Análise dos resultados de ensaios de proficiência via modelos de regressão com variável explicativa aleatória¹

Aline Othon Montanari

Orientador: *Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Jr.*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP - São Carlos
Maio/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

Análise dos resultados de ensaios de proficiência via
modelos de regressão com variável explicativa aleatória

Aline Othon Montanari

*À minha mãe, Célia,
por ensinar-me a não
desistir dos meus
sonhos e ao meu pai,
Rogério, pelo exemplo
de caráter e por confiar
na minha competência.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom que me foi concedido e por me acompanhar em todos os dias de minha vida.

Agradeço, em especial, aos meus pais Rogério e Célia, por incentivarem meus estudos e por sempre lutarem e em alguns momentos se sacrificarem para que eu tivesse a melhor formação profissional possível e a minha irmã, Laura, pela amizade. Agradeço a todos os meus parentes, em especial meu tio Marcelo, que torceram para que eu conquistasse mais esta etapa.

Agradeço, em particular, ao meu namorado Fábio, pelo amor, carinho e compreensão.

Um agradecimento especial para o meu amigo Daniel, pelo apoio e por todo tempo que me ajudou na realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior pela orientação, pelas aulas e pelos seus ensinamentos, que foram muito importantes para o término desta dissertação.

Também quero dizer que me sinto muito feliz de ter encontrado durante o período da graduação grandes amigos, como o Alex, a Mariana, a Grazielle, a Kelly e a Luci. Em especial meus grandes companheiros, aliás, verdadeiros irmãos Flávia e Mário (Ronaldinho).

Agradeço os meus colegas do mestrado, Gecirlei, Fabrízio, Paulo, Ricardo e Juliana, pelas contribuições, por cada dia de estudo e pelos momentos de descontração.

Agradeço também os meus amigos de Araraquara: Renata, Sabrina, Ana Paula, Christiano e Vitor que não se esqueceram de 10 anos de amizade e companheirismo.

Aos professores da estatística Marinho, Reiko e Jorge pelos ensinamentos e dedicação, a minha orientadora de graduação Prof^a. Sandra Godoy por ser a primeira a me ensinar como ser uma pesquisadora e aos funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação pela gentileza e atenção diariamente prestadas.

Um obrigado especial a minha tia Géria por compartilhar comigo os meus momentos de alegria e tristeza e por ter me acolhido por 6 anos em sua casa neste período de estudos.

Agradeço a Capes pelo auxílio financeiro.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

“Há homens que lutam um dia e são bons. Há outros que lutam um ano e são melhores. Há os que lutam muitos anos e são muito bons. Mas há os que lutam toda a vida, e estes são imprescindíveis” (Bertold Brecht).

Resumo

Em um programa de ensaio de proficiência (EP) conduzido pelo Grupo de Motores, um grupo de onze laboratórios da área de temperatura realizaram medições em cinco pontos da escala de um termopar.

Neste trabalho, propomos um modelo de regressão com variável explicativa X (aleatória) representando o termopar padrão que denominaremos por artefato e a variável dependente Y representando as medições dos laboratórios. O procedimento para a realização da comparação é simples, ambos termopares são colocados no forno e as diferenças entre as medições são registradas. Para a análise dos dados, vamos trabalhar com a diferença entre a diferença das medições do equipamento do laboratório e o artefato, e o valor de referência (que é determinado por 2 laboratórios que pertencem a Rede Brasileira de Calibração (RBC)).

O erro de medição tem variância determinada por calibração, isto é, conhecida. Assim, vamos encontrar aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo via algoritmo EM. Além disso, propomos uma estratégia para avaliar a consistência dos laboratórios participantes do programa de EP.

Abstract

In a program of proficiency assay, a group of eleven laboratories of the temperature area had carried through measurements in five points on the scale of the thermopair.

In this work, we propose a regression model with a random explanatory variable representing the temperature measured by the standard thermopair, which will be called device. The procedure for the comparison accomplishment is as follows. The device and the laboratory's thermopair to be tested are placed in the oven and the differences between the measurements are registered. For the analysis of the data, the response variable is the difference between those difference and the reference value, which is determined by two laboratories that belong to the Brazilian Net of Calibration (RBC).

The measurement error has variance determined by calibration which is known. Therefore, we find the maximum likelihood estimates for the parameters of the model via EM algorithm. We consider a strategy to establish the consistency of the participant laboratories of the program of proficiency assay.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	2
1.2	Organização do Trabalho	2
2	Apresentação dos Dados e Avaliação das Incertezas de Medição	3
2.1	Introdução	3
2.2	Apresentação dos dados	3
2.3	Avaliação da Incerteza de Medição	16
2.3.1	Equação de Medição	17
2.3.2	Avaliação da Incerteza Padrão de Medição das Estimativas de Entrada	18
2.3.3	Avaliação da Incerteza Padrão Combinada	20
2.3.4	Incerteza Expandida de Medição	21
3	Modelo Estatístico, Estimação e Algoritmo EM	25
3.1	Introdução	25
3.2	Modelo Proposto	25
3.3	Introdução da Variável Latente e Algoritmo EM	27
3.3.1	Etapa E	31
3.3.2	Etapa M	31
3.3.3	Algoritmo EM	33
3.4	Estudo da Convergência do Algoritmo EM	33
3.4.1	Formulação do Algoritmo EM	33
3.4.2	Passo M Aplicado ao Nosso Modelo	34
3.4.3	Convergência do Algoritmo EM	35
4	Aplicações	37
4.1	Introdução	37
4.2	Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM	37
4.3	Análise da Competência dos Laboratórios	39
5	Considerações Finais	49
5.1	Conclusões	49
5.2	Propostas de Trabalhos Futuros	49
A	Dados dos Laboratórios	51
B	Tabelas de Incertezas dos Laboratórios	55
C	Algoritmo EM	71
D	Função Geradora do Vetor de Médias	83

E Obtenção do Intervalo de Confiança	85
Referências Bibliográficas	89

Lista de Figuras

2.1	Termopar	4
2.2	Forno	4
2.3	Ensaio	4
2.4	Gráfico de D a 25°C	7
2.5	Gráfico de D a 50°C	7
2.6	Gráfico de D a 175°C	8
2.7	Gráfico de D a 300°C	8
2.8	Gráfico de D a 425°C	9
2.9	Gráfico da tendência do laboratório 1	10
2.10	Gráfico da tendência do laboratório 2	11
2.11	Gráfico da tendência do laboratório 3	11
2.12	Gráfico da tendência do laboratório 4	12
2.13	Gráfico da tendência do laboratório 5	12
2.14	Gráfico da tendência do laboratório 6	13
2.15	Gráfico da tendência do laboratório 7	13
2.16	Gráfico da tendência do laboratório 8	14
2.17	Gráfico da tendência do laboratório 9	14
2.18	Gráfico da tendência do laboratório 10	15
2.19	Gráfico da tendência do laboratório 11	15
4.1	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 1 . . .	40
4.2	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 2 . . .	41
4.3	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 3 . . .	41
4.4	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 4 . . .	42
4.5	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 5 . . .	43
4.6	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 6 . . .	43
4.7	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 7 . . .	44
4.8	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 8 . . .	45
4.9	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 9 . . .	45
4.10	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 10 . .	46
4.11	Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 11 . .	47

Lista de Tabelas

2.1	Dados dos laboratórios de referência Salcas e Consistec (em °C)	5
2.2	Roteiro seguido pelo artefato	5
2.3	Dados do laboratório 1	6
2.4	Cálculo da tendência para o laboratório 1	10
2.5	Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 25°C	23
4.1	Teste 1 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM . .	37
4.2	Teste 2 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM . .	38
4.3	Teste 3 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM . .	39
4.4	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 1	40
4.5	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 2	40
4.6	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 3	41
4.7	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 4	42
4.8	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 5	42
4.9	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 6	43
4.10	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 7	44
4.11	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 8	44
4.12	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 9	45
4.13	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 10	46
4.14	Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 11	46
A.1	Dados do laboratório 2	51
A.2	Dados do laboratório 3	51
A.3	Dados do laboratório 4	51
A.4	Dados do laboratório 5	52
A.5	Dados do laboratório 6	52
A.6	Dados do laboratório 7	52
A.7	Dados do laboratório 8	52
A.8	Dados do laboratório 9	52
A.9	Dados do laboratório 10	53
A.10	Dados do laboratório 11	53
B.1	Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 50°C	55
B.2	Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 175°C	55
B.3	Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 300°C	56
B.4	Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 425°C	56
B.5	Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 25°C	56
B.6	Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 50°C	56
B.7	Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 175°C	57
B.8	Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 300°C	57

B.9	Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 425°C	57
B.10	Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 25°C	57
B.11	Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 50°C	58
B.12	Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 175°C	58
B.13	Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 300°C	58
B.14	Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 425°C	58
B.15	Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 25°C	59
B.16	Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 50°C	59
B.17	Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 175°C	59
B.18	Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 300°C	60
B.19	Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 425°C	60
B.20	Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 25°C	60
B.21	Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 50°C	60
B.22	Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 175°C	61
B.23	Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 300°C	61
B.24	Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 425°C	61
B.25	Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 25°C	61
B.26	Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 50°C	62
B.27	Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 175°C	62
B.28	Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 300°C	62
B.29	Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 425°C	62
B.30	Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 25°C	63
B.31	Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 50°C	63
B.32	Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 175°C	63
B.33	Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 300°C	63
B.34	Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 425°C	64
B.35	Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 25°C	64
B.36	Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 50°C	64
B.37	Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 175°C	64
B.38	Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 300°C	65
B.39	Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 425°C	65
B.40	Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 25°C	65
B.41	Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 50°C	65
B.42	Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 175°C	66
B.43	Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 300°C	66
B.44	Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 425°C	66
B.45	Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 25°C	66
B.46	Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 50°C	67
B.47	Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 175°C	67
B.48	Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 300°C	67
B.49	Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 425°C	67
B.50	Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 25°C	68
B.51	Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 50°C	68
B.52	Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 175°C	68
B.53	Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 300°C	68
B.54	Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 425°C	69

Capítulo 1

Introdução

Um componente chave para o controle de qualidade na indústria é a confiança nos dados por meio de sistemas de medição. Um sistema de medição é um processo que combina instrumentos, operadores e métodos para obter o valor de uma quantidade a ser medida, isto é, o mensurando. Em geral, o resultado de uma medição é somente uma aproximação ou estimativa do valor do mensurando, e assim, deve estar acompanhada pela incerteza dessa estimativa. A incerteza do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento do valor do mensurando. Como consequência, é importante monitorar a consistência e a competência dos laboratórios para realizarem medições específicas.

Atualmente o Brasil é um desenvolvedor de motores para automóveis e caminhões. Durante o desenvolvimento, os motores são testados em bancos de prova que simulam o carro ou o caminhão.

Na condução do ensaio, diversas características do motor são acompanhadas por sensores. As medições realizadas por estes sensores são digitalizadas e enviadas para um banco de automação e posteriormente, para um computador.

Como estes laboratórios de ensaio vendem as medições realizadas pelos sensores, a confiabilidade destas medições é fundamental. Neste sentido, reunimos os principais laboratórios do país para participarem de um ensaio de proficiência. Entre os diversos sensores utilizados pelos laboratórios, vamos considerar os sensores de temperatura denominados termopares.

Ensaio de Proficiência (EP) é o uso de ensaios de comparações interlaboratoriais para determinar o desempenho dos laboratórios para ensaios (ou calibrações) específicos e para monitorar a consistência e compatibilidade dos dados do laboratório [ver ISO Guia 43]. Ensaio de comparações interlaboratoriais são conduzidos não somente para analisar laboratórios, como também para avaliar métodos e padrões.

Neste trabalho, vamos considerar o EP de **esquemas de comparação de medição**, onde um único item de teste é distribuído sequencialmente entre os participantes, com os participantes enviando o item para o próximo laboratório ou enviando ao coordenador para manutenção. Os participantes devem apresentar os resultados de suas medições e suas respectivas incertezas expandidas para serem submetidas à análise.

Para analisar os resultados vamos propor:

- a. Um modelo para explicar os dados, e a partir dele;
- b. Encontrar as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros, e então;
- c. Desenvolver uma estratégia para verificar a competência dos laboratórios individualmente.

Na maioria dos trabalhos em que os erros de medição são incorporados ao modelo, ver Grubbs (1948 e 1973), Mandel (1959), Smith (1950) e Thompson (1963), a preocupação está

nos parâmetros de variabilidade associados à medição. Além disso, alguns autores, como Fuller (1987) e Cheng & Van Ness (1999), utilizam os modelos de regressão com erro nas variáveis para incorporar os erros de medição. Aqui, estamos interessados nos parâmetros de tendência aditiva e tendência multiplicativa, e vamos incorporar os erros de medição como proposto por Jaech (1985).

Jaech (1985) estabeleceu e desenvolveu métodos para estimar e testar as variâncias em sistemas de medição. Aqui, estamos interessados em estimar e testar hipóteses sobre o parâmetro de tendência aditiva ($\underline{\alpha}$) e sobre a tendência multiplicativa ($\underline{\beta}$) com respeito ao valor de referência. Aqui, os parâmetros de variância são estimados por um processo de calibração descrito no Capítulo 2. Portanto, nós iremos encontrar aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ do laboratório com respeito ao valor de referência e desenvolver uma estratégia para avaliarmos a consistência das medições dos laboratórios. Para ilustrar, vamos analisar os dados obtidos pelo grupo de ensaios, cujo sensor de motores é um termopar pt-100 com indicador de temperatura.

1.1 Objetivo

Considere um programa de comparação interlaboratorial com um grupo de N laboratórios. Estes laboratórios vão medir um mesmo equipamento padrão, devidamente calibrado por um laboratório reconhecido internacionalmente. Os laboratórios participantes realizam as medições do equipamento padrão e emitem um certificado com os valores medidos e a incerteza associada (desvio padrão).

Nossa metodologia de análise irá comparar os resultados dos laboratórios em relação a um valor de referência, para determinar se algum laboratório participante está com problemas na medição. Estes problemas são devidos a falhas nos equipamentos utilizados na medição, operadores que não seguem corretamente os procedimentos de medição, entre outros.

Aqui, propomos um modelo estatístico para os dados provenientes do ensaio de proficiência conduzido pelo grupo de ensaios de motores. Através deste modelo, vamos avaliar a compatibilidade dos resultados do grupo de laboratórios participantes.

1.2 Organização do Trabalho

Em relação a sua organização, este trabalho foi estruturado em cinco capítulos.

Neste capítulo, foram abordadas, de uma forma sucinta, as definições relativas ao entendimento sobre Ensaio de Proficiência.

No capítulo 2, são apresentados os dados referentes ao programa de EP conduzido pelo Grupo de Motores na área de temperatura e uma análise gráfica das tendências dos laboratórios.

No capítulo 3, nós definimos o modelo utilizado para explicar os dados, apresentamos um algoritmo para determinarmos aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e um estudo sobre a convergência do algoritmo EM.

No capítulo 4, apresentamos as aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do nosso modelo obtidas via algoritmo EM e os intervalos de confiança para os parâmetros obtidos via simulação.

No capítulo 5 apresentamos as conclusões e propostas futuras.

Capítulo 2

Apresentação dos Dados e Avaliação das Incertezas de Medição

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos os dados relativos ao programa de EP conduzido pelo Grupo de Ensaio de Motores. Além disso, vamos fazer uma introdução ao conceito de incerteza e mostrar como os laboratórios aplicaram este conceito para estimar a variância de suas medições.

2.2 Apresentação dos dados

Buscando a comprovação da competência técnica para realizarem suas medições, vários laboratórios do Estado de São Paulo se comprometeram a participar do programa de comparação interlaboratorial por ensaios de proficiência, conduzido pelo Grupo de Ensaios de Motores. Em uma comparação interlaboratorial, os diversos laboratórios medem o mesmo equipamento padrão. No nosso caso, os laboratórios participantes realizaram três medições em cinco faixas de temperatura, $25^{\circ}C$, $50^{\circ}C$, $175^{\circ}C$, $300^{\circ}C$ e $425^{\circ}C$ utilizando um termopar com indicador de temperatura.

Estas medições foram realizadas utilizando-se um termopar do próprio laboratório e um termopar padrão (que circula entre os laboratórios participantes do EP), que indicaremos por artefato. O procedimento para a realização da comparação é simples. Ambos os termopares são colocados no forno e as diferenças entre as medições são registradas.

Para a coleta dos dados, o experimento foi realizado seguindo o seguinte procedimento:

- Elevou-se a temperatura do forno e registrou-se a temperatura indicada por cada termopar nas faixas de temperatura mencionadas acima;
- Abaixou-se a temperatura do forno e anotou-se novamente as temperaturas indicadas;
- Elevou-se novamente a temperatura do forno e fez-se outro registro das temperaturas.

