$.

De (2.2.4).

$$\varepsilon_1 = - \frac{1}{h^{1-\alpha}\phi(\alpha)} \int_o^{t_1} \frac{e(s)}{(t_1 - s)^\alpha}\, ds - \varepsilon_o\, \overline{W}_1 \ ,$$

desde que $W_o=1$.

Então,

(2.2.15) $$|\varepsilon_1| \leq C_6\, h^2 \quad , \ C_6 > 0 \ ,$$

usando o fato que o erro na interpolação linear é da ordem de h^2.

De maneira análoga, temos que

$$|\varepsilon_2| \le C_7\, h^2 \,, C_7 > 0 \,.$$

Com base em (2.2.15), (2.2.14), (2.2.12) e (2.2.7), podemos aplicar o lema 2.1.1 na equação (2.2.13) para concluir que

$$|\varepsilon_i| \le C_8\, h^{2} \,, \ (i=0,1,\dots,N),\ \alpha \in [\alpha_1,1),\ C_8 > 0 \,.$$

Portanto,o Método Integração Produto do Trapézio é convergente de ordem 2 para $\alpha \in [\alpha_1,1)$, com $\alpha_1 \simeq 0.2117$.

O resultado geral de convergência é dado pelo teorema 2.2.2 .

Teorema 2.2.2:([WEISS - 72])

Se

i - $y(t)$ satisfaz as condições do teorema 2.2.1;

ii - $k(t,s) \in C^2[0,1]$ para $0 \le s \le t \le 1$; e

iii - $\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}k(t,s)$ e $\dfrac{\partial^3}{\partial t\ \partial s^2}k(t,s)$ são limitadas para $0 \le s \le t \le 1$, então, para $\alpha \in [\alpha_1,1)$, (2.2.1) é convergente de ordem 2.

A demonstração deste teorema segue a mesma linha do anterior.

Nos experimentos numéricos, [WEISS - 72a] notou que convergência de ordem 2 ocorria para todo $\alpha \in (0,1)$, mas não conseguiu provar esse fato.

As demonstrações dos teoremas 2.2.1 e 2.2.2 são adaptações de demonstrações feitas por [LINZ - 69], para EIV com núcleos contínuos.

2.3 - CONCLUSÃO

O fato de [WEISS - 72a] não ter conseguido provar convergência de ordem 2 para todo $\alpha \in (0,1)$ reside no lema 2.1.1, que requer monotonicidade estrita dos elementos em cada coluna da matriz do sistema triangular inferior (2.2.2), e isso é raro acontecer em métodos do tipo integração produto (vide [CAMERON - 81]).

No capítulo anterior foi mostrado que o método integração produto do trapézio apresentava convergência de ordem 2, para $\alpha \in [0.2117,1)$, mas que computacionalmente essa convergência ocorria para todo $\alpha \in (0,1)$.

Neste capítulo analisamos o método integração produto do trapézio baseados em [EGGERMONT - 81], provando que convergência de ordem 2 acontece para todo $\alpha \in (0,1)$.

3.1 - INTRODUÇÃO

Seja s_j $(j=1,2,...,N)$ em $[0,1]$, $s_j < s_{j+1}$. Através dos valores não conhecidos de $y(s_j)$ $(j=1,2,...,N)$, calculamos uma aproximação $Y(t)$ para $y(t)$ em $[0,1]$, por interpolação linear. Suponhamos que $Y(t)$ seja um funcional linear do vetor N-dimensional,

$$(3.1.1) \qquad \Delta_h y = (y(s_1),y(s_2),...,y(s_N))^t \quad .$$

Então, podemos aproximar o lado esquerdo de (1.1.2) por

$$\int_0^t \frac{k(t,s)\ Y(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad ,$$

ou por

$$(3.1.2) \qquad I_N y(t) = \int_0^t \frac{K(t,s)\ Y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds \ ,$$

onde $K(t,s)$ é uma aproximação para $k(t,s)$.

Notemos que para cada t fixado, $I_N y(t)$ é um funcional linear de $\Delta_h y$.

Sejam t_j $(j=1,2,\dots,N)$ pontos arbitrários em $[0,1]$, com $t_j < t_{j+1}$.

Denotamos

$$(3.1.3) \qquad \Delta_N y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^t \ .$$

Desde que $I_N y(t)$ é linear em $\Delta_h y$, existe uma matriz $A_k \in \mathbb{R}^{N\times N}$,que depende de $k(t,s)$, tal que

$$(3.1.4) \qquad \Delta_h I_N y = A_k \Delta_h y \ .$$

A_k será uma matriz triangular inferior não singular, desde que façamos escolha apropriada para t_j e s_j $(j=1,2,\dots,N)$. Então, podemos calcular uma aproximação y_N para $\Delta_h y$, resolvendo o sistema de equações

$$(3.1.5) \qquad A_k y_N = \Delta_h f \ .$$

Temos, dos fatos acima, que

(3.1.6) $$A_k(y_N - \Delta_h y) = E_N ,$$

onde

(3.1.7) $$E_N = \Delta_h \left[\int_0^t \frac{k(t,s)\ y(s) - K(t,s)\ Y(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds \right]$$

é o erro de discretização.

De (3.1.6), segue que

(3.1.8) $$y_N - \Delta_h y = A_k^{-1} E_N .$$

Podemos escrever A_k^{-1} como

(3.1.9) $$A_k^{-1} = (A^{-1} A_k)^{-1} A^{-1},$$

onde A é a matriz A_k quando $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$.

Verificaremos, posteriormente (apêndice A), que para o método do trapézio,

(3.1.10) $$A = \frac{1}{N^{1-\alpha}} C_N ,$$

onde $C_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz semi-circulante, cujos elementos são independentes de N.

Uma estimativa para $\| y_N - \Delta_h y \|_\infty$ é dada por

(3.1.11) $$\| y_N - \Delta_h y \|_\infty < N^{1-\alpha} \| (A^{-1} A_k)^{-1} \|_\infty \| C_N^{-1} E_N \|_\infty ,$$

usando (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.10).

3.2 - MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO : UMA NOVA ANÁLISE PARA O MÉTODO INTEGRAÇÃO PRODUTO DO TRAPÉZIO

A discretização consiste em substituir (1.1.2) por um conjunto de equações lineares. Primeiramente, consideramos (1.1.2) para $t_i=i/N$ $(i=1,2,\ldots,N)$, e substituímos cada equação

$$(3.2.1) \qquad \int_0^{i/N} \frac{k(i/N,s)\ y(s)}{((i/N)-s)^{\alpha}}\, ds = f(i/N)\ ,\ (i=1,2,\ldots,N),$$

por uma equação linear, através da discretização das integrais do lado esquerdo.

Denotamos $k(i/N,w/N)$ por $k_{i,w}$; $y(w/N)$ por y_w ; w/N por t_w ; $y(s)\ k(i/N,s)$ por $h_i(s)$.

No método integração produto do trapézio substituímos o lado esquerdo de (3.2.1) por :

$$(3.2.2) \qquad N \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(s-t_{j-1})h_{i,j} + (t_j - s)h_{i,j-1}}{(t_i - s)^{\alpha}}\, ds\ ,$$

onde $h_{i,j}=y_j\ k_{i,j}$.

Podemos escrever a expressão acima na seguinte forma

$$(3.2.3) \qquad \sum_{j=1}^{i} (h_{i,j}\ a_{i,j}^{(1)} + h_{i,j-1}\ a_{i,j}^{(2)}),$$

onde

$$a^{(1)}_{i,j} = N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{s - t_{j-1}}{(t_i - s)^{\alpha}} \, ds = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{z}{(i - j + 1 - z)^{\alpha}} \, dz$$

e

$$a^{(2)}_{i,j} = N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{t_j - s}{(t_i - s)^{\alpha}} \, ds = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{1 - z}{(i - j + 1 - z)^{\alpha}} \, dz ,$$

com $z = N\,(s - t_{j-1})$.

Então,(3.2.2) pode ser reescrita como

$$\text{(3.2.4)} \qquad \frac{N^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} \left[h_{i,o}\ \tilde{\phi}_i + \sum_{j=1}^{i} h_{i,j}\ \phi_{i-j} \right] ,$$

onde

$$\phi_o = 1 \quad ,$$

$$\text{(3.2.5)} \qquad \phi_\ell = (\ell + 1)^{2-\alpha} - 2\ \ell^{2-\alpha} + (\ell - 1)^{2-\alpha} \ , \ \ell \geq 1$$

e

$$\tilde{\phi}_\ell = -\ell^{2-\alpha} + (\ell - 1)^{2-\alpha} + (2 - \alpha)\ \ell^{1-\alpha} \ , \ \ell \geq 1.$$

O erro de discretização é dado por

$$\text{(3.2.6)} \quad E_{N,i} = \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{N(s - t_{j-1})h_{i,j} + N(t_j - s)h_{i,j-1} - h_i(s)}{(t_i - s)^{\alpha}} \, ds.$$

Assim, temos o sistema de equações

$$\text{(3.2.7)} \qquad A_k \Delta_h y = \Delta_h f + E_N \ .$$

Se A_k é não singular, então

$$(3.2.8) \qquad \Delta_h y = A_k^{-1}\Delta_h f + A_k^{-1}E_N ,$$

onde o vetor $A_k^{-1}\Delta_h f$ pode ser calculado e é uma aproximação para $\Delta_h y$.

Portanto, o conjunto de equações lineares para o método do trapézio é dado por

$$(3.2.9) \qquad \frac{N^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} \left[A_k\Delta_h y + \Phi_k \right] = \Delta_h f + E_N ,$$

onde

$$(3.2.10) \qquad (A_k)_{i,j} = \begin{cases} k_{i,j}\ \phi_{i-j} , & 1 \le j \le i \le N \\ 0 & , \text{no resto} \end{cases} ,$$

$$(3.2.11) \qquad (\Phi_k)_i = k_{i,o}\ y_o\ \tilde{\phi}_i ,$$

e E_N é dado pela expressão (3.2.6).

A equação (3.2.9) é um sistema de N equações em N+1 incógnitas.Podemos calcular uma aproximação $\tilde{y}_o$ para y(0) dada por

$$(3.2.12) \qquad y(0) = \lim_{t\to o} \frac{(1-\alpha)\ t^{\alpha-1}\ f(t)}{k(0,0)} .$$

Usaremos

$$(3.2.13) \qquad y(0) = \frac{(1-\alpha)}{K(0,0)} \left[3\ F(\frac{1}{N}) - 3\ F(\frac{2}{N}) + F(\frac{3}{N}) \right] + e_{N,o} ,$$

onde $F(t) = t^{\alpha-1} f(t)$.

Substituindo (3.2.13) em (3.2.9), obtemos que

$$\text{(3.2.14)} \qquad \frac{N^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} A_k \Delta_h y = \Delta_h f - \frac{N^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} \tilde{\Phi}_k\ \mu_k + \tilde{E}_N ,$$

onde

$$\text{(3.2.15)} \qquad (\tilde{\Phi}_k)_i = k_{i,o} \frac{(1-\alpha)}{k(0,0)} \left[3\ F(\frac{1}{N}) - 3\ F(\frac{2}{N}) + F(\frac{3}{N}) \right],$$

$$(\mu_k)_i = \tilde{\phi}_i ,$$

e

$$\text{(3.2.16)} \qquad \tilde{E}_{N,i} = E_{N,i} + E_{N,o} ,$$

com

$$E_{N,o} = \frac{-\ N^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} \left(k_{i,o}\ y(0) - (\tilde{\Phi}_k)_i \right) \tilde{\phi}_i,$$

onde $E_{N,o}$ resulta de (3.2.13).

3.3 - TEORIA BÁSICA PARA O CASO DISCRETO

Estimamos a inversa da matriz dos coeficientes para EIAG quando $k(t,s)=1, \forall t$ e $\forall s$, utilizando métodos assintóticos, assim como, analisamos a norma da matriz inversa dos coeficientes no caso geral.

