**Integração de Redes Neurais Artificiais &
Métodos Estocásticos para Previsão de
Séries Temporais**

Helio Diniz

Orientação: Prof. Dr. André C. P. L. F. de Carvalho

Versão Corrigida

---

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação – USP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Ciências – Área de Ciências de Computação e Matemática
Computacional.*

USP – São Carlos
Junho de 1999

Agradecimentos

Esta seção é devotada aos agradecimentos às pessoas que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização desta dissertação de mestrado.

Agradeço primeiramente ao Prof. Dr. André C. P. L. F. de Carvalho pela dedicação e esforços gastos na minha orientação de mestrado e por partilhar seu conhecimento teórico e prático sobre Redes Neurais Artificiais.

Agradeço aos meus pais o apoio e o incentivo dado sem o qual não estaria hoje escrevendo esta dissertação.

Agradeço aos colegas do Laboratório de Inteligência Artificial (LABIC) pela amizade e companheirismo praticados diariamente em um convívio muito agradável.

Agradeço ao corpo docente do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação (ICMC) do campus de São Carlos pela boa formação teórica e técnica que adquiri dentro da Universidade de São Paulo.

Agradeço ao Prof. Dr. Marinho G. de Andrade pela atenção dedicada e auxílio teórico e prático sobre métodos estocásticos de análise e previsão de séries temporais.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro que foi fundamental para concretização das atividades de mestrado.

Finalmente, agradeço aos funcionários do ICMC por proporcionarem e manterem uma estrutura sólida para o desenvolvimento científico.

Índice

LISTA DE FIGURAS.....	I
LISTA DE TABELAS	II
RESUMO.....	III
ABSTRACT.....	IV
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 SÉRIES TEMPORAIS	5
2.1.1 <i>Previsão</i>	6
2.1.1 <i>Métodos de Previsão</i>	6
2.1.1.1 Métodos Estocásticos	7
2.1.1.2 Redes Neurais Artificiais.....	9
2.2 MÉTODO BOX & JENKINS.....	10
2.2.1 <i>Modelos</i>	11
2.2.1.1 Modelos Lineares Estacionário	13
2.2.1.2 Modelo Lineares Não Estacionários.....	19
2.2.2 <i>Identificação do Modelo</i>	22
2.3 REDES NEURAIS.....	24
2.3.1 <i>Estrutura</i>	24
2.3.1.1 Neurônio.....	24
2.3.1.2 Arquitetura	26
2.3.2 <i>Aprendizagem</i>	26
2.3.2.1 Algoritmo Backpropagation.....	27
2.3.2.2 Algoritmo Rprop.....	29
2.3.3 <i>Generalização</i>	31
2.3.4 <i>Métodos de Poda de RNAs</i>	33
2.3.4.1 Métodos de Cálculo da Sensibilidade.....	34
2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
3. PREVISORES NEURAIS.....	38
3.1 VANTAGENS E DESVANTAGENS	38
3.2 SISTEMA HÍBRIDO: RNAs E MÉTODO BOX & JENKINS	39
3.2.1 <i>Pré-processamento</i>	39
3.2.2 <i>Identificação do modelo</i>	40
3.2.2.1 Redes Feedforwards.....	40
3.2.2.2 Redes Recorrentes.....	41
3.2.2.3 FAC e FACP.....	42
3.2.3 <i>Validação do modelo</i>	43
3.2.4 <i>Previsão</i>	43
3.3 SELEÇÃO DE VARIÁVEIS POR MÉTODOS DE PODA.....	43
3.4 PROCESSAMENTO TEMPORAL	44
3.4.1 <i>Time Delay Neural Network</i>	46
3.4.2 <i>Redes Recorrentes</i>	47
3.4.2.1 Rede de Elman.....	47
3.4.2.2 Rede de Jordan.....	49
3.5 COMBINADORES DE PREVISÃO.....	50
3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
4. EXPERIMENTOS.....	52
4.1 METODOLOGIA	52

4.2	DADOS	53
4.3	RESULTADOS	55
4.3.1	<i>Sistema Híbrido</i>	55
4.3.1.1	Moedas	55
4.3.1.2	Ações	60
4.3.2	<i>Seleção de Variáveis</i>	65
4.3.2.1	Moedas	66
4.3.2.2	Ações	70
4.3.3	<i>Processamento Temporal</i>	74
4.3.3.1	Moedas	74
4.3.3.2	Ações	77
4.3.4	<i>Combinadores de Previsão</i>	80
4.3.4.1	Moedas	81
4.3.4.2	Ações	84
4.3.5	<i>Comparação Final</i>	86
4.3.5.1	Previsão 1-passo-a-frente	87
4.3.5.2	Previsão Vário-passos-a-frente	90
4.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
5.	CONCLUSÃO	95
5.1	CONCLUSÕES PRELIMINARES	95
5.2	TRABALHOS FUTUROS	98
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99

Lista de Figuras

Figura 2.1: Estrutura dos modelos de Função de Transferência.....	7
Figura 2.2: Estrutura dos modelos Multivariados.....	8
Figura 2.3: Etapas para Previsão de Séries Temporais através do método Box & Jenkins.....	10
Figura 2.4: Filtro Linear.....	11
Figura 2.5: Comportamento da função de auto-correlação de um $AR(p)$	15
Figura 2.6: Comportamento da função de auto-correlação de um $MA(q)$	18
Figura 2.7: Comportamento da função de auto-correlação de um Random Walk.....	21
Figura 2.8: Neurônio Artificial.....	25
Figura 3.1: Procedimento de projeto de RNAs para previsão.....	39
Figura 3.2: RNA feedforward para aproximação do modelo $NAR(p)$	41
Figura 3.3: RNA recorrente para aproximação do modelo $NARMA(p,q)$	42
Figura 3.4: Neurônio TDNN.....	46
Figura 3.5: Rede de Elman.....	49
Figura 3.6: Rede de Jordan.....	50
Figura 4.1: Séries Temporais da Libra Esterlina e Marco Alemão.....	54
Figura 4.2: Séries temporais de preço mínimo e máximo.	55
Figura 4.3: FAC da série da Libra Esterlina.....	57
Figura 4.4: FACp da série da Libra Esterlina.....	57
Figura 4.5: FAC da série do Marco Alemão.....	58
Figura 4.6: FACp da série do Marco Alemão.....	58
Figura 4.7: FAC da série de preço mínimo.....	62
Figura 4.8: FACp da série de preço mínimo.....	63
Figura 4.9: FAC da série de preço máximo.....	63
Figura 4.10: FACp da série de preço máximo.....	64
Figura 4.11: Seleção de variáveis para a série da Libra Esterlina.....	69
Figura 4.12: Seleção de variáveis para a série da Marco Alemão.....	69
Figura 4.13: Seleção de variáveis para a série do mínimo.....	72
Figura 4.14: Seleção de variáveis para a série do máximo.....	73
Figura 4.15: TDNN expandida para $D_h = 0$ e $D_o = 3$	75
Figura 4.16: Previsões 1-passo-a-frente da Libra Esterlina.....	88
Figura 4.17: Previsões 1-passo-a-frente do Marco Alemão.....	88
Figura 4.18: Previsões 1-passo-a-frente do preço mínimo de ações.....	89
Figura 4.19: Previsões 1-passo-a-frente do preço máximo de ações.....	90
Figura 4.20: Previsões vários-passos-a-frente da Libra Esterlina.....	91
Figura 4.21: Previsões vários-passos-a-frente do Marco Alemão.....	91
Figura 4.22: Previsões vários-passos-a-frente das séries do preço mínimo.....	92
Figura 4.23: Previsões vários-passos-a-frente das séries do preço máximo.....	93

Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Parâmetros e desempenhos dos modelos Box & Jenkins ajustados.....	56
Tabela 4.2: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a Libra Esterlina.....	59
Tabela 4.3: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a série do Marco Alemão com diferenciação.....	60
Tabela 4.4: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a série do Marco Alemão sem diferenciação.....	60
Tabela 4.5: Parâmetros e desempenhos dos modelos Box & Jenkins ajustados.....	61
Tabela 4.6: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para o preço mínimo com diferenciação.....	64
Tabela 4.7: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para o preço mínimo sem diferenciação.....	64
Tabela 4.8: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para o preço máximo com diferenciação.....	65
Tabela 4.9: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para o preço máximo sem diferenciação.....	65
Tabela 4.10a: Variáveis adicionais para a Libra Esterlina.....	67
Tabela 4.10b: Variáveis adicionais para o Marco Alemão.....	67
Tabela 4.11: Desempenho de redes MLP para a Libra Esterlina considerando variáveis adicionais.....	67
Tabela 4.12: Desempenho de redes MLP para o Marco Alemão considerando variáveis adicionais.....	68
Tabela 4.13a: Variáveis selecionadas para a Libra Esterlina.....	70
Tabela 4.13b: Variáveis selecionadas para o Marco Alemão.....	70
Tabela 4.14a: Variáveis adicionais para o preço mínimo.....	70
Tabela 4.14b: Variáveis adicionais para o preço máximo.....	70
Tabela 4.15: Desempenho de redes MLP para a série do mínimo considerando variáveis adicionais.....	71
Tabela 4.16: Desempenho de redes MLP para a série do máximo considerando variáveis adicionais.....	71
Tabela 4.17a Variáveis selecionadas para o preço mínimo.....	73
Tabela 4.17b Variáveis selecionadas para o preço máximo.....	73
Tabela 4.18: Desempenho das redes TDNN para a série da Libra.....	75
Tabela 4.19: Desempenho das redes TDNN para a série do Marco diferenciada.....	75
Tabela 4.20: Desempenho das redes Elman para a série da Libra Esterlina.....	76
Tabela 4.21: Desempenho das redes Jordan para a série da Libra Esterlina.....	76
Tabela 4.22: Desempenho das redes Elman para a série do Marco diferenciada.....	77
Tabela 4.23: Desempenho das redes Jordan para a série do Marco diferenciada.....	77
Tabela 4.24: Desempenho das redes TDNN para a série do mínimo diferenciada.....	78
Tabela 4.25: Desempenho das redes TDNN para a série do máximo diferenciada.....	78
Tabela 4.26: Desempenho das redes Elman para a série do mínimo diferenciada.....	79
Tabela 4.27: Desempenho das redes Jordan para a série do mínimo diferenciada.....	79
Tabela 4.28: Desempenho das redes Elman para a série do máximo diferenciada.....	80
Tabela 4.29: Desempenho das redes Jordan para a série do máximo diferenciada.....	80
Tabela 4.30: Desempenho comitê por média para as séries da Libra Esterlina e Marco Alemão.....	81
Tabela 4.31: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para a Libra Esterlina.....	82
Tabela 4.32: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para a Libra Esterlina.....	82
Tabela 4.33: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para a Libra Esterlina.....	82
Tabela 4.34: Desempenho das redes MLP usada como comitês para o Marco Alemão.....	83
Tabela 4.35: Desempenho das redes de Elman usada como comitês para o Marco Alemão.....	83
Tabela 4.36: Desempenho das redes de Jordan usada como comitês para o Marco Alemão.....	83
Tabela 4.37: Desempenho de comitês por média dos preços mínimo e máximo.....	84
Tabela 4.38: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para o preço mínimo.....	85
Tabela 4.39: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para o preço mínimo.....	85
Tabela 4.40: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para o preço mínimo.....	85
Tabela 4.41: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para o preço máximo.....	86
Tabela 4.42: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para o preço máximo.....	86
Tabela 4.43: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para o preço máximo.....	86

Resumo

Esta dissertação investiga a possibilidade de integração de Redes Neurais Artificiais (RNAs) e Método Estocásticos para previsão de séries temporais. O problema de previsão é geralmente abordado através de Métodos Estocásticos. Ultimamente, as RNAs têm sido muito utilizadas para a construção de previsores não lineares em diferente áreas de aplicações. Contudo, as arquiteturas da RNAs devem também ser parcimoniosas, ou seja, apenas considerar as entradas mais relevantes para realizar uma boa previsão. Assim, várias abordagens vêm sendo propostas para melhorar o projeto de arquitetura em problemas de previsão. Alguns exemplos destas abordagens são a combinação de RNAs e métodos Box & Jenkins, as técnicas de seleção usando métodos de poda de RNAs e modelos de RNAs com capacidade de processamento temporal. Além disso, as vantagens particulares dos previsores construídos seguindo tais abordagens podem ser combinadas através de comitês ou combinadores de previsão. Os experimentos desta dissertação foram realizados com dados sobre séries temporais de cotação de moedas e ações.

Abstract

This work investigates the potential integration of Artificial Neural Networks (ANNs) and Stochastic Methods for time series prediction. The prediction problem is usually solved through stochastic methods. Recently, ANNs have been used in order to create nonlinear predictors in different areas of application. However, the ANNs architectures should also be parsimonious, e. g., they should just consider the most relevant inputs so as to carry out good predictions. Therefore, several approaches have been proposed in order to improve the architecture design in this realm. Some examples of those approaches are the combination of ANNs the Box & Jenkins method, the variable selection techniques using pruning methods and ANNs dynamic models with processing temporal skills. Besides, the particular advantages of each individual predictor that are created following those approaches can be combined through a forecasting committee. The experiments of this dissertation were carried out using real-world data sets of exchange rate and stock markets time series.

1. Introdução

Esta dissertação apresenta as atividades desenvolvidas pelo candidato Hélio Diniz referentes a utilização de Modelos Estocásticos e Redes Neurais Artificiais para a previsão de séries temporais.

Uma série temporal é um conjunto seqüencial de observações de um dado fenômeno que são amostradas de acordo com algum parâmetro como, por exemplo, o tempo. Uma série temporal é dita estacionária se suas observações giram em torno de um nível médio constante e seus parâmetros não se alteram ao longo do tempo. Entretanto, muitas séries temporais são não estacionárias, apresentando comportamentos como tendência linear ou exponencial.

A previsão de séries temporais é um assunto que atrai o interesse das mais diversas áreas de pesquisas como transporte, energia, administração, saneamento, finanças, etc. As aplicações de cotação de moedas (Mostafa, 1996; Diniz et al., 1997), cotação do ouro (Abelém, 1995), *commodities* (Mostafa, 1996), demanda de passageiros em viagens aéreas (Fernandes et al., 1996), valores de ações (White, 1988) e vazões mensais de rios (Kadowaki et al., 1997; Ballini et al., 1997) são alguns exemplos que podem ser encontrados na literatura sobre o assunto. Este interesse em conhecer o futuro de certos fenômenos geralmente está relacionado com a redução de custos e/ou o aumento dos lucros que estas atividades podem proporcionar.

Os problemas de previsão são geralmente tratados sob a perspectiva de métodos estocásticos. Até o início da década de 70, haviam poucas alternativas metodológicas para análise e previsões de séries temporais, como por exemplo os métodos de Decomposição Clássica e os métodos de Caixa-Preta (regressão linear simples, regressão linear múltipla, etc.). A fundamentação teórica da área iniciou fortemente a sua consolidação em 1970 a partir dos trabalhos realizados por Box & Jenkins (Box et al., 1970). Quase que simultaneamente, surge em 1971 o lado bayesiano dos modelos de previsão proposto por Harisson e Stevens (Harrison e Stevens, 1971). Assim, tanto do lado clássico quanto do lado bayesiano, toda a década de 70 foi dedicada à implementação prática dos modelos propostos e às conseqüentes melhorias metodológicas sugeridas pela aplicação real destes métodos. Por conseguinte, várias alternativas metodológicas foram desenvolvidas e continuam ainda sendo propostas a todo instante.

A maioria dos métodos estocásticos ajustam modelos que apenas utilizam informações passadas sobre a série temporal que se deseja prever. Estes métodos são chamados Univariados. Contudo, existem ainda outras metodologias estocásticas cujos modelos são capazes de empregar

informações passadas sobre outras séries temporais adicionais em sua entrada. Tais métodos estão divididos em duas outras classes: métodos de Função de Transferência e métodos Multivariados. A diferença entre estes métodos está na restrição de causa-efeito existente entre a série de interesse e as demais séries.

Apesar de existirem outros métodos estocásticos com modelos um pouco mais sofisticados, como o ARCH (Eagle, 1982; Eagle e Gonzales-Rivera, 1986) e o GARCH (Bollerslev, 1986), que vem sendo mais atualmente aplicados em previsões financeiras, o método de Box & Jenkins será mais detalhadamente abordado devido a sua grande importância e o fato de ser base destas inovações. Este método é do tipo univariado e realiza a análise e previsão de uma série temporal através da aplicação de uma sequência de etapas de identificação do modelo, estimação dos seus parâmetros e de sua validação. Seus modelos são lineares e podem representar tanto séries temporais estacionárias como não estacionárias. Esta representação é realizada de maneira parcimoniosa, isto é, emprega o menor número de parâmetros possível. Além disso, a previsão é fundamentada em informações passadas da própria série temporais (observações e ruídos passados).

Na última década, vários modelos não lineares foram propostos para resolver a limitação (φksendal, 1992). Infelizmente, a maioria destes métodos estocásticos realizam a modelagem de séries temporais assumindo que existe uma relação linear entre as variáveis de entradas. Na prática, esta suposição pode prejudicar a precisão da previsão de valores futuros de processos reais. Alternativamente, tem surgido um crescente e considerável interesse na investigação de Redes Neurais Artificiais (RNAs) para a previsão de séries temporais.

Uma das primeiras arquiteturas de RNAs projetada para a previsão de séries temporais foi concebida por Lapedes e Faber (Lapedes e Faber, 1987). Tratava-se de uma Rede Neural *Multi-Layered Perceptron* (MLP) cujos neurônios da camada de saída possuíam uma função de ativação linear. Tal função permitia que a rede reproduzisse qualquer observação de uma série temporal z_t que poderia assumir valores entre $(-\infty, \infty)$. Se fosse usada uma função logística, a saída ficaria restrita ao intervalo $[0,1]$. Para criar um modelo dependente do tempo, Lapedes e Farber utilizaram algumas observações passadas $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-n}$ como variáveis de entrada. Inicialmente, o candidato utilizou uma arquitetura deste tipo para previsão de cotação de moedas (Diniz et al, 1997). Foi verificado que a abordagem de Lapedes e Faber não é parcimoniosa e a quantidade de informação passada era determinada empiricamente. Por esta razão, diversas variações visando melhorias foram investigadas.

Uma destas variações é uma utilização conjunta de Redes Neurais Artificiais e do método Box & Jenkins, que foi esquematizada por Drossu & Obradovic (Drossu & Obradovic, 1996). Basicamente, esta abordagem emprega o pré-processamento e as ferramentas de identificação de modelos Box & Jenkins para determinar alguns parâmetros livres da arquitetura neural. O pré-processamento é empregado para transformar uma série temporal não estacionária em estacionária. As ferramentas de identificação permitem escolher o tipo de arquitetura apropriado e dimensionar a camada de entrada da rede para realizar a previsão de um passo a frente. Esta linha foi seguida por diversos trabalhos para modelar as arquiteturas das Redes Neurais em previsão de vazões mensais de rios (Ballini et al, 1997; Kadowaki et al., 1997), e preços diários de ações (Diniz et al, 1998).

Os métodos de poda de RNAs constituem um outro exemplo de recursos que têm sido utilizados para tornar suas arquiteturas mais parcimoniosas em previsão de séries temporais. Estes métodos são geralmente empregados como ferramentas de seleção de variáveis através da diminuição sucessiva de arquitetura da Rede Neural em busca de uma melhor generalização. Diversos trabalhos têm aplicado métodos de poda com esta finalidade (Moody, 1992; Goute, 1996; Diniz, et al, 1998; Diniz et al, 1999).

Uma outra característica interessante, que alguns modelos de Redes Neurais possuem, é a capacidade de extrair e representar relacionamentos temporais. Isto é realizado através da adição de memória às arquiteturas das redes. Esta memória pode ser de curto prazo ou de longo prazo. Os modelos de *Time Delays Neural Networks* (TDNN) utilizam memórias de curto prazo nas camadas intermediárias e de saída. As redes recorrentes de Elman e Jordan fazem o uso de memórias de longo prazo. Originalmente, estas redes foram desenvolvidas para o reconhecimento de linguagem natural. Entretanto, vários artigos empregam estes modelos em outras aplicações, como previsões de tendências de ações (Saad, 1998), de carga elétrica (Teixeira et. al, 1998), etc...

As previsões realizadas por cada uma das três abordagens citadas anteriormente podem ainda ser combinadas na forma de comitês de previsores, visando a redução das taxas de erro e um comportamento mais estável na previsão.

O principal objetivo almejado por esta dissertação é obter informações, a partir da análise estocástica de uma série temporal, para o projeto de arquiteturas de RNAs. Para tanto, vários experimentos com séries reais provenientes da área financeira foram realizados. Tais experimentos envolveram o uso RNAs *feedforward* e *recorrentes* para a previsão de séries temporais de cotações diárias de moedas e preços de ações. As arquiteturas das redes

feedforward foram projetadas através dos conceitos do método Box & Jenkins e da utilização de métodos de poda. As redes com memória (TDNNs e redes recorrentes) foram inicialmente destinadas à extração da não estacionariedade das séries de ações, como, por exemplo, um possível relacionamento temporal.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos principais. O primeiro capítulo corresponde à esta introdução sobre os principais assuntos abordados. O segundo capítulo apresenta a definição de séries temporais e dois métodos empregados para prevê-las: métodos Box & Jenkins e Redes Neurais Artificiais. O terceiro capítulo discute três maneiras plausíveis de definir a arquitetura das RNAs para realizar previsão. O quarto capítulo relata os experimentos realizados com as séries temporais de moedas e ações. Finalmente, o quinto e último capítulo apresenta algumas conclusões obtidas durante o trabalho realizado nesta dissertação.

2. Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta os conceitos básicos sobre análise e previsão de séries temporais. A seção 2.1 define o que são séries temporais e apresenta um breve histórico dos métodos estocásticos e das RNAs empregados para prevê-las. A seção 2.2 apresenta os conceitos básicos relacionados ao método Box & Jenkins de previsão. A estrutura e funcionamento das RNAs são apresentados pela seção 2.3. Finalmente, a seção 2.4 apresenta algumas considerações finais delineadas sobre os tópicos abordados neste capítulo.

2.1 Séries Temporais

A observação de resultados passados de um fenômeno para antecipar o seu comportamento futuro constitui a essência da previsão. Se existir um modelo matemático capaz de descrever completamente tal fenômeno, este modelo é chamado determinístico. Por outro lado, se o modelo é incompleto ou desconhecido, ele é não-determinístico e variáveis probabilísticas devem ser consideradas em sua representação. Tais modelos são chamados processos ou modelos estocásticos.

Uma série temporal é um conjunto de observações dos resultados de um fenômeno colhidos sequencialmente ao longo do tempo (Box et al., 1970). Existem diversos exemplos de séries temporais em áreas como economia, administração, engenharia, química, física, ciências naturais e ciências sociais. Alguns destes exemplos são as séries de quantidade anual de passageiros de uma dada companhia aérea, volume mensal de vendas de um determinado produto, número semanal de acidentes de carros, preço diário de ações, cotação de *commodities* (preço da arroba do boi, preço da saca do café, etc.) etc. Uma característica intrínseca das séries temporais é que suas observações consecutivas são dependentes entre si. A natureza desta dependência é de considerável interesse prático.

Em termos matemáticos, uma série temporal é um conjunto de N sucessivas observações $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ que representa uma possível realização, de uma população infinita de realizações, que poderiam ter sido geradas a partir de um processo estocástico. A questão mais importante é que o comportamento futuro de uma série temporal não pode ser previsto com exatidão, como é o caso das funções determinísticas.

