UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Um estudo sobre as equações de Riccati de filtragem para sistemas com saltos Markovianos: estabilidade e dualidade com controle

Daniel Alexis Gutierrez Pachas

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Daniel Alexis Gutierrez Pachas

Um estudo sobre as equações de Riccati de filtragem para
sistemas com saltos Markovianos: estabilidade e dualidade
com controle

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e
Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

USP – São Carlos
Outubro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G983e Gutierrez Pachas, Daniel Alexis
Um estudo sobre as equações de Riccati de
filtragem para sistemas com saltos Markovianos:
estabilidade e dualidade com controle / Daniel
Alexis Gutierrez Pachas; orientador Eduardo
Fontoura Costa. -- São Carlos, 2017.
94 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2017.

1. Equações de Riccati. 2. Estabilidade. 3.
Dualidade. 4. Sistemas lineares com saltos. I.
Fontoura Costa, Eduardo , orient. II. Título.

Daniel Alexis Gutierrez Pachas

**On the filtering Riccati equations for Markovian jump
systems: stability and duality with control**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Computer Science
and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

USP – São Carlos
October 2017

*Eu dedico a conclusão deste trabalho, aos meus pais Hector e Blanca,
a minha irmã Gabriela e minhas amadas sobrinhas Naomi e Pierinna,
e na memória da minha avó Teresa.*

AGRADECIMENTOS

Tentarei expressar em poucas linhas minha gratidão com as pessoas que de alguma forma estiveram presentes e que me ajudaram em meu caminho para atingir este sonho.

Ao meu orientador Eduardo Fontoura Costa pela excelente orientação acadêmica e sobretudo sua amizade. Obrigado pelos bons conselhos, pelas agradáveis conversas e o apoio nos momentos difíceis.

À CAPES pelo suporte financeiro. Pela bolsa de Doutorado e o financiamento para viagens a eventos. Aos funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação pela disposição e apoio. Também agradeço aos meus professores pelas excelentes aulas e meus colegas do Laboratório de Otimização. Aprendi muito com vocês.

Agradeço a Deus pela vida e pelas experiencias para entender seu tempo e amor.

A minha família em Chinchá pelo suporte emocional e incondicional e que apesar dos mais de 4000km de distância seu carinho e amor sempre está presente. Aos meus pais Hector e Blanca pelos valores e a luta que fizeram para eu chegar até aqui. A minha irmã Gabriela e seu esposo Abraham por cuidar de meus pais enquanto eu não estive em casa. Estou muito orgulhoso da mulher que você é minha querida irmã. Agradeço minhas amadas sobrinhas Naomi e Pierinna pelas piadas, risos e o amor que me brindam em cada ligação. Aos meus avós Luz e José, meus tios e primos que demonstram sempre que uma família unida é o bem mais importante. Agradeço todos eles pela força e pelo apoio aos meus pais nos momentos mais difíceis.

Amizade é um sentimento que aprendi a valorar. Compreendi o que é sentir “*saudade*” um termo que no espanhol (minha língua nativa) não tem um significado tão completo para descrevê-lo. Eu deixei grandes amigos no Peru como William Pachas Cano, Nury Felipa, Juan Carlos Castilla, Jasmina Moron, Harry Galindo, Enrique Munayco e Miguel Almeyda. Eu lembro sempre de vocês e estou muito orgulhoso do sucesso de cada um de vocês. Amigos que contribuíram muito para tornar este sonho realidade e sempre estão dispostos a colaborar comigo. Muito grato com Alfredo Jaramillo, Leandro Mundim, Ditter Yataco, Javier Cerda, Edson Gagliardi, Genaro Zamudio, Miguel Cutipa, Victor Vásquez, Mayra Zegarra, Sergio Arguello, e a Dona Marilene Moreira (minha mãe no Brasil).

Estou muito grato com diversos amigos que Deus me deu. Amigos que compartilhei momentos maravilhosos em São Carlos e que tiveram que voltar a seus países como Sergio Aquisé, Alfredo Roa, Jeinny Peralta, Henry Pizarro e Cecilia Laquise. Outros foram embora a seguir novos caminhos como Herbert Chuctaya, Manuel Zuloeta, Mery Rengifo, Susan Chumbimune,

Blankie Barragán e Paola Llerena. Uma menção especial para María Elvira Prieto pela confiança, apreço, orações, momentos e por me ajudar a ser uma melhor pessoa.

Um parágrafo especial para reconhecer a “*zoeira*”, cujo significado está relacionado com o ato de fazer algo com o intuito que seja engraçado ou que provoque risos. Esta palavra define muito aos meus amigos Paul Bustios, Luis Alberto Rosero, Erick Gomez, Germain García, Ricardo Puma, Alberto Lazaro, Micky Aguirre, Juan Luis Fuentes, e Omar Mozo. Valeu pelas brincadeiras e o grande apoio nos momentos difíceis.

*“A beleza da matemática apenas se mostra
para seus seguidores mais pacientes”
(Maryam Mirzakhani, 1977-2017)*

RESUMO

GUTIERREZ-PACHAS, D. A. **Um estudo sobre as equações de Riccati de filtragem para sistemas com saltos Markovianos: estabilidade e dualidade com controle.** 2017. 94 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho estudamos as equações de Riccati para a filtragem de sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto. Obtemos uma condição geral para estabilidade do filtro ótimo obtido pela equação algébrica de filtragem, e que também é válida para que não haja multiplicidade de soluções. Revisitamos também a questão da existência, chegando a uma condição em termos da sequência de ganhos de um observador de Luenberger. Estes resultados usaram cadeias de Markov em escala reversa de tempo, inspirando a explorar a dualidade entre filtragem e controle em sistemas com reversão na cadeia, chegando a uma relação simples de dualidade.

Palavras-chave: Equações de Riccati, Estabilidade, Dualidade, Sistemas lineares com saltos.

ABSTRACT

GUTIERREZ-PACHAS, D. A. **On the filtering Riccati equations for Markovian jump systems: stability and duality with control.** 2017. 94 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work, we studied Riccati equations for filtering Markovian jump linear systems in discrete time. We found a general condition for the stability of the optimal filter obtained via the coupled algebraic Riccati equation, and it is also valid for uniqueness of solutions. We revisit the topic of existence of solutions of the Riccati and obtain a condition in terms of the sequence of gains of a Luenberger observer. These results used Markov chains in reverse time scale, inspiring us to explore the duality between filtering and control in systems with chain reversion, arriving at a simple relation of duality.

Keywords: Riccati equations, Stability, Duality, Jump linear systems.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Re$ — Conjunto dos numeros reais.

$\Re^n$ — Espaço euclidiano de dimensão n .

$\mathcal{M}^{m,n}$ — Espaço linear das matrizes de dimensão $m \times n$.

$\mathcal{M}^n$ — Espaço linear das matrizes de dimensão $n \times n$.

$\mathcal{M}^{n0}$ — Conjunto das matrizes positivas semi-definidas de dimensão $n \times n$.

$\mathcal{M}^{n+}$ — Conjunto das matrizes positivas definidas de dimensão $n \times n$.

N — Quantidade total de modos operação de um sistema linear com saltos.

$\mathbb{I} = \{1, \dots, N\}$ — Conjunto de modos de operação.

$\mathcal{C}^{m,n}$ — Espaço linear das coleções de N matrizes de dimensão $m \times n$.

$\mathcal{C}^n$ — Espaço linear das coleções de N matrizes de dimensão $n \times n$.

$\mathcal{C}^{n0}$ — Conjunto das coleções de N matrizes positivas semi-definidas de dimensão $n \times n$.

$\mathcal{C}^{n+}$ — Conjunto das coleções de N matrizes positivas definidas de dimensão $n \times n$.

$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ — Operadores lineares.

I — Matriz identidade de dimensão arbitraria.

X' — Transposta da matriz X .

$\mathcal{I} = (I, \dots, I)$ — Coleção de matrizes identidade de dimensão arbitraria.

$\langle \cdot \rangle$ — Produto interno.

$\| \cdot \|$ — Norma.

ℓ — Horizonte de tempo pre-definido.

$\mathbb{T} = \{0, 1, \dots\}$ — Conjunto de valores temporais ilimitado.

$\mathbb{T}_\ell = \{0, 1, \dots, \ell\}$ — Conjunto de valores temporais limitado.

$\Pr(\cdot)$ — Medida de probabilidade.

$\text{Tr}(\cdot)$ — Operador do traço.

$\text{sign}(\cdot)$ — Função signo.

$\mathbb{E}\{\cdot\}$ — Valor esperado.

η — Cadeia de Markov.

θ — Processo resultante da reversão de tempo em η .

$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ — Função indicadora.

v_0 — Distribuição de probabilidade inicial do processo η .

π_0 — Distribuição de probabilidade inicial do processo η .

$v(t)$ — Distribuição de probabilidade no instante de tempo t do processo η .

$\pi(t)$ — Distribuição de probabilidade no instante de tempo t do processo θ .

v — Distribuição de probabilidade limite do processo η .

π — Distribuição de probabilidade limite do processo θ .

$\mathbb{P}$ — Matriz de transição de probabilidades invariante no tempo.

$\mathbb{P}(t)$ — Matriz de transição de probabilidades variante no tempo.

$\mathbb{M}_t = \{i \in \mathbb{I} : v_i(t) = 0\}$ — Conjunto de índices.

$\mathbb{N}_t = \{i \in \mathbb{I} : \pi_i(t) = 0\}$ — Conjunto de índices.

$K(t) = (K_1(t), \dots, K_N(t))$ — Coleção arbitrária de matrizes de ganho no instante de tempo t .

$K^{\text{opt}}(t) = (K_1^{\text{opt}}(t), \dots, K_N^{\text{opt}}(t))$ — Coleção de matrizes de ganho ótimo no instante de tempo t .

$K = \{K(0), K(1), \dots\}$ — Sequência arbitrária de ganhos.

$K^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$ — Sequência de ganhos ótimos.

$K^{\text{zero}} = \{0, 0, \dots\}$ — Sequência de ganhos nulos.

$S_K(t) = (S_{K,1}(t), \dots, S_{K,N}(t))$ — Coleção das matrizes de covariância do erro de estimação com ganho arbitrário K no instante de tempo t .

$Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_N(t))$ — Coleção padrão das matrizes de covariância do erro de estimação com ganho ótimo no instante de tempo t .

$S(t) = (S_1(t), \dots, S_N(t))$ — Coleção das matrizes de covariância do erro de estimação com ganho ótimo no instante de tempo t .

$O(t) = (O_1(t), \dots, O_N(t))$ — Coleção das matrizes de covariância do erro de estimação com ganho nulo no instante de tempo t .

$P(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t))$ — Coleção das matrizes associadas com as EDRA-C.

$Z = (Z_1, \dots, Z_N)$ — Solução do problema de ponto fixo para EDRA-F padrão.

$S = (S_1, \dots, S_N)$ — Solução do problema de ponto fixo para EDRA-F.

$\mu = n^2 N$ — Número máximo de avaliações para o teste de alcançabilidade em média.

$\sigma_K = \{X \in \mathcal{C}^{n0} : \langle S_K(\mu), X \rangle = 0\}$ — Conjunto de direções com covariância do erro de estima-

ção nula para uma sequência de ganhos arbitrária.

$\sigma_S = \{X \in \mathcal{C}^{n_0} : \langle S(\mu), X \rangle = 0\}$ — Conjunto de direções com covariância do erro de estimação nula para uma sequência de ganhos ótimas.

$\sigma_O = \{X \in \mathcal{C}^{n_0} : \langle O(\mu), X \rangle = 0\}$ — Conjunto de direções com covariância do erro de estimação nula para uma sequência de ganhos nulos.

$\chi(t) = (\chi_1(t), \dots, \chi_N(t))$ — Coleção das matrizes de primer momento no instante de tempo t .

$\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{C}^{n_0} : \|X\| = 1\}$ — Conjunto dos elementos em $\mathcal{C}^{n_0}$ com norma 1.

$\mathfrak{X}(t) = (\mathfrak{X}_1(t), \dots, \mathfrak{X}_N(t))$ — Coleção das matrizes de segundo momento no instante de tempo t .

$\mathfrak{m}(t) = (\mathfrak{m}_1(t), \dots, \mathfrak{m}_N(t))$ — Coleção das matrizes de primer momento condicionado no instante de tempo t .

$\mathfrak{M}(t) = (\mathfrak{M}_1(t), \dots, \mathfrak{M}_N(t))$ — Coleção das matrizes de segundo momento condicionado no instante de tempo t .

$\mathfrak{K}^{\text{opt}}(t) = (\mathfrak{K}_1^{\text{opt}}(t), \dots, \mathfrak{K}_N^{\text{opt}}(t))$ — Coleção das matrizes de ganho para o problema linear quadrático modificado no instante de tempo t .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	25
2.1	Notações	25
2.2	Filtragem para sistemas lineares invariantes no tempo	27
3	EQUAÇÕES DE RICCATI ACOPLADAS	31
3.1	Resultados preliminares	31
3.2	Matrizes de covariância do erro de estimação	34
3.3	Noções de alcançabilidade e estabilizabilidade para o sistema (3.1)	40
3.4	Exemplos ilustrativos	43
4	ESTABILIDADE, EXISTÊNCIA E UNICIDADE	47
4.1	Resultados preliminares	47
4.1.1	<i>W-alcançabilidade como condição de estabilizabilidade do sistema</i> (4.1)	49
4.1.2	<i>W-estabilizabilidade como condição de estabilizabilidade do sistema</i> (4.1)	52
4.2	Estabilidade para observadores com ganhos dados	58
4.3	Estabilidade das equações de Riccati	60
4.4	Existência e unicidade	61
5	SISTEMAS COM SALTOS MARKOVIANOS REVERSO NA ESCALA DE TEMPO	65
5.1	Formulação do modelo	65
5.2	Variáveis de momento condicionado	67
5.3	O problema linear quadrático	69
5.4	Metodologia para calcular os ganhos ótimos	71
5.5	Aplicação	77
6	DUALIDADE COM CONTROLE	83
6.1	Problema de filtragem para SLSMs	83
6.2	O problema linear quadrático modificado	84
7	CONCLUSÕES	89

REFERÊNCIAS	91
-----------------------	----

INTRODUÇÃO

Em diversas áreas de atuação existem sistemas dinâmicos propensos a falhas e/ou perturbações que não são bem modelados por sistemas lineares simples (ou simplesmente, SLS), veja ([ANTSAKLIS; MICHEL, 2006](#); [HESPANHA, 2009](#)). Para tornar o modelo mais de acordo com a realidade são adicionadas variáveis aleatórias que definem sistemas lineares estocásticos, veja ([DRAGAN; MOROZAN, 2008b](#)). Também são estudados problemas de controle ([CHUI; CHEN, 1989](#)) e de filtragem ([KALMAN; BUCY, 1963](#)) que levam a equações de Riccati, veja ([RAN; VREUGDENHIL, 1988](#); [BITMEAD; GEVERS; PETERSEN, 1985](#); [BITMEAD; GEVERS, 1991](#); [WIMMER; PAVON, 1992](#)). Na busca de modelar situações mais reais em ([CHIZECK; JI, 1988](#)) foram introduzidos os sistemas lineares com saltos Markovianos, (ou simplesmente SLSM). Estes sistemas são usados para modelar sistemas dinâmicos que apresentam “mudanças abruptas” em sua estrutura e parâmetros. Podemos aplicar os SLSM para descrever as mudanças climáticas ou mudanças no preço de uma ação na bolsa de valores, entre outras.

Em termos gerais um SLSM é um sistema composto por sub-sistemas lineares simples que interatuam com base ao valor que assume uma cadeia de Markov em um conjunto de modos disponíveis em cada instante de tempo. Algumas aplicações podem ser vistas em ([VAL; BASAR, 1999](#); [COSTA A. N. VARGAS, 2012](#)). Uma literatura básica e compreensível sobre SLSM pode ser visto em ([COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005](#)) para modelos a tempo discreto e ([COSTA; FRAGOSO; TODOROV, 2013](#)) para modelos a tempo contínuo. Também nosso grupo de pesquisa apporto à teoria de SLSM, como por exemplo em ([VARGAS *et al.*, 2015](#); [NARVÁEZ; COSTA, 2016](#); [DRAGAN; COSTA, 2016](#)).

Em ([JI *et al.*, 1991](#)) foi estudado o problema linear quadrático com horizonte infinito, e cuja solução leva a um conjunto de equações, denominadas equações em diferença de Riccati acopladas de controle (ou simplesmente, EDRA-C) e que estendem as equações obtidas para sistemas lineares simples. Se existe uma solução de ponto fixo para o sistema em diferença des-

crito pelas EDRA-C, ela satisfaz outro conjunto de equações, denominadas equações algébricas de Riccati acopladas (ou simplesmente, EARA-C). As EARA-C já foram bem estudadas pela literatura de SLSM com base a conceitos como detetabilidade fraca (W-detetabilidade) e estabilizabilidade média quadrática (MS-estabilizabilidade), veja (COSTA; do Val, 2000; COSTA; do Val, 2001; COSTA; do Val, 2002b). O estudo das EARA-C apresentam cenário completo e que descreve por exemplo que a noção de MS-estabilizabilidade garante a existência de soluções e de W-detetabilidade para mostrar unicidade e estabilidade do sistema. Além disso, W-detetabilidade é uma condição suficiente e necessária para mostrar a estabilidade da solução mínima da Riccati, como em em (COSTA; do Val, 2002a; do Val; COSTA, 2005).

Para o problema de filtragem em SLSM, escrevemos a estimativa do estado via um observador de Luenberger e que determine uma sequência de ganhos ótimos do filtro que levem a minimizar o erro quadrático médio e que são definidos em função das equações em diferença de Riccati acopladas de filtragem (ou simplesmente, EDRA-F) e quando existe a solução de ponto fixo para ele satisfaz um sistema de equações conhecidos como equações algébricas de Riccati acopladas de filtragem (ou simplesmente, EARA-F). Diferentemente de seu par EARA-C, o cenário para as EARA-F não estão tão desenvolvidas em termos da estabilidade. Este é o principal objetivo deste trabalho que na busca de obter condições suficientes e necessárias para garantir estabilidade de um sistema leve por extensão a descrever resultados que envolvam a existência e unicidade das EARA-F.

Neste trabalho mostramos condições de estabilidade para EDRA-F em termos mais gerais assumindo uma sequência de ganhos dada. Explorando uma noção de alcançabilidade fraca, proposta pelo nosso grupo há alguns anos (veja por exemplo (GOMES; COSTA, 2010)), conseguimos enfraquecer esta noção para estabilizabilidade fraca - aqui denotada por W-estabilizabilidade - que permite que o gramiano de W-alcançabilidade não seja positivo em algumas “direções” nas quais uma certa dinâmica dual seja estável. Como veremos, essa dinâmica dual é associada a SLSM com cadeia de Markov com escala de tempo reversa. A noção de W-estabilizabilidade generaliza tanto a de W-alcançabilidade como a noção de S-estabilizabilidade, que é usualmente empregada em SLSM para garantir estabilidade do filtro (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005). Mostramos que W-estabilizabilidade é condição necessária e suficiente para estabilidade do filtro, sendo portanto uma condição mais geral que permite concluir sobre estabilidade. A noção de estabilidade do filtro usada nessa tese é a mesma empregada em (COSTA; ASTOLFI, 2009) e (NARVÁEZ; COSTA, 2016), e (SANGSUK-IAM; BULLOCK, 1990) em diferentes contextos, aqui adaptada para o estimador linear mínimo médio quadrático (ou simplesmente, ELMMQ)

O sistema (4.1) é um modelo similar ao explorado na literatura de sistemas lineares simples com atraso, veja (ZHANG; DUAN; XIE, 2006). Inspirando-nos na dinâmica dual mencionada acima legada com o sistema com saltos com cadeia em tempo reverso, que denominamos sistema linear com salto Markoviano reverso no tempo (ou simplesmente, SLSMRT), e foi

proposto em (GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2016). O estudo dos SLSMRT podem ser encontrados em problemas do mundo real, especialmente quando uma cadeia de Markov interage com os parâmetros do sistema através de uma fila do tipo “*último a entrar, primeiro a sair*”, a qual nos referimos pela sigla LIFO do Inglês “*last in first out*”. Por exemplo, se as diferentes camadas de uma formação rochosa podem ser descritas por uma cadeia ao longo do tempo, então sua perfuração sofrerá as ações das diferentes camadas em tempo reverso. Filas LIFO podem aparecer naturalmente em controle por rede, onde os ganhos de um controlador são calculados remotamente por equações de Riccati (um processo regressivo no tempo), enviados por um canal com falhas Markovianas, e armazenados e lidos pelo controlador em ordem inversa.

Principais resultados

Dentro dos principais resultados temos

1. Obter condições suficientes para a estabilidade do ELMMQ.
2. Estendemos os resultados de estabilizabilidade para verificar existência e unicidade das EARA-F.
3. Obter uma condição necessária e suficiente para estabilidade do filtro estacionário associado a EARA-F.
4. Introduzir um modelo com o salto descrito pelo processo reverso no tempo da cadeia de Markov e ilustrar sua aplicação.
5. Mostrar a dualidade de maneira simples entre o problema de filtragem para SLSM e o problema de controle em SLSMRT.

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos as principais notações a serem usados ao longo do texto. Resumimos os resultados que levam a caracterizar as soluções das equações algébricas de Riccati de filtragem para sistemas lineares invariantes no tempo e apresentamos os resultados análogos com o problema de controle.

2.1 Notações

Denotamos por $\mathfrak{R}$ ao conjunto dos números reais e por $\mathfrak{R}^n$ ao espaço euclidiano de dimensão n . Escrevemos $\mathcal{M}^{m,n}$ para representar o espaço formado pelas matrizes reais de dimensão $m \times n$. Se $m = n$ escrevemos simplesmente $\mathcal{M}^n$. Além disso, $\mathcal{M}^{n0}$ é o conjunto das matrizes positivas semi-definidas de dimensão $n \times n$, (ou também, $Y \geq 0$ sempre que $Y \in \mathcal{M}^{n0}$) e $\mathcal{M}^{n+}$ é o conjunto das matrizes positivas definidas de dimensão $n \times n$ (ou também, $Y > 0$ sempre que $Y \in \mathcal{M}^{n+}$).

Dado $\mathbb{I} = \{1, \dots, N\}$, escrevemos $\mathcal{C}^{m,n}$ para representar o espaço formado pela coleção de N matrizes reais de dimensão $m \times n$. Isto significa, $Y = (Y_1, \dots, Y_N) \in \mathcal{C}^{m,n}$ se e somente se para cada $i \in \mathbb{I}$ temos que Y_i é uma matriz de dimensão $m \times n$. Denotando $\text{Tr}(\cdot)$ para representar ao operador traço, definimos o produto interno no espaço de Hilbert $\mathcal{C}^{n,m}$ como segue

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Y_i' Z_i), \quad (2.1)$$

onde Y_i' representa a matriz transposta de Y_i . Quando $n = m$ escrevemos $\mathcal{C}^{n,n} := \mathcal{C}^n$ para representar ao espaço de Banach conformado pela coleção de N matrizes de dimensão $n \times n$ e cuja norma é

$$\|Y\| = \left(\sum_{i=1}^N \text{Tr}(Y_i' Y_i) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Denotamos $Y \in \mathcal{C}^{n0}$ (respectivamente, $Y \in \mathcal{C}^{n+}$) para representar o conjunto de coleções de matrizes positivas semi-definidas (respectivamente, positivas definidas).

Para quaisquer $Y, Z \in \mathcal{C}^n$ e $\alpha \in \mathcal{C}^1$ as seguintes operações algébricas são válidas:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot Z &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \cdot (Y_1, \dots, Y_N) = (\alpha_1 Z_1, \dots, \alpha_N Z_N), \\ Y \cdot Z &= (Y_1, \dots, Y_N) \cdot (Z_1, \dots, Z_N) = (Y_1 Z_1, \dots, Y_N Z_N), \\ Y + Z &= (Y_1, \dots, Y_N) + (Z_1, \dots, Z_N) = (Y_1 + Z_1, \dots, Y_N + Z_N),\end{aligned}$$

e por simplicidade de notação, escrevemos $\alpha \cdot Z$ por αZ e $Y \cdot Z$ por YZ .