Para demonstrar o lema 3.3.1 precisamos do seguinte resultado :

Teorema 3.3.1:([DE BRUIJN - 53])

Seja $\{g_n\}$ satisfazendo

$$g_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n = 1, \quad \frac{g_n}{g_{n-1}} < \frac{g_{n+1}}{g_n} < 1, \; n > 1 \; . \tag{3.3.1}$$

Definimos $\{f_n\}$ por :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n \right]^{-1}. \tag{3.3.2}$$

Então,

$$f_n > 0, \quad \frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{f_{n+1}}{f_n} < 1, \; n > 1 \; . \tag{3.3.3}$$

Além disso, se

$$s(y) = \sum_{k \leq y} \sum_{n=k}^{\infty} g_n \tag{3.3.4}$$

satisfaz

$$\frac{s(py)}{s(y)} \sim p^{\beta} \; , \; y \to \infty \; , \tag{3.3.5}$$

para algum $\beta \in [0,1)$, independente de p, então

$$f_n \sim \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi\beta} \frac{1}{s(n)} \; , n \to \infty \; , \tag{3.3.6}$$

e

$$f_{n-1} - f_n \sim \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi} \frac{1}{n \; s(n)} \; , \; n \to \infty \; . \tag{3.3.7}$$

Os lemas a seguir são fundamentais para as demonstrações dos teoremas 3.3.2 e 3.3.3 .

Lema 3.3.1: ([EGGERMONT - 81])

Seja

$$(A^{-1})_{i,j} = \begin{cases} d_{i-j} & , i \geq j \\ 0 & , \text{no resto} \end{cases} . \tag{3.3.8}$$

Então,

$$d_l = - \frac{1}{(2-\alpha)} \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \ell^{-2+\alpha} (1 + o(1)) \ , \ \ell \to \infty \ ,$$

e

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_l = 0 \ ,$$

onde d_l não depende de N.

Prova:

Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right]^{-1}, \tag{3.3.9}$$

numa vizinhança de x=0, usando o teorema 1.3.1.

Analisemos a expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right]^{-1}, \tag{3.3.10}$$

onde

(3.3.11) $$B_o = 2 \quad e \quad B_n = b_n \ , \ n > 0.$$

Assim,

(3.3.12) $$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right]^{-1}$$

$$= (1-x) \left[(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right]^{-1}$$

$$= (1-x) \left[2 - \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n-1} - B_n) x^n \right]^{-1}.$$

Logo,

(3.3.13) $$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n ,$$

por (3.3.12).

Por simples verificação, $\{ B_{n-1} - B_n \}_n$ satisfaz as condições (3.3.1) do teorema anterior.

Além disso,

$$s(y) = \sum_{k \leq y} \sum_{n=k}^{\infty} (B_{n-1} - B_n)$$

$$= \sum_{k=0}^{y} B_k$$

$$\sim (2-\alpha) y^{1-\alpha} , \ y \to \infty ,$$

por expansão em binômio de Newton.

Então,

$$\frac{s(py)}{s(y)} \sim p^{1-\alpha} \quad , \; y \to \infty \; .$$

De (3.3.12), pela aplicação do teorema 3.3.1, obtemos que

$$e_n \sim \frac{\text{sen}\; \pi(1-\alpha)}{\pi\;(2-\alpha)} \; n^{-2+\alpha} \;, n \to \infty \; . \tag{3.3.14}$$

Notemos que,

$$e_o = 1/2, \; \sum_{n=1}^{\infty} e_n = -1/2 \quad e \quad e_n < 0 \;, n \geq 1 \; . \tag{3.3.15}$$

Por [ERDÖS - 49],

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e_n \, x^n \right| \leq E < 1 \; ,$$

para alguma constante positiva E, e para todo $| \; x \; | < 1$.

Para $| \; x \; | < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \, x^n = \Psi \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n \, x^n \right) ,$$

onde $\Psi(z) = z/(1-z)$.

Por [EGGERMONT -80], para séries de potência, temos que

$$d_n \sim - \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi(2-\alpha)} n^{-2+\alpha} \Psi' \left(\sum_{k=o}^{\infty} e_k \right), \quad n \to \infty .$$

Portanto,

$$d_n = - \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi(2-\alpha)} n^{-2+\alpha} (1 + o(1)) \quad , \quad n \to \infty ,$$

e

$$\sum_{n=o}^{\infty} d_n = \sum_{n=o}^{\infty} e_n \, (1 + o(1)) = 0 \quad , \quad n \to \infty ,$$

usando (3.3.14).

<u>Lema 3.3.2</u>:([EGGERMONT -81])

Sejam

$$p_l = O(\ell^{-\alpha}) \quad , \quad \ell \to \infty ,$$
$$q_l = O(\ell^{-2+\alpha}) \quad , \quad \ell \to \infty ,$$

e

$$\sum_{l=o}^{n} p_l \, q_{n-l} = \begin{cases} 1 \ , \text{ se } n=0 \\ \\ 0 \ , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Seja r(t) Lipschitz-contínua. Então,

$$\sum_{l=o}^{n} p_l \, r\left(\frac{\ell}{N} \right) q_{n-l} = O\left(\frac{1}{N} \right) ,$$

uniformemente em $1 \leq n \leq N$.

Prova:

Para $1 \le n \le N$, temos que

$$\sum_{l=o}^{n} p_l \, r(\frac{\ell}{N}) \, q_{n-l} = r(\frac{n}{N}) \sum_{l=o}^{n} p_l \, q_{n-l} + \sum_{l=o}^{n} p_l \, q_{n-l} \Big[\; r(\frac{\ell}{N}) - r(\frac{n}{N}) \Big].$$

Logo,

$$\sum_{l=o}^{n} p_l \, r(\frac{\ell}{N}) \, q_{n-l} = O\Big[\frac{1}{N} \sum_{l=o}^{n} |p_l| \; |q_{n-l}| \; (n-\ell) \Big] \; ,$$

desde que $r(\frac{n}{N}) \sum_{l=o}^{n} p_l \, q_{n-l} = 0$, pela construção de $\sum_{l=o}^{n} p_l \quad q_{n-l}$, pelo fato de $r(t)$ ser Lipschitz – contínua em t e $r(\frac{\ell}{N}) - r(\frac{n}{N}) = O(\;(n-\ell)/N\;)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=o}^{n} |p_l| \; |q_{n-l}| \; (n-\ell) &= O\Big[\sum_{l=o}^{n} (\ell+1)^{-\alpha} \; (n-\ell+1)^{-1+\alpha} \Big] \\
&= O\Big[\frac{1}{n+1} \sum_{l=o}^{n} (\frac{\ell+1}{n+1})^{-\alpha} \; (1 - \frac{\ell}{n+1})^{-1+\alpha} \Big] \\
&= O\Big[\int_{o}^{1} t^{-\alpha} \; (1 - t)^{-1+\alpha} \, dt \Big] \\
&= O(1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{l=o}^{n} p_l \, r(\frac{\ell}{N}) \, q_{n-l} = O(\; 1/N \;) \; .$$

Teorema 3.3.2 :([EGGERMONT - 81])

Seja

(3.3.16) $$A_k = A \text{ , quando } k(t,s)=1, \forall t \text{ e } \forall s \text{ .}$$

Se $k(t,s)$ é Lipschitz-contínua, então $||A_k^{-1}||_\infty$ e $||\ A_k^{-1}\ A\ ||_\infty$ são uniformemente limitadas em N .

Prova:

Mostraremos que X_k definida por

(3.3.17) $$X_k = A^{-1} A_k$$

pode ser escrita como

(3.3.18) $$X_k = D_k \left[I + \frac{1}{N} K_k \right] ,$$

onde D_k é uma matriz diagonal com elementos $K(\ i/N, i/N\ )$ e K_k é uma matriz triangular inferior com zeros na diagonal principal e elementos limitados quando $N \to \infty$.

De (3.2.10) e (3.3.8), temos que

$$(\ X_k\ )_{i,j} = \begin{cases} \sum_{l=j}^{i} d_{i-l}\ K_{l,j}\ \phi_{l-j} & \text{, se } j \le i \\ 0 & \text{, se } j > i \end{cases} .$$

Então,

$$(\ X_k\ )_{i,j} = \sum_{l=0}^{i-j} d_{i-j-l}\ K_{l+j,j}\ \phi_l \text{ , } j \le i \text{ .}$$

Desde que $d_o \phi_o = 1$,

$$(3.3.19) \qquad (X_k)_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j > i \\ K_{i,i} & , \text{ se } j = i \\ O(1/N), & \text{ se } j < i \end{cases} ,$$

sendo que a última estimativa é decorrente do lema 3.3.2.

Conseqüentemente,temos (3.3.18), pois $| k(t,t) | \geq \delta > 0$ para algum δ,ou seja,

$$| K(\frac{i}{N} , \frac{i}{N}) | \geq \delta \text{ , para todo } i \text{ e todo } N .$$

Agora, provamos que X_k^{-1} é limitada na norma do máximo. Suponhamos que

$$(3.3.20) \qquad | (K_k)_{i,j} | \leq C \text{ , } C > 0 .$$

Seja $|| \cdot ||_C$ a seguinte norma em $\mathbb{R}^N$:

$$(3.3.21) \qquad || s ||_C = \max_{1 \leq i \leq N} | e^{-2ci/N} s_i | .$$

Então,

$$|| \frac{1}{N} K_k s ||_C = \max_{1 \leq i \leq N} | \frac{1}{N} e^{-2ci/N} \sum_{j=1}^{i-1} (K_k)_{i,j} s_j |.$$

Mas,

$$\left| \sum_{j=1}^{i-1} (K_k)_{i,j} \, s_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{i-1} (K_k)_{i,j} \, e^{2cj/N} \, e^{-2cj/N} \, s_j \right|$$

$$\leq \max_{1 \leq l \leq i} \left| e^{-2cl/N} \, s_l \right| \sum_{j=1}^{i-1} \left| (K_k)_{i,j} \right| e^{2cj/N}$$

$$\leq C \, || \, s \, ||_c \sum_{j=1}^{i-1} e^{2cj/N} \, .$$

Assim,

$$|| \, \frac{1}{N} K_k \, s \, ||_c \leq \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{C}{N} \, ||s||_c \sum_{j=1}^{i-1} e^{-2c(i-j)/N} \right| .$$

Logo,

$$|| \, \frac{1}{N} K_k \, s \, ||_c \leq \frac{1}{2} \, || \, s \, ||_c \, .$$

Então, $\frac{1}{N} K_k$ é uma contração e

$$|| \left(I + \frac{1}{N} K_k \right)^{-1} ||_c \leq 2 \, .$$

Pelo fato de $|| \cdot ||_c$ e $|| \cdot ||_\infty$ serem equivalentes, e como D_k é uma matriz diagonal com elementos $K(i/N , i/N)$ não nulos, temos que

$$|| \, X_k^{-1} ||_\infty = || \left(D_k \left(I + \frac{1}{N} K_k \right) \right)^{-1} ||_\infty$$

$$\leq M \, ,$$

onde M é uma constante positiva.

Desta expressão e do lema 3.3.1, segue que $\| A_k^{-1} \|_\infty$, onde A_k^{-1} é dada por (3.1.9), é uniformemente limitada.

Portanto, o teorema está demonstrado.

O próximo resultado é importante na análise da convergência do método do trapézio.

<u>Teorema 3.3.3:</u> ([EGGERMONT - 81])

Se, para $1 \le i \le N$,

$$E_{N,i} = \frac{1}{N^\beta} \sum_{j=1}^{i} \xi_i\left(\frac{j}{N} \right) \phi_{i-j} + O\left(\frac{1}{N^\beta} \right) , \tag{3.3.22}$$

onde ξ_i é Lipschitz-contínua e uniforme em i, então

$$\| A_k^{-1} E_N \|_\infty = O(1/N^\beta) .$$

<u>Prova:</u>

De (3.3.8) e (3.3.22), temos que,

$$\begin{aligned} \|A^{-1} E_N\|_\infty &= \left\| \frac{1}{N^\beta} \sum_{j=1}^{i} d_{i-j}\, \xi_i\left(\frac{j}{N} \right) \phi_{i-j} + O\left(\frac{1}{N^\beta} \right) \right\|_\infty \\ &= O\left(\frac{1}{N^\beta} \right) , \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

pelo lema 3.3.2.

