Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Programa de Pós Graduação em Ciências de Computação e
Matemática Computacional

Desenvolvimento de um
Sistema de Simulação de
Escoamentos de Fluidos com
Superfícies Livres Bidimensionais

JULIANA DE OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. ANTONIO CASTELO FILHO

*Disse. o apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, da
Universic de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre
em Ciênc na área de “Ciências de Computação e Matemática Computacional”.*

USP - São Carlos
1999

Aos meus pais: Ailton e Marilú.

Agradecimentos

À Deus pela vida.

Ao Prof. Dr. Antonio Castelo Filho pela orientação, ensinamentos, dedicação, apoio e amizade no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Ailton e Marilú, por tudo que sou, pelo carinho, incentivo e compreensão.

Às minhas irmãs, Silmara e Suzeli, e ao meu cunhado Wagner pelo carinho, incentivo e apoio.

Ao meu sobrinho Victor por alegrar minha vida e a de minha família.

Ao Prof. Dr. Murilo F. Tomé pelas inúmeras dúvidas esclarecidas.

À Cris por me mostrar que para a verdadeira amizade não existe distância.

À Alê pela amizade desde a época da graduação.

Ao Garga pela ajuda no LCAD, e principalmente pela amizade.

Aos amigos da graduação, da matemática computacional, da computação e da elétrica pela amizade, ajuda, festas e boas risadas.

A todos os professores do ICMC-USP e funcionários dos laboratórios, secretarias, biblioteca, seções da graduação e da pós que de forma direta e/ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Este trabalho apresenta um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres, denominado Freeflow-2D. Este sistema é composto por quatro módulos: um modelador de moldes e escoamentos - Modflow-2D, um simulador de escoamentos - Simflow-2D, um visualizador de escoamentos - Visflow-2D e um reiniciador de escoamentos - Resimflow-2D. A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos. O Freeflow-2D implementa o método GENSMAC e foi baseado na estrutura de dados do Freeflow-3D. Os objetos geométricos (fluidos, contêineres, injetores e ejetores) são representados pela estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*).

Alguns resultados de simulação utilizando este sistema são apresentados e comparados com os do sistema Freeflow.

Abstract

This work presents an integrated environment for the simulation of the two-dimensional incompressible flows with free surfaces, named Freeflow-2D. This system consist of four modules: a geometric model module - Modflow-2D, a simulation module - Simflow-2D, a visualization module - Visflow-2D and a restart module - Resimflow-2D. The communication between the modules is made by means of files. The Freeflow-2D employed the GENSMAC method and was based in the data structure of the Freeflow-3D. The geometric objects (fluids, containers, inflows and outflows) are represented by a B-Rep (Boundary Representation) data structure.

Some results of the simulation using this system are presented and compared to the results of the Freeflow system.

Sumário

Introdução	1
1 Equações de Navier-Stokes	3
1.1 Considerações Iniciais	3
1.2 Equações de Navier-Stokes	4
1.3 Desenvolvimento das Equações de Momento, da Continuidade e da Razão de Cisalhamento	5
1.4 Condições de Contorno na Superfície Livre	10
1.5 Considerações Finais	12
2 Estudo do Método GENSMAC	13
2.1 Considerações Iniciais	13
2.2 GENSMAC	13
2.3 Algoritmo Computacional	14
2.4 Considerações Finais	17
3 Discretizações	18
3.1 Considerações Iniciais	18
3.2 Equações Básicas	19
3.3 Discretização da Razão de Cisalhamento $q_{i,j}$	23
3.4 Equação de Momento Discretizada	25
3.5 Discretização da Equação de Poisson	26
3.6 Definição das Células	28
3.7 Condições de Contorno na Superfície Livre	29
3.8 Controle do Passo no Tempo	32
3.9 A Solução da Equação de Poisson	33
3.10 Movimento das Partículas	33
3.11 Considerações Finais	34
4 O Ambiente de Simulação Freeflow	35
4.1 Considerações Iniciais	35
4.2 Freeflow	35
4.3 Modelador	36

4.4	Interface de Entrada de Dados	37
4.5	Simulador	37
4.6	Visualizador	38
4.7	Considerações Finais	39
5	O Ambiente de Simulação Freeflow-3D	40
5.1	Considerações Iniciais	40
5.2	Freeflow-3D	40
5.3	Modelador	42
5.4	Simulador	43
5.5	Visualizador	45
5.6	Reiniciador	46
5.7	Comunicação entre os Módulos	46
5.8	Considerações Finais	47
6	O Ambiente de Simulação Freeflow-2D	48
6.1	Considerações Iniciais	48
6.2	Freeflow-2D	48
6.3	Estrutura de Dados	49
6.4	Modelador	55
6.5	Simulador	83
6.6	Visualizador	98
6.7	Reiniciador	103
6.8	Comunicação entre os Módulos	105
6.9	Considerações Finais	106
7	Resultados	108
7.1	Considerações Iniciais	108
7.2	Resultados	108
7.3	Considerações Finais	129
	Conclusão	130
	Bibliografia	132

Lista de Figuras

3.1	Configuração de uma célula	19
3.2	Domínio, malha e células	29
3.3	Célula S com o lado direito em contato com uma célula V	30
3.4	Célula S com dois lados em contato com células V	31
5.1	Célula, discretização da pressão e velocidade	44
5.2	Células e intersecções com as retas	46
6.1	Cortes dos sólidos	50
6.2	Níveis hierárquicos da estrutura de dados	50
6.3	Disposição e ordem de uma árvore seguindo primeiro por linha	52
6.4	Estrutura do contêiner	53
6.5	Estrutura do injetor	54
6.6	Estrutura do ejetor	55
6.7	Interface principal do modelador	56
6.8	Opções do <i>File</i>	56
6.9	Entrada de dados para a criação de um modelo	57
6.10	Opção de recarregar um modelo	58
6.11	Salvar o modelo	58
6.12	Salvar o modelo com outro nome e/ou em outro arquivo	58
6.13	Salvar os dados do modelo	59
6.14	Informações sobre o modelo	59
6.15	Informações sobre a estrutura B-Rep	60
6.16	Fim da execução do modelador no caso do modelo não ter sido salvo	61
6.17	Fim da execução do modelador no caso do modelo já ter sido salvo	61
6.18	Opções do <i>Edit</i>	61
6.19	Opções do <i>Insert</i>	62
6.20	Opções do <i>Container</i>	62
6.21	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Box</i> reto	63
6.22	Visualização de um contêiner do tipo <i>Box</i> reto	63
6.23	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Box</i> inclinado	64
6.24	Visualização de um contêiner do tipo <i>Box</i> inclinado	64

6.25	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Box</i> reto no plano x e orientação positiva	65
6.26	Visualização de um contêiner do tipo <i>Box</i> reto no plano x e orientação positiva	65
6.27	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Cube</i>	66
6.28	Visualização de um contêiner do tipo <i>Cube</i>	66
6.29	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Square-Torus</i>	67
6.30	Visualização de um contêiner do tipo <i>Square-Torus</i>	67
6.31	Entrada de dados de um contêiner do tipo <i>Box-Cilinder</i>	68
6.32	Visualização de um contêiner do tipo <i>Box-Cilinder</i>	68
6.33	Opção do <i>Inflow</i>	69
6.34	Entrada de dados de um injetor do tipo <i>Cube</i>	69
6.35	Visualização de um injetor do tipo <i>Cube</i>	70
6.36	Opções do <i>Fluid</i>	70
6.37	Entrada de dados de um fluido do tipo <i>Cube</i>	71
6.38	Visualização de um fluido do tipo <i>Cube</i>	71
6.39	Entrada de dados de um fluido do tipo <i>Sphere</i>	72
6.40	Visualização de um fluido do tipo <i>Sphere</i>	72
6.41	Opções do <i>View</i>	73
6.42	Visualização do modelo pelas suas arestas	73
6.43	Visualização do modelo preenchido	74
6.44	Opções do <i>View Options</i>	74
6.45	Opções do <i>Viewing Parameters</i>	75
6.46	Opções para mudar o comprimento e a largura da janela	75
6.47	Exemplo de comprimento e de largura da janela	76
6.48	Opções para rotacionar, diminuir ou aumentar, translacionar em x e em y o modelo	76
6.49	Exemplo de modelo rotacionado, diminuído, transladado em x e em y	77
6.50	Opções para mudar as cores de fundo da janela, das arestas, do domínio, da malha, dos eixos x e y	77
6.51	Opções para mudar as cores de fundo da janela e das arestas	78
6.52	Exemplo de cor de fundo da janela e das arestas modificados	78
6.53	Opção de visualização do domínio	78
6.54	Visualização do domínio	79
6.55	Opção de visualização da malha	79
6.56	Visualização da malha	79
6.57	Opção de visualização dos eixos x e y	80
6.58	Visualização dos eixos x e y	80
6.59	Opção de salvar as configurações	81
6.60	Opção de restaurar as configurações	81
6.61	Opção de <i>Auto Redraw</i> desativada	82

6.62	Opção <i>Objects Properties</i>	82
6.63	Propriedade <i>Visible</i> do contêiner 2 desativada e a propriedade <i>Color</i> do contêiner 1 modificada	82
6.64	Modelo com contêiner 2 invisível e a cor do contêiner 1 modificada	83
6.65	Célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V	85
6.66	Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V	85
6.67	Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V	86
6.68	Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V	87
6.69	Células i, j e $i + 1, j$ são S e as células $i, j + 1$ e $i + 1, j + 1$ são V	88
6.70	Células i, j e $i, j + 1$ são S e as células $i + 1, j$ e $i + 1, j + 1$ são V	88
6.71	Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C	89
6.72	Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C	90
6.73	Plano x e y, e orientação dos possíveis injetores	91
6.74	Célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V	92
6.75	Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V	93
6.76	Eliminação do vértice v_3 e da aresta a_3	94
6.77	Vértice v_3 e aresta a_3 eliminadas	95
6.78	Célula dividida em quatro partes	95
6.79	Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual	96
6.80	Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual	97
6.81	Interface principal do visualizador	99
6.82	Opções do <i>File</i>	99
6.83	Opção de manipulação de arquivos	100
6.84	Seleção de um novo tempo	100
6.85	Fim da execução do visualizador	101
6.86	Opções do <i>View</i>	101
6.87	Visualização da pressão	102
6.88	Visualização da velocidade na direção x	102
6.89	Visualização da velocidade na direção y	103
6.90	Interface principal do reiniciador	104
6.91	Opções do <i>File</i>	104
6.92	Dados do modelo que podem ser alterados	105
7.1	$t = 0.05$ e $t = 0.1$	109
7.2	$t = 0.15$ e $t = 0.2$	109
7.3	$t = 0.25$ e $t = 0.3$	110
7.4	$t = 0.15$ e $t = 0.25$	111
7.5	$t = 0.35$ e $t = 0.45$	111
7.6	$t = 0.65$ e $t = 0.85$	112
7.7	$t = 0.1$	113
7.8	$t = 0.2$	113
7.9	$t = 0.3$	114

7.10	$t = 0.4$	114
7.11	$t = 0.15$	115
7.12	$t = 0.2$	116
7.13	$t = 0.25$	116
7.14	$t = 0.3$	117
7.15	$t = 0.35$	117
7.16	$t = 0.0125$	119
7.17	$t = 0.025$	119
7.18	$t = 0.0375$	120
7.19	$t = 0.05$	120
7.20	Pressão	121
7.21	Velocidade em x	121
7.22	Velocidade em y	122
7.23	$t = 0.05$	123
7.24	$t = 0.1$	123
7.25	$t = 0.15$	124
7.26	$t = 0.2$	124
7.27	$t = 0.25$	125
7.28	$t = 0.325$	126
7.29	$t = 0.375$	126
7.30	$t = 0.425$	127
7.31	$t = 0.45$	127
7.32	$t = 0.5$	128
7.33	$t = 0.7$	128

Introdução

A modelagem e simulação de muitos problemas em mecânica dos fluidos tornou-se possível devido não só ao avanço da tecnologia computacional, como também das técnicas numéricas.

Nas últimas três décadas muitos problemas em dinâmica dos fluidos, como o escoamento de fluidos com superfícies livres, têm sido estudados. Como exemplo de aplicação tem-se o preenchimento de cavidades (indústria alimentícia) e injeção em moldes (indústria siderúrgica e de plástico).

Muitos pesquisadores têm obtido sucesso ao tratar escoamentos de fluidos com superfícies livres utilizando o método de diferenças finitas. O método MAC (Marker-and-Cell) [1], introduzido por Harlow e Welch, foi uma das primeiras técnicas a resolver satisfatoriamente problemas com superfícies livres. Este método utiliza partículas virtuais que representam o fluido, cujas coordenadas são armazenadas e movem-se de uma célula a outra de acordo com a última velocidade calculada, se a célula contém uma partícula considera-se que contém fluido, assim fornecendo a visualização da superfície livre.

Em seguida, Amsden e Harlow desenvolveram o método SMAC [2] (que é o método MAC Simplificado) o qual divide os ciclos de cálculos em duas partes: velocidade e pressão. Não existindo, assim, processo iterativo envolvendo velocidade e pressão, evitando-se algumas dificuldades encontradas no método MAC.

Em 1994, Tomé e McKee desenvolveram o método GENSMAC [3] [4], baseando-se no método SMAC, para escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos incompressíveis com superfícies livres em domínios complexos. Posteriormente, o método GENSMAC foi expandido para tratar fluidos não newtonianos.

Baseado no método GENSMAC, foi desenvolvido um ambiente de modelagem, simulação e visualização de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres denominado Freeflow [5], mas este sistema possui uma estrutura de dados de difícil extensão.

Por existir muitos problemas originalmente tridimensionais foi desenvolvido no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, o sistema Freeflow-3D [6], um sistema de modelagem, simulação e visualização de escoamento de fluidos com superfícies livres tridimensionais. Neste sistema, é implementado o método GENSMAC-3D [11], que é uma extensão do método GENSMAC.

O projeto aqui descrito objetivou investigar estes sistemas e assuntos correlatos, para a implementação de ambientes de simulação bi e tridimensional integrados. Com isto, foi desenvolvido o ambiente de simulação Freeflow-2D, um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres. O Freeflow-2D baseia-se no método GENSMAC e na estrutura de dados do Freeflow-3D.

O presente trabalho é composto de sete capítulos mais a conclusão. No capítulo 1 é apresentado o estudo das equações de Navier-Stokes e condições de fronteira para escoamentos com superfícies livres. O capítulo 2 trata do estudo do método GENSMAC. No capítulo 3, são mostradas as discretizações das equações por diferenças finitas. O capítulo 4 descreve o ambiente de simulação Freeflow. No capítulo 5 é estudado o ambiente de simulação Freeflow-3D. No capítulo 6 é apresentado o ambiente de simulação Freeflow-2D. No capítulo 7 tem-se alguns resultados de simulações realizadas pelo Freeflow-2D. E por fim, tem-se as conclusões e contribuições deste trabalho.

Capítulo 1

Equações de Navier-Stokes

1.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo estudam-se as equações de Navier-Stokes que governam o movimento de um fluido, a equação da razão de cisalhamento e as condições de contorno na superfície livre do fluido.

Faz-se necessário, primeiramente, que sejam apresentadas algumas definições [7], como por exemplo, de fluido e de parâmetros adimensionais.

Fluido é uma substância que se deforma continuamente com o tempo e no espaço e toma a forma do recipiente onde se encontra. Escoamento transiente é aquele que varia com o tempo. Escoamento laminar é aquele cujo a estrutura é caracterizada pelo movimento suave em lâminas ou camadas. Escoamento turbulento é aquele cuja estrutura é caracterizada por movimentos aleatórios de partículas fluidas adicionais ao movimento principal. Um fluido incompressível é aquele que possui massa específica constante em todo o domínio. Um fluido newtoniano é aquele que possui viscosidade constante em todo o domínio.

Na década de 1880, Osborne Reynolds, engenheiro britânico, estudou a transição entre regimes laminar e turbulento num tubo. Ele descobriu que o parâmetro adimensional

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

é um critério pelo qual o regime do escoamento pode ser determinado, onde L é um comprimento característico, descritivo da geometria do campo de escoamentos, ρ é a densidade, μ a viscosidade aparente, ν a viscosidade cinemática e U a velocidade. Esse parâmetro recebeu o nome de número de Reynolds. O número de Reynolds é a razão entre forças de inércia e viscosas, que têm papel importante no escoamento do fluido.

Willian Froude foi um engenheiro naval britânico e, juntamente com seu filho, Robert Edmund Froude, descobriram que o parâmetro

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}},$$

onde g é a gravidade, era significativo para escoamentos com efeitos de superfície livre. Elevando o número de Froude ao quadrado, tem-se:

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gL} = \frac{\rho U^2 L^2}{\rho g L^3},$$

que pode ser interpretado como a razão entre forças de inércia e de gravidade. Esta razão tem papel importante no escoamento do fluido.