Figura 2.1: Termopar

Figura 2.2: Forno

Figura 2.3: Ensaio

Para a análise dos dados, vamos trabalhar com a diferença entre a diferença das medições do artefato e o equipamento do laboratório, e o valor de referência ou seja, definimos como tendência o resultado

$$(\text{Medição do Artefato} - \text{Medição do Equipamento do Laboratório}) - (\text{Valor de Referência}), \quad (2.1)$$

pois desta forma poderemos fazer uma melhor comparação entre os laboratórios. Na realidade, o forno tem uma exatidão de $\pm 3^\circ\text{C}$. Assim, ao ajustarmos o forno para 300°C , este deve estabilizar em uma temperatura no intervalo de $(297^\circ\text{C} , 303^\circ\text{C})$. Desta forma, para compararmos as medições dos laboratórios devemos utilizar a transformação 2.1. A comparação será feita entre o resultado acima contra os patamares de temperatura.

Os laboratórios Salcas e Consistec são considerados laboratórios de referência, pois participam de vários programas de EP internacional e pertencem à Rede Brasileira de Calibração (RBC). Assim, vamos tomar as medições desses laboratórios como referência para nosso EP.

Os laboratórios participantes e o percurso do padrão estão descritos na Tabela 2.2. Também apresentamos na Tabela 2.1 os dados referentes às medições dos laboratórios padrão Salcas e Consistec, contendo as médias das diferenças entre as medições realizadas em cada laboratório e desvios padrão correspondentes aos patamares de temperatura 25°C , 50°C , 175°C , 300°C e 425°C .

Temperatura	Tendência Salcas (TS)	Tendência Consistec (TC)	Valor de Referência	Desvio Padrão
25		1,7	1,7	0,1
50	1,6	1,7	1,65	0,2015565
175	1,7	1,4	1,55	0,2015565
300	1,2	1,2	1,2	0,3640055
425	1,2	1,1	1,15	0,3640055

Tabela 2.1: Dados dos laboratórios de referência Salcas e Consistec (em $^\circ\text{C}$)

Roteiro	Laboratório
1	GM Powertrain Ltda
2	Robert Bosh Ltda
3	Delphi Automotive Systems
4	Garrett
5	KS Pistões
6	Mahle - Mogi Guaçu
7	Mahle - São Paulo
8	Instituto Mauá de Tecnologia
9	MWM Motores Diesel
10	OMG Brasil Ltda
11	Magneti Marelli Controle Motor

Tabela 2.2: Roteiro seguido pelo artefato

Portanto, após a realização das medições no artefato e no seu respectivo equipamento, todos os laboratórios enviaram seus relatórios ao coordenador estatístico, contendo as informações necessárias para a análise, conforme as Tabelas 2.3 e A.1 a A.10 (Apêndice A). Nestas tabelas, apresentamos os dados obtidos no programa de EP descrito acima, onde onze laboratórios realizaram três medições em um mesmo artefato, um termopar com indicador de temperatura.

Nas tabelas a seguir,

- $F.M(^{\circ}C)$: faixa de medição em $^{\circ}C$;
- A1 é o avanço de temperatura;
- R1 é o retorno da temperatura;
- A2 é o segundo avanço de temperatura;
- Art.: temperaturas registradas pelo artefato;
- E.M.L: temperaturas registradas pelo termopar do laboratório ;
- D: representa a diferença entre a medição do artefato e o equipamento do laboratório;
- med/tend: média de D;
- DPM: desvio padrão da média;
- UE T e UE Ind.: incertezas expandidas do termopar e do indicador de temperatura, respectivamente;
- K T e K Ind.: fatores de abrangência do termopar e do indicador de temperatura, respectivamente.

Nas seções seguintes serão discutidos os conceitos de incerteza expandida e fator de abrangência. Para exemplificar, apresentaremos somente a tabela com os dados do laboratório 1. As tabelas contendo os dados dos demais laboratórios encontram-se no Apêndice A.

F.M. (°C)	Calibração															
	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	22,4	20,6	1,8	23,1	21,2	1,9	23,1	21,2	1,9	1,9	0,058	0,033	0,2	2	0,8	2
50	55,0	52,7	2,3	51,0	49,2	1,8	50,0	48,3	1,7	1,9	0,321	0,186	0,2	2	0,8	2
175	175,0	175,8	-0,8	175,0	176,0	-1,0	175,0	176,4	-1,4	-1,1	0,306	0,176	0,2	2	0,8	2
300	300,0	301,4	-1,4	300,0	302,2	-2,2	300,0	302,4	-2,4	-2,0	0,529	0,306	0,7	2	0,8	2
425	425,0	427,7	-2,7	425,0	427,6	-2,6	425,0	427,6	-2,6	-2,6	0,058	0,033	0,7	2	0,8	2

Tabela 2.3: Dados do laboratório 1

Os resultados das medições que são relevantes para a comparação entre os laboratórios correspondem às diferenças entre a medição do artefato e do equipamento do laboratório.

A seguir, apresentaremos os gráficos de pontos dos dados descritos nas Tabelas 2.3 e A.1 a A.10, para cada patamar de temperatura. Como já descrito anteriormente D representa a diferença entre as medições do artefato e do equipamento do laboratório, e VR representa o valor de referência.

Figura 2.4: Gráfico de D a 25°C Figura 2.5: Gráfico de D a 50°C

Figura 2.6: Gráfico de D a 175°C Figura 2.7: Gráfico de D a 300°C

Figura 2.8: Gráfico de D a 425°C

Através dos gráficos, observamos uma grande variabilidade entre as medições dos laboratórios, em todos os patamares de temperatura. Esta variabilidade depende dos equipamentos, padrões e estrutura de cada laboratório. Também podemos notar que conforme o patamar de temperatura aumenta, a diferença entre a medição do artefato e do equipamento do laboratório (D) é menor do que o valor de referência (VR).

Para comparar as medições dos laboratórios com as medições dos laboratórios de referência (Salcas / Consistec), o artefato e o equipamento do laboratório foram inseridos no mesmo forno. O forno foi programado para “estabilizar” em 5 patamares de temperatura ($25^{\circ}C$, $50^{\circ}C$, $175^{\circ}C$, $300^{\circ}C$ e $425^{\circ}C$), sendo registrada a diferença de temperatura entre o artefato e o equipamento do laboratório.

A seguir, apresentamos um gráfico da tendência de cada laboratório em relação ao valor de referência. Como tendência temos a diferença entre a medição do artefato e do laboratório (D) menos o valor de referência (Tabela 2.1). Na tabela abaixo exemplificamos o cálculo da tendência para o laboratório 1.

Patamar	D	Valor de Referência	Tendências
25	1,8	1,7	0,1
25	1,9	1,7	0,2
25	1,9	1,7	0,2
50	2,3	1,65	0,65
50	1,8	1,65	0,15
50	1,7	1,65	0,05
175	-0,8	1,55	-2,35
175	-1,0	1,55	-2,55
175	-1,4	1,55	-1,95
300	-1,4	1,2	-2,6
300	-2,2	1,2	-3,4
300	-2,4	1,2	-3,6
425	-2,7	1,15	-3,85
425	-2,6	1,15	-3,75
425	-2,6	1,15	-3,75

Tabela 2.4: Cálculo da tendência para o laboratório 1

Figura 2.9: Gráfico da tendência do laboratório 1

Figura 2.10: Gráfico da tendência do laboratório 2

Figura 2.11: Gráfico da tendência do laboratório 3

Figura 2.12: Gráfico da tendência do laboratório 4

Figura 2.13: Gráfico da tendência do laboratório 5

Figura 2.14: Gráfico da tendência do laboratório 6

Figura 2.15: Gráfico da tendência do laboratório 7

Figura 2.16: Gráfico da tendência do laboratório 8

Figura 2.17: Gráfico da tendência do laboratório 9

Figura 2.18: Gráfico da tendência do laboratório 10

Figura 2.19: Gráfico da tendência do laboratório 11

Pelos gráficos acima podemos notar que exceto os laboratórios 3 e 9, todos os outros laboratórios possuem uma tendência negativa, a medida que o patamar de temperatura aumenta. A tendência de cada laboratório é mais apropriada para avaliarmos a consistência das medições dos laboratórios. Pois quanto mais próximo de zero a tendência, mais próximas as medições estão do valor de referência. Assim, no próximo capítulo, vamos propor um modelo de regressão apropriado para avaliar os parâmetros associados à tendência de cada laboratório (variável resposta) com o patamar de temperatura.

Na próxima seção, apresentaremos alguns comentários sobre a recomendação, feita pelo ISO/GUM (1998), para avaliação de incertezas de medição. O termo incerteza de medição é sinônimo de desvio padrão.

2.3 Avaliação da Incerteza de Medição

O objetivo de uma medição é determinar o valor do mensurando, isto é, o valor da grandeza específica a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do método de medição e do procedimento de medição. Em geral, o resultado de uma medição é somente uma aproximação ou estimativa do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração da incerteza dessa estimativa.

Na prática, a especificação requerida ou definição requerida do mensurando é ditada pela exatidão requerida da medição (grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor de referência para o mensurando). O mensurando deve ser definido com totalidade suficiente relativa à exatidão requerida, de modo que, para todos os fins práticos associados com a medição, seu valor seja único.

A operação de medição é realizada, genericamente, por um sistema de medição (SM). O SM é o conjunto completo de instrumentos de medição e outros equipamentos acoplados para executar uma medição específica, ou seja, é um processo que combina instrumentos, operadores e métodos para obter o valor de uma quantidade a ser medida. Todo sistema de medição não é perfeito, ou seja, na realização de medições existem várias influências que geram erros nos resultados obtidos, de modo que não existe uma medição perfeita (sem erros).

Aspectos tecnológicos forçam que qualquer sistema de medição construído resulte imperfeito: suas dimensões, forma geométrica, material, propriedades elétricas, ópticas, pneumáticas, etc, não correspondem exatamente ao ideal. As leis e princípios físicos que regem o funcionamento de alguns sistemas de medição nem sempre são perfeitamente lineares, como uma análise simplista poderia supor. A existência de desgaste e deterioração de partes agravam ainda mais esta condição. Em todos os casos, o SM gera erros de medição.

O erro de medição é impossível de ser eliminado, porém podemos ao menos delimitá-lo com confiança apropriada. Mesmo sabendo da sua existência, ainda é possível obter informações confiáveis de uma medição, desde que a ordem de grandeza e a natureza deste erro sejam conhecidas. O erro é um conceito idealizado e não pode ser exatamente conhecido.

Geralmente ocorrem erros de vários tipos em uma mesma medida. Entretanto, esses diferentes tipos de erros podem ser separados em três grandes grupos:

1. **Erros Aleatórios ou Erros Estatísticos:** Resultam de variações aleatórias no valor medido de uma grandeza, devido a fatores que não podem ser controlados ou que por qualquer motivo não são controlados. Geralmente, essas variações se devem somente ao sistema e processo de medição, mas em alguns casos, as variações aleatórias também ocorrem na própria grandeza. Diversos fatores contribuem para o surgimento dos erros aleatórios, por exemplo, existência de folgas, vibrações, flutuações de tensão elétrica, instabilidades internas ou das condições ambientais, etc.
2. **Erros Sistemáticos:** É a parcela de erro sempre presente nas medições realizadas sob condições de repetitividade. Da mesma forma que os erros aleatórios, os erros sistemáticos não podem ser totalmente eliminados, mas podem ser reduzidos através de correções para compensar os seus efeitos. Os erros sistemáticos mais comuns são:

- 2.1 *Erros Sistemáticos Instrumentais*: É o erro que resulta da calibração de um instrumento de medição.
 - 2.2 *Erros Sistemáticos Teóricos*: É encontrado no uso de fórmulas teóricas aproximadas ou uso de valores aproximados para eventuais constantes físicas que sejam utilizadas.
 - 2.3 *Erros Sistemáticos Ambientais*: É o erro causado devido a efeitos do ambiente sobre a medição, tais como, temperatura, pressão, umidade, aceleração da gravidade, etc.
 - 2.4 *Erros Sistemáticos Observacionais*: É o erro devido a falhas ou limitação do próprio operador.
 - 2.5 *Erros Sistemáticos Residuais*: São os erros que não podem ser reduzidos a um valor baixo ou para os quais não seja possível fazer correções.
3. **Erros Grosseiros**: Consiste de enganos que, eventualmente podem ocorrer no procedimento de medida ou na realização de cálculos.

Na grande maioria dos casos, o resultado da medição é determinado através de uma série de leituras obtidas sob condições de repetitividade. Variações obtidas nas leituras repetidas são conseqüências de fatores que afetam os resultados das leituras. Além disso, o modelo matemático da medição, que transforma as leituras repetidas no resultado da medição é crítico, pois inclui fatores que não são totalmente conhecidos. Assim, a variação obtida nas leituras repetidas e a falta de informação do modelo matemático, contribuem para a incerteza do resultado da medição.

A declaração do resultado de uma medição somente é completa se ela contiver tanto o valor atribuído ao mensurando quanto a incerteza de medição associada a este valor. A **incerteza de medição** é um parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando (ISO/GUM(1998)). O mensurando é a grandeza física a ser medida. Em geral, os passos para estimar a incerteza são:

- a. Definir a equação de medição;
- b. Identificar as componentes de incerteza;
- c. Calcular a incerteza padrão das componentes;
- d. Calcular a incerteza combinada;
- e. Calcular os graus de liberdade efetivos;
- f. Calcular a incerteza expandida.

Nas subseções seguintes, abordaremos cada passo mencionado acima.

2.3.1 Equação de Medição

Na maioria dos casos o mensurando Y não é medido diretamente, mas é determinado a partir de N outras grandezas $X_1, X_2, \dots, X_N$ através de uma relação funcional f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

As grandezas de entrada $X_1, X_2, \dots, X_N$, das quais a grandeza de saída Y depende, podem ser consideradas como:

1. Grandezas cujos valores e incertezas podem ser diretamente determinadas na medição em curso. Estes valores ou incertezas podem ser obtidos, por exemplo, de uma única observação, de observações repetidas ou de julgamento baseado na experiência, e podem envolver a determinação de correções a leituras de instrumentos e correções por conta de grandeza de influência, tais como temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade;
2. Grandezas cujos valores e incertezas são incorporados à medição a partir de fontes externas, tais como grandezas associadas com padrões de medição calibrados, materiais de referência certificados e dados de referência obtidos de manuais técnicos.

No programa de temperatura, como método de medição, cada laboratório utilizou a seguinte relação entre temperatura, resolução e indicador de temperatura:

$$T_A = T_{EM} + D + Res(A) + Res(EM) + Ind \quad (2.2)$$

onde,

- T_A : Representa a temperatura no artefato;
- T_{EM} : Representa a temperatura no equipamento do laboratório;
- D : Representa a diferença de leitura entre os equipamentos (Artefato e Equipamento do laboratório);
- $Res(A)$: Resolução do artefato;
- $Res(EM)$: Resolução do equipamento do laboratório;
- Ind : Representa o indicador de temperatura do laboratório participante.

Os ítems T_{EM} , D , $Res(A)$, $Res(EM)$ e Ind são as grandezas de entrada e T_A , que representa a temperatura no artefato, é a grandeza de saída. A incerteza combinada de medição associada à estimativa de saída, designado por $u(y)$, é o desvio padrão do mensurando Y e deve ser determinado a partir das estimativas $x_1, x_2, \dots, x_N$ das grandezas de entrada $X_1, X_2, \dots, X_N$, e suas incertezas padrão associadas $u(x_i)$. A seguir, descrevemos métodos para calcular a incerteza de cada grandeza de entrada.

2.3.2 Avaliação da Incerteza Padrão de Medição das Estimativas de Entrada

A incerteza padrão de uma grandeza de entrada é dividida em dois grupos, de acordo com o método utilizado para estimar seus valores numéricos:

- Tipo A: Aquelas que são avaliadas por métodos estatísticos;
- Tipo B: Aquelas que são avaliadas por outros métodos.

Assim, uma incerteza padrão do Tipo A é obtida a partir de uma **função densidade de probabilidade** derivada da observação de uma distribuição de frequência, enquanto que uma incerteza padrão do Tipo B é obtida de uma suposta função de probabilidade, previamente assumida para esta fonte de incerteza.

É importante ressaltar que toda incerteza padrão é um desvio padrão. Assim, se considerarmos a incerteza do Tipo A, temos o desvio padrão da média da série de observações da

medição. Por outro lado, se considerarmos as incertezas do Tipo B, temos o desvio padrão da distribuição de probabilidade associada.

A incerteza padrão da grandeza de entrada D é avaliada pelo Tipo A enquanto que T_{EM} , $Res(A)$, $Res(EM)$ e Ind são avaliadas pelo Tipo B. Como fonte de incerteza do Tipo A, consideramos a repetitividade das medições. No nosso caso, cada laboratório realizou três medições do artefato em cada patamar de temperatura.