Temos que

$$A_k^{-1} E_N = (A_k^{-1} A)\, A^{-1} E_N .$$

$$\| A_k^{-1} E_N \|_\infty = \| (A_k^{-1} A) A^{-1} E_N \|_\infty$$

$$\leq \| A_k^{-1} A \|_\infty \| A^{-1} E_N \|_\infty$$

$$= O(\frac{1}{N^\beta}) ,$$

pelo teorema 3.3.2 e por (3.3.23) .

Portanto,

$$\| A_k^{-1} E_N \|_\infty = O(\frac{1}{N^\beta}) .$$

3.4 - ESTIMATIVAS PARA O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Apresentaremos estimativas para o erro E_N ,na forma $E_{N,i}$ do teorema 3.3.3 .Devemos estimar $E_{N,i}$ e $E_{N,O}$, erro cometido ao se calcular y(0). Se y e k têm derivadas de segunda ordem Lipschitz-contínua, então $F^{(2)}(t)$ é Lipschitz, e

$$E_{N,O} = O(\frac{1}{N^{4-\alpha}}) .$$

De (3.2.6), segue que o erro de discretização é dado por

$$E_{N,i} = \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{H_{i,j}(s)}{(t_i - s)^{\alpha}} \, ds ,$$

onde $H_{i,j}(s) = N\,(h_{i,j} - h_i(s))\,(s - t_{j-1}) + N\,(h_{i,j-1} - h_i(s))\,(t_j - s)$.

Para $H_{i,j}(s)$ obtemos que

$$H_{i,j}(s) = \frac{1}{2}\,(s - t_{j-1})\,(t_j - s)\,h_i^{(2)}(s) + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big) .$$

Então,

$$E_{N,i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(s - t_{j-1})\,(t_j - s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\, h_i^{(2)}(s)\, ds + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big)$$

Pelo teorema do valor médio para integrais,

$$(3.4.1) \qquad E_{N,i} = \frac{1}{2N^{3-\alpha}} \sum_{j=1}^{i} h_i^{(2)}\left(\frac{t_j - \theta_{i,j}}{N}\right) \psi_{i-j} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big),$$

onde $\theta_{i,j} \in (0,1)$ e

$$(3.4.2) \qquad \psi_{i-j} = N^{3-\alpha} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(s - t_{j-1})\,(t_j - s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\, ds$$

$$= \int_0^1 \frac{z(1 - z)}{(i - j + 1 - z)^{\alpha}}\, dz,$$

com $z = N\,(s - t_{j-1})$.

Segue, de (3.2.5), que

$$\phi_l = (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)\ \ell^{-\alpha} + O(\ell^{-2-\alpha}) \tag{3.4.3}$$

e, de (3.4.2), que

$$\psi_l = \frac{1}{6}\ \ell^{-\alpha} + O(\ell^{-1-\alpha})\ . \tag{3.4.4}$$

Assim,

$$\psi_l = \frac{1}{6\ (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)}\ \phi_l + O(\ell^{-1-\alpha}). \tag{3.4.5}$$

Logo, de (3.4.1),

$$E_{N,i} = \frac{N^{\alpha-3}}{12\ (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)} \sum_{j=1}^{i} h_i^{(2)} \left[\frac{t_j - \theta_{i,j}}{N} \right] \phi_{i-j} + O\left(\frac{1}{N^{3-\alpha}} \right) . \tag{3.4.6}$$

De (3.2.16), e do fato de $E_{N,0}=O(1/N^{4-\alpha})$, temos que

$$\tilde{E}_{N,i} = \frac{N^{\alpha-3}}{12\ (2 - \alpha)\ (1 - \alpha)} \sum_{j=1}^{i} h_i^{(2)} \left[\frac{t_j - \theta_{i,j}}{N} \right] \phi_{i-j} + O\left(\frac{1}{N^{3-\alpha}} \right).$$

Portanto, pelo teorema 3.3.3, o método do trapézio tem convergência de ordem 2, para $\alpha \in (0,1)$.

3.5 - CONCLUSÃO

Apresentamos a análise, feita por [EGGERMONT - 81], para o MIPT. Tal análise foi baseada numa analogia com a teoria geral de Equações Integrais, mostrando-se muito poderosa, pois possibilitou provar que o método do trapézio tem convergência de ordem 2, para todo $\alpha \in (0,1)$.

Apresentamos a classe dos métodos integração produto de diferenças descendentes implícitos ([CAMERON - 81]), na qual o método do trapézio se inclui. Provamos teoremas de convergência para o método do trapézio, que dependem da condição da raiz. Exibimos uma condição suficiente para a condição da raiz e a aplicamos no método do trapézio.

4.1 - MÉTODOS INTEGRAÇÃO PRODUTO DE DIFERENÇAS DESCENDENTES IMPLÍCITOS

Esses métodos são construídos aproximando $k(t_i,s)y(s)$, em (2.2.1), por um polinômio interpolador descendente de grau n em $[t_j,t_{j+1}]$, utilizando os pontos $t_{j+1-n},...,t_j,t_{j+1}$.

Consideremos o polinômio interpolador de grau n na forma de Newton-Gregory,

$$P_n^{(j)}(p)=h_{i,j+1}+p\nabla h_{i,j+1}+\frac{1}{2}\,p(p+1)\nabla^2 h_{i,j+1}+...+\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(p+k)\nabla^n h_{i,j+1},$$

onde $p=(s - t_{j+1})/h$, $h_{i,j+1} = k(t_i,t_{j+1})y_{j+1}$ e y_j é uma aproximação para $y(t_j)$.

Então (2.2.1), para $i \geq n$, é dado por

$$(4.1.1)\quad h^{1-\alpha}\sum_{j=0}^{n-2}\int_0^1 \frac{R_n^{(j)}(p)}{(i-j-p)^\alpha}\,dp + h^{1-\alpha}\sum_{j=n-1}^{i-1}\int_{-1}^0 \frac{P_n^{(j)}(p)}{(i-j-1-p)^\alpha}\,dp = f(t_i),$$

$(i=n,n+1,\ldots,N)$, onde $R_n^{(j)}(p)$ $(j=0,1,2,\ldots,n-2)$ é o polinômio interpolador ascendente de grau n. Note que são necessários n valores iniciais, sendo que, para o método do trapézio é necessário apenas um valor inicial.

Podemos definir formalmente o algoritmo de discretização $\Phi_h y = 0$, onde $\Phi_h : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ é dado por

$$(4.1.2)\qquad [\Phi_h y]_i = \begin{cases} h^{1-\alpha}\,(y_i - \tilde{y}_i) & , 0 \le i \le n-1 \\ h^{1-\alpha} \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \omega_{i,j}\, k_{i,j}\, y_j - f_i & , n \le i \le N \end{cases},$$

$\tilde{y}_i$ $(\ 0 \le i \le n-1\ )$ são valores iniciais necessários, $\omega_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\rho^*(p)}{(i-j-p)^\alpha}\,dp$ $, j \le n-2$, e $\omega_{i,j} = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\rho(p)}{(i-j-1-p)^\alpha}\,dp$, $j \ge n-1$, com $\rho^*(p)$ e $\rho(p)$ polinômios de grau $\le$ n.

Podemos escrever (4.1.2) na forma matricial

$$(4.1.3)\qquad h^{1-\alpha} A_N y = g,$$

onde $g = (h^{1-\alpha}\tilde{y}_0,\ldots,h^{1-\alpha}\tilde{y}_{n-1}, f_n, f_{n+1},\ldots,f_N)^t$, $y=(y_0,y_1\ldots,y_N)^t$, e a matriz A_N pode ser representada como

$$A_N = \begin{bmatrix} e & 0 \\ & \\ d & \tilde{A}_N \end{bmatrix}.$$

Na análise de convergência é preciso conhecer o comportamento da $||A_N^{-1}||_\infty$,para N grande.

Pelo fato de

$$A_N^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ -\tilde{A}_N^{-1}\, d\, e^{-1} & \tilde{A}_N^{-1} \end{bmatrix},$$

temos que

$$||\tilde{A}_N^{-1}||_\infty \le ||A_N^{-1}||_\infty \le ||\tilde{A}_N^{-1}||_\infty \,(\, 1 + ||d||_\infty \, ||e^{-1}||_\infty \,).$$

Concluímos então, que o comportamento de $||A_N^{-1}||_\infty$ é determinado pela $||\tilde{A}_N^{-1}||_\infty$.

$\tilde{A}_N$ pode ser caracterizada pela série de potência, $f(z)_N = \sum_{r=0}^{N} a_r z^r$, e sua inversa, $\tilde{A}_N^{-1}$, por $f^{-1}(z)_N$. Em particular, estaremos interessados em analisar a função $f_\alpha(z)_N = \sum_{r=0}^{N} r^{-\alpha} z^r$, com $1/0^\alpha \equiv 1$.

Veremos que o comportamento dos elementos da matriz $\tilde{A}_N$ é da $O(1/r^\alpha)$, sendo que este comportamento acontece para todos os métodos integração produto, em particular para o método do trapézio. Então, $\sum_{r=0}^{N} a_r$ comporta-se como $\sum_{r=0}^{N} 1/r^\alpha$, desde que a série obtida pela diferença entre $\sum_{r=0}^{N} a_r z^r$ e $\sum_{r=0}^{N} z^r/r^\alpha$ é uma série absolutamente convergente.

Necessitamos estudar o grau de singularidade de $\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ em $|z| = 1$, onde os a_r's são determinados pelo método em análise.Esse estudo pode ser feito através de $f_\alpha(z) = \sum_{r=0}^{\infty} z^r/r^\alpha$.

4.2 - ORDEM DE SINGULARIDADE DE $f_\alpha(z)$ EM SEU CÍRCULO DE CONVERGÊNCIA ([CAMERON - 81]).

A ordem de singularidade de uma função num certo ponto é um número que atribui à função o "grau de infinito" nesse ponto. Por exemplo, $1/(1-z)^\alpha$,$\alpha > 0$, é regular em $|z| = 1$, exceto em $z = 1$, onde tem "grau de infinito" α. Para avaliar isto, usaremos o operador de Hadamard. Notemos que $f_\alpha(z)$ tem raio de convergência unitário, desde que $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^\alpha = 1$, e que $f_\alpha(z)$ tem uma singularidade em $z = 1$, já que $f_\alpha(z) = \sum_{r=0}^{\infty} 1/r^\alpha$ é uma série divergente.

Assim, temos que $f_\alpha(z)$ é regular em $|z| < 1$.

Antes da análise da ordem de singularidade de $f_\alpha(z)$ em $|z| = 1$, necessitamos de algumas definições e resultados.

Definição 4.2.1:(*1)

Uma função contínua complexa $x(\theta)$ de uma variável real θ é finitamente gerada (*finite span*) em (a,b) se as integrais

$$n \int \cos(n\theta)\ x(\theta)\ d\theta \quad e \quad n \int \operatorname{sen}(n\theta)\ x(\theta)\ d\theta\ , \ (n=1,2,\ldots),$$

calculadas para todo intervalo (a',b') em (a,b), são ambas limitadas, e seu sup é chamado o gerador de $x(\theta)$ em (a,b).

(*1) (vide, por exemplo, [HADAMARD - 1892]).

Definição 4.2.2: ([HADAMARD - 1892])

Seja

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{t} (\log \frac{1}{t})^{\beta-1} , \beta > 0.$$

Definimos

$$H^{\beta}f(z) = \int_0^1 v(t)\ f(zt)\ dt .$$

H^{β} é o operador de Hadamard, e tem a propriedade de manter a singularidade de $f(z)$.

Lema 4.2.1: ([HADAMARD - 1892])

Se $n\ \gamma_n \log(n) = O(1)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| = A$ é convergente, então $\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\ z^n$ é contínua e finitamente gerada em $|z| = 1$.