Dois escoamentos são semelhantes se eles tiverem números de Reynolds e de Froude muito próximos. Os números de Reynolds e de Froude serão utilizados para adimensionalizar as equações de Navier-Stokes e as condições de contorno na superfície livre.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 1.2 é apresentada as equações de Navier-Stokes, na seção 1.3 é realizado o desenvolvimento das equações de momento, da continuidade e da razão de cisalhamento, na seção 1.4 apresenta-se as condições de contorno na superfície livre e, por fim, na seção 1.5 são feitas algumas considerações finais sobre este capítulo.

1.2 Equações de Navier-Stokes

Escoamentos transientes, laminares e incompressíveis são regidos pelas equações de Navier-Stokes [8]:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad \text{equação de momento} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{equação da continuidade,} \quad (1.2)$$

onde ρ é a densidade, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a velocidade ($\mathbf{x}$ é a posição no espaço e t é o tempo), $\mathbf{g}$ o campo gravitacional e

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.3)$$

a tensão, sendo que p é a pressão, $\mathbf{I}$ a matriz identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor extra tensão.

O tensor $\boldsymbol{\tau}$ é dado pela equação:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(q)\mathbf{d}, \quad (1.4)$$

onde $\mu(q)$ é a viscosidade aparente dependente da razão de cisalhamento local

$$q = (2\text{tr}(\mathbf{d}^2))^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

e

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (1.6)$$

é o tensor razão de deformação. A viscosidade $\mu = \rho\nu$, onde ν é a viscosidade cinemática ($\frac{\mu}{\rho}$).

1.3 Desenvolvimento das Equações de Momento, da Continuidade e da Razão de Cisalhamento

Em coordenadas cartesianas O_{xy} , com $\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Então 1.6 fica:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Logo 1.4 pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(q) \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Portanto, 1.3 fica como se segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu(q)\frac{\partial u}{\partial x} & \mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & -p + 2\mu(q)\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \sigma &= \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(-p + 2\mu(q)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})) + \frac{\partial}{\partial y}(-p + 2\mu(q)\frac{\partial v}{\partial y}) \end{array} \right] = \\
&= \left[\begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(q)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \mu(q)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + 2\frac{\partial \mu(q)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu(q)}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(q)(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + \mu(q)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + 2\frac{\partial \mu(q)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu(q)}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \end{array} \right]. \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Considerando o operador de Laplace: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, pode-se escrever 1.9 na forma vetorial:

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \mu(q)\nabla^2 \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^t]. \quad (1.10)$$

Utilizando-se da identidade vetorial:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$$

e por 1.2 tem-se:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \end{array} \right]. \quad (1.11)$$

De 1.11 a equação 1.10 fica:

$$\nabla \cdot \sigma = \left[\begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(q)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + [2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mu(q)}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\frac{\partial \mu(q)}{\partial y}] \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu(q)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + [(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\frac{\partial \mu(q)}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \mu(q)}{\partial y}] \end{array} \right]. \quad (1.12)$$

Seja

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

assim,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (1.13)$$

Desenvolvendo 1.13:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^t) = \nabla \cdot \left[\begin{array}{cc} u^2 & (uv) \\ (vu) & v^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (vu)}{\partial y} \\ \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \end{array} \right].$$

Portanto, 1.13 torna-se:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^t) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \end{array} \right]. \quad (1.14)$$

Dividindo 1.1 por ρ , tem-se:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}. \quad (1.15)$$

Por 1.12 e 1.14, pode-se escrever 1.15 da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \nu(q) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \frac{1}{\rho} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mu(q)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu(q)}{\partial y} \right] + g_x \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \nu(q) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu(q)}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \mu(q)}{\partial y} \right] + g_y, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $\mathbf{g} = (g_x, g_y)^t$.

Fazendo a adimensionalização [9] das equações 1.16 e 1.17, onde L é o comprimento, U a velocidade e ν_0 a viscosidade, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U \bar{\mathbf{u}} \\ x &= L \bar{x} \\ \nu &= \nu_0 \bar{\nu} \\ t &= \frac{L}{U} \bar{t} \\ p &= \rho U^2 \bar{p} \\ \mathbf{g} &= g \bar{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

e substituindo 1.18 em 1.16 e 1.17, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U \bar{u}}{\partial \frac{L}{U} \bar{t}} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho U^2 \bar{p}}{\partial L \bar{x}} - \frac{\partial U^2 \bar{u}^2}{\partial L \bar{x}} - \frac{\partial U^2 (\bar{v} \bar{u})}{\partial L \bar{y}} + \nu_0 \bar{\nu}(q) \frac{\partial}{\partial L \bar{y}} \left(\frac{\partial U \bar{u}}{\partial L \bar{y}} - \frac{\partial U \bar{v}}{\partial L \bar{x}} \right) + \\ & \frac{1}{\rho} \left[2 \frac{\partial U \bar{u}}{\partial L \bar{x}} \frac{\partial \mu(q)}{\partial L \bar{x}} + \left(\frac{\partial U \bar{u}}{\partial L \bar{y}} + \frac{\partial U \bar{v}}{\partial L \bar{x}} \right) \frac{\partial \mu(q)}{\partial L \bar{y}} \right] + g \bar{g}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U\bar{v}}{\partial \frac{L}{\bar{y}}\bar{t}} = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho U^2 \bar{p}}{\partial L\bar{y}} - \frac{\partial U^2(\bar{u}\bar{v})}{\partial L\bar{x}} - \frac{\partial U^2 \bar{v}^2}{\partial L\bar{y}} - \nu_0 \bar{\nu}(q) \frac{\partial}{\partial L\bar{x}} \left(\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{y}} - \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{x}} \right) + \\ & \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{y}} + \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{x}} \right) \frac{\partial \mu(q)}{\partial L\bar{x}} + 2 \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{y}} \frac{\partial \mu(q)}{\partial L\bar{y}} \right] + g\bar{g}_y,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = & -\frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} - \frac{U^2}{L} \frac{\partial (\bar{v}\bar{u})}{\partial \bar{y}} + \nu_0 \bar{\nu}(q) \frac{U}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \\ & \nu_0 \frac{U}{L^2} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} \right] + g\bar{g}_x\end{aligned}\quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = & -\frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{U^2}{L} \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial \bar{x}} - \frac{U^2}{L} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} - \nu_0 \bar{\nu}(q) \frac{U}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \\ & \nu_0 \frac{U}{L^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} \right] + g\bar{g}_y.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Dividindo 1.19 e 1.20 por $\frac{U^2}{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial (\bar{v}\bar{u})}{\partial \bar{y}} + \frac{\nu_0 \bar{\nu}(q)}{UL} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \\ & \frac{\nu_0}{UL} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{Lg}{U^2} \bar{g}_x \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} - \frac{\nu_0 \bar{\nu}(q)}{UL} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \\ & \frac{\nu_0}{UL} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\nu}(q)}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{Lg}{U^2} \bar{g}_y.\end{aligned}$$

Para que a notação fique menos carregada, elimina-se a barra sobre as variáveis u, x, ν, y, v, t, p e g :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial (vu)}{\partial y} + \frac{\nu_0 \nu(q)}{UL} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\nu_0}{UL} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] + \frac{Lg}{U^2} g_x\end{aligned}\quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\nu_0 \nu(q)}{UL} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\nu_0}{UL} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] + \frac{Lg}{U^2} g_y.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Assim, as equações 1.21 e 1.22 podem ser escritas utilizando-se o número de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu_0}$ e o número de Froude $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nu(q) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] \\ & + \frac{1}{Fr^2} g_x\end{aligned}\quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{1}{Re} \nu(q) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] \\ & + \frac{1}{Fr^2} g_y.\end{aligned}\quad (1.24)$$

A equação 1.2 adimensionalizada fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.25)$$

Será conveniente escrever 1.1 e 1.2 da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + N(\mathbf{u}) \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.27)$$

onde $N(\mathbf{u})$ é:

$$N_1 = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{1}{Re}\nu(q)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{Re}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \nu(q)}{\partial y}\right] + \frac{1}{Fr^2}g_x \quad (1.28)$$

$$N_2 = -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{1}{Re}\nu(q)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{Re}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \nu(q)}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \nu(q)}{\partial y}\right] + \frac{1}{Fr^2}g_y. \quad (1.29)$$

Desenvolvendo a equação 1.5.

Seja

$$d^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação da razão de cisalhamento é escrita como:

$$q = \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

1.4 Condições de Contorno na Superfície Livre

Este estudo ocupou-se com escoamento transiente de fluido viscoso em superfície livre numa atmosfera passiva (onde pode-se assumir a pressão como sendo igual a zero). Na ausência de tensão na superfície as componentes normal e tangencial de tensão devem ser contínuas sobre a superfície livre, tal que:

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (1.31)$$

e

$$\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (1.32)$$

onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ e $\mathbf{m} = (-n_y, n_x)$ denotam vetor normal unitário e vetor tangente, respectivamente à superfície.

Desenvolvendo as equações 1.31 e 1.32.

Da equação 1.8:

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-p + 2\mu(q)\frac{\partial u}{\partial x})n_x + \mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})n_y \\ \mu(q)(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})n_x + (-p + 2\mu(q)\frac{\partial v}{\partial y})n_y \end{bmatrix}$$

Então, 1.31 e 1.32 ficam:

$$\begin{aligned} -p(n_x^2 + n_y^2) + 2\rho\nu(q)\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_xn_y + \frac{\partial v}{\partial y}n_y^2\right) &= 0 \\ -2\frac{\partial u}{\partial x}n_xn_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(n_x^2 - n_y^2) + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_xn_y &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando-se as equações 1.18, é introduzida a adimensionalização nas equações anteriores. Então:

$$-\rho U^2 \bar{p}(n_x^2 + n_y^2) + 2\rho\nu_0 \bar{\nu}(q)\left(\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{x}}n_x^2 + \left(\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{y}} + \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{x}}\right)n_xn_y + \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{y}}n_y^2\right) = 0 \quad (1.33)$$

$$-2\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{x}}n_xn_y + \left(\frac{\partial U\bar{u}}{\partial L\bar{y}} + \frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{x}}\right)(n_x^2 - n_y^2) + 2\frac{\partial U\bar{v}}{\partial L\bar{y}}n_xn_y = 0. \quad (1.34)$$

Dividindo a equação 1.33 por ρU^2 ,

$$-\bar{p}(n_x^2 + n_y^2) + \frac{2\nu_0 \bar{\nu}(q)}{LU}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}n_x^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right)n_xn_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}n_y^2\right) = 0. \quad (1.35)$$

Dividindo a equação 1.34 por $\frac{U}{L}$,

$$-2\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}n_xn_y + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right)(n_x^2 - n_y^2) + 2\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}n_xn_y = 0.$$

Voltando a notação menos carregada p, ν, u, x, y, v e utilizando o número de Reynolds na equação 1.35, as equações 1.31 e 1.32 ficam:

$$-p + \frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_xn_y + \frac{\partial v}{\partial y}n_y^2\right) = 0 \quad (1.36)$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}n_xn_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(n_x^2 - n_y^2) + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_xn_y = 0. \quad (1.37)$$

1.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram introduzidas algumas definições como de fluidos e dos parâmetros adimensionais: números de Reynolds e Froude. Em seguida, foram apresentadas e desenvolvidas as equações de Navier-Stokes, da razão de cisalhamento e das condições de contorno na superfície livre. Estas equações serão discretizadas no capítulo 3 e são fundamentais para o desenvolvimento do método GENSMAC que é apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Estudo do Método GENSMAC

2.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta o método GENSMAC desenvolvido por Tomé e McKee em 1994. Este método trabalha com escoamentos bidimensionais de fluidos incompressíveis com superfícies livres, e sobre ele foram desenvolvidos os projetos relacionados com este trabalho.

A disposição deste capítulo é a seguinte: na seção 2.2 realiza-se a apresentação do GENSMAC, na seção 2.3 está o algoritmo computacional e, finalizando, na seção 2.4 são feitas algumas considerações finais sobre este capítulo.

2.2 GENSMAC

O método MAC (Marker-and-Cell) é uma técnica baseada em diferenças finitas em redes alternadas para investigar a dinâmica de um fluido viscoso incompressível, que tem como objetivo a visualização da dinâmica do escoamento. Foi primeiramente introduzido por Harlow e Welch e utiliza-se de variáveis primitivas de pressão e velocidade. Tem particular aplicação na modelagem de escoamentos de fluidos com superfícies livres.

Uma característica chave deste método é o uso de partículas virtuais cujas coordenadas são armazenadas e que se movem de uma célula a outra de acordo com a última velocidade calculada, se a célula contém uma partícula considera-se que contém fluido, assim fornecendo a visualização da superfície livre.

Amsden e Harlow, subsequentemente, desenvolveram o método MAC Simplificado (SMAC), o qual evita algumas dificuldades do método original por dividir o ciclo de cálculos em duas partes: uma para a velocidade e outra para a pressão a fim de que não exista processo iterativo envolvendo velocidade e pressão.

O método GENSMAC é o método SMAC modificado para simular escoamentos de fluido com superfícies livres em domínios gerais quando a condição de não escorregamento (*no-slip*) e de escorregamento livre (*free-slip*) é imposta em fronteiras curvas. Ele resolve as equações de Navier-Stokes bidimensionais em coordenadas cartesianas para um fluido viscoso incompressível newtoniano.

O método, como atualmente está implementado, tem as seguintes características:

- (i) O código foi escrito em FORTRAN estruturado com destaque para FORTRAN 90.
- (ii) É capaz de resolver escoamento de fluido com superfícies livres em domínios bidimensionais arbitrários, formados por segmentos de retas e circunferências.
- (iii) Calcula automaticamente o passo no tempo para reduzir o efeito da restrição de estabilidade.
- (iv) Utiliza o método dos gradientes conjugados para resolver a equação de Poisson para o campo de velocidade atualizado.
- (v) Inclui uma aproximação precisa das condições de tensão nas superfícies livres.
- (vi) Pode simular escoamentos envolvendo várias fronteiras injetoras e ejetoras.

2.3 Algoritmo Computacional

As equações básicas para escoamento viscoso incompressível bidimensional dependente do tempo são as equações 1.1 e 1.2, que na forma adimensionalizada são 1.23, 1.24 e 1.25.

Com partículas marcadoras usadas para representar o fluido, as equações são resolvidas em uma rede alternada para o tempo presente. As partículas virtuais são movimentadas resolvendo-se $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$ ($\mathbf{x} = (x, y)^t$ e $\mathbf{u} = (u, v)^t$).

Mais precisamente, o procedimento pode ser exposto como segue. Suponha que no tempo dado t_0 , o campo de velocidade é conhecido e as condições de fronteira para a velocidade e pressão são dadas. O campo de velocidade atualizado $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, onde $t = t_0 + \delta t$, é então calculado como segue:

- (i) Através de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$, calcula-se $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_0)$ e $\nu(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_0))$.
- (ii) Seja $\tilde{p}(\mathbf{x}, t_0)$ uma pressão arbitrária que é consistente com a condição de tensão normal correta na superfície livre em $t = t_0$.
- (iii) Calcula-se um campo de velocidade intermediária, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ através de

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + N(\mathbf{u}) \quad (2.1)$$

com $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$, usando-se a condição de fronteira correta para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$. Resolve-se a equação 2.1 através do método de Euler explícito.

Subtraindo 2.1 de 1.26, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla(p - \tilde{p}). \quad (2.2)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados, obtém-se:

$$\nabla \wedge \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right] = \nabla \wedge (-\nabla(p - \tilde{p})),$$

onde

$$\nabla \wedge \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right] = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \wedge (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right] = 0$$

no qual implica que

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{para algum } f(\mathbf{x}), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta t].$$

Como, $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ em $t = t_0$, então

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \nabla \wedge \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{em } t = t_0.$$

Portanto, obtém-se que $f(\mathbf{x}) = 0$.

Assim $\nabla \wedge (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 0$ para $t \in [t_0, t_0 + \delta t]$ (o qual mostra que a “vorticidade” associada com $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ são as mesmas). Porém $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ não satisfaz $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$. Portanto, há uma função escalar $\psi(\mathbf{x}, t)$ tal que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Tomando o divergente em ambos os lados, tem-se:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) = \nabla \cdot (-\nabla \psi(\mathbf{x}, t))$$

e por 1.27, obtém-se:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

e assim tem-se a equação de Poisson para a função ψ .

(iv) Para a equação 2.4, as condições de fronteiras adequadas são:

$$\psi = 0 \quad \text{na superfície livre} \quad (\text{condição homogênea de Dirichlet}) \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{fronteira rígida} \quad (\text{condição homogênea de Newmann}), \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{n}$ é a direção normal ao contorno rígido.