Uma série temporal é estacionária se o processo estocástico oscila em torno de um nível médio constante (Box et al., 1970). Em outras palavras, uma série temporal é estacionária se seus parâmetros não mudam com o passar do tempo. Contudo, a maioria dos exemplos reais de séries

temporais (cotação de ações e moedas) exibem um comportamento não estacionário, não oscilando em torno de uma média fixa. A sazonalidade, e a tendência linear ou exponencial são exemplos deste tipo de comportamento.

A tarefa de determinação de relações de dependência temporal existentes entre as observações de uma série temporal através de uma análise estatística detalhada é conhecida como Análise de Série Temporal. Uma vez determinadas tais relações de dependência, um modelo matemático pode ser proposto para representação e previsão da série. As ferramentas empregadas para a análise, modelagem e previsão de uma série constituem os chamados métodos de previsão.

2.1.1 Previsão

A previsão de uma série temporal é a determinação dos prováveis valores que serão assumidos pelas variáveis aleatórias $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+l}$, sendo l o horizonte máximo de previsão. A previsão pode ser classificada como de curto, médio ou longo prazo dependendo do valor associado ao horizonte máximo de previsão. Seja z_{t+k} a previsão de k passos a frente, sendo $1 \leq k \leq l$. Além disso, em relação ao valor de k , a previsão pode ser do tipo 1-passo-à-frente (*single-step*), quando $k = 1$, ou vários-passos-à-frente (*multi-step*), quando $k > 1$.

A maioria dos métodos de previsão permite uma visão razoável do futuro próximo através de uma extrapolação direta do que havia ocorrido no passado.

É interessante ressaltar que qualquer que seja o horizonte de previsão (curto, médio, ou longo prazo), não existe uma forma de definir claramente o horizonte máximo l (Souza, 1989). Este valor dependerá do grau de previsibilidade da série, que, por sua vez, está intimamente relacionado ao erro de previsão de 1-passo-à-frente (Souza, 1989).

2.1.1 Métodos de Previsão

Os problemas de previsão de séries temporais são geralmente abordados sob a perspectiva de métodos estocásticos. Estes métodos são na maioria das vezes fáceis de serem usados e seus parâmetros podem ser rapidamente estimados. Contudo a sua funcionalidade é limitada, dada a natureza linear de seus modelos.

Alternativamente, há um crescente interesse na investigação de Redes Neurais Artificiais para este tipo de tarefa. As RNAs são modelos não-lineares cujos parâmetros são ajustados através de um processo de aprendizado. Entretanto, as RNAs possuem algumas desvantagens,

como a determinação de seus parâmetros e dificuldades de lidar com séries não estacionárias. Estas dificuldades podem ser amenizadas através de uma análise estocástica da série temporal.

2.1.1.1 Métodos Estocásticos

As diversas metodologias estocástica existentes na literatura, independente do tipo de estatística na qual elas se baseiam (clássica ou bayesiana), podem ser classificadas em três grandes categorias distintas: Univariadas, Função de Transferência e Multivariadas (Souza, 1989). Esta classificação é baseada no número de séries temporais utilizadas para a modelagem.

A primeira categoria compreende todos o métodos que se baseiam somente em dados sobre uma série temporal para então prevê-la. A grande maioria dos métodos estocásticos encontra-se nesta categoria.

A categoria de Função de Transferência inclui as metodologias nas quais a série de interesse é descrita, não só pelo seu passado histórico, como também por informações sobre outras séries temporais. A estrutura dos modelos dos métodos de Função de Transferência é ilustrado através da Figura 2.1 .

Figura 2.1: Estrutura dos modelos de Função de Transferência.

É importante ressaltar que tais modelos consideram o sentido da causa-efeito unidirecional. Em outras palavras, as séries $z^1, z^2, \dots, z^{m-1}$, ilustradas como entradas do esquema da Figura 2.1, causam diretamente as observações da série z^m , o que não ocorre no sentido inverso.

Finalmente, o último caso engloba as metodologias cujos modelos envolvem mais de uma série temporal para descrição da série de interesse, mas sem qualquer imposição da direção da causa-efeito existente entre elas. A estrutura básica dos modelos dos métodos multivariados pode ser representada através do diagrama da Figura 2.2. Nesta figura, o vetor $Z = [z^1, z^2, \dots, z^m]^T$ representa informações tanto sobre a série de interesse z^m quanto as demais

séries adicionais $z^1, z^2, \dots, z^{m-1}$. Nos modelos multivariados, as séries adicionais podem tanto influenciar a série de interesse, como sofrer influência da série de interesse em qualquer série adicional.

Figura 2.2: Estrutura dos modelos Multivariados.

Até a década de 60, a única alternativa disponível para a previsão de séries temporais era o método de Decomposição Clássica. Esta metodologia foi uma das pioneiras na formulação univariada e considerava uma série z como sendo composta por quatro componentes não-observáveis distintos: T_t (Tendência), S_t (Sazonalidade), C_t (Ciclo) e a_t (Ruído aleatório). Assim, assumia-se para uma dada observação z_t desta série o seguinte modelo geral :

$$z_t = f(T_t, S_t, C_t, a_t) \quad (2.1)$$

em que, a forma da função f especificava a maneira pela qual estes componentes se relacionam. Estes métodos utilizavam operadores aritméticos para extrair, sucessivamente, estimadores de cada componente.

No início da década de 60, surgiram os métodos Automáticos ou do tipo Caixa-Preta. Tratam-se de metodologias que podem ser diretamente programadas no computador e exigem a mínima intervenção de usuários. Estas metodologias podem ser vistas como métodos de ajustamento de curvas com parâmetros sequencialmente atualizados no tempo. Dentre os métodos do tipo Caixa-Preta, podem ser citados, como por exemplo, os modelos de regressão linear simples, regressão linear múltipla e com transformações de Box & Cox, modelos de Médias Móveis, e os métodos de Amortecimento (ou Alisamento) Exponencial (MAE) (Souza, 1989).

Em 1970, surgiu o método Box & Jenkins que foi um dos grande responsáveis pela formalização da área de análise e previsão de série temporais. O método Box & Jenkins é o principal marco de referência de tempo neste campo e provocou um processo de grande

desenvolvimento, atraindo a atenção dos estatísticos. Devido a sua grande importância, este método será mais detalhadamente estudado na seção 2.2.

Em 1971 é lançado na literatura o primeiro método de previsão univariado e bayesianos que foi proposto por Harrison e Stevens (Harrison e Stevens, 1971). Os métodos bayesianos causaram um grande impacto na área, pois ofereceram uma alternativa clara e promissora para a formulação de verdadeiros sistemas de previsão. A filosofia bayesiana permitiu o relaxamento das restrições de estacionariedade exigidas por quase todos os métodos clássicos. Isto ocorre através de uma evolução dinâmica dos parâmetros de seus modelos.

Nos anos seguintes, outras inovações metodológicas univariadas foram desenvolvidas, tanto para abordagem clássica quanta para a bayesiana. Os métodos de Filtro Adaptativo, Combinação de Previsão e modelos Bayesianos Não Gaussianos (Souza, 1989) são apenas alguns exemplos de tentativa de melhorias desenvolvidas para os métodos univariados.

Os métodos de Função de Transferência surgiram também logo após o aparecimento do método Box & Jenkins. Alguns exemplos desta categoria são o Método Box & Jenkins de Função de Transferência, o Método de Função de Transferência Bayesiana e os Modelos Estruturados (Souza, 1989).

A operacionalização dos métodos multivariados ainda não está colocada de forma clara e acessível para qualquer tipo de usuário. A literatura especializada existente é bastante escassa, podendo apenas ser citados como exemplos os modelos MARMA de Box & Tiao e Espaço de Estados de Mehra (Souza, 1989).

2.1.1.2 Redes Neurais Artificiais

As Redes Neurais Artificiais são modelos matemáticos baseados na estrutura e funcionamento do cérebro humano. Originalmente, elas foram aplicadas em tarefas em que sua fonte inspiradora possui bom desempenho, como, por exemplo, reconhecimento de padrões. Contudo, a característica não linear, a capacidade de mapeamento de entrada-saída e a habilidade de representação de relacionamentos temporais de seus modelos têm chamado a atenção dos pesquisadores da área de previsão de série temporais.

Uma das arquiteturas de RNAs que foi pioneiramente empregada para a previsão de séries temporais foi proposta por Lapedes e Faber (Lapedes e Faber, 1987). Lapedes e Faber criaram uma RNA do tipo MLP cujos neurônios da camada de entrada representavam algumas observações passadas $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-n}$ de uma série temporal. Estas observações eram utilizadas pela rede para gerar sua previsão em um neurônio da camada de saída. Infelizmente, esta

abordagem não é parcimoniosa e a quantidade de informação passada n tem que ser determinada empiricamente. Consequentemente, várias melhorias têm sido propostas.

Uma destas melhorias é a aplicação conjunta de Redes Neurais Artificiais e do método Box & Jenkins (Drossu & Obradovic, 1996). O objetivo desta abordagem é a utilização de recursos do método Box & Jenkins para a definição de alguns parâmetros livres da arquitetura neural.

Os métodos de poda de RNAs têm sido vastamente utilizados para tornar as Redes Neurais mais parcimoniosas em previsão de séries temporais. Estes métodos são geralmente empregados como uma técnica de seleção de variáveis através da redução sucessiva de arquitetura de rede neural em busca de uma generalização melhor.

Uma outra característica interessante, que alguns modelos de Redes Neurais possuem, é a capacidade de extrair e representar relacionamentos temporais. Isto é realizado através da atribuição de memória às arquiteturas das RNAs. Esta memória pode ser de curto prazo ou de longo prazo. O modelo TDNN utiliza memórias de curto prazo nas camadas intermediárias e de saída. As redes recorrentes de Elman e Jordan fazem o uso de memórias de longo prazo.

2.2 Método Box & Jenkins

O método Box & Jenkins (Box et al., 1970) utiliza integralmente informações teóricas e práticas para construção de modelos para previsão de séries temporais. Grande parte das informações que alimentam este processo são derivadas a partir de dados experimentais. A Figura 2.3 ilustra as etapas de identificação, estimação e checagem de modelos que formam o método.

Figura 2.3: Etapas para Previsão de Séries Temporais através do método Box & Jenkins.

A fase de identificação inicia-se a partir da escolha de uma classe geral de modelos (por exemplo, os modelos lineares). Dentro desta classe, métodos de identificação são empregados para a determinação da subclasse de modelo mais apropriada como, por exemplo, modelos auto-regressivos de ordem p . Esta identificação de subclasse permite ainda a determinação de alguns parâmetros preliminares, como a ordem do modelo.

Em seguida, o modelo identificado é adaptado à série temporal através da estimação de seus parâmetros em termos da maximização da função de verossemelhança.

Finalmente, a validade do modelo selecionado pode ser verificada, buscando identificar eventuais falhas e suas possíveis causas. Se o modelo escolhido não for adequado, os estágios de identificação, estimação e verificação são repetidos até que uma representação aceitável seja obtida.

Como um dos objetivos de trabalho é utilizar um método de construção de arquiteturas de Redes Neurais baseados no método Box & Jenkins, as duas próximas subseções enfocarão os principais componentes, que são os modelos Box & Jenkins e a técnica empregada para identificá-los, para execução desta tarefa.

2.2.1 Modelos

Os modelos de Box & Jenkins são baseados no pressuposto de que uma série temporal com valores sucessivos altamente dependentes pode ser gerada a partir de uma série de ruídos brancos a_t independentes (Box et al., 1970). Esses ruídos geralmente assumem uma distribuição Normal com média $E(a_t) = 0$ e variância $Var(a_t) = \sigma_a^2$. O processo de ruídos a_t é transformado em um processo z_t através de um filtro linear, conforme mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Filtro Linear.

Este filtro linear simplesmente realiza uma soma ponderada dos ruídos das observações anteriores, resultando em um modelo genérico, ilustrado pela Equações 2.2.

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \psi(B)z_t \quad (2.2)$$

em que μ é um parâmetro que determina o nível médio do processo, B é um operador de retardo ($B^k z_t = z_{t-k}$) e $\psi(B)$ é o polinômio característico ou função de transferência do filtro linear, dado pela Equação 2.3.

$$\psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots \quad (2.3)$$

O modelo da Equação 2.2 pode ainda ser simplificado aplicando a construção da Equação 2.4, o que resultaria na representação ilustrada pela Equação 2.5.

$$\tilde{z}_t = z_t - E(z_t) \quad (2.4)$$

$$\tilde{z}_t = \psi(B)a_t \quad (2.5)$$

Se o polinômio $\psi(B)$, seja ele finito ou infinito, for convergente para $|B| \leq 1$, o filtro linear é estável e o processo $\tilde{z}_t$ é estacionário.

Uma série temporal pode também ser equivalentemente representada como uma combinação linear de seus valores passados, como ilustram as Equações 2.6 e 2.7.

$$z_t = \mu + a_t + \pi_1 z_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \dots =$$

$$(1 - B\pi_1 - B^2\pi_2 - \dots)z_t = \pi(B)z_t = \mu + a_t \quad (2.6)$$

$$\pi(B)\tilde{z}_t = a_t \quad (2.7)$$

O processo representado pela Equação 2.7 é inversível se o polinômio $\pi(B)$ for convergente para $|B| < 1$.

Os modelos genéricos das Equações 2.5 e 2.7 não são muito úteis na prática, devido ao número infinito de parâmetros ψ_j e π_j que devem ser estimados. Assim, são necessários modelos que sejam parcimoniosos. Em outras palavras, tais modelos devem ser capazes de representar uma série temporal da maneira mais simplificada possível. Os modelos Box & Jenkins seguem este pressuposto. Suas principais características serão apresentadas a seguir.

2.2.1.1 Modelos Lineares Estacionário

Os dois modelos Box & Jenkins primordiais que podem ser usados para representar séries temporais estacionárias são o *Modelo Auto-regressivo de ordem p* ($AR(p)$) e o *Modelo Médias Móveis de ordem q* ($MA(q)$). O modelo *Auto-regressivo e Médias Móveis de ordem p e q* ($ARMA(p,q)$) é apenas uma combinação das características dos modelos anteriores.

2.2.1.1.1 Modelo AR(p)

O modelo $AR(p)$ descreve basicamente a observação z_t de uma série temporal como uma soma ponderada de p valores passados $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}$ adicionado a um ruído branco atual a_t e a uma constante μ . A Equação 2.8 ilustra formalmente tal descrição:

$$z_t = \mu + a_t + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} \quad (2.8)$$

em que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ são os parâmetros ajustáveis e p é a ordem do modelo. O ruído branco a_t geralmente possui distribuição normal com $E(a_t) = 0$ e $Var(a_t) = \sigma_a^2$.

A aplicação da construção ilustrada pela Equação 2.4 resulta em um modelo simplificado, mostrado pela Equações 2.9 e 2.10.

$$\tilde{z}_t = a_t + \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} \quad (2.9)$$

$$\phi_p(B) \tilde{z}_t = a_t \quad (2.10)$$

em que $\phi_p(B)$ é o polinômio característico do modelo $AR(p)$ ilustrado através da Equação 2.11.

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (2.11)$$

A comprovação da estacionaridade do modelo $\tilde{z}_t$ é realizada verificando se o polinômio $\psi(B) = \phi_p^{-1}(B)$ é convergente para $|B| \leq 1$. Isto significa que os módulos das raízes G_i^{-1} , $i=1, 2, \dots, p$ do polinômio da Equação 2.11 devem estar fora do círculo de raio unitário ($|G_i^{-1}| > 1$).

A média de um modelo auto-regressivo estacionário é calculada pela Equação 2.12 a partir do processo z_t da Equação 2.8, uma vez que a sua versão simplificada $\tilde{z}_t$ possui média nula. Ambas as representações apresentam a mesma variância, cujo cálculo pode ser mais facilmente realizado a partir da versão simplificada, conforme ilustra a Equação 2.13.

$$E(z_t) = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \quad (2.12)$$

$$Var(\tilde{z}_t) = \gamma_0 = \sigma_a^2 + \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_j = \frac{\sigma_a^2}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j} \quad (2.13)$$

A auto-covariância γ_j é determinada através do valor esperado $E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t+j})$, o que resulta no cálculo recursivo dado pela Equação 2.14.

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E[(\tilde{z}_t)(a_{t+j} + \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{z}_{t+j-i})] = E(\tilde{z}_t a_t) + E(\sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{z}_{t+j-i} \tilde{z}_t) = \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i E(\tilde{z}_{t+j-i} \tilde{z}_t) = \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{j-i} \end{aligned} \quad (2.14)$$

A auto-correlação ρ_j é facilmente calculada a partir da divisão da auto-covariância da Equação 2.14 pela variância do processo determinada pela Equação 2.13.

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \sum_{i=1}^p \phi_i \frac{\gamma_{j-i}}{\gamma_0} = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{j-i} \quad (2.15)$$

As equações geradas a partir da definição da auto-correlação ρ_j para diferentes valores de $j = 1, 2, \dots, p$ são conhecidas como equações de Yule-Walker. Estas equações podem também ser representada através da Equação 2.16.

$$\phi_p(B) \rho_j = 0 \quad (2.16)$$

A solução das equações de Yule-Walker em função das raízes G_i^{-1} , $i=1, 2, \dots, p$ do polinômio $\phi_p(B)=0$ é escrita pela Equação 2.17, que permite analisar o comportamento da função de auto-correlação (FAC).

$$\rho_j = A_1 G_1^j + A_2 G_2^j + \dots + A_p G_p^j \quad (2.17)$$

em que $A_1, A_2, \dots, A_p$ são constantes. Se o modelo é estacionário, as raízes G_i^{-1} , $i=1, 2, \dots, p$ são números complexos com módulos $|G_i^{-1}| > 1$ e, por consequência, $|G_i| \leq 1$. Isto significa que ρ_j decai exponencialmente e/ou oscilando a medida que o valor de j aumenta. Tal fato resulta em um comportamento similar ao ilustrado pela Figura 2.5.

Figura 2.5: Comportamento da função de auto-correlação de um $AR(p)$.

A ordem p do modelo $AR(p)$ é determinada através da verificação do comportamento da função de auto-correlação parcial (FACp). Dado um modelo $AR(k)$, pode-se denotar ϕ_{kj} e ϕ_{kk} como sendo respectivamente o j -ésimo e o último coeficiente deste modelo. Assim, a Equação 2.18 representa a Equação de Yule-Walker para o processo considerado.

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \phi_{k2} \rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk} \rho_{j-k} \quad (2.18)$$

A função de auto-correlação parcial (FACp) é determinada pelo valor do parâmetro ϕ_{kk} que é calculado a partir da função de auto-correlação, através da suposição de que o processo é gerado por um modelo $AR(k)$. Desta forma, a função de auto-correlação parcial possui o comportamento ilustrado através da Equação 2.19.

$$\begin{aligned}\phi_{kk} &\neq 0, k \leq p \\ \phi_{kk} &= 0, k > p\end{aligned}\tag{2.19}$$

O valor da FACp é diferente de zero somente para valores de k menores do que a ordem p do processo auto-regressivo $AR(p)$. Os valores da função de auto-correlação parcial se anulam para qualquer valor de k maior do que a ordem do processo.

2.2.1.1.2 Modelo MA(q)

O modelo $MA(q)$, ilustrado pela Equação 2.20, representa o valor z_t de uma série temporal como a média do processo μ e o ruído branco a_t , adicionados a uma soma ponderada de q ruídos brancos passados independentes $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}$:

$$z_t = \mu + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}\tag{2.20}$$

em que $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ são os parâmetros e q é a ordem do modelo.

A transformação da Equação 2.4 permite simplificar o modelo da Equação 2.20, produzindo as representações equivalentes ilustradas pelas Equações 2.21 e 2.22.

$$\tilde{z}_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}\tag{2.21}$$

$$\tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t\tag{2.22}$$

em que $\theta_q(B)$ é o polinômio característico do modelo $MA(q)$ definido pela Equação 2.23.

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q\tag{2.23}$$

Um modelo $MA(q)$ é sempre estacionário, pois o polinômio $\theta_q(B)$ é finito, o que torna $\psi(B) = \theta_q(B)$ sempre convergente para $|B| \leq 1$.

Pelas mesmas razões do processo $AR(p)$, a média e a variância de um modelo $MA(q)$ são calculadas respectivamente a partir da representação original e da versão simplificada do processo, conforme ilustram as Equações 2.24 e 2.25.

$$E(z_t) = \mu \quad (2.24)$$

$$Var(\tilde{z}_t) = \gamma_0 = \sigma_a^2 \left(1 + \sum_{j=1}^q \phi_j^2 \right) \quad (2.25)$$

A auto-covariância γ_j é calculada determinando-se o valor esperado $E(\tilde{z}_t, \tilde{z}_{t+j})$ através da Equação 2.26.

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t+j} - \theta_1 a_{t+j-1} - \dots - \theta_q a_{t+j-q})] = \\ &= \begin{cases} \sigma_a^2 \left(-\theta_j + \sum_{i=1}^q \theta_i \theta_{j-i} \right), & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

O cálculo da auto-correlação ρ_j se dá diretamente a partir da razão entre a auto-covariância da Equação 2.26 e variância ilustrada pela Equação 2.25:

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_j + \sum_{i=1}^q \theta_i \theta_{j-i}}{1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2}, & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases} \quad (2.27)$$

A observação do comportamento da função de auto-correlação, ilustrado pela Figura 2.6, fornece subsídios suficientes para identificar um modelo médias móveis e, além disso, determinar a sua ordem q . Ao contrário do modelo $AR(p)$, a queda exponencial não se prolonga infinitamente. A partir de valores de j maiores que a ordem q do processo, os valores da função de auto-correlação se anulam, conforme ilustra a Equação 2.27.

Figura 2.6: Comportamento da função de auto-correlação de um $MA(q)$.

2.2.1.1.3 Modelo ARMA(p,q)

O modelo $ARMA(p,q)$ é uma combinação das características dos dois modelos anteriores. Como pode-se observar na Equação 2.28, um valor de uma série temporal representada por este modelo é definido a partir de uma soma ponderada de p valores e q ruídos independente anteriores.

$$z_t = \mu + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.28)$$

A descrição do modelo dada pela Equação 2.28 pode ser simplificada, resultando nas Equações 2.29 e 2.30.

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.29)$$

$$\phi_p(B) \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.30)$$

O modelo $ARMA(p,q)$ é estacionário se o polinômio $\psi(B) = \theta_q(B) \phi_p^{-1}(B)$ converge para $|B| \leq 1$. Assim, este modelo é estacionário se a sua parte auto-regressiva for estacionária.

A função de auto-covariância é calculada como o valor esperado da multiplicação de $\tilde{z}_t$ por $\tilde{z}_{t-k}$, resultando na fórmula genérica ilustrada pela Equação 2.31.

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} + \gamma_{za}(j) - \theta_1 \gamma_{za}(j-1) - \theta_2 \gamma_{za}(j-2) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(j-q) \quad (2.31)$$

em que $\gamma_{za}(j) = E(\tilde{z}_{t-j} a_t)$ é a função de correlação cruzada entre a série z e o ruído a_t . Uma vez que $\tilde{z}_{t-j}$ depende somente de ruídos que ocorreram até o instante $t-j$, esta função de correlação cruzada possui o comportamento ilustrado pela Equação 2.32.

$$\begin{aligned} \gamma_{za}(j) &= 0, j > 0 \\ \gamma_{za}(j) &\neq 0, j \leq 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

A função auto-correlação do modelo $ARMA(p,q)$ é sempre influenciada pela sua porção auto-regressiva. A parte médias móveis apenas atuará efetivamente no comportamento da FAC quando existir a correlação cruzada entre a série $\tilde{z}$ e o ruído a_t . Isso acontece somente para valores de j menores que a ordem q da porção médias móveis. A Equação 2.33 resume tal comportamento da função de auto-correlação.

$$\rho_j = \begin{cases} \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, & j \geq q+1 \\ \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p} + \frac{\gamma_{za}(j)}{\gamma_0} - \theta_1 \frac{\gamma_{za}(j-1)}{\gamma_0} - \theta_2 \frac{\gamma_{za}(j-2)}{\gamma_0} - \dots - \theta_q \frac{\gamma_{za}(j-q)}{\gamma_0}, & j \leq q \end{cases} \quad (2.33)$$

2.2.1.2 Modelo Lineares Não Estacionários

Os modelos Box & Jenkins não-estacionários foram elegantemente estendidos a partir do modelos estacionários. A idéia principal consiste em aplicar transformações sobre uma dada série temporal no sentido de torná-la estacionária. Assim sendo, é possível identificar e ajustar um dos modelos descritos na seção anterior para a série modificada.