A importância deste lema reside no fato de fornecer um teste prático para saber se a função é finitamente gerada.

Lema 4.2.2: ([DIENES - 13])

Seja (a,b) um arco de $|z| = 1$. Então, se $H^{\beta+\lambda}f(z)$ é contínua e finitamente gerada em (a,b) para λ positivo e arbitrariamente pequeno, mas uma das duas propriedades falha para $\lambda < 0$, a ordem do ponto singular de $f(z)$ em $|z| = 1$ é β.

Se não existe tal número que satisfaça estas condições, então a ordem é $+\infty$, enquanto, se a primeira condição é satisfeita para todo β, a ordem é $-\infty$.

Este lema é utilizado para testar a ordem de singularidade de $f_{\alpha}(z)$ em $|z| = 1$.

Teorema 4.2.1: ([CAMERON - 81])

A ordem de singularidade de $f_\alpha(z)$ em $|z| = 1$ é $1-\alpha$.

Prova:

Desde que a ordem de singularidade é independente do coeficiente inicial, escolhemos o primeiro coeficiente de $f_\alpha(z)$ como zero, por conveniência.

Pela definição (4.2.2), temos que

$$H^\beta f_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta-1} f_\alpha(zt)\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha} \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta-1} z^r\, t^r\, dt$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha} \frac{z^r}{r^\beta},$$

desde que $\int_0^1 t^{r-1} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta-1} dt = r^{-\beta}\, \Gamma(\beta)$.

Seja $\beta = 1-\alpha$. Consideremos $H^{1-\alpha+\lambda} f_\alpha(z)$ contínua e finitamente gerada, somente para λ positivo e arbitrariamente pequeno.

Seja

$$\gamma(z) = H^{1-\alpha+\lambda} f_\alpha(z) = \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1-\lambda} z^r.$$

Observemos que $r\, \gamma_r \log(r) = r^{-\lambda} \log(r) \to 0$, quando $r \to \infty$, para $\lambda > 0$ e $\sum_{r=1}^{\infty} |\gamma_r| = \sum_{r=1}^{\infty} 1/r^{1+\lambda}$ é convergente para $\lambda > 0$, e divergente para $\lambda < 0$.

Então, $H^{1-\alpha+\lambda} f_\alpha(z)$ é contínua e finitamente gerada , somente para λ arbitrariamente pequeno e positivo.

Portanto, pelo lema 4.2.2, a ordem do ponto singular em $|z| = 1$ é $1-\alpha$.

A seguir, apresentamos um lema que dá uma decomposição da função $f_\alpha(z)$.

Lema 4.3.1:([CAMERON - 84])

$$f_\alpha(z) = \frac{g(z)}{(1 - z)^{1-\alpha}} ,$$

onde g(z) possui série de Taylor absolutamente convergente em $|z| \leq 1$.

Prova:

Por [HARDY - 49], temos que

$$\frac{(n - \alpha)!}{n!} = n^{-\alpha} (1 + \frac{p_o}{n}) + \gamma_n , \gamma_n = O(n^{-\alpha-2}).$$

Logo,

$$n^{-\alpha} = \frac{(n - \alpha)!}{n!} - \gamma_n - \frac{p_o}{n^{1+\alpha}} .$$

Substituindo α por $\alpha+1$ na expressão acima, temos que

$$n^{-\alpha} = \Gamma(1-\alpha) \left[\binom{n-\alpha}{-\alpha} + \frac{p_o}{\alpha} \binom{n-\alpha-1}{-\alpha-1} \right] + \delta_n n^{-\alpha-2},$$

onde, para $0 \leq \alpha < 1$, existe $\delta > 0$, independente de n, tal que $|\delta_n| < \delta$.

Então,

$$\sum_{j=o}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha)\left[\sum_{j=o}^{\infty} \binom{j-\alpha}{-\alpha} z^j + \frac{p_o}{\alpha} \sum_{j=o}^{\infty} \binom{j-\alpha-1}{-\alpha-1} z^j \right] + \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j,$$

$d_j = O(j^{-\alpha-2})$.

Pela observação 1.2.3, podemos reescrever a expressão acima como

$$\sum_{j=o}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[(1-z)^{\alpha-1} + \frac{p_o}{\alpha} (1-z)^{\alpha} \right] + \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j,$$

a qual implica

$$(1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=o}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[1 + \frac{p_o}{\alpha} (1-z) \right] + (1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j.$$

Como $f_\alpha(z) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{z^r}{r^\alpha}$, temos que

$$g(z) = (1-z)^{1-\alpha} f_\alpha(z) = \Gamma(1-\alpha) \left[1 + \frac{p_o}{\alpha} (1-z)\right] + (1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=o}^{\infty} d_j z^j.$$

Portanto, $g(z)$ é absolutamente convergente em $|z| \leq 1$.

Agora, apresentamos uma caracterização para a condição da raiz.

Notemos que a série de potência $f(z)$ pode ser escrita como

$$f(z) = f_\alpha(z) + h(z),$$

onde h(z) possui série de Taylor absolutamente convergente.

Então

$$f(z) = \frac{g(z)}{(1-z)^{1-\alpha}} + h(z).$$

Conseqüentemente,

$$f^{-1}(z) = \frac{(1-z)^{1-\alpha}}{g(z)+ (1-z)^{1-\alpha}\, h(z)} = \frac{(1-z)^{1-\alpha}}{k(z)},$$

onde $k(z) = g(z) + (1-z)^{1-\alpha}\, h(z)$.

Como g(z) e h(z) são séries absolutamente convergentes, então k(z) é absolutamente convergente, equivalentemente, k(z) não tem singularidades em $|z| \le 1$. Então, $f^{-1}(z)$ não tem zeros em $|z| < 1$, e tem um zero de ordem $(1-\alpha)$ em $|z| = 1$ (teorema 4.2.1).

Fazendo $\ell(z)=k^{-1}(z)$, então $\ell(z)$ é absolutamente convergente, se k(z) não tem zeros em $|z| \le 1$.

O fato de k(z) não ter zeros em $|z| \le 1$ é chamado de <u>condição da raiz</u>.

<u>Definição 4.3.1</u>:([CAMERON - 84])

Um método integração produto é zero-estável se satisfaz a condição da raiz.

Antes de exibir os resultados de convergência é necessário estimar a ordem dos coeficientes k_r de $k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} k_r z^r$. Provaremos que $k_r = O(1/r^{2-\alpha})$, para r grande.

Esses resultados serão provados nos próximos lemas.

Lema 4.3.2:([CAMERON - 81])

Se c_r é o r-ésimo coeficiente de $(1-z)^{1-\alpha}$, então

$$|c_r| \leq \frac{1-\alpha}{r^{2-\alpha}} \ ,(\ r= 1,2,\ldots \ ).$$

Prova:

Temos, pela observação 1.2.3, que

$$(1-z)^{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\alpha-2)!}{k!(\alpha-2)!} z^k.$$

Seja $c_k = \dfrac{(k+\alpha-2)!}{k!(\alpha-2)!}$.

Mostremos que c_k , definido acima, satisfaz

(4.3.1) $$|c_k| \leq \frac{1-\alpha}{k^{2-\alpha}} .$$

De fato:(por indução)

a. (4.3.1) é verdadeira para k=1, pois $|c_1|=1-\alpha$.

b. Suponhamos verdadeira para $k=1,2,\ldots,r$.

c. Mostremos que vale para $k=r+1$.

Temos que,

$$|c_{r+1}| = \left| \frac{(\alpha+r-1)!}{(r+1)!(\alpha-2)!} \right| = |c_r| \left| \frac{\alpha+r-1}{r+1} \right|.$$

Observemos, agora, que

$$\left(\frac{r}{r+1} \right)^{2-\alpha} = \frac{r}{r+1} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1-\alpha} = \frac{r}{r+1} \left(1 + \frac{1}{r} \right)^{\alpha-1}$$

$$> \frac{r}{r+1} \left(1 + \frac{\alpha-1}{r} \right) = \frac{r+\alpha-1}{r+1} .$$

$$|c_{r+1}| \leq |(\frac{r}{r+1})^{2-\alpha}| \; |c_r| \leq \frac{1-\alpha}{(r+1)^{2-\alpha}} ,$$

pela hipótese de indução.

Portanto, (4.3.1) é verdadeira.

Lema 4.3.3:([CAMERON - 81])

$$\sum_{j=o}^{r} \frac{1}{j^{\alpha}} c_{r-j} = O(\frac{1}{r^{2-\alpha}}) , \; 1/0^{\alpha} \equiv 1,$$

onde c_r é definido no lema anterior.

Prova:

Por [HARDY - 49],

$$\frac{(n-\alpha)!}{n!} = n^{-\alpha} (1 + \frac{p_o}{n} + \frac{p_1}{n^2}) + \gamma_n \; , \; 1/0^{\omega} \equiv 1, \; \omega > 0,$$

onde $\gamma_n = O(n^{-\alpha-3})$.

Então,

$$\frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{(n-\alpha)!}{(-\alpha)!n!} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{p_o}{n^{1+\alpha}} + \frac{p_1}{n^{2+\alpha}} \right] - \gamma_n \; .$$

Usando esta expressão para $\alpha+1$ e $\alpha+2$ e pelas igualdades resultantes, obtemos que

$$n^{-\alpha} = \Gamma(1-\alpha) \left[\left(\begin{matrix} n-\alpha \\ -\alpha \end{matrix} \right) + \frac{p_o}{\alpha} \left(\begin{matrix} n-\alpha-1 \\ -\alpha-1 \end{matrix} \right) + \frac{p_o^2 - p_1}{\alpha(\alpha+1)} \left(\begin{matrix} n-\alpha-2 \\ -\alpha-2 \end{matrix} \right) \right] + \delta_n n^{-\alpha-3},$$

onde, para $0 \le \alpha < 1$, existe $\delta > 0$, independente de n, tal que $|\delta_n| < \delta$.

Então,

$$(4.3.2) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha}{-\alpha} z^j + \frac{p_0}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha-1}{-\alpha-1} z^j + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha-2}{-\alpha-2} z^j \right] + \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j ,$$

onde $d_j = O(j^{-3-\alpha})$.

Pela observação 1.2.3, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[(1-z)^{\alpha-1} + \frac{p_0}{\alpha} (1-z)^{\alpha} + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(\alpha+1)} (1-z)^{\alpha+1} \right] + \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j .$$

Então,

$$(1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[1 + \frac{p_0}{\alpha} (1-z) + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(\alpha+1)} (1-z)^2 \right] + (1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j .$$

O coeficiente geral de $(1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j$ é

$$\sum_{j=0}^{r} d_j \frac{(\alpha+r-j-2)!}{(\alpha-2)!(r-j)!} \quad , \; r \ge 3 \, .$$

Como $d_j = O(j^{-3-\alpha})$ e, pelo lema 4.3.2, $\dfrac{(\alpha+r-2)!}{(\alpha-2)!r!} = O(r^{\alpha-2})$,

então

$$\sum_{j=o}^{r} d_j \frac{(\alpha+r-j-2)!}{(\alpha-2)!(r-j)!} = O\left(\frac{1}{r^{2-\alpha}} \right),$$

pois um termo genérico de $\displaystyle\sum_{j=o}^{r} d_j \frac{(\alpha+r-j-2)!}{(\alpha-2)!(r-j)!}$ é, em módulo, menor que $\dfrac{M}{r^{2-\alpha}\, j^{1+\alpha}}$, onde M é uma constante positiva, e a série $\displaystyle\sum_{j=o}^{\infty} \frac{M}{j^{1+\alpha}}$ é convergente, desde que $0 < \alpha < 1$.

Portanto,

$$(4.3.3) \qquad \sum_{j=o}^{r} \frac{c_{r-j}}{j^{\alpha}} = O\left(\frac{1}{r^{2-\alpha}} \right) , \ r \geq 3 .$$

Mostremos, agora, que $\displaystyle\sum_{j=o}^{r} c_j h_{r-j} = O\left(\frac{1}{r^{2-\alpha}} \right)$, onde h_r são os coeficientes de h(z). Temos que $h_r = O\left(\dfrac{1}{r^{1+\alpha}} \right)$.

