SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito... 09 / 08 / 99

Assinatura: ... Maria Creusa B. Salles

**Aplicação dos Métodos ABATCH e
LBATCH na Simulação da Fila M/M/1**

José Gilberto Spasiani Rinaldi
Orientação: Prof^a . Dr^a . Maria Creusa B. Salles

*“Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - USP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre
em Ciências - Área de Ciências de Computação e Matemática Computacional”*

USP - São Carlos

Agosto de 1999

Dedico este trabalho a toda minha família. Em especial à minha mãe, que por mim fez menos do que pretendia porém muito mais do que deveria e poderia.

Agradeço a Deus, à minha orientadora, Profa. Dra. Maria Creusa B. Salles pela dedicação e paciência, ao ICMC-USP e FCT-UNESP pela oportunidade. Também, a toda minha família e todos os colegas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Em simulação de filas diferentes métodos de coleta de dados podem ser aplicados com características e problemas distintos. Um dos métodos mais utilizados é o batch means que consiste de uma grande rodada de simulação dividida em batches consecutivos de observações, sendo sua principal fonte de erro causada pela correlação entre as médias dos batches. Existem duas regras principais para definir a relação entre número e tamanho de batches: a regra FNB (o número de batches é fixo enquanto seu tamanho cresce linearmente com o tamanho da amostra) produzindo amplos intervalos de confiança que tendem a conter a média real do processo e com menor correlação entre as médias dos batches; a regra SQRT (número e tamanho dos batches cresce segundo a raiz quadrada do tamanho amostral) produzindo pequenos intervalos de confiança com uma convergência mais rápida da distribuição das médias dos batches para uma distribuição Normal.

Com o objetivo de melhorar a qualidade dos intervalos de confiança (boa cobertura e redução de amplitude) obtidos para o método batch means foram propostas duas novas regras denominadas LATCH e ABATCH (Fishman & Yarberry, 1994) que, de formas diferentes, utilizam alternadamente as regras FNB e SQRT conforme o resultado de um teste de correlação entre as médias dos batches. Utilizando-se linguagens não específicas de simulação foi programada a fila M/M/1 e, simulada por Monte-Carlo, conseguiu-se boa redução na amplitude dos intervalos de confiança mantendo-se boa cobertura.

Neste trabalho são utilizadas as regras LATCH e ABATCH para a fila M/M/1 programada na linguagem de simulação GPSS/H, buscando estender a aplicabilidade dessas regras devido a facilidade em programar sistemas, mesmo mais complexos, nesta linguagem. Ainda que utilizando-se um tamanho amostral bem menor, obteve-se uma maior redução na amplitude dos intervalos de confiança, que a fornecida por linguagens não específicas, contudo houve também significativa redução na taxa de cobertura.

ABSTRACT

In queueing simulation different methods of data collection must be applied in distinguished problems and characteristics. One of the most useful methods is batch means that consist in a long run of simulation divided in nonoverlapping batches of observations and its main source of error it is caused through correlation between the means of the batches. There are two principal rules to define the relationship among the number and size of batches: the FNB rule (the number of batches is fixed while your size increases linearly with the size of sample) producing large confidence intervals tend towards contain the true parameter of the process and minor correlation between the means of the batches; the SQRT rule (number and size of batches increase like square root of the size sample) producing short confidence intervals with a convergence more rapidly the distribution of the means of the batches to a Normal distribution.

In goal to get better quality of confidence intervals (great coverage and reduction of length) obtained for method of batch means were proposed two new rules named LBATCH and ABATCH (Fishman & Yarberry, 1994) that in a different way use the rules FNB and SQRT alternatly depending of the result of a correlation test between the means of the batches. Utilizing not specific languages of simulation was programated a M/M/1 queueing model and simulated by Monte-Carlo, got a great reduction in the length of confidence intervals conserving great coverage.

In this work the utilized rules are LBATCH and ABATCH to a M/M/1 queueing system programed in language of simulation GPSS/H, looking for extending the applicability of the rules due to the facility to program systems in this language even the most complex. Still utilizing a smaller size of sample, obtained a bigger reduction at length of confidence intervals, provided through not a specific language. However there was also a significative reduction of coverage.

ÍNDICE

Capítulo 1 - Introdução.....	1
Capítulo 2 - O Sistema de Fila M/M/1.....	6
2.1 Introdução.....	6
2.2 O Sistema de Fila M/M/1.....	6
Capítulo 3 - O Vício de Inicialização e o Problema do Período Transitório Inicial em Sistemas Simulados.....	12
3.1 O Problema da Inicialização.....	12
3.2 O problema do Período Transitório Inicial.....	14
3.2.1 A Regra de Odoni e Roth (1983).....	14
3.2.2 A Regra de White (1997).....	17
3.3 Comparação e Conclusões Sobre as Regras de Inicialização Apresentadas.....	20
Capítulo 4 - Consistência do Estimador da Variância em Modelos Dinâmicos de Batch Means.....	22
4.1 Introdução.....	22
4.2 A Hipótese de Aproximação Forte.....	24
4.2.1 Hipótese de Aproximação Forte (HAF).....	24
4.3 O Método de Batch Means e as Regras FNB e SQRT.....	26
4.4 As Regras LBATCH e ABATCH.....	32
4.4.1 A Regra LBATCH.....	34
4.4.2 A Regra ABATCH.....	38

Capítulo 5 - Aplicação das Regras ABATCH e LBATCH no Sistema de Fila M/M/1.....	41
5.1 Introdução.....	41
5.2 A Regra FNB Utilizada como Fator de Padronização.....	42
5.3 Aplicação das Regras FNB, SQRT, LBATCH e ABATCH no Sistema de Fila M/M/1.....	43
Capítulo 6 - Conclusões.....	54
Bibliografia.....	57
Apêndices.....	59

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Simulação é frequentemente utilizada para avaliar um novo sistema proposto ou modificações que se pretenda introduzir em algum já existente. Pode-se ainda utilizá-la com o objetivo de se comparar dois ou mais sistemas de forma a inferir qual deles terá melhor performance. Atualmente observa-se um crescente uso da simulação em praticamente todas as áreas de trabalho. Isto ocorre porque sua utilização é simples e pode fornecer resultados imediatos. Além disso, em muitos casos as avaliações obtidas por simulação são preciosas, pois em alguns sistemas considerados podem haver problemas relacionados a alto custo em realizar experimentações ou mesmo risco humano, como em tráfego de aeroportos, transportes urbanos e ferroviários.

Outra forma de utilização muito frequente da simulação é para se buscar a estrutura teórica (probabilística) de algum sistema cuja solução analítica não se conseguiu obter. Essas informações podem fornecer pistas muito claras sobre a estrutura teórica procurada e, desta forma, ajudar em um melhor entendimento geral do sistema que foi abordado através de simulação.

Ao buscar solução de problemas, a simulação muitas vezes é utilizada inadequadamente. Em várias oportunidades, um aprofundamento sobre a forma com que é utilizada leva à invalidação dos resultados posteriores obtidos, pela não observância de critérios

que cercam uma simulação feita com qualidade (Law & Kelton, 1991; Pawlikowski, 1990). Alguns deles são:

- A utilização correta de modelos matemáticos, muitas vezes prejudicada pelo nível inapropriado de detalhamento do modelo
- Estatísticas não adequadas, podendo conter vício
- Quantidade de observações e/ou número de realizações insuficientes
- Métodos de coleta de dados menos adequados à situação considerada

Muitas vezes esses critérios estão interligados, como exemplo, uma estatística pode ser mais (ou menos) adequada dependendo do método de coleta de dados aplicado. Além desses problemas deve-se ressaltar que os resultados produzidos por simulações são apenas números (amostras estatísticas), contudo o propósito de simular é a compreensão do sistema de interesse e isto só pode ser conseguido através da análise correta desses números.

Interessa-se, em geral, obter resultados sobre o sistema em equilíbrio (estacionário). Frequentemente o objetivo é estimar adequadamente alguma medida de desempenho e seu intervalo de confiança. É necessário, portanto, que seja verificado de alguma forma se as observações coletadas na simulação, e posteriormente analisadas estatisticamente, são referentes ao sistema nesta situação, o que representa um problema a ser considerado. Este problema trata da redução da influência (ou vício) das condições iniciais da simulação nas observações coletadas. Se a simulação é iniciada com o sistema vazio e ocioso, até que este adquira equilíbrio é decorrido um período, chamado *período transitório inicial*. Por exemplo (Law, 1977), depara-se com este problema quando calcula a média de uma medida de performance em um sistema de fila simples e verifica grande demora para que esta se aproxime do seu valor teórico de modo a considerar-se que esta fila pudesse ter entrado em equilíbrio, se esta média pudesse ser tomada como um critério de decisão.

Com o objetivo de localizar o instante a partir do qual o sistema estará aproximadamente estacionário e portanto conseguir reduzir o vício devido as condições iniciais a um nível desprezível, muitas regras de inicialização foram propostas (Pawlikowski, 1990). Contudo, não se conseguiu uma regra única que detectasse adequadamente este período para uma

grande quantidade e variedade de sistemas estocásticos, pois as regras tem diferentes critérios para tratar deste problema, mesmo que se restrinjam a verificar estacionariedade de valores médios.

Muitos métodos de coleta de dados de simulação tem sido propostos com o objetivo de transpor problemas teóricos que surgem da autocorrelação existente entre as observações coletadas da simulação de um processo estocástico em equilíbrio (Law & Kelton, 1991; Pawlikowski, 1990). Os mais conhecidos são o método de replicações independentes, o método de batch means, o método de batch means sobreposto, o método de batch means espaçado (Fox et al., 1991) e o método de ciclos regenerativos, entre outros.

A qualidade dos métodos de coleta de dados é frequentemente avaliada pela taxa de cobertura dos intervalos de confiança sendo esta definida pela porcentagem dos intervalos que contém o parâmetro teórico μ . Contudo, além da taxa de cobertura deve-se avaliar a amplitude dos intervalos de confiança. Pode-se obter alta taxa de cobertura mas com intervalos muito grandes, com pouca utilidade prática, e muitas vezes contendo pontos estatisticamente diferentes de μ (Schmeiser, 1982). Tanto é que tenta-se em algumas situações melhorar a qualidade dos resultados da simulação utilizando-se técnicas de redução de variância, esta última provavelmente causadora dos problemas relativos ao intervalo de confiança (Law & Kelton, 1991; Pawlikowski, 1990).

Suponha uma longa rodada de simulação de tamanho n de um processo estocástico estacionário dividida em k batches (blocos) consecutivos e não sobrepostos de tamanho m , tal que $m=n/k$, com m inteiro. Neste método, chamado de *batch means* (veja Law & Kelton, 1991), é então calculada a média de cada um dos batches, totalizando k médias, e usa-se como estimador de μ (média teórica) a média geral dessas médias. Contudo, existe autocorrelação entre as observações do processo estocástico e portanto correlações entre as médias dos batches induzindo vício no estimador da variância da média geral, podendo este tornar-se a maior fonte de perda de qualidade nos resultados da simulação considerando este método de coleta de dados. Ressalta-se que a grande vantagem do método batch means é que, com as realizações feitas, para cada uma delas obtém-se um intervalo de confiança, porém verificando-se apenas uma vez a

estacionariedade do sistema, portanto, havendo pouca perda de observações e de tempo de simulação.

No método de batch means, para que haja representatividade, são realizadas várias realizações de simulação (com números aleatórios distintos) onde, geralmente, para todas elas, um mesmo tamanho de batch é previamente determinado. Desta forma há perda de precisão nos resultados pois cada realização têm resultados diferentes obtendo portanto correlações diferentes entre as médias dos batches, necessitando que seus tamanhos sejam distintos e adequados para reduzi-las. Duas regras denominadas LBATCH e ABATCH (Fishman & Yarberry, 1994) atuam no tamanho e número de batches conforme é aumentado o tamanho amostral da realização de uma simulação levando em consideração, para cada uma das realizações, a correlação entre as médias dos batches e a qualidade do intervalo de confiança obtido.

Sendo as regras LBATCH e ABATCH novas regras aplicadas ao método de coleta de dados batch means, estas devem ser testadas e avaliadas quanto a extensão de sua aplicabilidade. Em Fishman (1996) as regras foram testadas utilizando o sistema de fila M/M/1 programado em linguagens não específicas de simulação, conseguindo intervalos de confiança assintoticamente válidos e com redução significativa em suas amplitudes, portanto bons resultados. Contudo, esses programas, mesmo para um sistema simples, são muito complexos, extensos e trabalhosos para serem realizados. A aplicação prática de um método de coleta de dados de simulação não depende tão somente da qualidade dos resultados obtidos mas também de sua facilidade de utilização. Desta forma, neste trabalho, utilizou-se também o sistema de fila M/M/1, contudo programado na linguagem específica de simulação GPSS/H (Banks et al., 1989), dadas sua facilidade de uso, versatilidade e rapidez. O uso desta linguagem visa ampliar o alcance de aplicação das regras LBATCH e ABATCH.

O sistema de fila M/M/1 tem sido frequentemente utilizado para testar técnicas de simulação propostas. Este fato se deve as características desse sistema que, entre outras, tem várias medidas de performance obtidas analiticamente. No capítulo 2 faz-se uma explanação sobre esse sistema e o comportamento que o leva a ser uma excelente base de testes para as regras LBATCH e ABATCH.

No capítulo 3, as regras de Odoni e Roth (1983) e de White (1997) foram detalhadas e aplicadas no sistema de fila M/M/1, considerando tempo de espera na fila, com diferentes valores para fator de utilização, com o objetivo de verificar aproximadamente o número de observações a serem descartadas visando estacionariedade do sistema. Apesar de regras bastante distintas, tiveram comportamentos coesos sendo que a regra de White foi adotada como o critério a ser aplicado por parecer mais apta à natureza do problema estudado.

