UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Estudo numérico da transição laminar-turbulenta de um jato planar binário

Vinícius Hagemeyer Chiumento

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vinícius Hagemeyer Chiumento

Estudo numérico da transição laminar-turbulenta de um jato planar binário

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Julho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

H142e Hagemeyer Chiumento, Vinícius
Estudo numérico da transição laminar-turbulenta
de um jato planar binário / Vinícius Hagemeyer
Chiumento; orientador Leandro Franco de Souza. --
São Carlos, 2019.
74 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Transição Laminar-Turbulenta. 2. Escoamento
Binário. 3. Estabilidade de Jatos livres. 4.
Mecânica dos Fluidos Computacional. I. Franco de
Souza, Leandro, orient. II. Título.

Vinícius Hagemeyer Chiumento

**Numerical study of the laminar-turbulent transition of a
coaxial binary jet**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Master Program in Computer Science
and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
July 2019

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

À todos os meus amigos que sempre estiveram presentes nos momentos bons e ruins.

Ao meu orientador Leandro por toda atenção e dedicação.

Aos meus colegas de pesquisa, Adriano, Juniormar, Laison e Matheus por todas os conselhos e ajuda sobre a pesquisa durante todo o mestrado.

À todos amigos que eu fiz no LMACC, em especial à Débora, Arianne, Ana e Evaristo. que sempre estavam do meu lado me ajudando.

Aos amigos de Joinville que mesmo longe sempre me apoiaram.

À toda a minha família.

À todos os amigos que fiz em São Carlos.

À CNPQ pelo auxílio financeiro.

À Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) e também aos professores.

*“Não se espante com a altura do vôo. Quanto mais alto, mais longe do perigo. Quanto mais
você se eleva, mais tempo há de reconhecer uma pane. É quando se está próximo do solo que se
deve desconfiar.”*
(Santos Dumont)

RESUMO

CHIUMENTO, V. H. **Estudo numérico da transição laminar-turbulenta de um jato planar binário**. 2019. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

A eficiência de motores a combustão está diretamente relacionada a mistura dos reagentes. O que é muito desejado em todos os sistemas, inclusive em sistemas aeroespaciais onde a combustão ocorre de forma contínua como nos motores a jato, motores de foguete, ramjet e scramjet. No caso do scramjet a combustão ocorre em regime supersônico e conhecer como os dois fluidos se misturam na câmara de combustão é muito importante pois o tempo de residência na câmara é muito reduzido, aumentando a importância de uma mistura homogênea para a eficiência da combustão. Em determinados casos pequenas perturbações em um jato vão se amplificar podendo ocasionar a transição do escoamento laminar para turbulento. O que é desejado visto que escoamentos turbulentos são caracterizados pela grande capacidade de mistura. No presente trabalho estudamos a estabilidade de jatos coaxiais composto por dois fluidos com pequenas perturbações na base para escoamentos supersônicos para casos bidimensionais e tridimensionais. O escoamento foi investigado utilizando simulação numérica e a teoria de estabilidade linear, os resultados de ambos os métodos foram comparados, casos com perturbações bidimensionais e tridimensionais foram analisados. As simulações numéricas foram realizadas utilizando diferenças finitas de alta ordem de precisão para a discretização espacial. A integração temporal foi feita utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados de ambos os métodos mostraram uma boa concordância.

Palavras-chave: Transição Laminar-Turbulenta, Escoamento Binário, Estabilidade de Jatos livres.

ABSTRACT

CHIUMENTO, V. H. **Numerical study of the laminar-turbulent transition of a coaxial binary jet.** 2019. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The efficiency of combustion engines are strict related to the mixing between reagents. That is very desire in every aerospace propulsion system, when the combustion is continuous such as rocket engines, ramjets and scramjets. The combustion in scramjet occurs in supersonic speed with a very small resilience time, know how two fluids are mixed in this case is very important because are direct related to the efficiency of the combustion. In such cases small disturbances in a jet flow can be amplified until occur the transition from a laminar flow to a turbulent flow, that is desired because the great capacity of mixing of turbulent flows. In this work are studied the jet flow stability when the jet are composed by two fluids with small disturbances in the base for supersonic flows in bidimensional and tridimensional cases. The numerical results are obtained by numerical simulation and linear stability theory (LST). High order finite difference schemes are adopted for spatial derivatives. The integration in time are caried out by a fouth order Runge-Kutta scheme. The results obtained by numerical simulation and linear stability theory show good agreement.

Keywords: Transitional Flow, Binary Flow, Free Jet Stability .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração feita do experimento de Reynolds, No tubo superior o escoamento é laminar, o escoamento transiente é apresentado no segundo tubo e no ultimo o escoamento turbulento é representado.	27
Figura 2 – Fotografia de um jato apresentando o modo varicoso. A figura a direita mostra um corte transversal do jato, onde é possível observar a presença de vários fenômenos hidrodinâmicos como os vórtices cogumelos A imagem foi obtida adicionando corrente ao jato.	37
Figura 3 – Fotografia de um jato apresentando o modo sinuoso, A imagem foi obtida utilizando a técnica RMS (<i>Reactive Mie Scattering</i>).	38
Figura 4 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ para o modo sinuoso.	46
Figura 5 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo sinuoso.	46
Figura 6 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ para o modo varicoso.	47
Figura 7 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo varicoso.	47
Figura 8 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo sinuoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$	48
Figura 9 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo sinuoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$	49
Figura 10 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo varicoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$	49
Figura 11 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo varicoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$	50
Figura 12 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.2$ e $\beta = 0$ para o modo sinuoso.	51
Figura 13 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.2$ e $\beta = 0$ para o modo varicoso.	51

Figura 14 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.4$ e diversos valores de β para o modo sinuoso. Com exceção de $ w $ a magnitude as autofunções é menor para valores de β maiores.	52
Figura 15 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.4$ e diversos valores de β para o modo varicoso. Com exceção de $ w $ a magnitude as autofunções é menor para valores de β maiores.	53
Figura 16 – Diferença entre a componente v da velocidade para diferentes malhas. . . .	55
Figura 17 – Contornos da concentração de H_2 , em um jato com a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e o crescimento da amplitude da perturbação obtido pela análise de Fourier. Para esta simulação foi utilizado $\omega = 0,5$	56
Figura 18 – Contorno de densidade para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0,2$ e $M = 1,25$ para o caso sinuoso.	56
Figura 19 – Contorno de densidade para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0,4$ e $M = 1,25$ para o caso varicoso.	57
Figura 20 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambos os jatos, a esquerda os resultados obtidos para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e a direita os resultados para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando $Ma = 1.25$	57
Figura 21 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo sinuoso utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0.5$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.	58
Figura 22 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.	58
Figura 23 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo sinuoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.	59
Figura 24 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.	59