Quando se impõe as condições de contorno de não escorregamento e de escorregamento livre em 2.6, a velocidade normal ao contorno deve ser nula. Para a equação 2.4 tem-se que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ satisfaz as mesmas condições de contorno impostas para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Como as “fronteiras virtuais” coincidem com as linhas da malha, obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

onde se $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ então $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ e se $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ então $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$.

A condição 2.5 deriva do fato que $\tilde{p}$ satisfaz a correta condição de fronteira sobre a superfície livre, como $p = \tilde{p} + \frac{\psi}{\delta t}$ (será mostrado em (vi)), isto implica que $\psi = 0$.

(v) De 2.3, obtém-se o campo de velocidade atualizado $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla \psi(\mathbf{x}, t).$$

(vi) Cálculo da pressão.

De 2.2

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla(p - \tilde{p}).$$

Substituindo 2:3 em 2.2, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla \psi(\mathbf{x}, t)) = -\nabla(p - \tilde{p}),$$

que invertendo a ordem dos operadores fica:

$$-\nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) \right) = -\nabla(p - \tilde{p})$$

e então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t),$$

que pode ser discretizada da seguinte forma:

$$\frac{\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t_0)}{\delta t} = p - \tilde{p}, \quad (2.7)$$

onde δt é o passo no tempo. Para $t = t_0$, tem-se que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$, então por 2.3

$$\nabla \psi(\mathbf{x}, t_0) = 0.$$

Logo, $\psi(\mathbf{x}, t_0)$ é constante. Considerando $\psi(\mathbf{x}, t_0) = 0$ em 2.7, obtém-se uma aproximação para a pressão:

$$p = \tilde{p} + \frac{\psi(\mathbf{x}, t)}{\delta t}. \quad (2.8)$$

Assim o GENSMAC resolve, explicitamente, as equações de momento e um sistema linear simétrico esparsos (a equação de Poisson discreta) para a velocidade potencial ψ .

(vii) Atualizam-se as posições das partículas marcadoras. O último passo implica no movimento das partículas marcadoras para sua nova posição. As partículas são geradas nos injetores sendo injetadas dentro do domínio para representar o fluido, fornecendo assim meios de visualização do escoamento e obtenção da orientação da superfície livre. Estas são partículas virtuais cujas coordenadas são armazenadas e atualizadas no fim de cada cálculo no passo do tempo com a mais recente velocidade. Pelo método de Euler as equações

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = v \quad (2.9)$$

são resolvidas para se ter a nova posição das partículas virtuais. Isso fornece as novas coordenadas da partícula, determinando se uma partícula se move para dentro de uma nova célula ou deixa a região do domínio através de um ejetor.

2.4 Considerações Finais

O método GENSMAC deriva de atualizações do método SMAC. Este método foi implementado em FORTRAN estruturado e tem a capacidade de resolver escoamentos de fluidos com superfícies livres em domínios bidimensionais arbitrários.

O algoritmo computacional utiliza-se da equação de Poisson com as condições de fronteira adequadas: a condição homogênea de Dirichlet e a condição homogênea de Neumann.

No próximo capítulo estão as discretizações das equações que foram estudadas no capítulo 1, implementadas pelo GENSMAC.

Capítulo 3

Discretizações

3.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta as discretizações das equações básicas na seção 3.2, da razão de cisalhamento na seção 3.3 e da equação de momento na seção 3.4. Apresenta-se também nas seções 3.5, 3.6 e 3.7 a discretização da equação de Poisson, a definição das células e as condições de contorno na superfície livre, respectivamente. O controle do passo no tempo é estudado na seção 3.8, a solução da equação de Poisson é vista na seção 3.9 e o movimento das partículas é descrito na seção 3.10. E finalizando, na seção 3.11 são feitas algumas considerações finais sobre os tópicos mais importantes deste capítulo.

As discretizações e as aproximações das equações desenvolvidas anteriormente foram feitas pelo método de diferenças finitas.

Utilizando-se de uma malha e considerando-se uma célula de dimensões $(\delta x, \delta y)$, as variáveis $\tilde{p}_{ij}$, ψ_{ij} , $\tilde{D}_{ij}$, q_{ij} que denotam, nessa ordem, a pressão, a velocidade potencial, o divergente e a razão de cisalhamento discreta são posicionadas no centro da célula, enquanto as velocidades u_{ij} e v_{ij} são alternadas por translações de $\frac{\delta x}{2}$ e $\frac{\delta y}{2}$, respectivamente (ou seja, u e v são posicionados nos lados da célula, nas posições $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$, respectivamente), como mostra a figura 3.1 [10].

Figura 3.1: Configuração de uma célula

3.2 Equações Básicas

A equação do momento $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + N(u)$ é discretizada e aplicada nos nós $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$.

Usa-se diferença progressiva para aproximar as derivadas em função do tempo e diferenças centrais para aproximar os termos que não contêm ν -derivadas.

Então tem-se para 1.23:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} \\ \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta x} \\ \left[\frac{\partial u^2}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\delta x}, \end{aligned}$$

onde $(u_{i,j})^2$ é aproximado por:

$$(u_{i,j})^2 = u_{i+\frac{1}{2},j} \cdot u_{i-\frac{1}{2},j}.$$

Então

$$\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} \cdot u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j} \cdot u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}.$$

Para o termo de fluxo $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$ é aplicado diferenças centrais após ter sido feita uma média aritmética para uv :

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\delta y},$$

onde

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1})}{2} \cdot \frac{(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}})}{2}.$$

Então

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) \cdot (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}})}{\delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}) \cdot (v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \right] \\ \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{4} \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}) - u_{i+\frac{1}{2},j-1}(v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \right]. \end{aligned}$$

Agora discretizando o termo $\frac{1}{Re} \nu(q) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ da equação 1.26, obtém-se as seguintes aproximações para as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}.$$

Por diferenças centrais:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i+1,j} - \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j}}{\delta x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y}. \end{aligned}$$

E por fim, discretizando o termo $\frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] + \frac{1}{Fr^2} g_x$ da equação 1.26, obtém-se as seguintes aproximações para as derivadas que não contém ν -derivadas

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta x} \\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\delta y} \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta x}, \end{aligned}$$

onde $v_{i,j} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}$.

Então

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta x}.$$

Agora para 1.24, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\delta t} \\ \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta y}. \end{aligned}$$

Para o termo de fluxo $\frac{\partial(uv)}{\partial x}$ é aplicado diferenças centrais após ter sido feita uma média aritmética para uv

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\delta x},$$

onde

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1})}{2} \cdot \frac{(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}})}{2}.$$

Então

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) \cdot (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}})}{\delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}) \cdot (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}})}{\delta x} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x} + \right. \\ \left. \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}(u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x} \right] \\ \left[\frac{\partial v^2}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\delta y},$$

onde $(v_{i,j})^2 = v_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}}$,

$$\left[\frac{\partial v^2}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} \cdot v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}.$$

Agora discretizando o termo $\frac{1}{Re} \nu(q) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ da equação 1.24, obtém-se as seguintes aproximações para as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j+1} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j}}{\delta y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x \delta y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{i,j+\frac{1}{2}}.$$

Por diferenças centrais:

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2}.$$

E por fim, discretizando o termo $\frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \nu(q)}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \nu(q)}{\partial y} \right] + \frac{1}{Fr^2} g_y$ da equação 1.24, obtém-se as seguintes aproximações para as derivadas que não contém ν -derivadas

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta y},$$

onde

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta y} \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2\delta x} \\ \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta y}. \end{aligned}$$

3.3 Discretização da Razão de Cisalhamento $q_{i,j}$

Para aproximar a equação da razão de cisalhamento 1.30 os termos $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são discretizados por diferenças centrais, e para os termos $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ primeiro é calculado a média de u e v nos nós u e v e então aplica-se diferenças centrais. Então o processo é realizado como se segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \\ \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \\ \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \end{aligned}$$

onde

$$u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j})$$

e

$$u_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}).$$

Portanto,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{4} \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} \right]$$

e

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x},$$

onde

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4}(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}})$$

e

$$v_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4}(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}).$$

Portanto,

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{1}{4} \left[\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right].$$

Logo, a razão de cisalhamento $q_{i,j}$ discretizada fica:

$$\begin{aligned} q_{i,j} = & \left[2 \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right)^2 \right. \\ & + \left[\left(\frac{1}{4} \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} \right] \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{4} \left[\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right] \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, as ν -derivadas são calculadas como segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\nu(q_{i+1,j}) - \nu(q_{i,j})}{\delta x} \\ \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\nu(q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \nu(q_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{\delta x} \\ \left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\nu(q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \nu(q_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \\ \left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\nu(q_{i,j+1}) - \nu(q_{i,j})}{\delta y}, \end{aligned}$$

onde

$$q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{q_{i+1,j} + q_{i,j} + q_{i+1,j+1} + q_{i,j+1}}{4}$$

$$q_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{q_{i,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i+1,j-1}}{4}$$

$$q_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{q_{i-1,j} + q_{i,j} + q_{i-1,j+1} + q_{i,j+1}}{4}.$$

3.4 Equação de Momento Discretizada

Agora, introduzindo as aproximações feitas neste capítulo na equação 1.26, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} = & - \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta x} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} \cdot u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j} \cdot u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \\ & - \frac{1}{4} \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \right. \\ & \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}) - u_{i+\frac{1}{2},j-1} (v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y} \right] \\ & + \frac{1}{Re} \nu(q_{i+\frac{1}{2},j}) \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2} \right) - \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y} \right) \right] \\ & + \frac{1}{Re} \left[2 \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta x} \right) \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\delta y} \right) + \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta x} \right) \right] \left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \right] \\ & + \frac{1}{Fr^2} g_x \end{aligned} \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\delta t} = & - \left(\frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{\delta y} \right) - \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} \cdot v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) \\
& - \frac{1}{4} \left[\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x} \right. \\
& \left. + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}(u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x} \right] \\
& - \frac{1}{Re} \nu(q_{i,j+\frac{1}{2}}) \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x \delta y} \right) + \left(\frac{2v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{Re} \left[2 \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta y} \right) \left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + \left[\left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2\delta x} \right) + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta y} \right) \right] \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \right] \\
& + \frac{1}{Fr^2} g_y, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

onde $\left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$, $\left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$, $\left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $\left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}}$ foram obtidos na seção anterior.

3.5 Discretização da Equação de Poisson

Aplicando 2.4 sobre a malha tem-se:

$$\nabla^2 \psi \Big|_{i,j} = \tilde{D}_{i,j},$$

onde $\tilde{D}_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)_{i,j} = \nabla \cdot \tilde{u}(x, t)$, ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \tilde{D}_{i,j}. \tag{3.3}$$

Desenvolvendo o termo $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, y_j)$, pela expansão de Taylor e aproximando por diferença progressiva e regressiva, obtém-se:

$$\begin{aligned}\psi(x_i + \Delta x, y_j) &= \psi(x_i, y_j) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_i, y_j)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, y_j)\Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i, y_j)\Delta x^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x_i, y_j)\Delta x^4 + \dots\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\psi(x_i - \Delta x, y_j) &= \psi(x_i, y_j) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_i, y_j)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, y_j)\Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i, y_j)\Delta x^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x_i, y_j)\Delta x^4 - \dots\end{aligned}\quad (3.5)$$

Somando 3.4 e 3.5, tem-se:

$$\psi(x_i + \Delta x, y_j) + \psi(x_i - \Delta x, y_j) = 2\psi(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, y_j)\Delta x^2 + O(\Delta x^4).$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{\psi(x_i + \Delta x, y_j) - 2\psi(x_i, y_j) + \psi(x_i - \Delta x, y_j) - O(\Delta x^4)}{\Delta x^2}. \quad (3.6)$$

E o desenvolvimento do termo $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_i, y_j)$ pela expansão de Taylor e aproximando por diferença progressiva e regressiva, obtém-se:

$$\begin{aligned}\psi(x_i, y_j + \Delta y) &= \psi(x_i, y_j) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_i, y_j)\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_i, y_j)\Delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}(x_i, y_j)\Delta y^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}(x_i, y_j)\Delta y^4 + \dots\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\psi(x_i, y_j - \Delta y) &= \psi(x_i, y_j) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_i, y_j)\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_i, y_j)\Delta y^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}(x_i, y_j)\Delta y^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}(x_i, y_j)\Delta y^4 - \dots\end{aligned}\quad (3.8)$$

Somando 3.7 e 3.8, tem-se:

$$\psi(x_i, y_j + \Delta y) + \psi(x_i, y_j - \Delta y) = 2\psi(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_i, y_j) \Delta y^2 + O(\Delta y^4).$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{\psi(x_i, y_j + \Delta y) - 2\psi(x_i, y_j) + \psi(x_i, y_j - \Delta y) - O(\Delta y^4)}{\Delta y^2}. \quad (3.9)$$

Substituindo 3.6 e 3.9 na equação de Poisson 3.3, obtém-se:

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \tilde{D}_{i,j}, \quad (3.10)$$

que possui um erro de truncamento de $O(h^2)$ e onde $\tilde{D}_{i,j}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{i,j} &= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)_{i,j} \\ \tilde{D}_{i,j} &= \left(\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) + \left(\frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right). \end{aligned}$$

3.6 Definição das Células

Como o fluido está continuamente em movimento, é utilizado um procedimento para identificar a região contendo fluido e a superfície livre. Para isto, as células da malha tendo metade ou mais de seu volume contido no contorno rígido são classificadas como células FRONTEIRA (F), as células contendo a metade ou mais de seu volume em um injetor (células que representam a entrada do fluido na região de domínio do fluido) como INJETOR (I), e as células contendo a metade ou mais de seu volume em um ejetor (células que representam a saída do fluido na região de domínio do fluido) como EJETOR (E). As células que contém alguma porção da superfície do fluido (células que contém fluido e têm pelo menos uma adjacência com uma célula do tipo V, essas células contém a superfície livre) são classificadas como células SUPERFÍCIE (S), as células que não contém fluido como VAZIA (V), e as células que contém fluido e não têm contato com células do tipo V como CHEIA (C). Como mostrado na figura 3.2 [6] (as células VAZIA (V) não apresentam o símbolo V para não carregar a figura).

Figura 3.2: Domínio, malha e células

Durante a execução de um certo problema, uma célula do tipo C pode tornar-se S e então V e, vice-versa.

3.7 Condições de Contorno na Superfície Livre

As equações de condição de contorno na superfície livre 1.36 e 1.37 são aproximadas por diferenças finitas, considerando três tipos de orientação para a superfície livre: horizontal, vertical e superfície inclinada à 45 graus.

Assumindo que as dimensões das células são pequenas o suficiente tal que a superfície intercepta uma célula em dois lados, tem-se três casos:

- (a) Célula S com apenas um lado em contato com uma célula V:

Para essas células assume-se que a superfície será horizontal ou vertical. Como exemplo, considere a figura 3.3 [10].

Figura 3.3: Célula S com o lado direito em contato com uma célula V

Tem-se $\mathbf{n} = (1, 0)$ e $\mathbf{m} = (0, 1)$ e substituindo em 1.36 e 1.37, obtém-se:

$$-p + \frac{2\nu(q)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Aproximando por diferenças finitas as equações 3.11 e 3.12

$$p_{i,j} = \frac{2\nu(q_{i,j})}{Re} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \\ \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} \right) + \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) = 0.$$

Portanto, a razão de cisalhamento fica, utilizando-se 3.12 e 1.25

$$q = 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

que aproximada por diferenças finitas no ponto i, j , tem-se:

$$q_{i,j} = 2 \left| \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right|.$$

Outros tipos de células S com um lado em comum com a célula V são tratados analogamente.

(b) Células S com dois lados em contato com uma célula V:

Para essas células assume-se que o vetor normal situa-se à 45° com os lados em comum com a célula V. Então $\mathbf{n} = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ e as condições de contorno 1.36 e 1.37 ficam:

$$-p \pm \frac{\nu(q)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.14)$$

O sinal de 3.13 será o sinal de $n_x n_y$. Por exemplo, considerando a célula S da figura 3.4 [10]. Aproximando por diferenças finitas as equações 3.13 e 3.14 tem-se:

Figura 3.4: Célula S com dois lados em contato com células V

$$\begin{aligned} p_{i,j} = \frac{\nu(q_{i,j})}{2Re} & \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right] \\ & \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) - \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando 3.14 e 1.25 a razão de cisalhamento torna-se

$$q = \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right|,$$

que aproximada por diferenças finitas no ponto i, j , é escrita como:

$$q_{i,j} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} \right) + \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right|.$$

Outros tipos de células S com dois lados em comum a célula V são tratados analogamente.

(c) Células S com três lados em contato com células V ou dois lados opostos em contato com células V:

Para estas células a pressão é zero e a velocidade é ajustada a fim de que $\nabla \cdot u = 0$ na célula S. A razão de cisalhamento $q_{i,j}$ é zero. Se tais células aparecerem sugere-se que a malha seja refinada.