Para exemplificar os cálculos, vamos tomar os dados do laboratório 1 no patamar de $25^\circ C$. A incerteza padrão das grandezas de entrada é estimada da seguinte forma:

- **Incertezas Avaliadas pelo Tipo A:** Aqui, a incerteza padrão é dada pelo desvio padrão da média da série de observações da medição de temperatura. Sejam t_1, t_2, t_3 as três medições da temperatura (ver Tabela 2.3). O desvio padrão da média é

$$S(\bar{t}) = \frac{S(t)}{\sqrt{3}} = 0,033 ,$$

onde $S(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (t_k - \bar{t})^2} = 0,058$ e $\bar{t} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 t_k = 21$. Portanto, a incerteza padrão da repetitividade é

$$u(D) = 0,033^\circ C.$$

- **Incertezas Avaliadas pelo Tipo B:** Aqui, a incerteza padrão de uma grandeza de entrada que não tenha sido obtida através de observações repetidas é avaliada por julgamento científico, baseando-se em todas as informações disponíveis sobre a possível variabilidade dessa grandeza. O conjunto de informações pode incluir:

1. dados de medições prévias;
2. a experiência ou o conhecimento geral do comportamento e propriedades de materiais e instrumentos relevantes;
3. especificações do fabricante;
4. dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados;
5. incertezas relacionadas a dados de referência extraídos de manuais.

A partir disso, e considerando as grandezas de entrada para a medição da temperatura, as incertezas padrão são quantificadas da seguinte forma:

- **Incerteza Padrão para T_{EM} :** Após várias leituras de medição da temperatura, verificou-se que a distribuição de probabilidade que melhor se ajustava era a distribuição normal, cuja média é estimada pela média das observações (no nosso exemplo, $\bar{t} = 21^\circ C$). O desvio padrão da temperatura no equipamento do laboratório não é estimado da variabilidade associada diretamente às medições, mas via a incerteza expandida herdada do termopar. Como veremos na seção 2.3.4, a incerteza expandida é um múltiplo do desvio padrão que abrange o semi-intervalo de 95% de probabilidade. Assim, utilizando os dados da Tabela 2.3 (coluna UE T) à $25^\circ C$, obtemos que

$$0,2 = 2 * u(T_{EM}) \Rightarrow u(T_{EM}) = 0,1^\circ C.$$

Portanto, a incerteza padrão do padrão do laboratório é $u(T_{EM}) = 0,1^\circ C$.

A incerteza expandida do equipamento padrão do laboratório está declarada no certificado de calibração do respectivo equipamento.

- **Incerteza Padrão para $Res(A)$:** Para esta grandeza temos a informação que o termopar tem uma resolução de $0,1^\circ C$, ou seja, a escala de medição está dividida em intervalos de $0,1^\circ C$. Sendo assim, vamos considerar que $Res(A)$ tem distribuição uniforme com base igual à resolução do termopar. Portanto, a incerteza padrão da $Res(A)$ é

$$u(Res(A)) = \frac{0,1}{\sqrt{12}} = 0,028867527^\circ C.$$

- **Incerteza Padrão para $Res(EM)$:** Assim como $Res(A)$, $Res(EM)$ também é considerada uma variável aleatória com distribuição uniforme, com a mesma resolução de $0,1^\circ C$, logo, $u(Res(EM)) = u(Res(A))$.
- **Incerteza Padrão para Ind :** Após várias leituras de medição da temperatura, verificou-se que a distribuição de probabilidade que melhor se ajustava era a distribuição normal, cujo desvio padrão é estimado via a incerteza expandida herdada do indicador de temperatura. Assim, utilizando os dados da Tabela 2.3 (coluna UE Ind), à $25^\circ C$, obtemos que

$$0,8 = 2 * u(Ind) \Rightarrow u(Ind) = 0,4.$$

Mais uma vez, a incerteza expandida do indicador de temperatura está declarada no seu certificado de calibração. Na próxima seção, faremos a combinação de todas as incertezas padrão calculadas acima.

2.3.3 Avaliação da Incerteza Padrão Combinada

A incerteza combinada é a combinação entre todas as incertezas padrão das componentes relacionadas pela equação de medição, ou seja, $u_c(y)$ corresponde ao desvio padrão da estimativa da grandeza de saída.

Em alguns estudos de calibração, podemos ter que duas ou mais grandezas de entrada sejam correlacionadas, e essa correlação é de certa forma uma contribuição à incerteza combinada. Para julgar se existe ou não essa correlação, é preciso conhecer o processo de medição e ter conhecimento de causa dessa dependência mútua entre as grandezas de entrada. Não tomar conhecimento dessas correlações pode levar a avaliações incorretas da incerteza padrão do mensurando.

Em alguns casos, essa correlação pode ser eliminada pela escolha apropriada da relação funcional, mas na prática, algumas grandezas são freqüentemente relacionadas, pois na avaliação de seus valores é utilizado o mesmo padrão de referência, instrumento de medição, dados de referência, ou até, o método de medição.

Nos casos onde existe a correlação, o quadrado da incerteza padrão combinada (ISO GUM, 1998, pg. 21, item 5.2.2) pode ser aproximado por

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{h=i+1}^N c_i c_h u(x_i, x_h), \quad (2.3)$$

onde c_i e c_h são os coeficientes de sensibilidade associados com as estimativas de entrada x_i e x_h , respectivamente, isto é, as derivadas parciais da relação funcional f com relação às variáveis X_i e X_h , avaliadas nas estimativas x_i e x_h ,

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i=x_i, \dots, X_N=x_N}, \quad (2.4)$$

mesmo raciocínio para c_h . Temos ainda que $u(x_i)$ é a incerteza padrão associada à estimativa x_i da grandeza de entrada X_i (avaliada conforme seção anterior) e $u(x_i, x_h)$ é a covariância associada às duas estimativas x_i e x_h dada por

$$u(x_i, x_h) = u(x_i)u(x_h)r(x_i, x_h), \quad i \neq h$$

onde, $r(x_i, x_h)$ é o coeficiente de correlação ($i \neq h$ e $|r| \leq 1$). Em alguns casos, a covariância pode ser estimada por

$$u(x_i, x_h) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^P (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{hj} - \bar{x}_h),$$

onde x_{ij} é a j -ésima observação da grandeza X_i , e $\bar{x}_i$ é a estimativa da grandeza X_i , mesmo raciocínio para x_{hj} , ($i, h = 1, \dots, N$).

Para grandezas de entrada não correlacionadas, como é o caso do grupo da área de temperatura, a incerteza combinada é dada por :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) = \sum_{i=1}^N (c_i u(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N u^2(x_i). \quad (2.5)$$

O coeficiente de sensibilidade c_i descreve o quanto a estimativa de saída y é influenciada por variações da estimativa de entrada x_i . Como em nossa equação de medição a grandeza de saída é uma função linear das grandezas de entrada, temos que, para todas as grandezas de entrada, $c_i = 1$.

Logo, utilizando os cálculos das incertezas das grandezas de entrada da seção anterior, obtemos

$$u_c^2(y) = (0,0333)^2 + 2 * (0,0288)^2 + (0,4)^2 + (0,1)^2 = 0,173056^\circ C^2.$$

Assim,

$$u_c(y) = 0,416^\circ C.$$

2.3.4 Incerteza Expandida de Medição

Embora a incerteza combinada $u_c(y)$ possa ser universalmente usada para expressar a incerteza de um resultado de medição, em algumas aplicações comerciais, indústrias e regulamentadoras, é necessário apresentar uma medida de incerteza, que defina um intervalo em torno do resultado da medição. Este intervalo deve abranger uma extensa fração da distribuição de valores que poderiam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.

A medida de incerteza que satisfaz o requisito de fornecer tal intervalo é denominada incerteza expandida e é representada por $u_e(y)$. Assim, o resultado de uma medição é representada por

$$y \pm u_e(y). \quad (2.6)$$

A incerteza expandida $u_e(y)$ é obtida multiplicando-se a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ por um fator k de abrangência, correspondente a uma probabilidade de cobertura especificada (ISO/GUM recomenda 95%). Logo, a expressão acima pode ser reescrita como sendo

$$y \pm k * u_c(y). \quad (2.7)$$

A combinação entre as grandezas de entrada estabelece, pelo Teorema Central do Limite, que a distribuição do mensurando Y será aproximadamente normal. No entanto, podemos ter em alguns casos, que a incerteza padrão combinada pode estar sendo dominada por componentes de incertezas padrão avaliadas pelo Tipo A, baseada em poucas observações, ou por componentes de incertezas padrão avaliadas pelo Tipo B, baseadas em uma suposta distribuição não normal. Com isso, ao invés de usarmos o valor de k da distribuição normal, podemos melhorar a aproximação observando a distribuição da estatística

$$T = \frac{y - Y}{\sqrt{\hat{Var}(Y)}} = \frac{y - Y}{\sqrt{u_c^2(y)}} = \frac{y - Y}{u_c(y)},$$

onde $u_c(y)$ é a estimativa para o desvio padrão da grandeza de saída Y .

Pelo método de Welch-Satterthwaite, a estatística T tem distribuição aproximadamente t de Student com ν_{eff} graus de liberdade. O método utilizado estima os graus de liberdade baseado nos graus de liberdade de cada fonte de incerteza (ISO/GUM, 1998, pg 64), na forma

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{(u_i(y))^4}{\nu_i}}, \quad (2.8)$$

onde os $u_i(y) = c_i u_i(x_i)$ com $i = 1, \dots, N$, são as contribuições para a incerteza padrão associada à estimativa de saída y , resultante da incerteza padrão associada à estimativa de entrada x_i , e ν_i são os graus de liberdade efetivos da contribuição da incerteza padrão $u_i(y)$.

Como a estatística T tem distribuição aproximadamente t de Student, o intervalo com nível de confiança γ para o mensurando Y é dado por

$$P(-t_{\frac{\gamma}{2}} \leq T \leq t_{\frac{\gamma}{2}}) = (1 - \gamma),$$

ou seja,

$$-t_{\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{y - Y}{u_c(y)} \leq t_{\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow y \pm t_{\frac{\gamma}{2}} u_c(y),$$

onde $t_{\frac{\gamma}{2}}$ é o quantil $(1 - \frac{\gamma}{2}) * 100\%$ da distribuição t de Student que depende dos graus de liberdade dados por (2.8). Em geral, se denota k (Fator de Abrangência) ao invés de $t_{\frac{\gamma}{2}}$.

Para os dados da Tabela 2.3, à 25°C temos que os graus de liberdade são dados por

$$\nu_{\text{eff}} = 0,416^4 * \left(\frac{0,033^4}{2} + 2 * \frac{0,0288^4}{30} + \frac{0,4^4}{30} + \frac{0,1^4}{30} \right)^{-1} \approx 34,820.$$

Obs.: Para o cálculo de ν_{eff} temos que os graus de liberdade com relação à repetitividade são iguais a 2 (já que foram realizadas 3 medições em cada patamar de temperatura). Para as outras grandezas de entrada da equação de medição foi assumido que todas possuem 30 graus de liberdade, conforme recomendação do INMETRO.

Arredondando para baixo (sempre), temos $\nu_{\text{eff}} = 34$. Considerando um nível de confiança de 95%, obtemos da distribuição t de Student que $k \approx 2,032$ e então, a incerteza expandida é dada por

$$u_e(y) = k \cdot u_c(y) = 2,032 * 0,416 = 0,845^\circ\text{C}.$$

Resumiremos os cálculos de incerteza apresentados para o laboratório 1 no patamar de 25°C em forma de tabela. Para os demais patamares de temperatura para o laboratório 1 e para os outros laboratórios, os cálculos de incerteza em todos os patamares de temperatura para as grandezas de entrada encontram-se no Apêndice B.

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,8	B	Normal	2	0,4	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,416
Graus de Liberdade Efetivos						34,820
Fator de Abrangência						2,032
Incerteza Expandida						0,845

Tabela 2.5: Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 25°C

Capítulo 3

Modelo Estatístico, Estimação e Algoritmo EM

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos apresentar um possível modelo para explicar os dados, similar ao proposto por Jaech (1985) e obter aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança para o parâmetro de tendência aditiva $\underline{\alpha}$ dos laboratórios e para o parâmetro de tendência multiplicativa $\underline{\beta}$ com respeito ao valor de referência. Aqui, vamos utilizar o algoritmo EM como método numérico para obtenção das aproximações das estimativas de máxima verossimilhança.

3.2 Modelo Proposto

Considere um programa de EP com um grupo de N laboratórios, onde cada laboratório realiza uma série de medições de um mesmo artefato. Assim, um possível modelo para explicar os dados é:

$$Y_{ijk} = \alpha_i + \beta_i X_j + \epsilon_{ijk} , \quad \begin{cases} j = 1, \dots, P \text{ (Patamares de temperatura)} \\ i = 1, \dots, N \text{ (Laboratórios)} \\ k = 1, \dots, M \text{ (Réplicas)} \end{cases} , \quad (3.1)$$

onde Y_{ijk} representa a k -ésima tendência do laboratório i no j -ésimo patamar de temperatura, α_i representa o parâmetro de tendência aditiva em relação a X_j , β_i é a tendência multiplicativa em relação a X_j . O erro de medição ϵ_{ijk} está associado ao laboratório i , no patamar de temperatura j e na réplica k .

Vamos assumir que $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_{ij}^2)$, $k = 1, \dots, M$, onde σ_{ij} reflete o desvio padrão do erro do laboratório i associado à sua estimativa de medição y_{ijk} , isto é, a incerteza combinada associada à estimativa y_{ijk} . Assumimos também, que a variável de comparação $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_{xj}^2)$, onde os seus parâmetros são conhecidos. A variável X_j corresponde ao patamar de temperatura j . O parâmetro μ_j corresponde ao patamar de temperatura regulado no forno ($25^\circ C$, $50^\circ C$, $175^\circ C$, $300^\circ C$ e $425^\circ C$). Por outro lado, o parâmetro σ_{xj} corresponde à incerteza associada ao valor de referência (Tabela 2.1, coluna Desvio Padrão). As variâncias σ_{ij}^2 também são determinadas por calibração pelo respectivo laboratório, conforme apresentado no Capítulo 2. Para simplificar a notação, vamos considerar que cada laboratório realizou o mesmo número M de réplicas em cada patamar de temperatura.

Desde que cada laboratório tem equipamentos de medição, condições ambientais e operadores distintos, e as réplicas, em cada laboratório, são obtidas em condições de repetitividade, vamos assumir que

- a. ϵ_{ijk} é independente de ϵ_{ljk} para todo $k = 1, \dots, M$; $i, l = 1, \dots, N$, $i \neq l$; $j = 1, \dots, P$;
- b. ϵ_{ijk} é independente de ϵ_{ilk} para todo $j, l = 1, \dots, P$, $j \neq l$; $k = 1, \dots, M$; $i = 1, \dots, N$;
- c. ϵ_{ijk} é independente de ϵ_{ijl} para todo $k, l = 1, \dots, M$, $k \neq l$; $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, P$;
- d. ϵ_{ijk} é independente da variável X_j , para todo $k = 1, \dots, M$; $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, P$ e
- e. X_j é independente de X_l , para todo $j, l = 1, \dots, P$, $j \neq l$.

Assim, podemos afirmar que tanto os erros cometidos nas medições do mesmo laboratório quanto os erros nas medições de diferentes laboratórios são independentes. Finalmente, vamos considerar o vetor aleatório normal NM-variado $Y_j \sim N(\mu_{yj}, V_{yj})$, $j = 1, \dots, P$, onde:

$$Y_j = \begin{pmatrix} Y_{1j1} \\ \vdots \\ Y_{1jM} \\ Y_{2j1} \\ \vdots \\ Y_{2jM} \\ \vdots \\ Y_{Nj1} \\ \vdots \\ Y_{NjM} \end{pmatrix} ; \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_P \end{pmatrix}.$$

O vetor Y_j corresponde às medições dos laboratórios em cada patamar de temperatura, enquanto que o vetor Y corresponde a todos os dados.

Sejam

$$\mu_{yj} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_1 + \beta_1 \mu_j \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_N + \beta_N \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_N + \beta_N \mu_j \end{pmatrix}, \quad \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix},$$

o vetor de médias de Y_j e os vetores de parâmetros respectivamente e

$$V_{yj} = \begin{pmatrix} \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{1j}^2 & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 \\ \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{1j}^2 & \dots & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{1j}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{Nj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 \\ \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{Nj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_1 \beta_N \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 & \dots & \beta_N^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{Nj}^2 \end{pmatrix},$$

a matriz de covariâncias de Y_j .