Seja o conjunto de valores temporais $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots\}$. Escrevemos η para representar uma cadeia de Markov a tempo discreto que assume valores em $\mathbb{I}$ em cada instante de tempo $t \in \mathbb{T}$. Denotamos $\Pr(\cdot)$ para representar a medida de probabilidade. Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que

$$p_{ij}(t) = \Pr(\eta(t+1) = j \mid \eta(t) = i), \quad i, j \in \mathbb{I},$$

representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j no instante de tempo t . Estes elementos são armazenados na matriz de probabilidades de transição, $\mathbb{P}(t)$ da forma:

$$\mathbb{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1N}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2N}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(t) & p_{N2}(t) & \cdots & p_{NN}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^N.$$

Se a cadeia de Markov é homogênea, então $p_{ij}(t) = p_{ij} \forall t \in \mathbb{T}$ e escrevemos $\mathbb{P}$ para representar a matriz de probabilidades de transição quando a cadeia de Markov homogênea. Com base em (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Seção 3.2) usamos os elementos das matrizes $\mathbb{P}(t)$ para definir os operadores lineares e invertíveis variantes no tempo,

$$\mathcal{U}_Z, \mathcal{V}_Z, \mathcal{D}, \mathcal{E} : \mathbb{T} \times \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n.$$

Denotamos $\mathcal{U}_Z(Y) = (\mathcal{U}_{Z,1}(Y), \dots, \mathcal{U}_{Z,N}(Y))$ e similarmente para os outros operadores. Para cada $i \in \mathbb{I}$ e $t \in \mathbb{T}$ definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{Z,i}(t, Y) &= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) Z_j' Y_j Z_j, \\ \mathcal{V}_{Z,i}(t, Y) &= Z_i \mathcal{D}_i(Y) Z_i', \\ \mathcal{D}_i(t, Y) &= \sum_{j=1}^N p_{ji}(t) Y_j, \\ \mathcal{E}_i(t, Y) &= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) Y_j.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Estes operadores são de muita utilidade na literatura de sistemas lineares com saltos Markovianos, veja e que leva descrever variáveis sendo uma coleção de matrizes. Para qualquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}^n$

com base na definição do produto interno, definida em (2.1), segue

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U}(t, Y), X \rangle &= \langle Y, \mathcal{V}(t, X) \rangle, \\ \langle \mathcal{D}(t, Y), X \rangle &= \langle Y, \mathcal{E}(t, X) \rangle.\end{aligned}\tag{2.4}$$

De (2.4) concluímos que $\mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{D}$) é o operador adjunto de $\mathcal{V}$ (respectivamente, $\mathcal{E}$). Se η é uma cadeia de Markov homogênea, então as probabilidades de transição são invariantes no tempo, isto significa $p_{ij}(t) = p_{ij}$, $\forall t \in \mathbb{T}$ e portanto simplicidade de notação escrevemos $\mathcal{U}(Y) = \mathcal{U}(t, Y)$ e similarmente para os outros operadores.

Seja $v(t)$ o vetor linha composto por $v_i(t) = \Pr(\eta(t) = i)$, $\forall i \in \mathbb{I}$ que representa a distribuição de probabilidade no instante de tempo t . Adicionalmente, escrevemos v_0 para representar a distribuição de probabilidade inicial. Algumas propriedades e definições básicas sobre as cadeias de Markov, podem ser vistas em (CINLAR, 1975; SCHINAZI, 1999). Dizemos que uma cadeia de Markov é estacionária se e somente se a distribuição de probabilidade é um vetor invariante no tempo. Adicionalmente, dizemos que ela é reversível quando satisfaz a seguinte relação $p_{ji}v_j(0) = p_{ij}v_i(0)$, para qualquer $i, j \in \mathbb{I}$. Para cada $i \in \mathbb{I}$, definimos

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t),$$

e o vetor $v = (v_1, \dots, v_N)$ é denominado distribuição de probabilidade limite.

2.2 Filtragem para sistemas lineares invariantes no tempo

Com base em (ANTSAKLIS; MICHEL, 2006; HESPANHA, 2009) resumimos o estudo do problema de filtragem para sistemas lineares invariantes no tempo, ou simplesmente (SLI). Sejam as matrizes $A \in \mathcal{M}^{n,n}$, $G \in \mathcal{M}^{n,p}$, $L \in \mathcal{M}^{m,n}$ e $H \in \mathcal{M}^{m,p}$ que satisfaçam

$$GH' = 0 \quad \text{e} \quad HH' > 0.$$

Assumindo o estado inicial $z(0) = z_0 \in \mathfrak{R}^n$ com media $\mathbb{E}\{z_0\} = \bar{z}$ e matriz de covariância $\mathbb{E}\{z_0 z_0'\} = \bar{Z} \in \mathfrak{R}^{n,n}$ e escrevemos $\Sigma = \bar{Z} - \bar{z}\bar{z}'$. A variável de “ruído” (denotado por w) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii)

$$(i) \quad \mathbb{E}\{w(t)\} = 0, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}.$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}\{w(t)w'(t)\} = I, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}.$$

$$(iii) \quad \mathbb{E}\{w(t)w(s)'\} = 0, \text{ para cada } s \neq t, \text{ com } t \in \mathbb{T}.$$

Definimos o SLI como segue:

$$\begin{aligned}z(t+1) &= Az(t) + Gw(t), \\ y(t) &= Lz(t) + Hw(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Como é usual na literatura, escrevemos (A, G, L, H) para representar o sistema definido em (2.5). Também, denotamos

$$(A, G) := (A, G, L = 0, H = 0) \quad \text{e} \quad (A, L) := (A, G = 0, L, H = 0).$$

Denotando $\hat{z}(t)$ ao melhor “*estimador*” de $z(t)$ e $K(t) \in \mathcal{M}^{n,m}$ a matriz de *ganho do filtro* no instante t . A dinâmica da estimativa, a qual denominamos “*filtro*” para SLI, é como segue:

$$\begin{aligned} \hat{z}(0) &= \bar{z} \\ \hat{z}(t+1) &= A\hat{z}(t) - K(t)(y(t) - L\hat{z}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A variável do erro de estimação, que denotamos por $\tilde{z}$ segue

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Combinando as equações (2.5)–(2.6), escrevemos a dinâmica do erro por

$$\begin{aligned} \tilde{z}(0) &= z_0 - \bar{z} \\ \tilde{z}(t+1) &= (A + K(t)L)\tilde{z}(t) + (G + K(t))w(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

O filtro é um observador externo que imita a dinâmica do sistema, como vemos na figura XX. Inclusive o fato de ter ruído no sistema e um filtro adequado leva à ter estabilidade do filtro.

Observação 2.1. Assumindo que a matriz de ganho $K(t)$ é nula sempre, então o sistema (2.7) é descrito como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{z}(0) &= z_0 - \bar{z} \\ \tilde{z}(t+1) &= A\tilde{z}(t) + Gw(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.8) temos que o erro de estimação é dado pelo “*erro da planta*”. Denominamos assim, já que $\tilde{z}$ é expressado somente em termos dos parâmetros A e G . Em geral, o erro de estimação definido em (2.7) é a combinação do erro de estimação da planta e o erro do filtro.

O problema de filtragem para SLI com horizonte finito

Assumindo $\ell \geq 0$, o problema de filtragem para SLI com horizonte finito, é definido por

$$\min_{K(0), \dots, K(\ell)} \sum_{t=0}^{\ell+1} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{z}(t)\|^2 \right\}, \tag{2.9}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{z}(0) &= \bar{z} \\ \tilde{z}(t+1) &= (A + K(t)L)\tilde{z}(t) + (G + K(t)H)w(t), \quad t = 0, 1, \dots, \ell. \end{aligned} \tag{2.10}$$

A solução do problema (2.9) – (2.10), que denotamos por $K^{\text{opt}}(t)$, segue:

$$K^{\text{opt}}(t) = -AZ(t)L'(L(t)Z(t)L'(t) + HH')^{-1}, \quad t = 0, 1, \dots, \ell. \tag{2.11}$$

As matrizes $Z(t)$ representam a covariância do erro de estimação quando o ganho é definido por (2.11). Isto é,

$$Z(t) = \mathbb{E}\{\tilde{z}(t)\tilde{z}'(t)\}. \quad (2.12)$$

Aplicando (2.10) e (2.11) em (2.12) obtemos:

$$\begin{aligned} Z(0) &= \Sigma, \\ Z(t+1) &= GG' + AZ(t)A' - AZ(t)L'(LZ(t)L' + HH')^{-1}LZ(t)A', \quad t = 0, 1, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O sistema definido em (2.13) é denominada *equação em diferença de Riccati de filtragem* (ou simplesmente EDR-F). Se existir o limite de $Z(t)$ definido em (2.13), que denotamos simplesmente por Z , então ela é solução do sistema

$$Y = GG' + AYA' - AYL'(LYL' + HH')^{-1}LYA'. \quad (2.14)$$

A equação definida em (2.14) é denominada *equação diferença Riccati de filtragem* (ou simplesmente EAR-F). As EDR-F e as EAR-F foram amplamente exploradas na literatura de SLI, onde estudam propriedades associadas com a monotonicidade, estabilidade e convergência das EDR-F. Além de critérios para verificar existência e unicidade das EAR-F, veja (BITMEAD; GEVERS; PETERSEN, 1985; BITMEAD; GEVERS, 1991; WIMMER; PAVON, 1992). Os conceitos chamados detetabilidade e estabilizabilidade caracterizam a existência e unicidade da solução da EAR-F, definida em (2.14). Resumimos este resultado na Tabela 1. Não entanto existem noções mais fortes que levam ao mesmo resultado, como são: observabilidade e alcançabilidade e que descrevemos a seguir

- Se (A, L) é observável então (A, L) é detetável.
- Se (A, G) é alcançável então (A, G) é estabilizável.

(A, L) é detetável	(A, G) é estabilizável	Solução da EAR-F
sim	não	existe
sim	sim	única e estabilizante

Tabela 1 – Caracterização da solução da EAR-F.

Analogia com controle

Com base em (HESPANHA, 2009) e considerando as matrizes $A \in \mathcal{M}^n$, $B \in \mathcal{M}^{n,m}$, $C \in \mathcal{M}^{p,n}$ e $D \in \mathcal{M}^{p,m}$ que satisfaçam

$$C'D = 0 \text{ e } D'D > 0.$$

Dada a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathfrak{R}^n$, definimos o sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad \forall t = 0, \dots, \ell-1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Considerando a matriz $\Gamma \in \mathcal{M}^{n_0}$, definimos o problema de controle para SLI como segue

$$\min_{u(0), \dots, u(\ell)} \sum_{t=0}^{\ell-1} \|y(t)\|^2 + x(\ell)' \Gamma x(\ell). \quad (2.16)$$

A solução de (2.16) que denotamos por $u^{\text{opt}}(t)$ é calculada de maneira regressiva.

$$\begin{aligned} u^{\text{opt}}(\ell) &= 0, \\ u^{\text{opt}}(t) &= -(B'X(t+1)B + D'D)^{-1}B'X(t+1)A, \quad t = \ell-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para cada $t = 0, 1, \dots$ escrevemos as matrizes $X(t) \in \mathcal{M}^{n_0}$ por

$$\begin{aligned} X(\ell) &= \Gamma \\ X(t-1) &= C'C + A'X(t)A - A'X(t)B(B'X(t)B + D'D)^{-1}B'X(t)A, \quad t = 1, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A relação descrita em (2.18) é denominada *equação em diferença de Riccati de Controle* (ou simplesmente, EDR-C). Analogamente com filtragem, escrevemos X para representar a solução de

$$W = C'C + A'WA - A'WB(B'WB + D'D)^{-1}B'WA. \quad (2.19)$$

A relação definida em (2.19) é denominada *equação algébrica de Riccati de Controle* (ou simplesmente EAR-C). Na Tabela 2 representamos as condições que levem a caracterizar a existência e unicidade das EAR-F. Comparando as equações EDR-F e EDR-C (definidas em

(A, B) é estabilizável	(A, C) é detetável	Solução da EAR-C
sim	não	existe
sim	sim	única e positiva

Tabela 2 – Caracterização da solução da EAR-C.

(2.13) e (2.18) respectivamente) temos uma relação que envolve os parâmetros matriciais e as equações em diferença. Esta relação é conhecida como a dualidade “filtragem-controle” a qual ilustramos na Tabela 3. Esta relação de dualidade também é válida para sistemas lineares variantes no tempo, como pode ser visto em (DAVIS; VINTER, 1984, Tabela 6.1).

EDR-F	EDR-C
$Z(t)$	$X(\ell-t)$
Σ	Γ
A'	A
G'	B
L'	C
H'	D

Tabela 3 – Dualidade “filtragem – controle” comparando (2.13) e (2.18) para cada $t = 0, \dots, \ell$.

EQUAÇÕES DE RICCATI ACOPLADAS

Neste capítulo estudamos uma classe de equações em diferença acopladas (EDA) que são associadas com a filtragem de SLSM quando a sequência de ganhos é dada. As componentes destas EDA são definidas pelas matrizes de covariância do erro de estimação. Também apresentamos resultados preliminares que levem a propriedades de monotonicidade e otimalidade das EDA. Estudamos a dinâmica das EDA quando a sequência de ganhos é nula, ótima ou limite e introduzimos as noções de alcançabilidade e estabilizabilidade para SLSM. Finalmente, ilustramos com exemplos numéricos a relação entre estes conceitos.

3.1 Resultados preliminares

Sejam as coleções de matrizes

$$\begin{aligned} A &= (A_1, \dots, A_N) \in \mathcal{C}^n \\ G &= (G_1, \dots, G_N) \in \mathcal{C}^{n,p} \\ L &= (L_1, \dots, L_N) \in \mathcal{C}^{m,n} \\ H &= (H_1, \dots, H_n) \in \mathcal{C}^{m,p} \end{aligned}$$

que satisfaçam

$$G_i H_i' = 0 \text{ e } H_i H_i' > 0, \forall i \in \mathbb{I}.$$

Dadas as condições iniciais $\eta(0)$ e $z(0) = z_0$ com média $\mathbb{E}\{z_0\} = \bar{z}$ e matriz de covariância $\mathbb{E}\{z_0 z_0'\} = \bar{Z}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$ definimos o SLSM como segue

$$\begin{aligned} z(t+1) &= A_{\eta(t)} z(t) + G_{\eta(t)} w(t), \\ y(t) &= L_{\eta(t)} z(t) + H_{\eta(t)} w(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Representamos o filtro para SLSM via um observador de Luenberger, como segue:

$$\begin{aligned} \hat{z}(0) &= \bar{z} \\ \hat{z}(t+1) &= A_{\eta(t)} \hat{z}(t) + K_{\eta(t)}(t) (y(t) - L_{\eta(t)} \hat{z}(t)), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Similarmente ao caso de SLI, a dinâmica do erro de estimação $\tilde{z}$ é definido por:

$$\begin{aligned}\tilde{z}(0) &= z_0 - \bar{z} \\ \tilde{z}(t+1) &= (A_{\eta(t)} + K_{\eta(t)}(t)L_{\eta(t)})\tilde{z}(t) + (G_{\eta(t)} + K_{\eta(t)}(t)H_{\eta(t)})w(t), \quad t \in \mathbb{T}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

A variável K definida em (3.3) representa a coleção de matrizes de ganho do filtro na forma $K(t) = (K_1(t), \dots, K_N(t)) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Considerando o problema de determinar uma sequência de ganhos

$$\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}, \text{ sendo } K^{\text{opt}}(t) = (K_1^{\text{opt}}(t), \dots, K_N^{\text{opt}}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

que minimizem

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\sum_{t=0}^{\ell} \mathbb{E}\{\|\tilde{z}(t)\|^2\}}{\ell}.$$
(3.4)

Com base em (COSTA, 1994) as matrizes $K_i^{\text{opt}}(t)$ são calculadas da forma:

$$K_i^{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } v_i(t) = 0 \\ -A_i Z_i(t) L_i' (L_i Z_i(t) L_i' + v_i(t) H_i H_i')^{-1} & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

A variável $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_N(t)) \in \mathcal{C}^{n0}$ esta composta pela coleção das matrizes de covariância do erro de estimação quando o ganho do filtro é dado por (3.5).

$$Z_i(t) = \mathbb{E}\{\tilde{z}(t)\tilde{z}'(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta(t)=i\}}\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{I}$ escrevemos $Z_i(0) = v_i(0)\Sigma$ e para cada $t \in \mathbb{T}$ definimos $Z_i(t+1) = 0$ quando $v_i(t+1) = 0$, caso contrário satisfaz um sistema denominado *equações em diferença de Riccati acopladas de filtragem* (ou simplesmente, EDRA-F), como segue:

$$\begin{aligned}Z_i(t+1) &= \sum_{\{j: v_j(t) > 0\}} p_{ji} \left\{ v_j(t) G_j G_j' + A_j Z_j(t) A_j' - A_j Z_j(t) L_j' \right. \\ &\quad \cdot (L_j Z_j(t) L_j' + v_j(t) H_j H_j')^{-1} L_j Z_j(t) A_j' \Big\}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Se existir o valor limite das EDRA-F, que denotamos simplesmente por $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$, são calculadas da forma: se a distribuição limite é nula, (ou seja $v_i = 0$), então $Z_i = 0$, caso contrário segue um sistema denominada *equação algébrica de Riccati acoplada de filtragem* (ou simplesmente, EARA-F), definido como segue:

$$Z_i = \sum_{\{j: v_j > 0\}} p_{ji} \left\{ v_j G_j G_j' + A_j Z_j A_j' - A_j Z_j L_j' (L_j Z_j L_j' + v_j H_j H_j')^{-1} L_j Z_j A_j' \right\}, \quad (3.7)$$

Embora a Riccati (3.7) forneça a solução para o problema de filtragem, ela apresenta uma não linearidade dentro do somatório. É mais oportuno trabalhar com a seguinte versão, na variável $S(t)$, na qual o operador $\mathcal{V}$ é linear, e permite obter uma versão ainda mais simples, linear, em (3.12), mais adiante. Esta equação em $S(t)$ foi introduzida em (COSTA, 1995, equação 8) e tem uma relação de convergência com as variáveis $Z(t)$, veja (COSTA, 1995, Proposição 2). Recentemente em (GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2016) foi mostrado a equivalência entre estas variáveis, e que apresentamos a seguir.

Teorema 3.1. Para cada $t \in \mathbb{T}$ definimos $N(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ e $S(t) \in \mathcal{C}^{n0}$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{I}$ escrevemos

$$\begin{aligned} N_i(0) &= -v_i(0)A_i\Sigma L'_i(L_i\Sigma L'_i + H_iH'_i)^{-1}, \\ S_i(0) &= v_i(0)(G_iG'_i + A_i\Sigma A'_i - A_i\Sigma L'_i(L_i\Sigma L'_i + H_iH'_i)^{-1}L_i\Sigma A'_i). \end{aligned}$$

Para cada $t = 1, 2, \dots$ definimos

$$S_i(t) = \mathbb{E}\{z(t)z'(t) \cdot \mathbb{1}_{\eta(t-1)=i}\}, \quad \forall i \in \mathbb{I},$$

e calculamos progressivamente $N(t)$ e $S(t)$ como segue: se $v_i(t) = 0$ então

$$N_i(t) = 0 \quad \text{e} \quad S_i(t) = 0,$$

caso contrário

$$\begin{aligned} N_i(t) &= -A_i\mathcal{D}_i(S(t-1))L'_i(L_i\mathcal{D}_i(S(t-1))L'_i + v_i(t)H_iH'_i)^{-1}, \\ S_i(t) &= v_i(t)G_iG'_i + A_i\mathcal{D}_i(S(t-1))A'_i - A_i\mathcal{D}_i(S(t-1))L'_i \\ &\quad \cdot (L_i\mathcal{D}_i(S(t-1))L'_i + v_i(t)H_iH'_i)^{-1}L_i\mathcal{D}_i(S(t-1))A'_i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Então

$$Z(t+1) = \mathcal{D}(S(t)), \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad (3.9)$$

e os ganhos de filtro ótimos são

$$K^{\text{opt}}(t) = N(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (3.10)$$

Demonstração. Procedamos por indução matemática para demonstrar (3.9). Assumindo $t = 0$ mostraremos $Z(1) = \mathcal{D}(S(0))$.

(i) Se $v_i(1) = 0$, então $v_j(0) = 0$ para cada $\{j : p_{ji} > 0\}$, é valido

$$Z_i(1) = 0 = \sum_{\{j : p_{ji}=0\}} p_{ji}S_j(0) + \sum_{\{j : p_{ji}>0\}} p_{ji}S_j(0),$$

e isto mostra $Z_i(1) = \mathcal{D}_i(S(0))$, para cada $i \in \mathbb{I}$.

(ii) Se $v_i(1) > 0$, então substituindo $t = 0$ in (3.6), temos que o lado direito desta equação coincide com $S_j(0)$, com j tal que $v_j(0) > 0$. Completando com as matrizes $S_j(0) = 0$, onde respectivamente $v_j(0) = 0$, obtemos

$$Z_i(1) = \sum_{\{j : v_j(0)>0\}} p_{ji}S_j(0) + \sum_{\{j : v_j(0)=0\}} p_{ji}S_j(0),$$

e isto leva a escrever $Z_i(1) = \mathcal{D}_i(S(0))$, para cada $i \in \mathbb{I}$.

Combinado os itens descritos em (i) e (ii), obtemos a seguinte generalização

$$Z_i(1) = \mathcal{D}_i(S(0)), \text{ para cada } i \in \mathbb{I},$$

isto demonstra que (3.9) é valido quando $t = 0$.

Assumindo (3.9) é valido, mostraremos que $Z(t+2) = \mathcal{D}(S(t+1))$. Pelo mesmo procedimento dado em (i), obtemos $Z_i(t+2) = \mathcal{D}_i(S(t+1))$, quando $v_i(t+2) = 0$. Se $v_i(t+2) > 0$, ao substituir $Z_j(t+1)$ com $\mathcal{D}_j(S(t))$ na evolução de $Z_i(t+2)$ obtemos

$$\begin{aligned} Z_i(t+2) = & \sum_{\{j: v_j(t+1) > 0\}} p_{ji} \left\{ v_j(t+1) G_j G_j' + A_j \mathcal{D}_j(S(t)) A_j' \right. \\ & \left. - A_j \mathcal{D}_j(S(t)) L_j' (L_j \mathcal{D}_j(S(t)) L_j' + v_j(t+1) H_j H_j')^{-1} L_j \mathcal{D}_j(S(t)) A_j' \right\}, \end{aligned}$$

e daqui obtemos

$$\begin{aligned} Z_i(t+2) = & \sum_{\{j: v_j(t+1) > 0\}} p_{ji} S_j(t+1) + \sum_{\{j: v_j(t+1) = 0\}} p_{ji} S_j(t+1) \\ = & \sum_{j=1}^N p_{ji} S_j(t+1) = \mathcal{D}_i(S(t+1)), \end{aligned}$$

então $Z_i(t+2) = \mathcal{D}_i(S(t+1))$, $\forall i \in \mathbb{I}$, e isto completa o processo de indução.

Substituindo $Z_j(t)$ por $\mathcal{D}_j(S(t-1))$ em (3.5), obtemos

$$K_j^{\text{opt}}(t) = N_j(t) = -A_j \mathcal{D}_j(S(t-1)) L_j' (L_j \mathcal{D}_j(S(t-1)) L_j' + v_j(t) H_j H_j')^{-1},$$

e isto demonstra (3.10). □

Se existir o limite das EDRA-F $S(t) \in \mathcal{C}^{n0}$ definidas em (3.8), a qual denotamos por $S = (S_1, \dots, S_N)$. Definimos $S \in \mathcal{C}^{n0}$ como segue: se $v_i = 0$ então $S_i = 0$, caso contrário

$$S_i = v_i G_i G_i' + A_i \mathcal{D}_i(S) A_i' - A_i \mathcal{D}_i(S) L_i' (L_i \mathcal{D}_i(S) L_i' + v_i H_i H_i')^{-1} L_i \mathcal{D}_i(S) A_i'. \quad (3.11)$$

A equação (3.8) pode também ser escrita na forma

$$S_i(t+1) = \mathcal{V}_{A+K^{\text{opt}}(t)L_i}(S(t)) + v_i(t+1) (K_i^{\text{opt}}(t) H_i H_i' K_i^{\text{opt}'}(t) + G_i G_i') \quad (3.12)$$

De maneira mas geral na Seção 3.2 estudaremos uma classe de equações $S_{\mathbf{K}}(t)$ que generalizam as EDRA-F definidas em (3.8).

3.2 Matrizes de covariância do erro de estimação

Dada a cadeia de Markov η ergódica e uma sequência de ganhos

$$\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}, \text{ onde } K(t) \in \mathcal{C}^{n,m}, \forall t \in \mathbb{T}.$$

Considerando a distribuição inicial $v(0) = v_0$ e $S_K(0) = S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$ escrevemos $S_K(t+1) = (S_{K,1}(t+1), \dots, S_{K,N}(t+1)) \in \mathcal{C}^{n0}$ como segue: se $v_i(t+1) = 0$ então

$$S_{K,i}(t+1) = 0,$$

caso contrário

$$S_{K,i}(t+1) = \mathcal{V}_{A(t),i}(S_K(t)) + Q_i(t+1), \quad (3.13)$$

sendo $A(t) = (A_1(t), \dots, A_N(t)) \in \mathcal{C}^n$ e $Q(t+1) = (Q_1(t+1), \dots, Q_N(t+1)) \in \mathcal{C}^{n0}$ e suas componentes são

$$\begin{aligned} A_i(t) &= A_i + K_i(t)L_i, \\ Q_i(t+1) &= v_i(t+1)(K_i(t)H_iH_i'K_i'(t) + G_iG_i'), \quad \forall i \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Representamos a sequência de ganhos é nula por

$$\mathbf{K}^{\text{zero}} = \{K(t) = 0, \forall t \in \mathbb{T}\},$$

e substituindo $\mathbf{K}^{\text{zero}}$ em (3.13) temos uma nova classe de equações, que denotamos simplesmente por denotada por $O(t) = (O_1(t), \dots, O_N(t)) \in \mathcal{C}^{n0}$, ou seja

$$O(t) = S_{\mathbf{K}^{\text{zero}}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Variável	Sequência de ganhos
$S_K(t) = (S_{K,1}(t), \dots, S_{K,N}(t))$	arbitrários
$O(t) = (O_1(t), \dots, O_N(t))$	nulos
$S(t) = (S_1(t), \dots, S_N(t))$	ótimos

Tabela 4 – Classificação das variáveis $S_K(t)$, $O(t)$ e $S(t)$ e seus ganhos associados.