No capítulo 4 encontram-se os conceitos fundamentais e alguns teoremas para um melhor embasamento teórico e entendimento das regras LATCH e ABATCH.

No capítulo 5 encontram-se a aplicação e os resultados obtidos das regras para o sistema de fila M/M/1 simulado em GPSS/H. Devido sua limitação de capacidade de armazenamento não foi possível atingir um tamanho amostral próximo ao utilizado em Fishman (1996). Os resultados não foram muito bons se considerar-se a cobertura obtida, devendo-se ressaltar que, na utilização dessas regras da forma aqui proposta, cuidados devem ser tomados. Contudo, houve maior redução na amplitude dos intervalos de confiança que os obtidos por Fishman, comparando-se tamanhos amostrais próximos.

Finalmente, no capítulo 6 encontram-se algumas conclusões e considerações sobre este trabalho. Também, algumas idéias para pesquisa futura são consideradas.

CAPÍTULO 2

O SISTEMA DE FILA M/M/1

2.1 - Introdução

Em muitas ocasiões sistemas de filas simples são interessantes para utilização na realização de testes com alguma técnica proposta em simulação. O sistema de fila M/M/1 foi o primeiro a ser analisado matematicamente e pode ser adaptado em várias situações com utilidades tanto práticas quanto teóricas, tratando-se portanto de um sistema muito estudado e de grande importância (Mitrani, 1998). Também, todas as suas medidas de performance foram obtidas analiticamente podendo assim serem utilizadas para avaliação comparativa em estimações obtidas por alguma técnica de simulação. As principais medidas de performance deste sistema e algumas de suas interessantes características serão descritas neste capítulo.

2.2 - O sistema de fila M/M/1

Este sistema de fila é caracterizado por ter como processo de chegada um processo Poisson com taxa λ_a , um servidor que atende exponencialmente com taxa μ_s sendo que os tempos de serviço são independentes, disciplina FIFO e capacidade infinita da sala de espera (vide figura 2.1). Também, considera-se que o processo de chegada e os tempos de serviço são independentes.

Figura 2.1: Esquema do sistema de fila M/M/1

Algumas das principais medidas de performance do sistema de fila M/M/1, considerando-o em equilíbrio, ou seja, para $\lambda_a / \mu_s < 1$, são:

i - Número médio de usuários no sistema, dado por

$$L = \lambda_a / (\mu_s - \lambda_a) \quad (2.1)$$

ii - Número médio de usuários na fila, dado por

$$L_q = \lambda_a^2 / (\mu_s(\mu_s - \lambda_a)) \quad (2.2)$$

iii - Tempo médio gasto no sistema, dado por

$$W = 1 / (\mu_s - \lambda_a) \quad (2.3)$$

iv - Tempo médio gasto na fila, dado por

$$W_q = \lambda_a / (\mu_s(\mu_s - \lambda_a)) \quad (2.4)$$

v - Fator de utilização do sistema, dado por

$$\rho = \lambda_a / \mu_s \quad (2.5)$$

Como o sistema de fila M/M/1 tem sala de espera com capacidade infinita e apenas um servidor, este apresenta algumas características muito importantes no que diz respeito ao seu comportamento. Este sistema tem a propriedade de se esvaziar infinitas vezes com probabilidade 1, já que é regenerativo, e pode ficar muito cheio rapidamente, ou seja, apresenta alta variabilidade no número de usuários presentes no sistema e tempo gasto pelos mesmos.

Como ilustração, foram feitas três realizações independentes da simulação da fila M/M/1 em equilíbrio (vide apêndice A) com 700 observações (denotadas por X_i) cada uma, considerando a variável tempo gasto na fila com $\lambda_s=0,9$ e $\mu_s=1$ ($\rho=0,9$) e representadas no gráfico 2.1. Neste gráfico observa-se comportamentos distintos em relação às observações de tempo gasto na fila das realizações consideradas (se analisadas suas médias, a da realização representada em verde é visivelmente maior que as outras) bem como no número de regenerações para o estado inicial (esvaziamento) que cada uma das realizações obtém. Desta análise deve-se considerar muito importante que mais realizações sejam feitas e possivelmente com mais observações, se o objetivo é obter-se informações sobre o comportamento geral para a variável considerada neste sistema de fila.

Além das medidas de performance consideradas anteriormente (obtidas através de suas distribuições de equilíbrio conhecidas), neste sistema de fila obtem-se um resultado de grande importância para sua melhor compreensão, que é a função de autocorrelação do tempo de espera (Blomqvist apud Fishman*, 1996) dada por

$$\rho_j = \frac{(1-\rho)^3(1+\rho)}{(2-\rho)\rho^3} \sum_{i=j+3}^{\infty} \left[\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \right]^i \frac{(2i-3)!}{i!(i-2)!} (i-j-1)(i-j-2) \text{ para } j=0,1,\dots \quad (2.6)$$

onde j denota o lag considerado e $\rho_j = \text{corr}(X_i, X_{i+j})$ para $j=0,1,\dots$.

*BLOMQVIST, N. The Covariance Function of the M/G/1 Queuing System. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, v. 50, 157-74, 1967.

Tempo Gasto na Fila

Gráfico 2.1: Três realizações de simulação da fila M/M/1 considerando o tempo gasto na fila com $\rho=0,9$.

De posse da função de autocorrelação pode-se avaliar com exatidão a magnitude e a extensão da autocorrelação entre as observações de tempo gasto na fila do sistema de fila M/M/1 (vide gráfico 2.2) obtendo assim mais uma informação que pode ser utilizada para comparação com resultados fornecidos por novas técnicas em simulação, com o objetivo de avaliar sua eficiência. Observa-se que esta função mostrou-se ser de muito longo alcance, ou seja, existe correlação mesmo entre observações bem distanciadas o que pode significar um problema, considerando-se o método de coleta de dados que se pretenda utilizar, como será visto no capítulo 4.

Existe certa dificuldade para se obter bons estimadores para ρ_j (denotados por $\hat{\rho}_j$) pois estes apresentam alguns problemas, como vício e alta variabilidade, fornecendo portanto aproximações pobres. Contudo, boas estimativas de ρ_j podem ser obtidas utilizando-se n bastante grande e j pequeno em relação a n (maiores detalhes em Law & Kelton, 1991).

Para cada uma das três realizações consideradas anteriormente, como ilustração, são coletadas agora 16.000 observações do tempo gasto na fila e calculadas as autocorrelações estimadas, com $j = 1, 2, \dots, 1.000$, representadas no gráfico 2.3.

Gráfico 2.2: Autocorrelações teóricas do tempo gasto no sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,9$ (Fonte: Fishman, 1996, pág. 550).

Gráfico 2.3: Autocorrelações estimadas de três realizações de simulação da fila M/M/1, considerando tempo gasto na fila, com $\rho=0,9$.

O estimador utilizado para calcular as autocorrelações é dado por

$$\hat{\rho}_j = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^{n-j} (X_i - \bar{X}_n)(X_{i+j} - \bar{X}_n)}{(n-j) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}, \quad \text{para } j=0,1,\dots, \quad (2.7)$$

onde X_i são as observações e $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

Observando-se o gráfico 2.3 nota-se que para valores pequenos de j as autocorrelações são muito fortes mas, independente da realização, elas parecem tender a se estabilizarem em torno de zero conforme j cresce.

Apesar de mostrar semelhanças em seus comportamento observam-se valores de autocorrelação distintos para cada realização, enquanto estas vão se estabilizando. Este fato é muito importante pois mais uma vez verifica-se que são necessárias várias realizações da simulação para se conseguir obter informações do comportamento geral das autocorrelações. Além disso, se alguma técnica de coleta de dados em simulação é executada considerando-as, deve fazê-lo contemplando cada realização, devido a distinção que pode haver entre seus valores e consequentemente na coleta de dados.

O sistema de fila M/M/1 tem uma longa história de utilização para testar técnicas de simulação pois, apesar de ser um sistema considerado simples, é muito rico em detalhes e tem grande quantidade de resultados teóricos conhecidos.

CAPÍTULO 3

O VÍCIO DE INICIALIZAÇÃO E O PROBLEMA DO PERÍODO TRANSITÓRIO INICIAL EM SISTEMAS SIMULADOS

3.1 - O problema da inicialização

Quando se inicia um processo estocástico qualquer, geralmente existe um período não duradouro onde as características estatísticas mudam com o tempo. Após este período, que é freqüentemente chamado de período transitório inicial, o processo deverá adquirir seu equilíbrio estocástico. Convém ressaltar que nem todos sistemas entram em equilíbrio, pois existem os não estacionários que permanecem nesta condição indefinidamente.

Geralmente interessa-se em observar um processo estocástico na condição de equilíbrio. Logo, quando este está sendo simulado, os resultados observados devem refletir seu comportamento nesta condição, para posterior análise estatística. Desta forma não se deve utilizar dados coletados pelo simulador durante o período transitório inicial para que não haja influência nos resultados obtidos e, conseqüentemente, obtenção de informações viciadas sobre o sistema simulado em equilíbrio.

Uma idéia natural é retirar-se as observações obtidas neste período e considerar somente as posteriores. Com este procedimento espera-se que haja uma maior aproximação dos resultados do simulador em relação aos valores verdadeiros do processo estocástico em equilíbrio.

Para um sistema de filas qualquer existe autocorrelação entre suas observações independente do seu estado, sendo que sua intensidade é uma característica inerente a cada sistema em questão. Se esta correlação é forte (fraca) as observações iniciais, cuja média é não representativa da média da fila em equilíbrio, devem influenciar muitas (poucas) outras observações subsequentes tornando a quantidade a ser descartada grande (pequena), relativo ao período transitório inicial. Considerando as observações iniciais, o vício que estas causam pode ser observado em sua média, provavelmente diferente da média obtida com o sistema de fila em equilíbrio. Desta forma, ao avaliar o citado período, descartam-se suas observações com a intenção de diminuir o vício da média, que será calculada com outras observações mais adequadas à condição de equilíbrio. Deve-se ressaltar ainda que conforme aumenta-se o lag (a distância) entre as observações de um sistema de fila qualquer a autocorrelação entre elas tende a diminuir e este fato pode ser utilizado para avaliar a influência que algum sistema considerado possui em sua autocorrelação.

Se forem consideradas as observações referentes ao período transitório inicial, qualquer estimativa calculada conterá vício. Como exemplo, se μ é a média do processo estocástico em equilíbrio, então $E(\bar{X}_n) \neq \mu$, para n pequeno. Contudo, se não houver restrições quanto ao tamanho da simulação, mesmo não sendo retiradas observações iniciais, tomando-se n suficientemente grande (quando $n \rightarrow \infty$) temos $E(\bar{X}_n) \approx \mu$, ou seja, o vício fica bastante diminuído. Analisando este fato pode-se considerá-lo como um procedimento alternativo ao se tratar da diminuição do vício inicial. Porém, geralmente isto representa grande perda de informações e tempo, o que inviabilizaria uma simulação.

Uma vez que decidiu-se pela retirada das observações iniciais existe um sério problema a ser enfrentado: quantas observações devem ser retiradas de modo a minimizar o vício sem que haja desperdício de muita informação. Com esse fim várias regras foram propostas, sem,

no entanto, que haja uma solução definitiva para o problema em questão. Pawlikowski (1990) apresenta algumas dessas regras, muito exaustivamente avaliadas, para diferentes situações e sistemas, de onde observa-se que deve-se estar muito atento às suas limitações. Cada regra proposta para esse fim tem estrutura diferente, sendo, muitas vezes, adequada para algum tipo de sistema mas não para todos os tipos que frequentemente são simulados.

Na próxima seção serão apresentadas duas regras que têm como objetivo fornecer um instante de truncamento em uma sequência de observações obtidas por simulação, a partir de onde serão coletadas as informações para análise estatística. Estas tem como objetivo tratar adequadamente o problema do período transitório inicial.

3.2 - O problema do período transitório inicial

Para se coletar observações de uma simulação sem que estas estejam comprometidas pelo período transitório inicial, duas alternativas que podem ser utilizadas são apresentadas. A primeira é coletar as observações partindo da distribuição de equilíbrio do sistema que está sendo simulado, contudo frequentemente esta não é conhecida. A segunda alternativa, mais utilizada, é a retirada das observações referentes ao período transitório inicial antes de se iniciar a coleta.

Sendo que a alternativa escolhida para se tratar do problema de vício de inicialização é a retirada das observações referentes a esse período, deve-se optar por alguma regra que possa apontar satisfatoriamente o instante de truncamento. Serão apresentadas duas regras com características bem distintas.

3.2.1 - A regra de Odoni e Roth (1983)

Os modelos analisados em Odoni & Roth (1983) são sistemas de filas Markovianas com um servidor. Será descrita agora a aplicação deste método para determinar o instante de equilíbrio aproximado que aponta quantas observações devem ser retiradas para se obter estimativas de um sistema de filas em equilíbrio.

Sejam $Q(t)$ e $Q(\infty)$ o número esperado de usuários na fila no tempo t e após muito tempo (em equilíbrio), respectivamente. Um resultado importante para a classe de sistemas de filas Markovianas é que, independente de suas condições iniciais, a aproximação de $Q(t)$ para $Q(\infty)$ é dominada por um termo exponencial da forma $\exp(-t/\tau)$, onde t tem grandes valores e τ é uma característica do sistema de fila que está sendo considerado.