Desta forma, podemos escrever $V_{yj} = \underline{\beta}^* \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 + D_j$, onde,

$$\underline{\beta}^* = (\beta_1 \quad \dots \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_N \quad \dots \quad \beta_N)'$$

e D_j é a matriz diagonal com elementos

$$(\sigma_{1j}^2, \dots, \sigma_{1j}^2, \sigma_{2j}^2, \dots, \sigma_{2j}^2, \dots, \sigma_{Nj}^2, \dots, \sigma_{Nj}^2), \quad j = 1, \dots, P.$$

Desse modo, $Y_{ijk} \sim N(\alpha_i + \beta_i \mu_j, \beta_i^2 \sigma_{xj}^2 + \sigma_{ij}^2)$ (Srivastava & Khatri, 1979, Teorema 2.2.2, pg 44). O determinante de V_{yj} é dado por (Graybill, 1983, Teorema 8.4.3, pg 203)

$$|V_{yj}| = \left[1 + \sigma_{xj}^2 \left(\frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} \right) \right] \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2,$$

e a inversa V_{yj}^{-1} é dada por (Graybill, 1983, Teorema 8.3.3, pg 189)

$$V_{yj}^{-1} = D_j^{-1} - \frac{\sigma_{xj}^2 (D_j^{-1} \underline{\beta}^*) (\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1})}{1 + \sigma_{xj}^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^*}, \quad j = 1, \dots, P.$$

Logo, a função de verossimilhança do modelo proposto é dada por

$$f_y = \prod_{j=1}^P f_{yj} = (2\pi)^{-\frac{NMP}{2}} \prod_{j=1}^P |V_{yj}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^P (y_j - \mu_{yj})' V_{yj}^{-1} (y_j - \mu_{yj}) \right]. \quad (3.2)$$

3.3 Introdução da Variável Latente e Algoritmo EM

Os cálculos necessários para se obter os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ são complicados, pois o determinante de V_{yj} depende do vetor de parâmetros $\underline{\beta}$. Desse modo, vamos incorporar a variável explicativa X_j no vetor Y_j e obter uma nova função de verossimilhança, onde o determinante da matriz de covariâncias não dependerá de $\underline{\beta}$. Aqui, pretendemos obter aproximações das estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ através de procedimentos iterativos, como o algoritmo EM (ver, Dempster, Laird e Rubin, 1977). Seja o vetor de “dados” aumentados

$$Y_j^* = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_{1j1} \\ \vdots \\ Y_{1jM} \\ Y_{2j1} \\ \vdots \\ Y_{2jM} \\ \vdots \\ Y_{Nj1} \\ \vdots \\ Y_{NjM} \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_P^* \end{pmatrix}.$$

Admitimos que $Y_j^* \sim N_{NM+1}(\mu_{yj}^*, V_{yj}^*)$, $j = 1, \dots, P$, onde

$$\mu_{yj}^* = \begin{pmatrix} \mu_j \\ \alpha_1 + \beta_1 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_1 + \beta_1 \mu_j \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_N + \beta_N \mu_j \\ \vdots \\ \alpha_N + \beta_N \mu_j \end{pmatrix}$$

e a matriz V_{yj}^* , na forma particionada é dada por

$$V_{yj}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{xj}^2 & \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \\ \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2 & \Sigma_{yj}^* \end{pmatrix}.$$

O determinante de V_{yj}^* é dado por (Graybill, 1983, Teorema 8.2.1, item 3, pg 184)

$$|V_{yj}^*| = |\sigma_{xj}^2| |\underline{\beta}^* \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 + D_j - \underline{\beta}^* \frac{1}{\sigma_{xj}^2} \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2| = \sigma_{xj}^2 |D_j| = \sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2.$$

Para calcularmos a inversa de V_{yj}^* , tomamos

$$V_{yj}^{*-1} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix};$$

onde (Graybill, 1983, Teorema 8.2.1 item 1, pg 184)

$$W_{11} = [\sigma_{xj}^2 - \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \Sigma_{yj}^{*-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2]^{-1}.$$

A inversa da matriz Σ_{yj}^* é dada por (Graybill, 1983, Teorema 8.3.3, pg 189)

$$\Sigma_{yj}^{*-1} = D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \sigma_{xj}^2)}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2}.$$

Então, W_{11} é dado por

$$W_{11} = \left[\sigma_{xj}^2 - \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \left(D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1}) \sigma_{xj}^2}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2} \right) \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2 \right]^{-1}.$$

Através de manipulações algébricas, encontramos

$$W_{11} = \frac{1}{\sigma_{xj}^2} + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^*;$$

$$W_{12} = -\frac{1}{\sigma_{xj}^2} \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \left[\underline{\beta}^* \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 + D_j - \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2 \frac{1}{\sigma_{xj}^2} \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \right]^{-1} = -\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1};$$

$$W_{21} = W_{12}' = -D_j^{-1} \underline{\beta}^*;$$

$$W_{22} = \left[\underline{\beta}^* \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 + D_j - \underline{\beta}^* \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \right]^{-1} = D_j^{-1}.$$

Para o modelo aumentado, a função de verossimilhança é dada por

$$f_{y^*} = \prod_{j=1}^P f_{y_j^*} = (2\pi)^{-\frac{(NM+1)P}{2}} \prod_{j=1}^P |V_{yj}^*|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^P (y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) \right]. \quad (3.3)$$

A expressão no termo exponencial é dada por

$$(y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) = y_j^{*'} V_{yj}^{*-1} y_j^* - 2\mu_{yj}^{*'} V_{yj}^{*-1} y_j^* + \mu_{yj}^{*'} V_{yj}^{*-1} \mu_{yj}^* \quad (3.4)$$

e

$$(y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) = \begin{pmatrix} x_j - \mu_j \\ \underline{y}_j - (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_j \\ \underline{y}_j - (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

onde

$$\underline{\alpha}^* = (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N \quad \dots \quad \alpha_N)',$$

$$\underline{y}_j = (y_{1j1} \quad \dots \quad y_{1jM} \quad y_{2j1} \quad \dots \quad y_{2jM} \quad \dots \quad y_{Nj1} \quad \dots \quad y_{NjM})'.$$

Das equações (3.4) e (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} (y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) &= \begin{pmatrix} x_j & \underline{y}_j' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ \underline{y}_j \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mu_j & (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_j \\ (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*) \end{pmatrix} - \\ &- 2 \begin{pmatrix} \mu_j & (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^{*'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ \underline{y}_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) &= x_j^2 W_{11} + x_j \underline{y}_j' W_{21} + x_j W_{12} \underline{y}_j + \underline{y}_j' W_{22} \underline{y}_j + \mu_j^2 W_{11} \\
&+ \mu_j (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*)' W_{21} + \mu_j W_{12} (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*) \\
&+ (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*)' W_{22} (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*) - 2\mu_j x_j W_{11} \\
&- 2x_j (\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*)' W_{21} - 2\mu_j W_{12} \underline{y}_j' \\
&- 2(\underline{\alpha}^* + \mu_j \underline{\beta}^*)' W_{22} \underline{y}_j .
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de W_{11} , W_{12} , W_{21} e W_{22} , obtemos que

$$\begin{aligned}
(y_j^* - \mu_{yj}^*)' V_{yj}^{*-1} (y_j^* - \mu_{yj}^*) &= \frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_{xj}^2} + x_j^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* + \\
&+ 2x_j (\underline{\alpha}^{*'} - \underline{y}_j') D_j^{-1} \underline{\beta}^* + \underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j + \\
&+ \underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{\alpha}^* - 2\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{y}_j .
\end{aligned}$$

Logo, a função log-verossimilhança para o modelo aumentado é dada por

$$\begin{aligned}
L(\underline{\alpha} , \underline{\beta} / Y^*) &= Ln \left[\prod_{j=1}^P f_{y_j^*} \right] = -\frac{(NM+1)P}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \ln (\sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2) - \\
&- \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^P \left(\frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_{xj}^2} + x_j^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* + 2x_j (\underline{\alpha}^{*'} - \underline{y}_j') D_j^{-1} \underline{\beta}^* + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j + \underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{\alpha}^* - 2\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{y}_j \right) \right] . \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Como para o nosso modelo os parâmetros são $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, vamos escrever $\underline{\beta}^* = J \underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}^* = J \underline{\alpha}$, onde a matriz J é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Desta forma, podemos reescrever o log da função de verossimilhança do modelo aumentado como

$$\begin{aligned}
L(\underline{\alpha}, \underline{\beta} / Y^*) &= Ln \left[\prod_{j=1}^P f_{y_j^*} \right] = -\frac{(NM+1)P}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \ln(\sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2) - \\
&- \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^P \left(\frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_{xj}^2} + x_j^2 (J \underline{\beta})' D_j^{-1} J \underline{\beta} + 2x_j ((J \underline{\alpha})' - \underline{y}_j') D_j^{-1} J \underline{\beta} + \right. \right. \\
&+ \left. \underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j + (J \underline{\alpha})' D_j^{-1} J \underline{\alpha} - 2(J \underline{\alpha})' D_j^{-1} \underline{y}_j \right) \right]. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Na próxima seção, apresentamos o algoritmo EM e condições suficientes para a sua convergência. Aqui, apenas aplicamos os conceitos das etapas E e M para o nosso modelo.

3.3.1 Etapa E

Aqui, obtemos a esperança da função log-verossimilhança dos dados aumentados (equação 3.7) dadas as observações y e os parâmetros estimados $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Para implementar esta etapa, é suficiente obter a esperança condicional das estatísticas suficientes da distribuição do vetor $Y^* = (Y_1^* \ Y_2^* \ \dots \ Y_P^*)'$ dado os dados observados $Y = (Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_P)'$ e os parâmetros $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$, pois o log da função de verossimilhança é obtido de uma distribuição da família exponencial regular (Dempster, Laird & Rubin, 1977). Tomamos o vetor particionado $\mu_{yj}^* = \begin{pmatrix} \mu_j \\ \mu_{yj} \end{pmatrix}$ e a matriz V_{yj}^* da forma particionada. Então (Searle, 1971, pps. 46, 47),

$$\hat{x}_j = E(X_j / Y_j = \underline{y}_j) = \mu_j + \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \left[D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1}) \sigma_{xj}^2}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2} \right] (\underline{y}_j - \mu_{yj}), \quad (3.8)$$

e

$$Var(X_j / Y_j = \underline{y}_j) = \sigma_{xj}^2 - \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^4 \left[D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1}) \sigma_{xj}^2}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2} \right] \underline{\beta}^*.$$

Como $Var(X_j / Y_j = \underline{y}_j) = E(X_j^2 / Y_j = \underline{y}_j) - [E(X_j / Y_j = \underline{y}_j)]^2$, temos então que

$$\begin{aligned}
\hat{x}_j^2 = E(X_j^2 / Y_j = \underline{y}_j) &= \sigma_{xj}^2 - \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^4 \left[D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1}) \sigma_{xj}^2}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2} \right] \underline{\beta}^* + \\
&+ \left[\mu_j + \underline{\beta}^{*'} \sigma_{xj}^2 \left[D_j^{-1} - \frac{(D_j^{-1} \underline{\beta}^*)(\underline{\beta}^{*'} D_j^{-1}) \sigma_{xj}^2}{1 + \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* \sigma_{xj}^2} \right] (\underline{y}_j - \mu_{yj}) \right]^2, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$j = 1, \dots, P$.

3.3.2 Etapa M

A etapa M é implementada maximizando o log da função de verossimilhança (equação 3.7). Derivando esta equação em relação aos parâmetros e igualando a zero temos

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \left(x_j^2 \underline{\beta}' J' D_j^{-1} J \underline{\beta} + 2x_j (\underline{\alpha}' J' - \underline{y}_j') D_j^{-1} J \underline{\beta} \right) \right] = 0. \quad (3.10)$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \underline{\hat{\beta}} + \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} (J \underline{\hat{\alpha}} - \underline{y_j}) = 0 . \quad (3.11)$$

Portanto,

$$\underline{\hat{\beta}} = - \left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} (J \underline{\hat{\alpha}} - \underline{y_j}) \right] . \quad (3.12)$$

Fazendo $\frac{\partial L(\underline{\alpha}, \underline{\beta} / Y^*)}{\partial \underline{\alpha}} = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \left(2x_j \underline{\beta}' J' D_j^{-1} (J \underline{\alpha} - \underline{y_j}) + \underline{\alpha}' J' D_j^{-1} J \underline{\alpha} - 2\underline{y_j}' D_j^{-1} J \underline{\alpha} \right) \right] = 0 . \quad (3.13)$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \underline{\hat{\beta}} + \sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \underline{\hat{\alpha}} - \sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} \underline{y_j} = 0 . \quad (3.14)$$

Portanto,

$$\underline{\hat{\alpha}} = \left[\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right]^{-1} \left(\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} \underline{y_j} - \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \underline{\hat{\beta}} \right) . \quad (3.15)$$

Agora, substituindo $\underline{\hat{\alpha}}$ da expressão (3.15) na expressão (3.12) e com algumas manipulações algébricas, encontramos

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\beta}} &= \left[I_N - \left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \left(\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} \underline{y_j} - \left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} \underline{y_j} \right] . \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde, I_N é a matriz identidade de ordem N. Finalmente, substituindo a expressão de $\underline{\hat{\beta}}$ obtida em (3.16) na equação (3.15), temos

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\alpha}} = & \left[\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right]^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} \underline{y}_j - \left(\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \right) \left[I_N - \left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \times \right. \right. \\
& \times \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \left(\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \right) \left. \right]^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \times \right. \\
& \times \sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} \underline{y}_j - \left(\sum_{j=1}^P x_j^2 J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^P x_j J' D_j^{-1} J \right) \left(\sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} J \right)^{-1} \times \\
& \left. \left. \times \sum_{j=1}^P J' D_j^{-1} \underline{y}_j \right] \right\}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

3.3.3 Algoritmo EM

Para encontrarmos as estimativas de máxima verossimilhança do modelo, procedemos da seguinte forma:

- Fornecer um valor inicial para os vetores de parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$;
- Obter $\hat{x}_j$ pela equação (3.8) e $\hat{x}_j^2$ pela equação (3.9);
- Substituir os valores encontrados em (b) nas expressões de $\hat{\underline{\alpha}}$ (3.17) e $\hat{\underline{\beta}}$ (3.16);
- Substituir os novos valores de $\hat{\underline{\alpha}}$ e $\hat{\underline{\beta}}$ e voltar ao item (b) até que as diferenças obtidas de uma iteração para outra sejam menores que um valor pré fixado.

3.4 Estudo da Convergência do Algoritmo EM

O algoritmo Esperança e Maximização (EM) é um método computacional iterativo para se obter, entre outras aplicações, aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança em problemas com dados incompletos, onde a aplicação de outros métodos computacionais tal como o método de Newton - Raphson pode ser mais complicada.

Em cada iteração do algoritmo EM existem dois passos - chamados de passo esperança ou passo E e passo maximização ou passo M. Este nome foi dado por Dempster, Laird e Rubin (1977). O algoritmo EM fornece uma estimativa para os dados que estão faltando, onde os parâmetros são estimados após ser fornecido um valor inicial para estes dados e então reestimados procedendo iterativamente até a convergência. Nesta seção, vamos apresentar o algoritmo EM e estabelecer condições suficientes para sua convergência. Na seqüência, aplicamos o resultado de convergência para o nosso modelo.

3.4.1 Formulação do Algoritmo EM

Seja Y o vetor aleatório correspondente aos dados observados y , tendo função densidade de probabilidade $g_y(y, \Psi)$, onde Ψ é o vetor de parâmetros desconhecidos. O espaço paramétrico será denotado por Ω e corresponde a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$.

Considere x o vetor de dados não observados, $y^* = (x, y)$ o vetor de dados completos e $\prod_{j=1}^P f_{y_j^*}$ a função de verossimilhança deste vetor. Então o log da função de verossimilhança dos dados completos é dada por

$$L_c(\Psi) = Ln \prod_{j=1}^P f_{y_j^*}. \tag{3.18}$$

O algoritmo EM aplica-se ao problema de resolver a equação de máxima verossimilhança de dados incompletos

$$\frac{\partial L(\Psi)}{\partial \Psi} = 0 ,$$

onde L é o log da função de verossimilhança de dados incompletos, indiretamente pelo processo iterativo em termos do log da função de verossimilhança dos dados completos $L_c(\Psi)$. Como a função é não observável, ela é substituída pela esperança condicional de X dado y^* , utilizando a função ajustada por Ψ .

Mais especificamente, seja $\Psi^{(0)}$ algum valor inicial para Ψ . Então, na primeira iteração, o passo E requer o cálculo de

$$Q(\Psi, \Psi^{(0)}) = E_{\Psi^{(0)}} \{L_c(\Psi)/y\} .$$

O passo M requer a maximização de $Q(\Psi, \Psi^{(0)})$ com respeito a Ψ sobre o espaço paramétrico Ω . Isto é, escolhemos $\Psi^{(1)}$ tal que

$$Q(\Psi^{(1)}, \Psi^{(0)}) \geq Q(\Psi, \Psi^{(0)})$$

para todo $\Psi \in \Omega$. Os passos E e M são então iterados novamente, porém com $\Psi^{(0)}$ substituído pelo parâmetro ajustado $\Psi^{(1)}$. Na $(k+1)$ -ésima iteração, os passos E e M são definidos como segue (McLachlan e Krishnan, 1997, pp. 21, 22 e 23) :

- Passo E : Calcular $Q(\Psi, \Psi^{(k)})$, onde $Q(\Psi, \Psi^{(k)}) = E_{\Psi^{(k)}} \{L_c(\Psi)/y\}$;
- Passo M : Escolher $\Psi^{(k+1)}$ como sendo um valor de $\Psi \in \Omega$ que maximiza $Q(\Psi, \Psi^{(k)})$, isto é,

$$Q(\Psi^{(k+1)}, \Psi^{(k)}) \geq Q(\Psi, \Psi^{(k)})$$

para todo $\Psi \in \Omega$.