3.8 Controle do Passo no Tempo

Um procedimento de controle do passo no tempo é usado para otimizar o tamanho do passo no tempo em cada ciclo de cálculo. Em cada ciclo deve-se escolher automaticamente o espaçamento no tempo mais apropriado para o cálculo do campo de velocidade.

Baseia-se em duas restrições de estabilidade como segue:

(a) Nenhuma partícula cruzará mais do que uma célula em um dado intervalo de tempo,

$$\delta t < \frac{\delta x}{|u|} \quad \text{e} \quad \delta t < \frac{\delta y}{|v|}. \quad (3.15)$$

Para que 3.15 seja satisfeita, é suficiente que

$$\delta t < \frac{\delta x}{U_{max}} \quad \text{e} \quad \delta t < \frac{\delta y}{V_{max}},$$

onde $U_{max} = \max|U|$ e $V_{max} = \max|V|$ são os valores máximos de u e v , respectivamente.

(b) A segunda restrição de estabilidade é devido a discretização explícita das equações de momento e envolve o número de Reynolds e a viscosidade,

$$\delta t < \frac{Re}{2\nu(q)} \frac{\delta x^2 \delta y^2}{\delta x^2 + \delta y^2}. \quad (3.16)$$

Para 3.16 ser satisfeita é suficiente que

$$\delta t < \frac{Re}{2\nu_{max}} \frac{\delta x^2 \delta y^2}{\delta x^2 + \delta y^2},$$

onde $\nu_{max} = \max |\nu_{i,j}|$.

3.9 A Solução da Equação de Poisson

A equação de Poisson discretizada 3.10 gera o sistema linear

$$AX = D, \quad (3.17)$$

onde A é uma matriz simétrica esparsa e definida positiva de ordem n ; X é um vetor solução de ordem n ; e D é o vetor divergente $(\nabla \cdot \tilde{D})$ de ordem n , onde n representa o número de células C na malha. O método dos gradientes conjugados é utilizado para resolver este sistema linear.

A matriz A é montada aplicando a equação 3.10 para cada célula C , linha por linha, da direita para a esquerda. Cada célula C representa a linha dos coeficientes da matriz A e um elemento em D .

A condição homogênea de Newmann 2.6 modifica os termos da diagonal correspondendo às células C com lados em comum com a fronteira virtual. A condição homogênea de Dirichlet 2.5 na superfície livre é aplicada colocando o elemento fora da diagonal nas linhas correspondentes as células C , o qual tem os lados em comum com as células S .

Após a montagem da matriz A e do vetor D , X é inicializado como um vetor da função potencial no passo no tempo anterior e aplica-se o método dos gradientes conjugados sobre o sistema 3.17. Neste ponto, pode-se empregar um condicionador o qual acelera a convergência do método dos gradientes conjugados.

3.10 Movimento das Partículas

Partículas marcadoras são usadas para representar o fluido. Sua tarefa essencial é indicar a posição da superfície livre com a finalidade de que a configuração das células S possam ser determinadas. Elas são atualizadas no fim de cada passo no tempo fornecendo, assim, a dinâmica do movimento do fluido. A nova coordenada do fluido é encontrada resolvendo 2.8 usando o método de Euler. Assim depois da velocidade atualizada, as partículas são movidas de acordo com

$$x_p^{n+1} = x_p^n + u_p \delta t^{n+1}$$

$$y_p^{n+1} = y_p^n + v_p \delta t^{n+1},$$

onde (x_p^n, y_p^n) , δt^{n+1} e (x_p^{n+1}, y_p^{n+1}) é a posição corrente da partícula, o passo no tempo atual usado e a posição atualizada, respectivamente. As velocidades u_p , v_p são calculadas usando uma interpolação bilinear, envolvendo as quatro velocidades u e v mais próximas.

3.11 Considerações Finais

As discretizações e as aproximações das equações básicas e da razão de cisalhamento são necessárias para apresentar a equação do momento discretizada. Neste capítulo, estas discretizações e aproximações foram feitas pelo método de diferenças finitas.

O fluido é representado através de partículas marcadoras. As células da malha têm dimensões $(\delta x, \delta y)$ e foram definidas por um procedimento para que seja identificada a região contendo fluido e a superfície livre.

A solução da equação de Poisson discretizada gera um sistema linear que é resolvido utilizando-se o método dos gradientes conjugados.

Para que seja possível otimizar o passo no tempo em cada ciclo de cálculo é utilizado um procedimento de controle do passo no tempo.

O estudo dos três primeiros capítulos foi essencial para o entendimento dos próximos, onde apresentam-se os ambientes de simulação Freeflow, Freeflow-3D e Freeflow-2D, capítulos 4, 5 e 6, respectivamente.

Os ambientes de simulação Freeflow e Freeflow-2D implementam o método GENSMAC e o ambiente Freeflow-3D implementa o método GENSMAC-3D, que é uma extensão do método GENSMAC.

Capítulo 4

O Ambiente de Simulação Freeflow

4.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres, chamado Freeflow. Este ambiente é composto dos seguintes módulos: um modelador de moldes e escoamentos, uma interface de entrada de dados para o simulador, um simulador de escoamentos e um visualizador de escoamentos. A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos.

A organização deste capítulo é feita da seguinte maneira: na seção 4.2 é realizada a apresentação do Freeflow, nas seções 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 descreve-se os módulos do Freeflow, o modelador, a interface de entrada de dados, o simulador e o visualizador, respectivamente. E por fim, na seção 4.7 são feitas algumas considerações finais sobre os principais tópicos deste capítulo.

4.2 Freeflow

O Freeflow é um sistema computacional para modelagem, simulação e visualização de escoamentos de fluidos que possibilita a análise e a observação do comportamento dinâmico de fluidos viscosos incompressíveis. O sistema Freeflow contém quatro módulos:

- Um modelador de moldes e escoamentos: este módulo é uma ferramenta de desenho interativa que permite a definição, de forma rápida e fácil, do molde usado na simulação de escoamento de fluidos, ou seja, do domínio do escoamento;
- Uma interface de entrada de dados para o simulador: este módulo é responsável pela introdução de dados que caracterizam o escoamento a ser simulado e pelo monitoramento do módulo de simulação de escoamento de fluido;

- Um simulador de escoamentos: este módulo é um sistema para simulação de escoamentos, que é a parte central do Freeflow, pois implementa a discretização das equações governantes e das condições de fronteira. O método GENSMAC serviu de base para a implementação do simulador;
- Um visualizador de escoamentos: este módulo é responsável pela visualização gráfica dos resultados da simulação.

A implementação dos módulos foi feita da seguinte forma: o simulador tem uma parte implementada em linguagem FORTRAN e outra parte em linguagem C, os outros módulos foram implementados em C sobre o sistema de janelas Xwindows e seguem o estilo Motif de projeto e construção de interfaces com o usuário. Os módulos foram implementados de forma que o código da aplicação fosse independente do código da interface.

Os programas foram desenvolvidos em estações de trabalho Alpha Digital 3800, com versões executando em ambientes Linux-PC, IBM Risc 6000 e Sun Solaris.

Para organizar e facilitar a busca de arquivos e programas do pacote construído foi estabelecida uma hierarquia de diretórios fixa a partir de um diretório topo, sendo que a comunicação entre os módulos é feita através de arquivos.

4.3 Modelador

O modelador de moldes bidimensional é um editor gráfico interativo que permite a definição, de forma rápida e fácil, dos objetos bidimensionais através do instanciamento de primitivas gráficas e da manipulação desses objetos utilizando recursos da computação interativa para a simulação de escoamentos de fluidos, isto é, definindo o domínio do escoamento do fluido.

No modelador pode-se construir e manipular objetos através do instanciamento de primitivas que fornece um conjunto finito de objetos geométricos básicos cujo tamanho, formato, posição e orientação são determinados por um pequeno conjunto de parâmetros especificados pelo usuário, como exemplo, poli-linhas, interpolação por splines cúbicas, segmento de reta, aproximação B-splines e arco de circunferência. E através de recursos da computação interativa pode-se modificar os objetos modelados, com movimentações, adições e remoções de pontos de controle e, a realização de transformações geométricas.

O simulador de escoamento de fluidos impõe restrições às primitivas de desenho que descrevem o domínio do fluido (molde). Estas restrições são observadas a cada acionamento da rotina de desenho da primitiva, sendo realizados procedimentos específicos para cada situação de não obediência a alguma regra.

O modelador de moldes tem como características a facilidade gráfica e a independência do molde com os demais parâmetros necessários para a execução do simulador.

4.4 Interface de Entrada de Dados

A interface de entrada de dados para o simulador é o módulo responsável pela introdução de dados que caracterizam o escoamento a ser simulado. O simulador exige a introdução de informações do domínio e da configuração do escoamento para a sua execução. O domínio do escoamento descreve o molde dentro do qual a simulação do escoamento de fluidos é realizada, com informações de aberturas para entrada e saída de fluido.

A implementação do módulo de entrada de dados e do gerenciador da execução do simulador de escoamentos de fluidos facilitou a introdução de dados, a manutenção e a manipulação de diversos arquivos de configuração do escoamento e dos resultados da simulação.

Valores padrões são usados para definir a situação inicial dos dados de entrada assim que a aplicação é iniciada. O usuário pode modificar os campos desejados e salvar a configuração em um arquivo ou abrir um arquivo já existente. Está disponível também a opção de impressão do arquivo de configuração atual. Neste módulo, o usuário pode também remover arquivos de configuração indesejados.

O acionamento da execução do simulador considera os dados de entrada do arquivo de configuração do escoamento corrente. Antes do acionamento da execução é realizada uma verificação da consistência dos valores em cada campo. É possível também, durante a execução, visualizar os comandos do simulador que descrevem a etapa atual da simulação e que apresentam algumas variáveis para verificação. A execução do simulador é facilmente interrompida caso necessário ou desejado.

4.5 Simulador

O simulador consiste de um conjunto de programas baseado no método GENSMAC, cuja finalidade é resolver problemas de escoamentos transientes de fluidos (newtonianos e não-newtonianos) incompressíveis com superfícies livres.

Este módulo resolve as equações de Navier-Stokes em duas dimensões para um fluido incompressível, juntamente com a equação de conservação de massa (equação da continuidade), que já foram estudadas no capítulo 1. A metodologia empregada foi estudada no capítulo 2 e as condições de contorno na superfície livre foram vistas no capítulo 1. A definição e as variáveis das células, o controle do passo no tempo, a solução da equação de Poisson e os movimentos das partículas foram estudados no capítulo 3, nas seções 3.6, 3.8, 3.9 e 3.10, respectivamente.

Existem duas versões do simulador: a primeira representa todo o fluido por partículas e foi implementada em FORTRAN, a segunda representa o fluido por partículas apenas na

fronteira do fluido e foi implementada uma parte em FORTRAN e outra em C. A primeira versão não possui uma estrutura que permite saber se as partículas virtuais estão dentro ou na superfície do fluido. A segunda versão já possui uma estrutura que permite obter o interior, o exterior e a superfície do fluido.

4.6 Visualizador

O visualizador é o módulo responsável pela visualização gráfica dos resultados da simulação de escoamento de fluidos.

A representação visual dos dados numéricos pode ser feita por mapa de linhas de contorno (dados escalares), ou por vetores e linhas de corrente (informações vetoriais).

Um mapa de contorno pode ser representado por funções de duas variáveis. Os métodos para contorno de funções de duas variáveis podem ser de dois tipos:

- métodos de busca de contornos: usam um ou mais pontos sobre um contorno para determinar a posição do próximo ponto. Em cada passo da execução exigem a primeira e a segunda derivada da função e têm uma codificação complicada se comparado com métodos baseados em grade. Entretanto, tem a vantagem de fornecer o tamanho do passo que varia de acordo com a curvatura dos contornos;
- métodos baseados em grades: são mais simples e por isso mais utilizados. Consistem na definição de uma grade sobre a área de plotagem e desenho dos contornos em cada célula da grade. Utiliza-se uma grade fina para uma boa visualização através de aproximações lineares, embora alguns algoritmos usem aproximações quadráticas.

O visualizador possui uma barra de menus com opções de manipulação de arquivos, escolha de tipos de variáveis para visualização, modificação de configurações, animação e ajuda. Uma área de desenho proporciona apresentação gráfica dos resultados da simulação.

O simulador de escoamentos de fluidos sofreu algumas alterações de modo a possibilitar distinção entre diferentes configurações de simulações e facilitar o acesso pelo módulo de visualização. Cada configuração de dados de entrada para o simulador passou a ter um nome associado e, este nome é também utilizado para distinguir os arquivos de saída do simulador. Dados de um determinado passo no tempo ficam armazenados em um arquivo distinto tornando, dessa forma, o tempo de acesso a um dado do início da simulação igual ao acesso a outro no final da simulação e, permitindo a visualização de campos mesmo antes do término da simulação.

Ao selecionar uma configuração de escoamento para visualização, o usuário tem acesso aos dados gerados para esta configuração no tempo inicial. Uma janela para escolha de outros instantes no tempo pode ficar permanentemente aberta e a seleção de um novo

tempo provocará a atualização dos campos visualizados para o novo instante no tempo.

Uma forma de visualização de dados escalares disponíveis na forma de grades consiste na construção de um mapa de contornos. Este módulo possibilita a apresentação gráfica das variáveis pressão, temperatura e magnitude da velocidade através de mapas de contorno.

As rotinas de visualização gráfica das saídas do simulador foram implementadas de modo a serem independentes dos elementos de interface com o usuário e altamente configuráveis.

Todos os campos visualizados podem ser animados. A janela de controle da animação permite a escolha do quadro inicial e final. A animação pode ser passo a passo controlada pelo *mouse* ou automática, onde o usuário pode alterar a velocidade da animação mesmo durante a sua execução.

4.7 Considerações Finais

O Freeflow é um ambiente de simulação de escoamentos com superfícies livres, que resolve problemas que podem ser representados bidimensionalmente. Este sistema possui quatro módulos: modelador de moldes, interface de entrada de dados, simulador e visualizador de escoamentos.

O módulo modelador de moldes dispõe de capacidade de modelagem bidimensional, utilizando as técnicas de instanciamento de primitivas eficientes para a construção e manipulação de objetos. O módulo interface de entrada de dados facilitou a introdução de dados. O módulo simulador é um sistema para simulação de escoamentos que é a parte central do Freeflow. O módulo visualizador é responsável pela visualização bidimensional dos resultados da simulação dispondo de técnicas que possibilitam a visualização da forma, propriedade e dinâmica de escoamentos do fluido.

O Freeflow é um ambiente de simulação com uma estrutura de dados de difícil extensão.

No próximo capítulo é apresentado o ambiente de simulação Freeflow-3D, um sistema integrado para simulação de escoamentos tridimensionais incompressíveis com superfícies livres que foi desenvolvido, pois alguns problemas podem ser representados bidimensionalmente, mas seus parâmetros são tridimensionais.

Capítulo 5

O Ambiente de Simulação Freeflow-3D

5.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta o Freeflow-3D, um ambiente integrado para simulação de escoamentos incompressíveis com superfícies livres tridimensionais. Este sistema é composto pelos seguintes módulos: Modflow-3D - um modelador de moldes e escoamentos, Simflow-3D - um simulador de escoamentos, Visflow-3D - um visualizador de escoamentos e Resimflow-3D - um reiniciador de escoamentos. A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos e os objetos geométricos (fluidos, contêineres, injetores e ejetores) são representados pela estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*).

A organização deste capítulo é feita da seguinte maneira: na seção 5.2 é feita uma breve descrição do Freeflow-3D e sua estrutura de dados. Nas seções 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 descreve-se os módulos do Freeflow-3D, modelador, simulador, visualizador e reiniciador, respectivamente. Na seção 5.7 é explicado como é feita a comunicação entre os módulos e por fim na seção 5.8 são feitas algumas considerações finais sobre este capítulo.

5.2 Freeflow-3D

O Freeflow-3D é um sistema integrado para simulação de escoamentos incompressíveis com superfícies livres. Seu desenvolvimento foi motivado porque apesar de alguns problemas poderem ser representados bidimensionalmente, muitos são puramente tridimensionais.

O sistema Freeflow-3D contém quatro módulos:

- Modflow-3D (modelador de moldes e escoamentos): um sistema interativo para a especificação de um modelo de escoamento de fluidos que inclui a definição de elementos no domínio do escoamento (moldes, injetores, fluidos, por exemplo) e a definição de propriedades do escoamento;
- Simflow-3D (simulador de escoamentos): um sistema para simulação de escoamentos, que é a parte central do Freeflow-3D, pois implementa a discretização das equações governantes e das condições de fronteira. Este sistema utiliza o método GENSMAC-3D, que é uma extensão do método GENSMAC com partículas marcadoras apenas na superfície do fluido;
- Visflow-3D (visualizador de escoamentos): um sistema interativo para a tradução dos resultados produzidos pelo simulador em imagens de fácil interpretação;
- Resimflow-3D (reiniciador de escoamentos): um sistema interativo onde pode-se fazer a alteração de alguns parâmetros durante a simulação.