O mais famoso representante desta subclasse de modelos é o *Auto-regressivo e Média Moveis Integrado de ordens p e q e o número de operações de diferenciação d* ($ARIMA(p,d,q)$). Contudo, antes de apresentar os aspectos mais relevantes do $ARIMA(p,d,q)$ será discutido um exemplo bastante simples de modelo não estacionário conhecido como *random walk*. Tal exemplo permitirá ilustrar mais facilmente os conceitos básicos do modelo $ARIMA(p,q,d)$.

2.2.1.2.1 Modelo Random Walk

Seja o modelo $AR(1)$ ilustrado pela Equação 2.34:

$$\tilde{z}_t = a_t + \phi_1 \tilde{z}_{t-1} \quad (2.34)$$

onde $\phi_1(B) = 1 - \phi_1 B$ é o polinômio característico do processo. O modelo é estacionário se o polinômio $\psi(B) = \frac{1}{1 - \phi_1 B}$ for convergente para $|B| \leq 1$. Isso significa que a estacionaridade será garantida quando $|\phi_1| < 1$ para $|B| \leq 1$. Supondo que o parâmetro ϕ_1 seja igual a 1, o modelo da Equação 2.35 passa a ser não estacionário.

$$\tilde{z}_t = a_t + \tilde{z}_{t-1} \quad (2.35)$$

Este modelo é conhecido como *random walk* e utiliza somente o valor anterior da série para previsão do próximo passo. A média e a variância de um modelo *random walk* são nulas e as funções de auto-covariância e auto-correlação são constantes, conforme ilustram as Equações 2.36 e 2.37.

$$\gamma_j = E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-j}) = E[(\tilde{z}_{t-1} + a_t) \tilde{z}_{t-j}] = E(\tilde{z}_{t-1} \tilde{z}_{t-j}) = \gamma_{j-1} \quad (2.36)$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} = \rho_{j-1} \quad (2.37)$$

O cálculo recursivo da auto-correlação realizada pela Equação 2.37 e o fato de que $\rho_0 = 1$ provocam o comportamento apresentado pela Figura 2.7.

Figura 2.7: Comportamento da função de auto-correlação de um Random Walk.

Assim, para concluir que um processo com média nula, variância nula e função de auto-correlação constante é *random walk*, basta construir o processo $\tilde{w}_t = \tilde{z}_t - \tilde{z}_{t-1}$ e provar que se trata de um ruído branco.

2.2.1.2.2 Modelo ARIMA(p,d,q)

O modelo *ARIMA* (p,q,d) é derivado a partir do modelo *ARMA* (p,q) e pode eliminar tendências lineares e mudança de níveis. Como foi visto anteriormente, o modelo *ARMA* (p,q) é estacionário se sua parte auto-regressiva for estacionária. Em outras palavras, as raízes G_t^{-1} do polinômio $\phi_p(B)$ têm que estar fora do raio de círculo unitário para $|B| < 1$. Assim, seja o modelo ilustrado pela Equação 2.38:

$$\varphi(B)\tilde{z}_t = \theta_q(B)a_t \quad (2.38)$$

em que $\varphi(B)$ é o polinômio da parte auto-regressiva do processo. Vamos supor que $\varphi(B)$ possui p raízes fora do círculo de raio unitário e d raízes iguais a 1. Assim, pode-se escrever:

$$\varphi(B) = \phi_p(B)(1 - B)^d \quad (2.39)$$

em que $\phi_p(B)$ é o polinômio característico da parte auto-regressiva estacionária definido através da Equação 2.11. Denotando o operador de diferença $\nabla = (1 - B)$, o modelo da Equação 2.38 pode ser representado através da Equação 2.40:

$$\phi_p \nabla^d \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.40)$$

que é chamado de modelo Auto-Regressivo e Médias Móveis Integrado de ordens p e q e diferenciação d ($ARIMA(p,d,q)$).

Em termos práticos, o modelo $ARIMA(p,d,q)$ transforma uma série temporal não-estacionária $\tilde{z}_t$ em uma série temporal estacionária $\tilde{w}_t$ através da aplicação de d operações de diferenciação, conforme ilustrada pela Equação 2.41.

$$\tilde{w}_t = \nabla^d \tilde{z}_t = (1 - B)^d \tilde{z}_t \quad (2.41)$$

Desta forma, a série $\tilde{w}_t$ pode ser representada por alguns dos modelos estacionários descritos anteriormente. A título de exemplo, as Equações 2.42 e 2.43 apresentam como seria definido $\tilde{w}_t$ para uma ou duas operações de diferenciação, respectivamente.

$$w_t = (1 - B)z_t = z_t - Bz_t = z_t - z_{t-1} \quad (2.42)$$

$$w_t = (1 - B)^2 z_t = (1 - 2B + B^2)z_t = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2} \quad (2.43)$$

2.2.2 Identificação do Modelo

Um dos métodos de identificação do modelo Box & Jenkins mais apropriados para representar uma dada série temporal é baseado no comportamento das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial. Esta análise consiste na comparação do comportamento teórico destas funções com o comportamento de seus estimadores calculados a partir da série (Box et al., 1970).

A ocorrência de uma queda exponencial lenta da FAC indica não estacionaridade, levando à necessidade de executar derivações na série temporal. O comportamento da FAC de um $AR(p)$ é completamente diferente da FAC de um $MA(q)$, conforme ilustram as Figuras 2.3 e 2.4. A FAC de um $AR(p)$ apresenta uma queda exponencial, com ou sem oscilações, que

prossegue até o infinito. A FAC de um $MA(q)$ apresenta valores nulos a partir da ordem q do processo. Mesmo assim, é necessário avaliar a função de auto-correlação parcial para distinguir entre um modelo $AR(p)$ e um $ARMA(p, q)$.

A avaliação do comportamento das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial é realizada a partir de suas estimativas. Dadas as amostragens $z_1, z_2, \dots, z_N$ de uma série temporal, é possível calcular o estimador r_j da FAC (Box et. al, 1970) através da Equação 2.44.

$$r_j = \frac{c_j}{c_0} \quad (2.44)$$

em que c_k e c_0 são os estimadores da função de auto-covariância e da variância da série temporal que são calculados através da Equação 2.45.

$$c_j = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} (z_i - \bar{z})(z_{i+j} - \bar{z}) \quad (2.45)$$

O valor $\bar{z}$ é a média estimada através da Equação 2.46.

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (2.46)$$

O estimador da função de auto-correlação parcial é calculado através da aplicação recursiva das Equações 2.47 e 2.48.

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{k,j} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \hat{\phi}_{k,k-j+1} \quad (2.47)$$

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{r_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k,j} r_{p+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k,j} r_j} \quad (2.48)$$

A seguir serão apresentadas as Redes Neurais Artificiais que é um método alternativo de previsão que vêm atraindo a atenção de diversos pesquisadores da área.

2.3 Redes Neurais

Historicamente, as Redes Neurais Artificiais surgiram do interesse de produzir um modelo computacional capaz de desempenhar funções similares às realizadas pelo cérebro humano. Desta forma, uma RNA pode ser sucintamente definida como:

Um processador paralelo e distribuído que possui uma tendência natural de armazenar conhecimento experimental e torná-lo disponível para o uso. Ele se assemelha ao cérebro humano em dois aspectos:

- 1. O conhecimento é adquirido pela rede através de um processo de aprendizagem;*
  - 2. A força de conexão entre as unidades ou neurônios, conhecidos como pesos sinápticos ou simplesmente pesos, são utilizados para armazenar o conhecimento.*
- (Haykin, 1994).*

A estrutura e a capacidade de aprendizagem das RNAs são apresentadas em maiores detalhes a seguir:

2.3.1 Estrutura

A unidade fundamental de processamento de informação de uma RNA é conhecida como *neurônio*. A organização e estrutura das conexões existentes entre os neurônios definem a *arquitetura* da rede.

2.3.1.1 Neurônio

O neurônio artificial é um processador muito simples que é responsável pelo processamento do conhecimento adquirido pela rede. Em termos estruturais, tais neurônios são genericamente compostos por um conjunto de conexões de entrada, um corpo celular, uma função de ativação, uma função de saída e um terminal de saída, conforme ilustra a Figura 2.8.

Figura 2.8: Neurônio Artificial

As conexões são canais de comunicação entre neurônios. A cada conexão é associada um peso sináptico que representa a sua intensidade.

O corpo celular realiza uma soma ponderada de cada estímulo de entrada pelo seu peso correspondente. Esta soma quando subtraída de um termo limiar θ (*threshold*) produz a entrada da rede, conforme ilustra a Equação 2.49.

$$net_j(i) = \sum_{i=1}^N w_{ji}(i)x_i - \theta \quad (2.49)$$

A função de ativação $f(net_j(i))$ determina o estado de ativação de um neurônio. O estado de ativação pode assumir valores binários (0 para inativo e 1 para ativo), bipolares (-1 e 1) ou reais. As funções de ativação mais conhecidas são:

1. Função Sinal $\left(f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 0 \\ +1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \right)$ que gera saídas binárias ou bipolares.
2. Função Identidade ($f(x) = x$) que gera estados de ativação com valores reais.
3. Função Logística $\left(f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \right)$ que produz valores reais entre 0 e 1 como estados de ativação.
4. Função Tangente Hiperbólica ($f(x) = \tanh(x)$) que produz valores reais entre -1 e 1 como estado de ativação.

A função de saída $o(f(net_j(t)))$ é computada sobre o seu estado de ativação e geralmente é uma função identidade.

2.3.1.2 Arquitetura

Os neurônios de uma RNA são geralmente dispostos em camadas. De uma maneira genérica, as arquiteturas apresentam uma camada de entrada, zero ou mais camadas intermediárias ou escondidas e uma camada de saída.

A camada de entrada é responsável apenas pela captação dos estímulos externos e sua distribuição para a camada intermediária ou de saída seguinte. A camada de saída apresenta apenas a resposta produzida pela rede para uma dada entrada. Entre as camadas de entrada e saída pode haver uma ou mais camadas intermediárias, cujas saídas dos neurônios não são acessadas por procedimentos externos à rede.

Estas camadas são geralmente completamente conectadas. Isto significa que os neurônios de uma dada camada, excluindo a camada de saída, estão interligados a todos os neurônios da camada posterior.

As arquiteturas das primeiras RNAs não apresentavam camadas intermediárias, como por exemplo, as *Single Layered Perceptron* (SLP), *Adaptative Linear Element* (ADALINE) e *Many ADALINE* (MADALINE) (Haykin,1994). Posteriormente, surgiram as redes *Multi Layered Perceptron* (MLP) com uma ou mais camadas intermediárias que permitem a realização de mapeamentos não lineares de funções mais complexas. Estes tipos de arquiteturas são chamadas de *feedforward*, uma vez que os estímulos exteriores produzem sinais dentro da rede que fluem da camada de entrada em direção à saída.

Além de RNAs *feedforward*, existem redes recorrentes, cujos os neurônios são re-alimentados com as saídas geradas em instantes anteriores por neurônios da mesma camada ou de camadas posteriores (Haykin,1994).

2.3.2 Aprendizagem

As Redes Neurais possuem a habilidade de “*aprender*” relacionamentos pertencentes a um dado conjunto de exemplos ou padrões, melhorando seu desempenho ao longo do tempo. Esta aprendizagem ocorre através de um processo iterativo de ajustes dos parâmetros livres da sua arquitetura (pesos sinápticos e limiares).

Ao conjunto de regras bem utilizadas para ajustar os parâmetros da RNA dá-se o nome de algoritmo de aprendizagem. Os algoritmos podem ser por correção de erros, competição,

hebbianos ou máquinas de Boltzmann. A maneira como os exemplos são apresentados para a rede define os três paradigmas de aprendizado: supervisionado, reforço e não supervisionado. No aprendizado supervisionado, existe a figura externa de um professor indicando exatamente o que a Rede Neural deve aprender. No paradigma de aprendizagem por reforço a rede aprende através de um processo de recompensa, quando seu desempenho é melhorado, ou punição, caso contrário. No aprendizado não supervisionado, a Rede Neural aprende exemplos por si próprio, sem nenhum auxílio externo.

A maioria das aplicações de RNAs envolvem algoritmos de aprendizagem supervisionada por correção de erros. *Backpropagation* (Rumelhart et. al, 1986) é o algoritmo mais empregado para a treinamento deste tipo de redes. As seções seguintes apresentam maiores detalhes sobre este algoritmo e suas possíveis estratégias de aperfeiçoamento.

2.3.2.1 Algoritmo Backpropagation

A versão original do algoritmo *Backpropagation* ajusta os pesos de uma RNA para cada padrão ou exemplo apresentado individualmente. O processo continua até que se obtenha um desempenho global aceitável.

Os padrões podem ser representados por um vetor $X_p = [x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN}]^T$ e são submetidos à RNA através da sua camada de entrada que simplesmente os redistribui para a primeira camada intermediária. Cada neurônio da próxima camada recebe os sinais provenientes da camada anterior, pondera-os pelos pesos das suas conexões e gera um novo sinal para a camada posterior. O processo continua até chegar à camada de saída, onde os neurônios irão produzir a resposta da RNA para o padrão em questão. Neste ponto, inicia-se os ajustes de pesos e limiares que irão acontecer da camada de saída em direção à camada de entrada.

Os ajustes são realizados de maneira a minimizar a função de erro para um dado padrão, que é ilustrada pela Equação 2.50:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_j (d_{pj} - y_{pj})^2 \quad (2.50)$$

em que d_p é a saída desejada para o padrão p e y_p é a saída produzida pela RNA para o padrão em questão.

A derivada parcial $\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}}$ rege o ajuste dos pesos, denotando o aspecto de gradiente

descendente do algoritmo. Esta derivada mede a contribuição do peso w_{ji} no erro da RNA para um dado padrão p . Se esta derivada for positiva, o peso w_{ji} está provocando um aumento da diferença entre a saída da rede e a saída desejada. Assim, a sua intensidade tem que ser diminuída para aproximá-las e, conseqüentemente, reduzir o erro. Se a derivada for negativa, o peso w_{ji} está contribuindo para que a resposta produzida pela rede seja mais próxima da desejada. Desta forma, o seu valor deve ser aumentado. A Equação 2.51 define matematicamente como os pesos da rede são modificados.

$$\Delta w_{ji} = w_{ji}(t+1) - w_{ji}(t) = \eta \left(-\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}}(t) \right) \quad (2.51)$$

em que w_{ji} é o peso da conexão existente entre os neurônios i e j , j é o neurônio cujo o peso se deseja ajustar, i é um neurônio da camada anterior e η é a taxa de aprendizagem. O cálculo da derivada da Equação 2.51 resulta na regra genérica de ajuste de pesos do algoritmo *Backpropagation* ilustrada pela Equação 2.52.

$$w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + \eta \delta_j y_i \quad (2.52)$$

em que $\delta_j = (d_{pj} - y_{pj})$ se o neurônio j pertencer a camada de saída e $\delta_j = \sum_k \delta_k w_{jk}$ se o neurônio j pertencer a qualquer camada intermediária da RNA.

A escolha de uma taxa de aprendizagem η apropriada influencia fortemente o tempo necessário para a convergência do algoritmo. Se esta taxa for muito pequena, muitos passos podem ser necessários para alcançar uma solução aceitável. Por outro lado, a escolha de uma taxa elevada pode provocar oscilações que impediriam a convergência. Uma possível medida para amenizar este problema é a introdução do termo *momentum* α que quantifica o grau de importância da variação de peso do passo anterior no passo atual:

$$w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + \eta \delta_j y_i + \alpha [w_{ji}(t) - w_{ji}(t-1)] \quad (2.53)$$

Embora o termo *momentum* teoricamente torne o algoritmo de aprendizagem mais estável e acelere a convergência em regiões planas da função de erro, a escolha otimizada do parâmetro α também não é uma tarefa simples.

2.3.2.2 Algoritmo Rprop

Diversos algoritmos têm sido propostos para otimizar o algoritmo *Backpropagation* através de algum tipo de adaptação de seus parâmetros de aprendizagem. Estes algoritmos podem basicamente ser divididos em duas categorias: adaptação global e local (Schiffmann et al., 1992).

As técnicas de adaptação global utilizam conhecimento da situação da RNA como um todo (direção dos ajustes anteriores dos pesos) para modificar parâmetros globais. Em outras palavras, elas tentam encontrar parâmetros de aprendizagem adequados (taxa de aprendizagem e termo momentum) durante a execução do algoritmo.

As técnicas de adaptação local empregam somente informações específicas sobre cada peso (derivada parcial) para adaptar parâmetros que lhe são relacionados. Estas estratégias de adaptação local se mostraram superiores aos algoritmos de adaptação global em um relatório técnico recentemente publicado (Schiffmann et al., 1992). Entre estas técnicas, podem ser citados os algoritmos *Delta-Bar-Delta* (Haykin, 1994), *Quickprop* (Schiffmann et al., 1992) e o *RPROP* (Riedmiller e Braun, 1993).

O algoritmo de aprendizagem *RPROP* (*Relisient Backpropagation*) foi proposto por Martin Riedmiller e Hieinrich Braun e executa uma adaptação direta do ajuste dos pesos baseada em informações do gradiente local. Ao contrário do *Backpropagation*, este algoritmo emprega uma regra de treinamento *batch*, que utiliza a função de erro da Equação 2.54 calculada sobre todos os padrões de treinamento para direcionar o ajuste de pesos.

$$E = \sum_p \sum_j (d_{pj} - y_{pj})^2 \quad (2.54)$$

em que p é índice para os padrões ou exemplos de treinamento e j é o índice para os neurônios da camada de saída.

Ao contrário de outras técnicas de adaptação local desenvolvidas anteriormente, o esforço de adaptação do algoritmo *RPROP* não é determinado diretamente pelo procedimento de gradiente descendente. Um valor de adaptação individual $\Delta_{pj}(t)$ foi introduzido para determinar

o tamanho do ajuste de cada peso. Estes valores de adaptação evoluem durante o processo de aprendizagem de acordo com uma visão local da função de erro. O ajuste destes valores é ilustrado pela Equação 2.55.

$$\Delta_{ji}(t) = \begin{cases} \eta^+ \Delta_{ji}(t-1), & \text{se } \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t-1) \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t) > 0 \\ \eta^- \Delta_{ji}(t-1), & \text{se } \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t-1) \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t) < 0 \\ \Delta_{ji}(t-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.55)$$

em que $0 < \eta^- < 1 < \eta^+$. No início da execução do algoritmo, os valores de atualização são inicializados com Δ_0 , o que determina o tamanho do primeiro ajuste dos pesos. A escolha de Δ_0 não é tão crucial e o valor sugerido em (Riedmiller e Braun, 1993) é $\Delta_0 = 0.1$. Para que não haja problemas de estouro de variáveis de ponto flutuante, os valores de atualização Δ_{ji} são limitados inferiormente e superiormente por Δ_{min} e Δ_{max} , respectivamente. Os valores sugeridos (Riedmiller e Braun, 1993) para estes parâmetros são $\Delta_{min} = 1.0 \times 10^{-6}$ e $\Delta_{max} = 50.0$.

Se a derivada parcial da função de erro em relação ao peso w_{ji} mantém o seu sinal, o valor de atualização Δ_{ji} é suavemente incrementado por um fator η^+ para acelerar a convergência em regiões planas. Por outro lado, se esta derivada muda de sinal, o valor de atualização é decrementado por um fator η^- , pois o último ajuste foi maior do que o necessário e o algoritmo ultrapassou um ponto de mínimo. Se uma das derivadas parciais do instante t ou $t+1$ for nula, o valor de atualização se mantém. Com o intuito de reduzir o número de parâmetros livres do algoritmo, as taxas de decréscimo η^- e acréscimo η^+ dos valores de atualização foram fixadas pelos autores (Riedmiller e Braun, 1993) em 0.5 e 1.2, respectivamente. Uma vez calculados os valores de atualização, o ajuste dos pesos é dado pelas Equações 2.56 e 2.57.

$$\Delta w_{ji}(t) = \begin{cases} -\Delta_{ji}(t), & \text{se } \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t) > 0 \\ +\Delta_{ji}(t), & \text{se } \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.56)$$

$$w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + \Delta w_{ji}(t) \quad (2.57)$$

Se a derivada parcial for positiva (indicando que o erro está aumentando), o peso é decrementado pelo seu valor de atualização Δw_{ji} . Se esta derivada for negativa (erro está diminuindo), o peso é incrementado por Δw_{ji} . Caso contrário, o peso permanece constante. Contudo, existe uma exceção à regra que ocorre quando a derivada parcial altera seu sinal. Neste caso, o ajuste de peso do passo anterior foi muito grande e um ponto de mínimo foi ultrapassado. Assim, é necessário inverter o sinal do último ajuste de peso através da Equação 2.58.

$$\Delta w_{ji}(t) = -\Delta w_{ji}(t-1), \text{ se } \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t-1) \frac{\partial E}{\partial w_{ji}}(t) < 0 \quad (2.58)$$

Tal inversão pode novamente provocar a alteração do sinal da derivada no próximo passo, resultando em uma dupla punição do valor de atualização. Para que isto seja evitado, é necessário que não haja uma outra adaptação do valor de atualização no passo seguinte. Na prática, isto pode ser realizado determinando $\frac{\partial E(t-1)}{\partial w_{ji}} = 0$ na regra de adaptação de Δw_{ji} da Equação 2.55.

Durante a execução dos algoritmos *Backpropagation*, *Rprop* ou outras regras de aprendizagem supervisionadas, as saídas da rede vão gradativamente se aproximando das saídas desejadas para um conjunto de padrões de treinamento. Embora esta característica seja importante, o aspecto mais desejado da utilização de Redes Neurais é a sua capacidade de generalizar. Em outras palavras, uma RNA deve também manter um desempenho adequado para os padrões que não estavam presentes em seu conjunto de treinamento.

A generalização nem sempre pode ser alcançada e seria interessante que a estabilização do processo de aprendizagem não fosse apenas determinada pelo desempenho alcançado para o conjunto de treinamento. Assim sendo, a capacidade de generalização precisa também ser assegurada.

2.3.3 Generalização

A generalização de uma Rede Neural Artificial diz respeito a sua capacidade de produzir respostas adequadas e coerentes para padrões ou exemplos de teste diferentes daqueles empregados em seu treinamento. A avaliação da generalização pode ser utilizada como critério

de parada do processo de aprendizagem (Haykin, 1994). Assim é estabelecido um compromisso entre o desempenho de treinamento e teste da RNA. Se a RNA extrai relacionamentos demasiadamente específicos do conjunto de treinamento (memorização), seu desempenho de resposta é afetada mesmo para padrões de teste suavemente diferentes dos padrões de treinamento.

Existem três condições que são tipicamente necessárias, embora não suficientes, para a obtenção de uma boa generalização.

A primeira condição exige que as entradas da rede contenham informações suficientes que permitam o aprendizado de uma função matemática capaz de correlacionar-lhes às saídas corretas com um certo grau de precisão. Não se pode esperar que uma RNA aprenda funções que não existem no conjunto de treinamento. A seleção de boas variáveis de entrada e a coleta de dados de treinamento suficientes pode geralmente requisitar mais tempo e esforço gasto do que o próprio treinamento da rede.