Substituindo α por $\alpha+1$ em (4.3.2), obtemos que $d_j=O\left(\dfrac{1}{j^{4+\alpha}}\right)$. Então, um termo genérico de $\displaystyle\sum_{j=o}^{r} d_j \frac{(\alpha+r-j-2)!}{(\alpha+2)!(r-j)!}$ é, em módulo, menor que $\dfrac{M}{r^{2-\alpha}\, j^{2+\alpha}}$. Por raciocínio análogo à conclusão de (4.3.3), obtemos que

$$\sum_{j=o}^{r} c_j h_{r-j} = O\left(\frac{1}{r^{2-\alpha}} \right).$$

O próximo lema é importante na análise da convergência.

Lema 4.3.4: ([CAMERON - 81])

$$k_r = O\left(\frac{1}{r^{2-\alpha}} \right),$$

onde k_r é o coeficiente de z^r em $k(z) = (1-z)^{1-\alpha} f(z)$.

Prova:

Segue pelos lemas 4.3.2 e 4.3.3 .

4.4 - CONSISTENCIA E CONVERGENCIA PARA O METODO DO TRAPEZIO

Definição 4.4.1:

O método integração produto do trapézio é consistente de ordem 2, se existe uma função c(t), independente de h, tal que

$$\int_0^{t_i} \frac{k(t_i,s)\ y(s)}{(t_i - s)^{\alpha}}\, ds - h^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{i} \omega_{i,j}\, k(t_i,t_j) y(t_j) = c(t_i) h^2 + O(h^3),$$

(i=1,2,...,N).

Afim de usarmos os resultados obtidos na seção anterior, iremos reformular a definição de consistência. Então, usando o teorema 1.2.3, podemos escrever o erro de discretização para o método do trapézio como

$$E_i = \int_{t_0}^{t_1} \frac{w_0^*(s)\ h_i^{(2)}(\eta_0)}{2!\ (t_i - s)^{\alpha}}\, ds + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{w_j(s)\ h_i^{(2)}(\xi_j)}{2!\ (t_i - s)^{\alpha}}\, ds ,$$

onde $h_i(s) = k(t_i,s)\ y(s)$; $\eta_0 \in (t_0,t_1)$ e $\xi_j \in (t_j,t_{j+1})$;

$w_o^*(s) = (s - t_o)\ (s - t_1)$ e $w_j(s) = (s - t_j)\ (s - t_{j+1})$.

Pelo teorema do valor médio para integrais,

$$E_i = h_i^{(2)}(t_1 - \nu_{i,o}\ h) \int_{t_o}^{t_1} \frac{w_o^*(s)}{2!\ (t_i - s)^\alpha}\, ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} h_i^{(2)}(t_{j+1} - \mu_{i,j}\ h) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{w_j(s)}{2!\ (t_i - s)^\alpha}\, ds ,$$

onde $0 < \nu_{i,o} < 1$, $0 < \mu_{i,j} < 1$.

Usando expansão em série de Taylor, temos que

$$h_i^{(2)}(t_{j+1} - \mu_{i,j}\quad h) = h_i^{(2)}(t_{j+1}) + O(h) = h_i^{(2)}(t_j+h) + O(h).$$

Então,

$$(4.4.1)\quad E_i = \frac{h^{3-\alpha}}{2!} \left[h_i^{(2)}(t_o + h)\ \alpha_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} h_i^{(2)}(t_j + h)\ \beta_{i-j-1} \right]$$

$$+ O(h^{3-\alpha}),$$

onde

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{h^{3-\alpha}} \int_{t_o}^{t_1} \frac{w_o^*(s)}{(t_i - s)^\alpha}\, ds$$

e

$$\beta_{i-j-1} = \frac{1}{h^{3-\alpha}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{w_j(s)}{(t_i - s)^\alpha}\, ds .$$

Fazendo $s = t_{j+1} + qh$, temos que

$$\alpha_{i-1} = \int_{-1}^{0} \frac{\bar{w}_0(q)}{(i - 1 - q)^{\alpha}}\, dq \text{ , com } j = 0,$$

e

$$\beta_{i-j-1} = \int_{-1}^{0} \frac{\bar{w}_j(q)}{(i - j - 1 - q)^{\alpha}}\, dq \text{ ,}$$

onde $\bar{w}_0$ e $\bar{w}_j$ são polinômios de grau 2.

Segue que,

$$(4.4.2) \qquad \beta_{i-j-1} \sim \frac{A_1}{(i - j - 1)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(i - j - 1)^{1+\alpha}} + \dots \text{ ,}$$

onde $A_1, A_2, \dots$ são constantes independentes de $(i-j-1)$, ou seja $\beta_{i-j-1} = O((i-j-1)^{-\alpha})$. De maneira análoga, $\alpha_{i-1} = O((i-1)^{-\alpha})$.

Portanto, E_i comporta-se como

$$\frac{1}{2!} h^{3-\alpha} \sum_{j=0}^{i-1} h_i^{(2)}(t_j+h) \frac{1}{(i-j-1)^{\alpha}} \text{ , com } \frac{1}{0^{\alpha}} \equiv 1.$$

Pela seção 4.1,a matriz $\tilde{A}_N^{-1}$, com $K(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, pode ser caracterizada por $f^{-1}(z)_N$, e pela seção anterior, temos que

$$f^{-1}(z)_N = \ell(z)_N \; (1 - z)_N^{1-\alpha},$$

onde o índice N denota o grau da série de potência.

Assumindo que a condição da raiz vale, então $\ell(z)$ é absolutamente convergente.

Seja $\underline{E}$ o vetor $(E_0, E_1, \ldots, E_N)^t$ dos erros discretizados, com $E_0=0$.

Lema 4.4.1:

Seja $K(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$. Se o erro de discretização local para o método do trapézio for dado por (4.4.1), então

$$[\, A_N^{-1}\, \underline{E}\,]_i = O(h^{3-\alpha}) \quad ,(i=1,2,\ldots,N),$$

desde que a condição da raiz seja verdadeira e $y(s)$ seja suficientemente contínua.

Prova:

Reescrevendo (4.4.1), onde substituímos j por $j-1$, temos que

$$E_i = \frac{1}{2!}\, h^{3-\alpha} \sum_{j=1}^{i} s(t_j)\, \gamma_{i-j} + O(h^{3-\alpha}) \; ,$$

onde $s(t_j) = h_i^{(2)}(t_j) = y^{(2)}(t_j)$, e

$$\gamma_{i-j} = \begin{cases} \alpha_i \; , & j = 1 \\ \beta_{i-j} \; , & 2 \le j \le i \end{cases} .$$

Do fato de $h_i(t)$ ser suficientemente contínua, temos que $s(t)$ é limitada no intervalo $[0,1]$.

Sendo $\ell(z)_N$ absolutamente convergente é suficiente considerar o vetor obtido pelo produto da matriz caracterizada por

$(1-z)_N^{1-\alpha}$ com $\underline{E}$.

Então, o comportamento do i-ésimo elemento é dado por

$$\frac{1}{2!}\, h^{3-\alpha} \sum_{j=0}^{i} c_{i-j} \sum_{k=0}^{j} s(t_k)\, \gamma_{j-k} \;,$$

onde c_r é o coeficiente de z^r em $(1-z)_N^{1-\alpha}$, o qual pode ser estimado da seguinte maneira :

$$\left| \frac{1}{2!}\, h^{3-\alpha} \sum_{j=0}^{i} s(t_j) \sum_{k=0}^{i-j} \gamma_k\, c_{i-j-k} \right| \le h^{3-\alpha} \sum_{j=0}^{i} |s(t_j)| \; \left| \sum_{k=0}^{i-j} \gamma_k\, c_{i-j-k} \right| .$$

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{i-j} \gamma_k\, c_{i-j-k} = \sum_{k=2}^{i-j} \left(\frac{A_1}{k^{\alpha}} + \frac{A_2}{k^{1+\alpha}} + \frac{A_3}{k^{2+\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{3+\alpha}} \right) \right) c_{i-j-k}$$

$$+\ \gamma_0\, c_{i-j} + \gamma_1\, c_{i-j-1} .$$

Sendo que cada termo desta expressão é limitado por alguma constante vezes $1/(i-j)^{2-\alpha}$.

Como $|s(t)|$ é limitado, então

$$\sum_{j=0}^{i} |s(t_j)| \left| \sum_{k=0}^{i-1} \gamma_k\, c_{i-j-k} \right| = O\left(\sum_{j=0}^{i} |s(t_j)| \frac{1}{(i-j)^{2-\alpha}} \right)$$

$$= O(1) \;.$$

Portanto, um termo genérico de

(4.4.3) $\qquad [\, A_N^{-1}\, \underline{E}\,]_i = O(h^{3-\alpha})$, $(i=1,2,\dots,N)$, $h \to 0$.

Em particular, para $i = 1,2,\dots,N$,

(4.4.4) $\qquad \max_i \left| [\, A_N^{-1}\, \underline{E}\, h^{-1+\alpha}\,]_i \right| \le c_1 h^2$,

$c_1 > 0$, independente de h.

Definição 4.4.2:

O valor inicial do método do trapézio é convergente de ordem 2, se existe uma constante positiva c_2, independente de h, tal que

$$|y_0 - \tilde{y}_0| \le c_2 h^2.$$

Em termos matriciais, temos que

$$\max_i \left| \left[A_N^{-1}(y - \tilde{y}) \right]_i \right| \le c_2 h^2, \tag{4.4.5}$$

onde $\tilde{y} = (\tilde{y}_0, 0, \ldots, 0)^t$, $c_2 > 0$.

Teorema 4.4.1:

Se o método integração produto do trapézio, com $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, satisfaz (4.4.4), é zero-estável, e tem valor inicial convergente de ordem 2, então o método é convergente de ordem 2.

Prova:

$$\begin{aligned}
\left| [y - \Delta_N y(t)]_i \right| &= \left| [A_N^{-1}(A_N y - A_N \Delta_N y(t))]_i \right| \\
&= \left| [A_N^{-1}(h^{\alpha-1} g - A_N \Delta_N y(t))]_i \right| \\
&= \left| [A_N^{-1}(\tilde{y} - y) - A_N^{-1} \underline{E}\, h^{\alpha-1}]_i \right| \\
&\le \left| \max_i \left| [A_N^{-1}(\tilde{y} - y)]_i \right| + \max_i \left| [A_N^{-1} \underline{E}\, h^{\alpha-1}]_i \right| \right| \\
&\le c_3 h^2 ,
\end{aligned}$$

por (4.4.4) e (4.4.5), onde $c_3 = \max \{c_1, c_2\}$.

Para analisar a convergência no caso geral, ie, quando $k(t,s)$ é qualquer, precisamos da seguinte identidade devida à [McKEE - 79] :

$$k(t_{i+m},t_i) = k(t_i,t_i) + k(t_{i+m},t_i) - k(t_i,t_i)$$

ou

$$k_{i+m,i} = k_{i,i} + k_{i+m,i} - k_{i,i}.$$

Com a igualdade acima, podemos fazer a seguinte decomposição :

$$A_N = U_N K_N + V_N ,$$

onde $U_N K_N$ é dado por

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_{i,i} & & \\ & \omega_{i+1,i} & \omega_{i+1,i+1} & \\ & \omega_{i+2,i} & \omega_{i+2,i+1} & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & k_{i,i} & & \\ & & k_{i+1,i+1} & \\ & & & k_{i+2,i+2} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

e V_N por

$$\begin{bmatrix} \ddots & \\ & \omega_{i,i}(k_{i,i} - k_{i,i}) \\ & \omega_{i+1,i}(k_{i+1,i} - k_{i,i}) \\ & \omega_{i+2,i}(k_{i+2,i} - k_{i,i}) \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Quando $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, $A_N=U_N$.