A implementação dos quatro módulos que compõem o sistema Freeflow-3D foi feita utilizando a linguagem C sobre o sistema operacional UNIX. As interfaces gráficas dos módulos Modflow-3D, Visflow-3D e Resimflow-3D utilizam o sistema de gerenciamento de janelas Xview sobre o Xwindows. A estrutura de dados adotada proporciona acesso fácil às informações e possui independência dos dados de forma a simplificar a manutenção e extensão do código. Os programas foram desenvolvidos em estações de trabalho Sun Solaris, com versões executando em ambiente Linux-PC. A comunicação entre os módulos do sistema é feita através de arquivos.

Os dados do Freeflow-3D estão divididos em duas categorias:

- Dados diretos: domínio, velocidade, pressão, células, parâmetros utilizados pelo simulador e representação dos objetos geométricos do modelo. Estes últimos são subdivididos em:
 - Dados estáticos (não são modificados durante a simulação): domínio, discretização, parâmetros de adimensionalização, algumas propriedades do escoamento e do fluido (viscosidade e campo de gravidade);
 - Dados dinâmicos (são os que se modificam durante a simulação): velocidade (representada por matriz), pressão (representada por matriz), configuração do conjunto de células (representada por matrizes e árvores) e representação dos objetos geométricos.

Os objetos geométricos têm seu bordo aproximado por uma superfície linear por partes e são representados pela estrutura *half-edge*, que é um tipo de estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*), para representar objetos geométricos pela sua superfície (faces, arestas, vértices e suas relações topológicas).

A estrutura *half-edge* foi desenvolvida originalmente para representar sólidos rígidos por sua fronteira com uma única componente de fronteira, sendo que a geometria das

faces e arestas pode ser não linear. A inserção e a eliminação de dados na estrutura *half-edge* são feitas através de operadores denominados operadores de Euler, que garantem a consistência topológica do objeto representado. O motivo da escolha desta estrutura é a sua concisão e a facilidade de modificações locais na fronteira dos objetos e, também o fato de que em um dado instante de tempo todos os componentes geométricos envolvidos no escoamento (contêineres, injetores, fluidos e ejtores) podem ser considerados sólidos com uma única componente de fronteira;

- Dados indiretos: são dados na qual o acesso é feito indiretamente, para isto foi desenvolvida uma estrutura pensando na representação dos objetos por sua fronteira, o desempenho dos algoritmos envolvidos no simulador e a minimização da interdependência entre dados. Estes dados são compostos por três estruturas:

- Contêiner (representa os contêineres): é composta por dados geométricos (B-Rep), tipos de condição de contorno, uma árvore que armazena informações sobre as células que definem esse contêiner e atributos específicos do contêiner representado;

- Injetor (representa os injetores): é composta por dados geométricos (B-Rep), características do injetor, informações sobre os contêineres e fluidos que relacionam-se com esse injetor, uma árvore que armazena informações sobre as células que o definem e atributos específicos;

- Ejtor (representa os ejtores): é composta por dados geométricos (B-Rep), tipos de condições de contorno, informações sobre o contêiner que o contém, uma árvore que armazena informações sobre células que definem esse ejtor e atributos específicos.

5.3 Modelador

A inicialização de dados para o simulador é feita pelo modelador Modflow-3D, que tem uma interface gráfica de fácil execução e, além disso, também permite a visualização dos dados geométricos gerados.

Técnicas de iluminação (*rendering*) são utilizadas para a visualização dos objetos, facilitando assim, a interpretação dos dados pelo usuário. As operações geométricas usuais (rotações, translações e ampliações) e também o tipo de projeção (paralela, perspectiva), estão também disponibilizados. Parâmetros como a distância do observador, o tipo de iluminação (Wire-Frame, Flat, Gourand, Phong), potência da luz ambiente, luz direcional e propriedades de visualização dos objetos (cor, visibilidade, transparência e propriedades de reflexão da luz) podem ser alterados.

Os objetos geométricos são representados pela estrutura *half-edge*, que é uma forma de representação pela fronteira (B-Rep), onde pode ser obtida por:

- instanciamento de primitivas tridimensionais (definição de objetos tridimensionais a partir de parâmetros necessários à sua construção): permite que o usuário escolha objetos simples pela definição de seus parâmetros;
- varredura (construção de objetos tridimensionais a partir de figuras bidimensionais): permite que o usuário, a partir de uma ou mais curvas bidimensionais, construa um objeto tridimensional. Todas as curvas bidimensionais são construídas e representadas através de NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Os tipos mais comuns de varredura são a rotacional e a translacional.

5.4 Simulador

O módulo Simflow-3D implementa o método GENSMAC-3D, que é uma extensão do método GENSMAC. Um dos grandes problemas para a extensão do GENSMAC para três dimensões é o tratamento da superfície livre. No GENSMAC-3D a superfície livre é aproximada por uma superfície linear por partes e representada pela estrutura *half-edge*, que favorece modificações locais com controle global da topologia.

O simulador resolve as equações de Navier-Stokes, que governam escoamentos transientes com superfícies livres, juntamente com a equação de conservação de massa (equação da continuidade), que já foram estudadas no capítulo 1.

No método GENSMAC-3D, o domínio (definido pelo paralelepípedo contendo os componentes do escoamento) é discretizado uniformemente em cada direção, formando uma malha onde todas as células possuem as mesmas dimensões (dx , dy , dz). Estas células são classificadas a cada instante de tempo de acordo com o fluido e os contornos rígidos (contêineres, injetores e ejetores), como já foi explicado no capítulo 3.

A variável pressão é posicionada no centro da malha e as variáveis u , v e w das direções x , y e z da velocidade são posicionadas nas faces frontal, lateral direita e superior da célula respectivamente, como apresenta a figura 5.1 [6].

Figura 5.1: Célula, discretização da pressão e velocidade

O método GENSMAC-3D utiliza a pressão e a velocidade discretizadas na malha alternada (descrita anteriormente) e os passos seguidos são análogos ao capítulo 2, seção 2.3.

Na fronteira livre as condições de contorno para a pressão e velocidade são dadas pelas relações:

$$(T.n).n = 0 \quad , \quad (T.n).m_1 = 0 \quad \text{e} \quad (T.n).m_2 = 0,$$

onde $n = (n_1, n_2, n_3)$ é a normal unitária, T é o tensor de estresses e m_1 e m_2 são vetores tangentes à superfície livre.

As condições de contorno na superfície rígida são do tipo não escorregamento e injeção (*prescribed inflow*). Estas condições de contorno são aplicadas na fronteira delimitada pelo contorno rígido (contêineres e injetores) em contato com o fluido.

Analogamente ao problema bidimensional, a estabilidade do processo numérico depende de como as condições na fronteira livre são aproximadas. Tenta-se, portanto, empregar uma aproximação para essas condições. Para isto, a célula deve ser suficientemente pequena para que a superfície possa ser representada localmente por uma superfície planar. E por fim, atualiza-se as posições das partículas marcadoras que constitui-se de três etapas:

- mover a superfície: análogo ao capítulo 2, seção 2.3 (vii);
- inserir partículas (representadas pelos vértices da estrutura *half-edge*):

- considera-se a área de cada face que representa a superfície livre, subdividindo essa face em faces menores toda vez que sua área for superior a $0.5 * \min\{dx, dy, dz\}$;

- subdivide-se cada aresta cujo comprimento seja maior que $0.75 * \min\{dx, dy, dz\}$. Assim, cada célula que intercepta a superfície livre contém pelo menos um vértice que representa uma partícula.

O processo de inserção é importante para que o sistema funcione bem, pois conforme o fluido se move as partículas que representam a superfície podem ficar distantes uma das outras e assim perde-se os detalhes da representação. Pode ocorrer também que uma célula da superfície livre não contenha partículas devido a definição das células ser feita no instante de tempo anterior, podendo haver confusão no algoritmo de definição das células no tempo atualizado;

- eliminar partículas: é importante para diminuição dos dados e faz-se quando uma aresta contém vértices numa mesma célula e seu tamanho é inferior a $0.05 * \min\{dx, dy, dz\}$.

5.5 Visualizador

A apresentação dos resultados no simulador é responsabilidade do Visflow-3D, que é o módulo de visualização. Os resultados gerados pelo simulador são dados sobre o modelo de escoamento e a representação dos objetos geométricos e das propriedades em instantes pré-definidos.

A entrada de dados do visualizador é feita por arquivos. O acesso aos dados do modelo que independem do tempo é feito por um arquivo e os que dependem do tempo é feito por uma série de arquivos, contendo informações sobre os objetos geométricos, propriedades, configuração das células, tempo e ciclo da simulação.

Para a visualização da geometria (contêineres, injetores, ejetores e fluidos), os objetos são apresentados utilizando-se técnicas de iluminação, facilitando assim a interpretação dos dados. Pode-se visualizar os objetos por meio de cortes por planos paralelos aos planos principais. E a visualização das propriedades (pressão e velocidade) pode ser feita tridimensionalmente através de técnicas de iluminação para os fluidos considerando a propriedade de interesse como textura, ou por curvas de nível de valores de interesse da propriedade em cortes por planos.

A velocidade é visualizada pelas suas três componentes: u na direção x , v na direção y e w na direção z .

Escolhida uma propriedade, as superfícies dos fluidos são coloridas de acordo com o valor assumido por ela em cada ponto destas, uma faixa relacionando o valor da propriedade e as cores utilizadas é representada simultaneamente para facilitar o entendimento da figura. Esta faixa também informa a variação total da propriedade visualizada. O valor da propriedade em um ponto da superfície é obtido utilizando interpolação linear sobre os valores da propriedade das oito células mais próximas. A figura 5.2 [6] apresenta um ponto em uma célula no qual quer se calcular a pressão e os oito pontos mais próximos das células adjacentes nos quais são armazenados os valores da pressão.

Figura 5.2: Células e intersecções com as retas

Os cortes são definidos pelo eixo perpendicular, quantidade de cortes e valores inicial e final dos planos de corte. As propriedades podem ser visualizadas utilizando estes cortes, sendo que a representação é feita com base nas curvas de níveis da propriedade.

5.6 Reiniciador

O Resimflow-3D é o módulo responsável em reiniciar a simulação a partir do ponto que parou ou fazer modificações em algum campo e simular novamente. O reiniciador é importante também quando ocorre interrupção da execução do programa por algum motivo, como por exemplo, queda de energia elétrica.

Os dados do modelo que podem ser alterados pelo Resimflow-3D são: ciclo final, tempo final, espaçamento de tempo para impressão e para gravação automática, tolerância para a solução da equação de Poisson e fator de controle do passo.

5.7 Comunicação entre os Módulos

A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos. A saída do modelador é constituída de oito arquivos. O simulador tem como entrada oito arquivos com a mesma estrutura dos arquivos de saída do modelador tendo em vista que podem ter sido gerados pelo modelador, pelo próprio simulador, ou pelo reiniciador. Os arquivos de saída do simulador servem a quatro propósitos: para o final da simulação (a simulação pode ser continuada a partir destes dados), para o caso de ocorrência de algum erro durante a

simulação, salvamento em tempos pré-definidos para o caso de interrupção da simulação por algum problema do sistema ou da máquina sendo utilizada (estes três propósitos têm os arquivos de saída com a mesma estrutura do modelador) e para a visualização dos resultados. Os arquivos de entrada do visualizador são os arquivos de saída do simulador que servem ao propósito de visualização dos resultados. Os arquivos de entrada do reiniciador podem ser uns dos três arquivos de saída do simulador cuja estrutura seja a mesma dos arquivos de saída do modelador e os arquivos de saída são, exatamente, os mesmos do modelador.

5.8 Considerações Finais

O Freeflow-3D é um ambiente completo de simulação de escoamentos tridimensionais com superfícies livres que possui módulos que realizam a modelagem, simulação, visualização e reinicialização do escoamento. Assim, tem-se um modelador que facilita a entrada de dados, um simulador que implementa as equações governantes e condições de fronteira, um visualizador que exibe imagens bi e tridimensionais do escoamento e um reiniciador da simulação.

No capítulo 4 foi apresentado o ambiente de simulação bidimensional Freeflow, mas por possuir uma estrutura de difícil extensão, criou-se um obstáculo de integração com o ambiente de simulação tridimensional Freeflow-3D.

Pensando-se na integração de um ambiente de simulação bi e tridimensionais foi desenvolvido o Freeflow-2D, um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres, que é descrito no próximo capítulo.

Capítulo 6

O Ambiente de Simulação Freeflow-2D

6.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta o Freeflow-2D, um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres. Este sistema é composto dos módulos: Modflow-2D - um modelador de moldes e escoamentos, Simflow-2D - um simulador de escoamentos, Visflow-2D - um visualizador de escoamentos e Resimflow-2D - um reiniciador de escoamentos. A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos e os objetos geométricos (fluidos, contêineres, injetores e ejetores) são representados pela estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*).

A organização deste capítulo é feito da seguinte maneira: na seção 6.2 é dado uma breve descrição do Freeflow-2D, na seção 6.3 descreve-se a estrutura de dados criada para o Freeflow-2D, nas seções 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7 detalha-se os módulos do Freeflow-2D, modelador, simulador, visualizador e reiniciador, respectivamente. Na seção 6.8 é exemplificado a comunicação entre os módulos e, por fim, na seção 6.9 são feitas algumas considerações gerais sobre este capítulo.

6.2 Freeflow-2D

O Freeflow-2D é um sistema integrado para modelagem, simulação e visualização de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres.

O sistema Freeflow-2D contém quatro módulos:

- Modflow-2D (modelador de moldes e escoamentos): um sistema interativo para a espe-

cificação de um modelo de escoamento de fluidos que inclui a definição de elementos no domínio do escoamento como moldes, injetores, fluidos e a definição de propriedades do escoamento;

- Simflow-2D (simulador de escoamentos): um sistema para simulação de escoamentos que é a parte central do Freeflow-2D, pois implementa a discretização das equações governantes (o simulador usa aproximação por diferenças finitas para resolver as equações de Navier-Stokes), assim como as condições de fronteira. O método GENSMAC serviu de base para a implementação do simulador;
- Visflow-2D (visualizador de escoamentos): um sistema interativo para a tradução dos resultados produzidos pelo simulador em imagens de fácil interpretação;
- Resimflow-2D (reiniciador de escoamentos): um sistema interativo que faz a alteração de alguns parâmetros durante a simulação.

A implementação dos quatro módulos que compõem o sistema Freeflow-2D foi feita utilizando a linguagem C sobre o sistema operacional UNIX. As interfaces gráficas dos módulos Modflow-2D, Visflow-2D e Resimflow-2D utilizam o sistema de gerenciamento de janelas Xview sobre o Xwindows. A estrutura de dados adotada proporciona acesso fácil às informações e possui independência dos dados de forma a simplificar a manutenção e extensão do código. Os programas foram desenvolvidos em estações de trabalho Sun Solaris, com versões executando em ambientes Linux-PC. A comunicação entre os módulos do sistema é feita através de arquivos.

6.3 Estrutura de Dados

A estrutura de dados utilizada no Freeflow-2D oferece acesso fácil às informações e possui independência dos dados de forma a simplificar a manutenção e extensão do código. Foi baseada na estrutura de dados do Freeflow-3D para que no futuro os ambientes de simulação bi e tridimensionais sejam integrados.

Os objetos geométricos no Freeflow-2D são curvas fechadas com orientação anti-horária e são representados por um tipo de estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*) para representar objetos geométricos pela sua fronteira (faces, arestas, vértices e suas relações topológicas). Considere a figura 6.1, onde tem-se dois sólidos. Passando-se um plano horizontal cortando os sólidos, obtém-se S1 e S2 que são duas fatias, S1 do primeiro sólido e S2 do segundo sólido. S1 tem duas faces (F1 e F2) e S2 tem uma face (F3). Cada face tem quatro semi-arestas e quatro vértices. Assim, a estrutura de dados está dividida em quatro itens: fatia, face, semi-aresta e vértice.

Figura 6.1: Cortes dos sólidos

Esta estrutura de dados utilizada no Freeflow-2D foi denominada de *halfedge-2d*. A estrutura *halfedge-2d* é uma variação da estrutura de dados *half-edge* utilizada no Freeflow-3D. Os níveis hierárquicos da estrutura *halfedge-2d* estão representados na figura 6.2.

Figura 6.2: Níveis hierárquicos da estrutura de dados

As listas fatia, face e vértice são abertas. E a lista semi-aresta é fechada. Cada elemento fatia aponta para as listas de faces e vértices. Cada elemento face aponta para a fatia e para a lista de semi-aresta. Cada semi-aresta aponta para uma face e para um vértice, e finalmente cada vértice aponta para uma semi-aresta.