Os passos E e M são alternadamente repetidos até que a diferença

$$L(\Psi^{(k+1)}) - L(\Psi^{(k)})$$

seja uma quantidade arbitrariamente pequena no caso da convergência da sequência de valores de verossimilhança $\{L_c(\Psi^{(k)})\}$. Dempster, Laird e Rubin (1977), mostram que a função de verossimilhança (dados incompletos), não decresce após uma iteração EM, isto implica que $L(\Psi)$ também não decresce, ou seja,

$$L(\Psi^{(k+1)}) \geq L(\Psi^{(k)}) \tag{3.19}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ (ver Dempster, Laird e Rubin, 1977, Teorema 1).

3.4.2 Passo M Aplicado ao Nosso Modelo

Como descrito na seção 3.3.2, maximizamos diretamente o log da função de verossimilhança de dados completos $L_c(\Psi)$. Porém, o passo M requer que maximizemos $E_{\Psi^{(k)}} \{L_c(\Psi)/y\}$. A seguir, vamos mostrar que estes dois procedimentos de maximização são equivalentes.

$$\begin{aligned}
E [L_c(\Psi) / \Psi^{(0)}, Y^*] &= E \left[-\frac{(NM+1)P}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \ln(\sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2) - \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^P \left(\frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_{xj}^2} + x_j^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* + 2x_j (\underline{\alpha}^{*'} - \underline{y}_j') D_j^{-1} \underline{\beta}^* + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j + \underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{\alpha}^* - 2\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{y}_j \right) \right] / \Psi^{(0)}, Y^* \Big].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E [L_c(\Psi) / \Psi^{(0)}, Y^*] &= -\frac{(NM+1)P}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \ln(\sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \left[\frac{E[(x_j / \Psi^{(0)}, Y^*) - \mu_j]^2}{\sigma_{xj}^2} + E[x_j^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* / \Psi^{(0)}, Y^*] + 2E[x_j (\underline{\alpha}^{*'} - \underline{y}_j') D_j^{-1} \underline{\beta}^* / \Psi^{(0)}, Y^*] + \right. \\
&\quad \left. + E[\underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j / \Psi^{(0)}, Y^*] + E[\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{\alpha}^* / \Psi^{(0)}, Y^*] - 2 E[\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{y}_j / \Psi^{(0)}, Y^*] \right]
\end{aligned}$$

Portanto, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
E [L_c(\Psi) / \Psi^{(0)}, Y^*] &= -\frac{(NM+1)P}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^P \ln(\sigma_{xj}^2 \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^P \left(\frac{(\hat{x}_j - \mu_j)^2}{\sigma_{xj}^2} + \hat{x}_j^2 \underline{\beta}^{*'} D_j^{-1} \underline{\beta}^* + 2\hat{x}_j (\underline{\alpha}^{*'} - \underline{y}_j') D_j^{-1} \underline{\beta}^* + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \underline{y}_j' D_j^{-1} \underline{y}_j + \underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{\alpha}^* - 2\underline{\alpha}^{*'} D_j^{-1} \underline{y}_j \right) \right] \tag{3.20}
\end{aligned}$$

onde $\hat{x}_j$ e $\hat{x}_j^2$ são dados pelas equações (3.8) e (3.9). Logo, ao maximizarmos a equação (3.20), obteremos as equações (3.16) e (3.17) dadas na seção 3.3.2.

3.4.3 Convergência do Algoritmo EM

Boyles (1983) afirma que as duas hipóteses do Teorema 2 enunciado em Dempster, Laird e Rubin (1977) não são suficientes para implicar que $\{L(\Psi^{(k)})\}$ seja uma seqüência convergente, ou seja,

$$\| \Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)} \| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

onde a norma dada acima é a norma euclidiana.

Para tanto, Wu (1983) estabelece um conjunto de suposições que garantem a convergência do algoritmo EM. Além disso, o artigo contém um estudo para se concluir sobre a natureza do limite da seqüência acima (se o limite é um máximo global, máximo local ou ponto de sela de L).

A seguir, vamos estabelecer as condições que garantem a convergência do algoritmo EM e provar que estas condições valem para o caso de nossa função de verossimilhança.

Para garantirmos que $L(\Psi^{(k)})$ converge monotonicamente para algum L^* , precisamos de duas condições (Wu, 1983, pg. 96, itens 3 e 8):

1. $L(\Psi^{(k+1)}) \geq L(\Psi^{(k)})$;

2. A sequência $\{L(\Psi^{(k)})\}_{k \geq 0}$ é limitada superiormente para $\forall \Psi_0 \in \Omega$.

Do item 1 temos que L não decresce após uma iteração do algoritmo EM (Dempster, Laird e Rubin, 1977, Teorema 1, pg.7).

Agora, para verificarmos o item 2, precisamos mostrar que a nossa função de verossimilhança (dados incompletos), dada na seção 3.2 (equação 3.2, pg. 27) é limitada superiormente. Ela é dada por

$$f_y = \prod_{j=1}^P f_{y_j} = (2\pi)^{-\frac{NMP}{2}} \prod_{j=1}^P |V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^P (y_j - \mu_{y_j})' V_{y_j}^{-1} (y_j - \mu_{y_j}) \right]. \quad (3.21)$$

Notemos que a parte exponencial da função possui expoente negativo, logo ela é limitada superiormente. De fato, precisamos apenas mostrar que $|V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}}$ é também limitado superiormente. Temos que

$$|V_{y_j}| = \left[1 + \sigma_{x_j}^2 \left(\frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} \right) \right] \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2.$$

Então,

$$|V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \sigma_{x_j}^2 \left(\frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_1^2}{\sigma_{1j}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} + \dots + \frac{\beta_N^2}{\sigma_{Nj}^2} \right) \right] \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2}}.$$

Como $\sigma_{x_j}^2$ e os σ_{ij}^2 são fixados, precisamos apenas verificar os parâmetros β_i , $i = 1, \dots, N$. Para qualquer β_i , $i = 1, \dots, N$, temos que

- $\lim_{\beta_i \rightarrow 0} |V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2}};$
- $\lim_{\beta_i \rightarrow -\infty} |V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}} = 0;$
- $\lim_{\beta_i \rightarrow \infty} |V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}} = 0, i = 1, \dots, N.$

ou seja, $|V_{y_j}|^{-\frac{1}{2}}$ é limitado superiormente por $\frac{1}{\sqrt{\sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{1j}^2 \dots \sigma_{Nj}^2 \dots \sigma_{Nj}^2}}, \forall j = 1, \dots, P$. Logo, f_y é limitada superiormente.

Como L (Logaritmo natural) é uma função injetora, $L(f_y)$ também é limitada superiormente. Portanto, a sequência $\{L(\Psi^{(k)})\}$ é limitada superiormente. De acordo com Wu (1983), pg. 97, item 2.1, $\{L(\Psi^{(k)})\}$ converge monotonicamente para algum L^* .

O fato da sequência $\{L(\Psi^{(k)})\}$ convergir monotonicamente para algum L^* não garante que L^* seja um ponto de máximo global de $L(\Psi)$ sobre Ω . De fato, L^* pode ser um ponto de máximo local ou ainda um ponto estacionário. No nosso caso, verificamos empiricamente que L^* é um ponto de máximo global (ver Capítulo 4, Tabelas de 4.1 a 4.3), pois obtemos sempre o mesmo L^* para diferentes valores iniciais para os parâmetros do modelo.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ obtidos via algoritmo EM (ver Apêndices C e D). Além disso, vamos propor uma estratégia para avaliarmos a compatibilidade e consistência dos laboratórios participantes do EP.

4.2 Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM

Para avaliarmos a robustez do algoritmo EM, aplicamos o algoritmo EM para diferentes valores iniciais dos parâmetros.

Parâmetros	Valores Iniciais	Estimativas	Nº de Iterações	L^*
α_1	0	0.3002	5	-383.1246
α_2	0	0.0542		
α_3	0	-0.2264		
α_4	0	0.2769		
α_5	0	-0.0668		
α_6	0	-1.6080		
α_7	0	-1.6222		
α_8	0	0.0789		
α_9	0	-0.1328		
α_{10}	0	-0.7009		
α_{11}	0	0.0289		
β_1	0	-0.0109		
β_2	0	-0.0063		
β_3	0	0.0028		
β_4	0	-0.0085		
β_5	0	-0.0078		
β_6	0	-0.0003		
β_7	0	-0.0003		
β_8	0	-0.0043		
β_9	0	0.0037		
β_{10}	0	-0.0014		
β_{11}	0	-0.0004		

Tabela 4.1: Teste 1 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM

Seqüência $\{L(\Psi^{(k)})\} : (-415.2326, -383.1215, -383.1246, -383.1246, -383.1246)$.

Parâmetros	Valores Iniciais	Estimativas	Nº de Iterações	L^*
α_1	0.56	0.3002	7	-383.1246
α_2	-0.99	0.0542		
α_3	1	-0.2264		
α_4	0.13	0.2769		
α_5	1.6	-0.0668		
α_6	-1	-1.6080		
α_7	0.549	-1.6222		
α_8	-0.954	0.0789		
α_9	1.12	-0.1328		
α_{10}	-1.5	-0.7009		
α_{11}	0.8	0.0289		
β_1	0	-0.0109		
β_2	1	-0.0063		
β_3	0.98	0.0028		
β_4	0.537	-0.0085		
β_5	-0.89	-0.0078		
β_6	1.3	-0.0003		
β_7	-0.67	-0.0003		
β_8	0.088	-0.0043		
β_9	-1.2	0.0037		
β_{10}	1.804	-0.0014		
β_{11}	-0.556	-0.0004		

Tabela 4.2: Teste 2 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM

Seqüência $\{L(\Psi^{(k)})\} : (-1542729.1648, -304038.2122, -4467.8474, -385.7360, -383.1280, -383.1246, -383.1246)$.

Parâmetros	Valores Iniciais	Estimativas	Nº de Iterações	L^*
α_1	23	0.3002	9	-383.1246
α_2	52	0.0542		
α_3	160	-0.2264		
α_4	100	0.2769		
α_5	46	-0.0668		
α_6	-37	-1.6080		
α_7	-9	-1.6222		
α_8	-648	0.0789		
α_9	25	-0.1328		
α_{10}	891	-0.7009		
α_{11}	-184	0.0289		
β_1	101	-0.0109		
β_2	194	-0.0063		
β_3	-90	0.0028		
β_4	-307	-0.0085		
β_5	24	-0.0078		
β_6	91	-0.0003		
β_7	55	-0.0003		
β_8	62	-0.0043		
β_9	218	0.0037		
β_{10}	-75	-0.0014		
β_{11}	456	-0.0004		

Tabela 4.3: Teste 3 - Valores das Estimativas para os Parâmetros via Algoritmo EM

Seqüência $\{L(\Psi^{(k)})\} : (-21217327795.5909, -4115593.3685, -1594890.2128, -110966.6056, -829.6552, -383.3749, -383.1250, -383.1246, -383.1246)$.

Pelos resultados apresentados nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, podemos concluir que o algoritmo EM é consistente e robusto em relação aos valores iniciais atribuídos aos parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, mudando somente o número de iterações necessárias para se obter uma aproximação para as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros.

4.3 Análise da Competência dos Laboratórios

Como o nosso modelo, que descreve os dados provenientes de um EP não podem ser organizados em vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, não conseguimos aplicar os resultados clássicos da teoria assintótica (referente aos testes de hipóteses)(ver Lehmann, 1983, Teorema 4.1, pg. 429 e Sen e Singer, 1993, Teorema 5.2.1, pg. 205).

Nossa estratégia de análise neste caso, foi obter “intervalos de confiança” a 95% para a tendência Y em cada laboratório e em cada patamar de temperatura, via simulação. Para tanto, realizamos os seguintes passos:

1. Fornecemos as aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança de α_i e β_i , obtidos via algoritmo EM;
2. Geramos 1000 valores de erros $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_{ij}^2)$;
3. Geramos 1000 valores para a variável explicativa $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_{xj}^2)$;
4. Encontramos $Y_{ijk} = \alpha_i + \beta_i X_j + \epsilon_{ijk}$;
5. Ordenamos Y_{ijk} e tomamos as posições 25 e 975 a fim de obtermos um intervalo com 95% de confiança.

Obs.: A rotina para os cálculos dos intervalos de confiança encontra-se no Apêndice E apenas para o laboratório 1. As outras rotinas são similares, apenas mudando os valores para as aproximações das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e as variâncias.

Os intervalos e respectivos gráficos são dados a seguir.

Laboratório 1

Patamares	Intervalos
25°C	$[-0.78561 ; 0.75506]$
50°C	$[-1.1627 ; 0.70719]$
175°C	$[-2.5022 ; -0.71651]$
300°C	$[-4.1655 ; -1.7229]$
425°C	$[-5.3838 ; -3.2649]$

Tabela 4.4: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 1

Figura 4.1: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 1

Laboratório 2

Patamares	Intervalos
25°C	$[-1.467 ; 1.342]$
50°C	$[-1.6717 ; 1.2566]$
175°C	$[-2.5287 ; 0.39721]$
300°C	$[-3.194 ; -0.34623]$
425°C	$[-4.9261 ; -0.40429]$

Tabela 4.5: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 2

Figura 4.2: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 2

Laboratório 3

Patamares	Intervalos
25°C	$[-0.58101 ; 0.26246]$
50°C	$[-0.46708 ; 0.28588]$
175°C	$[-0.6392 ; 1.1219]$
300°C	$[-0.14489 ; 1.3619]$
425°C	$[0.35351 ; 1.5589]$

Tabela 4.6: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 3

Figura 4.3: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 3

Laboratório 4

Patamares	Intervalos
25°C	[0.1164 ; 0.57712]
50°C	[−0.0053129 ; 0.48279]
175°C	[−0.62529 ; −0.097991]
300°C	[−1.5557 ; −0.3003]
425°C	[−2.0897 ; −0.90077]

Tabela 4.7: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 4

Figura 4.4: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 4

Laboratório 5

Patamares	Intervalos
25°C	[−0.4746 ; −0.062072]
50°C	[−0.68889 ; −0.20616]
175°C	[−1.7089 ; −1.1636]
300°C	[−2.9745 ; −1.8787]
425°C	[−4.0445 ; −2.7013]

Tabela 4.8: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 5

Figura 4.5: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 5

Laboratório 6

Patamares	Intervalos
$25^{\circ}C$	$[-1.8302 ; -1.3946]$
$50^{\circ}C$	$[-1.838 ; -1.4107]$
$175^{\circ}C$	$[-1.9287 ; -1.3739]$
$300^{\circ}C$	$[-2.1942 ; -1.2172]$
$425^{\circ}C$	$[-2.1067 ; -1.3582]$

Tabela 4.9: Intervalos de 95% de confiança para a tendência ($^{\circ}C$) - Laboratório 6

Figura 4.6: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 6

Laboratório 7

Patamares	Intervalos
25°C	[−1.8536 ; −1.4161]
50°C	[−1.8758 ; −1.399]
175°C	[−1.9663 ; −1.42]
300°C	[−2.1909 ; −1.2058]
425°C	[−2.111 ; −1.3734]

Tabela 4.10: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 7

Figura 4.7: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 7

Laboratório 8

Patamares	Intervalos
25°C	[−0.092915 ; 0.034028]
50°C	[−0.20481 ; −0.071692]
175°C	[−0.99337 ; −0.34351]
300°C	[−1.8062 ; −0.64336]
425°C	[−2.3601 ; −1.1492]

Tabela 4.11: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 8

Figura 4.8: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 8

Laboratório 9

Patamares	Intervalos
25°C	$[-0.28748 ; 0.1792]$
50°C	$[-0.12145 ; 0.21987]$
175°C	$[0.37324 ; 0.66336]$
300°C	$[0.83736 ; 1.1253]$
425°C	$[1.2073 ; 1.6832]$

Tabela 4.12: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 9

Figura 4.9: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 9

Laboratório 10

Patamares	Intervalos
25°C	$[-1.0184 ; -0.47797]$
50°C	$[-1.9674 ; 0.2711]$
175°C	$[-1.136 ; -0.76228]$
300°C	$[-2.9547 ; 0.64302]$
425°C	$[-2.7577 ; 0.17854]$

Tabela 4.13: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 10

Figura 4.10: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 10

Laboratório 11

Patamares	Intervalos
25°C	$[-0.13238 ; 0.16102]$
50°C	$[-0.15047 ; 0.16483]$
175°C	$[-0.18858 ; 0.099791]$
300°C	$[-0.26292 ; 0.10507]$
425°C	$[-0.5288 ; 0.2344]$

Tabela 4.14: Intervalos de 95% de confiança para a tendência (°C) - Laboratório 11

Figura 4.11: Tendência, Reta Ajustada e Intervalo de Confiança para o laboratório 11

Como podemos observar pelos gráficos acima, apenas o laboratório 11 pode ser considerado competente pois é o único cujo intervalo de confiança contém o zero em todos os patamares de temperatura analisados, ou seja, temos indícios que suas medições podem ser considerados “ similares ” ao valor de referência (VR) a menos de um erro.

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Conclusões

O objetivo do programa de ensaios de proficiência é qualificar ou não os laboratórios participantes. Analisamos os dados obtidos pelo Grupo de Motores da área de temperatura, cujo mensurando é um termopar com indicador de temperatura. Nesse sentido, nosso objetivo foi analisar a competência dos laboratórios participantes.