Sejam sistemas de filas Markovianas vazias em $t = 0$ com taxas de entrada e serviço constantes sobre o tempo. Considerando-se alguns exemplos desses sistemas pode-se observar que $\ln|Q(\infty) - Q(t)|$ assume um comportamento aproximadamente linear em t , para seu período transitório inicial. As formas de decaimento sugerem, para os sistemas e na forma considerados, que $Q(t)$ pode ser relacionado a $Q(\infty)$ por uma expressão da seguinte forma

$$Q(t) = Q(\infty)[1 - \exp(-t/\tau)], \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

onde $Q(\infty)$ e τ são constantes que dependem do sistema e de seus parâmetros.

A expressão acima pode ser útil desde que se estime τ , pois $Q(\infty)$ pode ser obtido de forma exata ou calculado numericamente para vários sistemas. Observa-se que a relação pode ser escrita na forma $[Q(\infty) - Q(t)]/Q(\infty) = \exp(-t/\tau)$ e assim interpretá-la mais facilmente. Se as condições iniciais consideradas forem do sistema inicialmente vazio e ocioso (portanto $Q(\infty) > Q(t)$) tem-se que $0 < [Q(\infty) - Q(t)]/Q(\infty) < 1$ e, desta forma, utiliza-se a expressão para selecionar um instante t que aproxima $Q(t)$ de $Q(\infty)$ razoavelmente. Deve-se escolher uma tolerância relativa máxima permitida entre estas medidas, e um valor aceitável é 0,02, ou seja, $[Q(\infty) - Q(t)]/Q(\infty) \leq 0,02$. Este valor é escolhido porque torna as medidas bem aproximadas, de modo que o instante t obtido esteja apontando para um valor muito próximo ao de equilíbrio.

A idéia de se colocar uma tolerância menor ou igual a 0,02 pode ser interpretada como sendo o vício, devido às condições iniciais, menor que 2%, se a coleta das observações forem feitas após o instante t . Desta forma pode-se dizer que em $t = 4\tau$ (ou seja, quando $[Q(\infty) - Q(t)]/Q(\infty) \approx 0,0183$, ou seja, pouco menos que 0,02), $Q(t)$ está com seu valor não diferindo por mais que 2% de $Q(\infty)$, o valor em equilíbrio.

Para que se consiga estimar o instante t é necessário antes fornecer uma aproximação para τ . Com este objetivo, para a classe de sistemas de filas Markovianas com diversos valores diferentes de parâmetros, obteve-se numericamente o valor estimado de τ e através deste conseguiu-se uma expressão que fornece um bom ajuste a esses resultados, dada por

$$\tau_R = (C_A^2 + C_S^2) / (2,8\mu_s(1 - \sqrt{\rho})^2) \quad (3.2)$$

onde μ_s denota a taxa de serviço, ρ é o fator de utilização, e C_A^2 e C_S^2 são os coeficientes de variação para os tempos entre chegadas e de serviço respectivamente, dadas por $C_X^2 = \frac{VAR X}{(E X)^2}$.

Para o sistema de fila M/M/1 sabe-se que $C_A = C_S = 1$, logo assumindo $t = 4\tau$ observa-se que

$$t = 1 / (0,35\mu_s(1 - \sqrt{\rho})^2). \quad (3.3)$$

Assim, aproximadamente, o número de observações a serem descartadas referentes aos usuários que partiram do sistema, denotado por d , pode ser dado por $\mu_s t$, ou seja,

$$d = 1 / (0,35(1 - \sqrt{\rho})^2). \quad (3.4)$$

Observa-se que para o sistema de fila M/M/1 d é somente função de ρ como no resultado apresentado por Blomqvist (expressão 2.6). Também, na tabela 3.1 pode-se notar alguns resultados sobre números de observações a serem descartadas para alguns valores de ρ onde, para $\rho = 0,9$ deve-se descartar mais de 1.000 observações.

Deve-se notar que, de modo geral, esta regra avalia o período transitório inicial de diferentes sistemas de filas Markovianas com um servidor (Odoni & Roth, 1983) considerando suas características específicas, uma vez que τ , que é uma dessas características, é diferente para cada sistema de filas e bem representado por τ_R .

Tabela 3.1: Número de observações a serem descartadas (d) para o sistema de fila M/M/1 com diferentes valores do fator de utilização (ρ).

ρ	d
0,25	11
0,50	33
0,75	159
0,85	469
0,90	1085

Será vista abaixo outra regra que procura determinar o número de observações a serem retiradas para que se consiga coletar dados do sistema aproximadamente em equilíbrio. Apesar de ter a mesma finalidade da regra anterior a idéia desenvolvida é bastante diferente.

3.2.2 - A regra de White (1997)

White adota também a estratégia de reduzir o vício de inicialização através da retirada das observações iniciais (White, 1997). Contudo, como o comprimento da rodada de simulação é considerado aqui arbitrário, é necessário que haja observações suficientes para que a regra possa ser aplicada adequadamente, ou seja, observações suficientes para que a sequência estocástica consiga obter equilíbrio, fornecendo o instante de truncamento.

Nesta regra, considera-se a simulação de evento discreto gerando sequências de resultados $\{X_i(j): i = 1, 2, \dots, n(j); j = 1, 2, \dots, m\}$ onde $n(j)$ são os comprimentos arbitrários da j -ésima rodada, para um número arbitrário de rodadas m . Pode-se, baseado nestas sequências, estimar μ pela média amostral de onde foram retiradas as observações iniciais, denominada média amostral truncada, dada por

$$\bar{X}_{n,d}(j) = \frac{1}{n(j) - d(j)} \sum_{i=d(j)+1}^{n(j)} X_i(j), \quad \text{para } j=1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

onde $d(j)$ é o número de observações retiradas na rodada j . A razão pela qual estima-se μ usando a sequência truncada $\{X_i(j): i = d(j) + 1, \dots, n(j)\}$ é que as observações coletadas após as primeiras $d(j)$ são mais representativas do processo em equilíbrio.

A proposta desta regra é obter um instante que minimiza o comprimento do intervalo de confiança em torno da média amostral truncada. Procedendo desta maneira, quando for obtido este instante (onde o intervalo está minimizado), deve-se ter retiradas as observações referentes ao período transitório inicial, que tem valores mais dispersos e portanto fornecem um intervalo de confiança maior que o minimizado.

O valor ótimo do número de observações que devem ser retiradas na j -ésima rodada é definido como

$$d^*(j) = \arg \min_{n(j) > d(j) \geq 0} \left[\frac{z_{\alpha/2} s(d(j))}{\sqrt{n(j) - d(j)}} \right] \quad (3.6)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor da distribuição normal padrão associado com o intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ e $s(d(j))$ é o desvio padrão amostral, que é dado por

$$s(d(j)) = \sqrt{\frac{1}{n(j) - d(j) - 1} \sum_{i=d(j)+1}^{n(j)} (X_i(j) - \bar{X}_{n,d}(j))^2}. \quad (3.7)$$

Fixando-se o nível de confiança α , $z_{\alpha/2}$ torna-se constante. Deste fato e das duas expressões acima mostra-se que o ponto ótimo pode ser dado por

$$d^*(j) = \arg \min_{n(j) > d(j) \geq 0} \left\{ \frac{1}{[n(j) - d(j)]^2} \left[\sum_{i=d(j)+1}^{n(j)} X_i^2(j) - [n(j) - d(j)] \bar{X}_{n,d}^2(j) \right] \right\}. \quad (3.8)$$

Então, para uma dada sequência, $d^*(j)$ será o valor de $d(j)$ tal que a expressão acima assume seu mínimo.

Não se deve superestimar o resultado obtido por uma única rodada quando esta regra é aplicada. Para que se possa fornecer um instante de truncamento de maneira confiável é necessário que sejam realizadas algumas rodadas, que resultarão em instantes diferentes. Sobre estes deve-se adotar algum critério que venha a estabelecer um único instante, a ser usado em todas as rodadas de simulação. Considerando este fato, a média parece ser o critério mais justo a ser aplicado para avaliar o término do período transitório inicial, conferindo um bom grau de confiança em que o sistema esteja aproximadamente em equilíbrio.

Esta regra foi testada utilizando-se dois sistemas de filas, uma M/M/1 e um sistema de fila tandem, simulados no ARENA, sendo a primeira inicializada em duas situações diferentes: cheia (com 100 usuários) e vazia, ambas com $\rho = 0,9$ (White, 1997). Foram usadas dez rodadas com 16.000 observações cada uma e calculada a sua média. Conclui-se que a minimização do intervalo de confiança sobre a média amostral truncada parece que realmente é capaz de remover as observações que não estão compatíveis com esta média apontando o término do período transitório inicial, sem que se perca tanta informação.

Neste trabalho, através do pacote de simulação GPSS/H realizaram-se 10 repetições (iniciadas vazias) com 16.000 observações do tempo gasto na fila, para o sistema de fila M/M/1, com três valores distintos de ρ (vide tabela 3.2), sendo que o programa para calcular $d^*(j)$ foi implementado em MINITAB (vide apêndice B). Observa-se, como esperado, que quanto maior o fator de utilização mais observações serão necessárias para o término do período transitório inicial.

Esta regra parte de um contexto diferente da anterior e pode ser aplicada em um sistema qualquer, contudo pode haver uma restrição considerável em sua aplicação pois, em sistemas mais complexos, 16.000 observações podem representar um alto custo computacional.

Considerando o sistema de fila M/M/1, um sistema relativamente simples para ser simulado, o gasto computacional não deve ser grande quando a regra é aplicada. Além disso, os resultados aqui obtidos mostram comportamentos similares e boa margem de segurança na aplicação desta regra.

Tabela 3.2: Número de observações a serem descartadas ($d^*(j)$) para o sistema de fila M/M/1 com diferentes valores do fator de utilização (ρ).

ρ	$d^*(j)$
0,50 ($\lambda_a=1, \mu_s=2$)	1637
0,75 ($\lambda_a=1, \mu_s=4/3$)	1656
0,90 ($\lambda_a=0,9, \mu_s=1$)	2474
0,90 ($\lambda_a=8,1, \mu_s=9$)	2453

3.3 - Comparação e conclusões sobre as regras de inicialização apresentadas.

Anteriormente foi afirmado que a função de autocorrelação do sistema de fila M/M/1 é de muito longo alcance. Fishman (1996), usando este sistema de fila com $\rho = 0,9$ e a expressão 2.6 concluiu através do gráfico 2.2 que a autocorrelação entre suas observações só irão estar bem próximas de zero quando seu lag estiver perto de 1.000, o que mostra a intensidade da autocorrelação entre as observações desse sistema de fila. Também, analisando-se o gráfico 2.3 pode-se observar que as autocorrelações estimadas das realizações de simulação são também de longo alcance pois atingem conjuntamente o valor zero com lag aproximadamente entre 700 e 900.

A influência que os dados do período transitório inicial podem ter no resultado final (na média) é uma função da força da autocorrelação das observações coletadas, portanto, para o caso da fila M/M/1 com $\rho=0,9$, deve-se descartar um grande número de observações para que se possa atingir aproximadamente o período de equilíbrio. Isto se deve ao próprio sistema considerado, à influência da autocorrelação entre as observações e ao fator de utilização alto.

Foram analisadas as regras de Odoni-Roth e White para o sistema de fila M/M/1, com diferentes valores de ρ . Pelos valores que as regras apontaram parece haver um comportamento coeso entre estas no que diz respeito ao crescimento do período em função de ρ .

Deve-se lembrar que a função de autocorrelação do tempo de espera para a fila M/M/1, foi obtida teoricamente e está em função somente de ρ sendo que ambas as regras ratificam exatamente este tipo de idéia. Além disso, o número de observações descartadas nos dois casos onde $\rho=0,9$ estão muito próximos, apesar dos valores distintos de λ_s e μ_s . Contudo, deve-se considerar também o método que será utilizado para a coleta de dados. Existem métodos, como o de replicações (Law & Kelton, 1991) que devem ter observações referentes ao período transitório inicial descartadas a cada repetição da simulação, podendo representar um alto gasto computacional. Outros métodos descartam as observações do citado período uma única vez, de modo a não haver o mesmo problema do método anterior. Como este é o caso do método de coleta de dados em simulação que será usado neste trabalho (batch means), optou-se por utilizar a regra de White, que confere uma margem de segurança maior, pois descarta mais observações, sem que haja grande desperdício de informações. Esta parece ser a decisão mais adequada mediante as características do sistema de fila M/M/1 e o método de coleta de dados a ser adotado.

Observa-se que é necessário adotar-se alguma regra para verificar a aproximação dos resultados obtidos por simulação aos do processo de interesse em equilíbrio. Geralmente, as regras aplicadas são restritas somente a verificação de valores médios, contudo o que se busca é minimizar o vício devido ao período transitório inicial. Também, falar em checar o término deste período é somente abuso de linguagem.

CAPÍTULO 4

CONSISTÊNCIA DO ESTIMADOR DA VARIÂNCIA EM MODELOS DINÂMICOS DE BATCH MEANS

4.1 - Introdução

O método de batch means é um dos mais antigos e usados para coleta de dados a partir de uma grande rodada de simulação, porém não fornece boa estimativa para o parâmetro σ^2 , a variância do processo observado, quando o número de batches está fixado. Contudo, esta situação pode ser modificada permitindo-se que o número de batches possa crescer com o tamanho amostral.

Neste capítulo serão apresentadas as regras FNB e SQRT que definem formas de crescimento para tamanho e número de batches durante a evolução da simulação utilizando o método de coleta de dados batch means. Estas regras serão associadas de forma conveniente e, usando um estimador fortemente consistente para a variância do processo observado, fornecerão outras duas regras chamadas LATCH e ABATCH. Estas novas regras propostas apresentam melhores propriedades que as regras FNB e SQRT que as formaram.

Como foi visto, o principal objetivo da simulação é obter uma estimativa para a média μ do processo estocástico em equilíbrio e de seu intervalo de confiança. Um dos atuais e

principais problemas na literatura de simulação é fornecer um intervalo de confiança para μ com boas propriedades através de uma grande rodada de simulação. Uma das possíveis formas de fazê-lo é utilizando um estimador consistente para o parâmetro σ^2 , a variância do processo a ser observado.