O $(i+m,i)$-ésimo elemento de V_N é

(4.4.6) $$\omega_{i+m,i}(k_{i+m,i} - k_{i,i}).$$

Suponhamos que $\left| \frac{\partial k}{\partial t} \right| \leq \bar{k}$,onde $\bar{k} > 0$. Então,

$$| k_{i+m,i} - k_{i,i} | \leq m\, h\, \bar{k} .$$

Além disso, $\omega_{i+m,i}$ (*vide* (4.1.2)) satisfaz

$$\int_{-1}^{0} \frac{\rho(p)}{(m - 1 - p)^{\alpha}}\, dp \leq \frac{1}{m^{\alpha}} \int_{-1}^{0} \rho(p)\, dp \leq \frac{k'}{m^{\alpha}} ,$$

para alguma constante k'.

V_N pode ser caracterizada por $v(z)_N = \sum_{r=0}^{N} v_r z^r$, onde v_r é dado por (4.4.6).

Como $\omega_{i+m,i} = O(m^{-\alpha})$, $|k_{i+m,i} - k_{i,i}| \leq m\ h\ \bar{k}$, e $v_m = \omega_{i+m,i}(k_{i+m,i} - k_{i,i})$, então

$$v_m = O(h\, m^{1-\alpha}) .$$

Apresentamos, a seguir, um lema que usa este comportamento de v_m. Tal lema será utilizado na demonstração de um teorema de convergência.

Lema 4.4.2:([CAMERON - 84])

Existe uma constante positiva M_2 , independente de h, tal que

$$\max_{i,j} | (U_N^{-1} V_N)_{i,j} | \leq M_2\, h.$$

Prova:

Desde que $U_N^{-1} = A_N^{-1}$, quando $k(t,s)=1$, $\forall t$ e $\forall s$, então é caracterizada por $(1-z)_N^{1-\alpha}\ \ell(z)_N$, e V_N por $v(z)_N$.

Um elemento genérico do produto matricial $U_N^{-1}V_N$ comporta-se como

$$\sum_{j=o}^{i} v_j\, c_{i-j} = O(\sum_{j=o}^{i} h\, j^{1-\alpha}\, c_{i-j}).$$

Façamos uma estimativa para a expressão acima.

Temos que

$$\sum_{j=o}^{i} h\, j^{1-\alpha}\, c_{i-j} = \sum_{j=o}^{i} h\, i\, \frac{1}{j^{\alpha}}\, c_{i-j} - \sum_{j=o}^{i} h\, (i-j)\, \frac{1}{j^{\alpha}}\, c_{i-j}$$

$$= S_1 - S_2 ,$$

onde

$$S_1 = \sum_{j=o}^{i} h\, i\, \frac{1}{j^{\alpha}}\, c_{i-j}$$

e

$$S_2 = \sum_{j=o}^{i} h\, (i-j)\, \frac{1}{j^{\alpha}}\, c_{i-j} .$$

Pelo lema 4.3.3 ,

$$S_1 = \sum_{j=o}^{i} h\, i\, \frac{1}{j^{\alpha}}\, c_{i-j} = O(\, h\, i^{\alpha-1}).$$

Agora,

$$S_2 = \sum_{j=0} h\ (i-j)\ \frac{1}{j^{\alpha}}\ c_{i-j}$$

$$= O(h \sum_{j=0}^{i} (i-j)\ \frac{1}{j^{\alpha}}\ \frac{1}{(i-j)^{2-\alpha}})$$

$$= O(h \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j^{\alpha}}\ \frac{1}{(i-j)^{1-\alpha}})$$

$$= O(h\ \frac{1}{i} \sum_{u=0(1/i)1} \frac{1}{u^{\alpha}}\ \frac{1}{(1-u)^{1-\alpha}})$$

$$= O(h \int_0^1 u^{-\alpha}\ (1-u)^{\alpha-1}\ du)$$

$$= O(h),$$

notando que $(i-j) = i(1 - \frac{j}{i})$, e fazendo $u = j/i$.

Portanto,

$$\max_{0 \le i,\ j \le N} \left| (U_N^{-1}\ V_N)_{i,j} \right| \le M_2\ h\ ,$$

$M_2 > 0$, independente de h.

Teorema 4.4.2:

Se o método integração produto do trapézio satisfaz (4.4.4), é zero-estável, e tem valor inicial convergente de ordem 2, então o método é convergente de ordem 2.

Prova:

Temos que

$$| [y - \Delta_N y(t)]_i | = | [(U_N K_N)^{-1} (U_N K_N y - U_N K_N \Delta_N y(t))]_i |$$

$$= | [(U_N K_N)^{-1} (-V_N y + h^{\alpha+1} g - U_N K_N \Delta_N y(t))]_i |.$$

Subtraindo e adicionando $(U_N K_N)^{-1} V_N \Delta_N y(t)$ e usando a desigualdade triangular, obtemos que

$$| [y - \Delta_N y(t)]_i | = | [(U_N K_N)^{-1} V_N (\Delta_N y(t) - y)]_i$$

$$- [(U_N K_N)^{-1} (U_N K_N \Delta_N y(t) + V_N \Delta_N y(t) - h^{\alpha-1} g)]_i |$$

$$\leq \max_{i,j} |((U_N K_N)^{-1} V_N)_{i,j} | \sum_{j=0}^{i} | [y - \Delta_N y(t)]_j |$$

$$+ | [(U_N K_N)^{-1} (U_N K_N \Delta_N y(t) + V_N \Delta_N y(t) - h^{\alpha-1} g)]_i |$$

$$= \max_{i,j} | (K_N^{-1} U_N^{-1} V_N)_{i,j} | \sum_{j=0}^{i} | [y - \Delta_N y(t)]_j |$$

$$+ | [K_N^{-1} U_N^{-1} (A_N \Delta_N y(t) - h^{\alpha-1} g)]_i |$$

$$\leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq 1} |k(t,t)|} \max_{i,j} |(U_N^{-1} V_N)_{i,j}| \sum_{j=0}^{i} |[y - \Delta_N y(t)]_j|$$

$$+ \frac{c_4 \; h^2}{\min_{0 \leq t \leq 1} |k(t,t)|} \text{, usando consistência.}$$

Pelo lema 4.4.2, segue que

$$| [y - \Delta_N y(t)]_i | \leq \frac{M_2 \; h}{\min_{0 \leq t \leq 1} |k(t,t)|} \sum_{j=0}^{i} | [y - \Delta_N y(t)]_j | + \frac{c_4 \; h^2}{\min_{0 \leq t \leq 1} |k(t,t)|}.$$

Sejam

$$M_2' = \frac{M_2}{\min\limits_{0\le t\le 1} |k(t,t)|} \quad \text{e} \quad c_4' = \frac{c_4}{\min\limits_{0\le t\le 1} |k(t,t)|},$$

constantes positivas.

Então, para h suficientemente pequeno,

$$| [y - \Delta_N y(t)]_i | \le M_2' \, h \sum_{j=0}^{i} | [y - \Delta_N y(t)]_j | + c_4' \, h^2.$$

Portanto, o método integração produto do trapézio é convergente de ordem 2, usando o lema de Gronwall (*vide* lema 1.5.1).

4.5 - CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A CONDIÇÃO DA RAIZ

A condição de zero-estabilidade requer que as raízes de $k(z)_N$ estejam estritamente fora do círculo unitário. O intervalo para α, no qual o método do trapézio é convergente , é obtido pelo cálculo das raízes de $k(z)_N$ $(N = 1,2,\ldots)$.

Pelo capítulo anterior, sabemos que o método do trapézio tem ordem de convergência 2, para todo $\alpha \in (0,1)$.

A seguir, apresentamos uma caracterização de convergência absoluta de $\ell(z)$, que envolve somente o conhecimento dos coeficientes de $k(z)_N$.

Lema 4.5.1: ([CAMERON - 84])

Se

$$\sum_{r=1}^{N} |k_r| < | k_o | \quad , N \to \infty$$

então

$$\ell(z) = \left(\sum_{r=0}^{N} k_r z^r \right)^{-1} , N \to \infty$$

é absolutamente convergente no círculo unitário.

Prova:

Pelo teorema 1.3.1, os coeficientes ℓ_r de $\ell(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \ell_r z^r$

são dados por

$$\ell_r = \frac{(-1)^r}{k_o^{r+1}} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_o & k_1 & \cdots & k_{r-1} \\ 0 & k_o & \cdots & k_{r-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cdot & & k_o & k_1 \end{vmatrix} , \quad (r = 1,2,\ldots) ,$$

com $\ell_o = \dfrac{1}{k_o}$.

Podemos escrever ℓ_r como

$$\ell_r = - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{k_{j+1}}{k_o} \ell_{r-j-1} , \quad (r = 1,2,\ldots).$$

Então,

$$| \ell_r | \le \sum_{j=0}^{r-1} \left| \frac{k_{j+1}}{k_o} \right| \, | \ell_{r-j-1} |, \quad (r =1,2,\ldots) .$$

Mostremos, por indução, que $\sum_{r=0}^{N} | \ell_r | \le M$, onde M é uma constante positiva, independente de N.

a. Para n=0, temos que

$$| \ell_o | = | \frac{1}{k_o} | \le M \text{ , } M > 0 \text{ .}$$

b. Suponhamos verdadeira para N=ν, ou seja, $\sum_{r=0}^{N} |\ell_r| \le M$ (N = 1,2,...,ν).

c. Provemos para N = ν+1.

Temos que,

$$\sum_{r=1}^{\nu+1} |\ell_r| \le \sum_{r=1}^{\nu+1} \sum_{j=0}^{r-1} | \frac{k_{j+1}}{k_o} | \, |\ell_{r-j-1}|$$

$$\le \sum_{r=0}^{\nu} |\ell_r| \sum_{j=1}^{\nu+1-r} | \frac{k_j}{k_o} | .$$

Então,

$$\sum_{r=0}^{\nu+1} |\ell_r| \le \sum_{r=0}^{\nu} |\ell_r| \sum_{j=1}^{\nu+1-r} | \frac{k_j}{k_o} | + |\ell_o| \text{ .}$$

Por hipótese, $\sum_{j=1}^{\nu+1-r} | \frac{k_j}{k_o} | < 1$. Logo, para $|\ell_o|$ suficientemente pequeno, existe um inteiro p tal que

$$\sum_{j=1}^{\nu+1-r} | \frac{k_j}{k_o} | \le \frac{p}{p + |\ell_o|} \text{ .}$$

Então, pela hipótese de indução,

$$\sum_{r=0}^{\nu+1} |\ell_r| \leq M \left(\frac{p}{p + |\ell_o|} \right) + |\ell_o| = \frac{M\,p + |\ell_o|\,(p + |\ell_o|)}{p + |\ell_o|}$$

$$\leq M \ , \ M > 0,$$

desde que M seja escolhida de maneira que $M > p + |\ell_o|$, sendo esta escolha sempre possível.

Portanto, $\ell(z)$ é absolutamente convergente no círculo unitário.

Para aplicar este lema na análise da convergência do método do trapézio precisamos encontrar uma maneira de majorar $\sum_{r=1}^{N} |k_r|$, $N \to \infty$.

Por [ABRAMOWITZ - 65],

$$(4.5.1) \qquad \frac{(n-\alpha)!}{n!} = n^{-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2n} + \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)(2-3\alpha)}{24n^2} + \frac{p_2(n)}{n^3}\right),$$

onde $p_2(n)$ é o termo do erro.

Então,

$$(4.5.2) \quad \frac{p_2(n)}{n^{3+\alpha}} = \frac{(n-\alpha)!}{n!} - n^{-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2n} + \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)(2-3\alpha)}{24n^2}\right).$$

Para $n \geq 2$,

$$(4.5.3)\quad |p_2(n)| \le \max_{\alpha} \left|\frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)(2-3\alpha)}{24}\right| \left|1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots\right|$$

$$\le \frac{1}{48}\left(\frac{n}{n-1}\right) \le 0.041667 .$$

Temos que,

$$(4.5.4)\quad |p_2(1)| = \left|\Gamma(2-\alpha) - 1 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} - \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)(2-3\alpha)}{24}\right|$$

$$\le 0.007321.$$

Sejam $p_o = -\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2}$ e $p_1 = \dfrac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)(2-3\alpha)}{24}$.