Para tal análise, modelamos os dados utilizando a distribuição normal. Consideramos, ainda, um modelo com erros de medição e variável explicativa aleatória. Diferente de outros modelos, estamos interessados em comparar a tendência dos laboratórios participantes em relação a um valor de referência, que é determinado por dois laboratórios que pertencem à Rede Brasileira de Calibração (RBC).

Neste modelo, estávamos interessados em encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ e propor um teste para testar a competência dos laboratórios.

Na prática, não conseguimos encontrar explicitamente os estimadores de $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$. Como método alternativo, utilizamos o algoritmo EM para encontrar aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e estudamos a sua convergência.

Pelo fato de não ser possível dispor nossos vetores de observações de modo a serem independentes e identicamente distribuídos, não conseguimos aplicar os resultados clássicos da teoria assintótica (ver Lehmann, 1983, Teorema 4.1, pg. 429 e Sen e Singer, 1993, Teorema 5.2.1, pg. 205). Desse modo, a estratégia foi obter intervalos de confiança a 95% para as tendências Y via simulação para cada laboratório em cada patamar de temperatura.

5.2 Propostas de Trabalhos Futuros

- Desenvolver um teste para testar a consistência do grupo de laboratórios e a competência dos laboratórios individualmente;
- Estudar condições sobre o algoritmo EM para se obter convergência cujo limite seja um máximo global;
- Avaliar a consistência dos estimadores de máxima verossimilhança.

Apêndice A

Dados dos Laboratórios

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	26,5	24,8	1,7	26,6	24,8	1,8	26,6	24,8	1,8	1,8	0,058	0,033	1,4	2	0,2	2
50	51,4	49,6	1,8	51,5	49,6	1,9	50,6	49,6	1	1,6	0,493	0,285	1,4	2	0,2	2
175	173,3	173,4	-0,1	175,6	175,3	0,3	173,2	173,5	-0,3	0,0	0,306	0,176	1,4	2	0,2	2
300	299,1	300,1	-1,0	302,8	303,1	-0,3	300,9	301,6	-0,7	-0,7	0,351	0,203	1,4	2	0,2	2
425	425,4	426,7	-1,3	425,6	426,3	-0,7	424,7	425,5	-0,8	-0,9	0,321	0,186	2,4	2	0,2	2

Tabela A.1: Dados do laboratório 2

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	27,2	25,3	1,9	25,1	23,7	1,4	25,6	23,9	1,7	1,7	0,252	0,145	0,3	2	0,1	2
50	52,2	50,3	1,9	50,5	48,9	1,6	50,1	48,4	1,7	1,7	0,153	0,088	0,3	2	0,1	2
175	169,3	169,9	-0,6	174,4	173,7	0,7	175,4	176,0	-0,6	-0,2	0,751	0,433	0,3	2	0,1	2
300	300,9	299,0	1,9	300,1	299,2	0,9	298,5	296,5	2	1,6	0,608	0,351	0,3	2	0,1	2
425	426,1	423,4	2,7	425,5	422,8	2,7	425,0	422,3	2,7	2,7	0,0	0,0	0,6	2	0,1	2

Tabela A.2: Dados do laboratório 3

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	22,2	20,0	2,2	23,6	21,4	2,2	23,7	21,5	2,2	2,2	3E-8	2E-8	0,2	2	0,1	2
50	50,6	48,8	1,8	51,9	50,1	1,8	51,6	49,9	1,7	1,8	0,058	0,033	0,2	2	0,1	2
175	175,0	176,1	-1,1	174,4	175,5	-1,1	175,1	176,4	-1,3	-1,2	0,115	0,067	0,2	2	0,1	2
300	300,0	300,4	-0,4	300,0	300,5	-0,5	299,3	300,1	-0,8	-0,6	0,208	0,12	0,6	2	0,1	2
425	425,0	424,8	0,2	425,0	424,7	0,3	425,1	425,0	0,1	0,2	0,1	0,058	0,6	2	0,1	2

Tabela A.3: Dados do laboratório 4

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	19,6	17,9	1,7	24,5	23,0	1,5	24,5	23,0	1,5	1,6	0,115	0,067	0,1	2	0,1	2
50	52,6	50,9	1,7	52,2	50,8	1,4	52,2	50,7	1,5	1,5	0,153	0,088	0,1	2	0,1	2
175	176,8	177,8	-1,0	175,1	176,1	-1,0	174,4	175,2	-0,8	-0,9	0,115	0,067	0,2	2	0,1	2
300	301,3	302,0	-0,7	300,0	301,0	-1,0	302,0	303,0	-1,0	-0,9	0,173	0,1	0,5	2	0,1	2
425	426,0	426,4	-0,4	423,3	424,1	-0,8	428,5	428,6	-0,1	-0,4	0,351	0,203	0,5	2	0,1	2

Tabela A.4: Dados do laboratório 5

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	24,4	24,5	-0,1	24,8	25,0	-0,2	24,8	25,0	-0,2	-0,2	0,058	0,033			0,2	2
50	50,7	50,6	0,1	50,8	50,5	0,3	50,5	50,3	0,2	0,2	0,1	0,058			0,2	2
175	175,1	175,0	0,1	175,2	175,0	0,2	175,0	175,1	-0,1	0,1	0,153	0,088			0,2	2
300	301,0	301,4	-0,4	301,3	301,3	0,0	300,9	301,7	-0,8	-0,4	0,4	0,231			0,2	2
425	427,5	428,1	-0,6	427,5	428,2	-0,7	427,3	428,4	-1,1	-0,8	0,265	0,153			0,2	2

Tabela A.5: Dados do laboratório 6

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	24,4	24,5	-0,1	24,8	25,0	-0,2	24,8	25,0	-0,2	-0,2	0,058	0,033			0,2	2
50	50,7	50,6	0,1	50,8	50,5	0,3	50,5	50,3	0,2	0,2	0,1	0,058			0,2	2
175	175,1	175,0	0,1	175,2	175,0	0,2	175,0	175,1	-0,1	0,1	0,153	0,088			0,2	2
300	301,0	301,4	-0,4	301,3	301,3	0,0	300,9	301,7	-0,8	-0,4	0,4	0,231			0,2	2
425	427,5	428,1	-0,6	427,5	428,2	-0,7	427,3	428,4	-1,1	-0,8	0,265	0,153			0,2	2

Tabela A.6: Dados do laboratório 7

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	25,0	23,35	1,65	25,0	23,35	1,65	25,0	23,35	1,65	1,7	0,0	0,0	0,01	2	0,03	2
50	50,0	48,47	1,53	50,0	48,47	1,53	50,0	48,44	1,56	1,5	0,017	0,01	0,01	2	0,03	2
175	175,0	174,24	0,76	175,0	174,24	0,76	174,9	174,12	0,78	0,8	0,012	0,007	0,3	2	0,03	2
300	300,0	300,1	-0,01	300,2	300,21	-0,01	300,3	300,21	0,09	0,0	0,058	0,033	0,6	2	0,03	2
425	425,0	425,72	-0,72	425,1	425,81	-0,71	425,1	425,91	-0,81	-0,7	0,055	0,032	0,6	2	0,03	2

Tabela A.7: Dados do laboratório 8

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	26,9	24,8	2,1	26,7	24,9	1,8	26,6	24,8	1,8	1,9	0,173	0,1	0,02	2	0,1	2
50	51,4	49,5	1,9	51,8	50,1	1,7	51,5	49,7	1,8	1,8	0,1	0,058	0,03	2	0,1	2
175	175,4	173,6	1,8	175,9	174,0	1,9	175,7	173,9	1,8	1,8	0,058	0,033	0,04	2	0,1	2
300	300,8	298,6	2,2	300,7	298,6	2,1	300,6	298,5	2,1	2,1	0,058	0,033	0,04	2	0,1	2
425	426,1	423,3	2,8	426,0	423,2	2,8	426,2	423,1	3,1	2,9	0,173	0,1	0,04	2	0,1	2

Tabela A.8: Dados do laboratório 9

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	26,0	25,0	1,0	28,5	227,5	1,0	28,5	27,5	1,0	0,9	0,231	0,133	0,04	2	0,1	2
50	51,3	50,3	1,0	51,0	50,1	0,9	51,1	50,3	0,8	0,3	0,987	0,57	0,04	2	0,1	2
175	174,2	173,7	0,5	174,2	173,7	0,5	174,4	173,7	0,7	0,6	0,115	0,067	0,04	2	0,1	2
300	296,4	295,5	0,9	293,0	293,8	-0,8	293,3	294,1	-0,8	0,3	0,981	0,567	1,5	2	0,3	2
425	416,9	416,3	0,6	416,9	416,3	0,6	416,8	416,3	0,5	0,7	0,265	0,153	1,5	2	0,3	2

Tabela A.9: Dados do laboratório 10

Calibração																
F.M. (°C)	A 1		D	R 1		D	A 2		D	med / tend	Desvio Padrão	DPM	UE T	K T	UE Ind.	K Ind.
	Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.		Art.	E.M.L.								
25	21,1	19,35	1,75	22,9	21,3	1,6	22,9	21,3	1,6	1,7	0,087	0,05	0,07	2,04	0,06	2
50	51,5	49,9	1,6	51,6	49,88	1,72	51,8	50,0	1,8	1,7	0,101	0,058	0,07	2,04	0,06	2
175	176,3	174,85	1,45	176,5	174,97	1,53	176,6	175,0	1,6	1,5	0,075	0,043	0,09	2,04	0,06	2
300	301,2	300,1	1,1	301,4	300,41	0,99	301,4	300,15	1,25	1,1	0,131	0,075	0,08	2,04	0,06	2
425	426,4	425,8	0,6	426,4	425,84	0,56	426,4	425,24	1,16	0,8	0,335	0,194	0,08	2,04	0,06	2

Tabela A.10: Dados do laboratório 11

Obs: A sequência dos laboratórios das Tabelas 2.3 e A.1 a A.10 não está seguindo a mesma sequência da Tabela 2.2, ou seja, por questão de ética, não vamos identificar as medições dos laboratórios.

Apêndice B

Tabelas de Incertezas dos Laboratórios

Laboratório 1

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,186	A	Normal	1	0,185592145	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,8	B	Normal	2	0,4	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,454
Graus de Liberdade Efetivos						34,820
Fator de Abrangência						2,045
Incerteza Expandida						0,920

Tabela B.1: Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,176	A	Normal	1	0,176383421	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,8	B	Normal	2	0,4	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,450
Graus de Liberdade Efetivos						30,671
Fator de Abrangência						2,042
Incerteza Expandida						0,920

Tabela B.2: Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,306	A	Normal	1	0,305505046	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,8	B	Normal	2	0,4	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,7	B	Normal	2	0,35	30
Incerteza Combinada	0,614					
Graus de Liberdade Efetivos	24,961					
Fator de Abrangência	2,064					
Incerteza Expandida	1,268					

Tabela B.3: Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,8	B	Normal	2	0,4	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,7	B	Normal	2	0,35	30
Incerteza Combinada	0,534					
Graus de Liberdade Efetivos	60,097					
Fator de Abrangência	2,000					
Incerteza Expandida	1,068					

Tabela B.4: Cálculo de incertezas para o laboratório 1 a 425°C

Laboratório 2

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,4	B	Normal	2	0,7	30
Incerteza Combinada	0,709					
Graus de Liberdade Efetivos	31,569					
Fator de Abrangência	2,040					
Incerteza Expandida	1,446					

Tabela B.5: Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,285	A	Normal	1	0,284800125	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,4	B	Normal	2	0,7	30
Incerteza Combinada	0,763					
Graus de Liberdade Efetivos	30,066					
Fator de Abrangência	2,042					
Incerteza Expandida	1,559					

Tabela B.6: Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,176	A	Normal	1	0,176383421	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,4	B	Normal	2	0,7	30
Incerteza Combinada						0,730
Graus de Liberdade Efetivos						33,431
Fator de Abrangência						2,035
Incerteza Expandida						1,485

Tabela B.7: Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,203	A	Normal	1	0,202758751	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,4	B	Normal	2	0,7	30
Incerteza Combinada						0,737
Graus de Liberdade Efetivos						33,282
Fator de Abrangência						2,035
Incerteza Expandida						1,499

Tabela B.8: Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,186	A	Normal	1	0,185592145	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	2,4	B	Normal	2	1,2	30
Incerteza Combinada						1,219
Graus de Liberdade Efetivos						31,679
Fator de Abrangência						2,040
Incerteza Expandida						2,486

Tabela B.9: Cálculo de incertezas para o laboratório 2 a 425°C

Laboratório 3

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,145	A	Normal	1	0,145296631	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza Combinada						0,219
Graus de Liberdade Efetivos						9,513
Fator de Abrangência						2,262
Incerteza Expandida						0,494

Tabela B.10: Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,088	A	Normal	1	0,08819171	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza Combinada	0,186					
Graus de Liberdade Efetivos	25,042					
Fator de Abrangência	2,060					
Incerteza Expandida	0,382					

Tabela B.11: Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,433	A	Normal	1	0,433333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza Combinada	0,463					
Graus de Liberdade Efetivos	2,606					
Fator de Abrangência	4,303					
Incerteza Expandida	1,992					

Tabela B.12: Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,351	A	Normal	1	0,351188458	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza Combinada	0,387					
Graus de Liberdade Efetivos	2,952					
Fator de Abrangência	4,303					
Incerteza Expandida	1,688					

Tabela B.13: Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,0	A	Normal	1	0,0	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza Combinada	0,317					
Graus de Liberdade Efetivos	32,811					
Fator de Abrangência	2,037					
Incerteza Expandida	0,625					

Tabela B.14: Cálculo de incertezas para o laboratório 3 a 425°C

Laboratório 4

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,0	A	Normal	1	$1,72064 \cdot 10^{-8}$	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,119
Graus de Liberdade Efetivos						55,953
Fator de Abrangência						2,004
Incerteza Expandida						0,239

Tabela B.15: Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,124
Graus de Liberdade Efetivos						55,505
Fator de Abrangência						2,004
Incerteza Expandida						0,248

Tabela B.16: Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,067	A	Normal	1	0,066666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,136
Graus de Liberdade Efetivos						25,725
Fator de Abrangência						2,060
Incerteza Expandida						0,281

Tabela B.17: Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,120	A	Normal	1	0,120185043	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza Combinada	0,330					
Graus de Liberdade Efetivos	31,493					
Fator de Abrangência	2,040					
Incerteza Expandida	0,672					

Tabela B.18: Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,058	A	Normal	1	0,057735027	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza Combinada	0,312					
Graus de Liberdade Efetivos	34,467					
Fator de Abrangência	2,032					
Incerteza Expandida	0,635					

Tabela B.19: Cálculo de incertezas para o laboratório 4 a 425°C

Laboratório 5

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,067	A	Normal	1	0,066666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza Combinada	0,105					
Graus de Liberdade Efetivos	11,940					
Fator de Abrangência	2,201					
Incerteza Expandida	0,232					

Tabela B.20: Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,088	A	Normal	1	0,08819171	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza Combinada	0,120					
Graus de Liberdade Efetivos	6,794					
Fator de Abrangência	2,060					
Incerteza Expandida	0,294					

Tabela B.21: Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,067	A	Normal	1	0,06666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza Combinada						0,136
Graus de Liberdade Efetivos						25,725
Fator de Abrangência						2,060
Incerteza Expandida						0,281

Tabela B.22: Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,1	A	Normal	1	0,1	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,5	B	Normal	2	0,25	30
Incerteza Combinada						0,277
Graus de Liberdade Efetivos						32,571
Fator de Abrangência						2,037
Incerteza Expandida						0,564

Tabela B.23: Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,203	A	Normal	1	0,202758751	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,5	B	Normal	2	0,25	30
Incerteza Combinada						0,328
Graus de Liberdade Efetivos						11,907
Fator de Abrangência						2,201
Incerteza Expandida						0,723

Tabela B.24: Cálculo de incertezas para o laboratório 5 a 425°C

Laboratório 6

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,113
Graus de Liberdade Efetivos						40,849
Fator de Abrangência						2,021
Incerteza Expandida						0,228

Tabela B.25: Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,058	A	Normal	1	0,057735027	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada	0,122					
Graus de Liberdade Efetivos	25,181					
Fator de Abrangência	2,060					
Incerteza Expandida	0,252					

Tabela B.26: Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,088	A	Normal	1	0,08819171	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada	0,139					
Graus de Liberdade Efetivos	11,244					
Fator de Abrangência	2,201					
Incerteza Expandida	0,307					

Tabela B.27: Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,231	A	Normal	1	0,230940108	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada	0,255					
Graus de Liberdade Efetivos	2,964					
Fator de Abrangência	4,303					
Incerteza Expandida	1,097					

Tabela B.28: Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,153	A	Normal	1	0,152752523	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada	0,187					
Graus de Liberdade Efetivos	4,445					
Fator de Abrangência	2,776					
Incerteza Expandida	0,519					

Tabela B.29: Cálculo de incertezas para o laboratório 6 a 425°C

Laboratório 7

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,113
Graus de Liberdade Efetivos						40,849
Fator de Abrangência						2,021
Incerteza Expandida						0,228