Se $v_i(t) = 0$ escrevemos $O_i(t) = 0$, caso contrário

$$O_i(t) = \mathcal{V}_i^t(S_0) + \mathcal{V}_i^{t-1}(v(1)GG') + \dots + \mathcal{V}_i(v(t-1)GG') + v_i(t)G_iG_i'. \quad (3.15)$$

Quando substituimos a sequência de ganhos ótimos,

$$\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\},$$

em (3.13) temos as EDRA-F dadas pela variável $S(t)$ (definidas em (3.8)), ou seja

$$S(t) = S_{\mathbf{K}^{\text{opt}}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Na Tabela 4 ressumimos as equações dadas por $S_K(t)$, $O(t)$ e $S(t)$ com os ganhos respectivos. A seguir apresentamos algumas propriedades que envolvem estas variáveis.

Lema 3.1. Com base em (3.13) consideramos os sistemas

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{K}}^{(1)}(t+1) &= \mathcal{V}_{A(t)}(S_{\mathbf{K}}^{(1)}(t)) + Q(t), \\ S_{\mathbf{K}}^{(1)}(0) &= S_0^{(1)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{K}}^{(2)}(t+1) &= \mathcal{V}_{A(t)}(S_{\mathbf{K}}^{(2)}(t)) + Q(t), \\ S_{\mathbf{K}}^{(2)}(0) &= S_0^{(2)}, \end{aligned}$$

Se $S_0^{(1)} \leq S_0^{(2)}$ então

$$S_{\mathbf{K}}^{(1)}(t) \leq S_{\mathbf{K}}^{(2)}(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}.$$

Lema 3.2. É válido

$$S(t) \leq S_{\mathbf{K}}(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}.$$

A prova destes resultados são clássicos na literatura, veja(COSTA, 1994; COSTA, 1995; COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005).

Lema 3.3. Se $S_0 = 0$ e a cadeia de Markov η é estacionária, então

$$S(t) \leq S(t+1), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}.$$

Demonstração. Seja $v = (v_1, \dots, v_N)$ a distribuição de probabilidade de η . (a) Se $v_i > 0$ aplique-mos o argumento de indução matemática, então como $S_i(1)$ são matrizes positivas semi-definidas, então

$$S_i(1) \geq S_i(0) = 0, \forall i \in \mathbb{I},$$

isto demonstra que $S_i(0) \leq S_i(1)$ quando $v_i > 0$. Assumindo $S_i(t) \leq S_i(t+1)$ como hipótese indutiva, vamos a mostrar $S_i(t+1) \leq S_i(t+2)$. Da relação (3.12), temos

$$\begin{aligned} S_i(t+1) &= (A_i + K_i^{\text{opt}}(t)L_i)\mathcal{D}_i(S(t))(A_i + K_i^{\text{opt}}(t)L_i)' + v_i(K_i^{\text{opt}}(t)H_iH_i'K_i^{\text{opt}'}(t) + G_iG_i') \\ &\leq (A_i + K_i^{\text{opt}}(t+1)L_i)\mathcal{D}_i(S(t))(A_i + K_i^{\text{opt}}(t)L_i)' \\ &\quad + v_i(K_i^{\text{opt}}(t+1)H_iH_i'K_i^{\text{opt}'}(t+1) + G_iG_i') \\ &\leq (A_i + K_i^{\text{opt}}(t+1)L_i)\mathcal{D}_i(S(t+1))(A_i + K_i^{\text{opt}}(t)L_i)' \\ &\quad + v_i(K_i^{\text{opt}}(t+1)H_iH_i'K_i^{\text{opt}'}(t+1) + G_iG_i') \\ &= S_i(t+2), \end{aligned}$$

e isto completa a prova por indução. (b) Se $v_i = 0$ por definição segue $0 = S_i(t) = S_i(t+1)$. Finalmente dos itens (a) e (b) concluímos $S(t) \leq S(t+1)$ para qualquer $t \in \mathbb{T}$. $\square$

Lembrando que $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ uma sequência de ganhos do filtro, a seguir estudaremos propriedades das variáveis $S_{\mathbf{K}}(t)$ em subespaços vetoriais definidos por

$$\left\{ X \in \mathcal{C}^{n0} : \langle S_{\mathbf{K}}(t), X \rangle = 0 \right\} \in \mathcal{C}^{n0}.$$

Podemos interpretar estes subespaços como as direções X que levam a ter covariância do erro de estimação com ganhos $\mathbf{K}$ é nula no instante t . Estes subespaços podem ser propagados regressivamente, como descrevemos no seguinte resultado.

Teorema 3.2. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, o inteiro ℓ , $X \in \mathcal{C}^{n_0}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n_0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell), X \rangle = 0$, então

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell - t), \mathcal{U}^t(X) \rangle = 0, \text{ para cada } t = 1, 2, \dots, \ell. \quad (3.16)$$

Demonstração. Aplicando (3.13) para $t = \ell - 1$ temos

$$\langle A(\ell - 1)\mathcal{D}(S_{\mathbf{K}}(\ell - 1))A'(\ell - 1) + Q(\ell - 1), W \rangle = 0.$$

Expandindo $A(\ell - 1)$ e $Q(\ell - 1)$ definidos em (3.14), leva às seguintes relações

$$\langle (A + K(\ell - 1)L)\mathcal{D}(S_{\mathbf{K}}(\ell - 1))(A + K(\ell - 1)L)', X \rangle = 0, \quad (3.17)$$

$$\langle v(\ell)K(\ell - 1)HH'K'(\ell - 1), X \rangle = 0, \quad (3.18)$$

$$\langle v(\ell)GG', X \rangle = 0. \quad (3.19)$$

Seja o conjunto $\mathbb{M}_\ell = \{i \in \mathbb{I} : v_i(\ell) = 0\}$ e aplicando a definição do produto interno em (3.18),

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left(v_i(\ell) K_i(\ell - 1) H_i H_i' K_i'(\ell - 1) X_i \right) \\ &= \sum_{i \notin \mathbb{M}_\ell} \text{Tr} \left(v_i(\ell) K_i(\ell - 1) H_i H_i' K_i'(\ell - 1) X_i \right), \end{aligned}$$

leva à seguinte relação

$$K_i(\ell - 1) H_i H_i' K_i'(\ell - 1) X_i = 0, \text{ para cada } i \notin \mathbb{M}_\ell. \quad (3.20)$$

Assumindo a decomposição da variável $X \in \mathcal{C}^{n_0}$ da forma:

$$X = X^N + X^P,$$

sendo $X_i^N = 0$ quando $i \notin \mathbb{M}_\ell$, e $X_i^P = 0$ quando $i \in \mathbb{M}_\ell$. Aplicando esta decomposição em (3.20) obtemos

$$K_i'(\ell - 1) X_i^P = 0, \text{ para cada } i \notin \mathbb{M}_\ell, \quad (3.21)$$

e

$$K_i'(\ell - 1) X_i = K_i'(\ell - 1) X_i^N = 0, \text{ para cada } i \notin \mathbb{M}_\ell. \quad (3.22)$$

Como os ganhos são nulos quando a probabilidade é nula, então

$$K_i(\ell - 1)' X_i = 0, \text{ para cada } i \in \mathbb{M}_\ell. \quad (3.23)$$

Finalmente, ao combinar (3.21), (3.22), e (3.23), vale o seguinte

$$K_i(\ell - 1)'X_i = 0, \text{ para cada } i \in \mathbb{I}. \quad (3.24)$$

Aplicando a dualidade entre os operadores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ escrevemos (3.17) da forma:

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell - 1), \mathcal{U}_{A(\ell-1)}(X) \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Dado $j \in \mathbb{I}$ escrevemos a evolução de $\mathcal{U}_{A(\ell-1),j}(X)$ como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{A(\ell-1),j}(X) &= \sum_{i=1}^N p_{ji} A_i'(\ell - 1) X_i A_i(\ell - 1) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ji} (A_i + K_i(\ell - 1) L_i)' X_i (A_i + K_i(\ell - 1) L_i) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ji} (A_i' X_i A_i + A_i' X_i K_i(\ell - 1) L_i + L_i' K_i'(\ell - 1) X_i A_i + L_i' K_i'(\ell - 1) X_i K_i(\ell - 1) L_i), \end{aligned}$$

e usando (3.24) na equação descrita acima obtemos

$$\mathcal{U}_{A(\ell-1),j}(X) = \sum_{i=1}^N p_{ji} A_i' X_i A_i = \mathcal{U}_{A,j}(X) = \mathcal{U}_j(X).$$

Logo, substituindo $\mathcal{U}(X)$ por $\mathcal{U}_{A(\ell-1)}(X)$ em (3.25) temos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell - 1), \mathcal{U}(X) \rangle = 0,$$

e mostramos que a relação (3.16) é válida em $t = 1$. Procedemos por indução matemática e suponhamos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell - k), \mathcal{U}^k(X) \rangle = 0,$$

e aplicando o procedimento anterior temos

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\ell - k - 1), \mathcal{U}_{A(\ell-k-1)}(\mathcal{U}^k(X)) \rangle &= 0, \\ \langle v(\ell - k) K(\ell - k - 1) H H' K'(\ell - k - 1), \mathcal{U}^k(X) \rangle &= 0, \\ \langle v(\ell - k) G G', \mathcal{U}^k(X) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e

$$K_i'(\ell - k - 1) \mathcal{U}_i^k(X) = 0, \text{ para cada } i \in \mathbb{I}. \quad (3.27)$$

Usando (3.27) para calcular $\mathcal{U}_{A(\ell-k-1),j}(\mathcal{U}^k(X))$ temos

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N p_{ji} A_i'(\ell - k - 1) \mathcal{U}_i^k(X) A_i(\ell - k - 1) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ji} \left(A_i + K_i(\ell - k - 1) L_i \right)' \mathcal{U}_i^k(X) \left(A_i + K_i(\ell - k - 1) L_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ji} \left(A_i' \mathcal{U}_i^k(X) A_i + A_i' \mathcal{U}_i^k(X) K_i(\ell - k - 1) L_i + L_i' K_i'(\ell - k - 1) \mathcal{U}_i^k(X) A_i \right. \\ &\quad \left. + L_i' K_i'(\ell - k - 1) \mathcal{U}_i^k(X) K_i(\ell - k - 1) L_i \right). \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ji} A_i' \mathcal{U}_i^k(X) A_i = \mathcal{U}_{A,j}(\mathcal{U}^k(X)) = \mathcal{U}_j(\mathcal{U}^k(X)) = \mathcal{U}_j^{k+1}(X), \end{aligned}$$

e daqui concluímos $\mathcal{U}_{A(\ell-k-1),j}(\mathcal{W}^k(X)) = \mathcal{U}_j^{k+1}(X)$ e consequentemente

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell-k-1), \mathcal{U}_{A(\ell-k-1)}(\mathcal{W}^k(X)) \rangle = \langle S_{\mathbf{K}}(\ell-k-1), \mathcal{U}^{k+1}(X) \rangle = 0.$$

Então (3.16) é válido para $t = k+1$, e com isto completamos a prova do Lema. $\square$

As propriedades expressas em (3.24) e (3.27) serão úteis mais adiante, por isso formalizamos no seguinte corolário.

Corolário 3.1. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, o inteiro ℓ , $X \in \mathcal{C}^{n0}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell), X \rangle = 0$, então

$$K'(\ell-t)\mathcal{U}^{t-1}(X) = 0, \quad \forall t = 1, \dots, \ell.$$

Lema 3.4. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, $X \in \mathcal{C}^{n0}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell), X \rangle = 0$ então $\langle O(\ell), X \rangle = 0$

Demonstração. Da hipótese temos que

$$\langle v(\ell)GG', X \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle S_{\mathbf{K}}(\ell-1), \mathcal{U}(X) \rangle = 0.$$

Usando a condição $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell-1), \mathcal{U}(X) \rangle = 0$ como hipótese, obtemos

$$\langle v(\ell-1)GG', \mathcal{U}(X) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle S_{\mathbf{K}}(\ell-2), \mathcal{U}^2(X) \rangle = 0,$$

e continuando este procedimento, obtemos

$$\langle v(\ell-t)GG', \mathcal{U}^{\ell-t}(X) \rangle = 0, \quad \forall t = 0, 1, \dots, \ell,$$

e

$$\langle S_0, \mathcal{U}^\ell(X) \rangle = 0.$$

Aplicando a relação de dualidade entre os operadores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, nas equações descritas acima, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v(\ell)GG', X \rangle + \dots + \langle v(1)GG', \mathcal{U}^{\ell-1}(X) \rangle + \langle S_0, \mathcal{U}^\ell(X) \rangle \\ &= \langle v(\ell)GG', X \rangle + \dots + \langle \mathcal{V}^{\ell-1}(v(1)GG'), X \rangle + \langle \mathcal{V}^\ell(S_0), X \rangle \\ &= \langle O(\ell), X \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

A recíproca do Lema anterior é descrito a seguir.

Lema 3.5. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, o inteiro ℓ , $X \in \mathcal{C}^{n0}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se $\langle O(\ell), X \rangle > 0$ então $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell), X \rangle > 0$, para qualquer sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$.

Uma interpretação do Lema 3.5 descreve que se a covariância do erro de estimação produzido pelos ganhos nulos “na direção X ” é positiva então nenhuma sequência de ganhos $\mathbf{K}$ é capaz de anular covariância do erro nessa direção. Escrevendo $\bar{n} = n^2 N$, definimos os seguintes subespaços vetoriais

$$\begin{aligned}\sigma_K &= \{X \in \mathcal{C}^{n0} : \langle S_K(\bar{n}), X \rangle = 0\}, \\ \sigma_S &= \{X \in \mathcal{C}^{n0} : \langle S(\bar{n}), X \rangle = 0\}, \\ \sigma_O &= \{X \in \mathcal{C}^{n0} : \langle O(\bar{n}), X \rangle = 0\}.\end{aligned}$$

Com base nos resultados de invariância em subespaços W-alcançáveis, veja (COSTA; MANFRIM; do Val, 2006; GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2015), a seguir descrevemos um resultado que mostra a invariância do subespaço σ_O via o operador $\mathcal{V}$.

Lema 3.6. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se $X \in \sigma_O$ então $\langle O(t), X \rangle = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{T}$. Além disso, $\mathcal{U}^t(X) \in \sigma_O$, para qualquer $t \in \mathbb{T}$.

Demonstração. A prova deste resultado segue um processo de indução combinando o Lema 3.4 e o Teorema de Cayley-Hamilton para o operador $\mathcal{V}$. $\square$

Lema 3.7. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. É válido

$$\sigma_S = \sigma_O.$$

Demonstração. (i) Seja $X \in \sigma_S$ então usando o Lema 3.4 obtemos que $X \in \sigma_O$, ou seja $\sigma_S \subset \sigma_O$. (ii) Do Lema 3.2 é claro que $S(\bar{n}) \leq O(\bar{n})$. Então, para qualquer $X \in \sigma_O$ é válido

$$0 \leq \langle S(\bar{n}), X \rangle \leq \langle O(\bar{n}), X \rangle = 0, \text{ para qualquer } X \in \sigma_O,$$

e portanto $\langle S(\bar{n}), X \rangle = 0$ ou $X \in \sigma_S$, e isto leva a mostrar $\sigma_O \subset \sigma_S$. Finalmente, combinando as relações de desigualdade obtidas em (i) e (ii), concluímos $\sigma_S = \sigma_O$. $\square$

3.3 Noções de alcançabilidade e estabilizabilidade para o sistema (3.1)

Note que a covariância do erro de estimação com ganhos nulos, $O(t)$, corresponde à covariância do estado de SLSM uma vez que (3.1) e (3.3) pode-se verificar que

$$\mathbb{E}\{\tilde{z}(t)\tilde{z}'(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta(t-1)=i\}}\} = \mathbb{E}\{z(t)z'(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta(t-1)=i\}}\},$$

sempre que os ganhos do observador (3.2) são nulos. Com base nos Lemas 3.6 e 3.7 podemos avaliar as direções $X \in \mathcal{C}^{n0}$ onde a covariância do SLSM definido em (3.1) é zero. Nesta seção apresentamos as noções de alcançabilidade fraca (W-alcançabilidade), estabilizabilidade

estocástica (S-estabilizabilidade), e estabilizabilidade fraca (W-estabilizabilidade). Seguindo (NARVÁEZ; COSTA, 2016) apresentamos a seguir a noção de W-alcançabilidade para o SLSM definido em (3.1), segundo o qual a covariância do estado é positiva após $\bar{n} = n^2N$ estágios, conforme a literatura de SLSM, veja (GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2015; NARVAEZ; COSTA, 2011)

Definição 3.1. Dizemos que o SLSM definido em (3.1) é W-alcançável quando

$$\sigma_0 = \{0\},$$

para qualquer distribuição inicial v_0 .

Dado $Z, Y \in \mathcal{C}^{n0}$ e seguindo (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Seção 3.2) introduzimos o operador linear

$$\mathcal{T}_Z : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n,$$

e escrevemos $\mathcal{T}_Z(Y) = (\mathcal{T}_{Z,1}(Y), \dots, \mathcal{T}_{Z,N}(Y))$. As componentes de $\mathcal{T}_Z(Y)$ são

$$\mathcal{T}_{Z,i}(Y) = \sum_{j=1}^N p_{ji} Z_j' Y_j Z_j, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

Conforme a literatura de SLSM, veja (COSTA; do Val, 2002b) apresentamos o conceito de S-estabilizabilidade a seguir.

Definição 3.2. Dizemos que o SLSM definido em (3.1) é S-estabilizável quando existir uma coleção de matrizes $K = (K_1, \dots, K_N) \in \mathcal{C}^{m,n}$ que satisfaça

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{T}_{A+GK}^t(X) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n0}. \quad (3.28)$$

Definição 3.3. Dizemos que o SLSM definido em (3.1) é W-estabilizável quando

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_A^t(X) < \infty, \quad \forall X \in \sigma_0.$$

A noção de W-estabilizabilidade é uma noção mais fraca que as outras, como mostramos nos seguintes resultados.

Lema 3.8. Dado o SLSM definido em (3.1). W-alcançabilidade implica W-estabilizabilidade.

Demonstração. Se o sistema (3.1) é W-alcançável, então $\sigma_0 = \{0\}$, logo temos trivialmente que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_{A+GK}^t(X) = 0, \quad \forall X \in \sigma_0,$$

o qual demonstra que o sistema (3.1) é W-estabilizável. $\square$

Lema 3.9. A relação (3.28) é equivalente a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_{A+GK}^t(X) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n0}.$$

Demonstração. Este resultado é consequência da da (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Observação 3.5). $\square$

O Lema 3.9 nos permite comparar as relações de estabilizabilidade, como segue.

Figura 1 – Conjunto de todos os SLSM na forma (3.1), ilustrando a relações entre os subconjuntos contendo sistemas W-estabilizáveis, S-estabilizáveis e W-alcançáveis.

Lema 3.10. Dado o SLSM definido em (3.1). S-estabilizabilidade implica em W-estabilizabilidade.

Demonstração. Consequência do Lema 3.9 e que o sistema (3.1) é S-estabilizável, temos que existe $K = (K_1, \dots, K_N) \in \mathcal{C}^{m,n}$ tal que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_{A+GK}^t(X) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n0}.$$

Em particular, se $X \in \sigma_O$ aplicamos o Corolário 3.1 e obtemos que

$$G_i' X_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{I},$$

e aplicando esta relação no calculo de $\mathcal{U}_{A+GK}(X)$ obtemos

$$\mathcal{U}_{A+GK}(X) = \mathcal{U}_A(X), \quad \text{sempre que } X \in \sigma_O.$$

Portanto,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_A^t(X) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_{A+GK}^t(X) < \infty, \quad \forall X \in \sigma_O,$$

e mostramos que o sistema (3.1) é W-estabilizável. $\square$

As noções para o SLSM definido em (3.1) (W-alcançabilidade, S-estabilizabilidade e W-estabilizabilidade) estão relacionadas conforme ilustramos no diagrama da Figura 1.

3.4 Exemplos ilustrativos

Consideremos o seguintes exemplos.

Exemplo 3.1. Seja o SLSM definido em (3.1) com os parâmetros

$$A_1 = 0.5, A_2 = 2, G_1 = 1, G_2 = 0, H_1 = H_2 = 1, L_1 = L_2 = 1,$$

e matriz de probabilidades e distribuição inicial da cadeia de Markov dadas por:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.2. Seja o SLSM definido em (3.1) com os parâmetros

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } L_1 = L_2 = 1,$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.3. Seja o SLSM definido em (3.1) com os parâmetros

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } L_1 = L_2 = 1,$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.4. Seja o SLSM definido em (3.1) com os parâmetros

$$A_1 = A_2 = 2, G_1 = G_2 = 0, H_1 = H_2 = 1, L_1 = L_2 = 1,$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Teste de W-alcançabilidade

Com base na Definição 3.1 para cada caso temos os seguintes resultados:

- **Exemplo 3.1:** Dado $n = 1$, $N = 2$ e $\bar{n} = n^2 N = (1)^2(2) = 2$ temos que

$$O_1(\bar{n}) = 0.1025 \quad \text{e} \quad O_2(\bar{n}) = 0.36.$$

Então

$$\sigma_O = \{X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^{n_0} : X_i = 0, \forall i = 1, 2\},$$

isto mostra que o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ é W-alcançável.

- **Exemplo 3.2:** Dado $n = 3$, $N = 2$ e $\bar{n} = n^2 N = (3)^2(2) = 18$ temos que

$$O_1(\bar{n}) = 10^{10} \times \begin{bmatrix} 6.427 & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O_2(\bar{n}) = 10^{12} \times \begin{bmatrix} 4.113 & 0.001 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\sigma_O = \left\{ X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^{n_0} : X_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_i \\ 0 & b_i & c_i \\ a_i & c_i & d_i \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1, 2 \right\},$$

isto mostra que o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ não é W-alcançável.

- **Exemplo 3.3:** Dado $n = 3$, $N = 2$ e $\bar{n} = n^2 N = (3)^2(2) = 18$ temos que

$$O_1(\bar{n}) = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.94 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O_2(\bar{n}) = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.76 \end{bmatrix}$$

Então

$$\sigma_O = \left\{ X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^{n_0} : X_i = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & 0 \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1, 2 \right\},$$

isto mostra que o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ não é W-alcançável.

- **Exemplo 3.4:** Dado $n = 1$, $N = 2$ e $\bar{n} = n^2 N = (1)^2(2) = 2$ temos que

$$O_1(\bar{n}) = O_2(\bar{n}) = 0.$$

$$\sigma_O = \{X = (X_1, X_2) \in \mathcal{C}^{n_0} : X_i = a_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1, 2\},$$

isto mostra que o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ não é W-alcançável.

Logo, temos que somente o Exemplo 3.1 é W-alcançável.

Teste de S-estabilizabilidade

Testamos S-estabilizabilidade seguindo (COSTA; do Val, 2002b, Observação 4). Este teste consiste em verificar a convergência das equações em diferença de Riccati de controle (EDRA-C) para o SLSM na forma (A, G, I, I) , sendo I uma coleção de matrizes identidade. Calculamos estas EDRA-C como segue: iniciamos com

$$P_i(\ell) = I, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$ calculamos

$$P(t) = I + A' \mathcal{D}(P(t+1))A - A' \mathcal{E}(P(t+1))G(G' \mathcal{E}(P(t+1))G + I)^{-1} G' \mathcal{E}(P(t+1))A.$$

Ao aplicar este teste tivemos que somente o Exemplo 3.2 é S-estabilizável.

Teste de W-estabilizabilidade

Seja $\mathcal{P} : \mathcal{C}^{n_0} \rightarrow \mathcal{C}^{n_0}$,

$$\mathcal{P}(X) := (P_1' X_1 P_1, \dots, P_N' X_N P_N),$$

em que as matrizes $P_1, \dots, P_N$ são definidas de forma que

$$\mathcal{P}(X) = X, \quad \forall X \in \sigma_0, \text{ e } \mathcal{P}(X) = 0, \quad \forall X \perp \sigma_0,$$

ou seja, $\mathcal{P}$ é o operador projeção ortogonal sobre o subespaço σ_0 . Definimos o operador $\mathcal{U}_{\sigma_0} : \mathcal{C}^{n_0} \rightarrow \mathcal{C}^{n_0}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_{\sigma_0, i}(X) = \sum_{j=1}^N p_{ij} A_j' \mathcal{P}_j' X_j \mathcal{P}_j A_j,$$

que permite rescrever a condição para W-estabilizabilidade

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_A^t(\mathcal{P}(X)) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n_0},$$

na forma

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_{\sigma_0}^t(X) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_A^t(\mathcal{P}(X)) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n_0}.$$

Assim, W-estabilizabilidade é equivalente a dizer que o raio espectral de $\mathcal{U}_{\sigma_0}$ é menor que 1. Existe uma formulação matricial para $\mathcal{U}_{\sigma_0}$ conforme (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Equação 3.12c), que permite encontrar o raio espectral de $\mathcal{U}_{\sigma_0}$. Usando este teste calculamos o raio espectral em cada caso

- **Exemplo 3.1** Temos $\rho(\mathcal{U}_{\sigma_0}) = 4.437 \times 10^{-32}$.
- **Exemplo 3.2** Temos $\rho(\mathcal{U}_{\sigma_0}) = 0.625$.

- **Exemplo 3.3** Temos $\rho(\mathcal{U}_{\sigma_0}) = 0.625$.
- **Exemplo 3.4** Temos $\rho(\mathcal{U}_{\sigma_0}) = 4$.