De (4.5.1) ,

$$(4.5.5)\qquad \frac{(n-\alpha)!}{n!} = n^{-\alpha} + p_o\, n^{-\alpha-1} + p_1\, n^{-\alpha-2} + p_2(n)\, n^{-\alpha-3} .$$

Fazendo em (4.5.5) α igual a $\alpha+1$ e $\alpha+2$, e usando as igualdades resultantes, obtemos que

$$(4.5.6)\quad n^{-\alpha} = \frac{(n-\alpha)!}{n!} - p_o \frac{(n-\alpha-1)!}{n!} + (p_o^2 - p_1)\frac{(n-\alpha-2)!}{n!} + b_n,$$

onde

$$(4.5.7)\quad b_n = n^{-\alpha-3}\,[(-p_o^3 + 2p_o p_1 - p_2(n))$$

$$+ \frac{1}{n}(-p_o^2 p_1 + p_o p_2(n) + p_1^2) + \frac{1}{n^2}(-p_o^2 p_2(n) + p_1 p_2(n))]$$

$$= \gamma_p(n)\, n^{-\alpha-3}.$$

Considerando o módulo e os valores máximos de p_o, p_1 e $p_2(n)$, temos que

$$| \gamma_p(n) | \leq 0.048828 + \frac{0.005968}{n} + \frac{0.001519}{n^2} ,$$

com max $|p_o|$ = 0.125000 , max $|p_1|$ = 0.020833 e max $|p_2(n)|$ = 0.041667.

Para $n \geq 2$,

$$(4.5.8) \qquad |\gamma_p(n)| \leq 0.048828 + \frac{0.005968}{2} + \frac{0.001519}{4}$$

$$= 0.052191 = \gamma_p ,$$

e, para n=1,

$$|\gamma_p(1)| \leq 0.016423 .$$

Então, (4.5.8) é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Agora, a equação (4.5.6) pode ser escrita como

$$(4.5.9) \qquad n^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha) \left[\binom{n-\alpha}{-\alpha} + \frac{p_o}{\alpha} \binom{n-\alpha-1}{-\alpha-1} + \frac{p_o^2 - p_1}{\alpha(1+\alpha)} \binom{n-\alpha-2}{-\alpha-2} \right] + b_n .$$

Então,

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha}{-\alpha} z^j + \frac{p_0}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha-1}{-\alpha-1} z^j \right.$$

$$\left. + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(1+\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha-2}{-\alpha-2} z^j \right] + \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$

$$= \Gamma(1-\alpha) \left[(1-z)^{-1+\alpha} + \frac{p_0}{\alpha} (1-z)^{\alpha} + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(1+\alpha)} (1-z)^{1+\alpha} \right]$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j ,$$

usando a observação 1.2.3 .

Logo,

$$(4.5.10) \quad (1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j = \Gamma(1-\alpha) \left[1 + \frac{p_0}{\alpha}(1-z) + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(1+\alpha)} (1-z)^2 \right.$$

$$+ (1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j .$$

Fazendo n=0 em (4.5.9) obtemos que

$$b_0 = 1 - \Gamma(1-\alpha) \left[1 + \frac{p_0}{\alpha} + \frac{p_0^2 - p_1}{\alpha(1+\alpha)} \right] .$$

Para $r \geq 3$, o termo genérico de $(1-z)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j^{-\alpha} z^j$ é

$$\beta_r = \sum_{j=0}^{r} b_j \, c_{r-j} ,$$

onde, de (4.5.7) e (4.5.8),

$$| b_j | \leq \gamma_p \, j^{-\alpha-3} , \quad j \geq 1 .$$

Então,

$$|\beta_r| \le |b_o|\ |c_r| + \gamma_p \sum_{j=2}^{r-2} \frac{|c_{r-j}|}{j^{3+\alpha}} + \gamma_p \left[|c_{r-1}| + \frac{|c_1|}{(r-1)^{3+\alpha}} \right] + \frac{\gamma_p}{r^{3+\alpha}}$$

$$\le \frac{|b_o|(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} + \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \sum_{j=2}^{r-2} \frac{r^{2-\alpha}}{(r-j)^{2-\alpha}\ j^{3+\alpha}}$$

$$+ \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \left[\left(\frac{r}{r-1} \right)^{2-\alpha} + \frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{3+\alpha}} \right] + \frac{\gamma_p}{r^{3+\alpha}},$$

usando o lema 4.3.2 .

Agora,

$$\frac{r^{2-\alpha}}{j^{3+\alpha}\ (r-j)^{2-\alpha}} = \frac{r^{2-\alpha}}{(r-j)^{2-\alpha}}\ \frac{1}{j^{1+2\alpha}}\ \frac{1}{j^{2-\alpha}} \le \frac{1}{j^{1+2\alpha}}, \quad j \ne 1 \text{ ou } j \ne r-1.$$

Logo,

$$|\beta_r| \le \frac{|b_o|\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} + \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \sum_{j=2}^{r-2} \frac{1}{j^{1+2\alpha}}$$

$$+ \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \left[\left(\frac{r}{r-1} \right)^{2-\alpha} + \frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{3+\alpha}} \right] + \frac{\gamma_p}{r^{3+\alpha}}$$

$$\le \frac{|b_o|\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} + \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \sum_{j=2}^{r} \frac{1}{j^{1+2\alpha}} + \frac{\gamma_p}{r^{3+\alpha}}$$

$$+ \frac{\gamma_p\ (1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\ \mu_1,$$

onde,

$$\mu_1 = \max_r \left| \left\{ \left(\frac{r}{r-1} \right)^{2-\alpha} + \frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{3+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+2\alpha}} - \frac{1}{(r-1)^{1+2\alpha}} \right\} \right| .$$

(4.5.12) $$a_j = j^{-\alpha} + \sigma_1 j^{-\alpha-2} + \sigma_2(j)\, j^{-\alpha-4}.$$

Então,

(4.5.13) $$|k_r| \le \left| \sum_{j=0}^{1} (a_j - \frac{1}{j^\alpha}) c_{r-j} \right| + \left| \sum_{j=0}^{r} \frac{c_{r-j}}{j^\alpha} \right|$$

$$+ |\sigma_1| \left| \sum_{j=2}^{r} \frac{c_{r-j}}{j^{2+\alpha}} \right| + \max_j |\sigma_2(j)| \left| \sum_{j=2}^{r} \frac{c_{r-j}}{j^{4+\alpha}} \right|,$$

onde $|\sigma_1| \le 1/6$ e $\max_j |\sigma_2(j)| \le 1/60$.

Para limitar $|k_r|$, iremos limitar cada soma em separado. Usando o lema 4.3.2, temos que

$$\left| \sum_{j=0}^{1} (a_j - \frac{1}{j^\alpha}) c_{r-j} \right| \le \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}} \left| (a_0 - 1) + (a_1 - 1) \frac{c_{r-1}}{c_r} \right|$$

$$\le \frac{\alpha_0}{r^{2-\alpha}} ,$$

onde

$$\alpha_0 = (1-\alpha) \left| (a_0 - 1) + (a_1 - 1) \frac{c_{r-1}}{c_r} \right| .$$

De (4.5.11), segue que

$$\left| \sum_{j=0}^{r} \frac{c_{r-j}}{j^\alpha} \right| \le \frac{\alpha_1}{r^{2-\alpha}} .$$

Agora,

$$\left|\sum_{j=2}^{r}\frac{c_{r-j}}{j^{2+\alpha}}\right| \le \left|\sum_{j=0}^{r}\frac{c_{r-j}}{j^{2+\alpha}}\right| \le \left|\sum_{j=0}^{r}\frac{c_{r-j}}{j^{\alpha}}\right| \le \frac{\alpha_1}{r^{2-\alpha}},$$

usando a desigualdade anterior.

Ainda,

$$\left|\sum_{j=2}^{r}\frac{c_{r-j}}{j^{4+\alpha}}\right| = \left|\sum_{j=2}^{r-2}\frac{c_{r-j}}{j^{4+\alpha}} + \frac{c_1}{(r-1)^{4+\alpha}} + \frac{c_0}{r^{4+\alpha}}\right|$$

$$\le \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\sum_{j=2}^{r-2}\frac{r^{2-\alpha}}{j^{4+\alpha}\,(r-j)^{2-\alpha}} + \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\left[\frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{4+\alpha}} + \frac{1}{r^{2+2\alpha}}\right]$$

$$\le \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\sum_{j=2}^{r-2}\frac{1}{j^{2+2\alpha}} + \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\left[\frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{4+\alpha}} + \frac{1}{r^{2+2\alpha}}\right]$$

$$< \frac{(1-\alpha)}{r^{2-\alpha}}\left[\zeta(2+2\alpha) - 1 + \mu_2\right] + \frac{1}{r^{2+2\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha_2}{r^{2-\alpha}},$$

onde

$$\alpha_2 = \frac{1}{r^{3\alpha}} + (1-\alpha)\left[\zeta(2+2\alpha) - 1 + \mu_2\right],$$

com

$$\mu_2 = \left|\left\{\frac{r^{2-\alpha}}{(r-1)^{4+\alpha}} - \frac{1}{(r-1)^{2+2\alpha}} - \frac{1}{r^{2+2\alpha}}\right\}\right|.$$

Então,

$$|k_r| \le \frac{\alpha_0}{r^{2-\alpha}} + \frac{(7/6)\alpha_1}{r^{2-\alpha}} + \frac{(1/60)\alpha_2}{r^{2-\alpha}} \tag{4.5.14}$$

$$= \frac{\theta}{r^{2-\alpha}},$$

onde $\theta = \alpha_0+(7/6)\ \alpha_1+(1/60)\ \alpha_2$, e é calculado para cada valor de α.

Portanto,

$$(4.5.15) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} |k_r| \le \sum_{r=1}^{m-1} |k_r| + \sum_{r=m}^{\infty} |k_r|$$

$$\le \sum_{r=1}^{m-1} |k_r| + \theta \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^{2-\alpha}},$$

onde m pode ser escolhido de maneira que a última soma seja tão pequena quanto se deseja.

Na tabela abaixo, verificamos as condições do lema 4.5.1, ie, que para o método do trapézio, $\sum_{r=1}^{N} |k_r| < |k_0|$, $N \to \infty$, é satisfeita para todo $\alpha \in (0,1)$, usando m=3 em (4.5.15).

α	$\lvert k_0\rvert$	$\sum_{r=1}^{2} \lvert k_r\rvert + \theta \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^{2-\alpha}}$
0.1	0.58480	0.56154*
0.2	0.69444	0.54157*
0.3	0.84034	0.67348
0.4	1.04167	0.68657
0.5	1.33333	1.07408
0.6	1.78571	1.74066
0.7	2.56410	1.63038*
0.8	4.16666	3.05742*
0.9	9.09088	9.01228

* m = 20 em (4.5.15)

4.6 - CONCLUSÃO

Mostramos que o método do trapézio é convergente de ordem 2, para todo $\alpha \in (0,1)$, usando a caracterização da matriz de quadratura através de série formal de potência.

Exibimos, também, a convergência de ordem 2, para o método do trapézio, usando o critério $\sum_{r=1}^{\infty} |k_r| < |k_o|$.

5.1 - RESULTADO NUMÉRICO

Apresentamos um exemplo numérico que confirma a convergência de ordem 2 para o método integração produto do trapézio.

Consideramos a seguinte equação:

$$\int_0^t (2\pi(t-s))^{-1/2} \exp(-\tfrac{1}{2}(t-s))y(s)\,ds = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\tfrac{1}{2t}(1+t)^2),$$

$0 \le t \le 1$, a qual tem solução exata

$$y(t) = \frac{(2\pi t)^{-1/2}}{2} \left[\exp(-\frac{1}{2t}(1+t)^2)(\frac{1}{t} - 1) + \exp(-2)\exp(-\frac{1}{2t}(1-t)^2)(\frac{1}{t} + 1) \right].$$

Notamos que a equação acima é uma Equação Integral de Abel.