Tabela B.30: Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,058	A	Normal	1	0,057735027	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,122
Graus de Liberdade Efetivos						25,181
Fator de Abrangência						2,060
Incerteza Expandida						0,252

Tabela B.31: Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,088	A	Normal	1	0,08819171	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,139
Graus de Liberdade Efetivos						11,244
Fator de Abrangência						2,201
Incerteza Expandida						0,307

Tabela B.32: Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,231	A	Normal	1	0,230940108	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,255
Graus de Liberdade Efetivos						2,964
Fator de Abrangência						4,303
Incerteza Expandida						1,097

Tabela B.33: Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,153	A	Normal	1	0,152752523	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,2	B	Normal	2	0,1	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,0	B	Normal	2	0,0	30
Incerteza Combinada						0,187
Graus de Liberdade Efetivos						4,445
Fator de Abrangência						2,776
Incerteza Expandida						0,519

Tabela B.34: Cálculo de incertezas para o laboratório 7 a 425°C

Laboratório 8

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,0	A	Normal	1	0,0	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,01	B	Normal	2	0,005	30
Incerteza Combinada						0,033
Graus de Liberdade Efetivos						47,940
Fator de Abrangência						2,012
Incerteza Expandida						0,066

Tabela B.35: Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,010	A	Normal	1	0,010	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,01	B	Normal	2	0,005	30
Incerteza Combinada						0,035
Graus de Liberdade Efetivos						47,559
Fator de Abrangência						2,012
Incerteza Expandida						0,069

Tabela B.36: Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,007	A	Normal	1	0,006666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza Combinada						0,154
Graus de Liberdade Efetivos						32,968
Fator de Abrangência						2,037
Incerteza Expandida						0,313

Tabela B.37: Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza Combinada						0,304
Graus de Liberdade Efetivos						31,395
Fator de Abrangência						2,040
Incerteza Expandida						0,619

Tabela B.38: Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,032	A	Normal	1	0,031797973	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza Combinada						0,303
Graus de Liberdade Efetivos						31,339
Fator de Abrangência						2,040
Incerteza Expandida						0,619

Tabela B.39: Cálculo de incertezas para o laboratório 8 a 425°C

Laboratório 9

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,1	A	Normal	1	0,1	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,02	B	Normal	2	0,01	30
Incerteza Combinada						0,119
Graus de Liberdade Efetivos						4,050
Fator de Abrangência						2,776
Incerteza Expandida						0,332

Tabela B.40: Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,058	A	Normal	1	0,057735027	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,03	B	Normal	2	0,015	30
Incerteza Combinada						0,088
Graus de Liberdade Efetivos						10,268
Fator de Abrangência						2,228
Incerteza Expandida						0,196

Tabela B.41: Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada	0,075					
Graus de Liberdade Efetivos	36,748					
Fator de Abrangência	2,028					
Incerteza Expandida	0,153					

Tabela B.42: Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,033	A	Normal	1	0,033333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada	0,075					
Graus de Liberdade Efetivos	36,748					
Fator de Abrangência	2,028					
Incerteza Expandida	0,153					

Tabela B.43: Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,1	A	Normal	1	0,1	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada	0,121					
Graus de Liberdade Efetivos	4,222					
Fator de Abrangência	2,776					
Incerteza Expandida	0,335					

Tabela B.44: Cálculo de incertezas para o laboratório 9 a 425°C

Laboratório 10

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,133	A	Normal	1	0,133333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada	0,149					
Graus de Liberdade Efetivos	3,154					
Fator de Abrangência	3,182					
Incerteza Expandida	0,476					

Tabela B.45: Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,570	A	Normal	1	0,56960025	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada						0,574
Graus de Liberdade Efetivos						2,057
Fator de Abrangência						4,303
Incerteza Expandida						2,468

Tabela B.46: Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,067	A	Normal	1	0,066666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,1	B	Normal	2	0,05	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,04	B	Normal	2	0,02	30
Incerteza Combinada						0,095
Graus de Liberdade Efetivos						8,011
Fator de Abrangência						2,306
Incerteza Expandida						0,219

Tabela B.47: Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,567	A	Normal	1	0,566666667	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,5	B	Normal	2	0,75	30
Incerteza Combinada						0,953
Graus de Liberdade Efetivos						13,266
Fator de Abrangência						2,160
Incerteza Expandida						2,058

Tabela B.48: Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,153	A	Normal	1	0,152752523	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,3	B	Normal	2	0,15	30
Incerteza do Termopar (herdada)	1,5	B	Normal	2	0,75	30
Incerteza Combinada						0,781
Graus de Liberdade Efetivos						34,339
Fator de Abrangência						2,032
Incerteza Expandida						1,587

Tabela B.49: Cálculo de incertezas para o laboratório 10 a 425°C

Laboratório 11

Cálculo de Incerteza: 25°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,050	A	Normal	1	0,050	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,6	B	Normal	2	0,3	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,7	B	Normal	2	0,035	30
Incerteza Combinada						0,074
Graus de Liberdade Efetivos						9,266
Fator de Abrangência						2,262
Incerteza Expandida						0,167

Tabela B.50: Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 25°C

Cálculo de Incerteza: 50°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,058	A	Normal	1	0,058118653	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,06	B	Normal	2	0,03	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,07	B	Normal	2	0,035	30
Incerteza Combinada						0,080
Graus de Liberdade Efetivos						6,934
Fator de Abrangência						2,447
Incerteza Expandida						0,195

Tabela B.51: Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 50°C

Cálculo de Incerteza: 175°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,043	A	Normal	1	0,043333333	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,06	B	Normal	2	0,03	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,09	B	Normal	2	0,045	30
Incerteza Combinada						0,075
Graus de Liberdade Efetivos						16,339
Fator de Abrangência						2,120
Incerteza Expandida						0,159

Tabela B.52: Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 175°C

Cálculo de Incerteza: 300°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,075	A	Normal	1	0,07535103	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,06	B	Normal	2	0,03	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,08	B	Normal	2	0,04	30
Incerteza Combinada						0,095
Graus de Liberdade Efetivos						5,005
Fator de Abrangência						2,571
Incerteza Expandida						0,244

Tabela B.53: Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 300°C

Cálculo de Incerteza: 425°C						
Fonte de Incerteza	Estimativa	Tipo	Distribuição	Divisor	Incerteza	G.L.
Repetitividade	0,194	A	Normal	1	0,193677854	2
Resolução do Equipamento do lab.	0,01	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Resolução do Artefato	0,1	B	Retangular	3,4641	0,028867527	30
Incerteza do Indicador (herdada)	0,06	B	Normal	2	0,03	30
Incerteza do Termopar (herdada)	0,08	B	Normal	2	0,04	30
Incerteza Combinada						0,202
Graus de Liberdade Efetivos						2,372
Fator de Abrangência						4,303
Incerteza Expandida						0,870

Tabela B.54: Cálculo de incertezas para o laboratório 11 a 425°C

Apêndice C

Algoritmo EM

```
% Arquivo prog.m Rotinas de matlab para a obtenção de estimativas
% de máxima verossimilhança para os vetores de parâmetros alpha e beta
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%Dados Comuns
% Estes dados são comuns a todos os patamares de temperatura
% para cálculos futuros
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
J=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;

    0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;

    0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;

    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;

    0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;

    0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;

    0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
```

[illegible]


```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
mij_50=50;

sigmaxj_50=0.2015565;

yj_50=[.65; .15; .05; .15; .25; -.65; .25; -.05; .05; .15; .15;
.05; .05; -.25; -.15; -1.55; -1.35; -1.45; -1.55; -1.35; -1.45;
-.12; -.12; -.09; .25; .05; .15; -.65; -.75; -.85; -.05; .07;
.15];

dj_50=[.206116 .206116 .206116 .582169 .582169 .582169 .034596
.034596 .034596 .015376 .015376 .015376 .0144 .0144 .0144 .012544
.012544 .012544 .014884 .014884 .014884 .001225 .001225 .001225
.007744 .007744 .007744 .329476 .329476 .329476 .0064 .0064
.0064];

for I=1:33,
    for K=1:33,
        if I==K
            mdj_50(I,I)=dj_50(I);
        else
            mdj_50(I,K)=0;
        end
    end
end

DJ_50=inv(mdj_50); % inversa da matriz mdj_50
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%Dados Para 175 Graus
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
mij_175=175;

sigmaxj_175=0.2015565;

yj_175=[-2.35; -2.55; -2.95; -1.65; -1.25; -1.85; -2.15; -.85;
-2.15; -2.65; -2.65; -2.85; -2.55; -2.55; -2.35; -1.45; -1.35;
-1.65; -1.45; -1.35; -1.65; -.79; -.79; -.77; .25; .35; .25;
-1.05; -1.05; -.85; -.1; -.02; .05];

dj_175=[.2025 .2025 .2025 .5329 .5329 .5329 .214369 .214369
.214369 .019044 .019044 .019044 .018496 .018496 .018496 .019321
.019321 .019321 .019321 .019321 .019321 .023716 .023716 .023716
.005625 .005625 .005625 .009025 .009025 .009025 .005625 .005625
.005625];

for I=1:33,
    for K=1:33,
        if I==K
            mdj_175(I,I)=dj_175(I);
        else
            mdj_175(I,K)=0;
        end
    end
end

```



```

.091809 .014641 .014641 .014641 .609961 .609961 .609961 .040804
.040804 .040804];

for I=1:33,
    for K=1:33,
        if I==K
            mdj_425(I,I)=dj_425(I);
        else
            mdj_425(I,K)=0;
        end
    end
end

DJ_425=inv(mdj_425); %inversa da matriz mdj_425
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Chutes iniciais
% Aqui atribuímos valores iniciais para o vetor alpha e para o vetor beta
% para a primeira iteração
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

alpha1 = 0; alpha2 = 0; alpha3 = 0; alpha4 = 0; alpha5 = 0;
alpha6= 0; alpha7 = 0; alpha8 = 0; alpha9 = 0; alpha10 = 0;
alpha11 = 0;

beta1 = 0; beta2 = 0; beta3 = 0; beta4 = 0; beta5 = 0; beta6 = 0;
beta7 = 0; beta8 = 0; beta9 = 0; beta10 = 0; beta11 = 0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

stop=0; % Flag que será usado na obtenção do erro desejado
% Sinalizará o fim do loop

loop=0; % Contador do número de loop realizado

ERRO_MAX=1.e-30; % Erro máximo desejado

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Aqui começam as iterações
while stop ~= 1,
    loop=loop+1;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Os vetores miyj serão gerados pela função genmiyj
    % utilizando os valores de alpha1, alpha2, alpha3, alpha4, alpha5,

```

```

% alpha6, alpha7, alpha8, alpha9, alpha10, alpha11, beta1, beta2,
% beta3, beta4, beta5, beta6, beta7, beta8, beta9, beta10, beta11
% e mij para cada patamar de temperatura.

mijj_25=genmijj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,
alpha8,alpha9,alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,
beta8,beta9,beta10,beta11,mij_25);

mijj_50=genmijj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,
alpha8,alpha9,alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,
beta8,beta9,beta10,beta11,mij_50);

mijj_175=genmijj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,
alpha8,alpha9,alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,
beta8,beta9,beta10,beta11,mij_175);

mijj_300=genmijj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,
alpha8,alpha9,alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,
beta8,beta9,beta10,beta11,mij_300);

mijj_425=genmijj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,
alpha8,alpha9,alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,
beta8,beta9,beta10,beta11,mij_425);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Construção do vetor beta

beta=[beta1; beta1; beta1; beta2; beta2; beta2; beta3; beta3; beta3;
      beta4; beta4; beta4; beta5; beta5; beta5; beta6; beta6; beta6;
      beta7; beta7; beta7; beta8; beta8; beta8; beta9; beta9; beta9;
      beta10; beta10; beta10; beta11; beta11; beta11];

alpha=[alpha1; alpha1; alpha1; alpha2; alpha2; alpha2; alpha3; alpha3;
       alpha3; alpha4; alpha4; alpha4; alpha5; alpha5; alpha5; alpha6;
       alpha6; alpha6; alpha7; alpha7; alpha7; alpha8; alpha8; alpha8;
       alpha9; alpha9; alpha9; alpha10; alpha10; alpha10; alpha11;
       alpha11; alpha11];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Cálculo de E(X / Yj = yj) para a temperatura 25°C

EX_25=mij_25+( (transp(beta)*sigmaxj_25^2)*
(DJ_25 - (((DJ_25*beta)*(transp(beta)*DJ_25)*sigmaxj_25^2)/
(1+transp(beta)*DJ_25*beta*sigmaxj_25^2))))*(yj_25-mijj_25));

% Cálculo de E(X / Yj = yj) para a temperatura 50°C

```

```

EX_50=mij_50+((transp(beta)*sigmaxj_50^2)*
(DJ_50 - (((DJ_50*beta)*(transp(beta)*DJ_50)*sigmaxj_50^2)/
(1+transp(beta)*DJ_50*beta*sigmaxj_50^2))))*(yj_50-miyj_50));

% Cálculo de E(X / Yj = yj) para a temperatura 175°C

EX_175=mij_175+((transp(beta)*sigmaxj_175^2)*
(DJ_175 - (((DJ_175*beta)*(transp(beta)*DJ_175)*sigmaxj_175^2)/
(1+transp(beta)*DJ_175*beta*sigmaxj_175^2))))*(yj_175-miyj_175));

% Cálculo de E(X / Yj = yj) para a temperatura 300°C

EX_300=mij_300+((transp(beta)*sigmaxj_300^2)*
(DJ_300 - (((DJ_300*beta)*(transp(beta)*DJ_300)*sigmaxj_300^2)/
(1+transp(beta)*DJ_300*beta*sigmaxj_300^2))))*(yj_300-miyj_300));

% Cálculo de E(X / Yj = yj) para a temperatura 425°C

EX_425=mij_425+((transp(beta)*sigmaxj_425^2)*
(DJ_425 - (((DJ_425*beta)*(transp(beta)*DJ_425)*sigmaxj_425^2)/
(1+transp(beta)*DJ_425*beta*sigmaxj_425^2))))*(yj_425-miyj_425));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Cálculo de Var(X / Yj = yj) para cada patamar de temperatura

varx_25= sigmaxj_25^2 - (transp(beta)*(sigmaxj_25^2)^2)*
(DJ_25 - ((DJ_25*(beta))*(transp(beta)*DJ_25))*(sigmaxj_25^2)/
(1 + transp(beta)*DJ_25*beta*sigmaxj_25^2))*beta;

varx_50= sigmaxj_50^2 - (transp(beta)*(sigmaxj_50^2)^2)*
(DJ_50 - ((DJ_50*(beta))*(transp(beta)*DJ_50))*(sigmaxj_50^2)/
(1 + transp(beta)*DJ_50*beta*sigmaxj_50^2))*beta;

varx_175= sigmaxj_175^2 - (transp(beta)*(sigmaxj_175^2)^2)*
(DJ_175 - ((DJ_175*(beta))*(transp(beta)*DJ_175))*(sigmaxj_175^2)/
(1 + transp(beta)*DJ_175*beta*sigmaxj_175^2))*beta;

varx_300= sigmaxj_300^2 - (transp(beta)*(sigmaxj_300^2)^2)*
(DJ_300 - ((DJ_300*(beta))*(transp(beta)*DJ_300))*(sigmaxj_300^2)/
(1 + transp(beta)*DJ_300*beta*sigmaxj_300^2))*beta;

varx_425= sigmaxj_425^2 - (transp(beta)*(sigmaxj_425^2)^2)*
(DJ_425 - ((DJ_425*(beta))*(transp(beta)*DJ_425))*(sigmaxj_425^2)/
(1 + transp(beta)*DJ_425*beta*sigmaxj_425^2))*beta;

% Cálculo de E(X^2 / Yj = yj) para cada patamar de temperatura

```

```

EX2_25=varx_25+EX_25^2;

EX2_50=varx_50+EX_50^2;

EX2_175=varx_175+EX_175^2;

EX2_300=varx_300+EX_300^2;

EX2_425=varx_425+EX_425^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%Cálculo do novo valor do vetor de parâmetros beta

%Obs.: Devido a grande extensão desta expressão, a mesma,
%por conveniência de programação, foi dividida em partes

part1=inv(EX2_25*transp(J)*DJ_25*J + EX2_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX2_175*transp(J)*DJ_175*J + EX2_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX2_425*transp(J)*DJ_425*J);

part2=(EX_25*transp(J)*DJ_25*J + EX_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX_175*transp(J)*DJ_175*J + EX_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX_425*transp(J)*DJ_425*J);

part3=inv(transp(J)*DJ_25*J + transp(J)*DJ_50*J +
transp(J)*DJ_175*J + transp(J)*DJ_300*J + transp(J)*DJ_425*J);

part4=(EX_25*transp(J)*DJ_25*J + EX_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX_175*transp(J)*DJ_175*J + EX_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX_425*transp(J)*DJ_425*J);

part5=inv(EX2_25*transp(J)*DJ_25*J + EX2_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX2_175*transp(J)*DJ_175*J + EX2_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX2_425*transp(J)*DJ_425*J);

part6=(EX_25*transp(J)*DJ_25*yj_25 + EX_50*transp(J)*DJ_50*yj_50 +
EX_175*transp(J)*DJ_175*yj_175 + EX_300*transp(J)*DJ_300*yj_300 +
EX_425*transp(J)*DJ_425*yj_425);

part7=inv(EX2_25*transp(J)*DJ_25*J + EX2_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX2_175*transp(J)*DJ_175*J + EX2_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX2_425*transp(J)*DJ_425*J);

part8=(EX_25*transp(J)*DJ_25*J + EX_50*transp(J)*DJ_50*J +
EX_175*transp(J)*DJ_175*J + EX_300*transp(J)*DJ_300*J +
EX_425*transp(J)*DJ_425*J);