A segunda condição determina que a função, que a rede esta tentando aprender, deve de ser um tanto suave. Em outras palavras, pequenas alterações nas entradas não devem, na maior parte do tempo, provocar modificações bruscas em suas saídas. Funções sem este tipo de comportamento apresentam dificuldades para serem generalizadas por RNAs.

Finalmente, a terceira condição determina que os padrões selecionados para o treinamento formem um subconjunto suficientemente grande e representativo a partir de um conjunto total de padrões que se deseje generalizar. A importância desta condição está relacionada ao fato de existir dois tipos de generalização: interpolação e extrapolação. A interpolação se aplica aos casos que estão mais ou menos ao redor dos exemplos de treinamento. Por outro lado, a extrapolação é requisitada para os exemplos que estão fora do alcance dos dados de treinamento. A interpolação é geralmente bastante confiável, o que não se pode dizer da extrapolação. Desta forma, seria adequado possuir um conjunto de treinamento suficientemente grande para evitar a necessidade de extrapolação.

Assim sendo, três fatores influenciam diretamente a capacidade de generalização de uma RNA:

1. Arquitetura;
2. Tamanho e abrangência do conjunto de treinamento;
3. Complexidade do problema em questão.

As técnicas geralmente empregadas para assegurar uma generalização adequada basicamente se preocupam com a arquitetura e o conjunto de dados utilizados para realizar o treinamento. Existem diversas técnicas de estimativa do erro de generalização que podem basicamente ser divididas em duas classes: estimadores algébricos e métodos que particionam o conjunto de dados disponíveis (por exemplo, *Random sub-sampling*, *v-fold cross-validation* e *bootstrapping*). A técnica *Random sub-sampling* é às vezes apenas chamada de *cross-validation* (Prechelt, 1994) e consiste de aplicações sucessivas de particionamentos aleatórios dos dados disponíveis em dados de treinamento e validação. A média dos erros dos dados de validação é considerada como sendo a estimativa do erro de generalização.

O processo de aprendizagem pode enfrentar problemas como *underfitting* e *overfitting*. Arquiteturas muito pequenas, com um número reduzido de parâmetros livres (pesos das conexões e limiares), muitas vezes não são capazes de extrair relacionamentos complexos do conjunto de treinamento, conduzindo ao problema de *underfitting*. Por outro lado, o treinamento de arquiteturas excessivamente grandes pode extrair relacionamentos extremamente específicos do conjunto de treinamento (memorização), até mesmo se confundindo com ruídos, o que provocaria o problema de *overfitting*.

A ocorrência de *overfitting* faz com que as saídas da RNA sejam excessivamente tendenciosas aos padrões de treinamento, enquanto *underfitting* ocasiona o aumento da variância das saídas da RNA. Uma arquitetura teoricamente otimizada deveria ser um meio termo entre estes dois problemas. Em outras palavras, tal arquitetura deveria ser grande suficiente para aprender o necessário sobre o conjunto de treinamento e pequena o suficiente para generalizar.

A escolha da melhor arquitetura através de abordagem empírica têm estimulado o surgimento de outras alternativas mais eficientes. Apesar da existência de outras técnicas, como redes construtivas e algoritmos genéticos, apenas os métodos de poda serão considerados nesta dissertação para desempenhar tal tarefa. O interesse em métodos de poda também se deve a sua habilidade na seleção de variáveis que pode ser aplicado no contexto de séries temporais.

2.3.4 Métodos de Poda de RNAs

Os métodos de poda de RNAs (*pruning methods*) reduzem a quantidade de parâmetros livres das arquiteturas das RNAs com o intuito de minimizar o erro de generalização. De acordo com Reed (Reed, 1993), a maioria dos métodos de poda podem ser divididos em dois grandes grupos:

1. **Métodos de Cálculo de Sensibilidade.** Estes métodos estimam a sensibilidade da função erro em relação a remoção de um elemento (conexão ou neurônio) e eliminam aquele que possui menor efeito. Este método apenas modifica as arquiteturas após elas serem treinadas.
2. **Métodos de Termos de Penalidade.** Tais métodos adicionam termos à função erro para compensar a rede pela escolha de soluções excessivamente eficientes em seu treinamento, evitando *overfitting*. Os métodos de termos de penalidade eliminam conexões durante o processo de aprendizagem, não permitindo que o ajuste de seus pesos ocasione uma queda demasiada do erro de treinamento. Os termos de penalização mais conhecidos são as funções *weigh-decay* (Haykin, 1994).

Embora ambos os grupos aparentem constituir soluções interessantes para o problema de generalização, os métodos de cálculo da sensibilidade parecem ser a escolha mais adequada para a seleção de variáveis em previsão de séries temporais. Esta decisão foi tomada porque tais métodos proporcionam a oportunidade de explicitamente visualizar os elementos de entrada mais relevantes. Isto ocorre em consequência da eliminação das outras entradas sem muita importância.

2.3.4.1 Métodos de Cálculo da Sensibilidade

O procedimento básico dos métodos de poda baseados no cálculo da sensibilidade inicia com o treinamento de uma arquitetura excessivamente grande, provocando *overfitting*. Em seguida, as sensibilidades são calculadas e o primeiro elemento é selecionado para a poda. A arquitetura resultante é então retreinada. Se este retreinamento convergir, novos parâmetros da arquitetura são podados e a rede retreinada. Caso contrário, a última arquitetura é pequena o suficiente para ter uma boa generalização e não levar ao *overfitting*, encerrando então o processo de poda.

Existem três aspectos fundamentais que os métodos de cálculo de sensibilidade devem considerar: quais conexões ou neurônios devem ser selecionados para poda, quando a poda deve ser executada e quando o processo deve terminar.

O aspecto crucial destes métodos é a heurística utilizada para determinar quais conexões ou neurônios devem ser removidos. Algumas heurísticas famosas de poda (Thimm e Fiesler, 1997) são apresentadas a seguir:

2.3.4.1.1 Método da menor magnitude.

A heurística mais simples de poda considera o valor absoluto das conexões como estimativa de sua sensibilidade (Thimm e Fiesler, 1997). Às vezes, esta heurística simples pode conduzir a eliminação de pesos errados. Os menores pesos podem também ser necessários para baixar a taxa de erro.

2.3.4.1.2 Skeletonization.

O método *skeletonization* foi proposto por Mozer e Smolensky (Mozer e Smolensky, 1991) e estima a sensibilidade dos neurônios para podar os menos importantes. A medida de relevância S_i é considerada como a diferença entre o erro ocasionado pela remoção do neurônio e o erro provocado pela sua permanência. O cálculo desta relevância é realizado através da adição de um termo α_i a saída do neurônio i . Assim, o somatório ponderado para neurônio j da camada subsequente passa a ser calculado através da Equação 2.59.

$$net_j = \sum_i w_{ji} \alpha_i y_i \quad (2.59)$$

Se $\alpha_i=0$, o neurônio não tem influência no desempenho da RNA. Por outro lado, se $\alpha_i=1$ o neurônio influencia o desempenho e deve ser mantido. Desta forma, a relevância S_i pode ser expressa através da Equação 2.60.

$$S_i = E_{\alpha=0} - E_{\alpha=1} \quad (2.60)$$

A estimativa de S_i é definida pela derivada da Equação 2.61, que pode ser calculada de forma semelhante ao processo executado pelo algoritmo *Backpropagation*.

$$\hat{S}_i = - \left. \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=1} \quad (2.61)$$

Se a estimativa da relevância cair abaixo de um certo nível, a unidade pode ser eliminada. O problema desta estimativa é que quando a derivada parcial tende a zero, o valor da função erro diminui. Apesar de ser um comportamento desejável pelos algoritmos de gradiente descendente,

isto resulta em uma estimaco fraca da sensibilidade. Assim Mozer e Smolensky sugeriram alterar a funo de erro quadrática através da Equao 2.62.

$$E = \sum_p \sum_j |d_{pj} - y_{pj}| \quad (2.62)$$

2.3.4.1.3 Método de Karnin

E. D. Karnin (Karnin, 1990) propôs uma abordagem para estimar a sensibilidade em relao a remoo de cada conexão e podar os pesos com baixa sensibilidade. A sensibilidade S_{ji} da conexão w_{ji}  definida através da Equao 2.63.

$$S_{ji} = - \frac{E(w_{ji} = w_{ji}^f) - E(w_{ji} = 0)}{w_{ji}^f - 0} w_{ji}^f \quad (2.63)$$

onde w_{ji}^f  o valor do peso depois do treinamento. Em um tpico processo de aprendizagem, os pesos das conexões são geralmente inicializados com pequenos valores aleatório não nulos. Uma vez que o valor de E para $w_{ji}=0$  desconhecido, a declividade da funo de erro  aproximada pela declividade média calculada entre w_{ji}^f e w_{ji}^i ilustrado pela Equao 2.64.

$$S_{ji} \approx - \frac{E(w_{ji} = w_{ji}^f) - E(w_{ji} = w_{ji}^i)}{w_{ji}^f - w_{ji}^i} w_{ji}^f \quad (2.64)$$

onde w_{ji}^i  o valor do peso da conexão no início do treinamento. A estimativa genérica da sensibilidade do método de Karnin  facilmente calculada através da Equao 2.65, cujos termos estão disponíveis durante o processo normal de treinamento.

$$\hat{S}_{ji} = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial E}{\partial w_{ji}} \Delta w_{ji}(n) \frac{w_{ji}^f}{w_{ji}^f - w_{ji}^i} \quad (2.65)$$

No caso especial do algoritmo *backpropagation*, os pesos são ajustados através da Equao 2.51, o que simplifica o cálculo da estimativa ilustrado pela Equao 2.66.

$$\hat{S}_j = -\sum_{n=0}^{N-1} [\Delta w_j(n)]^2 \frac{w_j^f}{w_j^f - w_j^i} \quad (2.66)$$

2.3.4.1.4 Optimal Brain Damage

O método *Optimal Brain Damage* foi proposto por LeCun, Denker e Solla (Le Cun et al, 1990) e seleciona conexões da rede cuja remoção produz pouco efeito no Erro Médio Quadrático (MSE) de treinamento. A heurística aproxima o valor do MSE em um ponto de mínimo do espaço de pesos através de uma expansão quadrática da diagonal da matriz Hessiana. Assim, a sensibilidade é calculada através da Equação 2.67,

$$\hat{S}_j = \frac{1}{2} h_j w_j^2 \quad (2.67)$$

em que h_j é a diagonal da matriz de Hessiana definida através da Equação 2.68:

$$h_{k_i} = \frac{\partial^2 MSE}{\partial w_k \partial w_i} \quad (2.68)$$

2.4 Considerações finais

Atualmente, previsão de séries temporais é uma área bem definida no campo de Estatística devido, em grande parte, ao surgimento do método Box & Jenkins na década de 70. Além de ser responsável pela formalização dos métodos de análise e previsão de séries temporais, o método Box & Jenkins serviu como base para o desenvolvimento metodológico da área. Diversos avanços metodológicos foram sugeridos, principalmente após ao seu aparecimento. A maioria dos modelos apenas se baseiam nos dados históricos da série de interesse. Entretanto, já existem modelos que são também capazes de correlacionar informações referentes a outras adicionais.

Infelizmente, a maioria dos modelos estocásticos de previsão são lineares. Esta limitação têm incentivado a busca por novos métodos alternativos. As RNAs aparentam ser promissoras em previsão de séries temporais. Originalmente, seus modelos são não lineares e, além disso, são capazes de extrair e representar relacionamentos temporais. Finalmente, as arquiteturas das RNAs podem ser modeladas para considerar informação tanto referente apenas a série de interesse quanto sobre séries adicionais.

3. Previsores Neurais

Este capítulo apresenta algumas abordagens de projeto de Redes Neurais para previsão de séries temporais. Inicialmente, a seção 3.1 discute algumas vantagens e desvantagens de métodos de previsão baseados em RNAs. Em seguida, são apresentadas três abordagens de projeto de arquiteturas de Redes Neurais. A seção 3.2 ilustra como as arquiteturas das RNAs podem ser modeladas através da utilização de recursos provenientes do Método Box & Jenkins. A seção 3.3 apresenta uma técnica de seleção de variáveis baseadas nos métodos de poda de RNAs, que também pode ser aplicada no contexto de previsão. A seção 3.4 discute alguns modelos de RNAs com capacidade dinâmica que podem ser muito úteis para o tipo de tarefa em questão. Além disso, a seção 3.5 discute a finalidade e a utilidade de realizar combinações de previsão. Finalmente, a seção 3.6 aponta as principais considerações abordadas neste capítulo.

3.1 *Vantagens e Desvantagens*

Redes Neurais Artificiais supervisionadas têm sido empregadas na solução de diversos problemas práticos de regressão, como previsão de séries temporais. As RNAs apresentam algumas características atraentes que justificam tal interesse. Elas podem aproximar qualquer tipo de função contínua, inclusive funções não-lineares complexas, através de um processo de aprendizagem. Além disso, as RNAs podem generalizar, isto é, são capazes de produzir repostas coerentes e apropriadas para padrões ou exemplos que não foram utilizados em seu treinamento. Em se tratando de previsão, esta característica é bastante desejável.

A princípio, qualquer modelo de RNA capaz de receber um vetor de números reais como entrada e produzir valores reais como saída pode ser utilizada para a previsão de série temporais.

Embora as RNAs consigam extrair um modelo próprio de previsão a partir de treinamento com dados da série temporal, este modelo deve ser sempre parcimonioso. Em outras palavras, ele deve sempre buscar ser o mais simples possível, utilizando somente as variáveis de entrada com maior grau de importância. Desta maneira, a generalização é melhorada e o tempo e esforço de projeto da arquitetura podem ser minimizados.

Assim, um dos pontos de partida para obtenção de uma previsão de qualidade é a busca desta arquitetura otimizada. As técnicas de identificação de modelos do método Box & Jenkins e os métodos de poda como técnicas de seleção de variáveis podem ser ferramentas úteis nesta busca. Além disso, alguns modelos de RNAs possuem propriedades de extração e representação de relacionamentos temporais que podem ser utilizadas com sucesso em previsão de séries

temporais. Finalmente, os resultados individuais dos previsores neurais podem ser combinados por comitês de estimadores visando reduzir a taxa de erro de previsão.

3.2 Sistema Híbrido: RNAs e Método Box & Jenkins

O método Box & Jenkins para análise e previsão de séries temporais pode ser utilizado para aperfeiçoar o projeto de arquiteturas de RNAs tornando-as mais eficientes e parcimoniosas. Uma possível forma de combinação destas duas metodologias foi proposta por Drossu & Obradovic (Drossu e Obradovic, 1996) que definiram um procedimento para o projeto de previsores neurais a partir das etapas do método Box & Jenkins. Este procedimento é descrito pela Figura 3.1.

Figura 3.1: Procedimento de projeto de RNAs para previsão.

A seguir, serão mais detalhadamente apresentadas as etapas mencionadas na figura acima.

3.2.1 Pré-processamento

A etapa de pré-processamento consiste basicamente em transformar uma série não estacionária em outra estacionária e suavizar os dados resultantes. A aplicação de operações de diferenciação de ordem d provenientes do modelo $ARIMA(p,d,q)$ pode eliminar certos tipos de comportamentos não estacionários. A transformação logarítmica ($w_t = \log_{10}(z_t)$) pode facilitar a generalização da rede, reduzindo a sua dificuldade em aprender dados em que pequenas alterações na entrada podem resultar em grandes diferenças na saída.

3.2.2 Identificação do modelo

Teoricamente, as arquiteturas *feedforward* e recorrentes de RNAs podem aproximar uma variação dos modelos Box & Jenkins para tratar os casos de não linearidade (Connor e Martin, 1994).

3.2.2.1 Redes Feedforwards

As RNAs *feedforwards* podem ser empregadas para a aproximação do modelo *Não linear Auto-Regressivo de ordem p* $NAR(p)$ (Drossu e Obradovic, 1996; Connor e Martin, 1994). Este modelo é uma generalização natural do modelo linear $AR(p)$ para o caso não linear, conforme ilustra a Equação 3.1:

$$z_t = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}) + a_t \quad (3.1)$$

em que h é uma função não linear suave e desconhecida. Dado que a_t é um ruído branco com valor esperado $E(a_t) = 0$ e variância $Var(a_t) = \sigma_a^2$, o preditor ótimo de z_t com erro quadrático mínimo é o valor esperado condicional fornecido pela Equação 3.2.

$$\hat{z}_t = E(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}) = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}) \quad (3.2)$$

Este preditor possui a variância σ_a^2 do ruído a_t como erro quadrático médio.

Uma RNA *feedforward* pode ser utilizada justamente para aproximar a função h do modelo $NAR(p)$ através de um treinamento supervisionado. Tal aproximação não linear pode ser realizada através da arquitetura da Figura 3.2, resultando na representação matemática apresentada pela Equação 3.3.

$$\hat{z}_t = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}) \approx \sum_{i=1}^m W_i f\left(\sum_{j=1}^p w_{ij} z_{t-j} + \theta_i\right) \quad (3.3)$$

onde f é uma função não linear suave, limitada e monotônica como, por exemplo, a função logística ou tangente hiperbólica.

As entradas da rede são as observações passadas da série $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}$ as quais são empregada para prever $\hat{z}_t$ em sua saída. Os parâmetros w_i e w_{ij} são estimados a partir de um conjunto de dados de treinamento, produzindo uma estimativa $\hat{h}$ da função h .

Figura 3.2: RNA feedforward para aproximação do modelo $NAR(p)$.

3.2.2.2 Redes Recorrentes

Uma generalização natural do modelo $ARMA(p, q)$ para os casos não lineares é o modelo $NARMA(p, q)$ (Drossu e Obradovic, 1996; Connor e Martin, 1994), cuja descrição é dada pela Equação 3.4:

$$z_t = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}) + a_t \quad (3.4)$$

em que h é uma função desconhecida não linear e suave e a_t é um ruído branco. Se este modelo for inversível, a previsão da série z_t é calculada como o valor esperado condicional da Equação 3.5 com um erro médio quadrático igual a σ_a^2 .

$$\hat{z}_t = E(z_t \mid z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}) = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}) \quad (3.5)$$

A previsão realizada através do modelo $NARMA(p, q)$ pode então ser aproximada através da Equação 3.6, que corresponde a arquitetura da RNA ilustrada pela Figura 3.3 (Drossu e Obradovic, 1996; Connor e Martin, 1994):

$$\hat{z}_t = h(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}) \approx \sum_{i=1}^m W_i f \left(\sum_{j=1}^p w_{ji} z_{t-j} + \sum_{j=1}^q w'_{ji} (z_{t-j} - \hat{z}_{t-j}) + \theta_i \right) \quad (3.6)$$

em que f é uma função suave e não linear semelhante a função logística ou tangente hiperbólica e a diferença $z_{t-j} - \hat{z}_{t-j}$ é o ruído branco a_{t-j} . Esta arquitetura recorrente memorizaria ruídos passados que seriam utilizados como futuras entradas da camada intermediária.

Figura 3.3: RNA recorrente para aproximação do modelo $NARMA(p, q)$.

3.2.2.3 FAC e FACP

Devido à habilidade das RNAs em produzir aproximações dos modelos Box & Jenkins, a análise das estimativas das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial tem sido utilizada para acrescentar informação a priori no projeto da arquitetura neural.

Estas funções poderiam indicar o tipo de arquitetura e dimensionar o número de neurônios na camada de entrada. Por exemplo, se a FAC e a FACp revelam um modelo $AR(p)$ para modelar o comportamento de uma série temporal, isto pode sugerir o uso de uma rede MLP com p neurônios na camada de entrada. Cada um destes neurônios representa uma observação passada da série em questão.

3.2.3 Validação do modelo

O passo de validação verifica a adequação do modelo através da análise de resíduos dos erros de previsão de um conjunto de teste. Este conjunto é geralmente formado pelas últimas observações amostradas da série temporal. Esta checagem também pode ser realizada pela análise do critério de erro de previsão final de Akaike (Akaike, 1970) e pelo critério de informação (Drossu e Obradovic, 1996).

3.2.4 Previsão

Após ser treinada e validada, a rede pode ser utilizada para realizar basicamente dois tipos de previsão: 1-passo-a-frente (*single-step*) ou vários-passos-a-frente (*multi-step*).

A previsão 1-passo-a-frente ocorre quando a rede é utilizada para prever uma única observação futura ($k=1$ passos a frente) de uma dada série temporal. Em aplicações práticas de longo prazo, este tipo de previsão tem pouca utilidade.

Assim, é necessário expandir o horizonte de previsão para $k>1$ passos a frente constituindo a chamada previsão vários-passos-a-frente (*multi-step*). A previsão do tipo vários-passos-a-frente pode ser realizada seguindo um modelo incremental, onde a rede prevê todos os valores intermediários da série ($\hat{z}_t, \hat{z}_{t+1}, \dots, \hat{z}_{t+k}$) até k passos a frente, usando os valores previstos anteriormente para prever os próximos valores.

3.3 Seleção de Variáveis por Métodos de Poda

A determinação de quais entradas deveriam ser empregadas para obtenção de uma previsão otimizada pode também ser encarada como um problema de seleção de variáveis.

As técnicas tradicionais de seleção de variáveis partem da suposição de que existe inicialmente um conjunto compreendendo todas as variáveis candidatas necessárias para a resolução do problema.

As variáveis que efetivamente participariam da modelagem do problema são selecionadas a partir deste conjunto inicial. Uma vez que uma busca exaustiva aplicada sobre todos os

subconjuntos possíveis de variáveis é computacionalmente inviável, algumas técnicas alternativas têm sido desenvolvidas. Um exemplo dessas técnicas são os métodos *stepwise* mencionados por Goutte (Goutte, 1996) que podem ser subdivididos em duas categorias: métodos *forward selection* e métodos *backward elimination*.

Os métodos *forward selection* adicionam variáveis, que são escolhidas uma após a outra, de acordo com um dado critério de seleção, a um conjunto de variáveis de entrada. Este conjunto é inicialmente vazio e o processo de adição se repete até que a condição de parada pré-determinada seja satisfeita.

Os métodos *backward elimination* eliminam as variáveis, uma após a outra, de acordo com um dado critério de seleção, a partir de um conjunto de variáveis de entrada, que inicialmente compreende todas as variáveis candidatas. Esta eliminação prossegue até que a condição de parada seja satisfeita.

No contexto de Redes Neurais, os métodos de poda podem ser considerados como métodos *backward elimination*. Neste caso, o critério de seleção pode ser a heurística de poda e o critério de parada é baseado na estimativa do erro de generalização.

Se apenas as informações sobre uma série temporal forem consideradas, as variáveis candidatas poderiam, por exemplo, representar valores passados da mesma. Desta forma, os métodos de poda selecionariam quantas observações passadas deveriam ser utilizadas para realizar a previsão.

Contudo, diversos autores (White, 1988; Mostafa, 1996) acreditam que as séries temporais também podem ser influenciadas por informações externas e que a capacidade de mapeamento das RNAs poderiam facilmente captar tais relacionamentos. Assim, as RNA possuiriam maiores subsídios para executarem uma previsão mais precisa. Os métodos de seleção de variáveis baseados em poda também seriam ferramentas úteis para evidenciar quais destes relacionamentos são mais importantes e reduzir a complexidade do modelo.