Figura 25 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambos os jatos, a esquerda os resultados obtidos para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e a direita os resultados para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando $Ma = 1.5$.	60
Figura 26 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $M = 1.5$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.	61
Figura 27 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para $\omega = 0,2$	61
Figura 28 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para $\omega = 0,2$ utilizando perturbações para ambos os modos, varicoso e sinuoso.	62
Figura 29 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para perturbações com $\omega = 0,2$ e $\omega = 0,4$ do modo sinuoso.	63
Figura 30 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para perturbações com $\omega = 0,2$ e $\omega = 0,4$ do modo sinuoso.	64
Figura 31 – Iso-superfície para $Q_{criterion} = 1e - 5$ do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo sinuoso. A superfície foi colorida de acordo com a magnitude do escoamento.	65
Figura 32 – Iso-superfície para $Q_{criterion} = 1e - 5$ do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo varicoso. A superfície foi colorida de acordo com a magnitude do escoamento.	66
Figura 33 – Amplitude máxima no modo varicoso da configuração $O_2 - H_2 - O_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,1$	67
Figura 34 – Amplitude máxima no modo sinuoso da configuração $O_2 - H_2 - O_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,2$	67
Figura 35 – Amplitude máxima no modo sinuoso da configuração $H_2 - O_2 - H_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,5$	68
Figura 36 – Amplitude máxima no modo varicoso da configuração $H_2 - O_2 - H_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,7$	68
Figura 37 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambas configurações utilizando $\beta = 0,4$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição de interpretação dos número adimensionais.	33
Tabela 2 – Propriedades dos gases a 300k e 1 atm.	39
Tabela 3 – Comparação entre diferentes malhas	54
Tabela 4 – Casos estudados com múltiplas perturbações.	62
Tabela 5 – Parâmetros utilizados para as simulações tridimensionais.	64

LISTA DE SÍMBOLOS

x — Direção longitudinal ao escoamento

y — Direção normal ao escoamento

z — Direção transversal ao escoamento

u — Componente de velocidade na direção x

t — Tempo

v — Componente de velocidade na direção y

w — Componente de velocidade na direção z

ρ — Densidade

S — Fração mássica do gás

D — Difusividade Mássica

T — Temperatura do fluido

$\bar{}$ — Variável normalizada

a — Velocidade do som

Re — Número de Reynolds

Pr — Número de Prandtl

Le — Número de Lewis

Sc — Número de Schmidt

l — Comprimento característico

Ma — Número de Mach

Ma_c — Número de Mach convectivo

M — Massa molar

χ — Fração molar do gás

ν — Viscosidade dinâmica

k — Condutividade térmica

ϕ_{12} — Parâmetro 12 da modificação de Mason e Saxena

ϕ_{21} — Parâmetro 21 da modificação de Mason e Saxena

c_p — Calor específico a pressão constante

c_v — Calor específico a volume constante

γ — Razão dos calores específicos

R — Constante dos gases

P — Pressão

Φ — Variável primitiva.

α — Taxa de amplificação da perturbação na direção longitudinal

β — Taxa de amplificação da perturbação na direção transversal

ω — Frequência temporal da onda

G — Equação de Gropengiesser

$_1$ — Propriedade referente ao fluido do jato

$_2$ — Propriedade referente ao fluido do meio

$\mathbf{Q}$ — Vetor contendo as variáveis conservadas

$\mathbf{F}$ — Vetor de fluxo

$\mathbf{G}$ — Vetor de fluxo

$\mathbf{H}$ — Vetor de fluxo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Motivação	25
1.2	Revisão Bibliográfica	26
1.3	Objetivos	28
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	29
2.1	Equações Utilizadas	29
2.2	Equações Adimensionais	30
2.3	Propriedades da Mistura	33
2.4	Teoria da Estabilidade Linear	35
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	39
3.1	Método para Simulação Numérica	40
3.2	Método para Resolução da Teoria da Estabilidade Linear	43
4	RESULTADOS	45
4.1	Teoria da Estabilidade Linear	45
4.1.1	<i>Autofunções</i>	48
4.2	Simulação Numérica 2D	50
4.2.1	<i>Malha Adotada</i>	54
4.2.2	<i>Simulação Numérica para perturbações bidimensionais.</i>	55
4.2.3	<i>Multiplas Perturbações</i>	60
4.3	Simulação Numérica 3D	63
5	CONCLUSÕES	71
	REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Jato é uma corrente de fluido que é projetada em meio composto por um fluido. Jatos podem percorrer longas distância antes de se dissiparem e possuem uma quantidade de movimento elevada em relação ao fluido ao redor do jato. Jatos livres são encontrados com facilidade ao nosso redor como por exemplo uma mangueira ligada dentro de uma piscina, um vazamento de gás, nos gases de exaustão de uma turbina e em um fluido sendo injetado na câmara de combustão de um motor.

A eficiência da combustão em sistemas propulsivos está diretamente relacionada com a mistura dos reagentes, a qual sofre muita influência da turbulência. Escoamentos turbulentos são caracterizados por uma grande homogenização dos fluidos, o que é desejado em sistemas propulsivos onde eficiência da combustão é dependente da homogeneidade da mistura combustível e oxidante. O estudo da instabilidade de jatos livres pode fornecer informações importantes sobre o processo de mistura como as frequências, número de ondas e fases.

A importância do estudo da instabilidade do fluido se deve ao fato de ser uma ferramenta para entender a física de processos de mistura. A estabilidade de jatos compressíveis, binários e planares composto por duas espécies químicas diferentes é estudada usando teoria da estabilidade linear e simulação numérica direta. Os resultados obtidos foram comparados obtendo uma boa concordância entre eles.

1.1 Motivação

Em 1908 René Lorin patenteou um motor sem partes móveis conhecido como Ramjet, que utiliza a conversão da pressão dinâmica em pressão estática após a onda de choque para comprimir o ar admitido no motor sem a necessidade de utilizar um compressor. Porém o primeiro protótipo falhou devido ao uso de materiais inadequados. Como a pressão dinâmica produzida em baixas velocidades é baixa, o motor somente é eficiente em velocidade supersônicas, o

que dificultou o sucesso dos primeiros protótipos. Os primeiros motores Ramjets funcionais só foram construídos anos mais tarde quando já existia materiais mais resistentes a temperaturas elevadas e condições melhores de teste. Os Ramjets funcionam de uma maneira bem simples. O ar em regime supersônico é desacelerado até alcançar um regime subsônico antes da câmara de combustão, de modo que o ar seja comprimido. Na câmara de combustão o combustível é injetado no motor e posteriormente ocorre a queima, os gases resultantes da combustão são acelerados alcançando velocidades supersônicas.