```

```
part9=inv(transp(J)*DJ_25*J + transp(J)*DJ_50*J + transp(J)*DJ_175*J
+ transp(J)*DJ_300*J + transp(J)*DJ_425*J);
```

```
part10=(transp(J)*DJ_25*yj_25 + transp(J)*DJ_50*yj_50 +
transp(J)*DJ_175*yj_175 + transp(J)*DJ_300*yj_300 +
transp(J)*DJ_425*yj_425);
```

```
newbeta=inv(I11 - part1*part2*part3*part4)*
(part5*part6-part7*part8*part9*part10);
```

```
%%Fim do cálculo do novo valor do vetor de parâmetros beta
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%Cálculo do novo valor do vetor de parâmetros alpha
```

```
part11=(EX_25*transp(J)*DJ_25*J*newbeta +
EX_50*transp(J)*DJ_50*J*newbeta + EX_175*transp(J)*DJ_175*J*newbeta +
EX_300*transp(J)*DJ_300*J*newbeta + EX_425*transp(J)*DJ_425*J*newbeta);
```

```
newalpha=part3*(part10-part11);
```

```
%%Fim do cálculo do novo valor do vetor de parâmetros alpha
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
newbeta3=[newbeta(1);newbeta(1);newbeta(1);newbeta(2);newbeta(2);
newbeta(2);newbeta(3);newbeta(3);newbeta(3);newbeta(4);newbeta(4);
newbeta(4);newbeta(5);newbeta(5);newbeta(5);newbeta(6);newbeta(6);
newbeta(6);newbeta(7);newbeta(7);newbeta(7);newbeta(8);newbeta(8);
newbeta(8);newbeta(9);newbeta(9);newbeta(9);newbeta(10);newbeta(10);
newbeta(10);newbeta(11);newbeta(11);newbeta(11)];
```

```
newalpha3=[newalpha(1);newalpha(1);newalpha(1);newalpha(2);newalpha(2);
newalpha(2);newalpha(3);newalpha(3);newalpha(3);newalpha(4);newalpha(4);
newalpha(4);newalpha(5);newalpha(5);newalpha(5);newalpha(6);newalpha(6);
newalpha(6);newalpha(7);newalpha(7);newalpha(7);newalpha(8);newalpha(8);
newalpha(8);newalpha(9);newalpha(9);newalpha(9);newalpha(10);newalpha(10);
newalpha(10);newalpha(11);newalpha(11);newalpha(11)];
```

```
%%Critério de Parada do Algoritmo EM
```

```
%% Matrizes de Covariâncias atualizadas
```

```
M25a = newbeta3 * transp(newbeta3)*sigmaxj_25^2 + DJ_25;
M50a = newbeta3 * transp(newbeta3)*sigmaxj_50^2 + DJ_50;
M175a = newbeta3 * transp(newbeta3)*sigmaxj_175^2 + DJ_175;
```

```

M300a = newbeta3 * transp(newbeta3)*sigmaxj_300^2 + DJ_300;
M425a = newbeta3 * transp(newbeta3)*sigmaxj_425^2 + DJ_425;

%%% Matrizes da iteração anterior
M25 = beta*transp(beta)*sigmaxj_25^2 + DJ_25;
M50 = beta*transp(beta)*sigmaxj_50^2 + DJ_50;
M175 = beta*transp(beta)*sigmaxj_175^2 + DJ_175;
M300 = beta*transp(beta)*sigmaxj_300^2 + DJ_300;
M425 = beta*transp(beta)*sigmaxj_425^2 + DJ_425;

%%% Log da verossimilhana da iteraão atual
Lfatual = (-165/2)*log(2*pi) -(1/2)* (log(det(M25a))+ log(det(M50a)) +
log(det(M175a)) + log (det(M300a)) + log(det(M425a))) -(1/2)*
(transp(yj_25 - miyj_25)* inv(M25a)* (yj_25 - miyj_25) +
transp(yj_50 - miyj_50)* inv(M50a)* (yj_50 - miyj_50) +
transp(yj_175 - miyj_175)* inv(M175a)* (yj_175 - miyj_175) +
transp(yj_300 - miyj_300)* inv(M300a)* (yj_300 - miyj_300) +
transp(yj_425 - miyj_425)* inv(M425a)* (yj_425 - miyj_425));

%%% Log da verossimilhança da iteração anterior
Lf = (-165/2)*log(2*pi) -(1/2)* (log(det(M25))+ log(det(M50)) +
log(det(M175)) + log (det(M300)) + log(det(M425))) -(1/2)*
(transp(yj_25 - miyj_25)* inv(M25)* (yj_25 - miyj_25) +
transp(yj_50 - miyj_50)* inv(M50)* (yj_50 - miyj_50) +
transp(yj_175 - miyj_175)* inv(M175)* (yj_175 - miyj_175) +
transp(yj_300 - miyj_300)* inv(M300)* (yj_300 - miyj_300) +
transp(yj_425 - miyj_425)* inv(M425)* (yj_425 - miyj_425));

%%% Erro
totalerro = Lfatual - Lf;

if abs(totalerro) < ERRO_MAX
    stop=1; % caso positivo: flag stop
end

% Atualização dos vetores alpha e beta que serão utilizados na
% proxima iteração

alpha1=newalpha(1);
alpha2=newalpha(2);
alpha3=newalpha(3);
alpha4=newalpha(4);
alpha5=newalpha(5);
alpha6=newalpha(6);
alpha7=newalpha(7);
alpha8=newalpha(8);

```



```
alpha9=newalpha(9);
alpha10=newalpha(10);
alpha11=newalpha(11);
```

```
beta1=newbeta(1);
beta2=newbeta(2);
beta3=newbeta(3);
beta4=newbeta(4);
beta5=newbeta(5);
beta6=newbeta(6);
beta7=newbeta(7);
beta8=newbeta(8);
beta9=newbeta(9);
beta10=newbeta(10);
beta11=newbeta(11);
```

```
end % Retorna ao começo do loop
```

```
ALPHA =
```

```
[newalpha(1);newalpha(1);newalpha(1);newalpha(2);newalpha(2);
newalpha(2);newalpha(3);newalpha(3);newalpha(3);newalpha(4);
newalpha(4);newalpha(4);newalpha(5);newalpha(5);newalpha(5);
newalpha(6);newalpha(6);newalpha(6);newalpha(7);newalpha(7);
newalpha(7);newalpha(8);newalpha(8);newalpha(8);newalpha(9);
newalpha(9);newalpha(9);newalpha(10);newalpha(10);newalpha(10);
newalpha(11);newalpha(11);newalpha(11)];
```

```
BETA =
```

```
[newbeta(1);newbeta(1);newbeta(1);newbeta(2);newbeta(2);
newbeta(2);newbeta(3);newbeta(3);newbeta(3);newbeta(4);
newbeta(4);newbeta(4);newbeta(5);newbeta(5);newbeta(5);
newbeta(6);newbeta(6);newbeta(6);newbeta(7);newbeta(7);
newbeta(7);newbeta(8);newbeta(8);newbeta(8);newbeta(9);
newbeta(9);newbeta(9);newbeta(10);newbeta(10);newbeta(10);
newbeta(11);newbeta(11);newbeta(11)];
```

```
totalerro % Apresentação do erro
```

```
loop % Apresentação do número de loops necessários
```

```
newbeta    % Apresentação da estimativa de máxima
           % verossimilhança para o vetor beta
```

```
newalpha   % Apresentação da estimativa de máxima
           % verossimilhança para o vetor alpha
```

```
%%% Matrizes de Covariâncias obtidas a partir das estimativas de
%%% máxima verossimilhança dos parâmetros
```

```
V25 = BETA * transp(BETA) * sigmaxj_25^2 + DJ_25;
```

```
V50= BETA * transp(BETA) * sigmaxj_50^2 + DJ_50;
```

```
V175 = BETA * transp(BETA) * sigmaxj_175^2 + DJ_175;
```

```
V300 = BETA * transp(BETA) * sigmaxj_300^2 + DJ_300;
```

```
V425 = BETA * transp(BETA) * sigmaxj_425^2 + DJ_425;
```

```
%%% Valor de L para o qual a sequência converge
```

```
L = -(165)/2 * log(2*pi) -(1/2)* (log(det(V25)) + log(det(V50)) +  
log(det(V175))+ log(det(V300)) + log(det(425))) -(1/2)*  
(transp(yj_25 - miyj_25)* inv(V25)* (yj_25 - miyj_25) +  
transp(yj_50 - miyj_50)* inv(V50)* (yj_50 - miyj_50) +  
transp(yj_175 - miyj_175)* inv(V175)* (yj_175 - miyj_175) +  
transp(yj_300 - miyj_300)* inv(V300)* (yj_300 - miyj_300) +  
transp(yj_425 - miyj_425)* inv(V425)* (yj_425 - miyj_425))
```

Apêndice D

Função Geradora do Vetor de Médias

```
% Esta função gera o vetor miyj a partir de alpha1, alpha2, alpha3, alpha4,
% alpha5, alpha6, alpha7, alpha8, alpha9, alpha10, alpha11, beta1, beta2,
% beta3, beta4, beta5, beta6, beta7, beta8, beta9, beta10 e beta11, no
% patamar de temperatura j.
```

```
%%% Arquivo feito em matlab.
```

```
function [miyj] =
genmiyj(alpha1,alpha2,alpha3,alpha4,alpha5,alpha6,alpha7,alpha8,alpha9,
alpha10,alpha11,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,beta6,beta7,beta8,beta9,
beta10,beta11,mij)
```

```
miyj=[alpha1+beta1*mij; alpha1+beta1*mij; alpha1+beta1*mij;
alpha2+beta2*mij; alpha2+beta2*mij; alpha2+beta2*mij;
alpha3+beta3*mij; alpha3+beta3*mij; alpha3+beta3*mij;
alpha4+beta4*mij; alpha4+beta4*mij; alpha4+beta4*mij;
alpha5+beta5*mij; alpha5+beta5*mij; alpha5+beta5*mij;
alpha6+beta6*mij; alpha6+beta6*mij; alpha6+beta6*mij;
alpha7+beta7*mij; alpha7+beta7*mij; alpha7+beta7*mij;
alpha8+beta8*mij; alpha8+beta8*mij; alpha8+beta8*mij;
alpha9+beta9*mij; alpha9+beta9*mij; alpha9+beta9*mij;
alpha10+beta10*mij; alpha10+beta10*mij; alpha10+beta10*mij;
alpha11+beta11*mij; alpha11+beta11*mij; alpha11+beta11*mij];
```


Apêndice E

Obtenção do Intervalo de Confiança

```

%%% Arquivo feito em matlab

%%% Cálculo de IC para o laboratório 1

alpha1 = .3002;

for I=1:1000,

    A1(I)= alpha1;
end

alpha = transp(A1);

beta1 = -.0109;

for I=1:1000,

    B1(I)= beta1;
end

beta = transp(B1);

%%% Dados a 25°C

e25 = normrnd(0, 0.416, 1000, 1);

%%% Variável Explicativa
X25 = normrnd(25, 0.1, 1000,1);

for I=1:1000,
    for K=1:1000,
        if I==K
            A25(I,I)= X25(I);
        else
            A25(I,K)=0;
        end
    end
end
end

```

```

B25 = A25;

Y25 = alpha + B25*beta + e25; % vetor Y1 a 25°C

%%% Dados a 50°C

e50 = normrnd(0, 0.454 , 1000, 1);

%%% Variável Explicativa
X50 = normrnd(50, 0.2015565, 1000,1);

for I=1:1000,
    for K=1:1000,
        if I==K
            A50(I,I)= X50(I);
        else
            A50(I,K)=0;
        end
    end
end

B50 = A50;

Y50 = alpha + B50*beta + e50; % vetor Y a 50°C

%%% Dados a 175°C

e175 = normrnd(0, 0.450 , 1000, 1);

%%% Variável Explicativa
X175 = normrnd(175, 0.2015565, 1000,1);

for I=1:1000,
    for K=1:1000,
        if I==K
            A175(I,I)= X175(I);
        else
            A175(I,K)=0;
        end
    end
end

B175 = A175;

Y175 = alpha + B175*beta + e175; % vetor Y a 175°C

```

```
%%% Dados a 300°C

e300 = normrnd(0, 0.614 , 1000, 1);

%%% Variável Explicativa
X300 = normrnd(300, 0.3640055, 1000,1);

for I=1:1000,
    for K=1:1000,
        if I==K
            A300(I,I)= X300(I);
        else
            A300(I,K)=0;
        end
    end
end

B300 = A300;

Y300 = alpha + B300*beta + e300; % vetor Y a 300°C

%%% Dados a 425°C

e425 = normrnd(0, 0.534 , 1000, 1);

%%% Variável Explicativa
X425 = normrnd(425, 0.3640055, 1000,1);

for I=1:1000,
    for K=1:1000,
        if I==K
            A425(I,I)= X425(I);
        else
            A425(I,K)=0;
        end
    end
end

B425 = A425;

Y425 = alpha + B425*beta + e425; % vetor Y a 425°C

%%% Ordenação dos vetores
```

```
ordY25 = sort(Y25);  
  
ordY50 = sort(Y50);  
  
ordY175 = sort(Y175);  
  
ordY300 = sort(Y300);  
  
ordY425 = sort(Y425);  
  
%% Cálculo do IC  
  
IC25 = [ordY25(25), ordY25(975)]  
  
IC50 = [ordY50(25), ordY50(975)]  
  
IC175 = [ordY175(25), ordY175(975)]  
  
IC300 = [ordY300(25), ordY300(975)]  
  
IC425 = [ordY425(25), ordY425(975)]
```


Referências Bibliográficas

- [1] Boyles, R. A., On the Convergence of the EM Algorithm, Journal of the Royal Statistical Society, B, vol 45, pg 47-50, 1983.
- [2] Cheng, C. L. & Van Ness, J. W. , Statistical Regression With Measurement Error, Kendall's Library of Statistic 6, Arnold, 1999.
- [3] Dempster, A., Laird, N. & Rubin, D. B., Maximum Likelihood Estimation from incomplete data via the EM algorithm, Journal of the Royal Statistical Society, B, vol 39, pg 1-38, 1977.
- [4] Fuller, W. A., Measurement Error Models, John Wiley & Sons, 1987.
- [5] Graybill, F. A., Matrices With Applications in Statistics, 2nd edition, 1983.
- [6] Grubbs, F. E. (1948) - On estimating precision of measuring instruments and product variability, Journal Amer. Stat. Assoc., **43**, pg. 243-264.
- [7] Grubbs, F. E. (1973) - Errors of Measurement, Precision, Accuracy and the Statistical Comparison of Measuring Instruments, Technometrics, **15**, pg. 53-66.
- [8] ISO/IEC Guide 43-1 (1997) - Proficiency testing by interlaboratory comparisons - Part I: Development and operation of proficiency testing schemes.
- [9] ISO GUM (1998), Guia para expressão da incerteza de medição, 2^o edição brasileira.
- [10] Jaeck, J. L. , Statistical analysis of measurement errors, Exxon Monograph, John Wiley and Sons, 1985.
- [11] Lehmann, E. L., Theory of Point Estimation, John Wiley and Sons, 1983.
- [12] McLachlan, G. J. & Krishnan, T., The EM Algorithm and Extensions, John Wiley and Sons, 1997.
- [13] Mandel, J., (1959) - The measuring Process, Technometrics, **1**, pg. 251-267.
- [14] Searle, S. R., Linear Models, John Wiley and Sons, 1971.
- [15] Sen, P. K, & Singer, J. M., (1993), Large Sample Methods in Statistics: An Introduction with Applications, Chapman & Hall/CRC, 1^o ed, pg. 201 - 246.
- [16] Smith, H. F. (1950) - Estimating Precision Of Measuring Instruments, Journal Amer. Stat. Assoc., **45**, pg. 447-451.
- [17] Srivastava, M. S. & Khatri C. G., An Introduction to Multivariate Statistics, North Holland-New York, 1979.
- [18] Thompson, W. A., Jr., (1963) - Precision Of Simultaneous Measurement Procedures, Journal Amer. Stat. Assoc., **58**, pg. 474-479.
- [19] Wu, C. F. J., On the Convergence Properties of the EM Algorithm, The Annals of Statistics, vol 11, N^o 1, pg. 95 - 103, 1983.