Conforme os dados descritos acima, verificamos que o Exemplo 3.4 é o único que não é W-estabilizável.

Exemplo	W-alcançabilidade	S-estabilizabilidade	W-estabilizabilidade
3.1	sim	não	sim
3.2	não	sim	sim
3.3	não	não	sim
3.4	não	não	não

Tabela 5 – Resultados dos testes para cada exemplo.

Conclusão

Ressumimos os resultados de cada exemplo na Tabela 5. Com base nesta tabela mostramos que W-estabilizabilidade é uma noção mais fraca que as outras, e que as noções de W-alcançabilidade e S-estabilizabilidade são noções diferentes, e que verifica o diagrama da Figura 1. Também representamos na Figura 2 a classificação dos exemplos conforme suas características de serem S-estabilizáveis, W-estabilizáveis, W-alcancáveis, ou nenhum deles.

Figura 2 – Classificação dos exemplos conforme suas características de serem S-estabilizáveis, W-estabilizáveis, W-alcancáveis, ou nenhum deles.

ESTABILIDADE, EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Neste capítulo introduzimos os conceitos de sequências estabilizantes e fracamente estabilizantes (W-estabilizantes) de ganhos do filtro. Obtemos condições suficientes para mostrar a estabilidade do SLSM na forma $(A, L, \mathbb{P})$. Apresentamos condições que levem à estabilidade do filtro e de existência e unicidade das EARA-F.

4.1 Resultados preliminares

Considerando a sequência de ganhos

$$\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\},$$

onde $K(t) = (K_1(t), \dots, K_N(t)) \in \mathcal{C}^{n,m}$, para cada $t \in \mathbb{T}$ e dado $X \in \mathcal{C}^{n0}$ definimos as variáveis $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{C}^{n0}$, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\ell+1) &= X \\ \mathbf{X}(t) &= \mathcal{U}_{A+K(t)L}(\mathbf{X}(t+1)), \quad \forall t = 0, 1, \dots, \ell. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Expandindo a solução de $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1), X \rangle$ combinando (3.13) com a dualidade entre os operadores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1), X \rangle &= \langle S_0, \mathcal{U}_{A(0)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \langle Q(1), \mathcal{U}_{A(1)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \cdots + \langle Q(\ell), \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \langle Q(\ell+1), X \rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por exemplo, usando (4.1) em (4.2) escrevemos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1), X \rangle = \langle S_0, \mathbf{X}(0) \rangle + \sum_{t=1}^{\ell+1} \langle Q(t), \mathbf{X}(t) \rangle.$$

A partir daqui estudaremos a dinâmica das variáveis

$$\mathbf{X}(t) = \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X),$$

porque sua dinâmica tem propriedades interessantes como a invariância em σ_O para a evolução de $\mathbf{X}(t)$ quando os ganhos são ótimos, e que vai ser mostrada no Lema 4.3, enquanto a variável $S_{\mathbf{K}}(t)$ definida em (3.13) tem uma dinâmica mais complicada. A seguir introduzimos as noções de sequências estabilizantes e W-estabilizantes de ganhos do filtro.

Definição 4.1. Dizemos que a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ estabiliza o sistema (4.1) se e somente se existe $\xi \geq 0$ tal que para qualquer inteiro ℓ , satisfaz

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A+K(t)L} \mathcal{U}_{A+K(t+1)L} \cdots \mathcal{U}_{A+K(\ell)L}(X) < \xi \|X\|_{\mathcal{I}}, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n_0}. \quad (4.3)$$

Equivalentemente, podemos dizer que o sistema (4.1) é estabilizável.

Lembrando que $\sigma_O = \{X \in \mathcal{C}^{n_0} : \langle O(\bar{n}), X \rangle = 0\}$, sendo $\bar{n} = n^2 N$, a seguir apresentamos um conceito mais fraco, generalizando o da Definição 4.1.

Definição 4.2. Dizemos que a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ fracamente estabiliza (ou simplesmente, W-estabiliza) o sistema (4.1) se e somente se existe $\beta \geq 0$ tal que para qualquer inteiro ℓ , satisfaz

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A+K(t)L} \mathcal{U}_{A+K(t+1)L} \cdots \mathcal{U}_{A+K(\ell)L}(X) < \beta \|X\|_{\mathcal{I}}, \quad \forall X \in \sigma_O. \quad (4.4)$$

Equivalentemente, podemos dizer que o sistema (4.1) é W-estabilizável.

Observação 4.1. É relativamente simples mostrar, usando o fato de o sistema (4.1) ser de dimensão finita e linear, que (4.3) é equivalente a

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A+K(t)L} \mathcal{U}_{A+K(t+1)L} \cdots \mathcal{U}_{A+K(\ell)L}(X) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n_0}.$$

Similarmente, dizemos que o sistema (4.1) é W-estabilizável sempre que (4.4) é equivalente a

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A+K(t)L} \mathcal{U}_{A+K(t+1)L} \cdots \mathcal{U}_{A+K(\ell)L}(X) < \infty, \quad \forall X \in \sigma_O.$$

As condições acima estão numa forma mais comum, por exemplo veja a noção de S-estabilizabilidade em (COSTA; do Val, 2002b).

A seguir apresentamos duas condições suficientes que verificam quando uma sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ estabiliza o sistema (4.1). A primeira condição é dada pela noção de W-alcançabilidade e a outra é dada pela noção de W-estabilizabilidade.

4.1.1 W-alcançabilidade como condição de estabilizabilidade do sistema (4.1)

A seguir apresentamos o resultado que leva à estabilizabilidade do sistema (4.1) quando o SLSM definido em (3.1) é W-alcançável.

Teorema 4.1. Seja a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n_0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se existir $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n_0}$ tal que $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}$, $\forall t \in \mathbb{T}$ e o SLSM definido em (3.1) é W-alcançável, então $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1).

Demonstração. Escrevendo $S_{\mathbf{K}}(t, M, v) \in \mathcal{C}^{n_0}$ para representar a solução de (3.13) no instante de tempo t quando as condições iniciais são $S_0 = M$ e $v(0) = v$. Considerando $\ell = q\bar{n} + r$ com $r < \bar{n}$, então conforme o valor de q estudamos dois casos. (a) Se $q \geq 1$: Da relação (4.2) escrevemos:

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\mathbf{K}}(\ell + 1, S_0, v_0), X \rangle &= \langle S_0, \mathcal{U}_{A(0)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t), \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \langle Q(\bar{n}), \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + \bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \langle Q(2\bar{n}), \mathcal{U}_{A(2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + 2\bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &\vdots \\
 &+ \langle Q((q-1)\bar{n}), \mathcal{U}_{A((q-1)\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + (q-1)\bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+(q-1)\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \langle Q(q\bar{n}), \mathcal{U}_{A(q\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \cdots + \langle Q(\ell), \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \langle Q(\ell + 1), X \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Usando (4.2) escrevemos os dois primeiros termos da soma descrita em (4.5) da forma:

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, S_0, v_0), \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle &= \langle S_0, \mathcal{U}_{A(0)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t), \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para os outros obtemos uma relação similar é que descrevemos a seguir:

(i) Usando (4.2) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(\bar{n}), v(\bar{n})), \mathcal{U}_{A(2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle &= \langle Q(\bar{n}), \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + \bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle.
 \end{aligned}$$

(ii) Usando (4.2) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(2\bar{n}), v(2\bar{n})), \mathcal{U}_{A(3\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle &= \langle Q(2\bar{n}), \mathcal{U}_{A(2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\
 &+ \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + 2\bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle.
 \end{aligned}$$

Das observações descritas nos itens (i) e (ii) deduzimos uma equação em termos mais gerais. Então, para cada $k = 1, \dots, q-1$ escrevemos

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(k\bar{n}), v(k\bar{n})), \mathcal{U}_{A((k+1)\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle &= \langle Q(k\bar{n}), \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t+k\bar{n}), \mathcal{U}_{A(t+k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aplicando (4.6) e (4.7) em (4.5) obtemos uma equação mais compacta para

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle &= \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, S_0, v_0), \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(\bar{n}), v(\bar{n})), \mathcal{U}_{A(2\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(2\bar{n}), v(2\bar{n})), \mathcal{U}_{A(3\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \cdots + \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q((q-1)\bar{n}), v((q-1)\bar{n})), \mathcal{U}_{A(q\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &+ \langle Q(q\bar{n}), \mathcal{U}_{A(q\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle + \cdots + \langle Q(\ell+1), X \rangle. \end{aligned}$$

Como os elementos $\langle Q(\ell+1), X \rangle$ e $\langle Q(t), \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle$, $t = q\bar{n}, q\bar{n}+1, \dots, \ell$ são termos não negativos, obtemos a seguinte desigualdade

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(k\bar{n}), v(k\bar{n})), \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle. \quad (4.8)$$

Aplicando a hipótese $\bar{S} \geq S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0)$ em (4.8), leva a outra desigualdade

$$\langle \bar{S}, X \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(k\bar{n}), v(k\bar{n})), \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle. \quad (4.9)$$

Do Lema 3.1 temos que para qualquer $M \in \mathcal{C}^{n_0}$ segue $S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, M, v) \geq S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, 0, v)$, e aplicando o Lema 3.5 é possível encontrar um limitante por baixo para $S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, 0, v)$, na forma: existe $\lambda > 0$ tal que

$$S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, 0, v) \geq \lambda \mathcal{J}, \quad \forall v \in \mathcal{R},$$

sendo $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as distribuições iniciais. Da relação descrita acima, vem

$$S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(k\bar{n}), v(k\bar{n})) \geq \lambda \mathcal{J},$$

e combinando esta relação com (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Equação 2.1.b) em (4.9), obtemos

$$\langle \bar{S}, X \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(k\bar{n}), v(k\bar{n})), \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle \lambda \mathcal{J}, \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle \bar{S}, X \rangle \geq \tilde{\lambda} \sum_{k=1}^q \langle \mathcal{J}, \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \geq \lambda \delta \sum_{k=1}^q \|\mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|,$$

e isto leva

$$\sum_{k=1}^q \|\mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\| \leq \frac{\langle \bar{S}, X \rangle}{\lambda \delta} \leq \frac{\|\bar{S}\| \|X\|}{\lambda \delta}. \quad (4.10)$$

Como $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}$, para cada $t \in \mathbb{T}$, então os ganhos do filtro $\{K(0), K(1), \dots\}$ são limitados e conseqüentemente $\{\mathcal{U}_{A(0)}(X), \mathcal{U}_{A(1)}(X), \dots\}$ também são limitados. Portanto, existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{U}_{A(t)}(X) \leq \varepsilon \|X\|_{\mathcal{J}}, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (4.11)$$

Considerando $t \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ e $k \in \{1, \dots, q\}$. Aplicando sucessivamente (4.11), temos que

$$\mathcal{U}_{A(k\bar{n}-t)} \cdots \mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \varepsilon^t \|\mathcal{U}_{A(k\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|_{\mathcal{J}}. \quad (4.12)$$

Por simplicidade, denotemos $\nabla = 1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\bar{n}}$. Por exemplo, assumindo $k = 1$ e aplicando (4.12) segue a seguinte relação

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= \sum_{t=0}^{\bar{n}} \mathcal{U}_{A(\bar{n}-t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \\ &\leq (\varepsilon^{\bar{n}} + \varepsilon^{\bar{n}-1} + \dots + 1) \|\mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|_{\mathcal{J}} \\ &= \nabla \|\mathcal{U}_{A(\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|_{\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando o mesmo procedimento descrito em (4.13), em termos mais gerais é valido

$$\sum_{t=k\bar{n}+1}^{(k+1)\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \|\mathcal{U}_{A((k+1)\bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|_{\mathcal{J}}, \quad \forall k = 1, \dots, q-1. \quad (4.14)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= \sum_{t=0}^{\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) + \sum_{t=\bar{n}+1}^{2\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \\ &\quad + \sum_{t=2\bar{n}+1}^{3\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) + \dots + \sum_{t=(q-1)\bar{n}+1}^{q\bar{n}} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \\ &\quad + \sum_{t=q\bar{n}+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \end{aligned}$$

Aplicando (4.13) e (4.14) na relação descrita acima, leva a

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \sum_{k=1}^q \|\mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)\|_{\mathcal{J}} + \sum_{t=t_{\ell}+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \quad (4.15)$$

É fácil mostrar que $\sum_{t=q\bar{n}+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \|X\|_{\mathcal{J}}$ e combinando esta desigualdade com (4.10), escrevemos (4.15) como segue

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \left(\frac{\|\bar{S}\|}{\lambda \delta} + 1 \right) \|X\|_{\mathcal{J}}. \quad (4.16)$$

(b) Se $q = 0$: Neste caso, $\ell < \bar{n}$ e portanto é claro que

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \|X\| \mathcal{J}. \quad (4.17)$$

Dos casos descritos nos itens (a) e (b) temos as relações (4.16) e (4.17) respectivamente e definindo ξ na forma

$$\xi = \max \left\{ \nabla \left(\frac{\|\bar{S}\|}{\tilde{\lambda} \delta} + 1 \right), \nabla \right\} = \nabla \left(\frac{\|\bar{S}\|}{\tilde{\lambda} \delta} + 1 \right),$$

mostramos que $\mathbf{K}$ satisfaz (4.3), e isto demonstra que o $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1). $\square$

Exemplo 4.1. Consideremos o sistema (4.1) com os parâmetros

$$A_1 = A_2 = 2, \quad G_1 = G_2 = 0, \quad H_1 = H_2 = 1, \quad L_1 = L_2 = 1,$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Seja a sequência de ganhos ótimos $\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$ computadas em (3.10). Dado que as EDRA-F podem ser escritas na forma $S(t) = S_{\mathbf{K}^{\text{opt}}}(t)$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0,$$

e portanto a sequência $S(t)$ é limitada, mas

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{U}_A^t(X) = \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n_0},$$

ou seja a sequência de ganhos do filtro ótima $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ não estabilizam o sistema (4.1).

O Exemplo 4.1 demonstra que a limitação de $S(t)$ não necessariamente leva a ter o sistema (4.1) estabilizável, isto se deve a que as matrizes de W-alcançabilidade não são definidas positivas. A seguir introduzimos uma condição mais geral que leve a verificar estabilizabilidade do sistema (4.1).

4.1.2 W-estabilizabilidade como condição de estabilizabilidade do sistema (4.1)

Similarmente ao Teorema 4.1, nesta seção apresentamos um resultado que indica que a combinação de W-estabilizabilidade com a limitação de $S_{\mathbf{K}}(t)$ leva a que a sequência de ganhos de filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ estabiliza o sistema (4.1). Para obter este resultado, foi necessário projetar a dinâmica dos termos $\mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)$ sobre os subespaços σ_O e $\sigma_O^\perp$. Como foi mostrado no Teorema 4.1, a serie

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)$$

tem um papel importante na estabilizabilidade do sistema (4.1), com a diferença que expressamos ela de maneira regressiva, diferentemente de (4.5). Dado $X \in \mathcal{C}^{n_0}$ escrevemos

$$\text{Proj}_{\sigma_0}(X) \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(X),$$

para representar a projeção de X sobre σ_0 e $\sigma_0^\perp$ respectivamente. Antes de apresentar o resultado que indica W-estabilizabilidade é uma condição para ter estabilizabilidade do sistema (4.1), precisamos de um resultado preliminar.

Lema 4.1. Dado $0 < \alpha < 1$, a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n_0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se existir $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n_0}$ tal que $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}, \forall t \in \mathbb{T}$, então existe um instante de tempo n_α tal que para qualquer ℓ , satisfaz

$$\|\text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X))\| \leq \alpha \|X\|, \quad \forall t = n_\alpha, n_\alpha + 1, \dots, \ell. \quad (4.18)$$

Demonstração. Primeiro, sem perda de generalidade assumimos $X \in \mathcal{X}$. Procedamos por contradição, e consideremos que (4.18) não é válida. Então, afirmarmos que existe uma quantidade infinita de instantes de tempo $\{t_1, t_2, \dots\}$ tais que

$$\|\text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X))\| > \alpha, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

Dado o horizonte de tempo ℓ consideremos dois casos. (a) Se $\ell \geq t_1$: Escolhemos uma sub-sequência ordenada e crescente de $\{t_1, t_2, \dots\}$, que denotamos por $\{s_1, s_2, \dots, s_q\}$, e que verifique $s_1 \geq \max\{\bar{n}, n_\alpha\}$, $s_q \leq \ell + 1$ e $s_{k+1} - s_k \geq \bar{n}, \forall k = 1, \dots, q - 1$. Da mesma maneira como foi demonstrado o Teorema 4.1, devemos limitar inferiormente o valor de

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell + 1, S_0, v_0), X \rangle.$$

Aplicando uma expansão de termos similar à descrita em (4.2) e descartando alguns termos (não negativos) como em (4.8), temos que

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\ell + 1, S_0, v_0), X \rangle &\geq \langle Q(s_1 - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(s_1 - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + s_1 - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(t + s_1 - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \langle Q(s_q - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(s_q - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + s_q - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(t + s_q - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para cada $k = 1, 2, \dots, q$, usando (4.2) temos

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle &= \langle Q(s_k - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(s_k - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\bar{n}-1} \langle Q(t + s_k - \bar{n}), \mathcal{U}_{A(t + s_k - \bar{n})} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle, \end{aligned}$$

e substituindo esta relação em (4.20) leva a ter

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \rangle. \quad (4.21)$$

Como

$$\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) = \text{Proj}_{\sigma_0}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) + \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)),$$

então aplicando esta decomposição em (4.21) com o fato de somar termos não negativos, obtemos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle \geq \sum_{k=1}^q \langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \rangle. \quad (4.22)$$

Como é claro que $\text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \in \sigma_0^\perp$, então

$$\langle O(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \rangle > 0,$$

e aplicando o Lema 3.5 temos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \rangle > 0.$$

Dado $k \in \{1, \dots, q\}$ existe uma constante positiva $\psi > 0$ tal que

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \rangle > \psi \|\text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X))\|,$$

e usando (4.19) mostramos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\bar{n}, Q(s_k - \bar{n}), v(s_k - \bar{n})), \text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(s_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)) \rangle > \psi \alpha, \quad \forall k = 1, \dots, q. \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22), obtemos

$$\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle \geq q\psi\alpha. \quad (4.24)$$

De (4.24) temos que: se $\ell \rightarrow \infty$, então $q \rightarrow \infty$, e também $\langle S_{\mathbf{K}}(\ell+1, S_0, v_0), X \rangle \rightarrow \infty$, e isto contradiz que $S_{\mathbf{K}}(t)$ seja limitado, portanto (4.18) é verdadeiro. (b) Se $\ell < t_1$: É trivial que (4.19) não seja valida, e portanto vale (4.18). Finalmente, das condições (a) e (b) concluímos a demonstração deste lema. $\square$

O Lema 4.1 ilustra que a partir de certo instante de tempo (dado por n_α), a projeção dos termos $\mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)$ sobre $\sigma_0^\perp$ permaneçam na bola de raio $\alpha\|X\|$. Adiante apresentamos o principal resultado deste seção.

Teorema 4.2. Dado $0 < \alpha < 1$, a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, e as condições iniciais $S_0 \in \mathcal{C}^{n_0}$ e $v_0 \in \mathcal{C}^1$. Se existir $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n_0}$ tal que $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}$, $\forall t \in \mathbb{T}$ e $\mathbf{K}$ W-estabiliza o sistema (4.1), então $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1).

Demonstração. De maneira similar ao Teorema 4.1, escrevemos $\ell = qn_\alpha + r$, com $r < n_\alpha$, e comparamos segundo o valor que assume q . (a) Se $q \geq 1$: Escolhemos uma sequência de instantes de tempo, $\{t_1, \dots, t_q\}$ definidas da seguinte maneira:

$$t_k = \ell - (q + 1 - k)n_\alpha + 1, \quad \forall k = 1, \dots, q,$$

que leve a escrever

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X),$$

em somas parciais e obter um limitante superior para ele. Diferentemente do Teorema 4.1 é que as somas parciais são determinadas de maneira reversa na escala de tempo. Iniciamos de $t = \ell$ até $t = t_q$, logo de $t = t_q$ até $t = t_{q-1}$ e assim sucessivamente de $t = t_1$ até $t = 0$. Outra diferença é que nesses instantes de tempo a variável, projetamos sobre os subespaços vetoriais $\sigma_O^\perp$ e σ_O os termos

$$\mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X), \quad \forall k = 1, \dots, q.$$

Denotamos Y^k e Z^k para representar a projeção destes termos sobre $\sigma_O^\perp$ e σ_O respectivamente. A sequência $\{Y^1, \dots, Y^{q+1}\}$, onde $Y^k \in \sigma_O^\perp$ é definida como segue:

$$\begin{aligned} Y^{q+1} &= \text{Proj}_{\sigma_O^\perp}(X) \\ Y^q &= \text{Proj}_{\sigma_O^\perp}(\mathcal{U}_{A(t_q)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1})) \\ Y^k &= \text{Proj}_{\sigma_O^\perp}(\mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{k+1}-1)}(Y^{k+1})), \quad \forall k = 1, \dots, q-1, \end{aligned}$$

e similarmente para a sequência $\{Z^1, \dots, Z^{q+1}\}$, onde $Z^k \in \sigma_O$ escrevemos:

$$\begin{aligned} Z^{q+1} &= \text{Proj}_{\sigma_O}(X) \\ Z^q &= \text{Proj}_{\sigma_O}(\mathcal{U}_{A(t_q)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1})) \\ Z^k &= \text{Proj}_{\sigma_O}(\mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{k+1}-1)}(Z^{k+1})), \quad \forall k = 1, \dots, q-1. \end{aligned}$$

A seguir ilustramos a evolução de $\sum_{t=t_k}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X)$ em função de Y^k e Z^k , $k \in \{1, \dots, q\}$, de maneira que caracterize uma formulação mais geral

(i) Se $k = q$, obtemos

$$\sum_{t=t_q}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) = Y^q + Z^q + \sum_{t=t_q+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) + \sum_{t=t_q}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}).$$

(ii) Se $k = q - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_{q-1}}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= Y^{q-1} + Z^{q-1} + \sum_{t=t_{q-1}+1}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Y^q) + Y^q + Z^q \\ &+ \sum_{t=t_q+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) + \sum_{t=t_{q-1}}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Z^q) + \sum_{t=t_{q-1}}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}). \end{aligned}$$

(iii) Se $k = q - 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_{q-2}}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= Y^{q-2} + Z^{q-2} + \sum_{t=t_{q-2}+1}^{t_{q-1}-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{q-1}-1)}(Y^q) + Y^{q-1} + Z^{q-1} \\ &+ \sum_{t=t_{q-1}+1}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Y^q) + Y^q + Z^q + \sum_{t=t_q+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) \\ &+ \sum_{t=t_{q-2}}^{t_{q-1}-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{q-1}-1)}(Z^{q-1}) + \sum_{t=t_{q-2}}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Z^q) + \sum_{t=t_q-2}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}). \end{aligned}$$

Portanto, dos casos descritos em (i), (ii) e (iii), em termos gerais calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_1-1)}(Y^1) + Y^1 + Z^1 + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_2-1)}(Y^2) \\ &+ \cdots + Y^{q-1} + Z^{q-1} + \sum_{t=t_{q-1}+1}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Y^q) + Y^q + Z^q \\ &+ \sum_{t=t_q+1}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) + \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_1-1)}(Z^1) \\ &+ \cdots + \sum_{t=0}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Z^q) + \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Além disso, é claro que

$$Y^{(k)} + Z^{(k)} = \begin{cases} \mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{k+1}) & , \text{ se } k = q; \\ \mathcal{U}_{A(t_k)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{k+1}-1)}(Y^{k+1}) & , \text{ caso contrario,} \end{cases}$$

e substituindo esta relação em (4.25), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) &= \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_1-1)}(Y^1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_2-1)}(Y^2) \\ &+ \cdots + \sum_{t=t_{q-1}}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Y^q) + \sum_{t=t_q}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) \\ &+ \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_1-1)}(Z^1) + \sum_{t=0}^{t_2-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_2-1)}(Z^2) \\ &+ \cdots + \sum_{t=0}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Z^q) + \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da hipótese $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}$ usamos (4.11) e obtemos $\mathcal{U}_{A(s-t)} \cdots \mathcal{U}_{A(s)}(Y) \leq \varepsilon^{s+1-t} \|Y\|_{\mathcal{J}}$ para cada $t \leq s$. Similarmente ao Teorema 4.1, denotando $\nabla = \varepsilon^{n\alpha} + \varepsilon^{n\alpha-1} + \cdots + \varepsilon$, obtemos

$$\sum_{t=t_q}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}) \leq \nabla \|Y^{q+1}\|_{\mathcal{J}} \leq \nabla \|X\|_{\mathcal{J}}, \quad (4.27)$$

e aplicando o Lema 4.1, para $X = Y^{q+1}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_{q-1}}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{q-1})}(Y^q) &\leq \nabla \|Y^q\|_{\mathcal{J}} = \nabla \|\text{Proj}_{\sigma_0^\perp}(\mathcal{U}_{A(t_q)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1}))\|_{\mathcal{J}} \\ &\leq \nabla \alpha \|Y^{q+1}\|_{\mathcal{J}} \leq \nabla \alpha \|X\|_{\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Em termos gerais, aplicando o Lema 4.1 sucessivamente para $X = Y^k, Y^{k+1}, \dots, Y^{q+1}$, obtemos

$$\sum_{t=t_k}^{t_{k+1}-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_{k+1}-1)}(Y^{k+1}) \leq \nabla \alpha^{q-k} \|X\|_{\mathcal{J}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, q-2\}, \quad (4.29)$$

e da mesma maneira que (4.29), como $t_1 < n_\alpha$ temos que

$$\sum_{t=0}^{t_1-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_1-1)}(Y^1) \leq (\varepsilon^{t_1} + \varepsilon^{t_1-1} + \dots + \varepsilon) \alpha^q \|X\|_{\mathcal{J}} \leq \nabla \alpha^q \|X\|_{\mathcal{J}}. \quad (4.30)$$

Da hipótese de W-estabilizabilidade, aplicamos (4.4) e obtemos as seguintes desigualdades

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Z^{q+1}) \leq \beta \|Z^{q+1}\|_{\mathcal{J}} \leq \beta \|X\|_{\mathcal{J}}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{t_q-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_q-1)}(Z^q) &\leq \beta \|Z^q\|_{\mathcal{J}} \leq \beta \|\mathcal{U}_{A(t_q)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(Y^{q+1})\|_{\mathcal{J}} \\ &\leq \beta \varepsilon^{n_\alpha} \|Y^{q+1}\|_{\mathcal{J}} \leq \beta \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \nabla + 1 \right) \|X\|_{\mathcal{J}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e aplicando o Lema 4.1 sucessivamente, em termos mais gerais calculamos

$$\sum_{t=0}^{t_k-1} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(t_k-1)}(Z^k) \leq \beta \alpha^{q-k} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \nabla + 1 \right) \|X\|_{\mathcal{J}}, \quad \forall k = 1, \dots, q-1. \quad (4.33)$$

Combinando as relações (4.27), (4.28), (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) e (4.33), e substituindo em (4.26) concluímos

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \left(\nabla \frac{1-\alpha^{q+1}}{1-\alpha} + \beta \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \nabla + 1 \right) \frac{1-\alpha^q}{1-\alpha} \right) \|X\|_{\mathcal{J}}.$$

(b) Se $q = 0$: A condição é trivial é vale o seguinte

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) \leq \nabla \|X\|_{\mathcal{J}}.$$

Das condições (a) e (b) concluímos que existe $\xi > 0$ tal que para qualquer ℓ é valido (4.3), sendo

$$\xi = \max \left\{ \nabla \frac{1-\alpha^{q+1}}{1-\alpha} + \beta \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \nabla + 1 \right) \frac{1-\alpha^q}{1-\alpha}, \nabla \right\},$$

e daqui concluímos que $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1). $\square$

4.2 Estabilidade para observadores com ganhos dados

Dado o sistema (3.1) e a estimativa descrita por observador do Luenberger (3.2). Definimos as matrizes de covariância do erro de estimação com ganhos do filtro

$$\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\},$$

da seguinte maneira

$$S_{\mathbf{K},i}(t) = \mathbb{E}\{\tilde{z}(t)\tilde{z}'(t) \cdot 1_{\{\eta(t-1)=i\}}\}, \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

Representamos a dinâmica do filtro para a sequência $\mathbf{K}$ em termos das coleções de matrizes $S_{\mathbf{K}}(t)$ definidas a seguir.