Posteriormente foi desenvolvido o Supersonic Combustion Ramjet (Scramjet), funciona de maneira semelhante ao Ramjet porém o ar admitido pelo motor não é desacelerado até velocidades subsônicas e a combustão ocorre em velocidades supersônicas. Escoamentos supersônicos tendem a ser estáveis e normalmente percorrem uma grande distância até entrarem em regime turbulento o que dificulta a homogenização da mistura ar-combustível, afetando a eficiência do motor que está diretamente relaciona a liberação de energia e consumo de combustível.

O estudo do comportamento de jatos binários compressíveis permite saber onde ocorre a transição do escoamento laminar para turbulento, que contribui para o desenvolvimento de motores mais eficientes e com uma câmara de combustão menor. Deste modo o consumo de combustível pode ser menor assim como os materiais utilizados na fabricação.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os primeiros estudos sobre instabilidade hidrodinâmica datam de 1883 quando Osbourne Reynolds realizou um experimento em que consiste em liberar uma quantidade de tinta constante em um ponto de modo que a tinta é transportada pelo escoamento. Com este experimento Reynolds pode observar as características de escoamentos laminares, em que o jato de tinta se move de forma constante no sentido do escoamento sem se misturar com o fluido ao redor formando uma linha contínua e estável. Também foi identificado os escoamentos turbulentos, que são caracterizados pela presença de vórtices e o no caso do experimento o jato de tinta se move para outras camadas de forma aleatória dissolvendo a tinta com o restante do fluido. Escoamentos em regimes transientes são resultados de uma instabilidade hidrodinâmica, portanto as instabilidades tem uma grande contribuição para que ocorra a mudança do estado laminar. A figura 1 mostra a ilustração feita por Reynolds, mostrando os 3 regimes de escoamento identificados. Também foi definido um número adimensional relacionando as forças de inércia e as forças viscosas, este número ficou conhecido como número de Reynolds e é importante por identificar as características dos escoamentos e caso dois escoamentos possuam o mesmo número de Reynolds é dito que os escoamentos são similares. Este é o princípio do uso de modelos físicos em escala reduzida para testes aerodinâmicos.

Devido a importância da solução do escoamento laminar, Lock (1951) utilizou transformações similares nas equações de camada limite para resolver o problema de uma camada de

Figura 1 – Ilustração feita do experimento de Reynolds, No tubo superior o escoamento é laminar, o escoamento transiente é apresentado no segundo tubo e no ultimo o escoamento turbulento é representado.

Fonte: [Reynolds \(1883\)](#).

mistura incompressível e viscosa com diferença de densidade entre as camadas. As perturbações tridimensionais se tornam mais importantes do que as bidimensionais conforme aumenta o número de Mach, conforme [Dunn e Lin \(1955\)](#). [Michalke \(1964\)](#) estudou o problema da camada de mistura utilizando a equação de Rayleigh.

O estudo do efeito de perturbações supersônicas foi abordado por [Lessen, Fox e Zien \(1966\)](#), neste estudo os autores analisaram apenas a estabilidade invíscida. [Bogdanoff \(1983\)](#) sugeriu um parâmetros de correlação para os efeitos de compressibilidade, posteriormente chamado de número de Mach convectivo.

[Ho e Huerre \(1984\)](#) apresentaram uma revisão contendo resultados experimentais e numéricos para a camada de mistura incompressível. Estudos mostram que escoamentos compressível apresentam uma taxa de amplificação menor do que a de escoamentos incompressíveis, ([BROWN; ROSHKO, 1974](#)) ([CHINZEI et al., 1986](#)) ([PAPAMOSCHOU; ROSHKO, 1988](#)).

[Salemi \(2006\)](#) estudou a estabilidade linear de mistura laminar compressível binária utilizando o modelo LST. No mesmo ano [Quirino \(2006\)](#) estudou a estabilidade de uma camada cisalhante compressível adicionando uma fonte de calor representando o calor gerado por uma reação química, porém considerando apenas um fluido.

[Babucke \(2009\)](#) desenvolveu um código utilizando DNS e investigou o comportamento das perturbações tridimensionais em camadas cisalhantes. diversos tipos de perturbações e de divisões entre as camadas. Posteriormente [Mendonca \(2014\)](#) investigou o comportamento de camadas cisalhantes binárias modificadas por jatos e esteiras. [Lacerda \(2016\)](#) estudou a estabilidade de jatos compressíveis com o objetivo de investigar os ruídos gerados por compressores.

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento de jatos coaxiais binários compressíveis com perturbações na base. Para isto são utilizados dois métodos distintos, a teoria da estabilidade linear (LST) e a simulação numérica direta (DNS). O estudo foi realizado utilizando duas configurações de jatos, e diversas configurações de perturbações, incluindo perturbações tridimensionais verificando a variação taxa de amplificação. Utilizando ambos os métodos é possível obter informações importantes sobre o escoamento como a taxa de amplificação das perturbações, o número de onda, e contornos de velocidade, temperatura, concentração, entre outras informações.

O presente trabalho é organizado da seguinte maneira, no capítulo 2 são introduzidas as equações utilizadas para modelar escoamentos compressíveis e binários e também as equações utilizadas na teoria da estabilidade linear, assim como as principais hipóteses adotadas em ambos os métodos. no capítulo seguinte é apresentado os métodos numéricos utilizados e seus respectivos algoritmos utilizados para resolver as equações governantes. No capítulo 4: São apresentados os resultados obtidos e é realizada uma comparação entre os resultados de ambos os métodos. Por fim são descritas as conclusões do trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações utilizadas para modelar o caso estudado são apresentadas no presente capítulo. As simulações são baseadas nas equações de Navier-Stokes transientes e compressível, também são utilizadas a equação da energia, equação da conservação de massa e a equação de transporte de massa. Além destas equações são apresentadas as bases para teoria da estabilidade linear que é utilizada para obter as perturbações para o escoamento base.