3.4 Processamento Temporal

Uma outra característica das Redes Neurais que pode ser utilizada em previsão de séries temporais é a capacidade que alguns de seus modelos possuem de representar o tempo. A incorporação do fator tempo na operação de uma Rede Neural lhe permite acompanhar variações estatísticas de processos não estacionários presentes em vários tipos de série temporais. Esta incorporação pode ser realizada de duas maneiras distintas:

1. **Representação Explícita:** A alternativa mais comum é uma representação espacial desta sequência, em que o fator tempo é determinado pela ordem serial das observações dentro do vetor padrão. Por exemplo, se uma rede MLP fosse treinada para prever a observação z_t de uma dada série temporal a partir de alguns de seus valores passados $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}$, o padrão seria formado da seguinte maneira: o primeiro elemento representaria o valor da série no instante $t-1$, o segundo elemento representaria o instante $t-2$, e assim sucessivamente. Este tipo de abordagem possui sérias desvantagens (Elman, 1990). Inicialmente, é necessário que haja alguma interface com o mundo externo, que armazene entradas, de forma que elas possam ser apresentadas todas ao mesmo tempo. Em segundo lugar, o registrador de intervalos impõe um limite rígido na duração dos padrões devido ao fato de que a camada de entrada deve fornecer o maior padrão possível. Além disso, este registrador sugere que todos os vetores de entrada sejam do mesmo tamanho. Finalmente, o problema mais sério é que tal abordagem não distingue entre posições temporais relativa e absoluta (Elman, 1990).
2. **Representação Implícita:** O tempo é representado pelo efeito que ele possui no processamento de sinal de uma forma implícita. Em outras palavras, isto significa dar à rede propriedades de sistemas dinâmicos que lhes permitam extrair relacionamentos temporais. Para que a rede seja dinâmica, ela deve possuir memória. Esta memória pode ser dividida em duas classes, de acordo com o tempo de retenção: memória de curto prazo e memória de longo prazo. A memória de curto prazo pode atribuir a uma RNA propriedades dinâmicas em situações que a dimensão temporal está definida. Uma maneira de realizar isto é através da utilização de defasagens de tempo (*time delays*) no nível de sinapse ou camada de entrada da rede em questão. A memória de longo prazo é incorporada à rede através de um processamento temporal, onde o conteúdo da informação do conjunto de treinamento é em parte ou completamente armazenado nos pesos sinápticos da rede. Isto é feito através do uso de re-alimentação (*feedback*) dentro da estrutura da RNA. Existe dois tipos de re-alimentação: local e global. A re-alimentação local ocorre à nível de neurônio, enquanto a re-alimentação global compreende toda a rede. Redes Neurais Artificiais com re-alimentação são conhecidas como redes recorrentes.

Esta subseção tratará apenas de modelos de Redes Neurais que representam o tempo implicitamente com memórias de curto e longo prazo. Para memória de curto período, o modelo *Time Delay Neural Network* (TDNN) será aplicado para previsão. As redes recorrentes de Elman e Jordan ilustrarão a utilização de memória de longo prazo para previsão de séries temporais.

3.4.1 Time Delay Neural Network

O modelo TDNN foi inicialmente projetada para reconhecimento de linguagem natural (Waibel, 1989). Entretanto, a rede TDNN tem sido também empregada para previsão de séries temporais. A rede TDNN é uma rede *feedforward* cujos neurônios das camadas intermediárias e de saída são replicados através do tempo. Esta replicação ocorre pela adição de um filtro de Reposta de Impulso Finito (FIR) em cada sinapse destes neurônios.

Em muitos modelos de RNAs, a unidade básica de processamento (neurônio) realiza uma soma ponderada de suas entradas e então aplica à esta soma uma função geralmente não linear (função sigmóide) para gerar sua saída. A arquitetura TDNN modificou esta unidade básica pela introdução de defasagens no tempo (D_1 até D_N), como é mostrado na Figura 2.10. As J entradas de cada unidade são agora multiplicadas pelos pesos do instante atual e dos instantes defasados no tempo. Desta maneira, uma unidade TDNN tem a habilidade de relatar e comparar entradas atuais com a história passada dos eventos. A função logística foi escolhida como a função de ativação f da Figura 3.4 devido às suas propriedades matemáticas convenientes.

Figura 3.4: Neurônio TDNN.

Uma arquitetura TDNN pode ser treinada com algoritmos de gradiente descendente, como, por exemplo, o *Backpropagation*. Contudo, algumas modificações precisam ser realizadas para que o modelo TDNN possa expressar estruturas temporais. Para obter este procedimento de aprendizagem desejado, é necessário garantir que a rede seja exposta a seqüências de padrões desejados, além de ser encorajada a aprender os mais poderosos relacionamentos temporais existentes entre tais padrões.

Conceitualmente, o algoritmo *Backpropagation* pode ser aplicado aos padrões deslocados ao longo do tempo. Contudo, isto é um tanto dispendioso. Um meio equivalente de obter este mesmo resultado é utilizar padrões de entradas expandidos espacialmente. Cada coleção de unidades descritas anteriormente é duplicada para cada atraso no tempo. Desta maneira, a história completa das atividades da rede fica completamente disponível ao mesmo tempo.

Uma vez que as cópias defasadas da unidades TDNN são meramente duplicações, os pesos das conexões correspondentes de cada uma destas cópias podem ser restringidos ao mesmo valor. Isto é implementado aplicando os passos de ida e volta do algoritmo *Backpropagation* comum a todas as cópias defasadas no tempo, como se elas fossem eventos separados. Desta forma, são geradas diferentes derivadas de erro para cada defasagem no tempo da conexão correspondente. Ao invés de alterar os pesos de cada defasagem separadamente, cada peso é atualizado por um mesmo valor, conhecido como a média de todas as alterações dos pesos defasados no tempo de uma dada conexão.

3.4.2 Redes Recorrentes

A seguir são brevemente descritas as redes recorrentes de Elman e de Jordan que memorizam estados de ativação internos e externos da rede a longo prazo.

3.4.2.1 Rede de Elman

A rede Elman (Elman, 1990), ilustrada pela Figura 3.5, modifica uma arquitetura MLP através da adição de unidades extras à camada de entrada, que são chamadas de *Unidades de Contexto*. Estas unidades podem ser consideradas como pertencentes à camada intermediária, uma vez que interagem exclusivamente com os outros neurônios internos à rede, e não com o mundo exterior.

Desta forma, o processamento temporal consiste da seguinte seqüência de eventos. No tempo t , as unidades de entrada recebem a primeira entrada da seqüência temporal. As unidades de contexto são inicialmente ativadas com o valor 0.5. Ambas as unidades de entradas e de

contexto ativam as unidades intermediárias. Por sua vez, as unidades intermediárias propagam seus sinais para ativarem as unidades de saída. As unidades intermediárias também retropropagam seus sinais para ativarem as unidades de contexto. Dependendo da tarefa, pode ou não haver uma fase de treinamento neste ciclo. Se houver, a saída é comparada com a entrada desejada, e a retropropagação do erro é usada para ajustar os pesos das conexões incrementalmente. Os pesos das conexões recorrentes são fixados em 1.0 e não sofrem ajustes. No próximo passo, $t+1$, esta sequência é repetida, mas as unidades de contexto contêm valores que são exatamente as ativações das unidades intermediárias no tempo t . Assim, estas unidades de contexto fornecem memória à rede.

Em redes MLPs, a função das unidades intermediárias é desenvolver representações internas para os padrões de entrada, recodificando-os de modo que a rede possa produzir a saída correta para uma dada entrada. Na rede de Elman, as unidades de contexto lembram os estados internos anteriores. Assim, as unidades intermediárias são responsáveis pelo mapeamento tanto de uma entrada externa quanto dos estados internos anteriores. Dado que padrões nas unidades intermediárias são armazenados como contexto, as unidades intermediárias podem realizar este mapeamento e, ao mesmo tempo, desenvolver representações que são codificações úteis das propriedades temporais das entradas sequenciais. Assim, as representações internas que se desenvolvem são sensíveis ao contexto temporal e o efeito do tempo torna-se implícito nestes estados internos.

Figura 3.5: Rede de Elman.

3.4.2.2 Rede de Jordan

A rede de Jordan (Jordan, 1986), mostrada pela Figura 3.6, contém conexões recorrentes que são usadas para associar um padrão estático de entrada a um padrão de saída seqüencialmente ordenado no tempo.

As conexões recorrentes permitem que as unidades da camada intermediária considerem as saídas anteriores da rede no momento em que são ajustadas pelo algoritmo de treinamento. Assim, os procedimentos subsequentes podem ser moldados pelas respostas anteriormente produzidas pela rede. Estas saídas são armazenadas em unidades especiais que representam os estados imediatamente passados em que a rede se encontrava. Tais conexões recorrentes são responsáveis por atribuir à rede uma memória.

O algoritmo de treinamento da rede de Jordan é bastante similar ao da rede de Elman. O que realmente muda são apenas as informações extras que as unidades da camada intermediária possuem.

Figura 3.6: Rede de Jordan.

3.5 Combinadores de Previsão

Devido à grande quantidade de ruídos presente em aplicações práticas de séries temporais, o controle da variância da previsão é extremamente requisitado. Uma das abordagens para reduzir esta variância é a utilização de combinadores ou comitê de previsores.

Os combinadores de previsão buscam explorar as vantagens e capacidades individuais de cada um de seus membros com a finalidade de promover a realização de uma previsão mais estável e confiável.

A prática de utilização de comitês em previsões financeiras é bastante divulgada no meio estatístico. Em um vasto relatório, Clemen apresentou mais de 200 referências sobre o assunto (Clemen, 1989). A média das previsões dos membros do comitê é uma maneira bastante simples de combiná-los.

Um exemplo da utilização de combinadores de previsão no contexto de RNAs consiste da combinação dos resultados das melhores arquiteturas treinadas para um problema de previsão (Rehfuss et al., 1995). Essa combinação pode simplesmente ser a média das previsões realizadas por cada um dos membros do comitê.

Uma RNA pode também ser treinada para ponderar a importância de cada um dos membros do comitê no resultado final. Em ambos casos, o modelo Box & Jenkins ajustado também pode participar do comitê de previsores.

3.6 Considerações Finais

As RNAs apresentam soluções promissoras para problemas de previsão. Contudo, a busca pela sua capacidade de generalização deve ser favorecida quando se deseja obter desempenhos razoáveis. Uma forma de realizar isto é promover a utilização de modelos parcimoniosos de previsão. Cada uma das três abordagens discutidas neste capítulo possuem suas vantagens e desvantagens.

As operações de diferenciação e as ferramentas de identificação de modelos Box & Jenkins podem ser usadas com sucessos na modelagem de dados e arquiteturas de RNAs. Entretanto, as operações de diferenciação não são capazes de eliminar qualquer tipo de não estacionariedade e as funções de auto-correlação e auto-correlação parcial apenas revelam dependências lineares entre as informações passadas de uma série temporal. Além, disso existe uma necessidade de se possuir uma boa bagagem teórica para conseguir analisar os comportamentos das estimativas destas funções.

Os métodos de poda de RNAs permitem a visualização de dependências não lineares que possam eventualmente existir entre as entradas do modelo de previsão. Entretanto, estes métodos podem apenas ser aplicados com arquiteturas *feedforwards* e exigem claramente maneiras de se estimar o erro de generalização de forma precisa.

Os modelos de Redes Neurais com capacidade de extrair e representar características dinâmicas das séries temporais possuem recursos importantes que devem ser aplicados em previsão. Entretanto, nem todo comportamento não estacionário de algumas séries temporais pode ser extraído somente usando tais modelos. Assim, as operações de diferenciação podem ainda ser necessárias, cabendo às estas redes com memória a captação de outras não estacionariedades eliminadas por este recurso.

A combinação de previsores é uma técnica que vem sendo aplicada à muito tempo dentro da área de Estatística com a finalidade de reduzir a variância de previsão 1-passo-a-frente. Contudo, a complexidade do modelo é aumentada, dificultando o seu emprego principalmente quando se deseja prever vários passos à frente.

4. Experimentos

Este capítulo apresenta os experimentos de utilização conjunta de Redes Neurais Artificiais e Método Box & Jenkins para previsão de séries temporais. A seção 4.1 descreve alguns pontos genéricos referentes a utilização de RNAs nos experimentos. Os dados empregados sobre séries temporais financeiras de cotação de moedas e de valores de ações são descritos pela seção 4.2. A seção 4.3 apresenta os resultados dos experimentos realizados com o método Box & Jenkins e as RNAs projetadas seguindo as três abordagens descritas no capítulo 3. Finalmente, a seção 4.4 discute algumas considerações sobre os resultados obtidos.

4.1 Metodologia

Os experimentos de previsão foram realizados com RNAs *feedforward* e recorrentes com aprendizado supervisionado. As RNAs *feedforward* utilizadas foram as redes MLP e ADALINE. As redes MLP possuem uma camada de entrada, uma camada intermediária e uma de saída. Seus neurônios utilizam funções de ativação tangente hiperbólica e seus estados de ativação assumem valores reais compreendidos entre -1 e 1. As arquiteturas do tipo ADALINE não possuem camadas intermediárias, utilizam a função de ativação identidade em seus neurônios. A rede TDNN e as redes recorrentes de Elman e Jordan apresentam uma única camada intermediária e seus neurônios empregam a função de ativação logística, que produz estados entre 0 e 1.

Ao contrário dos modelos Box & Jenkins, que trabalham diretamente com os valores da série para o ajuste de seus modelos, as RNAs exigiram a execução de uma etapa extra de normalização dos dados. Esta normalização restringiu os valores das séries temporais a intervalos reais cujos limitantes inferiores e superiores eram -0.90 e 0.90 para as redes MLP e ADALINE e 0.1 e 0.9 para as redes TDNN e recorrentes.

Os treinamentos destas diferentes redes foram executados através dos algoritmos *RProp* e *Backpropagation*. O algoritmo *RProp* foi empregado para as redes MLP, ADALINE e as redes recorrentes de Elman e Jordan por se tratar de uma das regras de convergência mais rápidas analisadas pelo relatório de Schiffman (Schiffman, 1992). As redes TDNN foram treinadas com uma variação do algoritmo *Backpropagation* que permite a representação das características temporais dos dados.

A função *Mean Relative Error* (MRE), ilustrada pela Equação 4.1, foi usada para avaliar a acurácia da previsão das séries temporais.

$$MRE = 100 \times \frac{1}{N} \sum_p \sum_j \left| \frac{d_{pj} - y_{pj}}{d_{pj}} \right| \quad (4.1)$$

em que N é número de padrões do conjunto de treinamento, validação ou teste, d_p é o vetor de saída desejada para o padrão p , e y_p é a saída produzida pela RNA para o padrão p .

A técnica *Random Sub-sampling* foi aplicada para dividir os dados de treinamento em dois subconjuntos distintos de treinamento (70%) e validação (30%), e para estimar, consequentemente, o erro de generalização baseado no conjunto de validação. Apenas para as redes recorrentes, os dados não foram particionados aleatoriamente, devido às suas características de memórias de longo prazo. Assim, uma única partição foi formada, dividindo a série seqüencialmente em treinamento, validação e teste.

As três abordagens de previsores neurais foram então aplicadas para a previsão das séries temporais de moedas e de ações. A operação conjunta entre os métodos Box & Jenkins e Redes Neurais e a seleção de variáveis por métodos de poda tiveram como objetivo a construção de um modelo de previsão otimizado. O objetivo inicial do uso do modelo TDNN e de redes recorrentes era verificar sua capacidade de aprender a não estacionariedade das séries de moedas e ações sem a necessidade de pré-processamento. Contudo, estes modelos não conseguiram extrair e generalizar diretamente os comportamentos não estacionários das séries financeiras. Mesmo assim, estes modelos podem também ser usados para aprender as séries temporais pré-processadas uma vez que as operações de diferenciação não foram capazes de eliminar completamente a não estacionariedade nas séries estudadas.

4.2 Dados

As RNAs foram treinadas para realizar a previsões do tipo 1-passo-a-frente e vários-passos-a-frente com duas bases distintas de séries temporais: cotação de moedas e preço de ações.

Os dados sobre cotação de moedas consistem de cinco séries temporais de 3510 valores amostrados diariamente entre o período de 01/06/73 a 21/05/87. Esses dados foram investigados no artigo "*Predicting Sunspots and Exchange Rates with Connectionist Networks*" (Weigend et al., 1992). Cada uma das séries diz respeito a cotação em Dólar Americano das seguintes moedas: Libra Esterlina, Dólar Canadense, Marco Alemão, Franco Suíço e o Iene Japonês. As

séries da Libra Esterlina e do Marco Alemão, ilustradas através da Figura 4.1, foram escolhidas para serem mais detalhadamente estudadas.

Os experimentos de previsão de valores de ações da TELEBRAS foram realizados com uma base de dados compostas de oito séries temporais com valores amostrados diariamente durante o período de 01/08/94 a 13/03/97. Tais séries representam a quantidade de negócios, quantidade de títulos negociados, volume e os preços de abertura, fechamento, mínimo, máximo e médio das ações. Apenas os preços mínimo e máximo, cujas curvas são apresentadas na Figura 4.2, foram usados como saída dos previsores. As outras séries serviram somente como fonte adicional de informações de entrada.

Figura 4.1: Séries Temporais da Libra Esterlina e Marco Alemão.

Figura 4.2: Séries temporais de preço mínimo e máximo.

4.3 Resultados

A seguir são apresentados os resultados obtidos dos experimentos que utilizaram as três abordagens de previsores neurais.

4.3.1 Sistema Híbrido

O sistema híbrido descrito na seção 3.2 foi aplicado para a modelagem de Redes Neurais na previsão de cotação de moedas e preço de ações. Em ambos os casos foi verificado o efeito do pré-processamento para tornar as séries estacionárias.

4.3.1.1 Moedas

O comportamento não estacionário das séries temporais da Libra Esterlina e Marco Alemão pode ser facilmente verificado a partir de uma inspeção visual de suas curvas, ilustradas pela Figura 4.1.

Os valores da FAC para a Libra Esterlina foram praticamente constantes e iguais a 1, como ilustra a Figura 4.3. Isto sugeriu uma possível representação deste processo através do modelo *random walk* descrito pela Equação 4.2. A Figura 4.4 mostra a FACp da Libra Esterlina que reforça esta análise. Já no caso da série temporal do Marco Alemão, foi necessário aplicar

uma operação de diferenciação antes de estimar a FAC e a FACp. O comportamento da FAC pode ser visto como uma queda exponencial rápida com oscilações em torno do eixo das abscissas, conforme ilustra a Figura 4.5. Este fato, aliado às estimativas da FACp, dada pela Figura 4.6, sugeriram um modelo $ARI(1,1)$, descrito pela Equação 4.3. A região delimitada pelas linhas pontilhadas em azul e verde nos gráficos das Figuras 4.3 à 4.6 representam os intervalos de confiança. Os valores da FAC e FACp dentro destes intervalos podem ser considerados nulos.

$$z_t = z_{t-1} + a_t \quad (4.2)$$

$$(1 - \phi_1 - B)(1 - B)z_t = a_t \quad (4.3)$$

A Equação 4.3 pode ainda ser desenvolvida para expressar z_t em função dos valores passados da série, como se segue:

$$z_t = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t \quad (4.4)$$

Desta forma, as previsões da Libra Esterlina e do Marco Alemão podem então ser realizada efetuando o cálculo do valor esperado condicional, representado pelas Equações 4.5 e 4.6:

$$E(z_t | z_{t-1}) = z_{t-1} \quad (4.5)$$

$$E(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}) = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} \quad (4.6)$$

Os desempenhos nas fase de ajuste e teste dos modelos *random walk* e $ARI(1,1)$ são finalmente apresentados pela Tabela 4.1.

<i>Série</i>	<i>Parâmetros</i>	<i>Ajuste MRE(%)</i>	<i>Teste MRE(%)</i>
Libra Esterlina	-	0.4399	0.4008
Marco Alemão	$\phi_1 = -0.0521$	0.4990	0.4346

Tabela 4.1: Parâmetros e desempenhos dos modelos Box & Jenkins ajustados.

Figura 4.3: FAC da série da Libra Esterlina.

Figura 4.4: $FACp$ da série da Libra Esterlina.

Figura 4.5: FAC da série do Marco Alemão.

Figura 4.6: FACp da série do Marco Alemão.

A identificação e o ajuste dos modelos da seção anterior contribuíram diretamente para a modelagem de 10 diferentes arquiteturas para previsão dos valores de moedas. Em todas as tabelas de resultados, a notação $i\_h_1\_h_2\_oAct$ foi utilizada para distinguir as arquiteturas. Nesta notação i , h_1 , h_2 e o representam o número de neurônios nas camadas de entrada, intermediárias

e de saída, respectivamente. *Act* é uma função de ativação: Identidade (I), Logística (L) ou Tangente Hiperbólica (T). Os termos h_1 e h_2 podem estar ausentes, o que representaria a falta de uma ou duas camadas intermediárias na arquitetura. Os melhores resultados são sempre apresentados em negrito.

O modelo *random walk* sugeriu a utilização de um neurônio na camada de entrada (z_{t-1}) para a previsão de z_t na saída da rede. A Tabela 4.2 ilustra a média por partição dos erros em MRE de treinamento, validação e teste para a Libra Esterlina. De acordo com o critério da melhor validação, a arquitetura linear seria escolhida como a melhor solução. Entretanto, algumas arquiteturas não lineares obtiveram desempenhos semelhantes.

Para o Marco Alemão, dois grupos de arquiteturas foram estudadas para verificar o comportamento das RNAs em relação à não estacionariedade da série. O primeiro grupo era formado por arquiteturas com apenas um neurônio na camada de entrada. Este neurônio representava uma observação w_{t-1} da série temporal w obtida a partir da aplicação de uma operação de diferenciação sobre a série original z . O segundo grupo possuía arquiteturas com dois neurônios na camada de entrada (z_{t-1} e z_{t-2}), que foram treinadas com as observações da série do Marco Alemão sem pré-processamento. As Tabelas 4.3 e 4.4 ilustram os resultados para ambos os grupos. Genericamente, a maioria das arquiteturas conseguiu gerar previsões com desempenho similar aos modelos Box & Jenkins ajustados. Apesar do comportamento não estacionário, o segundo grupo de arquitetura apresentou um desempenho apenas um pouco inferior.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1_1I	0.440164	0.441519	0.399102
1_1T	1.253306	1.244907	1.385057
1_1_1T	1.262660	1.255317	1.390325
1_3_1T	0.463578	0.467761	0.398674
1_5_1T	0.457197	0.459988	0.418290
1_7_1T	0.522366	0.517359	0.429648
1_9_1T	0.456827	0.459576	0.417408
1_11_1T	0.460695	0.462893	0.418445
1_13_1T	0.456025	0.458361	0.412662
1_15_1T	0.458653	0.462095	0.423345

Tabela 4.2: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a Libra Esterlina.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1I	0.7438	0.7515	0.6184
1 1T	0.5024	0.5065	0.4348
1 1 1T	0.5023	0.5065	0.4348
1 3 1T	0.5025	0.5067	0.4352
1 5 1T	0.5025	0.5068	0.4352
1 7 1T	0.5025	0.5067	0.4352
1 9 1T	0.5024	0.5072	0.4353
1 11 1T	0.5025	0.5067	0.4351
1 13 1T	0.5024	0.5071	0.4351
1 15 1T	0.5023	0.5071	0.4351

Tabela 4.3: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a série do Marco Alemão com diferenciação.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
2 1I	0.497504	0.504239	0.435087
2 1T	1.047055	1.042605	1.061107
2 1 1T	1.057759	1.054205	1.047452
2 3 1T	0.507113	0.517111	0.452320
2 5 1T	0.503439	0.513210	0.448180
2 7 1T	0.504051	0.513631	0.447352
2 8 1T	0.504217	0.514730	0.449870
2 10 1T	0.504428	0.514289	0.448316
2 13 1T	0.513434	0.524144	0.457967
2 15 1T	0.506922	0.519288	0.454831

Tabela 4.4: Desempenho de previsão (MRE) das RNAs para a série do Marco Alemão sem diferenciação.