Um estimador $\hat{\mu}$ é dito consistente se $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon] = 1$ para $\varepsilon > 0$, ou seja, se

$\hat{\mu} = \hat{\mu}(n)$ converge fracamente para μ , sendo n o tamanho da realização de simulação. Também, $\hat{\mu}$ é dito fortemente consistente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu} = \mu$ com probabilidade 1.

Em um método de estimação consistente é assumida a existência da variância do processo, σ^2 , constante, valendo o seguinte teorema do limite central:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \Rightarrow \sigma N(0,1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

onde o símbolo $\Rightarrow$ denota convergência em distribuição.

O método de estimação consistente é utilizado para a construção de um estimador consistente de σ^2 , pois através deste pode-se obter, usando o teorema do limite central, um intervalo de confiança assintoticamente válido para μ a partir de uma grande rodada de simulação (Bratley et al., apud Damerджи*, 1995). Também, é conhecido que a estimação consistente de σ^2 induz intervalos de confiança cujo meio comprimento tem valor esperado e variância assintoticamente menores (Glynn & Iglehart, 1990). Além disso, não se deve desconsiderar as informações que o parâmetro σ^2 contém como, por exemplo, se seu estimador tem um alto valor, há forte indício de que o processo estocástico tem alta variabilidade.

Sempre que se utilizar o método batch means com o número de batches previamente fixado não se obtém estimação consistente para σ^2 . Contudo, quando se permite que este cresça com o tamanho amostral, torna-se possível obter um estimador consistente para σ^2 (Glynn & Iglehart, 1990).

*BRATLEY, P.; FOX, B. L.; SCHRAGE, L. E. *A Guide to Simulation*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1987.

Sabendo-se que o método de batch means utiliza uma grande rodada de simulação pode-se através dele construir um intervalo de confiança assintoticamente válido para μ mesmo se for utilizado um estimador consistente para σ^2 . Além disso, se este estimador for *fortemente* consistente, então procedimentos para obtenção de intervalo de confiança com comprimento fixado são (com algumas condições adicionais, como será visto) assintoticamente válidos para μ (Glynn & Whitt, 1992).

Será apresentada agora uma hipótese de grande importância para a aplicação do estimador consistente para σ^2 no método batch means (Damerdji, 1994; Fishman & Yarberry, 1994).

4.2 - A Hipótese de Aproximação Forte

Para as idéias que serão abordadas neste capítulo considera-se que não há vício devido ao período transitório inicial, sendo este problema resolvido de alguma forma, conforme discutido no capítulo anterior. Define-se processo Browniano como um processo contínuo no tempo e no espaço, que é nulo na origem, ou seja, $Z_0 = 0$, cujos incrementos são independentes, estacionários e normalmente distribuídos. No caso do processo Browniano padrão, $Z_{t+s} - Z_t \Rightarrow N(0,s)$ para todo s e t .

Será apresentada a hipótese de aproximação forte, que será utilizada no teorema 1. A hipótese e o teorema são de grande importância no desenvolvimento deste trabalho, como será visto.

Sendo $\{X_i, i \geq 1\}$ um processo estocástico estacionário em tempo discreto e considerando a existência de um processo Browniano padrão denotado por $\{Z_i, i \geq 0\}$, pode-se apresentar a hipótese de aproximação forte.

4.2.1 - Hipótese de Aproximação Forte (HAF)

Seja $\{X_i, i \geq 1\}$ como acima e suponha que existam um processo Browniano padrão

$\{Z_i, i \geq 0\}$ e constantes finitas $\alpha \geq 0$, $\lambda \in (0, 1/2]$ e μ tais que

$$(\bar{X}_n - \mu) / (\alpha / \sqrt{n}) = Z_n / \sqrt{n} + O(n^{-\lambda}) \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ com probabilidade } 1.$$

Então $\{X_i, i \geq 1\}$ satisfaz a suposição de aproximação forte, onde a notação $O(n^{-\lambda})$ significa que existe uma variável aleatória finita C tal que $|n\bar{X}_n - n\mu - \alpha Z_n| < Cn^{-\lambda}$ para $\forall n$, com probabilidade 1.

Se o processo estocástico estacionário $\{X_i, i \geq 1\}$ tem média $\mu = E(X_i)$ e função de autocovariância dada por

$$R_{|i-j|} = \text{cov}(X_i, X_j) \text{ para } i, j = 1, 2, \dots$$

Então, a variância de $\bar{X}_n$ é dada por

$$\text{VAR}(\bar{X}_n) = \sigma_n^2$$

onde

$$\sigma_n^2 = n^{-1} \sum_{j=1-n}^{n-1} (1 - |j|/n) R_j.$$

Define-se agora α^2 como

$$\alpha^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma_n^2 = R_0(1 + \gamma) \quad (4.1)$$

onde

$$\gamma = \frac{2}{R_0} \sum_{j=1}^{\infty} R_j < \infty. \quad (4.2)$$

Observando as expressões (4.1) e (4.2) pode-se concluir que

$$\sigma^2 = R_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} R_j. \quad (4.3)$$

Através da expressão (4.3) pode-se avaliar o efeito que a correlação entre os elementos da sequência ocasiona na variância de $\bar{X}_n$. Por outro lado, se a sequência for de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), então $\sum_{j=1}^{\infty} R_j = 0$ (logo $\gamma = 0$) e σ^2 pode ser estimado por R_0 , calculado de maneira usual. Nas sequências obtidas a partir da simulação de filas pode-se detectar a correlação presente entre seus elementos, o que ocasiona a necessidade de obter-se estimativa adequada para σ^2 . No método de batch means é possível obter uma aproximação para estimar σ^2 neste caso, ou seja, quando $\sum_{j=1}^{\infty} R_j \neq 0$.

4.3 - O método batch means e as regras FNB e SQRT

O método de batch means particiona n observações em k sequências consecutivas e não sobrepostas de tamanho m , tal que $m = \lfloor n / k \rfloor$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o maior inteiro contido, e n e k são anteriormente fixados. Deve-se observar que não necessariamente $n = km$ e assim serão efetivamente utilizadas km observações da simulação, para análise estatística posterior. Sem perda de generalidade supõe-se que $m = n/k$ com m inteiro sendo então o batch j formado pelas observações $X_{(j-1)m+1}, \dots, X_{jm}$ para $1 \leq j \leq k$.

Desta forma, as médias amostrais dos batches podem ser calculadas por

$$Y_{jm} = m^{-1} \sum_{i=1}^m X_{(j-1)m+i} \quad \text{para } 1 \leq j \leq k \quad (4.4)$$

Usando-se essas médias pode-se utilizar B_{km} / k como estimador para σ_n^2 , onde

$$B_{km} = (k-1)^{-1} \sum_{j=1}^k (Y_{jm} - \bar{X}_{km})^2 \quad (4.5)$$

onde $\bar{X}_{km} = \frac{1}{km} \sum_{i=1}^{km} X_i$, que é numericamente igual a $\bar{X}_n$.

Para este método o tamanho dos batches, m , é importante pois se este for suficientemente grande tem-se que as médias dos batches são assintoticamente não correlacionadas entre si (Brillinger apud Pawlikowski*, 1990). Além disso, se o tamanho de m for suficiente, essas médias são assintoticamente normalmente distribuídas e assintoticamente independentes, e assim sendo, pode-se calcular um intervalo de confiança para μ usando-se como seu estimador a média geral (Law & Kelton, 1991). Contudo, tomar um valor para m maior que o necessário, para satisfazer as suposições de normalidade e independência, implica, por exemplo, em aumento no meio comprimento esperado do intervalo de confiança para μ , havendo um acréscimo na probabilidade de se cobrir pontos que são estatisticamente diferentes de μ , ou seja, um teste estatístico rejeitaria a hipótese de igualdade entre esses pontos e μ (Schmeiser, 1982). Se porém, m for menor que o necessário, as médias dos batches poderiam estar altamente correlacionadas tornando-se a maior fonte de erro do método batch means, devido ao vício induzido no estimador da variância da média geral.

Observando a expressão (4.5) pode-se notar que este estimador é função do tamanho e da quantidade de batches, e desta forma, seus comportamentos afetam o seu valor. Uma importante consequência deste fato pode ser observada no teorema abaixo, que relaciona o número de batches k e seu tamanho m com o estimador B_{km}/k de σ_n^2 . Neste teorema a abordagem do método de batch means, para obtenção de consistência forte para o estimador de variância, é permitir que o tamanho e o número de batches possam crescer com o tamanho amostral.

Usa-se aqui uma nova notação para k e m : k_n e m_n , respectivamente, representando que tanto o número de batches como o seu tamanho são função do tamanho amostral n . O

*BRILLINGER, D. R. Estimation of the Mean of a Stationary Time Series by Sampling. *J. Appl. Prob.*, v.10, 419-43, 1973.

teorema abaixo relaciona o método de batch means com a HAF onde, sob algumas condições, pode-se aumentar tanto o tamanho como o número de batches com o tamanho amostral.

Teorema 1: (Damerджи, 1994)

Se $\{X_i, i \geq 1\}$ satisfaz HAF, então $\bar{X}_n \rightarrow \mu$ quando $n \rightarrow \infty$, com probabilidade 1.

Além disso, se $\{(m_n, k_n), n \geq 1\}$ é a *sequência de atributos* dos batches satisfazendo:

i. m_n e k_n são não decrescentes em n

ii. $m_n \rightarrow \infty$ e $k_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$

iii. $m_n^{-1} n^{1-2\lambda} \ln n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$

iv. existe um inteiro finito positivo p tal que $\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{-p} < \infty$,

então $m_n B_{k_n m_n} \rightarrow \sigma^2$ quando $n \rightarrow \infty$, com probabilidade 1, e $(\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{B_{k_n m_n} / k_n}$ converge em distribuição para a $N(0,1)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $B_{k_n m_n}$ é utilizado para o estimador da variância, obtido da mesma forma que na expressão (4.5).

Observa-se que λ está presente na expressão da suposição iii., onde λ explica os efeitos de dependência entre as observações e a não normalidade em $\{X_i\}$. Assim, λ próximo de $\frac{1}{2}$ implica baixa dependência e normalidade enquanto que λ próximo de 0 implica alta dependência, não normalidade ou ambas (Glynn & Iglehart, 1988). Desta forma, a suposição iii. é a conexão entre tamanho de batch e correlação do processo. Se λ está próximo de 0, m_n deve ser muito grande (para diminuir a alta dependência e não normalidade) e se λ está próximo de $\frac{1}{2}$, m_n pode crescer quase tão lentamente quanto $\ln n$.

A suposição iv. afirma que o número de batches k_n deve crescer o suficiente para que a somatória convirja e, sendo $k_n = n / m_n$, as suposições iv. e iii. juntas fornecem uma relação de comportamento entre tamanho e número de batches.

Pode-se considerar $m_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $k_n = k$, $\forall n \geq 1$, ou seja, o tamanho dos batches variando com n e o número de batches fixo. Neste caso tem-se a regra chamada FNB (número de batches fixado) e, baseado no tamanho dos batches, pode-se considerar suas médias assintoticamente não correlacionadas quando $m_n \rightarrow \infty$. Se o teorema do limite central valer para o processo (que é dependente) as médias serão assintoticamente normais e então independentes, sendo possível obter um melhor intervalo de confiança para a média μ do processo. Contudo, para esta regra é necessário que se defina um padrão de comportamento, entre os muitos possíveis, para o crescimento de m_n , como por exemplo dobrar seu tamanho.

No teorema 1 é permitido que tanto k_n como m_n cresçam com n , porém também é necessário que isto seja realizado segundo algum padrão de comportamento, de modo a se obter vantagens em termos de precisão nos resultados, como será visto. Um dos padrões possíveis é considerar $k_n = \lfloor n^{1/2} \rfloor$ e $m_n = \lfloor n^{1/2} \rfloor$, para $\forall n \geq 1$, e neste caso tem-se a regra chamada SQRT (raiz quadrada).

Usando-se qualquer uma das duas regras e o teorema acima pode-se obter um intervalo de confiança $100(1-\delta)\%$ assintoticamente válido para μ quando $n \rightarrow \infty$, dado por

$$(\bar{X}_n - t_{k-1, (1-\delta/2)} \sqrt{B_{k_n m_n} / k_n} ; \bar{X}_n + t_{k-1, (1-\delta/2)} \sqrt{B_{k_n m_n} / k_n}) \quad (4.6)$$

onde $t_{k-1, (1-\delta/2)}$ denota o valor $1-\delta/2$ da distribuição t-Student com $k-1$ graus de liberdade. Além disso, se o número de batches for suficiente (maior que 30, por exemplo) pode-se usar a distribuição normal no lugar da t-Student.

Apesar do intervalo de confiança ser assintoticamente válido, o uso da regra FNB compromete a qualidade das informações obtidas. Como observado na seção 4.1, o uso de estimação consistente induz intervalos de confiança cujos meio comprimento tem valor esperado e variância reduzidos. Na regra FNB, quando o número de batches é fixado, temos que $m_n B_{k_n m_n}$ não é um estimador consistente de α^2 produzindo intervalos de confiança maiores que aqueles que poderiam ser obtidos com estimação consistente, o que significa perda de precisão nos resultados.

Por sua vez, com n finito, a regra SQRT também apresenta problemas práticos. Embora faça $(\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{B_{k_n, m_n} / k_n}$ convergir mais rapidamente para a $N(0,1)$, produz também intervalos de confiança menores que os obtidos pela FNB. Esta redução nas amplitudes dos intervalos contribuem significativamente para a diminuição da porcentagem de vezes que estes cobrem μ (chamada *taxa de cobertura*) em relação à obtida pela regra FNB.