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{K}}(0) &= S_0, \\ S_{\mathbf{K}}(t+1) &= \mathcal{V}_{A+K(t)L}(S_{\mathbf{K}}(t)) + v(t+1)(K(t)HH'K'(t) + GG'), \quad \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Vamos agora tratar do problema de estabilidade do filtro, cujo erro de estimação tem covariância descrita em (4.34). Podemos, por exemplo, encarar (4.34) como um sistema dinâmico não linear com uma entrada exógena variante no tempo, mas limitada uniformemente, e empregar uma noção do tipo 'entrada limitada estado limitado', inspirando-nos na noção de BIBO-estabilidade. Mais formalmente, exigir que para qualquer condição inicial e termos forçantes de (4.34) tenhamos um limitante para $S_{\mathbf{K}}(t)$, como formalizamos a seguir. Vale mencionar que essa noção segue (SANGSUK-IAM; BULLOCK, 1990; NARVÁEZ; COSTA, 2016)."

Definição 4.3. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$ e a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ onde $K(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Seja o sistema

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\mathbf{K}}(0) &= \tilde{S}_0, \\ \tilde{S}_{\mathbf{K}}(t+1) &= \mathcal{V}_{A+K(t)L}(\tilde{S}_{\mathbf{K}}(t)) + v(t+1)(K(t)\tilde{H}\tilde{H}'K'(t) + \tilde{G}\tilde{G}'), \quad \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Dizemos que a sequência $\mathbf{K}$ estabiliza o filtro (4.34) quando existe $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $\tilde{S}_{\mathbf{K}}(t) < \bar{S}$, para qualquer $\tilde{Q}(t+1) \leq \tilde{Q}$, $t \in \mathbb{T}$, dizemos que $\mathbf{K}$ estabiliza o filtro.

Suponhamos que existe perturbamos as condições iniciais e os parâmetros de ruído em (4.34) de maneira que leve a um novo sistema, e que denominamos "real". Sejam as condições iniciais $\tilde{S}_{\mathbf{K}}(0) = S_0$ e $v(0) = v_0$ e

$$\tilde{S}_{\mathbf{K}}(t+1) = \mathcal{V}_{A(t)}(\tilde{S}_{\mathbf{K}}(t)) + \tilde{Q}(t+1), \quad \forall t \in \mathbb{T} \tag{4.36}$$

sempre que exista $\tilde{Q} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $\tilde{Q}(t) \leq \tilde{Q}$, para todo $t = 1, 2, \dots$. Uma definição similar à *estabilidade entrada-saída*, onde a perturbação dos termos forçantes limitados devem levar a

trajetórias limitadas leva a definir a estabilidade do filtro definido em (3.2), para uma sequência de ganhos pre-determinada. O fato de mostrar que $\tilde{S}_{\mathbf{K}}(t) < \infty$ equivale a mostrar

$$\mathbb{E}\left\{\|\tilde{z}(t)\|^2\right\} = \sum_{i=1}^N \text{Tr}(S_{\mathbf{K},i}(t)) < \infty,$$

onde $\tilde{z}(t)$ é definida em (3.3). Isto indica que mesmo variando o ruído no sistema (3.1) as matrizes de covariância do erro na estimação não explodem. A interpretação da Definição 4.3 indica que, mesmo se houver perturbações nas condições iniciais e nos parâmetros de ruído no sistema “nominal”, definido em (4.34), leva a ter o sistema “real”, definido em (4.36), limitado para qualquer instante de tempo. Menos formalmente, descrevemos que estas perturbações não levam a estimativas cujo erro pudesse “explodir”. Similares resultados já foram exploradas por parte de nosso grupo, como por exemplo para o filtro de Kalman, veja (COSTA; ASTOLFI, 2009), e para o estimador ELQMM, veja (NARVÁEZ; COSTA, 2016).

Lema 4.2. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$ e a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ onde $K(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Se existir $\tilde{Q} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $\tilde{Q}(t) \leq \tilde{Q}$, $\forall t = 1, \dots$, então

$$\mathbf{K} \text{ estabiliza o sistema (4.1)} \Leftrightarrow \mathbf{K} \text{ estabiliza o filtro (4.34)}.$$

Demonstração. Se $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1), então pela Definição 4.1 temos que para qualquer ℓ segue

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X) < \infty, \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n0}.$$

Dado $Y \in \mathcal{C}^{n0}$ escolhido arbitrariamente, e aplicando a dualidade entre o operador $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, segue

$$\left\langle \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A(t)} \cdots \mathcal{U}_{A(\ell)}(X), Y \right\rangle = \left\langle X, \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{V}_{A(\ell)} \cdots \mathcal{V}_{A(t)}(Y) \right\rangle < \infty.$$

Tomando $X = (I, \dots, I)$, sendo I uma matriz identidade de dimensão n , então a equação descrita acima segue

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{V}_{A(\ell)} \cdots \mathcal{V}_{A(0)}(Y) < \infty, \quad \forall Y \in \mathcal{C}^{n0}. \quad (4.37)$$

Dado $t = \ell + 1$ em (4.36) temos que

$$\tilde{S}_{\mathbf{K}}(\ell + 1) = \mathcal{V}_{A(\ell)} \cdots \mathcal{V}_{A(0)}(\tilde{S}_0) + \mathcal{V}_{A(\ell)} \cdots \mathcal{V}_{A(1)}(\tilde{Q}(1)) + \cdots + \mathcal{V}_{A(\ell)}(\tilde{Q}(\ell)) + \tilde{Q}(\ell + 1)$$

Como $\tilde{Q}(t) \leq \tilde{Q}$ para cada $t = 1, \dots, \ell, \ell + 1$ e definindo $Y = \max\{\tilde{S}_0, \tilde{Q}\}$ segue na relação acima a seguinte desigualdade

$$\tilde{S}_{\mathbf{K}}(\ell + 1) \leq \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{V}_{A(\ell)} \cdots \mathcal{V}_{A(t)}(Y) + Y,$$

e aplicando (4.37) segue que $\tilde{S}_{\mathbf{K}}(\ell + 1) < \infty$, e isto demonstra que $\mathbf{K}$ estabiliza o filtro (4.34). $\square$

Corolário 4.1. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$ e a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, onde $K(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Se existir $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}$, $\forall t \in \mathbb{T}$ e $\mathbf{K}$ W-estabiliza o sistema (4.1) então $\mathbf{K}$ estabiliza o filtro (4.34).

Demonstração. Usando o Teorema 4.2 temos que a sequência de ganhos do filtro $\mathbf{K}$ estabiliza o sistema (4.1) e isto leva a ter os ganhos do filtro $K(t)$ são limitados, ou seja existe $\kappa \geq 0$ tal que $\|K(t)\| \leq \kappa$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Então, ao substituir os parâmetros do ruído (G por $\tilde{G}$ e H por $\tilde{H}$) garantimos que existe $\tilde{Q} = \tilde{H}\tilde{H}' + \kappa^2\tilde{G}\tilde{G}'$ que satisfaz $Q(t) \leq \tilde{Q}$ para cada $t = 1, \dots$. Aplicando o Lema 4.2 obtemos que $\mathbf{K}$ estabiliza o filtro (4.34). $\square$

4.3 Estabilidade das equações de Riccati

Lembrando que $\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$ representa a sequência de ganhos ótimos e por simplicidade de notação $S(t) = S_{\mathbf{K}^{\text{opt}}}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Nesta seção apresentamos o estudo que leva a ter a estabilidade das equações de Riccati, $S(t)$ mas antes isso descrevemos um resultado preliminar com base em resultados da Seção 3.2.

Lema 4.3. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$ e a sequência de ganhos do filtro ótimo $\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$, onde $K^{\text{opt}}(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. É válido

$$\text{O sistema (3.1) é W-estabilizável} \iff \mathbf{K}^{\text{opt}} \text{ W-estabiliza o sistema (4.1).}$$

Demonstração. Como $X \in \sigma_O$, então pelo Lema 3.6 temos que $\langle O(t), X \rangle = 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$, e aplicando o Lema 3.2 (isto é, $S(t) \leq O(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}$) leva a demonstrar $\langle S(t), X \rangle = 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Usando $\langle S(\ell+1), X \rangle = 0$ como hipótese do Lema 3.2, segue $K_j^{\text{opt}}(\ell)'X_j = 0$, $\forall j \in \mathbb{I}$. Denotando, $A^{\text{opt}}(t) = A + K^{\text{opt}}(t)L$, para cada $t \in \mathbb{T}$ e aplicando $K_j^{\text{opt}}(\ell)'X_j = 0$ temos que

$$\mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(X) = \mathcal{U}(X) \in \sigma_O.$$

Usando $\langle S(\ell), \mathcal{U}(X) \rangle = 0$ como hipótese do Lema 3.2, leva a mostrar $K_j^{\text{opt}}(\ell-1)'\mathcal{U}_j(X) = 0$ e daqui temos que $\mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell-1)}\mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(X) = \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell-1)}\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}^2(X) \in \sigma_O$. Continuando o mesmo procedimento, obtemos $\mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(t)} \cdots \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(X) = \mathcal{U}^{\ell+1-t}(X) \in \sigma_O$. Portanto,

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(t)} \cdots \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(X) = \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}^{t+1}(X), \quad \forall X \in \sigma_O \quad (4.38)$$

De (4.38) segue que o sistema (3.1) é W-estabilizável, sempre que a sequência de ganhos ótimos $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ W-estabiliza o sistema (4.1). A recíproca também é clara de (4.38). $\square$

Teorema 4.3. Seja o sistema (3.1) e o observador (3.2) com os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,p}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$, $H \in \mathcal{C}^{m,p}$ e a sequência de ganhos do filtro ótimo $\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$,

onde $K^{\text{opt}}(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Se existir $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $S(t) \leq \bar{S}, \forall t \in \mathbb{T}$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) O sistema (3.1) é W-estabilizável.
- (b) A sequência $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ estabiliza o filtro (4.34).

Demonstração. i) $(a) \Rightarrow (b)$: Aplicando o Lema 4.3 temos que $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ W-estabiliza o sistema (4.1) e do Corolário 4.1 segue que a sequência $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ estabiliza o filtro (4.34).

ii) $(b) \Rightarrow (a)$: Procedamos por contradição e suponhamos que o sistema (3.1) não é W-estabilizável, isto implica que existe $\tilde{X} \in \sigma_0$ tal que

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{W}^{t+1}(\tilde{X}) = \infty. \quad (4.39)$$

Da Definição 4.2 segue que

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(t)} \cdots \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(X) < \infty \quad \forall X \in \mathcal{C}^{n0}.$$

Em particular, para $\tilde{X}$ temos de (4.38) e a relação descrita acima o seguinte

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(t)} \cdots \mathcal{U}_{A^{\text{opt}}(\ell)}(\tilde{X}) = \sum_{t=0}^{\ell} \mathcal{W}^{t+1}(\tilde{X}) < \infty,$$

e isto contradiz (4.39). Portanto, o sistema (3.1) é W-estabilizável. $\square$

4.4 Existência e unicidade

Com base no sistema (4.34) e considerando a sequência de ganhos ótimos que leva a definir as equações em diferença de Riccati $S(t) \in \mathcal{C}^{n0}$. Definimos o seguinte problema de ponto fixo, como segue.

$$\begin{aligned} S(t) = & \ v(t)GG' + A\mathcal{D}(S(t-1))A' - A\mathcal{D}(S(t-1))L' \\ & \cdot (L\mathcal{D}(S(t-1))L' + v(t)HH')^{-1}L\mathcal{D}(S(t-1))A', \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Lembrando que v representa a distribuição limite de $v(t)$; escrevemos simplesmente por S para representar uma solução de (4.40), e que verifica

$$S = vGG' + A\mathcal{D}(S)A' - A\mathcal{D}(S)L'(L\mathcal{D}(S)L' + vHH')^{-1}L\mathcal{D}(S)A'. \quad (4.41)$$

Alem disso, (4.41) pode ser escrita da forma mais compacta, como segue

$$S = \mathcal{V}_{A+K(\infty)L}(S) + v(K(\infty)HH'K'(\infty) + GG'), \quad (4.42)$$

sendo o ganho associado, $K(\infty) = (K_1(\infty), \dots, K_1(\infty)) \in \mathcal{C}^{n,m}$ e cujas componentes são

$$K_i(\infty) = -A_i \mathcal{D}_i(S) L_i' (L_i \mathcal{D}_i(S) L_i' + v_i H_i H_i')^{-1}, \quad i \in \mathbb{I}. \quad (4.43)$$

A sequência de ganhos $\mathbf{K}^\infty = \{K(\infty), K(\infty), \dots\}$ significa que para qualquer instante de tempo, o ganho escolhido é o ganho limite definido em (4.43). Adicionalmente, a noção de Detetabilidade para o sistema (4.1) é introduzida a continuação.

Definição 4.4. O sistema (4.1) é detetável (ou o SLSM na forma $(A, L, \mathbb{P})$ é *detetável*) se existir uma sequência de ganhos $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ que *estabiliza* o sistema (4.1) (ou *estabiliza* o SLSM $(A, L, \mathbb{P})$).

Inspirado no (COSTA; ASTOLFI, 2009, Teorema 1), usamos a Definição 4.4 como condição para garantir a existência da solução do problema (4.40), e que apresentamos a seguir.

Teorema 4.4. Se o sistema $(A, L, \mathbb{P})$ for detetável, então existe uma solução de ponto fixo para (4.40).

Demonstração. Usando a Definição 4.4 existe uma sequência de ganhos $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$ que *estabiliza* o sistema $(A, L, \mathbb{P})$. Aplicando o Lema 4.2 temos que a $\mathbf{K}$ também estabiliza o filtro (4.34) e portanto as equações em diferença $S_{\mathbf{K}}(t)$ associadas não explodem. Então, existe $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que

$$S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T},$$

e aplicando o Lema 3.2, a equação em diferença de Riccati $S(t)$ é um limitante inferior para $S_{\mathbf{K}}(t)$, e temos

$$S(t) \leq S_{\mathbf{K}}(t) \leq \bar{S}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}.$$

Considerando uma equação em diferença de Riccati com condição inicial $S_0 = 0$, e que denotamos por $\tilde{S}(t) = S(t, S_0 = 0)$. Além disso, do Lema 3.1 temos que $\tilde{S}(t) \leq S(t)$, para cada $t \in \mathbb{T}$. Então,

$$\tilde{S}(t) \leq \bar{S}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (4.44)$$

Usando o Lema 3.3 temos que $\tilde{S}(t) \leq \tilde{S}(t+1)$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Escrevendo e_i , para representar ao i -ésimo elemento da base canônica do espaço $\mathfrak{R}^n$. Escolhendo arbitrariamente $k \in \mathbb{I}$ e $X \in \mathcal{C}^{n0}$ sendo suas componentes $X_r = 0, \forall r \neq k$, caso contrário $X_k = e_i e_j'$, com $i, j \in \mathbb{I}$ são dados. Como $X \geq 0$, então a monotonicidade em termo do produto interno é preservada, e segue

$$0 \leq \langle \tilde{S}(1), X \rangle \leq \langle \tilde{S}(2), X \rangle \leq \dots \leq \langle \tilde{S}, X \rangle. \quad (4.45)$$

Adicionalmente, considerando $Q = (Q_1, \dots, Q_r) \in \mathcal{C}^{n0}$, onde $Q_r = [q_{ij}^r]$, para cada $r \in \mathbb{I}$. Usando a definição do produto interno, temos que

$$\langle Q, X \rangle = \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Q_i' X_i) = \text{Tr}(Q_k' X_k) = q_{ij}^k, \quad i, j \in \mathbb{I}. \quad (4.46)$$

Denotando $\tilde{s}_{ij}^k(t)$ (respectivamente, $\tilde{s}_{ij}$) para representar ao elemento i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $\tilde{S}_k(t)$ (respectivamente, $\tilde{S}$). Aplicando a relação (4.46) para as coleções $\tilde{S}(1), \tilde{S}(2), \dots$ descritas em (4.45) obtemos uma relação de monotonicidade em termos das sequências $\tilde{s}_{ij}^k(1), \tilde{s}_{ij}^k(2), \dots$ como segue

$$0 \leq \tilde{s}_{ij}^k(1) \leq \tilde{s}_{ij}^k(2) \leq \dots \leq \tilde{s}_{ij}.$$

Isto mostra que $\{\tilde{s}_{ij}^k(1), \tilde{s}_{ij}^k(2), \dots\}$ é uma sequência de escalares monótona e limitada, e portanto convergente para $\tilde{s}_{ij}$. Como os índices i, j, k foram escolhidos arbitrariamente, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{S}(t) = \tilde{S},$$

sendo $\tilde{S}$ uma solução de ponto fixo para (4.40). $\square$

Lema 4.4. Suponhamos que existe uma solução de ponto fixo para (4.40). Se o sistema (3.1) $(A, G, \mathbb{P})$ é W-estabilizável então a sequência $\mathbf{K}^\infty = \{K(\infty), K(\infty), \dots\}$ estabiliza o filtro (4.34).

Demonstração. Considerando S como uma solução do ponto fixo de (4.40), então existe um instante de tempo r tal que

$$S = S_{\mathbf{K}^\infty}(t + r) = S_{\mathbf{K}^\infty}(r), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}, \quad (4.47)$$

Denotando $\bar{S} = \max\{S, S_{\mathbf{K}^\infty}(0), S_{\mathbf{K}^\infty}(1), \dots, S_{\mathbf{K}^\infty}(r-1)\}$ e usando o Lema 3.3, obtemos de (4.47) a seguinte relação

$$S(t) \leq S_{\mathbf{K}^\infty}(t) \leq \bar{S}, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (4.48)$$

Combinando (4.48) e a hipótese de w -estabilizabilidade obtemos que a sequência $\mathbf{K}^{\text{opt}}$ estabiliza o filtro (4.34). Perturbando a condição inicial $S(0) = S$ obtemos $K^{\text{opt}}(t) = K(\infty)$, $\forall t \in \mathbb{T}$ e consequentemente $\mathbf{K}^\infty = \{K(\infty), K(\infty), \dots\}$ estabiliza o filtro (4.34). $\square$

Corolário 4.2. Suponhamos que existe uma solução de ponto fixo para (4.40). Se o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ é W-estabilizável então $(A, L, \mathbb{P})$ é detetável.

Demonstração. Do Lema 4.4 temos que $\mathbf{K}^\infty = \{K(\infty), K(\infty), \dots\}$ estabiliza o filtro e aplicando a Definição 4.4 concluímos que $(A, L, \mathbb{P})$ é detetável. $\square$

Um resultado de unicidade para o problema de ponto fixo (4.40) é descrito a seguir.

Teorema 4.5. Se existe $\bar{S} \in \mathcal{C}^{n0}$ tal que $S(t) \leq \bar{S}$. Se o sistema $(A, G, \mathbb{P})$ é W-estabilizável então a solução de ponto fixo de (4.40) é única.

Demonstração. Como as equações de Riccati são limitadas superiormente, então a sequência de ganhos ótimos $\mathbf{K}^{\text{opt}} = \{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots\}$ estabiliza o sistema $(A, L, \mathbb{P})$ e da Definição 4.4 temos que $(A, L, \mathbb{P})$ é detetável. Usando o Teorema 4.4 temos que existe uma solução para o

problema de ponto fixo (4.40). Procedamos por contradição e suponhamos que a solução não é única. Denotemos S^1 e S^2 para representar duas soluções de ponto fixo para (4.40) diferentes, ou seja $S^1 < S^2$ (“Hipótese indutiva”). Dada uma sequência de ganhos qualquer $\mathbf{K} = \{K(0), K(1), \dots\}$, e aplicando o Lema 3.1 obtemos

$$S_{\mathbf{K}}(t | S_0 = S^1) \leq S_{\mathbf{K}}(t | S_0 = S^2), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (4.49)$$

Seja $\mathbf{K}^2 = \{K^2(\infty), K^2(\infty), \dots\}$, onde $K^2(\infty)$ é o ganho associado com S^2 . Então, de (4.49) segue

$$S_{\mathbf{K}^2}(t | S_0 = S^1) \leq S^2, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}, \quad (4.50)$$

e usando (4.50) e o fato de $(A, G, \mathbb{P})$ seja W-estabilizável, temos do Teorema 4.2 que K^2 é uma sequência estabilizante, ou seja $\mathbf{K}^2$ também estabiliza o sistema $(A, L, \mathbb{P})$, e consequentemente $\rho(\mathcal{V}_{A+K^2L}) < 1$, isto significa que o operador $\mathcal{V}_{A+K^2L}$ é contrativo, então

$$S_{\mathbf{K}^2}(t | S_0 = S^1) \leq S^1, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}, \quad (4.51)$$

e aplicando limite para $t \rightarrow \infty$, de (4.51) concluímos $S^2 \leq S^1$ e isto contradiz a “Hipótese indutiva”. Portanto $S^1 = S^2$. $\square$

SISTEMAS COM SALTOS MARKOVIANOS REVERSO NA ESCALA DE TEMPO

Neste capítulo introduzimos um sistemas lineares com saltos com a característica que o parâmetro de salto é dado pelo processo resultante na escala de tempo de uma cadeia de Markov. Logo, introduzimos as variáveis de momento condicionado e definimos o problema de controle associado com este modelo. A solução deste problema é descrita por uma condição trivial quando a distribuição de probabilidade é nula, caso contrário por segue uma equação em diferença de Riccati acoplada. Finalmente, ilustramos a teoria com uma aplicação.

5.1 Formulação do modelo

Sejam os parâmetros matriciais $A \in \mathcal{C}^n$ e $B \in \mathcal{C}^{n,m}$, uma sequência de variáveis exógenas $\{e(t) \in \mathcal{C}^{n,1}, t \in \mathbb{T}_\ell\}$, onde $\mathbb{T}_\ell = \{0, 1, \dots, \ell\}$. Definimos o parâmetro de salto sendo um processo construído pela reversão na escala de tempo da cadeia de Markov η ,

$$\theta(t) = \eta(\ell - t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell.$$

De forma convencional com a literatura de SLSM, escrevemos:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(t+1) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Denominamos *Sistema linear com saltos Markovianos reverso na escala de tempo* (ou simplesmente, SLSMRT) ao sistema definido em (5.1). Recentemente em (GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2016) foi introduzido este tipo de sistemas e foi demonstrada de uma maneira simples a dualidade “Filtragem–Controle” para sistemas com saltos, mas isto será estudado no Capítulo 6 deste texto.