2.1 Equações Utilizadas

As eqs. 2.1 , 2.2 e 2.3 são as equações da conservação de movimento linear nas direções x , y e z para escoamentos compressíveis e sem forças de campo para fluidos newtonianos. O primeiro termo das equações representa a variação da velocidade no tempo, as três parcelas seguintes do lado esquerdo representam a taxa de escoamento saindo do volume de controle e as parcelas do lado direito levam em conta a força de pressão e as forças viscosas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4\mu}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} = & -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{2\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{4\mu}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

A equação da continuidade é apresentada na eq. 2.4, onde o primeiro termo representa a variação temporal da densidade do fluido enquanto os termos seguintes representam a variação espacial da massa por unidade de volume.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Outra equação importante para modelar o escoamento é a equação da conservação de energia apresentada na eq. 2.5. Esta equação modela os efeitos da energia produzida pela dissipação viscosa e também os efeitos da compressibilidade. A condutividade térmica do fluido é representada pela letra k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = & \rho \dot{q} + \frac{\partial^2 k T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k T}{\partial z^2} - \frac{\partial u P}{\partial x} - \frac{\partial v P}{\partial y} - \frac{\partial w P}{\partial z} \\ & + \frac{\partial u \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial u \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial v \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial v \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial w \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial w \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial w \tau_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A eq. 2.6 descreve como a espécie 1 é transportada em um meio, por se tratar de um escoamento composto por apenas duas espécies químicas o meio é composto pela segunda espécie estudada. Os termos do lado esquerdo levam em conta a variação da concentração da espécie no tempo e o transporte da espécie devido a advecção, enquanto os termos do lado direito representam a entrada líquida devido a difusão. Onde S_1 é a concentração da espécie 1 e D_{12} é o coeficiente de difusão binária da espécie 1 em 2.

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + u \frac{\partial \rho S_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho S_1}{\partial y} + w \frac{\partial \rho S_1}{\partial z} = D_{12} \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right). \quad (2.6)$$

2.2 Equações Adimensionais

As variáveis dependentes foram adimensionalizadas utilizando propriedades do escoamento. As eqs. 2.7 até 2.15 mostram como as variáveis foram normalizadas. Ao substituir as eqs. 2.7 até 2.15 nas eqs. 2.1 até 2.6 são obtidas as equações normalizadas referentes as equações de Navier-Stokes, da conservação de energia e do transporte de massa.

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad (2.7)$$

$$\bar{y} = \frac{y}{l}, \quad (2.8)$$

$$\bar{z} = \frac{z}{l}, \quad (2.9)$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}}{U_1}, \quad (2.10)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}}{U_1}, \quad (2.11)$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{w}}{U_1}, \quad (2.12)$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{P}}{\rho U_1^2}, \quad (2.13)$$

$$\bar{T} = \frac{T_1 - T_{ref_{inf}}}{T_{ref_{sup}} - T_{ref_{inf}}}, \quad (2.14)$$

$$\bar{S} = \frac{S - S_2}{S_1 - S_2}. \quad (2.15)$$

Substituindo as eqs. 2.7 até 2.15 nas eqs. 2.1 até 2.3 e também nas eq. 2.4, 2.5 e 2.6. Reorganizando os termos resultantes é possível obter as eqs. 2.16 a 2.20.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} \\ + \frac{\mathbf{v}}{Ul} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \\ + \frac{\mathbf{v}}{Ul} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \\ + \frac{\mathbf{v}}{Ul} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{k}{Ul\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho \bar{S}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho \bar{S}_1}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho \bar{S}_1}{\partial \bar{z}} = \frac{D_{ab}}{uL} \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial \bar{z}^2} \right). \quad (2.20)$$

As equações adimensionalizadas para a quantidade de movimento linear em todas as direções são apresentadas nas eqs. 2.21 e 2.22, a equação da conservação de energia é apresentada na eq. 2.24 e por ultimo a equação do transporte de massa é apresentada na eq. 2.25. Para simplificar a notação as variáveis adimensionais não são escritas com a barra. Em todas as equações adimensionais apresentadas é possível observar a presença de números adimensionais resultantes da adimensionalização, estes números são utilizados como critério para definir escoamentos similares. A interpretação dos números adimensionais, assim como uma breve interpretação de seu significado físico, são apresentadas na tab. 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho T}{\partial x} + v \frac{\partial \rho T}{\partial y} + w \frac{\partial \rho T}{\partial z} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + u \frac{\partial \rho S_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho S_1}{\partial y} + w \frac{\partial \rho S_1}{\partial z} = \frac{1}{ReSc} \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right). \quad (2.25)$$

Outro número adimensional que é relevante para este estudo é o número de Mach que foi proposto por Jakob Ackeret em homenagem a Ernst Mach. O número é a fração da velocidade do objeto ou escoamento pela velocidade do som, descrito na eq. 2.26.

Tabela 1 – Definição de interpretação dos número adimensionais.

Número	Definição	Interpretação
Número de Reynolds	$Re = \frac{Ul}{\nu}$	Razão entre forças de inércia e viscosas
Número de Prandlt	$Pr = \frac{\nu \rho c_p}{k}$	Razão entre as difusividades de momento e térmica
Número de Schmidt	$Sc = \frac{\nu}{D_{ab}}$	Razão entre as difusividades de momento e de massa
Número de Lewis	$Le = \frac{k}{D_{ab} \rho c_p}$	Razão entre as difusividades de térmica e mássica
Número de Mach	$Ma = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}}$	Razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som

Fonte: Adaptada de [Bergman et al. \(2011\)](#).

$$Ma = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}}. \quad (2.26)$$

Em todos os casos a razão das velocidades utilizadas é $U_1/U_2 = 2$. Deste modo é interessante definir o número de Mach convectivo conforme a eq. 2.27.

$$Ma_c = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2}. \quad (2.27)$$

2.3 Propriedades da Mistura

As propriedades dos fluidos são funções da concentração de massa S ou da fração molar χ , definida na eq. 2.28. Os subscritos indicam a qual espécie a propriedade se refere. Assume-se que o fluido do jato é indicado pelo subscrito 1 e o fluido ao redor pelo subscrito 2. As propriedades da mistura são calculadas a cada passo do método Runge-Kutta e são apresentadas nas eq 2.29 a 2.37 A fração molar da espécie 1 (χ_1) é obtida pela eq 2.28 onde M_{mix} é a razão das massas molares das duas espécies (M_1/M_2). Conhecendo a fração molar é possível determinar outras propriedades como a condutividade térmica e a viscosidade dinâmica da mistura.

$$\chi_1 = S_1 M_{mix} \chi_2 = (1 - S_1) M_{mix}. \quad (2.28)$$

De acordo com [Drazin e Reid \(2004\)](#), a viscosidade dinâmica (ν) para uma mistura de

dois fluidos pode ser obtida pela eq. 2.29 , onde ϕ_{12} e ϕ_{21} são fornecidos pelas eqs. 2.30 e 2.31.