Tanto para uma regra como para outra é necessário que se defina de que forma n irá crescer, pois diferentes formas possíveis de crescimento de n definem novas propostas do método batch means com resultados distintos. Define-se k_1 e m_1 como sendo o número e tamanho mínimos de batches respectivamente, ou seja, são os valores iniciais a partir dos quais temos o crescimento de n . Utilizando a regra FNB sejam, por exemplo, $\{k_{j,FNB} = k_1, j \geq 1\}$ e $\{m_{j,FNB} = 2^{j-1} m_1, j \geq 1\}$ as sequências do número (fixo) e tamanho de batches, respectivamente, e obtendo portanto $n_j = k_{j,FNB} m_{j,FNB} = 2^{j-1} k_1 m_1$ para qualquer $j \geq 1$. Forma-se então a sequência de resultados intermediários $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_j \leq n$ onde n é o máximo desejado a ser observado e $n_1, n_2, \dots, n_j$ são chamados *instantes de revisão intermediária*. A cada uma dessas revisões é verificada a necessidade de coletar ou não mais observações e pode-se também notar o comportamento de $m_n B_{k_n, m_n}$. Deve-se observar ainda que a especificação dada acima para $\{n_j, j \geq 1\}$ forma apenas um subconjunto de todas as possíveis sequências com mesmo comprimento amostral, para n_j / k_1 inteiro com $j \geq 1$.

A regra SQRT, como foi visto, tem uma especificação diferente da regra FNB pois permite que cresçam tanto o número de batches como seu tamanho. Sejam k_1 e m_1 (valores iniciais) como acima e, $\tilde{k}_1$ e $\tilde{m}_1$ constantes tais que $\tilde{k}_1 > k_1$ e $\tilde{m}_1 > m_1$ com $\tilde{k}_1$ e $2\tilde{m}_1$ inteiros. Então, para a regra SQRT e j ímpar, com $j \geq 1$, define-se

$$k_{j,SQRT} = 2^{(j-1)/2} k_1$$

e

$$m_{j,SQRT} = 2^{(j-1)/2} m_1$$

para um tamanho amostral de $n_j = 2^{j-1} k_1 m_1$. Para j par, com $j \geq 2$, define-se

$$k_{j,SQRT} = 2^{(j-2)/2} \tilde{k}_1$$

e

$$m_{j,SQRT} = 2^{(j-2)/2} \tilde{m}_1$$

para um tamanho amostral $n_j = 2^{j-2} \tilde{k}_1 \tilde{m}_1$. Os valores escolhidos de $\tilde{m}_1$ e $\tilde{k}_1$ tem importância fundamental sobre a taxa de crescimento de n . Se seus valores forem escolhidos tais que $\tilde{m}_1 / m_1 \approx \sqrt{2}$ e $\tilde{k}_1 / k_1 \approx \sqrt{2}$, assegura-se que a sequência $\{(m_{n_j}, k_{n_j}) = (m_{j,SQRT}, k_{j,SQRT}), j \geq 1\}$ cresce com j aproximadamente com taxa $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, como deve ser considerando a regra SQRT.

Pode-se pensar em algumas formas (das várias possíveis) de realizar uma composição entre as regras FNB e SQRT tentando aproveitar as boas propriedades de ambas (vide figura 4.1) e fornecer maior precisão nos resultados da simulação. Duas das possíveis formas de associação dessas regras são apresentadas abaixo, propostas em Fishman & Yarberry (1994).

Figura 4.1 : Esquema das propriedades das regras FNB e SQRT

4.4 - As regras LATCH e ABATCH

A idéia principal dessas regras é associar as vantagens das regras FNB e SQRT, e, ao mesmo tempo, escapar dos problemas causados por elas. A principal vantagem da regra FNB é fornecer intervalos de confiança assintoticamente válidos e a principal desvantagem é não obter estimador consistente para σ^2 . Para a regra SQRT a principal vantagem é que $(\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{B_{k_j, m_j} / k_j}$ converge rapidamente para a $N(0,1)$ enquanto sua desvantagem é ter, na prática (para n finito), cobertura sensivelmente mais baixa que a regra FNB. Intercalando o uso da regra FNB com a regra SQRT dinamicamente, durante a execução da simulação, pode-se conseguir melhora na precisão dos resultados, obtendo-se estimação fortemente consistente de σ^2 e, ao mesmo tempo, intervalos de confiança assintoticamente válidos para μ (Fishman & Yarberr, 1994). Com este objetivo serão enunciados alguns resultados preliminares e o teorema 2, que tratam da aleatorização do número e do tamanho de batches a fim de obter estimação fortemente consistente de σ^2 e intervalos de confiança assintoticamente válidos para μ , supondo a validade da HAF.

Nas regras LATCH e ABATCH intercala-se dinamicamente a aplicação das regras FNB e SQRT tornando, como será visto, o número e tamanho de batches aleatórios. Através da definição e hipóteses abaixo o teorema 1 é adaptado para esta nova situação, culminando no teorema 2.

Definição:

Um processo estocástico bivariado em tempo discreto $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é dito ser uma *sequência de atributos aleatórios* dos batches se o conjunto de realizações de (M_j, K_j) é um subconjunto de $\{1, 2, \dots\} \times \{2, 3, \dots\}$ para todo instante de revisão intermediária $n_j \geq 1$.

Primeira hipótese de atributos aleatórios dos batches:

A sequência de atributos aleatórios dos batches $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é dito satisfazer a primeira hipótese de atributos aleatórios dos batches se existem conjuntos de inteiros positivos

$\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots$ e um inteiro positivo p tais que $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_j \in \mathcal{Q}_j} k_j^{-p} < \infty$ e $\sum_{j=1}^{\infty} P(K_j \in \mathcal{Q}_j) < \infty$.

Esta hipótese é uma generalização de *iv.* do teorema 1. Aqui é necessário que a primeira somatória convirja em relação a todas as revisões intermediárias possíveis em todos tamanhos de batches possíveis. A segunda somatória trata adequadamente da estrutura probabilística necessária.

Segunda hipótese de atributos aleatórios dos batches:

A sequência de atributos aleatórios dos batches $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é dito satisfazer a segunda hipótese de atributos aleatórios dos batches se existe um conjunto $\mathfrak{I}$ de medida unitária tal que para todo $\omega \in \mathfrak{I}$ existe um inteiro finito positivo $H(\omega)$ e sequências $\{m_j^*, j \geq 1\}, \{m_j^{**}, j \geq 2\}, \{k_j^{**}, j \geq 1\}$ e $\{n_j^{**}, j \geq 1\}$ tais que para todo $j \geq H(\omega)$:

- i.* $M_j(\omega) \geq m_j^*$ onde $m_j^* \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$.
- ii.* $M_j(\omega) \leq m_j^{**}$ e $K_j(\omega) \leq k_j^{**}$ onde m_j^{**} e k_j^{**} são não decrescentes em j
- iii.* $N_j(\omega) = M_j(\omega)K_j(\omega) \leq n_j^{**}$
- iv.* $m_j^{**}(m_j^*)^{-2}(n_j^{**})^{1-2\lambda} \ln(m_j^{**}k_j^{**}) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

A segunda hipótese é uma generalização de *i.*, *ii.* e *iii.* do teorema 1, sendo adaptada para as revisões intermediárias usando os elementos da sequência de atributos aleatórios dos batches. Nestas duas hipóteses, estas adaptações foram necessárias pois no teorema 1 a sequência considerada é determinística.

Terceira hipótese de atributos aleatórios dos batches:

A sequência de atributos aleatórios dos batches $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é dito satisfazer a terceira hipótese de atributos aleatórios dos batches se existe uma sequência não decrescente $\{n_j, j \geq 1\}$ e uma variável aleatória χ , com $P(\chi > 0) = 1$, tal que N_j/n_j converge em probabilidade para χ quando $j \rightarrow \infty$, onde $N_j = M_j K_j$.

A terceira hipótese é necessária para que o estimador considerado no teorema 2 convirja em distribuição quando $j \rightarrow \infty$.

A importância das suposições acima está presente no teorema a seguir.

Teorema 2: (Fishman & Yarberry, 1994)

Se $\{X_i, i \geq 1\}$ é um processo estocástico satisfazendo HAF e $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é uma sequência de atributos aleatórios dos batches satisfazendo a primeira e segunda hipóteses de atributos aleatórios dos batches, então $M_j B_{K_j M_j} \rightarrow \alpha^2$ quando $j \rightarrow \infty$, com probabilidade 1. Além disso, se esta sequência satisfaz a terceira hipótese de atributos aleatórios dos batches, então $(\bar{X}_{N_j} - \mu) / \sqrt{B_{K_j M_j} / K_j}$ converge em distribuição para a $N(0,1)$, quando $j \rightarrow \infty$.

Este teorema assegura que, se a regra considerada para tamanho e número de batches satisfaz as três hipóteses de atributos aleatórios dos batches, então $M_j B_{K_j M_j}$ é um estimador fortemente consistente para α^2 e portanto

$$(\bar{X}_{N_j} - t_{k-1, (1-\delta/2)} \sqrt{B_{K_j M_j} / K_j} \quad ; \quad \bar{X}_{N_j} + t_{k-1, (1-\delta/2)} \sqrt{B_{K_j M_j} / K_j}) \quad (4.7)$$

é um intervalo de confiança assintoticamente válido para μ , com boas propriedades, como discutido na seção 4.1.

A seguir serão vistas as regras LBATCH e ABATCH, duas das possíveis formas de associar as regras FNB e SQRT utilizando as três hipóteses e o teorema 2, vistos acima.

4.4.1 - A regra LBATCH

A regra LBATCH está baseada no fato de que a correlação entre as médias dos batches tende a diminuir quando o tamanho destes cresce. A estratégia adotada aqui é tomar inicialmente os primeiros elementos da sequência $K_1, K_2, \dots, K_j$ como constantes e permitir que $M_1, M_2, \dots, M_j$ cresçam com o tamanho amostral, usando a regra FNB, até que as médias dos batches tenham

entre si uma correlação desprezível. A partir disso a regra LBTCH passa a usar a regra SQRT permitindo também o crescimento do número de batches.

Nesta regra são originados os instantes de revisão intermediária $n_1, n_2, \dots, n_j$ e juntamente com estes uma sequência de resultados intermediários $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_j \leq n$. A cada revisão é testado se a correlação entre as médias dos batches se tornou desprezível, o que determina a troca da regra FNB pela SQRT. A partir de agora, para maior facilidade de notação define-se a seguinte hipótese:

H_0 : a correlação entre as médias dos batches é desprezível.

Logo, quando H_0 não for rejeitada, a regra LBTCH troca a regra FNB pela SQRT omitindo o teste em todas as revisões futuras (veja a figura 4.2, para observar seus principais passos).

Observa-se a necessidade de ser adotado um teste para verificar se a correlação não é ou é desprezível, ou seja, rejeita-se ou não H_0 , fazendo com que ocorra a mudança da regra FNB para SQRT.

Pode-se perceber algumas das características dessa regra. A revisão intermediária a partir da qual começará a ser usada a regra SQRT é aleatória pois depende do resultado do teste a cada rodada. Ainda, quando H_0 é não rejeitada a correlação entre as médias dos batches não necessariamente é zero mas se tornou desprezível devido ao aumento do tamanho destes. Também, procura-se primeiro diminuir a correlação, através da regra FNB, para depois, através da regra SQRT, fazer com que a distribuição de $(\bar{X}_{n_j} - \mu) / \sqrt{B_{K,M_j} / K_j}$ convirja para uma distribuição $N(0,1)$. Percebe-se então que a regra LBTCH é uma das formas possíveis para se comutar as regras FNB e SQRT, para aproveitamento das vantagens de ambas.

Figura 4.2 : Fluxograma para as regras LBATCH e ABATCH

Pelo fato de não se saber a partir de qual revisão intermediária a regra SQRT será aplicada obtem-se que $\{(M_j, K_j), j \geq 1\}$ é aleatória, implicando que o tamanho amostral $N_j = M_j K_j$ também o seja.

Em uma dada revisão o teste pode ou não ser realizado, dependendo que se esteja usando a regra FNB (correlação significativa) ou a regra SQRT (correlação desprezível), respectivamente. Para todas as revisões intermediárias define-se

$$A_j = \begin{cases} 1 & \text{se o teste rejeita } H_0 \\ 0 & \text{se o teste aceita } H_0 \text{ nesta ou em outra revisão} \end{cases}$$

Define-se também

$\bar{A}_j$ = proporção amostral de utilização da regra FNB até a revisão j .

A partir do momento em que o teste não rejeita H_0 , A_j assumirá somente o valor 0. Desta forma, $\bar{A}_j$ pode ser interpretado como a proporção de revisões em que a regra foi utilizada, em relação ao seu total, ou ainda, como a posição da revisão onde ocorreu a troca de regras em relação ao número total de revisões. Esta medida terá grande utilidade na interpretação da regra LBATCH.

Deve-se observar que a regra LBATCH satisfaz as três hipóteses de atributos aleatórios dos batches (Fishman & Yarberry, 1994) a fim de que o teorema 2 valha. Neste teorema a sequência de número e tamanho de batches é aleatória, contudo não trata da qualidade da aproximação forte, que pode ser avaliada pelo comportamento de λ . Para resolver este problema é obtida uma especificação para $\{\bar{A}_j, j \geq 1\}$, dada pelo teorema 3.