Considerando a lei de controle $u : \mathbb{T}_\ell \rightarrow \mathfrak{R}^m$, como uma função afim em função das variáveis $G(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$ e $g(t) \in \mathcal{C}^{m,1}$, que denominaremos variáveis de ganho, e que leva escrever

$$u(t) = G_{\theta(t)}(t)x(t) + g_{\theta(t)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (5.2)$$

De (5.2) temos que em cada instante de tempo determinamos N pares de matrizes e vetores da forma $\{(G_1(t), g_1(t)), \dots, (G_N(t), g_N(t))\}$.

Observação 5.1. Se o controle é definido sem a observação do salto, então a lei de controle é da forma

$$u(t) = G(t)x(t) + g(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell,$$

sendo $G(t) \in \mathfrak{R}^{m,n}$ e $g(t) \in \mathfrak{R}^{m,1}$, $t \in \mathbb{T}_\ell$. Isto significa que o controle é o mesmo para cada modo de operação que escolhe o salto θ . Esta abordagem também não foi explorada em SLSMRTs, mas existem alguns trabalhos na literatura de SLSMs, como por exemplo em (COSTA A. N. VARGAS, 2012; VARGAS; COSTA; VAL, 2016), que podem ser adaptados para SLSMRTs.

Combinando (5.1) e (5.2), representamos a evolução de x de uma maneira mais compacta

$$x(t+1) = A_{\theta(t)}(t)x(t) + b_{\theta(t)}(t). \quad (5.3)$$

onde $A(t) \in \mathcal{C}^n$ e $b(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$ tem como elementos as matrizes $A_i(t) = A_i + B_i G_i(t)$ e e vetores $b_i(t) = B_i g_i(t) + e_i(t)$, $\forall i \in \mathbb{I}$ respectivamente. Uma questão natural é se (5.1) tem alguma relação com o modelo de saltos convencional, (SLSM). No Lema 5.1 exploramos uma equivalência entre um sistema do tipo (5.1) com $B = 0$ e um SLSM não convencional.

Lema 5.1. Seja a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathfrak{R}^n$ e para cada $t = 0, 1, \dots, \ell$, definimos

$$x(t+1) = A_{\theta(t)}x(t). \quad (5.4)$$

Definindo z , como $z(\ell-t) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}_\ell$. Então, (5.4) equivale ao sistema: $z(\ell) = x_0$ e para cada $t = 1, \dots, \ell$ segue

$$z(t-1) = A_{\eta(t)}z(t). \quad (5.5)$$

Demonstração. Por definição, é claro que $z(\ell) = x(0) = x_0$. Lembrando que $\theta(t) = \eta(\ell-t)$ e substituindo esta relação em (5.4), é claro que

$$z(t-1) = x(\ell-t+1) = A_{\theta(\ell-t)}x(\ell-t) = A_{\eta(t)}z(t),$$

e isto mostra (5.5). □

O sistema definido em (5.5) não é um SLSM padrão, além disso não foi estudada na literatura de SLSMs. Não entanto, modelos similares já foram estudados; por exemplo em sistemas lineares simples com atraço, veja (ZHANG; DUAN; XIE, 2006, Seção 3.1).

O Lema 5.1 mostra que a reversibilidade no tempo da cadeia de Markov, como em (5.4), leva á reversibilidade no tempo da variável de estado, como em (5.5), e vice-versa. Desta maneira o sistema (5.1) segue um formato padrão com a literatura de SLSMs.

5.2 Variáveis de momento condicionado

É usual no estudo de SLSMs aplicar as *variáveis de momento* que levem a descrever os problemas de controle e filtragem de uma maneira mais compacta, ou seja em termos de coleções de matrizes ou vetores. Estas variáveis são obtidas ao calcular o valor esperado de certa variável aleatória multiplicada pela função indicadora $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$. Escrevemos $\chi(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$ e $\mathfrak{X}(t) \in \mathcal{C}^{n0}$ para representar a variável de primer e segundo momento respectivamente. Além disso, a dinâmica delas é descrita em função dos operadores lineares e invertíveis, definidos em (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005, Equações 3.6 – 3.10). Para o sistema (5.1), as componentes de $\chi(t)$ são os vetores

$$\chi_i(t) = \mathbb{E}\{x(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{I},$$

e as componentes de $\mathfrak{X}(t)$ são as matrizes

$$\mathfrak{X}_i(t) = \mathbb{E}\{x(t)x'(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\eta(t)=i\}}\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{I}.$$

Para SLSMRTs, a aplicação das variáveis de momento não é viável pois a dinâmica delas é variante no tempo mesmo que a cadeia de Markov seja homogênea, veja a Observação 5.2 e as equações (5.13) e (5.14) respectivamente. Para o estudo de SLSMRTs, introduzimos as variáveis de momento condicionado, e definimos a seguir.

Definição 5.1. Seja θ uma cadeia de Markov reversa no tempo. Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell = \{1, \dots, \ell\}$, denotamos por $\mathfrak{m}(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$, à variável de *primer momento condicionado* no instante t , composto pelos vetores

$$\mathfrak{m}_i(t) = \mathbb{E}\{x(t) \mid \theta(t) = i\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{I}, \quad (5.6)$$

e denotamos por $\mathfrak{M}(t) \in \mathcal{C}^{n0}$, à variável de *segundo momento condicionado* no instante t , composto pelas matrizes

$$\mathfrak{M}_i(t) = \mathbb{E}\{x(t)x'(t) \mid \theta(t) = i\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{I}. \quad (5.7)$$

Lema 5.2. Considerando uma cadeia de Markov η geral e o sistema (5.1) com lei de controle (5.2). Iniciamos com $\mathfrak{m}(0) = (x_0, \dots, x_0) \in \mathcal{C}^{n,1}$, e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ calculamos

$$\mathfrak{m}(t+1) = \mathcal{E}(t, A(t)\mathfrak{m}(t) + b(t)). \quad (5.8)$$

Em particular, quando a cadeia de Markov η é homogênea, segue $\mathfrak{m}(0) = (x_0, \dots, x_0) \in \mathcal{C}^{n,1}$, e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ calculamos

$$\mathfrak{m}(t+1) = \mathcal{E}(A(t)\mathfrak{m}(t) + b(t)). \quad (5.9)$$

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{I}$ temos que $\mathfrak{m}_i(0) = \mathbb{E}\{x_0 \mid \theta(0) = i\} = \mathbb{E}\{x_0\} = x_0$. Seja uma variável aleatória $\Gamma(\theta(0), \dots, \theta(t)) = A_{\theta(t)}(t)x(t) + b_{\theta(t)}(t)$ e aplicando o Lema 2.3, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_i(t+1) &= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) \mathbb{E}\{A_{\theta(t)}(t)x(t) + b_{\theta(t)}(t) \mid \theta(t) = j\} \\
&= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) [A_j(t) \mathbb{E}\{x(t) \mid \theta(t) = j\} + b_j(t)] \\
&= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) [A_j(t) \mathbf{m}_j(t) + b_j(t)] \\
&= \mathcal{E}_i(t, A(t) \mathbf{m}(t) + b(t)),
\end{aligned}$$

e isto demonstra (5.8). A equação (5.9) é evidente, somente é substituir as probabilidades de transição $p_{ij}(t)$ por p_{ij} para cada instante de tempo $t \in \mathbb{T}_\ell$. $\square$

Nesta seção, consideramos umas modificações aos operadores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ definidos anteriormente em (2.3), pelos operadores $\bar{\mathcal{U}}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ respectivamente. Para qualquer $Y, Z \in \mathcal{C}$, definimos $\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{V}} : \mathbb{T} \times \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^n$ e seu i -ésimo componente como segue

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{U}}_{Z,i}(t, Y) &= \sum_{j=1}^N p_{ij}(t) Z_j Y_j Z'_j, \\
\bar{\mathcal{V}}_{Z,i}(t, Y) &= Z'_i \mathcal{D}_i(Y) Z_i,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

A relação entre os operadores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ com $\bar{\mathcal{U}}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ é definido por:

$$\bar{\mathcal{U}}_Z(t, Y) = \mathcal{U}_{Z'}(t, Y) \text{ e } \bar{\mathcal{V}}_Z(t, Y) = \mathcal{V}_{Z'}(t, Y),$$

e a mesma relação vale é valido para o caso invariante no tempo,

$$\bar{\mathcal{U}}_Z(0Y) = \mathcal{U}_{Z'}(Y) \text{ e } \bar{\mathcal{V}}_Z(Y) = \mathcal{V}_{Z'}(Y).$$

Baseado nos operadores $\bar{\mathcal{U}}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ definidos em (5.10) descrevemos adiante a evolução da variável de segundo momento condicionado.

Lema 5.3. Considerando uma cadeia de Markov η geral e o sistema (5.1) com lei de controle (5.2). Iniciamos com $\mathfrak{M}(0) = (x_0 x'_0, \dots, x_0 x'_0) \in \mathcal{C}^{n^0}$, e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ calculamos

$$\mathfrak{M}(t+1) = \bar{\mathcal{U}}_{A(t)}(t, \mathfrak{M}(t)) + \mathcal{E}(t, A(t) \mathbf{m}(t) b'(t) + b(t) \mathbf{m}'(t) A'(t) + b(t) b'(t)). \tag{5.11}$$

Em particular, quando a cadeia de Markov η é homogênea segue: $\mathfrak{M}(0) = (x_0 x'_0, \dots, x_0 x'_0) \in \mathcal{C}^{n^0}$ e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ calculamos

$$\mathfrak{M}(t+1) = \bar{\mathcal{U}}_{A(t)}(\mathfrak{M}(t)) + \mathcal{E}(A(t) \mathbf{m}(t) b'(t) + b(t) \mathbf{m}'(t) A'(t) + b(t) b'(t)). \tag{5.12}$$

Demonstração. A demonstração é similar à descrita no Lema 5.2. $\square$

Observação 5.2. Aplicando a mesma metodologia usada para demonstrar o Lema 5.2, leva a representar a variável de primeiro momento χ como segue: $\chi_i(0) = \pi_i(0)x_0$ e

$$\chi_i(t+1) = \sum_{j=1}^N \frac{p_{ij}\pi_i(t+1)}{\pi_j(t)} [A_j(t)\chi_j(t) + b_j(t)], \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (5.13)$$

Similarmente, a variável de segundo momento segue: $\mathfrak{X}_i(0) = \pi_i(0)x_0x'_0$ e

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_i(t+1) = \sum_{j=1}^N \frac{p_{ij}\pi_i(t+1)}{\pi_j(t)} [A_j(t)\mathfrak{X}_j(t)A'_j(t) + A_j(t)\chi_j(t)b'_j(t) + b_j(t)\chi'_j(t)A'_j(t) \\ + \pi_j(t)b(t)b'(t)], \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Notemos de (5.13) e (5.14), (diferentemente das equações (5.9) e (5.12) respectivamente), que mostra apesar que a cadeia de Markov η seja homogênea a evolução do primeiro e segundo momento é descrito em função de operadores variantes no tempo. Tanto em (5.13) como em (5.14) a sequência de escalares associada nestas equações são

$$p_{ij}(t) = \frac{p_{ij}\pi_i(t+1)}{\pi_j(t)}, \quad \text{para cada } i, j \in \mathbb{I}.$$

Sem embargo a dinâmica das variáveis de momento coincidem se e somente se a cadeia de Markov além de ser homogênea seja reversível, (SCHINAZI, 1999, Definição II.2.1) e que leva escrever (5.13) como segue

$$\chi_i(t+1) = \sum_{j=1}^N p_{ji}(A_j(t)\chi_j(t) + b_j(t)), \quad (5.15)$$

e (5.14) por

$$\mathfrak{X}_i(t+1) = \sum_{j=1}^N p_{ji}(A_j(t)\mathfrak{X}_j(t)A'_j(t) + A_j(t)\chi_j(t)b'_j(t) + b_j(t)\chi'_j(t)A'_j(t) + \pi_j(t)b_j(t)b'_j(t)). \quad (5.16)$$

Podemos notar que (5.15) e (5.16) são a evolução natural das variáveis de primeiro e segundo momento quando o parâmetro de salto é a cadeia de Markov η , coincidindo com a teoria clássica de SLSMs, veja (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005). Uma interpretação evidente e natural, é que em cadeias de Markov reversíveis a dinâmica da variável de estado é o mesmo tanto para SLSMs como para SLSMRTs.

5.3 O problema linear quadrático

Similarmente à literatura de SLSMs, como por exemplo (CHIZECK; JI, 1988; ABOU-KANDIL; FREILING; JANK, 1995; COSTA; TUESTA, 2003), associamos o *problema linear quadrático para SLSMRTs* (ou simplesmente, PLQMRT). Sejam os parâmetros matriciais

$C \in \mathcal{C}^{p,n}$ e $D \in \mathcal{C}^{p,m}$, com a condição que $C'D = 0$, e $D'D \in \mathcal{C}^{n+}$. Definimos a variável de saída $y \in \mathfrak{R}^n$, como segue

$$y(t) = C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (5.17)$$

O PLQMRT consiste em determinar as entradas de controle $\{u(0), \dots, u(\ell)\}$ que resolvam

$$J = \min_{u(0), \dots, u(\ell)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{t=0}^{\ell} \|y(t)\|^2 \right\}, \quad (5.18)$$

restrito a: $x(0) = x_0$ e $x(t+1) = A_{\theta(t)}x(t) + b(t)$, para cada $t \in \mathbb{T}_{\ell-1}$.

Por simplicidade, introduzimos as variáveis $Q(t) \in \mathcal{C}^{n_0}$, $q(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$ e $\rho(t) \in \mathfrak{R}$, e que definimos a seguir.

$$Q(t) = \pi(t)(C'C + G(t)'D'DG(t)), \quad (5.19)$$

$$q(t) = 2\pi(t)G(t)'D'Dg(t), \quad (5.20)$$

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^N \pi_i(t)g_i(t)'D'_iD_i g_i(t). \quad (5.21)$$

Estas relações (5.19), (5.20) e (5.21) são úteis para escrever o PLQMRT definido em (5.18) de uma maneira mais simplificada, e que apresentamos no seguinte resultado.

Teorema 5.1. O problema definido em (5.18) é equivalente a resolver

$$J = \min_{(G(t), g(t)), t \in \mathbb{T}_\ell} \left\{ \sum_{t=0}^{\ell} \langle Q(t), \mathfrak{M}(t) \rangle + \langle q(t), \mathfrak{m}(t) \rangle + \rho(t) \right\}. \quad (5.22)$$

Demonstração. Lembrando que $\|y\|^2 = y'y$, para qualquer $y \in \mathfrak{R}^n$. Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ definimos

$$\|y(t)\|^2 = (C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t))'(C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t)),$$

e aplicando (5.2), o valor de $\|y(t)\|^2$ é calculado da forma

$$\begin{aligned} & x(t)'(C'_{\theta(t)}C_{\theta(t)} + G'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}C_{\theta(t)} + C'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t) + G'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t))x(t) \\ & + x(t)'C'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t) + x(t)'G'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t) + g'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}C_{\theta(t)}x(t) \\ & + g'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t)x(t) + g'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t) + \end{aligned}$$

Como $D'_iC_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{I}$, então a relação descrita acima é reduzida a:

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 &= x(t)'(C'_{\theta(t)}C_{\theta(t)} + G'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t))x(t) \\ &+ x(t)'G'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t) + g'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t)x(t) \\ &+ g'_{\theta(t)}(t)D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aplicando o valor esperado á variável $\|y(t)\|^2$, e respectivamente a cada termo de (5.23), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|y(t)\|^2\} &= \mathbb{E}\left\{x(t)'(C'_{\theta(t)}C_{\theta(t)} + G(t)'D'DG(t))x(t)\right\} \\ &+ 2\mathbb{E}\left\{g(t)'D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)}(t)x(t)\right\} + \mathbb{E}\left\{g(t)'D'_{\theta(t)}D_{\theta(t)}g_{\theta(t)}(t)\right\}. \end{aligned}$$

Usando propriedades de traço, é claro mostrar

$$\mathbb{E}\{\|y(t)\|^2\} = \langle Q(t), \mathfrak{M}(t) \rangle + \langle q(t), \mathfrak{m}(t) \rangle + \rho(t),$$

e somando estes valores deste $t = 0$ até $t = \ell$, obtemos (5.22). $\square$

Escrevemos $\{(G^{\text{opt}}(0), g^{\text{opt}}(0)), \dots, (G^{\text{opt}}(\ell), g^{\text{opt}}(\ell))\}$ para representar a sequência de ganhos que resolvem o problema de controle definido em (5.22), e o procedimento para calcular estes ganhos é apresentado a seguir.

O problema de controle sem variáveis exógenas

Este é um caso muito particular do modelo definido em (5.1), na qual $e(t) = 0$ para cada instante de tempo. Portanto a lei de controle definida em eqrefeq-def-control segue

$$u(t) = G_{\theta(t)}(t)x(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (5.24)$$

Portanto, considerando (5.24) leva escrever o problema (5.18) da forma

$$J = \min_{G(0), \dots, G(\ell)} \left\{ \sum_{t=0}^{\ell} \langle \pi(t) (C' C + G(t)' D' D G(t)), \mathfrak{M}(t) \rangle \right\}, \quad (5.25)$$

onde a variável de segundo momento $\mathfrak{M}(t)$ é definido de forma progressiva no tempo. Inicia em $\mathfrak{M}_i(0) = (x_0 x'_0, \dots, x_0 x'_0)$, $\forall i \in \mathbb{I}$ e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ segue

$$\mathfrak{M}(t+1) = \mathcal{W}_{A(t)}(\mathfrak{M}(t)).$$

5.4 Metodologia para calcular os ganhos ótimos

O procedimento para calcular os ganhos ótimos de (5.22) é dado de maneira regressiva e inspirada num processo de programação dinâmica (BERTSEKAS; TSITSIKLIS, 1996). A metodologia consiste em definir funções $J^t : \mathcal{C}^{n_0} \rightarrow \mathfrak{R}$, para cada $t = \ell, \ell-1, \dots, 0$ e que sejam funções de custo parcial como segue

$$J^t = \min_{(G(t), g(t)), \dots, (G(\ell), g(\ell))} \left\{ \sum_{s=t}^{\ell} \langle Q(s), \mathfrak{M}(s) \rangle + \langle q(s), \mathfrak{m}(s) \rangle + \rho(s) \right\}, \quad (5.26)$$

sempre que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(t)$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(t)$. Para resolver o problema definido em (5.26) seguemos o “Princípio de otimalidade de Bellman”, (BELLMAN, 1957). Os ganhos ótimos são calculados da mesma maneira que o problema linear quadrático padrão, ou seja para SLSMs. Não entanto, para resolver (5.22) é implementada uma técnica de decomposição, que classifica os elementos das variáveis de momento condicionado segundo o índice e a distribuição de probabilidade, isto é quando a distribuição de probabilidade é zero ou positiva.

Teorema 5.2. Calcular $M(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$, $m(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$, $P(t) \in \mathcal{C}^n$ e $p(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$, para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{I}$ calculamos $M_i(\ell) = 0$, $m_i(\ell) = 0$, $P_i(\ell) = \pi_i(\ell)C_i' C_i$ e $p_i(\ell) = 0$. Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$ calculamos $M(t)$, $m(t)$, $P(t)$ e $p(t)$ regressivamente. Se $\pi_i(t) = 0$ então $M_i(t) = 0$, $m_i(t) = 0$, $P_i(t) = 0$, e $p_i(t) = 0$, caso contrário

$$M_i(t) = - \left(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \right)^{-1} B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i, \quad (5.27)$$

$$m_i(t) = - \left(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \right)^{-1} \cdot \left(B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + \frac{1}{2} B_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \right), \quad (5.28)$$

$$P_i(t) = \pi_i(t) C_i' C_i + A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i - A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \cdot \left(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \right)^{-1} B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i, \quad (5.29)$$

$$p_i(t) = A_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) + 2 A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) - 2 A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \left(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \right)^{-1} \cdot \left(B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + \frac{1}{2} B_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \right). \quad (5.30)$$

Dado $\phi(\ell) = 0$ e para cada $t = 0, \dots, \ell - 1$ definimos

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \phi(t+1) + \sum_{\{i: \pi_i(t) > 0\}} \left\{ e_i'(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + e_i'(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \right. \\ & - \left(B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + \frac{1}{2} B_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \right)' \left(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i \right)^{-1} \\ & \cdot \left(B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + \frac{1}{2} B_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \right) \Big\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para qualquer $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{n,0}$ e $\mathfrak{m} \in \mathcal{C}^{n,1}$ é valido:

$$J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \langle P(t), \mathfrak{M} \rangle + \langle p(t), \mathfrak{m} \rangle + \phi(t), \quad (5.32)$$

Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$, a solução de (5.22) é dada por

$$G^{\text{opt}}(t) = M(t), \text{ e } g^{\text{opt}}(t) = m(t). \quad (5.33)$$

Demonstração. Seja o problema

$$J^\ell(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \min_{(G(\ell), g(\ell))} \left\{ \langle Q(\ell), \mathfrak{M} \rangle + \langle q(\ell), \mathfrak{m} \rangle + \rho(\ell) \right\}. \quad (5.34)$$

Como as variáveis $Q(\ell)$ e $\rho(\ell)$ são compostas por formas quadráticas, então é claro que

$$G^{\text{opt}}(\ell) = M(\ell) = 0 \text{ e } g^{\text{opt}}(\ell) = m(\ell) = 0.$$

A função de custo J^ℓ é definido como segue $J^\ell(\mathfrak{M}) = \langle \pi(\ell) C' C, \mathfrak{M} \rangle$. Ou seja, para cada $i \in \mathbb{I}$ é valido $P_i(\ell) = \pi_i(\ell) C_i' C_i$, $p_i(\ell) = 0$ e $\phi(\ell) = 0$. Agora, procedemos por indução e suponhamos

que (5.32) é válida no instante $t + 1$. Dado $t < \ell$ e $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(t)$ e $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}(t)$, aplicamos o *princípio de otimalidade de Bellman* para calcular $J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m})$ e que representamos como segue:

$$J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \min_{(G(t), g(t))} \left\{ \langle Q(t), \mathfrak{M} \rangle + \langle q(t), \mathfrak{m} \rangle + \rho(t) \right. \\ \left. + \min_{(G(t+1), g(t+1)), \dots, (G(\ell), g(\ell))} \sum_{s=t+1}^{\ell} \langle Q(s), \mathfrak{M}(s) \rangle + \langle q(s), \mathfrak{m}(s) \rangle + \rho(s) \right\}. \quad (5.35)$$

Da hipótese indutiva, temos a seguinte relação

$$\min_{(G(t+1), g(t+1)), \dots, (G(\ell), g(\ell))} \sum_{s=t+1}^{\ell} \langle Q(s), \mathfrak{M}(s) \rangle + \langle q(s), \mathfrak{m}(s) \rangle + \rho(s) \\ = \langle P(t+1), \bar{\mathcal{U}}_{A(t)}(t, \mathfrak{M}) + \mathcal{E}(t, A(t)\mathfrak{m}b(t)' + b(t)\mathfrak{m}'A(t)' + b(t)b(t)') \rangle \\ + \langle p(t+1), \mathcal{E}(t, A(t)\mathfrak{m} + b(t)) \rangle + \phi(t+1),$$

e aplicando a dualidade entre os operadores $\bar{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{E}$ com $\bar{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{E}$ respectivamente, segue

$$\min_{(G(t+1), g(t+1)), \dots, (G(\ell), g(\ell))} \sum_{s=t+1}^{\ell} \langle Q(s), \mathfrak{M}(s) \rangle + \langle q(s), \mathfrak{m}(s) \rangle + \rho(s) \\ = \langle A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))A(t), \mathfrak{M} \rangle + \langle 2A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))b(t) + A'(t) \mathcal{D}(t, p(t+1)), \mathfrak{m} \rangle \\ + \sum_{i=1}^N [b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1))b_i(t) + b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1))] + \phi(t+1).$$

Então, substituindo a relação descrita acima em (5.35) obtemos

$$J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \min_{(G(t), g(t))} \left\{ \langle Q(t) + A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))A(t), \mathfrak{M} \rangle \right. \\ \left. + \langle q(t) + 2A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))b(t) + A'(t) \mathcal{D}(t, p(t+1)), \mathfrak{m} \rangle \right. \\ \left. + \rho(t) + \sum_{i=1}^N (b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1))b_i(t) + b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1))) + \phi(t+1) \right\}.$$

Lembrando que $\mathbb{N}_t = \{i \in \mathbb{I} : \pi_i(t) = 0\}$. Usamos uma técnica de decomposição nas variáveis de momento condicionado, que leva expressar elas da forma: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^N + \mathfrak{M}^P$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^N + \mathfrak{m}^P$, cujas componentes seguem

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_i^N = 0, & \text{se } i \notin \mathbb{N}_t \\ \mathfrak{M}_i^P = 0, & \text{se } i \in \mathbb{N}_t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathfrak{m}_i^N = 0, & \text{se } i \notin \mathbb{N}_t \\ \mathfrak{m}_i^P = 0, & \text{se } i \in \mathbb{N}_t \end{cases}$$