Como no Freeflow-3D, os dados no Freeflow-2D estão divididos em duas categorias:

- Dados diretos: domínio, velocidade, pressão, células, parâmetros utilizados pelo simulador e representação dos objetos geométricos do modelo. Os dados diretos estão subdivididos em:

- dados estáticos (não são modificados durante a simulação): domínio, discretização, parâmetros de adimensionalização, algumas propriedades do escoamento e do fluido (viscosidade e o campo de gravidade);

- dados dinâmicos (são os que se modificam durante a simulação): velocidade, pressão, configuração do conjunto de células, representação dos objetos geométricos.

Os dados dinâmicos que são representados por matrizes são: velocidade e pressão. A configuração do conjunto de células é representada por matrizes e árvores, utiliza-se estes dois tipos de representação pela necessidade de acesso a um determinado grupo específico de células e, para isso utiliza-se a representação por árvore. No caso de acesso a uma vizinhança de uma determinada célula, a representação matricial é mais adequada. Supõe-se que se deseja alguma informação sobre uma célula do tipo C, para isto, basta percorrer a árvore que contém informação sobre este tipo de célula. Além disso, as árvores que representam alguns tipos de células contêm informações para melhorar o desempenho de alguns algoritmos utilizados pelo simulador. As árvores armazenam informações, por exemplo, de células do tipo C, S e F.

A disposição e ordem da árvore foram feitas considerando-se uma matriz esparsa, de modo que os elementos nulos não sejam representados. Como exemplo, considere a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

A árvore é formada seguindo inicialmente as linhas ou colunas da matriz. Por exemplo, se for seguindo primeiro por linhas: o primeiro elemento da árvore é o primeiro elemento não nulo da matriz (no exemplo corresponde ao elemento 3), que tem como filho o próximo elemento não nulo da mesma linha (no exemplo é o 1), este tem como filho o elemento não nulo seguinte da mesma linha (5) e assim por diante. O primeiro elemento da árvore tem como filho também o primeiro elemento não nulo da linha seguinte (no caso é o 2) e, este tem como filhos o próximo elemento não nulo desta linha (4) e o primeiro elemento

não nulo da linha seguinte (6). Este processo se repete até percorrer toda a matriz. A representação da árvore está feita na figura 6.3;

Figura 6.3: Disposição e ordem de uma árvore seguindo primeiro por linha

- Dados indiretos: esta estrutura foi desenvolvida preocupando-se com a representação dos objetos por sua fronteira, o desempenho dos algoritmos envolvidos no simulador e a minimização da interdependência entre dados. Embora o acesso aos dados da estrutura *halfedge-2d* que representa os contêineres, injetores, ejetores e fluidos seja direto, o acesso a um determinado objeto não é feito diretamente. Estes dados são compostos por três estruturas:

- contêiner (representa os contêineres): é composta de dados geométricos (B-Rep) do contêiner, dados geométricos do ejetor (caso exista), tipos de condição de contorno e uma árvore que armazena informações sobre as células que definem esse contêiner e atributos específicos do contêiner representado. A estrutura do contêiner é representada a seguir pela figura 6.4;

Figura 6.4: Estrutura do contêiner

- injetor (representa os injetores): é composta de dados geométricos (B-Rep), características do injetor, informações sobre os contêineres e fluidos que relacionam-se com esse injetor, uma árvore que armazena informações sobre as células que o definem e atributos específicos. A estrutura do injetor é descrita na figura 6.5;

Figura 6.5: Estrutura do injetor

- ejetor (representa os ejetores): é composta de dados geométricos (B-Rep), tipos de condições de contorno, informações sobre o contêiner que o contém, uma árvore que armazena informações sobre células que definem esse ejetor e atributos específicos. A estrutura do ejetor está demonstrada na figura 6.6.

Figura 6.6: Estrutura do ejeter

6.4 Modelador

O Modflow-2D é o módulo responsável pela introdução de dados que caracterizam o escoamento a ser simulado e possibilita a definição de elementos no domínio do escoamento. Foi implementado em linguagem C sobre o sistema UNIX, a interface gráfica do Modflow-2D utiliza o sistema de gerenciamento de janelas Xview sobre o Xwindows.

O modelador possui uma interface gráfica de fácil execução. A interface principal apresenta quatro opções, como mostra a figura 6.7:

Figura 6.7: Interface principal do modelador

- *File*: o botão *File* possui oito opções, como mostra a figura 6.8:

Figura 6.8: Opções do *File*

- *New*: o simulador requer a introdução de informações do domínio e da configuração do escoamento para a sua execução. Então, deve se escolher o botão *New* para se criar um

novo modelo. Os dados que configuram o escoamento são: domínio, células, dimensão das células, tempo inicial e final, ciclo inicial e final, espaçamento de tempo para impressão e para gravação automática, escala de comprimento e velocidade, força de gravidade (nos eixos x e y), viscosidade, incremento de tempo inicial, tolerância para a solução da equação de Poisson, fatores de controle do passo, opções de escolha do método para solução das equações de velocidades entre explícito e implícito (está implementado somente o explícito) e tipo de escoamento entre Newtoniano, Cross-Model e Power-Law (só está implementado o Newtoniano). Para todas as configurações tem-se dados padrão de entrada (*default*), como mostra a figura 6.9;

Figura 6.9: Entrada de dados para a criação de um modelo

- *Load*: este botão é utilizado quando se quer recarregar um modelo já criado, como mostra a figura 6.10. Para isto, basta entrar com o nome do diretório e será apresentado uma lista de modelos que estão neste diretório para escolher o qual se quer recarregar;

Figura 6.10: Opção de recarregar um modelo

- *Save*: serve para salvar um modelo criado. É exigido o diretório onde se quer salvar e um nome para o arquivo, como mostra a figura 6.11;

Figura 6.11: Salvar o modelo

- *Save As*: serve para salvar um modelo já salvo com outro nome e/ou em outro arquivo. É exigido o diretório onde se quer salvar e um nome para o arquivo, como mostra a figura 6.12;

Figura 6.12: Salvar o modelo com outro nome e/ou em outro arquivo

- *Print*: por esta opção pode se salvar os dados do modelo de quatro maneiras diferentes. A primeira é *Resume*, são os dados do modelo (dados que configuram o escoamento e as estruturas dos objetos criados); a segunda é *Properties*, são as propriedades (tipos das células e suas intersecções); a terceira é *Geometry*, a geometria (estruturas B-Rep dos objetos criados) e a quarta e última maneira é *All*, reúne as três opções anteriores. Para salvar é necessário o diretório, nome para o arquivo, extensão e escolher uma das quatro opções, como mostra a figura 6.13;

Figura 6.13: Salvar os dados do modelo

- *Flow Information*: apresenta alguns dados do modelo criado, como domínio, tamanho da malha, alguns parâmetros (escala de comprimento, de velocidade e a viscosidade) e dados adimensionais (números de Reynolds, Strouhal e Froude), como mostra a figura 6.14;

Figura 6.14: Informações sobre o modelo

- *B-Rep Information*: apresenta informações da estrutura B-Rep do fluido, contêiner, injetor e ejetor, como números de fatias, vértices, faces, arestas e memória utilizada, como mostra a figura 6.15;

Figura 6.15: Informações sobre a estrutura B-Rep

- *Exit*: por onde se faz o fim da execução do modelador. Para o caso de um modelo que ainda não foi salvo é perguntado se quer salvar, se positivo deve-se entrar com o diretório e nome do arquivo e, é perguntado também se quer sair realmente, figura 6.16. Para o caso de o modelo já ter sido salvo só se pergunta se quer sair, figura 6.17;

Figura 6.16: Fim da execução do modelador no caso do modelo não ter sido salvo

Figura 6.17: Fim da execução do modelador no caso do modelo já ter sido salvo

- *Edit*: o botão *Edit* possui quatro opções, *Insert*, *Delete*, *Modify* e *Select*, como mostra a figura 6.18.

Figura 6.18: Opções do *Edit*

Dentre essas opções somente o *Insert* está implementada. Pela opção *Insert* se faz o modelo, criando os contêineres, injetores e fluidos. Tem-se três opções, como mostra a figura 6.19:

Figura 6.19: Opções do *Insert*

- *Container*: pode se inserir quatro tipos de contêineres, como mostra a figura 6.20:

Figura 6.20: Opções do *Container*

◊ *Box*: os dados de entrada de um contêiner do tipo *Box* são dez, nome do contêiner, tipo do contêiner (*No-Slip* ou *Free-Slip*, só está implementado o *No-Slip*), origem em x, origem em y, comprimento, largura, espessura, inclinação, plano e orientação do contêiner. Como exemplo, tem-se as figuras 6.21 (entrada de dados) e 6.22 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Box* reto, as figuras 6.23 (entrada de dados) e 6.24 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Box* inclinado e as figuras 6.25 (entrada de dados) e 6.26 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Box* reto no plano x e orientação positiva;

Figura 6.21: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Box* reto

Figura 6.22: Visualização de um contêiner do tipo *Box* reto

Figura 6.23: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Box* inclinado

Figura 6.24: Visualização de um contêiner do tipo *Box* inclinado

Figura 6.25: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Box* reto no plano x e orientação positiva

Figura 6.26: Visualização de um contêiner do tipo *Box* reto no plano x e orientação positiva

◊ *Cube*: os dados de entrada de um contêiner do tipo *Cube* são cinco, nome do contêiner, tipo do contêiner (*No-Slip* ou *Free-Slip*, só está implementado o *No-Slip*),

origem em x, origem em y, comprimento e largura. Como exemplo, tem-se as figuras 6.27 (entrada de dados) e 6.28 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Cube*;

Figura 6.27: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Cube*

Figura 6.28: Visualização de um contêiner do tipo *Cube*

◊ *Square-Torus*: os dados de entrada de um contêiner do tipo *Square-Torus* são seis, nome do contêiner, tipo do contêiner (*No-Slip* ou *Free-Slip*, só está implementado o

No-Slip), origem em x, origem em y, comprimento, largura e espessura. Como exemplo, tem-se as figuras 6.30 (entrada de dados) e 6.29 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Square-Torus*;

Figura 6.29: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Square-Torus*

Figura 6.30: Visualização de um contêiner do tipo *Square-Torus*

◊ *Box-Cylinder*: os dados de entrada de um contêiner do tipo *Box* são nove, nome do contêiner, tipo do contêiner (*No-Slip* ou *Free-Slip*, só está implementado o *No-*

Slip), origem em x, origem em y, comprimento, largura, espessura, plano e orientação do contêiner. Como exemplo, tem-se as figuras 6.31 (entrada de dados) e 6.32 (visualização do contêiner) de um contêiner do tipo *Box-Cilinder*,

Figura 6.31: Entrada de dados de um contêiner do tipo *Box-Cilinder*

Figura 6.32: Visualização de um contêiner do tipo *Box-Cilinder*

- *Inflow*: pode se inserir um injetor do tipo *Cube*, como mostra a figura 6.33.

Figura 6.33: Opção do *Inflow*

Os dados de entrada de um injetor do tipo *Cube* são treze, nome do injetor, tempo inicial e final da injeção, velocidade do injetor, tipo de condição de contorno aplicado aos contêineres que envolvem o injetor (*No-Slip* ou *Free-Slip*, só está implementado o *No-Slip*), plano e orientação do injetor, quantidades de partículas injetadas, origem em x, origem em y, comprimento e largura. Como exemplo, tem-se as figuras 6.34 (entrada de dados) e 6.35 (visualização do injetor) de um injetor do tipo *Cube*;

Figura 6.34: Entrada de dados de um injetor do tipo *Cube*

Figura 6.35: Visualização de um injetor do tipo *Cube*

-*Fluid*: pode se inserir dois tipos de fluidos, como mostra a figura 6.36:

Figura 6.36: Opções do *Fluid*

◊ *Cube*: os dados de entrada de um fluido do tipo *Cube* são sete, nome do fluido, velocidades u e v iniciais, quantidade de partículas, origem em x , origem em y ,

comprimento e largura. Como exemplo, tem-se as figuras 6.37 (entrada de dados) e 6.38 (visualização do fluido) de um fluido do tipo *Cube*;

Figura 6.37: Entrada de dados de um fluido do tipo *Cube*

Figura 6.38: Visualização de um fluido do tipo *Cube*

◊ *Sphere*: os dados de entrada de um fluido do tipo *Sphere* são oito, nome do fluido, velocidades u e v iniciais, quantidade de partículas, origem em x , origem em y , raio, ângulos inicial e final. Como exemplo, tem-se as figuras 6.39 (entrada de dados) e 6.40 (visualização do fluido) de um fluido do tipo *Sphere*;

Figura 6.39: Entrada de dados de um fluido do tipo *Sphere*

Figura 6.40: Visualização de um fluido do tipo *Sphere*

- *View*: o botão *View* tem duas opções, como mostra a figura 6.41:

Figura 6.41: Opções do *View*

- *Wire Frame*: por esta opção pode se visualizar o modelo por suas arestas, como mostra a figura 6.42;

Figura 6.42: Visualização do modelo pelas suas arestas

- *Fill*: por esta opção pode se visualizar o modelo preenchido, como mostra a figura 6.43;

Figura 6.43: Visualização do modelo preenchido

- *View Options*: o botão *View Options* possui duas opções, como mostra a figura 6.44:

Figura 6.44: Opções do *View Options*

- *Viewing Parameters*: por este botão tem-se a possibilidade de mudar vários parâmetros, como mostra a figura 6.45:

Figura 6.45: Opções do *Viewing Parameters*

◊ *Frame Width* e *Frame Height*: estes parâmetros fazem a mudança do comprimento e largura da janela, respectivamente, como mostram as figuras 6.46 e 6.47;

Figura 6.46: Opções para mudar o comprimento e a largura da janela

Figura 6.47: Exemplo de comprimento e de largura da janela

◊ *Rotation, Zoom, Translation X e Translation Y*: estes parâmetros fazem a rotação, diminuição ou aumento, translação no eixo x e translação no eixo y, respectivamente, do modelo, como mostram as figuras 6.48 e 6.49;

Figura 6.48: Opções para rotacionar, diminuir ou aumentar, translacionar em x e em y o modelo

Figura 6.49: Exemplo de modelo rotacionado, diminuído, transladado em x e em y

◊ *Background Color*, *Wire Frame Color*, *Domain Color*, *Grid Color*, *X-Axes Color* e *Y-Axes Color*: estes parâmetros permitem mudar a cor de fundo da janela, das arestas, do domínio, da malha, dos eixos x e y, como mostra a figura 6.50. E como exemplo, as figuras 6.51 e 6.52 mostram as cores de fundo da janela e as arestas modificadas;

Figura 6.50: Opções para mudar as cores de fundo da janela, das arestas, do domínio, da malha, dos eixos x e y

Figura 6.51: Opções para mudar as cores de fundo da janela e das arestas

Figura 6.52: Exemplo de cor de fundo da janela e das arestas modificados

◊ *View Domain*: este parâmetro permite a visualização do domínio, como mostram as figuras 6.53 e 6.54;

Figura 6.53: Opção de visualização do domínio

Figura 6.54: Visualização do domínio

◊ *View Grid*: este parâmetro permite a visualização da malha, como mostram as figuras 6.55 e 6.56;

Figura 6.55: Opção de visualização da malha

Figura 6.56: Visualização da malha

◊ *View Axes*: este parâmetro permite a visualização dos eixos x e y, como mostram as figuras 6.57 e 6.58;

Figura 6.57: Opção de visualização dos eixos x e y

Figura 6.58: Visualização dos eixos x e y

◊ *Save Configuration*: por este parâmetro tem-se a opção de salvar as configurações dos parâmetros em dez memórias, como mostra a figura 6.59;

Figura 6.59: Opção de salvar as configurações

◊ *Restore Configuration*: por este parâmetro tem-se a opção de restaurar as configurações dos parâmetros anteriores nas quais foram salvas pelo parâmetro *Save Configuration*, como mostra a figura 6.60;

Figura 6.60: Opção de restaurar as configurações

◊ *Auto redraw*: com este parâmetro desativado pode se fazer todas as alterações desejadas nos outros parâmetros, assim que for ativado serão realizadas todas as tarefas de uma só vez, como mostra a figura 6.61;

Figura 6.61: Opção de *Auto Redraw* desativada

- *Objects Properties*: por esta opção pode-se alterar as propriedades dos objetos, como mostra a figura 6.62:

Figura 6.62: Opção *Objects Properties*

◊ *Visible* e *Color*: pela opção *Visible* pode-se desativar propriedades tornando fluidos, contêineres e injetores invisíveis, e pela opção *Color* pode-se mudar as cores de fluidos, contêineres e injetores, como mostram as figuras 6.63 e 6.64.

Figura 6.63: Propriedade *Visible* do contêiner 2 desativada e a propriedade *Color* do contêiner 1 modificada

Figura 6.64: Modelo com contêiner 2 invisível e a cor do contêiner 1 modificada

6.5 Simulador

O simulador consiste de um conjunto de programas baseado no método GENSMAC, cuja finalidade é resolver problemas de escoamentos transientes de fluidos newtonianos incompressíveis com superfícies livres. O Simflow-2D representa o fluido por partículas apenas na fronteira utilizando a estrutura *halfedge-2d*.