Equações deste tipo aparecem na análise de processos de difusão, que são importantes em muitas áreas de probabilidade aplicada { vide [FORTET - 43] }.

Os cálculos foram executados num *ABC-2000* (32 bits).

Os erros são exibidos em valores absolutos, na tabela abaixo .

h \ t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.1	9.0982×10^{-3}	1.0321×10^{-3}	2.1392×10^{-5}	6.7757×10^{-5}	5.4506×10^{-5}
0.01	5.9671×10^{-5}	7.1164×10^{-6}	5.0160×10^{-7}	9.6497×10^{-7}	5.1887×10^{-7}

APÊNDICE A

Verificação de que $A = \frac{1}{N^{1-\alpha}} C_N$, onde C_N é matriz semi-circulante.

Neste apêndice verificaremos a expressão (3.1.10), ou seja, que $A = \frac{1}{N^{1-\alpha}} C_N$, onde C_N é uma matriz semi-circulante.

Temos de (3.2.2), com $k(t,s)=1, \forall t$ e $\forall s$, que o lado esquerdo de (3.2.1) pode ser escrito como

$$\text{(A1)} \qquad N \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(s - t_{j-1})y_j + (t_j - s)y_{j-1}}{(t_i - s)^{\alpha}} \, ds ,$$

$(i=1,2,\ldots,N)$.

De (3.1.2) e (3.1.3), temos que

$$\text{(A2)} \qquad \Delta_N I_N y(t) = \left[\int_0^{t_1} \frac{Y(s)}{(t_1 - s)^{\alpha}} ds, \int_0^{t_2} \frac{Y(s)}{(t_2 - s)^{\alpha}} ds, \ldots, \int_0^{t_N} \frac{Y(s)}{(t_N - s)^{\alpha}} ds \right]^t = A \, \Delta_h y.$$

Considerando a discretização (A1) em (A2), obtemos que

Temos que,

$$\sum_{j=2}^{r} \frac{1}{j^{1+2\alpha}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^{1+2\alpha}} - 1$$

$$< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+2\alpha}} - 1 = \zeta(1+2\alpha) - 1 ,$$

onde $\zeta(1+2\alpha)$ é a função zeta de Riemann .

Portanto,

$$(4.5.11) \quad |\beta_r| \le \frac{1}{r^{2-\alpha}} \left[|b_o| (1-\alpha) + \gamma_p (1-\alpha) (\zeta(1+2\alpha) - 1 + \mu_1) + \gamma_p \max_r (\frac{1}{r^{1+2\alpha}}) \right]$$

$$= \frac{\alpha_1}{r^{2-\alpha}} ,$$

onde

$$\alpha_1 = |b_o| (1-\alpha) + \gamma_p (1-\alpha) (\zeta(1+2\alpha) - 1 + \mu_1) + \gamma_p \max_r(\frac{1}{r^{1+2\alpha}}).$$

Consideremos o coeficiente geral k_r de $k(z) = (1 - z)^{1-\alpha} f(z)$ dado por

$$k_r = \sum_{j=o}^{r} a_j c_{r-j} = \sum_{j=o}^{n-1} a_j c_{r-j} + \sum_{j=n}^{r} a_j c_{r-j} ,$$

onde n é a ordem do método.

Para o método do trapézio, n=2 e a_j satisfaz :

$$(A3) \qquad \Delta_N I_N y(t) = \left[N \int_{t_0}^{t_1} \frac{(s - t_0)y_1 + (t_1 - s)y_0}{(t_1 - s)^{\alpha}} ds, \right.$$

$$N\int_{t_0}^{t_1} \frac{(s - t_0)y_1 + (t_1 - s)y_0}{(t_2 - s)^{\alpha}} ds + N\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s - t_1)y_2 + (t_2 - s)y_1}{(t_2 - s)^{\alpha}} ds,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \qquad , \; N \int_{t_0}^{t_1} \frac{(s - t_0)y_1 + (t_1 - s)y_0}{(t_N - s)^{\alpha}} ds +$$

$$\left. N\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t_1)y_2 + (t_2 -s)y_1}{(t_N - s)^{\alpha}} ds + \ldots + N\int_{t_{N-1}}^{t_N} \frac{(s-t_{N-1})y_N + (t_N-s)y_{N-1}}{(t_N - s)^{\alpha}} ds \right]^t.$$

Fazendo a mudança de variável $z = N \; (s - t_{j-1})$, obtemos que

$$N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{s - t_{j-1}}{(t_i - s)^{\alpha}} ds = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{z}{(i - j + 1 - z)^{\alpha}} dz$$

e

$$N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{t_j - s}{(t_i - s)^{\alpha}} ds = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{1 - z}{(i - j + 1 - z)^{\alpha}} dz .$$

Logo,

$$(A4) \qquad \Delta_N I_N y(t) = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \left[\int_0^1 \frac{(1-z)y_0}{(1-z)^{\alpha}} dz + \int_0^1 \frac{z\, y_1}{(1-z)^{\alpha}} dz \right.,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-z)y_0}{(2-z)^{\alpha}} dz + \int_0^1 \left[\frac{z}{(2-z)^{\alpha}} + \frac{1-z}{(1-z)^{\alpha}} \right] y_1\, dz + \int_0^1 \frac{z\, y_2}{(1-z)^{\alpha}} dz ,$$

$$\ldots, \int_0^1 \frac{(1-z)y_0}{(N-z)^{\alpha}} dz + \int_0^1 \left[\frac{z}{(N-z)^{\alpha}} + \frac{1-z}{(N-1-z)^{\alpha}} \right] y_1\, dz + \int_0^1 \left[\frac{z}{(N-1-z)^{\alpha}} \right.$$

$$\left. + \frac{1-z}{(N-2-z)^{\alpha}} \right] y_2\, dz + \ldots + \int_0^1 \left[\frac{z}{(2-z)^{\alpha}} + \frac{1-z}{(1-z)^{\alpha}} \right] y_{N-1}\, dz + \left. \int_0^1 \frac{z\, y_N}{(1-z)^{\alpha}} dz \right]^t .$$

Então, a matriz A de (A2) é dada por

$$(A5) \qquad A = \frac{1}{N^{1-\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{1,1} & \gamma_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{1,2} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{1,3} & \gamma_{1,3} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,1} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \beta_{1,N} & \gamma_{1,N} & \gamma_{1,N-1} & \gamma_{1,N-2} & \ldots & \gamma_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

onde

$$\beta_{1,i} = \int_0^1 \frac{1-z}{(i-z)^{\alpha}} dz , \quad (i=1,2,\ldots,N),$$

$$\gamma_{1,1} = \int_0^1 \frac{z}{(1-z)^{\alpha}} dz ,$$

e

$$\gamma_{1,k} = \int_0^1 \left[\frac{z}{(k-z)^{\alpha}} + \frac{1-z}{(k-1-z)^{\alpha}} \right] dz , \quad (k=2,3,\ldots,N).$$

BIBLIOGRAFIA

[ABRAMOWITZ - 65] - ABRAMOWITZ,M. and STEGUN,I.:Handbook of mathematical functions. U.S. Government Priting Office, Washington, 1965.

[ALBRECHT - 73] - ALBRECHT, P. : Análise numérica : um curso moderno. LTC, Rio de Janeiro, 1973.

[ANDERSSEN - 77] - ANDERSSEN,R. S. :Application and numerical solution of Abel-type integral equations. Technical Summary Report. University of Wisconsin, Madison, 1977.

[ATKINSON - 74] - ATKINSON, K. E. :The numerical solution of an Abel Integral Equation by a product trapezoidal method. SIAM J. Num. Anal., vol. 11, no. 1,pp 97 - - 101, 1974.

[ÁVILA - 79] - ÁVILA, G. S. S. : Cálculo II - Diferencial e Integral. Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro, 1979.

[BAKER - 77] - BAKER, C. T. H. :The numerical treatment of integral equations. Clarendon Press, Oxford, 1977.

[CAMERON - 81] - CAMERON, R. F. : Direct solution of applicable Volterra Integral Equations. D. Phil. Thesis, Univ. of Oxford, 1981.

[CAMERON - 84] - CAMERON, R. F. and McKEE, S. : High accuracy convergent product integration methods for the Generalized Abel Equation. Journal of Integral Equations 7, pp 103-125, 1984.

[DE BRUIJN - 53] - DE BRUIJN, N. G. and ERDÖS, P. :On a recursion formula and on some Tauberian theorems. J. Res. National Bureau of Standards 50,pp 161-164, 1953.

[DE BRUIJN - 70] - DE BRUIJN, N. G. :Asymptotic methods in analysis. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[DIENES - 13] - DIENES, P. :Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris,1913.

[EGGERMONT - 80] - EGGERMONT, P. P. B. :A note on a paper by Luxemburg concerning the Laplace transform. Applicable Analysis, pp 39-44, 1980.

[EGGERMONT - 81] - EGGERMONT, P. P. B. :A new analysis of the trapezoidal-discretization method for the numerical solution of Abel-type Integral Equations. Journal of Integral Equations 3, pp 317-332, 1981.

[ERDÖS - 49] - ERDÖS, P. *et al.* :A property of power series with positive coefficients. Bull.Amer.Math.Soc. 55 , pp 201-204, 1949.

[FORTET - 43] - FORTET, R. :Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéares aux derivées partielles du type parabolique. J. Math. Pures Appl. 22, pp 177-243, 1943.

[FRANCO - 82] - FRANCO, N. M. B. : Solução numérica de algumas Equações Integrais do tipo Volterra. Tese de doutoramento, ICMSC/USP, São Carlos, 1982.

[HADAMARD - 1892] - HADAMARD, J. :Essai due l'étude des fonctions données par leurs développements de Taylor. Journal of Math. 8(4), pp 101-186, 1892.

[HARDY - 49] - HARDY, G. H. :Divergent Series. Clarendon Press, Oxford, 1949.

[HENRICI - 74] - HENRICI, P. :Applied and computacional complex analysis - vol I. John Wiley & Sons, New York, 1974.

[HOCHSDAT - 73] - HOCHSDAT, H. :Integral Equations. Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, New York, 1974.

[LIMA - 82] - LIMA, E. L. : Curso de análise - volume 1. Projeto Euclides/IMPA-CNPq. Rio de Janeiro, 1982.

[LINZ - 69] - LINZ, P. :Numerical methods for Volterra Integral Equations of the first kind. Comp. J. 12, pp 393-397,1969.

[LINZ - 71] - LINZ, P. :Product integration methods for Volterra Integral Equations of the first kind. BIT 11, pp 413-421, 1971.

[McKEE - 79] - McKEE, S. :Best convergence rates of linear multistep methods for Volterra first kind equations. Computing 21, pp 343-358, 1979.

[McKEE - 82] - McKEE, S. :A review of linear multistep methods and product integration methods and their convergence analysis for first kind Volterra Integral Equations *in* Treatment of Integral Equations by Numerical Methods, edited by C. T. H. Baker and G. F. Miller. Academic Press, London, 1982.

[SPAIN - 70] - SPAIN, B. and SMITH, M. G. : Functions of Mathematical Physics. Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

[WAGNER - 54] - WAGNER, C. :On the numerical solution of Volterra Integral Equations.J. Math.Phys. 32,pp 289-301,1954.

[WEISS - 72] - WEISS, R. and ANDERSSEN, R. S. :A product integration method for a class singular first kind Volterra Equations. Numer. Math. 18, pp 442-456, 1972.

[WEISS - 72a] - WEISS, R. :Product integration for the Generalized Abel Equation. Mathematics of Computation, vol 26, no 117, pp 177-190, 1972.

[YOSIDA - 60] - YOSIDA, K. :Lectures on differential and integral equations. Interscience Publisher, New York, 1960.

[YOUNG - 54] - YOUNG, A. :The application of approximate product-integration to the numerical solution of integral equations. Proc. R. Soc. A224, pp 561-573, 1954.