Usando esta decomposição podemos mostrar que para qualquer ganho $G(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$ e $g(t) \in \mathcal{C}^{m,1}$, é válido:

$$\langle Q(t) + A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))A(t), \mathfrak{M}^N \rangle = 0, \quad (5.36)$$

$$\langle q(t) + 2A'(t) \mathcal{D}(t, P(t+1))b(t) + A'(t) \mathcal{D}(t, p(t+1)), \mathfrak{m}^N \rangle = 0. \quad (5.37)$$

A seguir mostraremos que (5.36) e (5.37) são verdadeiras. Da definição do traço em (5.36) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \notin \mathbb{N}_t} \text{Tr} \left((\pi_i(t) Q_i(t) + A_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i(t)) \mathfrak{M}_i^N \right) + \sum_{i \in \mathbb{N}_t} \text{Tr} \left(\pi_i(t) Q_i(t) \mathfrak{M}_i^N \right) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{N}_t} \text{Tr} \left(A_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i(t) \mathfrak{M}_i^N \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Notemos que a primeira componente do lado direito de (5.38) é igual a zero pela definição de $\mathfrak{M}_i^N$, e a segunda componente é zero, já que $\pi_i(t) = 0, i \in \mathbb{N}_t$; a terceira componente também é zero, mas precisa uma prova mais detalhada. Dado $i \in \mathbb{N}_t$, então aplicando a lei da probabilidade total segue

$$0 = \pi_i(t) = \sum_{j=1}^N p_{ji} \pi_j(t+1) = \sum_{\{j: p_{ji} > 0\}} p_{ji} \pi_j(t+1),$$

então $\pi_j(t+1) = 0$ para todo $\{j : p_{ji} > 0\}$. Portanto da definição da variável $P(t+1)$ obtemos $P_j(t+1) = 0$ e que leva a $\mathcal{D}_i(P(t+1)) = 0$. Isto demonstra que

$$A'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i(t) \mathfrak{M}_i^N = 0,$$

e logo que a terceira componente de (5.38) seja zero e portanto (5.36) é válido. O mesmo procedimento é usado para mostrar que (5.37) é válido. Por outro lado, como (5.32) é válida para qualquer $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{n,0}$ e $\mathfrak{m} \in \mathcal{C}^{n,1}$, consideremos $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{m}$ com a condição $\mathfrak{M}_i > 0$ e $\mathfrak{m}_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}_t$, e que leva a escrever

$$\begin{aligned} 0 &= J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \langle P(t), \mathfrak{M} \rangle + \langle p(t), \mathfrak{m} \rangle + \phi(t) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_t} P_i(t) \mathfrak{M}_i + \sum_{i \notin \mathbb{N}_t} P_i(t) \mathfrak{M}_i + \sum_{i \in \mathbb{N}_t} p_i(t) \mathfrak{m}_i + \sum_{i \notin \mathbb{N}_t} p_i(t) \mathfrak{m}_i \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}_t} P_i(t) \mathfrak{M}_i + \sum_{i \in \mathbb{N}_t} p_i(t) \mathfrak{m}_i, \end{aligned}$$

e isto implica

$$P_i(t) = 0 \text{ e } p_i(t) = 0, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_t. \quad (5.39)$$

A diferença das variáveis P e p , os valores dos ganhos ótimos podem ser determinados de maneira arbitrária, devido a que (5.36) e (5.37) são válidas independente do valor que assumem os ganhos. Então, quando a distribuição de probabilidade é nula, escrevemos

$$G_i^{\text{opt}}(t) = M_i(t) = 0 \text{ e } g_i^{\text{opt}}(t) = m_i(t) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_t, \quad (5.40)$$

No contexto geral, para todo $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{n,0}$ e $\mathfrak{m} \in \mathcal{C}^{n,1}$. Usando (5.36) e (5.37), o valor do custo definido em (5.26), é

$$\begin{aligned} J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) &= J^t(\mathfrak{M}^N) + J^t(\mathfrak{X}^P) = J^t(\mathfrak{X}^P) \\ &= \min_{K_i(t)} \sum_{i \notin \mathbb{N}_t} \text{Tr} \left((\pi_i(t) Q_i(t) + A'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i(t)) \mathfrak{M}_i^P \right) \\ &\quad + (q_i(t) + 2A'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) b_i(t) + A'_i(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1))) \mathfrak{m}_i^P \\ &\quad + \pi_i(t) g'_i(t) D'_i D_i g_i(t) + b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) b_i(t) \\ &\quad + b'_i(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) + \phi(t+1). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para cada $i \notin \mathbb{N}_t$, expandindo $A_i(t) = A_i + B_i G_i(t)$ e $b_i(t) = B_i g_i(t) + e_i(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \pi_i(t) Q_i(t) + A_i'(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i(t) &= \pi_i(t) C_i' C_i + A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) A_i \\ &+ (G_i(t) - M_i(t))' (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) (G_i(t) - M_i(t)) \\ &- M_i'(t) (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) M_i(t), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} q_i(t) + 2A_i'(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) b_i(t) + A_i'(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) &= A_i' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \\ &+ 2A_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + 2(G_i(t) - M_i(t))' (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) (g_i(t) - m_i(t)) \\ &- 2M_i'(t) (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) m_i(t), \end{aligned} \quad (5.43)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_i(t) g_i'(t) D_i' D_i g_i(t) + b_i'(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) b_i(t) + b_i'(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) &= e_i'(t) \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \\ &+ e_i'(t) \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) e_i(t) + (g_i(t) - m_i(t))' (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) (g_i(t) - m_i(t)) \\ &- m_i'(t) (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) B_i) m_i(t). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Combinando (5.42), (5.43), e (5.44) em (5.41) é claro que:

$$G_i^{\text{opt}}(t) = M_i(t) = 0, \quad \text{e} \quad g_i^{\text{opt}}(t) = m_i(t) = 0 \quad \forall i \notin \mathbb{N}_t. \quad (5.45)$$

Substituindo $G_i(t)$ por $M_i(t)$ (respectivamente, $g_i(t)$ por $m_i(t)$) temos as relações (5.29), (5.30) e (5.31), e também $J^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m})$ é definido por (5.32). Combinando (5.40) e (5.45) temos (5.33). $\square$

Também, podemos avaliar a evolução da função de custo para cada modo $i \in \mathbb{I}$ e que definimos por $J_i^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m})$ da forma:

$$J_i^t(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}) = \text{Tr}(P_i(t) \mathfrak{M}_i) + p_i'(t) \mathfrak{m}_i + \zeta_i(t). \quad (5.46)$$

No Algoritmo 1, calculamos $P_i(t)$, $p_i(t)$ e $\zeta_i(t)$ quando a cadeia de Markov é homogênea.

A metodologia para resolver o problema de controle sem variáveis exógenas

Resolver o problema definido em (5.25) é um caso particular da metodologia descrita no Teorema 5.2. Neste caso, as matrizes de ganho $G^{\text{opt}}(t)$ são expressadas unicamente em função das variáveis $P(t)$. Este caso tem uma relevância prática e determinante para mostrar a dualidade “Filtragem–Controle” que será detalhada no Capítulo 6. Assumindo que a cadeia de Markov η é homogênea temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3. Calcular $M(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$ e $P(t) \in \mathcal{C}^n$, para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{I}$ calculamos $M_i(\ell) = 0$ e $P_i(\ell) = \pi_i(\ell) C_i' C_i$. Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$ calculamos $M(t)$ e

Algoritmo 1 – Calculo das variáveis M, m, P, p e ς quando a cadeia de Markov é homogênea

Entrada: $A \in \mathcal{C}^n, B \in \mathcal{C}^{n,m}, C \in \mathcal{C}^{r,n}, D \in \mathcal{C}^{r,m}$ e $e(t) \in \mathcal{C}^{n,1}, \forall t = 0, \dots, \ell$.

Saída: $M(t) \in \mathcal{C}^{m,n}, m(t) \in \mathcal{C}^{m,1}, P(t) \in \mathcal{C}^n, p(t) \in \mathcal{C}^{n,1},$ e $\varsigma(t) \in \mathcal{C}^1, \forall t = 0, \dots, \ell$.

1. Para cada $i \in \mathbb{I}$ defina: $M_i(\ell) = 0, m_i(\ell) = 0, P_i(\ell) = 0 = \pi_i(\ell)C_i' C_i, p_i(\ell) = 0,$ e $\varsigma_i(\ell) = 0$.
2. Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$, calcule

2.1 Para cada $i \in \mathbb{I}$ determine $M_i(t), m_i(t), P_i(t)$, e $p_i(t)$ como segue

(i) Se $\pi_i(t) = 0$, então $M_i(t) = 0, m_i(t) = 0, P_i(t) = 0$, e $p_i(t) = 0$.

(ii) Se $\pi_i(t) > 0$, então

$$\begin{aligned} \Lambda_i(t) &= (\pi_i(t)D_i'D_i + B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i)^{-1}, \\ M_i(t) &= -\Lambda_i(t)B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i, \\ m_i(t) &= -\Lambda_i(t)(B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) + \frac{1}{2}B_i'\mathcal{D}_i(p(t+1))). \\ P_i(t) &= \pi_i(t)C_i'C_i + A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i \\ &\quad - A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i\Lambda_i(t)B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i, \\ p_i(t) &= A_i'\mathcal{D}_i(p(t+1)) + 2A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) \\ &\quad - 2A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i\Lambda_i(t)(B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) + \frac{1}{2}B_i'\mathcal{D}_i(p(t+1))). \end{aligned}$$

2.2 Calcule

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i=1}^N \varsigma_i(t+1) + \sum_{\{i: \pi_i(t) > 0\}} \left\{ e_i'(t)\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) + e_i'(t)\mathcal{D}_i(p(t+1)) \right. \\ &\quad \left. - (B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) + \frac{1}{2}B_i'\mathcal{D}_i(p(t+1)))' \right. \\ &\quad \left. \cdot \Lambda_i(t)(B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))e_i(t) + \frac{1}{2}B_i'\mathcal{D}_i(p(t+1))) \right\} \end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathbb{I}$, determine

$$\varsigma_i(t) = \pi_i(t)\phi(t).$$

$P(t)$ e $p(t)$ regressivamente. Se $\pi_i(t) = 0$ então $M_i(t) = 0$ e $P_i(t) = 0$, caso contrário

$$\begin{aligned} M_i(t) &= -\left(\pi_i(t)D_i'D_i + B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i\right)^{-1} B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i, \\ P_i(t) &= \pi_i(t)C_i'C_i + A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i - A_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i \\ &\quad \cdot \left(\pi_i(t)D_i'D_i + B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))B_i\right)^{-1} B_i'\mathcal{D}_i(P(t+1))A_i. \end{aligned}$$

Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$, a solução de (5.25) é dada por

$$G^{\text{opt}}(t) = M(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_\ell.$$

5.5 Aplicação

Para ilustrar a teoria de SLSMRTs, adaptamos o modelo proposto em (RUDERMAN *et al.*, 2008), o qual descreve o funcionamento de um motor de corrente contínua. Seja a variável de estado $x(t) = [i(t), w(t)]'$, onde a variável $i(t)$ (medida em amperes, [A]) representa a intensidade de corrente e a variável $w(t)$ (medida em radians sob segundos) representa a velocidade angular. A variável de controle, $u(t)$ é descrita pela voltagem (expressada em volts, [V]).

O sistema definido em (RUDERMAN *et al.*, 2008), é definido como segue

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_m}{L} & -\frac{K_e}{L_m} \\ \frac{K_m}{J_m} & -\frac{K_d}{J_m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \text{sign}(w(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F_c}{J_m} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (5.47)$$

cujos parâmetros são definidos na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores dos parâmetros identificados do motor

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Resistencia total	R_m	Ω	0.98
Torque	K_m	Nm/A	0.0274
Força electromotiva	K_e	Vs/rad	0.02997
Amortecimento	K_d	Ns/rad	7.2×10^{-5}
Inercia total	J_m	Kgm^2	3.2×10^{-5}
Frição de Coulomb	F_c	Nm	0.0593
Inductancia	L_m	H	2.5×10^{-6}

Por outro lado, assumindo que o motor gira num único sentido, ou seja $\text{sign}(w(t)) = 1$, para qualquer instante de tempo t . Então, o sistema (5.47) é definido como um sistema linear simples. Se estabelecemos (5.47) em torno do estado de equilíbrio, $x_{eq} \approx [2.8057, 244.12]'$ que obtemos a uma voltagem constante $u = 10$ e um tempo de amostragem de 0.01 segundos, leva a escrever (5.47) via uma sistema a tempo discreto. Seja o estado inicial $x(0) = [2, 80]$, e

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) + e_d, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{T}. \quad (5.48)$$

Os parâmetros de (5.48) são aproximados da seguinte maneira

$$A_d \approx \begin{bmatrix} -5.0027 \times 10^{-4} & -2.2887 \times 10^{-2} \\ 1.6495 \times 10^{-2} & 7.6453 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad B_d \approx \begin{bmatrix} 0.7906 \\ 7.6009 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_d \approx \begin{bmatrix} 0.8581 \\ -28.341 \end{bmatrix}.$$

Formulação do sistema linear com salto Markoviano reverso no tempo

Para descrever o funcionamento do motor consideramos dois modos de operação. Um modo é chamado *normal* e o outro é chamado *falha*. Assumindo “erro de transmissão” no controlador, formulamos um SLSMRT com 4 modos e que descrevemos na Tabela 7. Para definir a função de custo, fixamos as matrizes C e D como segue:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_i = 1, \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3, 4.$$

Tabela 7 – Modos de operação propostos para a aplicação

MODO	DESCRIÇÃO	matrizes
1	Normal com erro de transmissão	$A_1 = A_d$, $B_1 = 0$ e $e_1 = e_d$
2	Normal sem erro de transmissão	$A_2 = A_d$, $B_2 = B_d$ e $e_2 = e_d$
3	Falha com erro de transmissão	$A_3 = A_d$, $B_3 = 0$ e $e_3 = e_d$
4	Falha sem erro de transmissão	$A_4 = A_d$, $B_4 = B_d$ e $e_4 = e_d$

Dado um horizonte de tempo $\ell = 10$, representamos a função de custo

$$J_{(G,g)} = \sum_{t=0}^{\ell} \langle Q(t), \mathfrak{M}(t) \rangle + \langle q(t), \mathfrak{m}(t) \rangle + \rho(t), \quad (5.49)$$

sendo $(G, g) = \{(G(t), g(t)), t = 0, 1, \dots, \ell\}$. A transição entre os estados da cadeia de Markov é modelado por um canal Markoviano, denominada *Canal Gilbert-Elliot*, veja (GONÇALVES; FIORAVANTI; GEROMEL, 2010, Figura 1). Se o motor esta no modo *normal* a probabilidade de continuar *normal* é denotada por p_{nn} e a probabilidade de mudar para o modo *falha* é $p_{nf} = 1 - p_{nn}$. Se o motor esta em modo *falha* então a probabilidade de continuar em modo *falha* é p_{ff} e de mudar ao estado *normal* é $p_{fn} = 1 - p_{ff}$. Além disso, pode existir erro de transmissão do controlador. Ou seja, se o motor esta em modo *falha*, existe uma probabilidade p_{fe} de transmitir error e $1 - p_{fe}$ de não transmitir error. Analogamente, se o motor esta em modo *normal* existe uma probabilidade p_{ne} de transmitir erro de transmissão e $1 - p_{ne}$ de não transmitir erro. Nesta seção apresentamos um modelo de controle em rede com 4 modos de operação, definidos na Tabela 7 e cuja matriz de transição de probabilidade $\mathbb{P}$ é definida como segue:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{nn} & 0 \\ 1 - p_{ff} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{ne} & 1 - p_{ne} \\ p_{fe} & 1 - p_{fe} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 - p_{nn} \\ 0 & p_{ff} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{fe} & 1 - p_{fe} \\ p_{ne} & 1 - p_{ne} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Em termos mais gerais, para modelos na qual exista erro de comunicação ou transmissão do controlador modelamos via um sistema de controle em rede, como por ser visto em (HESPANHA; NAGHSHTABIRZI; XU, 2007; GONÇALVES; FIORAVANTI; GEROMEL, 2010; PALMA *et al.*, 2016; ZHAI *et al.*, 2016; GUPTA; MURRAY; HASSIBI, 2003; GUPTA *et al.*, 2009).

Metodologia e índices de performance

Para qualquer sequência de ganhos $(G(t), g(t)), t = 0, \dots, \ell$, o valor de custo de J definido em (5.49) é calculado da forma: se $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(0)$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(0)$, então

$$J_{(G,g)} = \langle P(0), \mathfrak{M} \rangle + \langle p(0), \mathfrak{m} \rangle + \langle \zeta(0), 1 \rangle,$$

onde as variáveis P , p e ζ são calculadas regressivamente via o Algoritmo 2. Para obter $J_{(G,g)}$ consideramos dos cenários, um chamado *determinístico* e outro chamado *estocástico*. O cenário

determinístico é o modelo descrito pelo SLS *ideal*, ou seja quando o motor funciona perfeitamente e não existe erro de transmissão (ou também por perda de comunicação) com o controlador. Em outras palavras, com base na Tabela 7 o cenário *determinístico* corresponde ao modo de operação 2, ou seja como o SLS

$$x(t+1) = A_2x(t) + B_2u(t) + e_2.$$

O cenário *estocástico* é descrito via um SLSMRT, ou seja quando o estado segue $x(t+1) = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + e_{\theta(t)}$, sendo $\theta(t) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Também etiquetamos as sequências de ganho, como segue: *ótimo*, *clássico*, *otimista* e *ideal* (veja Tabela 8). Os ganhos *ótimos* são a proposta deste trabalho (calculados pelo Algoritmo 1). Os ganhos determinados no literatura de SLSMs, como por exemplo em (COSTA; TUESTA, 2003), são chamados ganhos *clássicos*. O ganho *otimista* é aquele ganho obtido quando o motor opera na melhor condição possível (modo 2) e é substituído no SLSMR, em cambio o ganho *determinístico* é quando substituímos este ganho no SLS associado.

Tabela 8 – Valor do custo associado com o cenário e ganho dado

VARIÁVEL	MODELO	CENÁRIO	GANHO
$J_{\text{ótimo}}$	SLSMRT	Estocástico	Ótimo
$J_{\text{clássico}}$	SLSMRT	Estocástico	Clássico
J_{otimista}	SLSMRT	Estocástico	Otimista
J_{ideal}	SLS	Determinístico	Ideal

O ganho *otimista* é esperado que tenha a pior performance (em termos de custo), ou seja maior custo. Contrariamente, o ganho *ideal* é esperado que seja o de menor custo, já que ele corresponde a um modelo sem falha e sem erro na transmissão do controlador. Baseado nisto, introduzimos dois índices de performance para o calculo do custo que denominamos $I_{\text{ótimo}}$ e $I_{\text{clássico}}$. Estes índices escalam os valores de custo $J_{\text{ótimo}}$ e $J_{\text{clássico}}$ sob o intervalo $[J_{\text{ideal}}, J_{\text{otimista}}]$, e que definimos a seguir.

$$I_{\text{ótimo}} = 1 - \frac{J_{\text{ótimo}} - J_{\text{ideal}}}{J_{\text{otimista}} - J_{\text{ideal}}},$$

$$I_{\text{clássico}} = 1 - \frac{J_{\text{clássico}} - J_{\text{ideal}}}{J_{\text{otimista}} - J_{\text{ideal}}}.$$

Resultados

Para ilustrar a teoria, adotamos uma estratégia para calcular as probabilidades de transição entre os estados de maneira variantes no tempo. Basicamente, estas probabilidades são condicionadas a que um certo evento E_0 ocorra. Lembrando que a matriz de probabilidade é $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, para cada $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e que leve a uma matriz de probabilidade variante no tempo $\tilde{\mathbb{P}} = [\tilde{p}_{ij}(t)]$, para cada $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $t \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Algoritmo 2 – Calculo das variáveis P , p , e ς quando os ganhos são pre-computados.

Entrada: Os parâmetros $A \in \mathcal{C}^n$, $B \in \mathcal{C}^{n,m}$, $C \in \mathcal{C}^{r,n}$, $D \in \mathcal{C}^{r,m}$ e $e \in \mathcal{C}^{n,1}$, e as sequências de ganho $G(t) \in \mathcal{C}^{m,n}$ e $g(t) \in \mathcal{C}^{m,1}$, $\forall t = 0, \dots, \ell$.

Saída: $P(t) \in \mathcal{C}^n$, $p(t) \in \mathcal{C}^{n,1}$ e $\varsigma(t) \in \mathcal{C}^1$, $\forall t = 0, \dots, \ell$.

1. Para cada $i \in \mathbb{I}$ calcule

$$\begin{aligned} P_i(\ell) &= \pi_i(\ell)(C_i' C_i + G_i'(\ell) D_i' D_i G_i(\ell)), \\ p_i(\ell) &= 2\pi_i(\ell) G_i'(\ell) D_i' D_i g_i(\ell), \\ \varsigma_i(\ell) &= \pi_i(\ell) g_i'(\ell) D_i' D_i g_i(\ell), \\ \phi(\ell) &= \sum_{i=1}^N \varsigma_i(\ell). \end{aligned}$$

2. Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$, determine

(i) Se $\pi_i(t) = 0$, então $P_i(t) = 0$, $p_i(t) = 0$, e $\varsigma_i(t) = 0$.

(ii) Se $\pi_i(t) > 0$, então

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \pi_i(t)(C_i' C_i + G_i'(t) D_i' D_i G_i(t)) + (A_i + B_i G_i(t))' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) (A_i + B_i G_i(t)), \\ p_i(t) &= 2\pi_i(t) G_i'(t) D_i' D_i g_i(t) + (A_i' + B_i G_i(t))' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) \\ &\quad + (A_i' + B_i G_i(t))' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) (B_i g_i(t) + e_i), \\ \phi(t) &= \sum_{i=1}^N \pi_i(t) g_i'(t) D_i' D_i g_i(t) + (B_i g_i(t) + e_i)' \mathcal{D}_i(t, P(t+1)) (B_i g_i(t) + e_i) \\ &\quad + (B_i g_i(t) + e_i)' \mathcal{D}_i(t, p(t+1)) + \varsigma_i(t+1), \\ \varsigma_i(t) &= \pi_i(t) \phi(t). \end{aligned}$$

Assumindo que o evento é dado por $E_0 = \{\eta(0) = \alpha, \eta(\ell) = \beta\}$. Nos caracterizamos, as probabilidades de transição $\tilde{p}_{ij}(t)$ como segue: iniciamos com $\tilde{p}_{ij}(0) = 1$, quando $j = \beta$, caso contrário $p_{ij}(0) = 0$. Para cada $t = 1, \dots, \ell - 1$, o calculo é baseado nas formulas de probabilidade condicionada e que leva escrever da forma:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij}(t) &= \Pr(\theta(t) = j \mid \theta(t+1) = i, \eta(0) = \alpha, \eta(\ell) = \beta) \\ &= \Pr(\eta(\ell - t) = j \mid \eta(\ell - t - 1) = i, \eta(0) = \alpha, \eta(\ell) = \beta) \\ &= \frac{\Pr(\eta(\ell) = \beta, \eta(\ell - t) = j, \eta(\ell - t - 1) = i, \eta(0) = \alpha)}{\Pr(\eta(\ell) = \beta, \eta(\ell - t - 1) = i, \eta(0) = \alpha)}. \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia na equação descrita acima, obtemos:

$$\tilde{p}_{ij}(t) = \frac{\Pr(\eta(\ell) = \alpha \mid \eta(\ell - t) = j)}{\Pr(\eta(\ell) = \alpha \mid \eta(\ell - t - 1) = i)} p_{ij},$$

e concluímos com $\tilde{p}_{ij}(\ell) = 1$, quando $j = \alpha$, caso contrário $p_{ij}(\ell) = 0$.

Finalmente, consideramos os valores $p_{nn} = 0.95$, $p_{ff} = 0.99$, $p_{fe} = 0.9$, $p_{ne} = 0.001$ e $v(0) = (0, 1, 0, 0)'$ em (5.50) e os valores de $\alpha = \beta = \theta_0$ para determinar os valores da função de

Tabela 9 – Resultados da aplicação

Variável	$\theta_0 = 2$	$\theta_0 = 4$
J_{otimista}	244.1697	375.5251
$J_{\text{clássico}}$	243.8718	332.6154
$J_{\text{ótimo}}$	243.6811	331.7862
J_{ideal}	242.4264	242.4264
$I_{\text{clássico}}$	0.1709	0.3224
$I_{\text{ótimo}}$	0.2803	0.3286

Figura 3 – Simulação com a sequência de modos $\theta = 2, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2$.

custo J_{otimista} , $J_{\text{clássico}}$, $J_{\text{ótimo}}$, J_{ideal} e os índices de performance $I_{\text{clássico}}$ e $I_{\text{ótimo}}$. Como esperamos, nossa proposta é o custo mínimo (no cenário estocástico), e significativamente menor que os outros. Por exemplo, se $\theta_0 = 2$ obtemos

$$\left(\frac{I_{\text{ótimo}}}{I_{\text{clássico}}} - 1 \right) \times 100\% = 64.01\%,$$

e para $\theta_0 = 4$ obtemos

$$\left(\frac{I_{\text{ótimo}}}{I_{\text{clássico}}} - 1 \right) \times 100\% = 1.92\%.$$

Podemos interpretar que o caso em que o funcionamento do motor inicie e termine de maneira perfeita, nossa proposta tem um melhor desempenho que as demais estratégias propostas. Descrevemos na Tabela 9 as funções de custo e o índices propostos

Para ilustrar a evolução das componentes da variável de estado $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, representamos na Figura 3 com os cores azul, vermelho e preto a dinâmica descrita num cenário estocástico assumindo os ganhos pre-computados e classificados em ótimos, clássicos e determinísticos respectivamente.