$$v = \frac{\chi_1 v_1}{\chi_1 + \chi_2 \phi_{12}} + \frac{\chi_2 v_2}{\chi_2 + \chi_1 \phi_{21}}, \quad (2.29)$$

$$\phi_{12} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} M_{mix}^{1/4}}\right)^2}{\sqrt{8 \left(1 + \frac{1}{M_{mix}}\right)}}, \quad (2.30)$$

$$\phi_{21} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{M_{mix}}. \quad (2.31)$$

A condutividade térmica da mistura (k) é obtida de forma análoga a eq. 2.29. Deste modo a condutividade térmica da mistura em função da temperatura da mistura é dada pela eq. 2.32, onde os parâmetros σ_{12} e σ_{21} são adimensionais e fornecidas pelas eqs. 2.33 e 2.34.

$$k = \frac{\sigma_1 k_1}{\sigma_1 + \sigma_2 \sigma_{12}} + \frac{\sigma_2 k_2}{\sigma_2 + \sigma_1 \sigma_{21}}, \quad (2.32)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2} M_{mix}^{1/4}}\right)^2}{\sqrt{8 \left(1 + \frac{1}{M_{mix}}\right)}}, \quad (2.33)$$

$$\sigma_{21} = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{M_{mix}}. \quad (2.34)$$

Calor específico a pressão constante (cp):

$$c_{p_{mix}} = S_1 + (1 - S_1) \frac{c_{p_2}}{c_{p_1}}. \quad (2.35)$$

Calor específico a volume constante (cv):

$$c_{v_{mix}} = S_1 + (1 - S_1) \frac{c_{v_2}}{c_{v_1}}. \quad (2.36)$$

Razão dos calores específicos:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.37)$$

A constante dos gases da mistura é determinada por:

$$R_{mix} = S_1 + (1 - S_1) \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.38)$$

Por fim a pressão pode ser determinada pela equação do estado como função da densidade, temperatura e número de Mach seguindo e eq. 2.39

$$P = \frac{\rho T R_{mix}}{\gamma M a^2}. \quad (2.39)$$

2.4 Teoria da Estabilidade Linear

Os escoamentos laminares estão sujeitos à vários tipos de perturbações como vibrações, ruídos, rugosidade superficial entre outros. Caso a perturbação seja amplificada diz-se que o escoamento é instável, no entanto se o escoamento retornar para o seu estado inicial o escoamento é considerado estável. Existem dois tipos de estabilidades; a temporal onde há um decaimento da amplitude no tempo; e a espacial onde ocorre um decaimento da amplitude da perturbação no espaço. Quando o escoamento é instável irá ocorrer a transição para um dos diversos tipos de regimes turbulentos presentes em casos reais.

A teoria da estabilidade linear do inglês *linear stability theory* (LST) é um método para analisar e obter informações sobre as perturbações e taxas de amplificações em diversos escoamentos. A equação utilizada para o LST, para um escoamento inviscido, é a equação de Rayleigh, eq. 2.40. O escoamento estudado pode ser decomposto em dois escoamentos, o escoamento base que é um escoamento estável e sem perturbações do caso estudado, e as perturbações.

$$(U - c)(v - \alpha^2 v) - U''v = 0. \quad (2.40)$$

Onde as duas partes da divisão do escoamento são utilizadas para a análise, sendo o escoamento base denotado por $(_0)$ e a flutuação denotada por $(')$. Esta divisão é apresentada na eq. 2.41, onde Φ representa uma variável primitiva. É considerado que as perturbações se propagam como ondas e são representadas de acordo com a eq. 2.42, onde α e β são os números de onda nas direções longitudinal e transversal, respectivamente, e ω é a frequência temporal da onda.

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi', \quad (2.41)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \mathbb{R} \left\{ \hat{\Phi}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \right\}. \quad (2.42)$$

As equações de estabilidade para um jato compressível binário são dadas por:

$$\hat{\rho}_{mix} i(\alpha \bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{\rho}_{mix}}{dy} + \bar{\rho}_{mix} \left[i(\alpha \hat{u} + \beta \hat{w} + \frac{d\hat{v}}{dy}) \right] = 0, \quad (2.43)$$

$$\bar{\rho}_{mix} \left[i(\alpha \bar{u} + \hat{w} + \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy}) \right] = - \frac{i\alpha \hat{P}}{\gamma_1 Ma_1^2}, \quad (2.44)$$

$$\bar{\rho}_{mix} i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{v} = - \frac{1}{\gamma_1 Ma_1^2} \frac{d\hat{P}}{dy}, \quad (2.45)$$

$$\bar{\rho}_{mix} i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{w} = -\frac{i\beta \hat{P}}{\gamma Ma_1^2}, \quad (2.46)$$

$$\bar{\rho}_{mix} \left[i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{T} + \hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} \right] = -\frac{\gamma_{mix} - 1}{R_{mix}} \left[i(\alpha \hat{u} + \beta \hat{w} + \frac{d\hat{v}}{dy}) \right], \quad (2.47)$$

$$\bar{\rho}_{mix} \left[i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{S}_1 + \hat{v} \frac{d\bar{S}_1}{dy} \right] = 0, \quad (2.48)$$

$$\hat{p} = \bar{\rho}_{mix} R_{mix} \hat{T} + \hat{p}_{mix} R_{mix} \bar{T}. \quad (2.49)$$

As equações acima podem ser reduzidas no sistema de duas equações apresentadas abaixo:

$$(\alpha \bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} - \alpha \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{i\alpha^2 G \hat{p}}{\gamma_1 Ma^2}, \quad (2.50)$$

$$\bar{\rho}_{mix} i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{v} = \frac{1}{\gamma_1 Ma^2} \frac{d\hat{p}}{dy}. \quad (2.51)$$

Foi utilizada uma transformação de coordenadas proposta por [Gropengiesser \(1970\)](#). Neste caso as perturbações derivadas das equações de Euler são apresentadas nas eqs. 2.52 e 2.53 onde G é a equação de Gropengiesser, eq. 2.54.

$$\chi = \frac{i\alpha \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2 \hat{v}}, \quad (2.52)$$

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{\alpha^2 (\bar{u} - \omega/\alpha)}{R\bar{T}} - \chi \left[\frac{\chi G + (d\bar{u}/dy)}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} \right]. \quad (2.53)$$

$$G = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\bar{\rho}_{mix} \alpha^2} - Ma_1^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_{mix}} \frac{(\alpha \bar{u} - \omega)}{\alpha^2}. \quad (2.54)$$

É possível escrever as eqs. 2.52 e 2.53 em apenas uma única equação.