Este módulo resolve as equações de Navier-Stokes em duas dimensões para um fluido incompressível e a equação de conservação de massa (equação da continuidade) ambas estudadas no capítulo 1. O método GENSMAC e as condições de contorno foram vistos no capítulo 2 e as condições de contorno na superfície livre foram analisadas no capítulo 1. As definições das células, o controle do passo no tempo e a solução da equação de Poisson foram estudados no capítulo 3. E por fim, a atualização das partículas marcadoras, que foi visto no capítulo 2.

A simulação começa com o Simflow-2D fazendo a leitura dos arquivos de entrada. Depois tem-se um grande ciclo seguindo os seguintes passos:

- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v das células S com as células V;

- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno no contorno rígido;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v nos injetores;
- cálculo da pressão p nas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades intermediárias $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$;
- resolução da equação de Poisson;
- cálculo das velocidades finais u e v ;
- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v das células S com as células V;
- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno no contorno rígido;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v nos injetores;
- movimento da superfície livre (partículas virtuais);
- inserção das partículas virtuais no injetor;
- eliminação das partículas virtuais;
- inserção das partículas virtuais;
- redefinição das células após o movimento das partículas virtuais.

A seguir tem-se os passos descritos acima com mais detalhes.

Para o cálculo das velocidades u e v das condições de contorno na superfície livre tem-se que considerar quinze casos. O método utilizado é o seguinte: percorre-se as células S e estuda-se as células vizinhas, assim, pode-se agrupar os quinze casos existentes em quatro conjuntos:

- células S com somente uma face em contato com células V: existem quatro casos, células S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo a face $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Para estes casos a velocidade na face da célula V é calculada pela equação da continuidade (1.25). Como exemplo, considera-se uma célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V, como mostra a figura 6.65.

Figura 6.65: Célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Neste caso, deve-se calcular a velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$. Então pela equação da continuidade tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{\delta x}{\delta y} (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}).$$

Os outros três casos são calculados de maneira análoga;

- células S com duas faces em contato com células V: existem quatro casos, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Neste caso, as velocidades nas faces das células V são calculadas pela equação da continuidade (1.25) e uma das equações de contorno na superfície livre (1.37). Como exemplo, considera-se uma célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, como mostra a figura 6.66.

Figura 6.66: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$. Então pela equação da continuidade, equação de contorno na superfície livre e considerando o vetor normal como $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

Os outros três casos são calculados de maneira análoga;

- células S com dois lados opostos em contato com células V: existem dois casos, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo as faces $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Neste caso, apenas uma velocidade é ajustada de modo a satisfazer a equação da continuidade (1.25). Como exemplo, considera-se uma célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V, como mostra a figura 6.67.

Figura 6.67: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V

Neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j}$, então tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{\delta x}{\delta y} (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}).$$

O outro caso é análogo;

- células S com três faces ou quatro faces em contato com células V: existem cinco casos, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Neste caso, configura-se uma das velocidades de modo a satisfazer a equação da continuidade (1.25). Como exemplo, considera-se uma célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, como mostra a figura 6.68.

Figura 6.68: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$. Então tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

Os outros quatro casos são análogos.

Após calcular as velocidades u e v na superfície livre, calcula-se as velocidades tangenciais u e v das células S com as células V, para isto, percorre-se a árvore de células S e:

- se a célula $i + 1, j$ for S, então tem-se dois casos:

- se as células $i, j + 1$ e $i + 1, j + 1$ são V, então calcula-se a velocidade u de acordo com uma das equações de contorno na superfície livre (1.37), como mostra a figura 6.69. Para este caso, o vetor tangente é $m = (0, 1)$, então:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\delta y}{\delta x}(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}});$$

Figura 6.69: Células i, j e $i + 1, j$ são S e as células $i, j + 1$ e $i + 1, j + 1$ são V

- se as células $i, j - 1$ e $i + 1, j - 1$ são V, então calcula-se a velocidade u de acordo com uma das equações de contorno na superfície livre (1.37), analogamente ao caso anterior;

• se a célula $i, j + 1$ for S, então tem-se dois casos:

- se as células $i + 1, j$ e $i + 1, j + 1$ são V, então calcula-se a velocidade v de acordo com uma das equações de contorno na superfície livre (1.37), como mostra a figura 6.70. Para este caso, o vetor tangente é $m = (-1, 0)$, então:

$$v_{i+1,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{\delta y} (u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j});$$

Figura 6.70: Células i, j e $i, j + 1$ são S e as células $i + 1, j$ e $i + 1, j + 1$ são V

- se as células $i-1, j$ e $i-1, j-1$ são V, então calcula-se a velocidade v de acordo com uma das equações de contorno na superfície livre (1.37), analogamente ao caso anterior.

O próximo passo da simulação é aplicar as condições de contorno no contorno rígido, isto é, calcular as velocidades u e v nas faces das células F através de interpolação linear.

As células F podem ter uma ou duas faces em contato com células S ou C, no caso bidimensional são oito casos, já no caso tridimensional são 26 casos. Mais especificamente, há quatro casos possíveis de células F que têm uma face em contato com células S ou C e existem quatro casos de células F que têm duas faces em contato com células S ou C.

Os quatro casos de células F que têm uma face em contato com células S ou C são:

- células F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C;
- células F com a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C;
- células F com a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C;
- células F com a face $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C.

Como exemplo, considere uma célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C, como mostra a figura 6.71.

Figura 6.71: Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 6.71 pode-se observar as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ que são exigidas ao se calcular as velocidades $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ através das equações do momento discretizadas 3.1 e 3.2. O método é exemplificado calculando a velocidade u , sendo considerado análogo o cálculo da velocidade v .

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_b = (x_{ub}, y_j)$, onde x_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 na superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{ub}}{x_{i+\frac{3}{2}} - x_{ub}} \cdot u_{i+\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{ub} - x_{i+\frac{3}{2}}} \cdot u_b,$$

Figura 6.73: Plano x e y, e orientação dos possíveis injetores

Então, tem-se dois planos x e y, e cada plano tem duas orientações positiva e negativa:

- plano x:

- orientação positiva:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = -u_{i+\frac{1}{2},j+1}$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = -u_{i-\frac{1}{2},j+1};$$

- orientação negativa:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = -u_{i+\frac{1}{2},j-1}$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = -u_{i-\frac{1}{2},j-1};$$

• plano y:

- orientação positiva:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j-\frac{1}{2}};$$

- orientação negativa:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = -v_{i-1,j-\frac{1}{2}}.$$

Em seguida, calcula-se a pressão p das condições de contorno na superfície livre (1.36). Para o caso bidimensional, deve-se considerar quinze casos que se agrupam em três conjuntos:

• células S tendo apenas uma face em contato com células V: existem quatro casos, células S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo a face $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Como exemplo, considera-se uma célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com célula V, como mostra a figura 6.74.

Figura 6.74: Célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (1, 0)$ então, 1.36 fica:

$$p = \frac{2\nu(q)}{Re} \left(\frac{\delta u}{\partial x} \right),$$

que discretizada torna-se:

$$p_{i,j} = \frac{2\nu(q_{i,j})}{Re} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right).$$

Os outros três casos são calculados de maneira análoga;

• células S com duas faces em contato com células V: existem quatro casos, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Como exemplo, considera-se uma célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, como mostra a figura 6.75.

Figura 6.75: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ então, 1.36 fica:

$$p = \frac{\nu(q)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

que discretizada fica:

$$p_{i,j} = \frac{\nu(q_{i,j})}{2Re} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} \right) + \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right].$$

Os outros três casos são análogos;

- células S com dois lados opostos, três ou quatro faces em contato com células V: existem sete casos, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V, células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V e células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V. Para estes casos a pressão é zero, pois não se consegue determinar o vetor normal.

Após calcular a pressão calcula-se as velocidades intermediárias $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ pelas equações de momento discretizadas 3.1 e 3.2.

Em seguida, resolve-se a equação de Poisson 3.10 através do método dos gradientes conjugados. O método para a solução da equação de Poisson está descrito no capítulo 3. Depois calcula-se as velocidades finais nas células C e S, onde $u = \tilde{u} + p$ e $v = \tilde{v} + p$.

Repete-se os cálculos das velocidades u e v na superfície livre, das velocidades tangenciais das células S com as células V, das velocidades u e v das células F e das velocidades tangenciais no injetor.

O próximo passo é eliminar as partículas virtuais para a diminuição de dados. Uma aresta deve ser removida quando o tamanho da aresta for menor que $0.05 * \min\{dx, dy\}$ e pertencer a uma mesma célula. Considere a figura 6.76.

Figura 6.76: Eliminação do vértice v_3 e da aresta a_3

Como exemplo, considere que se queira eliminar o vértice v_3 e a aresta a_3 , então o vértice v_3 é removido e o v_2 é a média entre o v_2 e o v_3 , ficando como na figura 6.77.

Figura 6.77: Vértice v_3 e aresta a_3 eliminadas

Após eliminar as partículas virtuais deve-se calcular suas velocidades u e v usando interpolação bilinear, envolvendo as quatro velocidades mais próximas.

O método utilizado identifica a posição da partícula que pode ter quatro posições, assim, tem-se quatro casos. Considera-se uma célula e a divide em quatro partes, como mostra a figura 6.78. Pois é preciso saber as quatro velocidades mais próximas da partícula virtual.

Figura 6.78: Célula dividida em quatro partes

Então, a partícula pode estar no quadrante A, B, C, ou D. Como exemplo, para determinar a velocidade u de uma partícula, considera-se que a partícula virtual está no quadrante A, como mostra a figura 6.79.

Figura 6.79: Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual

Então por interpolação linear:

$$u = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} u_{y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} u_{y_1},$$

onde u_{y_0} e u_{y_1} também são calculados por interpolação linear:

$$u_{y_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_0}$$

$$u_{y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_1}.$$

Considera-se o mesmo exemplo para determinar a velocidade v da partícula virtual, como mostra a figura 6.80.

Figura 6.80: Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual

Então por interpolação linear:

$$v = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} v_{x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} v_{x_1},$$

onde v_{x_0} e v_{x_1} também são calculados por interpolação linear:

$$v_{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_0, y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_0, y_1}$$

$$v_{x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_1, y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_1, y_1}.$$

Para a partícula virtual pertencente aos outros três quadrantes os cálculos são análogos. Desta forma, calcula-se as velocidades das partículas virtuais e atualiza-se suas posições. Depois denomina-se as células como C, S ou V. Se as células forem C ficam S, se as células forem V ficam S e calcula-se a velocidade nas células vizinhas.

Em seguida, cria-se as partículas virtuais no injetor e elimina-se as partículas novamente. Depois insere-se as partículas virtuais no fluido, pois conforme o fluido se move, as partículas que representam a superfície podem ficar distantes uma das outras e assim perde-se os detalhes de representação. Pode ocorrer também que uma célula da superfície livre não contenha partículas devido a definição das células ser feita no instante de tempo

anterior, podendo haver confusão no algoritmo de definição das células no tempo atualizado.

Para se inserir partículas no fluido considera-se o comprimento de cada aresta que representa a superfície livre, subdividindo essa aresta em arestas menores toda vez que seu comprimento for superior a $0.8 * \min\{dx, dy\}$.

E por fim, redefine-se as células após o movimento das partículas virtuais. Quando movimentou-se as partículas virtuais, as células C e V tornaram-se S. Agora as células que contêm a superfície livre são marcadas por terem partículas virtuais.

As células S que não fazem vizinhança com nenhuma célula V ficam C. As células S que não foram marcadas por não terem partículas virtuais transformam-se em V e a velocidade nestas células é zero. As células S que não têm contato com nenhuma célula V tornam-se C e as células C que têm algum contato com as células V ficam S.

Após redefinir as células recomeça-se o processo novamente.

6.6 Visualizador

Os resultados da simulação de escoamentos de fluidos podem ser visualizados graficamente através do módulo de visualização Visflow-2D. Os resultados gerados pelo simulador são dados sobre o modelo de escoamento, a representação dos objetos geométricos e propriedades em instantes pré-definidos. O Visflow-2D permite a visualização gráfica do fluido e do domínio. Foi implementado em linguagem C sobre o sistema UNIX. A interface gráfica do Visflow-2D utiliza o sistema de gerenciamento de janela Xview sobre o Xwindows.

A entrada de dados do visualizador é feita por arquivos. O acesso aos dados do modelo que independem do tempo é feito por um arquivo e os que dependem do tempo é feito por uma série de arquivos, contendo informações sobre os objetos geométricos, propriedades, configuração das células, tempo e ciclo da simulação.

Dados de um determinado passo no tempo ficam armazenados em arquivos distintos, tornando assim, o tempo de acesso a um dado do início da simulação, igual ao acesso a outro no final da simulação, e permitindo a visualização de campos mesmo antes do término da simulação.

O visualizador possui uma interface gráfica de fácil execução e a interface principal apresenta três opções, como mostra a figura 6.81:

Figura 6.81: Interface principal do visualizador

- *File*: O botão *File* possui seis opções, como mostra a figura 6.82:

Figura 6.82: Opções do *File*

- *Load*: o visualizador possui opções de manipulação de arquivos. Ao selecionar um arquivo tem-se acesso aos dados gerados para este modelo no tempo inicial, como mostra

a figura 6.83;

Figura 6.83: Opção de manipulação de arquivos

- *Select FRAME*: uma janela para escolha de outros instantes no tempo pode ficar permanentemente aberta, e a seleção de um novo tempo atualizará os campos visualizados para o novo instante de tempo, como mostra a figura 6.84;

Figura 6.84: Seleção de um novo tempo

- *Flow Information*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.14;

- *B-Rep Information*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.15;
- *Kill fluid faces*: elimina-se vértices e arestas que são desnecessários para a visualização. Este é um processo importante para diminuição de dados e se faz quando uma aresta contém vértices numa mesma célula e seu tamanho é inferior a $0.3 * \min\{dx, dy\}$;
- *Exit*: por onde se faz o fim da execução do visualizador, como mostra a figura 6.85;

Figura 6.85: Fim da execução do visualizador

- *View*: o botão *View* tem cinco opções, como mostra a figura 6.86:

Figura 6.86: Opções do *View*

- *Wire Frame*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.42;
- *Fill*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.43;

- *Pressure*: por esta opção pode se visualizar a pressão do fluido, como mostra a figura 6.87;

Figura 6.87: Visualização da pressão

- *X-Velocity*: por esta opção pode se visualizar a velocidade na direção x do fluido, como mostra a figura 6.88;

Figura 6.88: Visualização da velocidade na direção x

- *Y-Velocity*: por esta opção pode se visualizar a velocidade na direção y do fluido, como mostra a figura 6.89;

Figura 6.89: Visualização da velocidade na direção y

- *View Options*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.44.

6.7 Reiniciador

O Resimflow-2D é o módulo responsável em reiniciar a simulação do ponto que parou ou em realizar modificações em algum campo para simular novamente. O reiniciador é importante também quando ocorre interrupção da execução do programa por algum motivo, como por exemplo, queda de energia elétrica.

O Resimflow-2D foi implementado em linguagem C sobre o sistema UNIX, a interface gráfica do Resimflow-2D utiliza o sistema de gerenciamento de janela Xview sobre o Xwindows.

O reiniciador possui uma interface gráfica de fácil execução. A interface principal apresenta duas opções, como mostra a figura 6.90:

Figura 6.90: Interface principal do reiniciador

- *File*: o botão *File* possui cinco opções, como mostra a figura 6.91:

Figura 6.91: Opções do *File*

- *Load*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.10;
 - *Save*: é automático;
 - *Save As*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.12;
 - *Print*: idem ao do modelador, como mostra a figura 6.13;
 - *Exit*: idem ao do modelador, como mostra as figuras 6.16 e 6.17;
- *Restart*: os dados do modelo que podem ser alterados pelo Resimflow-2D são: ciclo final, tempo final, espaçamento de tempo para impressão e para gravação automática, tolerância

para a solução da equação de Poisson e fator de controle de passo, como mostra a figura 6.92.

Figura 6.92: Dados do modelo que podem ser alterados

6.8 Comunicação entre os Módulos

A comunicação entre os módulos do sistema é feita por arquivos. A saída do modelador é constituída de oito arquivos:

- <nome>.container - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos contêineres;
- <nome>.inflow - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos injetores;
- <nome>.outflow - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos ejetores;
- <nome>.fluid - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos fluidos;
- <nome>.lcontainer - contendo as estruturas indiretas contêiner;
- <nome>.linflow - contendo as estruturas indiretas injetor;
- <nome>.loutflow - contendo as estruturas indiretas ejeter;
- <nome>.domain - contendo os demais dados.