Teorema 3: (Fishman & Yarberry, 1994)

Assuma que HAF vale e que é estipulado um teste para H_0 , para o qual existe uma constante $\Gamma < 1$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} P(\bar{A}_j > \Gamma) < \infty$ e que existe uma constante $\theta > 1 - 4\lambda$ tal que

$\bar{A}_j \rightarrow \theta$ quando $j \rightarrow \infty$, com probabilidade 1. Então $M_j B_{K_j M_j}$ converge para α^2 quando $j \rightarrow \infty$, com probabilidade 1.

Se for considerado que $\theta = 0$, ou seja, que $\bar{A}_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ com probabilidade 1, então $\lambda \in (1/4, 1/2]$ e esta condição é suficiente para que $M_j B_{K_j M_j}$ seja um estimador fortemente consistente para α^2 . Estas considerações são válidas para a regra LBATCH, onde $\bar{A}_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, ou seja, a partir da não rejeição de H_0 esta não é mais testada e $\bar{A}_j$ assumirá sempre o valor 0. Contudo, como visto na seção 4.3, esta região não trata dos problemas que surgem em $\lambda \in (0, 1/4]$, ou seja, não normalidade, alta correlação ou ambas. Deve-se observar que quanto mais perto λ estiver de 0, haverá maior agravamento dos problemas.

O corolário abaixo, que é o teorema 3 com uma suposição adicional, é utilizado para a construção de intervalos de confiança.

Corolário :

Se, em adição às suposições do teorema 3, existe uma sequência $\{\theta_j, j \geq 1\}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} P(|\bar{A}_j - \theta_j| < 1/2j) = 1$, então $(\bar{X}_{N_j} - \mu) / \sqrt{B_{K_j M_j} / K_j}$ converge em distribuição para uma variável aleatória $N(0,1)$ quando $j \rightarrow \infty$.

O teorema 3 e o corolário apresentados acima tratam da aplicabilidade de outra regra, a ABATCH, no que diz respeito a λ .

4.4.2 - A regra ABATCH

Esta regra também procura aproveitar as vantagens das regras FNB e SQRT, porém de modo diferente que a regra LBATCH. Aqui, em todas as revisões, o teste é realizado, sendo A_j redefinido como

$$A_j = \begin{cases} 1 & \text{se o teste rejeita } H_0 \\ 0 & \text{se o teste aceita } H_0 \end{cases}$$

Em uma dada revisão $j-1$, se H_0 for aceito, será então aplicada a regra SQRT em j , caso contrário, será aplicada a regra FNB com $K_j = K_{j-1}$ e $M_j = 2M_{j-1}$. Deve-se observar então que há uma alternância entre as regras FNB e SQRT e não se procura resolver primeiro o problema de correlação para depois tratar da convergência, como na regra LBATCH. A regra ABATCH tem como estratégia alternar aleatoriamente as duas regras (vide figura 4.2 para observar seus principais passos). Deve-se observar ainda que o teorema 3 e o corolário enunciados anteriormente são válidos para a regra ABATCH (Fishman & Yarberry, 1994), permitindo que se calcule através dela o intervalo de confiança desejado.

Sejam β e β_A denotando o nível de significância e a proporção de rejeição a H_0 do teste de correlação respectivamente, quando é aplicada a regra ABATCH. Como na regra LBATCH, se $\lambda \in (1/4, 1/2]$ obtém-se consistência forte para α^2 independentemente do valor de β_A , mas não para $\lambda \in (0, 1/4]$. Contudo, através de evidências empíricas (Fishman & Yarberry, 1994), foi observado que quando é adotado $\beta = 0,10$ este induz β_A a ter um valor próximo de β , enquanto utiliza as vantagens dessa regra. É chamada também a atenção para o fato que repetir o teste a cada revisão diminui, em esperança, a convergência de $M_j B_{K_j M_j}$ para α^2 mas melhora a convergência de $(\bar{X}_{N_j} - \mu) / \sqrt{B_{K_j M_j} / K_j}$ para a normalidade.

Algumas considerações devem ser feitas sobre os métodos LBATCH e ABATCH. A cada revisão, em ambas as regras, são recalculados K_j e M_j obtendo-se N_j , e então são coletadas as observações X_i , para $N_{j-1} < i < N_j$. A partir das observações coletadas é estimado α^2 e calculado um intervalo de confiança para μ , após isso é verificado se $N_j \geq n$, o tamanho amostral desejado. Se a condição for satisfeita a simulação está terminada. Caso contrário, uma nova revisão é realizada e todas as estatísticas são recalculadas. Nota-se então que o número de observações a serem coletadas na simulação é aleatório e será somente uma aproximação do desejado.

Mediante suas características, empregando-se as regras LBATCH e ABATCH espera-se obter maior precisão nos intervalos de confiança fornecidos para μ , ou seja, intervalos com significativa menor meia amplitude e concomitantemente uma taxa aceitável de cobertura do parâmetro μ , que os resultados obtidos para o método de batch means quando o número de batches está fixado.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DAS REGRAS ABATCH E LBATCH NO SISTEMA DE FILA M/M/1

5.1- Introdução

Tendo-se em vista um sistema de interesse que será abordado por simulação deve-se decidir em que linguagem o programa de computador (simulador) será construído. Várias opções podem ser analisadas, como as linguagens Fortran, Pascal ou C, ou ainda linguagens especificamente planejadas para simulação como GPSS ou SIMSCRIPT. Em geral, para esta decisão algumas características são consideradas importantes, como facilidade de uso, rapidez e confiabilidade nos resultados obtidos. Se a escolha for por alguma linguagem como Fortran deve-se tomar muito cuidado nas várias fases da construção do programa, como por exemplo, na geração de números aleatórios, problema este bastante delicado em sua abordagem. Optando-se por uma linguagem específica para simulação deve-se escolher alguma que, além de fornecer as características acima citadas, já esteja sendo operada a algum tempo, pois assim pode-se conferir um maior grau de confiabilidade nos seus resultados e consequentemente nas conclusões então obtidas.

Os algoritmos relativos as regras LBATCH e ABATCH foram aplicados no sistema de fila M/M/1 programado em linguagem não específica para simulação (Fishman & Yarberry, 1994). Além disso, foi utilizada simulação Monte Carlo, aplicando-se o conhecido resultado de

Lindley, $W_i = \max\{0, W_i + A_{i+1} - S_i\}$ onde, W_i é o tempo gasto na fila pelo i -ésimo usuário, A_{i+1} é o tempo entre as chegadas do i -ésimo e $i+1$ -ésimo usuários e S_i é o tempo de serviço do i -ésimo usuário. Este tipo de simulação tem uma definição mais restrita pois “...simulações Monte Carlo são geralmente estáticas antes que dinâmicas” (Law & Kelton, 1991, pág. 113).

Neste trabalho avaliou-se a eficiência das regras LBATCH e ABATCH simulando integralmente o sistema de fila M/M/1 utilizando-se GPSS/H (Banks et al., 1989). Optou-se por esta linguagem de simulação por sua facilidade de uso e rapidez na confecção de programas. Também, não se enfrenta, como citado anteriormente, problemas delicados como programar um gerador de números aleatórios. Além disso, o GPSS/H foi desenvolvido em 1977 estando portanto a bastante tempo em utilização, possuindo muita rapidez nos tempos de compilação e execução, podendo-se usá-lo para simular sistemas bem mais complexos que o sistema de fila M/M/1 considerado aqui. Estes sistemas seriam muito trabalhosos e difíceis se confeccionados com linguagens não específicas de simulação, justificando a aplicação do GPSS/H.

5.2- A regra FNB utilizada como fator de padronização

As regras FNB, SQRT, LBATCH e ABATCH apresentadas anteriormente tem uma profunda relação com as distintas características dos intervalos de confiança gerados por cada uma delas, quando utilizadas na simulação de algum sistema de interesse. Estes intervalos, por sua vez, representam importante papel em simulação pois geralmente o objetivo desta é obter uma estimativa e um intervalo de confiança para algum parâmetro de interesse e desconhecido do sistema simulado.

Em uma simulação muitas realizações devem ser feitas gerando vários intervalos de confiança que são avaliados em sua qualidade pela taxa de cobertura e sua amplitude média. É bem verdade que pode-se calcular a taxa de cobertura somente quando se conhece teoricamente o parâmetro e consequentemente seu valor, contudo esta é frequentemente utilizada para avaliar técnicas em simulação que podem ser posteriormente aplicadas para sistemas com parâmetros desconhecidos.

Os intervalos de confiança podem apresentar alta taxa de cobertura mas se suas amplitudes forem grandes estes poderão ser de pouca utilidade em vista dos objetivos aos quais se prestariam. Desta forma os intervalos de confiança podem ser considerados bons (úteis) se fornecerem boa taxa de cobertura e amplitudes avaliadas no mínimo como razoáveis, fornecendo portanto informação de boa qualidade para posterior utilização.

Aplicando-se alguma das regras citadas, a eficiência desta, no contexto deste trabalho, deve ser entendida como a capacidade de reduzir as amplitudes dos intervalos de confiança sem, no entanto, reduzir muito a taxa de cobertura fornecida pelos mesmos ao término da simulação. Nota-se portanto que a eficiência assim considerada é um conceito subjetivo em sua utilização e torna-se necessário bom senso mediante os interesses de quem vai aplicá-la.

A regra FNB tem duas importantes características se comparadas com as outras três, ou seja, possui a maior taxa de cobertura e também a maior amplitude dos intervalos de confiança. Desta forma, esta regra pode fornecer um padrão de comparação quanto a eficiência das outras, ou seja, proporcionalizam-se as taxas de cobertura e amplitudes médias das regras SQRT, LBATCH e ABATCH pelas obtidas pela regra FNB. Assim, pode-se observar o quanto conseguiu-se manter a cobertura (máxima) e diminuir a amplitude (máxima) obtidas pela regra FNB, avaliando-se portanto a eficiência das regras.

5.3- Aplicação das regras FNB, SQRT, LBATCH e ABATCH no sistema de fila M/M/1

Conforme algumas características citadas no capítulo 2 o sistema de fila M/M/1 é considerado como uma excelente base de testes para avaliar regras como LBATCH e ABATCH. Considera-se o problema do período transitório inicial resolvido através da aplicação da regra de White (1997), utilizando o tempo gasto na fila, cujos resultados encontram-se na tabela 3.2. Deve-se ressaltar que para aplicação das regras a serem avaliadas foram utilizados os mesmos parâmetros daquela tabela, contudo a variável agora abordada foi outra, o tempo gasto no sistema, não representando problema na determinação do período de equilíbrio se considerar-se a restrita relação entre essas duas variáveis, pois observando-se as expressões (2.3) e (2.4) chega-se

facilmente a expressão $W = W_q + (1/\mu)$. Os parâmetros considerados, os resultados da regra de White e os valores da variável tempo médio gasto no sistema estão presentes na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Sistema de fila M/M/1 com diferentes valores do fator de utilização (ρ), número de observações a serem descartadas ($d^*(j)$) e valores do tempo médio gasto no sistema (W).

ρ	$d^*(j)$	W
0,50 ($\lambda_a=1, \mu_s=2$)	1637	1
0,75 ($\lambda_a=1, \mu_s=4/3$)	1656	3
0,90 ($\lambda_a=0,9, \mu_s=1$)	2474	10

Decidiu-se fazer 100 realizações distintas (com números aleatórios distintos) de simulação para as regras FNB, SQRT, LBATCH e ABATCH e em cada realização foram feitas revisões intermediárias, ou seja, as mesmas realizações com tamanho e/ou número de batches distintos, conforme a regra que está sendo empregada. Com o objetivo de se comparar essas regras foram mantidas as condições iniciais para cada realização, ou seja, para alguma realização fixada mantinha-se o número de observações descartadas (para o mesmo valor de ρ) e os números aleatórios utilizados pelo GPSS/H, independente da regra considerada. O número de observações descartadas foi mudado segundo o valor de ρ e os números aleatórios utilizados foram modificados quando as realizações eram distintas, sendo portanto empregados 100 conjuntos de números aleatórios, um para cada realização. Devido a capacidade de armazenamento do GPSS/H não foi possível realizar mais revisões intermediárias (15 para todas as regras), contudo ao término destas, ou seja, ao término de cada realização distinta, foram coletadas mais de 131.000 observações. Para qualquer uma das regras a realização é iniciada com 8 batches contendo uma única observação cada um. Isto faz com que na décima quinta revisão intermediária a regra FNB tenha 8 batches com 16.384 observações cada um (total de 131.072 observações) e a regra SQRT 704 batches com 192 observações cada um (total de 135.168 observações), para todas as 100 realizações distintas, pois nestas regras nenhum teste é utilizado.

Para as regras LATCH e ABATCH é adotado um teste para a correlação entre as médias dos batches, denominado teste de independência (Bickel & Doksum, 1977, pág. 219). Esta denominação está fundamentada no fato de que, dependendo da correlação entre as médias dos batches e do tamanho destes, estas podem ser consideradas aproximadamente independentes. Também, na simulação, tomou-se o cuidado de só realizar o teste a partir da sexta revisão intermediária, quando as médias dos batches são calculadas com 32 observações. A utilização do teste nestas regras faz com que tanto o número quanto o tamanho dos batches possam variar durante a simulação tornando portanto um pouco distintos os números de observações a serem coletadas ao término das realizações, o que não ocorre com as regras FNB e SQRT. Ressalta-se ainda que para as regras LATCH e ABATCH o valor tomado para β (o nível de significância para o teste de independência) foi 0,10, de modo a obter as vantagens da regra ABATCH.

Nas tabelas 5.2 e 5.3 encontramos respectivamente uma realização típica para as regras ABATCH e LATCH, podendo-se observar seus funcionamentos. Para essas duas regras o número de observações a serem coletadas ao término de alguma realização varia de 131.072 a 135.168, dadas as condições iniciais da simulação. Entre as várias informações contidas nas tabelas estão as variâncias estimadas e suas evoluções durante a simulação, para cada uma das duas regras. Estas variâncias estão representadas no gráfico 5.1, denotadas por ABATCH1 e LATCH1, onde pode-se observar alguma distinção de comportamento devido a possibilidade da regra ABATCH poder realizar mudança de regra (para FNB ou SQRT) durante todas as nove revisões intermediárias restantes, o que não ocorre com a regra LATCH.