4.3.1.2 Ações

A observação das séries temporais de valores mínimos e máximos de ações revelou um comportamento não estacionário, envolvendo uma combinação de tendência linear e mudança de níveis, conforme ilustra a Figura 4.2.

Após ser executada uma diferenciação, as estimativas das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial foram calculadas, resultando nos gráficos expressos pelas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10. Em ambas as séries, a FAC pode ser interpretada como uma queda exponencial que prossegue até o infinito. Os valores da FACp podem ser considerados nulos a partir de $k > 2$, por estarem dentro do intervalo de confiança delimitado pelas linhas pontilhadas nos gráficos.

A análise destas funções conduziu a interpretação das séries temporais de valores mínimo e máximo das ações como uma possível realização dos processos descritos pelos modelos $ARI(1,1)$ e $ARI(2,1)$ ilustrados pelas Equações 4.7 e 4.8, respectivamente. Apesar da FACp da série de mínimo sugerir uma ordem $p=2$, um modelo $ARI(1,1)$ obteve um desempenho melhor,

sendo portanto escolhido. Isso provavelmente é explicado pelo fato de se trabalhar com estimativas destas funções.

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)z_t = a_t \quad (4.7)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)z_t = a_t \quad (4.8)$$

As Equação 4.7 e 4.8 podem ainda ser desenvolvidas para expressar z_t em função dos valores passados da série, o que resultaria em:

$$z_t = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t \quad (4.9)$$

$$z_t = (1 + \phi_1)z_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)z_{t-2} - \phi_2 z_{t-3} + a_t \quad (4.10)$$

Assim, as previsões 1-passo-a-frente do preço mínimo e máximo das ações podem então ser efetuada através dos cálculos do valor esperado condicional, representado pelas Equações 4.11 e 4.12:

$$E(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}) = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} \quad (4.11)$$

$$E(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}) = (1 + \phi_1)z_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)z_{t-2} - \phi_2 z_{t-3} \quad (4.12)$$

Os parâmetros ajustados para os modelos e as suas avaliações de desempenho em previsão 1-passo-a-frente são apresentados pela Tabela 4.5.

<i>Série</i>	<i>Parâmetros</i>	<i>Ajuste MRE(%)</i>	<i>Teste MRE(%)</i>
Mínimo	$\phi_1 = 0.16735$	2.2945	1.0956
Máximo	$\phi_1 = 0.13687$ $\phi_2 = -0.08455$	1.9706	1.2260

Tabela 4.5: Parâmetros e desempenhos dos modelos Box & Jenkins ajustados.

Dados os modelos ajustados anteriormente, diversas arquiteturas de RNAs foram construídas e treinadas para também realizar a previsão 1-passo-a-frente das séries temporais de preço mínimo e máximo das ações. Em ambas as séries, foram construídos dois grupos de arquiteturas para serem treinadas com os dados antes e após a eliminação da não estacionariedade.

O primeiro grupo era formado por arquiteturas que foram treinadas com observações da série w obtidas a partir da aplicação de uma operação de diferenciação sobre a série original z . Neste caso, as arquiteturas consideravam um (w_{t-1}) e dois (w_{t-1} e w_{t-2}) neurônios na camada de entrada para a previsão das séries de preço mínimo e máximo, respectivamente. As Tabelas 4.6 e 4.8 ilustram os erros de previsão das arquiteturas deste grupo. As RNAs se aproximaram dos modelos Box & Jenkins, produzindo, em alguns casos, previsões com taxas de erros menores.

O segundo grupo possuía arquiteturas treinadas com observações das séries originalmente não estacionárias. Neste grupo, havia dois (z_{t-1} e z_{t-2}) e três (z_{t-1} , z_{t-2} e z_{t-3}) neurônios na camada de entrada das arquiteturas que realizavam a previsão das séries de preço mínimo e máximo das ações, respectivamente. As Tabelas 4.7 e 4.9 ilustram os erros de previsão destas redes para as séries de preço mínimo e máximo s . Ao contrário da série do Marco Alemão, a retirada da não estacionariedade destas séries levou a uma sensível melhora dos resultados obtidos.

Figura 4.7: FAC da série de preço mínimo.

Figura 4.8: $FACP$ da série de preço mínimo.

Figura 4.9: FAC da série de preço máximo.

Figura 4.10: $FACP$ da série de preço máximo.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1_1L	2.3863	2.3160	1.1767
1_1T	2.3057	2.2633	1.0824
1_1_1T	2.2996	2.2361	1.0633
1_3_1T	2.2485	2.2234	1.0886
1_5_1T	2.2466	2.2282	1.0996
1_7_1T	2.2470	2.2273	1.0923
1_9_1T	2.2468	2.2270	1.0971
1_11_1T	2.2464	2.2276	1.0973
1_13_1T	2.2456	2.2282	1.0967
1_15_1T	2.2455	2.2289	1.0984

Tabela 4.6: Desempenho de previsão (*MRE*) das RNAs para o preço mínimo com diferenciação.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
2_1I	2.2977	2.2938	1.1068
2_1T	3.9074	3.7552	1.9827
2_1_1T	2.7343	2.4827	5.9408
2_3_1T	2.3983	2.2555	1.8300
2_5_1T	2.2804	2.2942	4.3183
2_7_1T	2.2682	2.2950	4.7274
2_9_1T	2.2813	2.3196	3.9802
2_11_1T	2.2985	2.3045	2.6876
2_12_1T	2.2922	2.2769	5.7061
2_15_1T	2.3010	2.3101	3.4536

Tabela 4.7: Desempenho de previsão (*MRE*) das RNAs para o preço mínimo sem diferenciação.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
2_1L	2.0339	1.8762	1.2701
2_1T	2.0076	1.8506	1.2196
2_1_1T	2.0048	1.8443	1.2129
2_3_1T	1.9708	1.8748	1.2042
2_5_1T	1.9234	1.9192	1.2565
2_7_1T	1.9071	1.9408	1.2534
2_9_1T	1.8820	1.9532	1.2560
2_11_1T	1.8691	1.9531	1.2683
2_13_1T	1.8818	1.9485	1.2654
2_15_1T	1.8841	1.9744	1.2879

Tabela 4.8: Desempenho de previsão (*MRE*) das RNAs para o preço máximo com diferenciação.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
3_1L	1.9934	1.9418	1.2419
3_1T	3.8193	3.6266	2.0187
3_1_1T	2.2989	2.3070	6.3099
3_3_1T	1.9723	1.9728	4.8214
3_5_1T	1.9637	1.9858	4.4314
3_7_1T	1.9778	2.0128	1.9721
3_9_1T	1.9526	1.9993	3.3623
3_11_1T	1.9744	1.9926	3.0476
3_13_1T	1.9750	1.9960	2.2955
3_15_1T	1.9490	2.0302	3.0987

Tabela 4.9: Desempenho de previsão (*MRE*) das RNAs para o preço máximo sem diferenciação.

4.3.2 Seleção de Variáveis

Os objetivos deste grupo de experimentos foram a avaliação da contribuição de variáveis adicionais à previsão e a simplificação dos modelos de previsão através de técnicas de seleção de variáveis baseadas em métodos de poda de RNAs.

Algumas variáveis adicionais foram utilizadas para explorar melhor a capacidade de mapeamento não linear oferecida pelas RNAs. Tais variáveis constituíam-se de observações passadas de outras série temporais que poderiam ter alguma influência no desempenho de previsão.

O primeiro passo foi verificar se a influência destas variáveis realmente existia. Para tanto, diversas redes MLPs foram inicialmente treinadas com informações à respeito de todas as variáveis disponíveis. É importante ressaltar que estes treinamentos foram interrompidos quando houve aumento exacerbado do erro de validação. Assim, as arquiteturas que melhor validaram foram selecionadas para sofrer podas. Apesar de terem sido utilizados três partições de dados distintas, somente a que gerou o melhor desempenho foi empregada. Isto decorre do fato de que

diferentes conjuntos de treinamento podem provocar diferentes conjuntos de variáveis selecionadas. Se a poda funcionar para a partição de melhor validação, ela provavelmente funcionará para as demais partições.

Em seguida, um método de poda de RNAs foi aplicado como técnica de seleção de variáveis para tornar o modelo de previsão mais parcimonioso e facilitar a sua utilização futura. A heurística *Skeletonization* (Mozzer e Smolensky, 1991) foi empregada para selecionar os neurônios da camada de entrada a serem eliminados. A não ser pela primeira arquitetura que havia sido treinada e validada, cada seleção sempre ocorria após o término de 5000 ciclos de treinamento. Entretanto, somente o conjunto de pesos da arquitetura que produzia a menor validação era considerado dentre estes ciclos. Assim, para cada nova arquitetura era gerada com uma outra entrada a menos e com uma possível menor validação.

Este algoritmo de seleção de variáveis foi aplicado para as séries temporais de cotação de moedas e preço de ações.

4.3.2.1 Moedas

O primeiro passo deste experimento foi verificar quantitativamente a importância de outras variáveis externas na previsão da Libra Esterlina e do Marco Alemão. Isto foi realizado construindo Redes Neurais que consideravam quatro valores passados de quatro séries temporais (Libra Esterlina ou Marco Alemão mais Dólar Canadense, Franco Suíço e Iene) como entradas em dois experimentos distintos. Isto significa que para a previsão da Libra Esterlina não era considerada nenhuma informação sobre o Marco Alemão e vice-versa. Esta decisão foi tomada pois as duas séries foram previamente escolhidas para serem previstas. As Redes Neurais não foram treinadas com os dados originais destas séries adicionais. Algumas operações de diferenciação foram antes aplicadas, quando necessárias, para a eliminação da não-estacionariedade.

As informações utilizadas nas entradas da Rede Neural constituída para prever a Libra Esterlina e o Marco Alemão são esquematizadas através das Tabelas 4.10a e 4.10b, respectivamente. Em ambas as tabelas, as colunas representam as cinco séries temporais de moedas e as linhas as suas quatro observações passadas. Cada campo da tabelas coloridos em azul ilustra a presença de uma observação passada de uma dada moeda na entrada do previsor. Por outro lado, campos em branco representam a ausência de informação.

	Libra	Dólar	Marco	Iene	Franco
t-1					
t-2					
t-3					
t-4					

Tabela 4.10a: Variáveis adicionais para a Libra Esterlina.

	Libra	Dólar	Marco	Iene	Franco
t-1					
t-2					
t-3					
t-4					

Tabela 4.10b: Variáveis adicionais para o Marco Alemão.

Estas configurações de entrada foram integralmente submetidas ao treinamento de algumas Redes Neurais para a previsão 1-passo-a-frente de cotação de moedas. Tais redes possuíam 16 neurônios na camada de entrada para prever a observação atual da série desejada, representada através de um neurônio na camada de saída. Os resultados iniciais destas previsões da Libra Esterlina e Marco Alemão são apresentados nas Tabelas 4.11 e 4.12, respectivamente. Conforme pode ser observado nestes resultados, o acréscimo de variáveis não provocou uma queda considerável da taxa de erro de previsão para ambas as moedas. Além disso, seus desempenhos nem mesmo conseguiram se aproximar das redes treinadas apenas com informações sobre as próprias séries, como pode ser visto nas Tabelas 4.2 e 4.3. Isto provavelmente ocorreu devido ao fato de que estas novas variáveis não ofereceram qualquer contribuição extra e ainda dificultaram o treinamento das redes. Mesmo assim, o algoritmo de poda será aplicado em ambas as séries.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
16_11	0.4407	0.4421	0.4055
16_1T	1.1338	1.1266	1.1724
16_1_1T	1.1396	1.1317	1.1911
16_3_1T	0.4481	0.4534	0.4314
16_5_1T	0.4438	0.4592	0.4614
16_7_1T	0.4428	0.4679	0.4574
16_9_1T	0.4341	0.4698	0.4462
16_11_1T	0.4400	0.4716	0.4670
16_13_1T	0.4282	0.4944	0.6190
16_15_1T	0.4407	0.4890	0.5068
16_30_1T	0.4378	0.5287	0.6829

Tabela 4.11: Desempenho de redes MLP para a Libra Esterlina considerando variáveis adicionais.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
16_11	0.5497	0.5508	0.4898
16_1T	0.5032	0.5027	0.4332
16_1_1T	0.4979	0.5162	0.4626
16_3_1T	0.4929	0.5202	0.4511
16_5_1T	0.4943	0.5323	0.4612
16_7_1T	0.4925	0.5276	0.4998
16_9_1T	0.4863	0.5358	0.5177
16_11_1T	0.4836	0.5473	0.4983
16_13_1T	0.4910	0.5374	0.5093
16_15_1T	0.4811	0.5496	0.5112
16_30_1T	0.4758	0.5674	0.5205

Tabela 4.12: Desempenho de redes MLP para o Marco Alemão considerando variáveis adicionais.

Para a utilização dos métodos de poda, foram selecionadas as melhores arquiteturas obtidas e as melhores partições de dados (treinamento, validação e teste) usadas para treiná-las e testá-las. Da mesma forma que nos experimentos anteriores, o erro de validação foi usado como critério de seleção. O aumento máximo permitido do erro de validação foi de 10% comparado com a melhor validação da melhor arquitetura treinada com a melhor partição. Infelizmente, como diferentes partições de dados podem provocar as escolhas de conjuntos distintos de variáveis, somente a partição que gerou o melhor resultado de previsão foi empregada. Como pode-se observar nas Tabelas 4.11 e 4.12, as melhores arquiteturas para a Libra Esterlina e Marco Alemão são 16_3_1T e 16_1T, respectivamente.

Em seguida, o método *Skeletonization* foi sucessivamente aplicado apenas à camada de entrada das redes, com intuito de selecionar as variáveis mais relevantes. O aumento brusco da taxa de erro de validação foi empregado para determinar a parada da seleção. As Figuras 4.11 e 4.12 mostram a avaliação do desempenho de treinamento, validação e teste das arquiteturas geradas a partir da atuação desta técnica. As curvas em preto, vermelho, e azul representam, respectivamente, os erros de treinamento, validação e teste ao longo da poda. A região em cinza representa o intervalo máximo de validação permitido.

Figura 4.11: Seleção de variáveis para a série da Libra Esterlina

Figura 4.12: Seleção de variáveis para a série da Marco Alemão.

Em ambos os casos, a poda das arquiteturas das RNAs não provocou melhoras significativa do desempenho de previsão tanto para o treinamento quanto para a validação. Isto reforçou o que havia sido percebido anteriormente no treinamento com todas as variáveis. Tanto para a Libra Esterlina quanto para o Marco, todas as entradas foram eliminadas a não ser aquelas que representavam os próprios valores das séries. As Tabelas 4.13a e 4.13b apresentam as variáveis selecionadas através de podas das arquiteturas para ambos os casos.

	Libra	Dólar	Marco	Iene	Franco
t-1					
t-2					
t-3					
t-4					

Tabela 4.13a: Variáveis selecionadas para a Libra Esterlina.

	Libra	Dólar	Marco	Iene	Franco
t-1					
t-2					
t-3					
t-4					

Tabela 4.13b: Variáveis selecionadas para o Marco Alemão.

É interessante observar que os resultados obtidos reforçam a necessidade da eliminação da não estacionariedade das séries e coincidem, de certa forma, com as sugestões oferecidas pela abordagem que combinavam o método Box & Jenkins e as Redes Neurais.

4.3.2.2 Ações

Assim como para as séries temporais da cotações de moedas, variáveis adicionais foram também consideradas como entradas da rede para as séries de preço de ações. Porém, estas variáveis representavam quatro valores passados de sete séries temporais distintas: preço mínimo ou máximo mais a quantidade de negócios, quantidade de títulos, volume, e preços de abertura, fechamento e médio. Na previsão do preço mínimo, informações sobre o preço máximo não são utilizadas e vice-versa. Estas outras séries temporais foram também diferenciadas para remover comportamentos não-estacionários.

As entradas das Redes Neurais treinadas para prever os preços mínimo e máximo das ações são esquematizadas através das Tabelas 4.14a e 4.14b respectivamente.

	Negs	Tits	Vol	Aber	Fech	Min	Max	Méd
t-1								
t-2								
t-3								
t-4								

Tabela 4.14a Variáveis adicionais para o preço mínimo.

	Negs	Tits	Vol	Aber	Fech	Min	Max	Méd
t-1								
t-2								
t-3								
t-4								

Tabela 4.14b Variáveis adicionais para o preço máximo.

Estas duas combinações de variáveis foram então submetidas integralmente ao treinamento de algumas Redes Neurais com 28 neurônios na camada de entrada e 1 neurônio na camada de saída. Os erros de treinamento, validação e teste desta rede treinada com as séries de preço mínimo e máximo são apresentados pelas Tabelas 4.15 e 4.16, respectivamente. Tanto para o preço mínimo, quanto para o máximo, aconteceram boas reduções dos erros de previsão do conjunto de testes comparados com as Tabelas 4.5 e 4.7. Isto incentivou ainda mais a busca das variáveis mais importantes.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
28_1I	1.7926	2.0540	0.9781
28_1T	1.7222	1.9350	0.9448
28_1_1T	1.7141	1.9343	0.9066
28_3_1T	1.4303	2.1748	1.2638
28_5_1T	1.4406	2.2923	1.2843
28_7_1T	1.3501	2.2346	1.1567
28_9_1T	1.2625	2.3647	1.2151
28_11_1T	1.2251	2.4945	1.3082
28_13_1T	1.2114	2.5176	1.4662
28_15_1T	1.1824	2.4186	1.4040
28_30_1T	0.9503	2.9132	1.5694

Tabela 4.15: Desempenho de redes MLP para a série do mínimo considerando variáveis adicionais.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
28_1I	1.5691	1.6920	1.1204
28_1T	1.5344	1.6308	1.0714
28_1_1T	1.6284	1.8757	1.1828
28_3_1T	1.3513	1.9125	1.3492
28_5_1T	1.2835	1.8759	1.3084
28_7_1T	1.2632	1.8457	1.2417
28_9_1T	1.3472	1.9044	1.2851
28_11_1T	1.2414	2.0719	1.4893
28_13_1T	1.1559	2.0984	1.3977
28_15_1T	1.2953	1.9350	1.3612
28_30_1T	1.2862	1.6773	1.2438

Tabela 4.16: Desempenho de redes MLP para a série do máximo considerando variáveis adicionais.

Os mesmos critérios usados para podar as Redes Neurais treinadas com dados sobre moedas foram aplicados no caso das séries de ações. As arquiteturas 28_1_1T e 28_1T foram selecionadas para os preços mínimo e máximo, respectivamente. O mesmo algoritmo de seleção de variáveis, usando o método de poda *Skeletonization* e o critério de parada que permitia somente um aumento de 10% do erro de validação, foi aplicado para a eliminação de variáveis sem relevância.

As Figura 4.13 e 4.14 mostram a avaliação do desempenho durante o treinamento, validação e teste das arquiteturas resultantes da atuação desta técnica de seleção de variáveis. É interessante observar que a medida que a curva de erros de validação crescia ou decrescia, este comportamento se refletia no erro de teste. Isto indica que o conjunto de validação foi uma boa estimativa do erro de generalização neste dois casos específicos.

Figura 4.13: Seleção de variáveis para a série do mínimo.

Figura 4.14: Seleção de variáveis para a série do máximo.

Além disso, como pode-se observar na Figura 4.13, apenas houve um aumento brusco do erro de validação para a série do mínimo, selecionando as quatro entradas mostrada pela Tabela 4.17a. Isto já não ocorreu para o preço máximo. Para esta série, ocorreu uma recuperação após o erro de validação ultrapassar pela primeira vez o limite pré-especificado, provocando a seleção das três variáveis ilustradas pela Tabela 4.17b.

Em ambos os casos, houve um pequeno prejuízo no erro de teste. Contudo, este é o preço que se paga pela obtenção de um modelo menor de previsão. Outro fato importante a ser notado é que as entradas que continham informações sobre o preço mínimo ou máximo foram eliminadas no final poda, criando um modelo alternativo, baseado principalmente nos valores de abertura e fechamento das ações. Este modelo ainda apresentou erros menores de previsão do que as redes treinadas somente com os valores das séries individuais.

	Negs	Tits	Vol	Aber	Fech	Min	Max	Méd
t-1								
t-2								
t-3								
t-4								

Tabela 4.17a: Variáveis selecionadas para o preço mínimo.

	Negs	Tits	Vol	Aber	Fech	Min	Max	Méd
t-1								
t-2								
t-3								
t-4								

Tabela 4.17b: Variáveis selecionadas para o preço máximo.

4.3.3 Processamento Temporal

Os experimentos envolvendo Redes Neurais com memórias de curto e longo prazos foram também realizados para as séries temporais de ações e moedas. Anteriormente, os modelos TDNN e de Elman e Jordan foram diretamente treinados com as séries não estacionárias com o objetivo de extrair comportamentos como tendências lineares e mudanças de níveis. Entretanto, os resultados não foram satisfatórios e novas melhorias foram aplicadas. Ao invés de se trabalhar com os valores originais da série, foram executadas as operações de diferenciação que obtiveram sucesso nos experimentos com as redes MLP. Isto foi realizado em virtude da observação de que nem todo comportamento não estacionário é eliminado através deste recurso. Assim sendo, torna-se plausível a exploração das características temporais destes modelos em tal contexto. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

4.3.3.1 Moedas

As séries temporais da Libra Esterlinas e Marco Alemão foram algumas das fontes de dados utilizadas para treinar alguns modelos de Redes Neurais com memória de curto e longo prazos. A série da Libra Esterlina não foi diferenciada, uma vez que sua análise estocástica identificou um modelo *random walk* que melhor a representava. Por outro lado, a série temporal do Marco Alemão exigiu pré-processamento através da execução de uma operação de diferenciação.

4.3.3.1.1 TDNN

Neste trabalho, o desempenho do modelo TDNN foi analisado através dos efeitos provocados por diferentes atrasos na camada intermediária e de saída das melhores redes MLP treinadas na seção 4.3.1.1. Para a Libra Esterlina, estes atrasos foram submetidos a uma arquitetura com um neurônio na camada de entrada, dez neurônios na camada intermediária e um neurônio na camada de saída, conforme ilustra a Tabela 4.18. No caso do Marco Alemão, os atrasos foram adicionados a uma arquitetura MLP com um, três e um neurônios nas camadas de entrada, intermediária e de saída, respectivamente, de acordo com o que é apresentado pela Tabela 4.19.

Os atrasos da camada de entrada foram determinados através das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial. Em seguida, diversas possibilidades de atrasos da camada intermediária e da camada de saída foram avaliadas. Estes atrasos são representados seguindo a notação $D_h\_D_o$, em que D_h é o número de atrasos na camada intermediária e D_o é o número de

atrasos na camada de saída. A Figura 4.15 ilustra o exemplo de uma arquitetura TDNN espacialmente expandida para $D_h=0$ e $D_o=3$. Os círculos preenchidos em preto representam os verdadeiros neurônios da rede. Os círculos sem preenchimento ilustram as cópias destes neurônios que estão defasadas temporalmente.

O acréscimo de atrasos provocou uma suave melhora tanto para a série da Libra Esterlina quanto para a série do Marco Alemão.

Figura 4.15: TDNN expandida para $D_h = 0$ e $D_o = 3$.

Atrasos	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
0_1	0.4436	0.4505	0.4042
0_3	0.4507	0.4449	0.4125
0_6	0.4564	0.4448	0.3969
1_0	0.4650	0.4531	0.4043
3_0	0.4662	0.4670	0.4176
6_0	0.4701	0.4644	0.4192

Tabela 4.18: Desempenho das redes TDNN para a série da Libra.