O simulador tem como entrada oito arquivos com a mesma estrutura dos arquivos de saída do modelador os quais podem ter sido gerados pelo modelador, pelo reiniciador, ou pelo próprio simulador. Os arquivos de saída do simulador servem a quatro propósitos: para o final da simulação (a simulação pode ser continuada a partir destes dados), para

o evento de ocorrência de algum erro durante a simulação, salvamento em tempos pré-definidos para o caso de interrupção da simulação por algum problema do sistema ou da máquina sendo utilizada e para a visualização dos resultados. Nos três primeiros casos os arquivos de saída têm a mesma estrutura do modelador.

Os arquivos para a visualização dos resultados, que são a entrada de dados do visualizador são:

- <nome>.manager - contendo informações invariantes no tempo, como domínio, discretização, entre outras;
- <nome>.container.<número> - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos contêineres;
- <nome>.inflow.<número> - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos injetores;
- <nome>.outflow.<número> - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos ejetores;
- <nome>.fluid.<número> - contendo as estruturas *halfedge-2d* dos fluidos;
- <nome>.p.<número> - contendo a pressão;
- <nome>.u.<número> - contendo a componente de velocidade u ;
- <nome>.v.<número> - contendo a componente de velocidade v ;
- <nome>.cell.<número> - contendo os tipos de células.

O campo <número> do nome dos arquivos é devido ao fato de que podem ser gerados vários arquivos com informações sobre instantes de tempos distintos. No caso de contêineres estáticos, somente o primeiro arquivo é gerado.

Os arquivos de entrada para o reiniciador de escoamentos podem ser uns dos três arquivos de saída do simulador cuja estrutura seja a mesma dos arquivos de saída do modelador. Os arquivos de saída do reiniciador são, exatamente, os mesmos que do modelador.

6.9 Considerações Finais

O Freeflow-2D é um ambiente completo de simulação de escoamentos com superfícies livres que possui módulos que realizam a modelagem, simulação, visualização e reinicialização do escoamento.

A estrutura de dados do freeflow-2D foi baseada na estrutura de dados do Freeflow-3D. Assim, facilitando uma futura integração dos ambientes. O Freeflow-2D serve também ao propósito de ser um laboratório para futuras extensões do Freeflow-3D, por ser mais simples a implementação, pois no bidimensional há menos casos a considerar do que no

tridimensional.

Os módulos do Freeflow-2D são de fácil execução. O Modflow-2D é o modelador de moldes e escoamentos, o Simflow-2D é o simulador de escoamentos, o Visflow-2D é o visualizador de escoamentos e o Resimflow-2D é o reiniciador de escoamentos.

No próximo capítulo é apresentado alguns resultados da simulação de escoamentos realizados pelo Freeflow-2D.

Capítulo 7

Resultados

7.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta na seção 7.2 resultados de simulação de alguns modelos, pelo Freeflow-2D e também comparações com modelos simulados pelo Freeflow para validar o código. E por fim, na seção 7.3 tem-se as considerações finais deste capítulo.

7.2 Resultados

Resultado 1: *Steady Filling*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* inclinado e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $x_{min} = 0.0$, $x_{max} = 0.055$, $y_{min} = 0.0$, $y_{max} = 0.065$;
- células: $i_{max} = 55$, $j_{max} = 65$;
- dimensão das células: $dx = 0.001$, $dy = 0.001$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 1.0;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 25000;
- escala de comprimento em metros: 0.005;
- escala de velocidade em metros por segundos: 1.0;
- campo gravitacional : $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;

- viscosidade: 0.005000;
- número de Reynolds: 1.0;
- número de Frouden: 4.5152364;
- número de Strouhal: 200.0;
- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Figura 7.1: $t = 0.05$ e $t = 0.1$

Figura 7.2: $t = 0.15$ e $t = 0.2$

Figura 7.3: $t = 0.25$ e $t = 0.3$

Resultado 2: *Steady Filling*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box-Cylinder* e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $xmin = 0.0$, $xmax = 0.05$, $ymin = 0.0$, $ymax = 0.06$;
- células: $imax = 50$, $jmax = 60$;
- dimensão das células: $dx = 0.001$, $dy = 0.001$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 1.0;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 25000;
- escala de comprimento em metros: 0.004;
- escala de velocidade em metros por segundos: 0.5;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = 0.0$;
- viscosidade: 0.001;
- número de Reynolds: 2.0;
- número de Frouden: 2.5240939;
- número de Strouhal: 125.0;
- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Figura 7.4: $t = 0.15$ e $t = 0.25$

Figura 7.5: $t = 0.35$ e $t = 0.45$

Figura 7.6: $t = 0.65$ e $t = 0.85$

Resultado 3: *Steady Filling*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $x_{min} = 0.0$, $x_{max} = 0.053$, $y_{min} = 0.0$, $y_{max} = 0.0565$;
- células: $i_{max} = 106$, $j_{max} = 113$;
- dimensão das células: $dx = 0.0005$, $dy = 0.0005$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 0.5;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 100000;
- escala de comprimento em metros: 0.005;
- escala de velocidade em metros por segundos: 0.5;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;
- viscosidade: 0.001;
- número de Reynolds: 2.5;
- número de Frouden: 2.2576182;
- número de Strouhal: 100.0;

- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Para validar o código este modelo foi simulado pelo Freeflow-2D e comparado com a simulação feita pelo Freeflow. As figuras do lado esquerdo são os resultados da simulação feita pelo Freeflow-2D e as do lado direito pelo Freeflow. O contêiner do Freeflow corresponde com a parte interna do contêiner do Freeflow-2D.

Figura 7.7: $t = 0.1$

Figura 7.8: $t = 0.2$

Figura 7.9: $t = 0.3$

Figura 7.10: $t = 0.4$

Comparando-se as duas simulações chega-se a conclusão que o Freeflow-2D fornece resultados análogos ao do Freeflow.

Resultado 4: *Steady Filling*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* reto e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $xmin = 0.0$, $xmax = 0.053$, $ymin = 0.0$, $ymax = 0.565$;

- células: $imax = 106$, $jmax = 113$;
- dimensão das células: $dx = 0.0005$, $dy = 0.0005$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 0.5;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 50000;
- escala de comprimento em metros: 0.004;
- escala de velocidade em metros por segundos: 1.0;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;
- viscosidade: 0.005;
- número de Reynolds: 0.8;
- número de Frouden: 5.0401878;
- número de Strouhal: 250.0;
- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Para validar o código este modelo foi simulado pelo Freeflow-2D e comparado com a simulação feita pelo Freeflow. As figuras do lado esquerdo são os resultados da simulação feita pelo Freeflow-2D e as do lado direito pelo Freeflow. O contêiner do Freeflow corresponde com a parte interna do contêiner do Freeflow-2D.

Figura 7.11: $t = 0.15$

Figura 7.12: $t = 0.2$

Figura 7.13: $t = 0.25$

Figura 7.14: $t = 0.3$

Figura 7.15: $t = 0.35$

Comparando-se as duas simulações chega-se a conclusão que o Freeflow-2D fornece resultado análogos ao do Freeflow.

Resultado 5: *Splashing*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* reto e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $xmin = 0.0$, $xmax = 0.053$, $ymin = 0.0$, $ymax = 0.0565$;
- células: $imax = 106$, $jmax = 113$;
- dimensão das células: $dx = 0.0005$, $dy = 0.0005$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 1.0;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 50000;
- escala de comprimento em metros: 0.005;
- escala de velocidade em metros por segundos: 5.0;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;
- viscosidade: 0.001;
- número de Reynolds: 25.0;
- número de Frouden: 22.576182;
- número de Strouhal: 1000.0;
- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Para validar o código este modelo foi simulado pelo Freeflow-2D e comparado com a simulação feita pelo Freeflow. As figuras do lado esquerdo são os resultados da simulação feita pelo Freeflow-2D e as do lado direito pelo Freeflow. O contêiner do Freeflow corresponde com a parte interna do contêiner do Freeflow-2D.

Figura 7.16: $t = 0.0125$

Figura 7.17: $t = 0.025$

Figura 7.18: $t = 0.0375$

Figura 7.19: $t = 0.05$

Comparando-se as duas simulações chega-se a conclusão que o Freeflow-2D fornece resultados análogos ao do Freeflow. Em seguida, tem-se a pressão, velocidade em x e em y deste modelo no tempo $t = 0.05$.

Figura 7.20: Pressão

Figura 7.21: Velocidade em x

Figura 7.22: Velocidade em y

Resultado 6: *Jet Thinning*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* inclinado e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $x_{min} = 0.0$, $x_{max} = 0.092$, $y_{min} = 0.0$, $y_{max} = 0.073$;
- células: $i_{max} = 92$, $j_{max} = 73$;
- dimensão das células: $dx = 0.001$, $dy = 0.001$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 0.5;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 20000;
- escala de comprimento em metros: 0.014;
- escala de velocidade em metros por segundos: 0.5;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;
- viscosidade: 0.001;
- número de Reynolds: 7.0;
- número de Frouden: 1.3491849;
- número de Strouhal: 35.714286;

- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.000001.

Para validar o código este modelo foi simulado pelo Freeflow-2D e comparado com a simulação feita pelo Freeflow. As figuras do lado esquerdo são os resultados da simulação feita pelo Freeflow-2D e as do lado direito pelo Freeflow. O contêiner do Freeflow corresponde com a parte interna do contêiner do Freeflow-2D.

Figura 7.23: $t = 0.05$

Figura 7.24: $t = 0.1$

Figura 7.25: $t = 0.15$

Figura 7.26: $t = 0.2$

Figura 7.27: $t = 0.25$

Comparando-se as duas simulações chega-se a conclusão que o Freeflow-2D fornece resultados análogos ao do Freeflow.

Resultado 7: *Buckling Jet*

Este modelo possui um contêiner do tipo *Box* reto e um injetor. Os dados que configuram o escoamento são:

- domínio: $xmin = 0.0$, $xmax = 0.053$, $ymin = 0.0$, $ymax = 0.0565$;
- células: $imax = 106$, $jmax = 113$;
- dimensão das células: $dx = 0.0005$, $dy = 0.0005$;
- tempo inicial: 0.0, tempo final: 1.0;
- ciclo inicial: 0, ciclo final: 300000;
- escala de comprimento em metros: 0.003;
- escala de velocidade em metros por segundos: 0.5;
- campo gravitacional: $g_x = 0.0$, $g_y = -9.81$;
- viscosidade: 0.01;
- número de Reynolds: 0.015;
- número de Frouden: 2.9145726;
- número de Strouhal: 166,666667;
- tolerância para a solução da equação de Poisson: 0.0000001.

Para validar o código este modelo foi simulado pelo Freeflow-2D e comparado com a simulação feita pelo Freeflow. As figuras do lado esquerdo são os resultados da simulação feita pelo Freeflow-2D e as do lado direito pelo Freeflow. O contêiner do Freeflow corresponde com a parte interna do contêiner do Freeflow-2D.

Figura 7.28: $t = 0.325$

Figura 7.29: $t = 0.375$

Figura 7.30: $t = 0.425$

Figura 7.31: $t = 0.45$

Figura 7.32: $t = 0.5$

Figura 7.33: $t = 0.7$

O *Buckling Jet* é um modelo instável e comparando-se as duas simulações chega-se a conclusão que para este modelo há uma diferença entre a simulação do Freeflow-2D e a do Freeflow. Entre os códigos existem diferenças como a inserção e eliminação de partículas virtuais. No Freeflow-2D insere-se e elimina-se partículas virtuais, enquanto que no Freeflow apenas insere-se. Isto é uma das causas que para este modelo, simulado

pelo Freeflow-2D, o fluido tenha dobrado do lado contrário ao do modelo simulado pelo Freeflow. O lado que o fluido pode dobrar pela primeira vez para o *Buckling Jet* é aleatório e fatores distintos foram as causas destas duas simulações darem resultados contrários.

7.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou resultados de simulação feito pelo Freeflow-2D e comparou-se alguns resultados com a simulação feita pelo Freeflow.

O Freeflow-2D apresenta resultados análogos ao do Freeflow, sendo este último reconhecido por ter seus resultados comparados com testes experimentais [12].

Em seguida, tem-se as conclusões, contribuições e futuros projetos deste trabalho.

Conclusão

Na introdução deste trabalho foi motivado o porque do estudo em mecânica dos fluidos de problemas de escoamento de fluidos com superfícies livres, alguns dos métodos utilizados para sua resolução e foi apresentado três ambientes de simulação.

No capítulo 1, foi dado algumas definições de fluido e de parâmetros adimensionais. Foi estudado as equações de Navier-Stokes e as condições de contorno na superfície livre. Foi feito também o desenvolvimento das equações de momento, da continuidade e da razão de cisalhamento.

No capítulo 2, foi apresentado o método GENSMAC e descrito seu algoritmo computacional.

No capítulo 3, foi mostrado as discretizações das equações básicas, da razão de cisalhamento, do momento e de Poisson. Foi apresentado também a definição das células, as condições de contorno na superfície livre, o controle do passo no tempo, a solução da equação de Poisson e como se dá o movimento das partículas.

No capítulo 4, foi apresentado o ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres, denominado Freeflow. Foi descrito seus quatro módulos: o modelador de moldes, interface de entrada de dados, o simulador de escoamentos e o visualizador de escoamentos.

No capítulo 5, foi descrito o Freeflow-3D, um ambiente integrado para simulação de escoamentos tridimensionais incompressíveis com superfícies livres. Foi feito também a descrição dos quatro módulos que compõem o sistema: Modflow-3D, Simflow-3D, Visflow-3D e Resimflow-3D e, foi apresentado a estrutura de dados *half-edge*.

No capítulo 6, foi apresentado o Freeflow-2D (objetivo principal deste trabalho), um ambiente integrado para simulação de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres. Foi descrito os quatro módulos que compõem o sistema: Modflow-2D, Simflow-2D, Visflow-2D e Resimflow-2D. E foi explicado a estrutura de dados *halfedge-2d*.

No capítulo 7, foram apresentados alguns modelos simulados pelo Freeflow-2D, comparando-os com resultados obtidos pelo Freeflow.

Conclue-se, assim, que o Freeflow-2D é um sistema que atingiu seu objetivo de modelar, simular e visualizar escoamentos com a mesma precisão que o Freeflow, porém com uma estrutura de dados que permite extensões. Além de contribuir como teste para extensões que se pensa em realizar no Freeflow-3D.

Como propostas de futuros trabalhos, além de manter o Modflow-2D e o Visflow-2D sempre atualizados, tem-se a oportunidade de implementação para fluidos turbulentos, viscoelásticos, movimentar contêineres e injetores, e resolver as equações da velocidade pelo método semi-implícito. As três primeiras propostas já estão sendo inicializadas para o caso tridimensional e a quarta para o bidimensional, sendo os dois primeiros, teses de doutorado, e os dois últimos, dissertações de mestrado.

Referências Bibliográficas

- [1] HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Welch (1965), *The MAC Method*. Phys. Fluids, V.8, 2182; WELCH, J. E.; HARLOW, F. H.; SHANNON, J. P.; DALY, B. J. Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-3425, Los Alamos, NM, 1996.
- [2] AMSDEN, A.; HARLOW, F. *The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4370, Los Alamos, NM, 1970.
- [3] TOMÉ, M. F.; MCKEE, S. *GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains*. J. Comp. Phys., V.110, n.1, pp.171-186, 1994.
- [4] TOMÉ, M. F.; DUFFY, B.; MCKEE, S. *A Numerical Method for Solving Unsteady Non-Newtonian Free Surface Flows*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 62, pp.9-34, 1996.
- [5] MURAKAMI, J. *Desenvolvimento de um Modelador de Moldes e de um Visualizador de Escoamentos de Fluidos*. São Carlos, 1996. p.90. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [6] CASTELO FILHO, A; CUMINATO, J. A.; OLIVEIRA, M. C. F.; SANTI, R. D.; TOMÉ, M. F.; CÉSAR, C. N. L. *Freeflow-3D: Um Sistema Integrado para Simulação de Escoamentos Incompressíveis com Superfícies Livres*. Relatório Técnico ICMSC-USP, 1997.
- [7] FOX, R. W.; MCDONALD A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Livros Técnicos e Científicos, 1995.
- [8] ACHESON, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1990
- [9] FLETCHER, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Vol.I and Vol.II, 1991.
- [10] GROSSI, L. *Solução Numérica para Escoamentos Não-Newtonianos com Superfícies Livres*. São Carlos, ICMSC-USP, 1996. (Mini-Dissertação de Mestrado do ICMSC-USP).
- [11] TOMÉ, M. F.; CASTELO FILHO, A; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. *GENSMAC-3D: Implementation Of The Navier-Stokes Equation For 3D Free Surface Flows*. São Carlos, ICMSC-USP, 1996. (Notas do ICMSC-USP).

- [12] TOMÉ, M. F.; MCKEE, S; BARRATT, L; JARVIS, D. A.; PATRICK, A. J. *An Experimental and Numerical Investigation of Container Filling*. Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática, Lisboa - Portugal, Preprint 9, 1998.