Observando-se novamente a tabela 5.3, nota-se que, para a regra LATCH, a partir da oitava revisão intermediária é aplicada a regra SQRT assumindo-se que o problema da correlação (independência) está resolvido. Também, analisando-se a tabela 5.2, a regra ABATCH aplica pela primeira vez a regra SQRT na oitava revisão intermediária, contudo, volta a aplicá-la na nona e décima quinta revisões intermediárias revelando que, pelo teste de independência assumido, a correlação pode voltar a ser significativa mediante o aumento mais acentuado do número de batches. Desta forma, considera-se a regra ABATCH mais dinâmica que a LATCH e mais precisa em abordar o problema de dependência existente para processos estocásticos e, mais particularmente, neste trabalho, para o sistema de fila M/M/1.

Tabela 5.2: Uma realização típica utilizando a regra ABATCH em observações simuladas do sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,9$.

R. I.	k_n	m_n	n	$\bar{X}_n$	$\hat{V}(\bar{X}_n)$	L. I.	L. S.	$\frac{1}{2}$ Amp.
1	8	1	8	1,8174	0,24618	0,6732	2,9616	1,14416
2	8	2	16	3,4044	0,47851	1,8092	4,9996	1,59516
3	8	4	32	5,9896	1,04060	3,6373	8,3420	2,35235
4	8	8	64	7,2897	0,42556	5,7854	8,7940	1,50431
5	8	16	128	6,3157	0,39828	4,8604	7,7710	1,45531
6	8	32	256	5,3803	0,42682	3,8738	6,8868	1,50654
7	8	64	512	5,6915	0,20169	4,6559	6,7271	1,03562
8	11	96	1056	5,8891	0,07396	5,2905	6,4877	0,59859
9	16	128	2048	7,1688	0,12999	6,4045	7,9331	0,76433
10	16	256	4096	7,5925	0,08582	6,9715	8,2135	0,62104
11	16	512	8192	8,5626	0,10661	7,8708	9,2545	0,69185
12	16	1024	16384	9,3983	0,10078	8,7253	10,0713	0,67299
13	16	2048	32768	9,7634	0,02447	9,4318	10,0950	0,33161
14	16	4096	65536	9,8635	0,01004	9,6511	10,0759	0,21239
15	22	6144	135168	10,0804	0,00447	9,9417	10,2191	0,13868

Notas: R. I. = revisão intermediária; $\hat{V}(\bar{X}_n)$ = variância estimada; L. I. = limite inferior do IC; L. S. = limite superior do IC; $\frac{1}{2}$ Amp. = meia amplitude do IC; (IC=intervalo de confiança)

Tabela 5.3: Uma realização típica utilizando a regra LATCH em observações simuladas do sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,9$.

R. I.	k_n	m_n	n	$\bar{X}_n$	$\hat{V}(\bar{X}_n)$	L. I.	L. S.	$\frac{1}{2}$ Amp.
1	8	1	8	1,8174	0,24618	0,6732	2,9616	1,14416
2	8	2	16	3,4044	0,47851	1,8092	4,9996	1,59516
3	8	4	32	5,9896	1,04060	3,6373	8,3420	2,35235
4	8	8	64	7,2897	0,42556	5,7854	8,7940	1,50431
5	8	16	128	6,3157	0,39828	4,8604	7,7710	1,45531
6	8	32	256	5,3803	0,42682	3,8738	6,8868	1,50654
7	8	64	512	5,6915	0,20169	4,6559	6,7271	1,03562
8	11	96	1056	5,8891	0,07396	5,2905	6,4877	0,59859
9	16	128	2048	7,1688	0,12999	6,4045	7,9331	0,76433
10	22	192	4224	7,5932	0,08502	6,9890	8,1979	0,60470
11	32	256	8192	8,5626	0,05184	8,0988	9,0264	0,46377
12	44	384	16896	9,4168	0,03124	9,0606	9,7730	0,35620
13	64	512	32768	9,7634	0,01515	9,5175	10,0093	0,24589
14	88	768	67584	9,7655	0,00428	9,6355	9,8956	0,13005
15	128	1024	131072	9,9971	0,00246	9,8989	10,0953	0,09822

Notas: R. I. = revisão intermediária; $\hat{V}(\bar{X}_n)$ = variância estimada; L. I. = limite inferior do IC; L. S. = limite superior do IC; $\frac{1}{2}$ Amp. = meia amplitude do IC; (IC=intervalo de confiança)

Gráfico 5.1: Comparação das variâncias estimadas nas regras ABATCH e LBATCH para uma mesma realização do sistema de fila M/M/1 com $\rho = 0,9$.

Conforme discutido no capítulo 2, há distinção entre as realizações da simulação do sistema de fila M/M/1. Isto faz com que diferentes realizações de simulação, ou seja, realizações que utilizam números aleatórios diferentes, tenham também comportamentos um pouco distintos. Nos gráficos 5.2 e 5.3 estão, respectivamente, as variâncias estimadas de outra realização da regra ABATCH (denominada ABATCH 2) junto com ABATCH1, e de outra realização da regra LBATCH (denominada LBATCH 2) junto com LBATCH1. Observa-se, pelo gráfico 5.2 (5.3) que suas variâncias se tornam mais próximas a partir da décima terceira (nona) revisão intermediária, quando as variâncias estimadas já estão com valores bem pequenos. Portanto, realizações distintas podem ter comportamentos distintos, mesmo se aplicada à mesma regra.

Para um melhor esclarecimento dos resultados gerais obtidos na simulação do sistema de fila M/M/1 utilizando as regras FNB, SQRT, LBATCH e ABATCH foram construídas as tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 respectivamente para 0,5, 0,75 e 0,9 como valores de ρ . Nas referidas tabelas encontram-se várias estimativas, algumas padronizadas pela regra FNB. Utilizando-se as

Variância Estimada

Gráfico 5.2: Comparação das variâncias estimadas na regra ABATCH para duas realizações independentes do sistema de fila M/M/1 com $\rho = 0,9$.

Variância Estimada

Gráfico 5.3: Comparação das variâncias estimadas na regra LBATCH para duas realizações independentes do sistema de fila M/M/1 com $\rho = 0,9$.

Tabela 5.4: Estimativas contempladas para a simulação do sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,5$, empregando-se as regras SQRT, LBATCH e ABATCH com 100 realizações.

Regra	Média	$\frac{1}{2}$ A. M. R.	C.R. %	P.U.R. FNB	N.M.B.	T.M.B.	T.A.M.
SQRT	1,0586	0,214241	26,92	0	704	192	135.168
LBATCH	1,0060	0,348781	42,31	0,342	133,32	1315,8	133.980
ABATCH	1,0060	0,707497	71,15	0,683	21,38	6748,2	133.284

Notas: (RI = revisão intermediária) Média = média observada das 100 repetições utilizando a última RI; $\frac{1}{2}$ A.M.R. = média da meia amplitude do IC nas 100 repetições utilizando a última RI, padronizada pela FNB; C.R. % = porcentagem de cobertura utilizando a última RI, padronizada pela FNB; P.U.R. FNB = porcentagem média de utilização da regra FNB nas 100 repetições, utilizando todas RI's de cada repetição; N.M.B. = número médio de batches nas 100 repetições utilizando a última RI; T.M.B. = tamanho médio de batches nas 100 repetições, utilizando a última RI; T.A.M. = tamanho amostral médio das 100 repetições, utilizando a última RI.

Tabela 5.5: Estimativas contempladas para a simulação do sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,75$, empregando-se as regras SQRT, LBATCH e ABATCH com 100 realizações.

Regra	Média	$\frac{1}{2}$ A. M. R.	C. R. %	P.U.R. FNB	N.M.B.	T.M.B.	T.A.M.
SQRT	3,0392	0,181812	22	0	704	192	135.168
LBATCH	3,0393	0,355407	38	0,360	125,16	1520,6	133.734
ABATCH	3,0394	0,658093	82	0,687	21,25	7045,1	133.243

Notas: Idênticas da tabela 5.4.

Tabela 5.6: Estimativas contempladas para a simulação do sistema de fila M/M/1 com $\rho=0,9$, empregando-se as regras SQRT, LBATCH e ABATCH com 100 realizações.

Regra	Média	$\frac{1}{2}$ A. M. R.	C. R. %	P.U.R. FNB	N.M.B.	T.M.B.	T.A.M.
SQRT	10,0660	0,154040	14,29	0	704	192	135.168
LBATCH	10,0700	0,363501	33,33	0,377	115,44	1617,9	133.857
ABATCH	10,0840	0,714790	65,08	0,709	18,89	7792,6	132.956

Notas: Idênticas da tabela 5.4.

100 realizações distintas e somente a última revisão intermediária de cada uma delas foram calculados a média geral (não padronizada, denotada Média), a meia amplitude média relativa (padronizada, denotada $\frac{1}{2}$ A.M.R.), a porcentagem relativa de cobertura (padronizada, denotada C.R. %), o número médio de batches (não padronizado, denotado N.M.B.), o tamanho médio dos batches (não padronizado, denotado T.M.B.) e o tamanho amostral médio (não padronizado, denotado T.A.M.). A proporção de utilização da regra FNB (denotada P.U.R. FNB) foi calculada sobre todas as revisões intermediárias, ou seja, para cada uma das 100 realizações foi contado o número de revisões onde foi aplicada a regra FNB dividindo-se pelo total possível de mudanças, após isto calculou-se a média das realizações obtendo-se os valores da tabela. Como exemplo, pode-se dizer que para a regra ABATCH com $\rho = 0,5$, a média obtida foi 1,0060, a meia amplitude foi reduzida em média para 71% do valor médio obtido pela FNB, manteve-se cerca de 71% da cobertura obtida pela FNB, em média utilizou-se a regra FNB em 68% das revisões intermediárias, obteve-se, como médias, aproximadamente 21 batches com 6.748 observações e finalmente um total amostral médio de 133.284 observações.

Repara-se nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 que, tanto para as regras LBATCH como para a ABATCH, conforme ρ tem seu valor aumentado, enquanto o número médio de batches decresce o tamanho médio dos batches cresce. Isto é explicado pela influência que o fator de utilização exerce na autocorrelação entre as observações e consequentemente na correlação entre as médias dos batches. Assim sendo, aplicando-se algum valor maior para ρ , durante as revisões intermediárias executadas na simulação, o teste aponta presença de uma correlação mais alta aplicando mais vezes a regra FNB fazendo portanto com que os batches obtenham um maior tamanho seguido de um crescimento menor em seu número, na tentativa de manter a amostra total de mesmo tamanho. Observando-se o gráfico 5.4 nota-se que, conforme o fator de utilização é aumentado, existe um acréscimo (ainda que pequeno) na proporção de utilização da regra FNB, tanto para a regra LBATCH como para a regra ABATCH, corroborando com a idéia explicitada acima. Ainda, pelo mesmo gráfico, percebe-se que a regra FNB é aplicada mais vezes na regra ABATCH pois para ela o teste de independência é realizado também nas revisões intermediárias onde a LBATCH emprega a regra SQRT. Este comportamento faz com que a regra ABATCH tenha maior meia amplitude média relativa que a LBATCH (vide gráfico 5.5) acompanhada portanto de uma maior cobertura relativa (vide gráfico 5.6). Deve-se ressaltar que as médias da $\frac{1}{2}$

Proporção de Utilização da Regra FNB

Gráfico 5.4: Porcentagem de utilização da Regra FNB para as Regras ABATCH e LBATCH, para diferentes valores do Fator de Utilização (ρ).

Meia Amplitude Média Relativa a FNB

Gráfico 5.5: Meia Amplitude Média Relativa a Regra FNB para as Regras ABATCH, LBATCH e SQRT, para diferentes valores do Fator de Utilização (ρ).

Cobertura Média Relativa a Regra FNB **Gráfico 5.6:** Cobertura Média Relativa a Regra FNB para as Regras ABATCH, LBATCH e SQRT para diferentes valores do Fator de Utilização (ρ).

amplitude não relativas (não padronizadas) para a regra ABATCH com ρ valendo 0,5, 0,75 e 0,9 são, respectivamente e aproximadamente, 0,00545, 0,0374 e 0,29380. Deste fato duas considerações importantes podem ser tiradas, ou sejam, os intervalos de confiança ficaram muito reduzidos, explicando a queda na cobertura, e que o aumento de ρ altera significativamente a amplitude do intervalo de confiança, considerando-se o sistema de fila M/M/1 com os valores de fator de utilização empregados.

A proporção de utilização da regra FNB permite interpretações para as regras LBATCH (interpretada como $\bar{A}_j$) e ABATCH (interpretada como β_A). Pelo teorema 3, considerando-se a regra LBATCH, deve-se ter que $\bar{A}_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, com probabilidade 1. Contudo, nota-se que, com o número de revisões intermediárias realizadas, esta condição ainda não foi satisfeita, visto que, analisando-se as proporções de utilização da regra FNB para LBATCH nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6, seus valores estão em torno de 0,36. Para a regra ABATCH, nota-se que as proporções de utilização da regra FNB (ou, neste caso, de rejeição a H_0) estão

com valores próximos a 0,69. Como discutido no capítulo 4 (seção 4.4.2) o nível de significância assumido para o teste de correlação, ou seja $\beta = 0,10$, deve induzir β_A a um valor próximo de 0,10. Desta forma, com o número de revisões intermediárias realizadas, os valores obtidos por simulação estão muito distantes deste valor, contudo, realizar mais revisões provavelmente reduziria ainda mais a cobertura relativa obtida pela regra ABATCH, o que seria pouco interessante. Nota-se que, exceto para $\rho = 0,75$, a cobertura média relativa foi reduzida praticamente proporcionalmente a meia amplitude média relativa, tanto para a regra LATCH como para ABATCH. Pode-se dizer que os intervalos de confiança da regra LATCH ficaram com suas amplitudes muito reduzidas porém não utilizáveis, por haverem obtido pouca cobertura. Para a regra ABATCH houve boa redução na amplitude dos intervalos de confiança, mas com queda bem significativa na cobertura, sendo que para $\rho = 0,75$ a regra apresentou sua melhor eficiência, reduzindo os intervalos de confiança em torno de 34% e mantendo 82% da cobertura, relativos a regra FNB.