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{\alpha^2 (\bar{u} - \omega/\alpha)}{R_{mix} \bar{T}} - \chi \left[\frac{\chi G + (d\bar{u}/dy)}{\bar{u} - \omega/\alpha} \right]. \quad (2.55)$$

As condições de contorno para a eq. 2.55 são $y \rightarrow \infty$ e $\frac{\chi}{dy} = 0$ ([SALEMI, 2006](#)).

$$\chi(y \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{\alpha(\bar{u} - \omega/\alpha)}{\sqrt{GR_{mix} \bar{T}}}. \quad (2.56)$$

Figura 2 – Fotografia de um jato apresentando o modo varicoso. A figura a direita mostra um corte transversal do jato, onde é possível observar a presença de vários fenômenos hidrodinâmicos como os vórtices cogumelos. A imagem foi obtida adicionando corrente ao jato.

Fonte: [Samimy et al. \(2004\)](#).

A eq. 2.55 é resolvida junto com os autovalores α e ω .

$$\frac{d\hat{P}}{dy} = -\gamma_1 Ma_1^2 \bar{\rho}_{mix} i(\alpha \bar{u} - \omega) \hat{v}, \quad (2.57)$$

$$\frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{i\alpha^2 G\hat{P}}{\gamma_1 Ma_1^2 (\alpha \bar{u} - \omega)} + \frac{\alpha \hat{v}}{\alpha \bar{u} - \omega} \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (2.58)$$

As condições de contorno utilizadas para integrar as eqs. 2.57 e 2.58 são apresentadas por [Sandham \(1989\)](#) como:

$$\hat{p}(0) = \frac{\chi(0) \gamma_1 Ma_1^2}{i\alpha}, \quad (2.59)$$

$$\hat{v} = 1 + 0i. \quad (2.60)$$

O estudo da instabilidade de jatos revela a presença de dois modos de instabilidade, o varicoso e o sinuoso. As figs. 2 e 3 mostram fotos de jatos reais apresentando o modo varicoso e sinuoso respectivamente. No modo varicoso a velocidade $\hat{v}$ assim como sua derivada $\frac{d\hat{v}}{dy}$ tende a 0 no centro do escoamento, como pode ser observado na fig. 2 o jato tende a ser simétrico, a imagem da direita é um corte transversal ao jato, neste corte é possível observar outros fenômenos como a presença de vórtices cogumelos. No caso do jato sinuoso as perturbações da velocidade ocorrem de forma alternada, formando uma estrutura de vortices que se assemelha a uma esteira de Von Kármán.

Figura 3 – Fotografia de um jato apresentando o modo sinuoso, A imagem foi obtida utilizando a técnica RMS (*Reactive Mie Scattering*).

Fonte: [Samimy et al. \(2004\)](#).

MÉTODOS NUMÉRICOS

Este trabalho utiliza três códigos escritos em FORTRAN, sendo um para resolver as equações do LST e dois para as simulações numéricas, sendo um código utilizado para as simulações bidimensionais e outro para as simulações tridimensionais. O código para resolver LST foi desenvolvido pelo Márcio Teixeira Mendonça enquanto o código para simulações bidimensionais foi desenvolvido por Josuel Rogenski. Durante este trabalho foi desenvolvido um código para as simulações numéricas tridimensionais usando como base o código bidimensional, mantendo uma formulação semelhante e utilizando os mesmo métodos.

Duas configurações de jatos foram estudadas, ambas utilizando os fluidos H_2 e O_2 , a primeira é utilizando H_2 como jato e O_2 como o fluido ao redor, denominada por $O_2 - H_2 - O_2$. A segunda é o oposto utilizando O_2 como jato e H_2 como o fluido ao redor, denominada por $H_2 - O_2 - H_2$. As propriedades referentes ao jato serão denotadas com o subscrito 1 enquanto as propriedades do fluido ao redor do jato serão denotadas pelo subscrito 2. As propriedades dos fluidos utilizados são apresentadas na tab. 2, utilizando 300k como temperatura de referência a 1atm.

Tabela 2 – Propriedades dos gases a 300k e 1 atm.

	O_2	H_2
Viscosidade	$20743 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$	$8.9738 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{ms}$
Densidade	$0.08189 \frac{kg}{m^3}$	$1.2998 \frac{kg}{m^3}$
Condutividade Térmica	$0.1878 \frac{W}{mK}$	$0.0266 \frac{W}{mK}$
Masa molar	$31.9988g$	$2.0169g$
Difusividade mássica	$7.8842 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$	$7.8842 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$
Constante específica dos gases	$259,8 \frac{J}{kgK}$	$4124,5 \frac{J}{kgK}$
Calor específico a pressão constante	$918,4 \frac{J}{kgK}$	$14311 \frac{J}{kgK}$
Calor específico a volume constante	$659 \frac{J}{kgK}$	$10160 \frac{J}{kgK}$
Prandtl	0,7069	0.7081
Lewis	0.304	2.02

3.1 Método para Simulação Numérica

As equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos e compressíveis são adotadas para representar o jato livre. O escoamento é tridimensional resultando em 3 vetores de fluxo ($\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$). Um vetor das variáveis conservadas $\mathbf{Q}$ composto pelas componentes da velocidade u , v e w , e pela pressão P , energia e e fração mássica s_1 da espécie de referência. O sistema de equações é:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

Onde $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ são vetores de fluxo (LACERDA, 2016), onde:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ u(E + p) + q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv + p - \tau_{xy} \\ \rho v^2 - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ u(E + p) + q_y - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw + p - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 - \tau_{zz} \\ u(E + p) + q_z - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

As equações são armazenadas em um vetor $\mathbf{Q}$ na forma:

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E, \rho S_1). \quad (3.5)$$

A solução das equações é obtida utilizando diferenças finitas compactas de alta ordem para as derivadas espaciais e o método de Runge-Kutta de 4º ordem para as derivadas temporais (LELE, 1992). O procedimento é sumarizado a baixo de acordo com Mendonca (2014)

- Especificar as condições iniciais para u, v, w, s_1 e T em todo o domínio numérico;
- Calcular ρ ;

- A cada passo do método de Runge-Kutta calcular a fração mássica e a fração molar da mistura, a viscosidade dinâmica de ambas espécies, a viscosidade de mistura, a condutividade térmica de cada espécie, a condutividade térmica da mistura, e o lado direito do sistema;
- Atualizar as condições de contornos baseado em [Lacerda \(2016\)](#);
- Um filtro numérico de alta ordem é aplicado em ambas as direções.

Perturbações infinitesimais são introduzidas no contorno da entrada do escoamento. As perturbações são representadas como um conjunto de auto-vetores obtidos pela teoria da estabilidade linear ([MENDONCA, 2014](#)). Nas demais fronteiras do domínio é implementada condições de contorno de Neumann. No caso da simulação tridimensional é utilizada uma condição de contorno periódica na direção transversal ao escoamento.