Atrasos	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
0_1	0.5102	0.5111	0.4386
0_3	0.5106	0.4971	0.4373
0_6	0.5060	0.5032	0.4361
1_0	0.5047	0.5100	0.4365
3_0	0.5080	0.5158	0.4344
6_0	0.5131	0.5149	0.4381

Tabela 4.19: Desempenho das redes TDNN para a série do Marco diferenciada.

4.3.3.1.2 Redes Recorrentes

As redes recorrentes de Elman e Jordan também foram treinadas com os valores das séries de cotações de moedas pré-processadas por operações de diferenciação. Ao contrário das redes MLP e TDNN, as redes com memória de longo prazo possuíam um neurônio na camada de entrada, diversos neurônios na intermediária e um neurônio na camada de saída. O neurônio de

entrada representava uma observação passada da série, z_{t-1} , enquanto o neurônio da camada de saída ilustrava o valor atual a ser previsto, z_t . As Tabelas 4.20 e 4.21 apresentam as taxas de erro em MRE dos conjuntos de treinamento, validação e teste para a Libra Esterlina. Para a série do Marco Alemão, os resultados obtidos são ilustrados pelas Tabelas 4.22 e 4.23. É importante ressaltar novamente que essas taxas não são médias por partições devido às características de memória destas redes.

Arquitetura	Treinamento MRE (%)	Validação MRE (%)	Teste MRE (%)
1_1_1L	0.3773	4.4367	0.6492
1_3_1L	0.3191	1.8072	0.2904
1_5_1L	0.3410	1.2496	0.4170
1_7_1L	0.9503	1.6711	1.1344
1_9_1L	0.6947	1.2757	0.9432
1_11_1L	0.3379	1.8426	0.2894
1_13_1L	0.3664	1.4309	0.3029
1_15_1L	0.3313	1.0146	0.3250
1_20_1L	0.3263	1.8101	0.3167
1_25_1L	0.4128	1.0307	0.3359
1_30_1L	0.5801	0.8799	0.8383

Tabela 4.20: Desempenho das redes Elman para a série da Libra Esterlina.

Arquitetura	Treinamento MRE (%)	Validação MRE (%)	Teste MRE (%)
1_1_1L	0.3728	4.0801	0.5908
1_3_1L	0.3154	0.6217	0.3344
1_5_1L	0.3145	0.9897	0.3297
1_7_1L	2.1982	0.8508	1.3983
1_9_1L	1.9095	0.6316	1.0278
1_11_1L	0.3449	0.8056	0.3271
1_13_1L	1.2738	0.6940	0.3997
1_15_1L	0.3194	0.9676	0.3830
1_20_1L	0.3584	1.4920	0.3408
1_25_1L	0.8933	0.7925	0.3998
1_30_1L	0.9744	0.8138	0.3574

Tabela 4.21: Desempenho das redes Jordan para a série da Libra Esterlina.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.4515	0.6110	0.4351
1 3 1L	0.4496	0.6093	0.4423
1 5 1L	0.4504	0.6131	0.4390
1 7 1L	0.4529	0.6114	0.4344
1 9 1L	0.4518	0.6126	0.4318
1 11 1L	0.4498	0.6127	0.4343
1 13 1L	0.4493	0.6167	0.4414
1 15 1L	0.4486	0.6133	0.4327
1 20 1L	0.4484	0.6158	0.4372
1 25 1L	0.4508	0.6134	0.4320
1 30 1L	0.4507	0.6084	0.4342

Tabela 4.22: Desempenho das redes Elman para a série do Marco diferenciada.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.4495	0.6150	0.4355
1 3 1L	0.4515	0.6118	0.4349
1 5 1L	0.4516	0.6115	0.4392
1 7 1L	0.4516	0.6115	0.4398
1 9 1L	0.4516	0.6116	0.4383
1 11 1L	0.4516	0.6114	0.4377
1 13 1L	0.4517	0.6116	0.4388
1 15 1L	0.4516	0.6113	0.4368
1 20 1L	0.4516	0.6115	0.4369
1 25 1L	0.4516	0.6113	0.4368
1 30 1L	0.4515	0.6113	0.4361

Tabela 4.23: Desempenho das redes Jordan para a série do Marco diferenciada.

Ao contrário das arquiteturas TDNN, as redes de Elman e Jordan foram capazes de extrair melhor o comportamento global da série e generalizar o conjunto de treinamento. Houve uma melhora significativa no erro de previsão especialmente para a série da Libra Esterlina. Para o Marco Alemão, as redes com memória de longo prazo se comportaram similarmente às redes MLP. Um resultado interessante é o tamanho da arquiteturas destas redes. Na maioria dos casos, os melhores resultados só foram obtidos com um número relativamente grande de neurônios na camada intermediária.

4.3.3.2 Ações

Da mesma forma que as séries temporais de moedas, as redes TDNN e as redes recorrentes de Elman e Jordan também foram treinadas com dados sobre os preços mínimo e máximo das ações da TELEBRAS. Estes dados foram pré-processados através de operações de diferenciação.

4.3.3.2.1 TDNN

O modelo TDNN também utilizou, em seu projeto, informações a priori adquiridas a partir da análise estocástica da série de preços diários de ações. As arquiteturas TDNN também foram projetadas com um neurônio na camada de entrada, um ou mais neurônios na camada intermediária e um neurônio na camada de saída.

Os atrasos da camada da entrada foram determinados em um dia e dois dias passados para as séries de preços mínimo e máximo, respectivamente. Eles foram definidos através das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial. Em seguida, diversas combinações de atrasos das camadas intermediária e de saídas foram adicionadas às melhores redes MLP selecionadas anteriormente. Para o preço mínimo das ações, a melhor rede MLP apresentava um, três e um neurônio nas camadas de entrada, intermediária e de saída, respectivamente. A melhor rede MLP selecionada para o preço máximo possuía dois neurônios na camada de entrada e apenas um neurônio tanto na camada intermediária quanto na de saída. As Tabelas 4.24 e 4.25 apresentam os erros médios por partição das previsões de treinamento, validação e teste de algumas destas combinações para ambas as séries.

Atrasos	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
0_1	2.2567	2.2730	1.0734
0_3	2.3085	2.3423	1.1202
0_6	2.3261	2.2927	1.0944
1_0	2.2285	2.2997	1.1603
3_0	2.2458	2.3483	1.1608
6_0	2.2416	2.2745	1.1699

Tabela 4.24: Desempenho das redes TDNN para a série do mínimo diferenciada.

Atrasos	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
0_1	2.0363	1.9116	1.2086
0_3	1.9910	1.9637	1.2446
0_6	1.9873	1.9103	1.1956
1_0	2.0216	2.0453	1.2408
3_0	1.9910	1.9637	1.2446
6_0	2.0963	2.0177	1.3355

Tabela 4.25: Desempenho das redes TDNN para a série do máximo diferenciada.

O uso das redes TDNNs provocou suaves melhoras no desempenho das previsões 1-passo-a-frente das séries de ações. Em ambos os casos, os erros destas redes foram visivelmente

menores quando atrasos foram adicionados na camada intermediária. Apenas os atrasos na camada de saída provocaram quedas nas taxas de erro.

4.3.3.2.2 Redes Recorrentes

Os comportamentos das redes recorrentes de Elman e Jordan também foram analisados para as séries temporais de preços mínimo e máximo de ações. As Tabelas 4.26 e 4.28 ilustram as taxas de erro em MRE das redes de Elman para os conjuntos de treinamento, validação e teste destas séries. As Tabelas 4.27 e 4.29 mostram os desempenhos de previsões das redes de Jordan. Estes erros não foram calculados como médias por partições devido às mesmas razões apresentadas anteriormente.

Arquitetura	Treinamento MRE (%)	Validação MRE (%)	Teste MRE (%)
1_1_1L	2.6755	1.3234	1.1159
1_3_1L	2.6206	1.3203	1.1020
1_5_1L	2.5473	1.3221	1.1525
1_7_1L	2.5553	1.3028	1.2196
1_9_1L	2.4357	1.3759	1.1535
1_11_1L	2.5675	1.3177	1.1802
1_13_1L	2.5963	1.3652	1.1329
1_15_1L	2.6850	1.3190	1.0989
1_20_1L	2.5227	1.3094	1.1957
1_25_1L	2.5976	1.3226	1.1668
1_30_1L	2.5762	1.3443	1.1111

Tabela 4.26: Desempenho das redes Elman para a série do mínimo diferenciada.

Arquitetura	Treinamento MRE (%)	Validação MRE (%)	Teste MRE (%)
1_1_1L	2.6787	1.3326	1.1352
1_3_1L	2.6186	1.2851	1.1160
1_5_1L	2.6775	1.3282	1.1216
1_7_1L	2.5629	1.4083	1.2092
1_9_1L	2.6193	1.2990	1.1418
1_11_1L	2.5277	1.5141	1.0924
1_13_1L	2.5868	1.4152	2.4277
1_15_1L	2.5781	1.3407	1.1691
1_20_1L	2.6803	1.3274	1.1166
1_25_1L	2.4926	1.3491	1.2331
1_30_1L	2.5141	6.3061	1.5117

Tabela 4.27: Desempenho das redes Jordan para a série do mínimo diferenciada.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.2590	1.2416	1.2279
1 3 1L	2.1888	1.2179	1.2374
1 5 1L	2.1949	1.2556	1.2907
1 7 1L	2.1829	1.2823	1.2283
1 9 1L	2.1108	1.2553	1.3066
1 11 1L	2.1519	1.2922	1.2622
1 13 1L	8.2443	4.2143	1.3048
1 15 1L	2.1936	1.2714	1.2863
1 20 1L	2.1563	1.2919	1.2463
1 25 1L	2.1734	1.2736	1.2974
1 30 1L	2.2216	1.2427	1.2829

Tabela 4.28: Desempenho das redes Elman para a série do máximo diferenciada.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.2591	1.2386	1.2596
1 3 1L	2.2799	1.2606	1.2453
1 5 1L	2.2242	1.2379	1.2556
1 7 1L	2.2196	1.2465	1.2599
1 9 1L	2.1972	1.2238	1.1834
1 11 1L	2.2196	1.2414	1.1898
1 13 1L	2.2649	1.2604	1.2311
1 15 1L	2.1745	1.2476	1.2102
1 20 1L	2.2708	1.2518	1.2246
1 25 1L	2.2075	1.2124	1.2016
1 30 1L	2.2244	1.2287	1.2050

Tabela 4.29: Desempenho das redes Jordan para a série do máximo diferenciada.

Da mesma forma que os modelos TDNN, as redes de Elman e Jordan não provocaram quedas significativas nos erros de previsão gerando resultados semelhantes àqueles das redes MLP. Entretanto, o esforço de projeto foi reduzido pelo fato de que a análise das funções de auto-correlação e auto-correlação parcial não foi necessária para se obter tais resultados similares.

4.3.4 Combinadores de Previsão

O objetivo principal destes experimentos é avaliar se a utilização de comitês ou combinadores de previsão pode provocar melhoras da previsão do tipo 1-passo-a-frente das séries temporais financeiras estudadas.

O primeiro passo dado foi a seleção dos membros do comitê. Os melhores previsores de cada série temporal de moedas e ações foram combinados buscando uma redução de variabilidade dos erros individuais de seus membros. Os membros do comitê foram representados pelo modelo Box & Jenkins ajustado e pelas melhores redes MLP, Elman, Jordan e TDNN treinadas somente com valores próprios de cada série. Nenhuma variável externa foi considerada na concepção destes membros.

Em seguida, foram realizadas as combinações destes previsores através da média das previsões e usando Redes Neurais do tipo MLP, Elman e Jordan. Todas estas redes recebiam como entrada as previsões dos cinco membros e tentavam explorar as suas características individuais.

4.3.4.1 Moedas

Os membros dos comitês da Libra Esterlina foram o modelo *random walk* ajustado, uma rede MLP com arquitetura 1_10_1T, uma rede Elman com arquitetura 1_25_1L, uma rede Jordan com arquitetura 1_3_1L e uma rede TDNN com arquitetura 1_10_1T sem atrasos na camada intermediária e com seis atrasos na camada de saída.

Já para a série do Marco Alemão, o modelo *ARI(1,1)* ajustado, uma rede MLP com arquitetura 2_1_1T, uma rede Elman com arquitetura 1_25_1L, uma rede Jordan com arquitetura 1_3_1L e uma rede TDNN com arquitetura 2_1_1T sem atrasos na camada intermediária e com três atrasos na camada de saída participaram diretamente na formação dos comitês.

Apesar das Redes Neurais utilizarem diferentes tipos de funções de ativação, não houve nenhum problema durante a combinação das previsões uma vez que esta apenas foi realizada após a desnormalização ser executada.

Em seguida, as previsões foram combinadas usando uma média aritmética e alguns modelos de RNAs. Entre tais modelos, estavam presentes redes do tipo MLP, Elman e Jordan. As redes recorrentes foram também selecionadas devido às suas características temporais serem propícias para o tipo de mapeamento desejado.

As taxas de erros de teste em MRE da utilização da média aritmética como comitê para as séries da Libra Esterlina e Marco Alemão são ilustradas através da Tabela 4.30.

Série	Teste MRE (%)
Libra	0.4061
Marco	0.9805

Tabela 4.30: Desempenho comitê por média para as séries da Libra Esterlina e Marco Alemão.

Os desempenhos das RNAs do tipo MLPs, Elman e Jordan para combinação das melhores previsões da Libra Esterlina são apresentados através das Tabelas 4.31, 4.32 e 4.33, respectivamente. Para os três tipos de modelos neurais, houve uma grande diferença de desempenhos de acordo com a variação das dimensões das arquiteturas. Contudo, as redes MLP e de Elman obtiveram uma leve redução na taxa de erro do conjunto de teste. Esta redução proporcionou inclusive resultados melhores que aqueles obtidos pelos membros individuais do comitê.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1I	0.4439	0.4549	0.3973
1 1L	0.8227	0.8223	0.7185
1 1 1L	0.8511	0.8515	0.7422
1 3 1L	0.5660	0.5764	0.4642
1 5 1L	0.4931	0.5055	0.3874
1 7 1L	0.4897	0.5014	0.3873
1 9 1L	0.4891	0.5009	0.3869
1 11 1L	0.4882	0.4999	0.3863
1 13 1L	0.4884	0.5002	0.3875
1 15 1L	0.4885	0.5005	0.3856

Tabela 4.31: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para a Libra Esterlina.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.3991	4.6787	0.4269
1 3 1L	0.4017	2.4546	0.3861
1 5 1L	0.3871	2.2302	0.3931
1 7 1L	0.9632	2.0750	1.2296
1 9 1L	0.7727	2.2586	1.7444
1 11 1L	3.0987	1.4945	1.1056
1 13 1L	0.7009	2.9578	0.4958
1 15 1L	0.4089	1.3563	0.3778

Tabela 4.32: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para a Libra Esterlina.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.4039	5.0453	0.4743
1 3 1L	7.4074	1.6771	5.5103
1 5 1L	0.3898	0.9578	0.4405
1 7 1L	2.4592	0.8584	0.8554
1 9 1L	0.4257	0.7888	0.3993
1 11 1L	2.9355	1.2458	1.7812
1 13 1L	0.3979	0.9343	0.4258
1 15 1L	0.7430	1.3974	0.9795

Tabela 4.33: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para a Libra Esterlina.

Os melhores previsores da série do Marco Alemão também foram combinados por Redes Neurais, cujos desempenhos são ilustrados pelas Tabelas 4.34, 4.35 e 4.36. Conforme pode ser observado, nenhuma das Redes Neurais propiciou melhoras significativas nos erros de previsão 1-passo-a-frente.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1I	0.5075	0.4912	0.4352
1 1L	0.5076	0.4913	0.4352
1 1 1L	0.5079	0.4915	0.4354
1 3 1L	0.5078	0.4913	0.4353
1 5 1L	0.5078	0.4913	0.4353
1 7 1L	0.5078	0.4913	0.4353
1 9 1L	0.5078	0.4913	0.4353
1 11 1L	0.5077	0.4913	0.4352
1 13 1L	0.5078	0.4913	0.4353
1 15 1L	0.5077	0.4913	0.4352

Tabela 4.34: Desempenho das rede MLPs usadas como comitês para o Marco Alemão.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.4501	0.6104	0.4350
1 3 1L	0.4473	0.6220	0.4341
1 5 1L	0.4479	0.6147	0.4375
1 7 1L	0.4488	0.6166	0.4321
1 9 1L	0.4504	0.6111	0.4342
1 11 1L	0.4474	0.6217	0.4375
1 13 1L	0.4502	0.6238	0.4437
1 15 1L	0.4509	0.6100	0.4343

Tabela 4.35: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para o Marco Alemão.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	0.4506	0.6108	0.4408
1 3 1L	0.0956	0.2248	0.4380
1 5 1L	0.4505	0.6111	0.4372
1 7 1L	0.4499	0.6113	0.4379
1 9 1L	0.0933	0.1479	0.4378
1 11 1L	0.1091	0.1566	0.4370
1 13 1L	0.4508	0.6112	0.4362
1 15 1L	0.4508	0.6112	0.4383

Tabela 4.36: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para o Marco Alemão.

Tanto para Libra Esterlina quanto para o Marco Alemão, os benefícios da utilização de comitês não compensaram os custos envolvidos em sua construção. Esta séries são relativamente simples de prever o que não justifica a utilização de recursos tão sofisticados.

4.3.4.2 Ações

Da mesma forma que para as séries de cotação de moedas, os experimentos envolvendo comitês foram repetidos os preços de ações. Os comitês de ações foram também constituídos pelos melhores previsores de cada uma das séries. Além da média aritmética, também foram utilizados diferentes modelos de Redes Neurais para a combinação de previsões.

Os membros seleccionados para os comitês de previsão da série do preço mínimo de ações da TELEBRAS foram o modelo $ARI(1,1)$ ajustado, uma rede MLP com arquitetura 1_3_1T, uma rede Elman com arquitetura 1_15_1L, uma rede Jordan com arquitetura 1_7_1L e uma rede TDNN com arquitetura 1_3_1L sem atrasos na camada intermediária e com um atraso na camada de saída.

Já para o caso do preço máximo, o modelo $ARI(2,1)$ ajustado, uma rede MLP com arquitetura 2_1_1T, uma rede Elman com arquitetura 1_25_1L, uma rede Jordan com arquitetura 1_3_1L e uma rede TDNN com arquitetura 2_1_1T sem atraso na camada intermediária e com seis atrasos na camada de saída foram os membros que participaram diretamente na formação dos comitês.

As taxas de erros em MRE da utilização da média aritmética como comitê para os conjuntos de teste da séries do preço mínimo e máximo das ações são apresentadas através da Tabela 4.37.

Série	Teste MRE (%)
Mínimo	1.0990
Máximo	1.2039

Tabela 4.37: Desempenho de comitês por média dos preços mínimo e máximo.

Os erros de treinamento, validação e teste das Redes Neurais do tipo MLP, Elman e Jordan usadas como combinadores de previsão para a série do preço mínimo são ilustrados através das Tabelas 4.38, 4.39, e 4.40, respectivamente. Neste caso, não houve uma redução significativa do erro de previsão 1-passo-a-frente, o que talvez não compensaria o aumento de complexidade inerente do uso de comitês. Tanto as RNAs do tipo MLP quanto as recorrentes provavelmente se confundiram com os ruídos das previsões, buscando representá-los como possíveis relacionamentos. O custo desta complexidade torna-se perceptível principalmente quando se tenta realizar uma previsão do tipo vários-passos-a-frente com o comitê. Para tanto, antes de prever a série de interesse é necessário realizar a previsão vários-passos-a-frente de cada série adicional.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1I	2.6105	2.4283	1.6925
1 1L	2.2393	1.9781	1.2183
1 1 1L	2.2376	1.9872	1.1958
1 3 1L	2.2331	1.9820	1.2074
1 5 1L	2.2330	1.9827	1.2086
1 7 1L	2.2331	1.9827	1.2086
1 9 1L	2.2331	1.9829	1.2091
1 11 1L	2.2330	1.9828	1.2092
1 13 1L	2.2351	1.9808	1.2070
1 15 1L	2.2330	1.9829	1.2093

Tabela 4.38: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para o preço mínimo.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.4968	1.3393	1.2403
1 3 1L	2.4331	1.3636	1.4732
1 5 1L	2.4001	1.3426	1.2858
1 7 1L	2.3869	1.3433	1.3573
1 9 1L	2.3906	1.3460	1.2622
1 11 1L	2.4070	1.3484	1.2952
1 13 1L	2.3007	1.3270	1.2879
1 15 1L	2.3847	1.3512	1.3569

Tabela 4.39: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para o preço mínimo.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.4894	1.3533	1.2442
1 3 1L	2.4773	1.3466	1.2447
1 5 1L	2.4833	1.3583	1.2630
1 7 1L	2.5024	1.3446	1.2194
1 9 1L	2.4870	1.3553	1.2603
1 11 1L	2.4793	1.3564	1.2904
1 13 1L	2.4506	1.3557	1.2853
1 15 1L	2.4569	1.3605	1.2825

Tabela 4.40: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para o preço mínimo.

Para a série do preço máximo, os resultados obtidos por redes MLP, Elman e Jordan são ilustrados através das Tabelas 4.41, 4.42 e 4.43, respectivamente. As Redes Neurais se comportaram similarmente aos comitês neurais da Libra Esterlina proporcionando leves diminuições nos erros de previsão 1-passo-a-frente.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 11	2.1586	2.0287	1.2821
1 1L	1.9257	1.8367	1.1962
1 1 1L	1.9259	1.8349	1.1966
1 3 1L	1.9240	1.8378	1.1962
1 5 1L	1.9238	1.8374	1.1963
1 7 1L	1.9240	1.8379	1.1963
1 9 1L	1.9240	1.8376	1.1962
1 11 1L	1.9241	1.8378	1.1962
1 13 1L	1.9241	1.8363	1.1963
1 15 1L	1.9243	1.8378	1.1961

Tabela 4.41: Desempenho das redes MLP usadas como comitês para o preço máximo.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.1820	1.2146	1.1901
1 3 1L	2.1542	1.2222	1.2798
1 5 1L	2.1376	1.2312	1.2094
1 7 1L	2.1022	1.2682	1.1916
1 9 1L	2.1394	1.2017	1.1773
1 11 1L	2.1345	1.2868	1.1700
1 13 1L	2.1216	1.2521	1.1967
1 15 1L	2.2347	1.2763	1.2248

Tabela 4.42: Desempenho das redes de Elman usadas como comitês para a o preço máximo.

Arquitetura	Treinamento <i>MRE (%)</i>	Validação <i>MRE (%)</i>	Teste <i>MRE (%)</i>
1 1 1L	2.1836	1.2109	1.1845
1 3 1L	2.1495	1.2548	1.1991
1 5 1L	2.1693	1.2266	1.2051
1 7 1L	2.1678	1.2806	1.2436
1 9 1L	2.1031	1.2728	1.4156
1 11 1L	2.1329	1.2581	1.2198
1 13 1L	2.1311	1.2759	1.2133
1 15 1L	2.0745	1.3253	1.3151

Tabela 4.43: Desempenho das redes de Jordan usadas como comitês para o preço máximo.

4.3.5 Comparação Final

Esta subseção apresenta uma comparação final dos resultados obtidos através de alguns gráficos de previsão 1-passo-a-frente e vários-passos-a-frente realizadas pelos modelos Box & Jenkins e RNAs.

Os gráficos das previsões 1-passo-a-frente são construídos para comparar os desempenhos dos modelos estocásticos e das Redes Neurais que foram ajustados e treinados apenas com dados referentes às próprias séries.

A previsão vários-passos-a-frente somente é analisada para os previsores que utilizaram a entradas de cada série individual em sua construção.