DUALIDADE COM CONTROLE

Neste capítulo, apresentaremos um resultado que mostra a dualidade Filtragem – Controle, de uma maneira simples. Este resultado segue diretamente da visualização dos teoremas que calculam os ganhos do filtro ótimo e do controlador ótimo para um problema de filtragem em SLSM e um problema de controle em SLSMRT respectivamente. Uma extensão para modelos variantes no tempo também é mostrado.

6.1 Problema de filtragem para SLSMs

Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ consideremos os parâmetros $F \in \mathcal{C}^n$, $G \in \mathcal{C}^{n,s}$, $L \in \mathcal{C}^{m,n}$ e $H \in \mathcal{C}^{m,s}$, com a condição $GH' = 0$ e $HH' \in \mathcal{C}^{n+}$ e uma cadeia de Markov η homogênea. Considerando o estado inicial $z(0) = z_0$ e para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$

$$\begin{cases} z(t+1) &= F_{\eta(t)}z(t) + G_{\eta(t)}\omega(t), \\ y(t) &= L_{\eta(t)}z(t) + H_{\eta(t)}\omega(t). \end{cases} \quad (6.1)$$

Dado um horizonte de tempo ℓ pre-especificado. Nesta seção consideramos o problema de filtragem com horizonte finito. Este problema, consiste em determinar a sequência da ganhos ótimos $\{K^{\text{opt}}(0), K^{\text{opt}}(1), \dots, K^{\text{opt}}(\ell)\}$, que minimizem

$$\sum_{t=0}^{\ell} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{z}(t)\|^2 \right\}.$$

Lembremos da Seção 3.1 que os ganhos ótimos foram determinadas diferentemente da literatura de SLSMs. Os ganhos ótimos foram calculados em função da variável S . Baseado no Teorema 3.1 a seguir apresentamos um resultado que mostra como estes ganhos ótimos são calculados.

Teorema 6.1. Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ definimos $N(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ e $S(t) \in \mathcal{C}^n$ como segue. Para cada $j \in \mathbb{I}$, iniciemos

$$N_j(0) = -v_j(0)F_j\Sigma L'_j(H_jH'_j + L_j\Sigma L'_j)^{-1}, \quad (6.2)$$

$$S_j(0) = v_j(0)(G_jG'_j + F_j\Sigma F'_j - F_j\Sigma L'_j(H_jH'_j + L_j\Sigma L'_j)^{-1}L_j\Sigma F'_j). \quad (6.3)$$

Para cada $t = 1, 2, \dots, \ell$ calculamos $N(t)$ e $S(t)$ progressivamente. Se $v_j(t) = 0$ então $N_j(t) = 0$ e $S_j(t) = 0$, caso contrário

$$N_j(t) = -F_j\mathcal{D}_j(S(t-1))L'_j(v_j(t)H_jH'_j + L_j\mathcal{D}_j(S(t-1))L'_j)^{-1}, \quad (6.4)$$

$$S_j(t) = v_j(t)G_jG'_j + F_j\mathcal{D}_j(S(t-1))F'_j - F_j\mathcal{D}_j(S(t-1))L'_j \cdot (v_j(t)H_jH'_j + L_j\mathcal{D}_j(S(t-1))L'_j)^{-1}L_j\mathcal{D}_j(S(t-1))F'_j. \quad (6.5)$$

Os ganhos do filtro ótimo são

$$K^{\text{opt}}(t) = N(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (6.6)$$

O Teorema 6.1 foi introduzido em (GUTIERREZ-PACHAS; COSTA, 2016) e mostra de uma maneira clara a dualidade com um problema controle associado com um SLSMRT.

6.2 O problema linear quadrático modificado

Sejam os parâmetros matriciais usados no Capítulo 5, $A \in \mathcal{C}^n$, $B \in \mathcal{C}^{n,m}$, $C \in \mathcal{C}^{s,n}$ e $D \in \mathcal{C}^{s,m}$ com a condição $C'D = 0$ e $D'D \in \mathcal{C}^{n+}$, e uma cadeia de Markov reversa no tempo $\theta(t) = \eta(\ell - t)$, $\forall t \in \mathbb{T}_\ell$. Diferentemente do problema linear quadrático definido em (5.18), nesta seção estudamos um problema de controle modificado, adicionando um custo terminal $\|Ex(\ell + 1)\|^2$, onde E é uma matriz quadrada de dimensão n , que leva a escrever a função custo, como segue:

$$J = \min_{u(0), \dots, u(t)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{t=0}^{\ell} \|y(t)\|^2 + \|Ex(\ell + 1)\|^2 \right\}, \quad (6.7)$$

restrito à evolução da variável de estado x via um SLSMRT da forma

$$x(t+1) = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t). \quad (6.8)$$

Assumindo que a entrada de controle da forma $u(t) = \mathfrak{K}_{\theta(t)}(t)x(t)$, onde $\mathfrak{K}(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$, $t \in \mathbb{T}_\ell$ e $\pi(\ell)E'E = (\pi_1(\ell)E'E, \dots, \pi_N(\ell)E'E) \in \mathcal{C}^{no}$. Escrevemos o problema (6.7) – (6.8) de uma forma mais compacta,

$$J = \min_{\mathfrak{K}(0), \dots, \mathfrak{K}(\ell)} \left\{ \sum_{t=0}^{\ell} \langle \pi(t)(C'C + \mathfrak{K}'(t)D'D\mathfrak{K}(t)), \mathfrak{M}(t) \rangle + \langle \pi(\ell)E'E, (A + \mathfrak{K}(\ell)B)\mathfrak{M}(\ell)(A + \mathfrak{K}(\ell)B)' \rangle \right\}. \quad (6.9)$$

Escrevemos $\{\mathfrak{K}^{\text{opt}}(0), \dots, \mathfrak{K}^{\text{opt}}(\ell)\}$ para representar a sequência de ganhos que resolvem (6.9), e o procedimento para determinar elas é segue o procedimento convencional, isto é seguindo uma metodologia reversa no tempo. Fundamentalmente, a variação respeito do problema definido em (5.25) é na maneira de calcular $\mathfrak{K}^{\text{opt}}(\ell) \in \mathcal{C}^{n,m}$ e $P(\ell) \in \mathcal{C}^{n0}$. Uma adaptação do Teorema 5.3 é apresentada a seguir.

Teorema 6.2. Calcular $M(t) \in \mathcal{C}^{n,m}$ e $P(t) \in \mathcal{C}^{n0}$ para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{I}$, calculamos

$$M_i(\ell) = -\pi_i(\ell)(D_i' D_i + B_i' E' E B_i)^{-1} B_i' E' E A_i, \quad (6.10)$$

$$P_i(\ell) = \pi_i(\ell)(C_i' C_i + A_i' E' E A_i - A_i' E' E B_i (B_i' E' E B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' E' E A_i). \quad (6.11)$$

Para cada $t = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 0$ calculamos $M(t)$ e $P(t)$ regressivamente. Se $\pi_i(t) = 0$ então $M_i(t) = 0$ e $P_i(t) = 0$, caso contrário

$$M_i(t) = -(\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) B_i)^{-1} B_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) A_i, \quad (6.12)$$

$$P_i(t) = \pi_i(t) C_i' C_i + A_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) A_i - A_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) B_i \cdot (\pi_i(t) D_i' D_i + B_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) B_i)^{-1} B_i' \mathcal{D}_i(P(t+1)) A_i. \quad (6.13)$$

Os ganhos ótimos que resolvem (6.7), são

$$\mathfrak{K}^{\text{opt}}(t) = M(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{T}_\ell. \quad (6.14)$$

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{T}_\ell$ definimos as funções $J^t : \mathcal{C}^{no} \rightarrow \mathfrak{R}$, como segue:

$$J^t(\mathfrak{M}(t)) = \min_{\mathfrak{K}(t), \dots, \mathfrak{K}(\ell)} \left\{ \sum_{s=t}^{\ell} \langle \pi(s) (C' C + \mathfrak{K}'(s) D' D \mathfrak{K}(s)), \mathfrak{M}(s) \rangle + \langle \pi(\ell) E' E, (A + \mathfrak{K}(\ell) B) \mathfrak{M}(\ell) (A + \mathfrak{K}(\ell) B)' \rangle \right\},$$

e substituindo $t = \ell$ na equação acima e aplicando as propriedades do traço, $J^\ell(\mathfrak{M}(\ell))$ é igual a

$$\min_{\mathfrak{K}(\ell)} \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left(\pi_i(\ell) (C_i' C_i + \mathfrak{K}_i'(\ell) D_i' D_i \mathfrak{K}_i(\ell) + (A_i + \mathfrak{K}_i(\ell) B_i)' E' E (A_i + \mathfrak{K}_i(\ell) B_i)) \mathfrak{M}_i(\ell) \right),$$

e escrevendo a função custo $J^\ell(\mathfrak{M}(\ell))$ como uma forma quadrática, segue

$$\begin{aligned} \min_{\mathfrak{K}(\ell)} \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left(\pi_i(\ell) (C_i' C_i + A_i' E' E A_i + (\mathfrak{K}_i(\ell) - M_i(\ell))' (B_i' E' E B_i + D_i' D_i)^{-1} (\mathfrak{K}_i(\ell) - M_i(\ell)) \right. \\ \left. - M_i'(\ell) (B_i' E' E B_i + D_i' D_i)^{-1} M_i(\ell)) \mathfrak{M}_i(\ell) \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

sendo $O_i(\ell) = -(B_i' E' E B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' E' E A_i$ para cada $i \in \mathbb{I}$. Como existe um fator multiplicativo $\pi_i(\ell)$ com a variável de ganho $\mathfrak{K}_i(\ell)$, então definimos a solução ótima da forma, $\mathfrak{K}_i^{\text{opt}}(\ell) = \pi_i(\ell) O_i(\ell)$ e substituindo ele na função objetivo calculamos $P_i(\ell)$. Os ganhos restantes $\mathfrak{K}^{\text{opt}}(t)$, $t = 0, \dots, \ell - 1$, são obtidos pelo mesmo procedimento usado no Teorema 5.2. $\square$

A solução do problema de controle modificado é descrita no Teorema 6.2 via uma construção regressiva de equações de Riccati acopladas quando a distribuição de probabilidade é positiva, caso contrário usando uma condição trivial. A dualidade entre os problemas de controle e filtragem resulta evidente ao comparar os Teoremas 6.1 e 6.2, ou seja substituindo para cada $i \in \mathbb{I}$ as matrizes F_i , L_i , G_i e H_i por A'_i , B'_i , C'_i e D'_i respectivamente. Além disso, comparando a matriz de covariância inicial Σ do problema de filtragem com a matriz $E'E$ que pondera a função custo no PLQ. Esta comparação de matrizes leva à dualidade clássica entre filtragem e controle e que resumimos na Tabela 10. Os parâmetros variáveis no tempo podem ser incluídos tanto para

Filtragem para o SLSM	Controle para o SLSMRT
F_i	A'_i
L_i	B'_i
G_i	C'_i
H_i	D'_i
Σ	$E'E$
$S_i(t)$	$P_i(\ell - t)$
$\eta_i(t)$	$\theta_i(\ell - t)$

Tabela 10 – Dualidade filtragem – controle para sistemas com parâmetros invariantes no tempo.

SLSMs o SLSMRTs, aumentando o estado em termos do par $(\theta(t), t)$, onde $\theta(t) \in \mathbb{I}$ e $t \in \mathbb{T}_\ell$, e considerando uma matriz adequada $\tilde{\mathbb{P}}$ de maior dimensão, neste caso $N \times (\ell + 1)$. Embora esse raciocínio leve a uma matriz $\tilde{\mathbb{P}}$ de alta dimensão, periódica e esparsa, é útil deixar claro que nossos resultados são facilmente adaptáveis a sistemas onde as matrizes são da forma $A_{\theta(t)}(t)$, $B_{\theta(t)}(t)$, etc. Este raciocínio leva a descrever este calculo para sistemas variantes no tempo, e que descrevemos na Tabela 11, e que também generaliza (DAVIS; VINTER, 1984, Tabela 6.1).

O dualidade filtragem – controle já foi explorado em diversos contextos sem parâmetros de salto de Markov. Por exemplo, em (MULLER; ZHUO; DONÁ, 2006; MARE; DONÁ, 2009) a dualidade segue um procedimento natural baseado na clássica formulação “*Primal-Dual*” para problemas de programação linear. Em (ZHANG; DUAN; XIE, 2006; SONG; YAN; YUAN, 2012; SONG; YAN, 2013), também foi explorada esta dualidade para sistemas com atraso sem saltos. Uma característica importante, temos na (ZHANG; DUAN; XIE, 2006, Seção 3.1) que envolve uma reversão temporal do estado do sistema, o que está em harmonia com nossos resultados e inclusive um sistema auxiliar (reverso no escala de tempo) definido no Lema 5.1.

Para SLSMs, a dualidade entre controle e filtragem foi considerada (ABOU-KANDIL; FREILING; JANK, 1995; ABOU-KANDIL G. FREILING; JANK, 2003; DRAGAN; MOROZAN, 2008a; DRAGAN; MOROZAN; STOICA, 2013), enquanto puramente no contexto do SLSM padrão, leva a relações mais complexas envolvendo por exemplo fatores que perturbam as

Filtragem para o SLSM	Controle para o SLSMRT
$F_i(t)$	$A'_i(t)$
$L_i(t)$	$B'_i(t)$
$G_i(t)$	$C'_i(t)$
$H_i(t)$	$D'_i(t)$
Σ	$E'E$
$S_i(t)$	$P_i(\ell - t)$
$\eta_i(t)$	$\theta_i(\ell - t)$

Tabela 11 – Dualidade filtragem – controle para sistemas com parâmetros variantes no tempo.

matrizes do sistema. Aqui, a dualidade segue um caminho natural, simplesmente descrito pela reversão da cadeia de Markov, sem pressupostos adicionais nem construções complexas.

CONCLUSÕES

Neste trabalho obtivemos uma a noção de W -estabilizabilidade que funciona como condição necessária e suficiente para estabilizar um sistema auxiliar como também para o sistema (A, L, P) . Analogamente, se uma sequência de ganhos $K = K(0), K(1), \dots$ fracamente estabiliza um sistema auxiliar / “dual” e as equações em diferença associadas são limitadas, então esta sequência de ganhos também estabiliza o sistema auxiliar (ou também (A, L, P)). Existência e a unicidade das EDRA-F também foram revisitadas. Desde o ponto de vista das sequências estabilizantes podemos generalizar resultados num contexto mais geral, como por exemplo para obter soluções periódicas das EDRA-F. A dinâmica dual das EDRA-F leva para um sistema auxiliar reverso na escala de tempo e que descreve um sistema linear com saltos, onde o salto é definido por um processo revertido na escala de tempo de uma cadeia de Markov. O PLQMRT é descrito de uma maneira compacta em função das variáveis de momento condicionado. A solução do PLQMRT é definida por uma condição trivial quando a distribuição de probabilidade é nula e por EDRA-C quando a distribuição de probabilidade é positiva. Comparando as EDRA-C do problema de controle e as EDRA-F para o problema de filtragem para SLSM obtivemos de maneira simples e harmoniosa a dualidade “controle-filtragem” que estende os resultados já descritos em SLS.

REFERÊNCIAS

ABOU-KANDIL G. FREILING, V. I. H.; JANK, G. **Matrix Riccati Equations in Control Systems Theory**. Basel: Birkhauser, 2003. Citado na página 86.

ABOU-KANDIL, H.; FREILING, G.; JANK, G. On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems. **Automatica**, v. 31, p. 765–768, 1995. Citado nas páginas 69 e 86.

ANTSAKLIS, P. J.; MICHEL, A. N. **Linear Systems**. [S.l.]: Birkhauser, 2006. Citado nas páginas 21 e 27.

BELLMAN, R. Dynamic programming. **New Jersey: Princeton University Press**, 1957. Citado na página 71.

BERTSEKAS, D. P.; TSITSIKLIS, J. N. **Neuro-Dynamic Programming**. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1996. Citado na página 71.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M. R. Riccati difference and differential equations: Convergence, monotonicity and stability. In: _____. **The Riccati Equation**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. p. 263–291. Citado nas páginas 21 e 29.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M. R.; PETERSEN, I. R. Monotonicity and stabilizability properties of solutions of the riccati difference equation: Propositions, lemmas, theorems, fallacious conjectures and counterexamples. **System and Control Letters**, v. 5, 1985. Citado nas páginas 21 e 29.

CHIZECK, H. J.; JI, Y. Optimal quadratic control of jump linear systems with gaussian noise in discrete-time. **Proc 27th Conf on Decision and Control**, p. 1989–1992, 1988. Citado nas páginas 21 e 69.

CHUI, C. K.; CHEN, G. **Linear systems and optimal control**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. Citado na página 21.

CINLAR, E. **Introduction to Stochastic Processes**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1975. Citado na página 27.

COSTA A. N. VARGAS, J. B. R. d. V. E. F. Quadratic costs and second moments of jump linear systems with general Markov chain. **Numerical Linear Algebra with Applications**, 2012. Citado nas páginas 21 e 66.

COSTA, E. F.; ASTOLFI, A. Stochastic detectability and mean bounded error covariance of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters. **Stochastic Analysis and Applications**, 2009. Citado nas páginas 22, 59 e 62.

COSTA, E. F.; do Val, J. B. R. On the detectability and observability for discrete-time Markov jump linear systems. **39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, Sydney**, p. 2355–2360, 2000. Citado na página 22.

_____. On the observability and detectability of continuous-time Markov jump linear systems. **European Control Conference, 2001 Porto, Portugal**, p. 2097–2102, 2001. Citado na página 22.

_____. On the detectability and observability for continuous-time Markov jump linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 41, n. 4, p. 1295–1314, 2002. Citado na página 22.

_____. Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems. **International Journal of Control, Special Issue on Switched and Polytopic Linear Systems**, v. 75, n. 16/17, p. 1282–1292, 2002. Citado nas páginas 22, 41, 45 e 48.

COSTA, E. F.; MANFRIM, A. L. P.; do Val, J. B. R. Weak controllability and weak stabilizability concepts for linear systems with Markov jump parameters. In: **Proc. ACC'06 American Control Conference**. Minneapolis, USA: [s.n.], 2006. Citado na página 40.

COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 8, p. 1685–1689, 1994. Citado nas páginas 32 e 36.

_____. Discrete-time coupled Riccati equations for systems with Markov switching parameters. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 194, p. 197–216, 1995. Citado nas páginas 32 e 36.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. **Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems**. New York: Springer-Verlag, 2005. Citado nas páginas 21, 22, 26, 36, 41, 42, 45, 50, 67 e 69.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. **Continuous-Time Markov Jump Linear Systems**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. ISBN 9783642340994. Citado na página 21.

COSTA, O. L. V.; TUESTA, E. F. Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems. **IEEE Trans. Automat. Control**, v. 48, 2003. Citado nas páginas 69 e 79.

DAVIS, M. H.; VINTER, R. B. **Stochastic Modelling and Control**. [S.l.]: Chapman and Hall, 1984. Citado nas páginas 30 e 86.

do Val, J. B. R.; COSTA, E. F. Stabilizability and positiveness of solutions of the jump linear quadratic problem and the coupled algebraic Riccati equation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 5, p. 691–695, 2005. Citado na página 22.

DRAGAN, V.; COSTA, E. F. Optimal stationary dynamic output-feedback controllers for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters and additive white noise perturbations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 61, n. 12, p. 3912–3924, 2016. Citado na página 21.

DRAGAN, V.; MOROZAN, T. Discrete-time Riccati type equations and the tracking problem. **ICIC Express Letters**, v. 2, n. 2, p. 109–116, 2008. Citado na página 86.

_____. Exponential stability in mean square for a general class of discrete-time linear stochastic systems. **Stochastic Analysis and Applications**, v. 26, n. 3, p. 495–525, 2008. Citado na página 21.

DRAGAN, V.; MOROZAN, T.; STOICA, A. M. **Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2013. ISBN 9781461486633. Citado na página 86.

GOMES, M. J. F.; COSTA, E. F. On the stability of the recursive kalman filter with markov jump parameters. Baltimore, USA, 2010. Citado na página 22.

GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. **Signal Processing Elsevier**, v. 90, n. 10, p. 2171–2181, 2010. Citado na página 78.

GUPTA, V.; MURRAY, R. M.; HASSIBI, B. On the control of jump linear markov systems with markov state estimation. **Proceedings of the American Control Conference**, p. 2893–2898, 2003. Citado na página 78.

GUPTA, V.; MURRAY, R. M.; SHI, L.; SINOPOLI, B. **Networked sensing, estimation and control systems**. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 78.

GUTIERREZ-PACHAS, D. A.; COSTA, E. F. W-alcançabilidade para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto. **XXXV CNMAC Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, v. 3, 2015. Citado nas páginas 40 e 41.

_____. On the linear quadratic problem for systems with time reversed Markov jump parameters and the duality with filtering of Markov jump linear systems. In: . [S.l.: s.n.], 2016. Citado nas páginas 23, 32, 65 e 84.

HESPANHA, J. P. **Linear Systems Theory**. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. Citado nas páginas 21, 27 e 29.

HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABIRZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, p. 138–162, 2007. Citado na página 78.

JI, Y.; CHIZECK, H. J.; FENG, X.; LOPARO, K. A. Stability and control of discrete-time jump linear systems. **Control Theory and Advanced Tecnology**, v. 7, n. 2, p. 247–269, 1991. Citado na página 21.

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. **Journal of Basic Engineering**, v. 83, n. 1, 1963. Citado na página 21.

MARE, J. B.; DONÁ, J. A. D. Symmetry between constrained reference tracking and constrained state estimation. **Automatica**, n. 45, 2009. Citado na página 86.

MULLER, C.; ZHUO, X. W.; DONÁ, J. A. D. Duality and symmetry in constrained estimation and control problems. **Automatica**, 2006. Citado na página 86.

NARVAEZ, A. R. R.; COSTA, E. F. On the controllability of continuous-time markov jump linear systems. In: **Proc. IFAC 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control**. Milano, Italy: [s.n.], 2011. Citado na página 41.

NARVÁEZ, A. R. R.; COSTA, E. F. Average reachability of continuous-time markov jump linear systems and the linear minimum mean square estimator. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 54, n. 4, 2016. Citado nas páginas 21, 22, 41, 58 e 59.

PALMA, J. M.; CARVALHO, L. D. P.; GONÇALVES, A. P. C.; GALARZA, C. E.; de OLIVEIRA, A. M. Networked control systems application: Minimization of the global number networked control systems application: minimization of the global number of interactions, transmissions and receptions in multi-hop network using discrete-time markovian jump linear systems. **IEEE Latin America Transactions**, v. 14(6), p. 2675–2680, 2016. Citado na página 78.

RAN, A.; VREUGDENHIL, R. Existence and comparison theorems for algebraic riccati equations for continuous- and discrete-time systems. **Linear Algebra and its Applications**, v. 99, p. 63–83, 1988. Citado na página 21.

RUDERMAN, M.; KRETTEK, J.; HOFFMANN, F.; BERTRAM, T. Optimal state space control of dc motor. In: ELSEVIR (Ed.). **Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea**. [S.l.: s.n.], 2008. v. 41, n. 2, p. 5796–5801. Citado na página 77.

SANGSUK-IAM, S.; BULLOCK, T. E. Analysis of discrete-time kalman filtering under incorrect noise covariances. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 35, n. 12, p. 1304–1309, Dec 1990. ISSN 0018-9286. Citado nas páginas 22 e 58.

SCHINAZI, R. B. **Classical and spatial stochastic processes**. [S.l.]: Springer Science + Bussines Media, LLC, 1999. Citado nas páginas 27 e 69.

SONG, X.; YAN, X. Duality of linear estimation for multiplicative noise systems with measurement delay. **IET Signal Processing**, 2013. Citado na página 86.

SONG, X.; YAN, X.; YUAN, D. Optimal linear estimation for multiplicative noise systems with delay and its duality. **Proceedings of the 31st Chinese Control Conference**, 2012. Citado na página 86.

VAL, J. do; BASAR, T. Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 23, p. 1099–1131, 1999. Citado na página 21.

VARGAS, A.; COSTA, E.; VAL, J. do. **Advances in the Control of Markov Jump Linear Systems with No Mode Observation**. Springer International Publishing, 2016. (SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering). ISBN 9783319398358. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PHdBDAAAQBAJ>>. Citado na página 66.

VARGAS, A. N.; BORTOLIN, D. C.; COSTA, E. F.; VAL, J. B. do. Gradient-based optimization techniques for the design of static controllers for markov jump linear systems with unobservable modes. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 28, n. 3, 2015. Citado na página 21.

WIMMER, H. K.; PAVON, M. A comparison theorem for matrix riccati difference equations. **Systems & Control Letters**, v. 19, n. 3, p. 233–239, 1992. Citado nas páginas 21 e 29.

ZHAI, D.; AN, L.; LI, J.; ZHANG, Q. Fault detection for stochastic parameter-varying Markovian jump systems with application to networked control systems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40(3), p. 2368–2383, 2016. Citado na página 78.

ZHANG, H.; DUAN, G.; XIE, L. Linear quadratic regulation for linear time-varying systems with multiple input delays. **Automatica**, n. 42, p. 1465–1476, 2006. Citado nas páginas 22, 66 e 86.