Ambos os códigos bidimensional e tridimensional utilizam MPI para paralelização, sendo o domínio computacional dividido em várias partes ao longo de x e y . No caso tridimensional não foi necessário implementar a divisão do domínio ao longo da direção z pois o número de pontos nesta direção é baixo, não resultando em uma economia de tempo significativa.

É adotado um estiramento de malha nos últimos 200 pontos onde a distância vai aumentando nos contornos de saída. Este método junto com o filtro evita que ocorra reflexão no final do domínio colaborando para a convergência da simulação. Como consequência desta técnica a região em que a distância entre os pontos é alterada não é fiel ao fenômeno físico estudado, portanto esta região não é considerada nos resultados. As simulações foram realizadas utilizando $Re = 10000$.

Os termos da equação de Navier-Stokes foram discretizados utilizando diferenças finitas compactas de conforme apresentado por [Lele \(1992\)](#). Aproximações de 6ª são utilizadas no interior do domínio e no contorno são utilizadas aproximações de 5ª ordem, conforme foi desenvolvido por [Souza, Mendonça e Medeiros \(2005\)](#). A primeira derivada pode ser discretizado conforme a eq. 3.6.

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12h}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + o(h^6). \quad (3.6)$$

Para pontos $i = 1$ e $i = 2$ a primeira derivada é discretizada conforme as eqs. 3.7 e 3.8 respectivamente. Discretizações análogas as eqs. 3.7 e 3.8 são utilizadas para os pontos $i = n - 1$ e $i = n$.

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24h}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + o(h^5), \quad (3.7)$$

$$f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = \frac{1}{120h}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) + o(h^6). \quad (3.8)$$

Para discretizar as derivadas de segunda ordem foram adotadas as equações apresentadas a seguir, onde a eq. 3.9 é utilizada para os pontos no interior do domínio e as eqs. 3.10 e 3.11 para os pontos $i = 1$ e $i = 2$, assim como as derivadas de primeira ordem, as discretizações para os pontos $i = n - 1$ e $i = n$ podem obtidas de forma análoga as eqs. 3.10 e 3.11, que são referentes aos pontos $i = n - 1$ e $i = n$.

$$13f''_1 + 137f''_2 = \frac{1}{120h^2}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) + O(h^5), \quad (3.9)$$

$$f''_1 + 12f''_2 + 3f''_3 = \frac{1}{360h^2}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) + o(h^6), \quad (3.10)$$

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{1}{4h^2}(3f''_{i-2} + 48f''_{i-1} - 102f''_i + 48f''_{i+1} + 3f''_{i+2}) + O(h^6). \quad (3.11)$$

Para o cálculo das derivadas espaciais é necessário resolver sistemas de equações algébricas tridiagonais, que são resolvidos pelo algoritmo de Thomas TDMA (PRESS *et al.*, 1992). Por fim o escoamento base é descrito na eq. 3.12, em função de y .

$$u_1 = \frac{1+f}{2}, \quad (3.12)$$

onde

$$f = \tanh \left[\frac{3}{8} \left(\frac{R}{y} - \frac{y}{R} \right) \right]. \quad (3.13)$$

A distribuição de velocidade na base é:

$$u_b(x_0, y) = (1 - cf)u_1. \quad (3.14)$$

A análise de Fourier é realizada com o objetivo de conhecer o comportamento da perturbação no tempo. Para isto são utilizado N intervalos no tempo igualmente espaçados, neste caso a soma dos intervalos é igual ao período da perturbação. Pela análise é possível obter a amplitude da perturbação ao longo do domínio e desta forma conhecer o comportamento do escoamento. Em escoamentos instáveis a amplitude da perturbação cresce de forma exponencial de acordo com a taxa de amplificação (α) que pode ser obtida através de uma interpolação dos resultados obtidos pela análise de Fourier. No capítulo 4.2.2 é feita a comparação entre os resultados obtidos por simulação numérica e LST.

3.2 Método para Resolução da Teoria da Estabilidade Linear

O procedimento de acordo com [Mendonca \(2014\)](#) para resolver as equações da teoria da estabilidade linear é sumarizado no seguinte algoritmo:

- Para um valor de ω é determinado um valor de α ;
- O método Runge-Kutta de 4º ordem é utilizado para realizar duas integrações, do limite superior e inferior de y até o $y = 0$;
- As soluções das integrais são comparadas em $y = 0$;
- Caso as soluções sejam diferentes um novo valor de α é estimado utilizando o método da secante.

Como resultado deste procedimento são obtidas a taxa de amplificação e também as autofunções.

RESULTADOS

4.1 Teoria da Estabilidade Linear

Utilizando a teoria a estabilidade linear é possível calcular a taxa de amplificação para as duas configurações de jatos para diferentes valores da frequência (ω). Foram feitas análises da influência do número de Mach, assim como da variação de β , para ambos os jatos.

Os resultados para o modo sinuoso são plotados nas figs. 4 e 5 para as configurações $H_2 - O_2 - H_2$ e $O_2 - H_2 - O_2$ respectivamente. Nestas figuras a taxa de amplificação (α_i) é exibida em função da frequência (ω) para diferentes números de Mach. Valores positivos da taxa de amplificação (α) indicam que o escoamento é instável e quanto maior o valor de α maior é o crescimento das perturbações. É possível observar que o jato $H_2 - O_2 - H_2$ é mais instável que o jato $O_2 - H_2 - O_2$ para uma grande gama de frequências e apenas para algumas frequências mais baixas que o jato $H_2 - O_2 - H_2$ é mais estável que $O_2 - H_2 - O_2$, sendo que a diferença da taxa de amplificação entre as duas configurações nessa região é pequena.

As figuras 6 e 7 mostram que ocorre um comportamento similar ao caso sinuoso para o modo varicoso. Para a composição $O_2 - H_2 - O_2$ a taxa de amplificação (α_i) é maior para números de Mach elevados para excitações de baixa frequência, $\omega < 0.18$. Com exceção desta região a taxa de amplificação é reduzida conforme o número de Mach aumenta, causando um efeito estabilizante no escoamento.

Para a mesma configuração do jato o modo sinuoso mostrou-se instável para frequências maiores do que o modo varicoso, sendo que o modo varicoso é apresenta instabilidade em frequências até 0.4 rad/s enquanto o modo sinuoso é instável a frequências superiores a 0.9 rad/s . De modo geral, aumento no número da Mach do escoamento causa um efeito estabilizante nas perturbações para ambos os modos e configurações, reduzindo a taxa de amplificação máxima e também a gama de frequência em que o escoamento é instável.