4.3.5.1 Previsão 1-passo-a-frente

A seguir, são ilustrados os gráficos de previsões 1-passo-a-frente realizadas para as séries de cotações de moedas e preços diários de ações.

4.3.5.1.1 Moedas

Os resultados dos melhores previsores da Libra Esterlina e Marco Alemão são apresentados através das Figuras 4.16 e 4.17, respectivamente. A curva em preto representa as observações da série e as demais ilustram as previsões do modelo Box & Jenkins ajustado e das melhores redes MLP, Elman, Jordan e TDNN. Em ambos os casos, a maioria dos previsores apresentou um desempenho semelhante, a não ser pela rede MLP treinada com dados sobre a série temporal do Marco Alemão. O comportamento não estacionário foi satisfatoriamente eliminado. Isto evitou grandes defasagens a medida que as observações da série vão se distanciando da amostragem usada no treinamento e ajuste dos modelos.

Figura 4.16: Previsões 1-passo-a-frente da Libra Esterlina.

Figura 4.17: Previsões 1-passo-a-frente do Marco Alemão.

4.3.5.1.2 Ações

As previsões 1-passo-a-frente do conjunto de teste das séries de preço mínimo e máximo de ações realizadas pelo modelo $ARI(1,1)$ e pelas melhores Redes Neurais treinadas são

comparadas através das Figuras 4.18 e 4.19, respectivamente. O comportamento não estacionário foi devidamente eliminado, o que contribuiu para a realização de boas previsões. Apesar da obtenção alguns erros menores com as redes recorrentes e TDNN, esta diferença não é perceptível apenas com a visualização das previsões 1-passo-a-frente. Isto ocorre provavelmente porque as redes prevêm as diferenças entre a observação atual e a observação passada e uma maior precisão não contribui tão efetivamente neste caso.

Figura 4.18: Previsões 1-passo-a-frente do preço mínimo de ações.

Figura 4.19: Previsões 1-passo-a-frente do preço máximo de ações.

4.3.5.2 Previsão Vário-passos-a-frente

Algumas previsões vários-passos-a-frente do tipo incremental foram realizadas tanto para as séries de cotações de moedas quanto para as de preços de ações, considerando 60 dias a frente. Os mesmos modelos Box & Jenkins ajustados e as mesmas Redes Neurais treinadas foram também empregadas para esta finalidade. É importante ressaltar que o objetivo principal deste tipo de previsão é apenas verificar se o predictor consegue abstrair o comportamento genérico da série, como por exemplo, um tipo linear de crescimento. Os erros propriamente ditos não são tão importantes.

4.3.5.2.1 Moedas

As previsões vários-passos-a-frente para as séries de moedas não produziram resultados tão bons conforme ilustram as Figuras 4.20 e 4.21.

A série da Libra Esterlina apresentou no conjunto de teste um leve crescimento que não foi percebido por nenhum dos previsores. A rede MLP e o modelo Box & Jenkins produziram somente previsões constantes. O uso das redes recorrentes e TDNNs pareceu ser exagerado e desnecessário. Tais modelos provavelmente se confundiram, gerando super estimativas e sub estimativas.

Já para a série do Marco Alemão, foram obtidas previsões vários-passos-a-frente um pouco melhores. O modelo ARI(1,1) e as redes Elman produziram previsões praticamente constantes. As redes MLP, Jordan e TDNN apontaram um crescimento levemente acentuado. Contudo, é importante enfatizar que houve pouca variação da cotação desta moeda no período, prejudicando a obtenção de resultados mais precisos.

Figura 4.20: Previsões vários-passos-a-frente da Libra Esterlina.

Figura 4.21: Previsões vários-passos-a-frente do Marco Alemão.

4.3.5.2.2 Ações

As previsões vários-passos-a-frente das séries de preços de ações obtiveram muito mais sucesso do que no caso das séries de cotações de moedas, como se pode observar nas Figuras 4.22 e 4.23.

Os modelos Box & Jenkins ajustados não conseguiram produzir boas previsões do tipo vários-passos-a-frente para ambas as séries. Um resultado um tanto surpreendente foi a observação de que as redes MLP foram capazes de abstrair suaves crescimentos das séries de preço mínimo e máximo.

As redes recorrentes e TDNN obtiveram ótimo desempenho na representação do comportamento não estacionário das séries, especialmente para o preço mínimo. Na maioria dos casos, estes modelos neurais apontaram um aumento brusco do preço das ações dentro do período analisado. Contudo, a rede de Elman se confundiu e apontou uma desvalorização do preço máximo das ações da TELEBRAS. Isto ressalta a importância de se analisar o comportamento de vários previsores antes de se tomar uma decisão de mercado.

Figura 4.22: Previsões vários-passos-a-frente das séries do preço mínimo.

Figura 4.23: Previsões vários-passos-a-frente das séries do preço máximo.

4.4 Considerações Finais

As RNAs não são capazes por si próprias de construir um modelo parcimonioso de previsão. É necessário a ajuda de recursos externos para garantir que este requisito seja satisfeito.

Os recursos do método Box & Jenkins foram de fundamental importância para a obtenção de previsores neurais de boa qualidade. Além de fornecer um parâmetro de comparação, suas técnicas de pré-processamento da série e identificação de modelos forneceram informações úteis para o projeto das arquiteturas das RNAs. Indubitavelmente, estas informações propiciaram o equiparamento de desempenhos de previsão entre as RNAs e os modelos estocásticos ajustados.

Os métodos de poda de RNAs podem ser uma solução interessante para o projeto de arquiteturas otimizadas em previsão. Além dos relacionamentos referentes às informações passadas da série que deseja prever, estes métodos podem ainda revelar dependências temporais com outras séries. Entretanto, existem certas dificuldades. Os métodos de poda só podem ser aplicados em RNAs *feedforward* e são muito dependentes da arquitetura inicial e dos dados empregados durante as suas atuações. Bons resultados apenas foram obtidos após a diferenciação da séries cujas observações foram consideradas como variáveis de entrada. Além disso, existe uma forte necessidade de que as estimativas do erro de generalização da arquitetura da RNA sejam rápidas e razoavelmente precisas.

As RNAs com memória de longo e curto prazos conseguiram obter bons desempenhos somente após as séries sofrerem operações de diferenciação. Os erros de previsão 1-passo-a-

frente destas RNAs não foi muito menor do que o dos outros previsores. Contudo, o que impressionou foram os resultados de previsão vários-passos-a-frente. Para boa parte dos casos, estas RNAs conseguiram extrair com sucesso os comportamentos futuros das séries.

Antes de utilizar métodos mais sofisticados de previsão, é necessário avaliar a relação custo/benefícios de seus modelos. Nem sempre compensa empregar recursos sofisticados para prever uma série temporal. Em algumas séries muito simples, como por exemplo a Libra Esterlina e Marco Alemão, é possível obter bons resultados com os modelos Box & Jenkins ajustados e com as RNAs mais simples. Além disso, o aumento de complexidade com a utilização de série adicionais e comitês pode não justificar as pequenas melhoras obtidas.

5. Conclusão

Este capítulo apresenta algumas conclusões preliminares e trabalhos futuros para esta dissertação. A seção 5.1 apresenta as principais conclusões obtidas a partir dos trabalhos desenvolvidos com Redes Neurais e métodos Box & Jenkins para previsão de séries temporais financeiras. Alguns possíveis caminhos futuros são também apontados e discutidos através da seção 5.2.

5.1 Conclusões Preliminares

Do ponto de vista estatístico, o campo de previsão de séries temporais já está bastante estruturado e formalizado. Atualmente, é possível fazer previsões através de métodos que utilizam informações passadas tanto da série de interesse individualmente bem como de séries adicionais. A maioria dos modelos destes métodos são lineares e destinam-se a realizar previsões do tipo 1-passo-a-frente. Contudo, o horizonte de previsão pode ser aumentado, utilizando indiretamente as previsões 1-passo-a-frente para realizar as previsões vários-passos-a-frente.

O principal representante do métodos estocástico de previsão é o método Box & Jenkins que realiza análise de uma série temporal em etapas. Basicamente, estas etapas buscam a eliminação de comportamentos não estacionários, quando necessária, e a escolha e ajuste do modelo linear mais adequado para representar a série.

A utilização de Redes Neurais Artificiais aparenta ser uma alternativa viável para a previsão de séries temporais. Ao contrário da maioria dos métodos tradicionais de previsão, as RNAs possuem modelos não lineares que podem ser facilmente ajustados para a realização deste tipo de tarefa através de um processo de treinamento. As RNAs são capazes de aprender mapeamentos complexos através da utilização de exemplos ou padrões. Este processo de aprendizagem consiste basicamente do ajuste dos pesos das conexões entre neurônios e seus respectivos limiares. Contudo, tal ajuste não pode apenas considerar o desempenho de treinamento da RNA. A capacidade de generalização também tem que ser levada em conta para garantir um desempenho futuro adequado. No contexto de previsão, este requisito deve ser ainda mais rigorosamente atendido.

As três abordagens de previsores neurais investigadas nesta dissertação obtiveram bons desempenhos na busca por arquiteturas mais parcimoniosas e com melhores capacidades de generalização para a previsão de séries temporais de cotação de moedas e de preços de ações.

A análise estocástica da séries temporais foi primordial para obtenção de bons previsores neurais. As rede MLP não foram capazes de realizar eficientemente previsões para séries temporais não estacionárias. Nas primeiras observações do conjunto de teste, estas RNAs ainda conseguiram acompanhar o comportamento da série. Uma degradação de desempenho ocorreu à medida que o tempo se prolongava. Isto provavelmente aconteceu porque a RNA tentava se comportar como se ela estivesse manipulando observações do conjunto de treinamento ou validação. Para os preços de ações, em que havia uma tendência linear muito forte, as RNAs treinadas com dados originais das séries apenas visualizavam valores que flutuavam mais ou menos entre R\$30,00 e R\$80,00 em seus treinamentos. No conjunto de teste, onde o preço chegava a alcançar R\$115,00, a RNA não conseguiu prever tais aumentos repentinos.

Em vista disto, as operações de diferenciação de ordem d foram ferramentas muito úteis na eliminação da não estacionariedade. Infelizmente, este recurso não pode ser utilizado em qualquer tipo de série não estacionária. No problema de ações e moedas, onde crescimentos lineares e comportamentos de mudanças de níveis estão claros, esta diferenciação foi o que proporcionou as melhores previsões das RNAs. Contudo, após uma análise mais rigorosa, pode-se verificar que tal recurso não elimina a não estacionariedade por completo. No caso do preço mínimo de ações, por exemplo, pode-se perceber facilmente trechos com variâncias diferentes mesmo após ter ocorrido este pré-processamento. Em séries mais complexas, com comportamento cíclico por exemplo, somente as diferenciações não seriam capazes de transformá-las em estacionária.

Em termos práticos, a aplicação da diferenciação é uma tarefa simples e fácil. Entretanto, tais operações dificultaram um pouco a avaliação dos resultados dos previsores neurais. Isto ocorreu porque eles empregam um particionamento aleatório da série temporal em treinamento e validação. Tal particionamento exigiu o registro da posição da saída desejada, que representa a observação a ser prevista, de cada exemplo de treinamento, validação e teste dentro da série temporal. Só assim foi possível desfazer a diferenciação e desnormalizar a previsão.

As funções de auto-correlação e auto-correlação parcial são ferramentas que podem auxiliar com sucesso o projeto de arquiteturas de alguns modelos de RNAs para previsão. Estas funções são facilmente estimadas e permitem dimensionar a camada de entrada da RNA e indicar o tipo de arquitetura mais adequado. Por outro lado, a FAC e FACp somente medem correlações lineares entre observações passadas da própria série. Se fosse considerada a influência de outras variáveis, modelos de regressão linear múltipla talvez fossem ferramentas mais apropriadas.

As Redes Neurais possuem uma grande facilidade na extração de correlações entre diversas variáveis adicionais que podem representar informações passadas sobre outras séries temporais. Entretanto, a utilização destas variáveis pode ou não contribuir para a diminuição da taxa de erro de previsão. No caso das séries de moedas, elas não se mostraram úteis, prejudicando o desempenho das redes. Já para as séries de preços de ações, a presença desta variáveis provocou quedas significativas das taxas de erro de previsão.

Os métodos de poda usados como ferramentas de seleção de variáveis constituem uma opção muito atraente para modelagem da arquitetura de RNAs. Isto é devido ao fato de que tais métodos podem ser aplicados para evidenciar correlações não lineares entre as entradas de uma rede. As heurísticas de poda podem ser facilmente empregadas como critérios de seleção das variáveis a serem eliminadas. O problema principal é provavelmente a escolha de uma condição de parada eficiente. Esta condição está estritamente relacionada ao aumento do erro de generalização. As estimativas deste erro devem ser precisas e computacionalmente rápidas. Além disso, a eliminação das entradas das RNAs é extremamente dependente dos dados empregados para treiná-las. Nesta dissertação, somente após a eliminação da não estacionariedade de todas as séries é que foi possível obter melhoras significativas.

Ao contrário de que se pensava inicialmente, a condição de parada baseada no aumento do erro de validação das arquiteturas geradas através da poda não se mostrou tão ruim. Talvez a melhor alternativa ainda seja a utilização estimadores algébricos do erro de generalização para sistemas não lineares. Se estes estimadores forem confiáveis, a dependência do conjunto de dados pode ser facilmente superada.

As redes com memória de curto e longo períodos podem ser de grande utilidade neste tipo de tarefa. Inicialmente, o modelo TDNN e as redes recorrentes de Elman e Jordan não foram capazes de aprender a tendência de crescimento linear da séries de preços de ações. Entretanto, a diferenciação de primeira ordem eliminou boa parte deste comportamento e permitiu que estas redes diminuíssem um pouco mais as taxas de erros. As vantagens destes modelos foram claramente visualizadas com a realização de previsões vários-passos-a-frente onde a maioria das redes acompanhou o crescimento das séries.

A avaliação da complexidade do problema é essencial para o dimensionamento da necessidade recursos mais sofisticados de previsão. A utilização de métodos poda, de modelos de RNAs com memória de curto e longo prazo e de comitês nem sempre compensaram os custos envolvidos. Isto aconteceu principalmente para as séries de cotações de moedas. As previsões 1-

passo-a-frente e vários-passos-a-frente destas RNAs não geraram resultados significativos, ocorrendo casos em que as redes se confundiram e produziram previsões sem sentido.

5.2 Trabalhos Futuros

Apesar dos experimentos terem sido desenvolvidos com série reais de moedas e ações, seria muito interessante a continuação deste trabalho através da sua aplicação em situações reais de mercado. A participação de um especialista de mercado financeiro traria muitos benefícios, pois a sua experiências e conhecimento poderia indicar melhor quais informações deveriam ser usadas na entrada do modelo de previsão e quais séries seriam mais importantes para serem previstas.

As mesmas metodologias estudadas poderiam ser extendidas para outros problemas práticos de previsão. Tais problemas poderiam ainda continuar restritos à área financeira, como previsão de commodities (preço da arroba do boi, saca do café, caixa de alface, etc.), previsão de índices financeiro (índice Dow Jones, etc.) e outros. Ou então, séries temporais de outras áreas de aplicação (por exemplo, séries de vazão de rios, de tratamento de esgoto, etc.) poderiam ser modeladas seguindo esta mesma sistemática.

As técnicas de seleção de variáveis baseadas em métodos de poda de RNAs poderiam ainda ser melhoradas através da escolha de um outro critério de parada. Uma comparação entre o comportamento das taxas de erro do conjunto de validação e dos estimadores algébrico deveria ser realizada para uma melhor escolha da estimativa do erro de generalização das RNAs.

As atuações de outros modelos de RNAs com propriedades dinâmicas poderiam ser pesquisadas na tarefa de previsão de séries temporais. Além disso, seria muito interessante verificar a capacidade deste modelos em representar comportamento cíclicos, como os presentes em diversas séries de commodities e de vazão de rios.

Outras realizações muito importantes seriam as análises das previsões vários-passos-a-frente dos modelos obtidos através da seleção de variáveis e de comitês. Estas previsões dariam subsídios para analisar se o aumento de complexidade é compensado pelos resultados obtidos.

Referências Bibliográficas

- ABELÉM, A. J.; PACHECO, M. A.; VELASCO, M. M. B. R. Modelagem de Redes Neurais Artificiais para Previsão de Séries Temporais, In: II SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDE NEURAS, São Carlos, 1995. *Anais*. São Carlos, USP, 1995. p.107-112.
- AKAIKE, H. Statistical Predictor Identification, *Ann.Inst. Statist. Math.*, v. 22, p. 203-217, 1970.
- BALLINI, R.; FRANÇA, E. H. F.; SOARES, S.; ANDRADE, M.G. Relação entre Modelos Auto-Regressivos e a Configuração de Rede Neural para Previsão de Séries Temporais Estacionárias, In: IV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDE NEURAS, Goiânia, 1997. *Anais*. Goiânia, UFG, 1997, p.18-22.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-327, 1986.
- BOX, G. E. P.; JENKIS, G. M.; PENSOIL, G. C. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day Inc., 1970.
- CLEMEN, R. T. Combining Forecasting: A review and annotated bibliography, *International Journal of Forecasting*, v.5, p. 559-583, 1989.
- CONNOR, J. T; MARTIN, R. D. Recurrent Neural Networks and Robust Time Series Prediction, *IEEE Transaction on Neural Networks*, v.5, n. 2, p. 240-254, 1994.
- DINIZ, H.; ANDRADE, L. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; ANDRADE, M. G. Previsão de séries Temporais através de Redes Neurais Artificiais e Métodos Estocásticos, In: IV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDE NEURAS, Goiânia, 1997. *Anais*. Goiânia, UFG, 1997, p.13-17.
- DINIZ, H.; ANDRADE, L. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; ANDRADE, M. G. Previsão de Séries Temporais utilizando Redes Neurais Artificiais e Modelos de Box & Jenkins, In: V SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDE NEURAS, Belo Horizonte, 1998. *Anais*. Belo Horizonte, UFG, 1998, p.173-178.
- DINIZ, H.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; ANDRADE, M. G. Architecture Design of Artificial Neural Networks based on Box & Jenkins Models for Time Series Prediction, In: ICCIMA, Índia, 1999. *Anais*. Índia, a ser publicado.
- DROSSU, R.; OBRADOVIC, Z. Rapid Design of Neural Networks for Time Series Prediction, *IEEE Computational Sciences and Engineering*, v.3, n.2, p.78-89, 1996.
- EAGLE, R. F.; BOLLERSLEV, T. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, v. 50, p.987-1008, 1982.
- EAGLE, R. F.; GONZALES-RIVERA, G. Semiparametric ARCH Models, *Journal of Business and Economics Statistics*, v. 9, p. 345-390, 1991.

ELMAN, J. F. Finding Structure in Time, *Cognitive Science*, v.14, p. 179-211, 1990.

FERNANDES, L. G. L., PORTUGAL, M. S., NAVAUX, P. O. A., Problema da Escolha da Topologia da Redes Neural na Previsão de Séries Temporais, In: III SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDES NEURAIIS, *Anais*. Fortaleza, 1996. p.227-234.

GOUTTE, C. On the Use of a Pruning Prior for Neural Networks. In: NEURAL NETWORKS SIGNAL PROCESSING VI - PROCEEDINGS OF 1996 IEEE WOKSHOP, New Jersey, 1996. *Anais*. New Jersey, p.52-61.

HARRISON, P. J.; STEVENS, C. F. A Bayesian Approach to Short Term Forecasting, *Opl. Res. Q.*, v. 22, p. 341-362.

HAYKIN, S. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*, New Jersey, Prentice Hall, 1994.

JORDAN, M. I. Serial Order: A Parallel Distributed Processing Approach, University of California, Institute for Cognitive Science, San Diego, 1986. (Relatório Técnico 8604).

KADOWAKI, M.; SOARES, S.; ANDRADE, G. M. Previsões de Vazões Mensais Utilizando Redes Neurais Multicamadas com Algoritmo Backpropagation, In: IV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDE NEURAIIS, Goiânia, 1997. *Anais*. Goiânia, UFG, 1997, p.32-35.

KARNIN, E. D. A Simple Procedure for Pruning Back-Propagation Trained Neural Networks *IEEE Transaction on Neural Networks*, v. 1, n. 2, p. 239-242, 1990.

LAPEDES, A. FABER, R. Nonlinear signal processing using neural networks prediction and system modelling, Los Alamos, Los Alamos National Laboratory, 1987. (Relatório Técnico LA-UR-262).

LE CUN, Y.; DENKER, J. S.; SOLLA, S. A. Optimal Brain Damage, In: ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING 2, 1990. *Anais*. NIPS, 1990, p. 598-605.

MOODY, J. E. The Effective Number of Parameters: An Analysis of Generalization and Regularization in Nonlinear Learning System, In: ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS 4, San Mateo, 1992. *Anais*. NIPS, San Mateo, 1992, p. 847-854.

MOSTAFA, Y. S. A. Introduction to Financial Forecasting, *Applied Intelligence*, v.6, p.205-213, 1996.

MOZER, M. C.; SMOLENSKY, P. Using Relevance to Reduce Network Size Automatically, *Connection Science*, v. 1, n. 1, p. 67-69, 1991.

PRECHELT, L. PROBEN 1 -- A set of Benchmarks and Benchmarking Rules for Neural Networks Training Algorithms., University of Karlsruhe, Karlsruhe, 1994. (Relatório Técnico 21/94).

REED, R., Pruning Algorithms - A Survey, *IEEE Transaction on Neural Networks*, v.5, n.4, p.740-747, setembro, 1993.

REHFUSS, S.; WU, L.; MOODY, J Trading with Committees: A Comparative Study, In: THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE, Londres, 1995. *Anais*. Londres, London Business School, 1995.

RIEDMILLER, M.; BRAUN, B. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: the Rprop Algorithm, In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS (ICNN), San Francisco, 1993. *Anais*. San Francisco, 1993. p.586-591.

RUMELHART, D. E. ; HINTON, G.; WILLIAMS, R. Learning Internal Representations by Error Propagation, In: Parallel Distributed Processing: Exploration in the Microstructure of Cognition, v.1,1986.

SAAD, E. W. Comparative Study of Stock Trend Prediction Using Time Delay, Recurrent and Probabilistic Neural Networks, , *IEEE Transaction on Neural Networks*, v.9, n.6, p. 240-254, 1998.

SOUZA, R. C. *Modelos Estruturais para Previsão de Séries Temporais: Abordagem Clássica e Bayesiana*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1989

SCHIFFMANN, W.; JOOST, M.; WERNER, R. Optimization of Backpropagation Algorithm for Training Multilayer Perceptrons Koblenz, Institute of Physics, University of Koblenz, 1992. (Relatório Técnico TR 16/1992)

TEIXEIRA, M. A. ZAVERUCHA, G., SILVA, V. N. A. L., RIBEIRO, G. F. Previsão de Carga Elétrica utilizando Redes de Elman, In: V SIMPÓSIO BRÁSILEIRO DE REDE NEURAIIS, Belo Horizonte, 1998. *Anais*. Belo Horizonte, UFG, 1998, p.161-164.

THIMM G.; FIESLER E. *Pruning of Neural Networks*, Suíça, Institute for Perceptive Artificial Intelligence, 1997. (Relatório Técnico IDIAP-RR 97-03)

WAIBEL, A. HANAZAWA, T., HINTON, G. SHIKANO, K. LANG, K. J., Phoneme Recognition Using Time Delay Neural Networks, *IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n.3, p. 328-333, 1989.

WEIGEND, A. S.; HUBERMAN, B. A.; RUMELHART, D. E. *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Addison-Wesley, 1992.

WHITE, H. Economics Prediction Using Neural Networks: the case of IBM daily stock return, In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, San Diego, 1988. *Anais*. San Diego, 1988. p.II-451-II-459.

ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 1992.