Os algoritmos para LATCH e ABATCH são cercados de ótimo embasamento teórico e tratam-se de excelentes formas em considerar o problema de correlação para o método batch means contudo, quando aplicados, é necessário uma quantidade muito grande de observações e, dependendo da complexidade do sistema de interesse, com muito tempo computacional. Para simular o sistema de fila M/M/1 utilizou-se o GPSS/H (vide apêndice A), pela sua facilidade na simulação de sistemas de filas. As análises para as revisões intermediárias considerando as diferentes regras foram feitas em MINITAB (vide apêndice C).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Analisando-se as regras utilizadas para o método batch means algumas considerações devem ser feitas. Quando $n \rightarrow \infty$ (teoricamente) tanto a regra FNB como a SQRT fornecem intervalos de confiança assintoticamente válidos para μ , contudo o comprimento médio desses intervalos para a regra FNB é bem maior que para a SQRT, sendo que esta, na prática, ou seja, quando n é finito, tende a diminuir muito a taxa de cobertura em função da redução no comprimento médio dos intervalos de confiança. Desses fatos considera-se então formas de mesclar essas duas regras surgindo duas novas regras, LBATCH e ABATCH, utilizando um estimador fortemente consistente para a variância do processo.

Fishman (1996) consegue boa cobertura com significativa redução na meia amplitude média dos intervalos de confiança obtidos pela regra FNB (somente para $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,9$, sem fornecer os resultados obtidos para $\bar{A}_j$ e β_A) aplicando as regras LBATCH e ABATCH no sistema de fila M/M/1 utilizando linguagens não específicas de simulação (FORTRAN e C), sendo ainda que pode-se concluir haver melhor eficiência quando empregada a regra ABATCH. Porém, para obter esses resultados houve necessidade de realizações com grande número de observações (mais de dois milhões) e de programas extensos, necessitando de dupla precisão e contendo vários avisos para não serem alterados, ou seja, extremamente complexos para algum usuário de simulação, mesmo sendo para um sistema simples como o utilizado. Esses programas foram elaborados considerando desde a geração dos números pseudo-aleatórios aplicados nas distintas

realizações do sistema de fila M/M/1 até as citadas regras com os resultados da simulação. Desta forma, utilizar o GPSS/H, onde sistemas mais complexos podem ser muito mais facilmente implementados, se mostrou como boa alternativa para aplicar as regras LATCH e ABATCH.

Para um melhor entendimento sobre o GPSS/H, considera-se o exemplo onde uma linha de produção possui r estações de processamento em série e $r-1$ buffers (Fishman, 1996, pág. 353) e, a cada passo, os cálculos tomam tempo $O(r)$. Contudo, algumas linguagens de simulação de alto nível, incluindo GPSS/H, na pior hipótese tem tempo $O(r)$ e, em comunicação pessoal a Fishman, Hendriksen (Fishman, 1996, pág. 356) afirma que experimentos com GPSS/H sugerem, para o exemplo, tempo $O(\log r)$, consideravelmente melhor que $O(r)$. Portanto este fato pode ser considerado como indício de que o tempo de cálculo requisitado para uma realização no GPSS/H pode ser menor que para linguagens com tempo $O(r)$.

Foram empregadas as regras LATCH e ABATCH na simulação do sistema de fila M/M/1 buscando ampliar a aplicação destas regras através do GPSS/H, que fornece rapidez e facilidade de uso. Assim, nota-se que a redução na meia amplitude média dos intervalos de confiança utilizando-se a regra ABATCH está em torno de 30% da obtida pela FNB sendo isto alcançado com cerca de 133.000 observações (15 revisões intermediárias) por realização. Em Fishman (1996), com a regra ABATCH e quantidades similares de observações e revisões intermediárias, a redução fica com valor em torno de 20% da obtida pela FNB e, é interessante observar-se, que esta redução parece haver se estabilizado neste valor, já que com aproximadamente 2.100.000 observações (19 revisões intermediárias) este está aproximadamente inalterado. Talvez esta diferença possa ser relacionada a possibilidade do GPSS/H ter, por exemplo, tempo $O(\log n)$ e não $O(n)$ utilizado nos algoritmos.

Apesar da facilidade de uso e de utilizar menos observações para uma maior redução na meia amplitude média relativa, o GPSS/H obteve considerável decréscimo na taxa de cobertura fornecida pela regra FNB, explicada possivelmente pela acentuada redução obtida. Ainda, a regra ABATCH obteve melhor eficiência que a regra LATCH, como considerado anteriormente para linguagens não específicas de simulação.

Como pesquisa futura pode-se investigar as considerações de Hendriksen sobre o GPSS/H. Também, pode-se pesquisar sobre diferenças possivelmente existentes entre simulação Monte Carlo (usando o resultado de Lindley) e, entre outras linguagens específicas de simulação, o GPSS/H. Essas idéias podem contribuir significativamente na melhor compreensão e utilização deste trabalho e, de modo geral, em simulação estocástica.

BIBLIOGRAFIA

- BANKS, J.; CARSON, J.S.; NGO SY, J. *Getting started with GPSS/H*. Annandale, Wolverine Software Corporation., 1989.
- BICKEL, P. J.; DOKSUM, K. A. *Mathematical Statistics*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1977.
- DAMERDJI, H. Strong Consistency of the Variance Estimator in Steady-State Simulation Output Analysis. *Math. Opns. Res.* v. 19, p. 494-512, 1994.
- DAMERDJI, H. Mean-Square Consistency of Variance Estimator in Steady-State Simulation Output Analysis. *Opns. Res.* v. 2, p. 282-91, 1995.
- FISHMAN, G. S.; YARBERRY, L. S. *A Implementation of the Batch Means Method*. Tech. Report 93/1, Department of Operations Research, University of North Carolina, 1994.
- FISHMAN, G. S. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- FOX, B. L.; GOLDSMAN, D.; SWAIN, J. J. Spaced Batch Means. *Opns. Res. Letters*. v. 10, p.255-63, 1991.
- GLYNN, P. W.; IGLEHART, D. L. A New Class of Strongly Consistency Variance Estimator for Steady-State Simulations. *Stochastic Processes Appl.* v. 28, p. 71-80, 1988.
- GLYNN, P. W.; IGLEHART, D. L. Simulation Output Analysis Using Standardized Time Series. *Math. Opns. Res.* v. 15, p. 1-16, 1990.
- GLYNN, P. W.; WHITT, W. The Asymptotic Validity of Sequential Stopping Rules for Stochastic Simulations. *Ann. Appl. Probab.* v. 2, p.180-98, 1992.
- LAW, A. M. Confidence Intervals in discrete Event Simulation: A Comparison of Replication and Batch Means. *Naval Res. Logist. Quart.* v. 24, p. 669-78, 1977.

- LAW, A. M.; KELTON, W. D. *Simulation Modeling and Analysis*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.
- MITRANI, I. *Probabilistic Modelling*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- ODONI, A. R.; ROTH, E. An Empirical Investigation of the Transient Behavior of Stationary Queueing Systems. *Opns. Res.* v. 31, p. 432-55, 1983.
- PAWLIKOWSKI, K. Steady-State Simulation of Queueing Processes: A Survey of Problems and Solutions. *ACM Computing Surveys* v. 22, p. 123-69, 1990.
- SCHMEISER, B. Batch Size Effects in the Analysis of Simulation Output. *Opns. Res.* v. 30, p. 556-68, 1982.
- WHITE, K. P. Jr. An Effective Truncation Heuristic for Bias Reduction in Simulation Output. *Simulation*. v. 69:6, p. 323-34, 1997.

Apêndices

Apêndice A

* PROGRAMA PARA CALCULAR MEDIA DO TEMPO GASTO NO
 * SISTEMA EM UMA FILA M/M/1
 * (UTILIZADO NO CAPITULO 5)

*

SIMULATE

*

RMULT ,64500,24361

*

SAIDA FILE 'MM1.RES'

*

INTEGER &K

*

GENERATE RVEXPO(2,1.111111)

*

QUEUE SISTEMA

*

SEIZE SERV

*

ADVANCE RVEXPO(3,1)

*

RELEASE SERV

*

DEPART SISTEMA

TERMINATE 1

*

*

START 2474

*

RESET

*

DO &K=1,16

START 8192

PUTPIC FILE=SAIDA,LINES=1,(QT(SISTEMA))

****.*****

ENDDO

END

* PROGRAMA PARA CALCULAR TEMPO GASTO EM UMA M/M/1
 * (UTILIZADO NO CAPITULO 2)

*

SIMULATE

*

REAL &A

*

RMULT ,26305,57389

*

TFU FILE 'MM1.RES'

*

GENERATE RVEXPO(2,1.111111)

*

QUEUE SISTEMA

*

SEIZE SERV

*

DEPART SISTEMA

*

BLET &A=M1

*

BPUTPIC FILE=TFU,LINES=1,(&A)

**** *****

*

ADVANCE RVEXPO(3,1)

*

RELEASE SERV

*

TERMINATE 1

*

*

*

START 18474

*

END

Apêndice B

```
# PROGRAMA-REGRA DE INICIALIZAÇÃO DE WHITE (1997) (MINITAB)
# (UTILIZADO NO CAPITULO 3)
#
# inicio do programa principal (W.MTW)
#
# lendo dados do simulador no GPSS
#read 'mml.res' c1
#
# contando o n. de obs.
count c1 k1
#
# n. de loopings (pode ser mudado)
let k2=(k1/2)
round k2 k2
#
# d inicial (pode ser mudado)
let k3=0
#
# executando o programa auxiliar
execute 'AUXWM.MTW' k2
#
# obtendo o minimo e o valor de d*
sort c4c3 c5c6
name c5 'valores'
name c6 'd*'
#
# valor minimo
let k12 = c5(1)
print k12
#
# d* (ponto de truncamento)
let k13 = c6(1)
print k13
#
# fim
```

```
# INÍCIO DO PROGRAMA AUXILIAR (AUXW.MTW)
#
# obtendo n-d
count c1 k4
#
#
# obtendo o valor da expressao
#
let c2 = c1*c1
sum c2 k5
erase c2
aver c1 k6
let k7 = k6**2
let k8 = k7*k4
let k9 = k4**2
let k10 = (k5 - k8)/k9
let k11 = k3+1
#
# obtendo o vetor de d
let c3(k11) = k1-k4
#
# obtendo o vetor dos valores da expressao
let c4(k11) = k10
#
# implementando o valor de d
let k3 = k3+1
#
# tirando elementos do vetor c1
delete 1:2 c1
#
# fim
```

Apêndice C

```

# PROGRAMA PARA CALCULAR O INTERVALO DE CONFIANCA (IC.MTW)
# E TESTAR INDEPENDENCIA (MINITAB)
# (UTILIZADO NO CAPITULO 5)
#
# LENDO O ARQUIVO
retrieve 'saida.mtw'
#
# LENDO OS DADOS
read 'mm1.res' c1
#
# NIVEL DE SIGNIFICANCIA
let k1 = 0.05
#
# CALCULANDO O ESTIMADOR DE VARIANCIA
count c1 k2
aver c1 k3
let c2 = c1 - k3
let c2 = c2*c2
sum c2 k4
let k5 = k2 - 1
let k6 = k4/(k2*k5)
#
# CALCULANDO A ESTATISTICA T
let k7 = 1-(k1/2)
invcdf k7 k8;
t k5.
#
# CALCULANDO O I. C.
let k9 = k8*(sqrt(k6))
let k10 = k3 - k9
let k11 = k3 + k9
let k12 = k11 - k10
erase c1 c2
#
# CONSTRUINDO O ARQUIVO DE DADOS
#
count c3 k13
let k14 = k13 + 1
let c3(k14) = k14
let c4(k14) = k3
let c5(k14) = k10

```

```

let c6(k14) = k11
let c7(k14) = k12
let c8(k14) = k2
erase c1 c2
save 'saida.mtw'
#
# IMPRIMINDO OS RESULTADOS
#
print k3
# MEDIA
#
print k10
# L.I.
#
print k11
# L.S.
#
print k12
# AMPL.
#####
#
# EXECUTANDO PROGRAMA AUXILIAR (TESTA INDEPENDENCIA)
execute 'TL.MTW'
#stop

# PROGRAMA AUXILIAR PARA TESTAR INDEPENDENCIA (TL.MTW)
#
#
# lendo os dados e calculando a correlacao de lag 1
#
read 'mm1.res' c1
count c1 k1
copy c1 c2
delete 1 c1
delete k1 c2
corr c1 c2 m1
copy m1 c3 c4
let k2 = c4(1)
erase c3 c4
#
# calculando a estatistica do teste ( Tn )
#
count c1 k3

```



```
let k4 = k3-2
let k5 = (k2*(sqrt(k4)))/(sqrt(1-(k2**2)))
#
# calculando o ponto critico
#
invcdf .90 k6;
t k4,
#
# imprimindo os resultados
#
print k5 k6
```