Em perturbações tridimensionais conforme β aumenta a taxa de amplificação é reduzida.

Figura 4 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ para o modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ para o modo varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Taxa de amplificação (α_i) em função da frequência de perturbação (ω) para diversos valores de Mach utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo sinuoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo geral, conforme β aumenta o escoamento se torna mais estável. A única exceção é para o modo varicoso da configuração $H_2 - O_2 - H_2$ para valores pequenos de ω , nestes casos a taxa de amplificação pode ser maior para valores mais elevados de β . As figuras 8 e 9 mostram a taxa de amplificação (α_i) em função da frequência da perturbação (ω) do modo sinuoso para as configurações $H_2 - O_2 - H_2$ e $O_2 - H_2 - O_2$ respectivamente. Em ambos os gráficos é possível observar o efeitos estabilizante de β . A configuração $H_2 - O_2 - H_2$ é instável para uma gama maior de frequências em comparação com a configuração $O_2 - H_2 - O_2$.

Em relação ao modo varicoso, o comportamento é similar ao modo sinuoso, exceto que para baixas frequências a taxa de amplificação de um escoamento sem perturbação tridimensional ($\beta = 0$) pode ser menor que nos casos tridimensionais. Os resultados obtidos pelo LST para o modo varicoso são apresentados nas figs. 10 e 11 para as configurações $H_2 - O_2 - H_2$ e $O_2 - H_2 - O_2$ respectivamente.

4.1.1 Autofunções

Autofunções foram obtidas utilizando LST, as figs. 12 e 13 mostram as autofunções para o escoamento composto por $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo sinuoso e varicoso respectivamente. um comportamento similar ocorre para o jato $H_2 - O_2 - H_2$. As autofunções são compostas por uma parte real e outra imaginária, que por conveniência são representadas através do módulo e da fase da variável, de modo que a magnitude de uma variável genérica é representada por $|\phi|$ enquanto

Figura 9 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo sinuoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo varicoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Resultados da teoria da estabilidade linear para o modo varicoso e diferentes valores de β em função da frequência, utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

a fase é representada por Θ_ϕ .

As autofunções da fase para o modo sinuoso se assemelham a funções ímpares, com exceção de Φ_v , que tem características de uma função par. O oposto ocorre para o modo varicoso, onde as autofunções se assemelham a funções pares enquanto Θ_v aparenta ser ímpar. Uma característica do modo varicoso é a velocidade nula na linha central, é possível observar na fig. 13 que o valor da magnitude da autofunção de v ($|v|$) é zero para $y = 0$.

No caso de perturbações tridimensionais a fase e a magnitude de w não são nulas. Conforme β aumenta a magnitude da autofunção de w também cresce assim, como a fase de w . No entanto para as outras variáveis ocorre uma redução na magnitude conforme β cresce enquanto ocorre poucas alterações nas autofunções da fase das variáveis. Isto pode ser observado nas figs. 14 e 15 para o modo sinuoso e varicoso respectivamente, para diferentes valores de β .

4.2 Simulação Numérica 2D

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para DNS e comparados com o LST. Ambos os métodos consideram escoamentos binários e compressíveis, porém a simulação numérica leva em conta os efeitos da viscosidade enquanto o método LST considera instabilidade não viscosa. Com o objetivo de possibilitar a comparação entre os dois métodos foi considerado um número de Reynolds de modo que a influencia das forças viscosas seja menor que a influencia

Figura 12 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.2$ e $\beta = 0$ para o modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.2$ e $\beta = 0$ para o modo varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.4$ e diversos valores de β para o modo sinuoso. Com exceção de $|w|$ a magnitude das autofunções é menor para valores de β maiores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Autofunções do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para $\omega = 0.4$ e diversos valores de β para o modo varicoso. Com exceção de $|w|$ a magnitude das autofunções é menor para valores de β maiores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

das forças inerciais presentes no escoamento. As simulações foram realizadas considerando as duas configurações de jatos coplanares.

4.2.1 Malha Adotada

Foram testadas algumas configurações malhas com o objetivo de investigar a influencia da malha nas simulações numéricas. As simulações foram realizadas com diferentes quantidade de processadores, de modo que a menor quantidade de pontos em cada processo seja superior a 50 mil pontos.

Três configurações de malha foram testadas sendo a primeira malha composta por 526 pontos na direção x e 256 pontos na direção y , com um espaçamento de 0.2 na região central da malha. A segunda malha e composta por 1042 pontos na direção x e 526 pontos na direção y , com um espaçamento de 0.1 na região central da malha. Por ultimo foi testado um malha com 2046 pontos na direção x e 1046 pontos na direção y , com um espaçamento de 0.05 na região central da malha. As 3 configurações são detalhadas na tab. 3. Todas as malhas possuem estiramento na região a jusante do escoamento.

Tabela 3 – Comparação entre diferentes malhas

Malha	$\Delta x/\Delta y$	taxa de amplificação	Diferença em relação ao LST	Diferença da malha anterior
LST		0,04088		
512 x 256	0.2 / 0.2	0,04388	0,003	
1024 x 526	0.1 / 0.1	0,04100	0,00012	0,00288
2046 x 1046	0.05 / 0.05	0,04094	0,00006	0,00006

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme o espaçamento entre os pontos vai reduzindo a diferença entre os resultados finais também é reduzida. A maior diferença entre a primeira malha, com espaçamento de 0.2, para a segunda malha, com espaçamento de 0.1, foi de $1.379788e - 05$ para a componente v da velocidade. Comparando a terceira malha, com espaçamento de 0.05, com a segunda malha a diferença é ainda menor, $2.4949e - 07$ para a componente v da velocidade. A figura 16 mostra a diferença entre os resultados das 3 malhas ao longo de y para $x = 70$. As curvas foram obtidas subtraindo o resultado de uma malha pelo resultado da outra malha. O mesmo comportamento foi obtido para a componente u da velocidade, e também para as outras variáveis como ρ , S_1 e T .

A terceira malha foi escolhida por causa da pequena diferença entre a taxa de amplificação obtido pelo LST assim como a pequena diferença entre o perfil de velocidade da malha anterior. É esperado que ocorra pouca variação nos resultados das simulações caso uma malha mais refinada seja utilizada e o custo computacional para uma malha mais fina é muito elevado. No cada da terceira malha a decomposição do domínio foi realizada com a divisão da malha computacional utilizando quatro núcleos de processamento em y e dez núcleos de processamento na direção x .

Figura 16 – Diferença entre a componente v da velocidade para diferentes malhas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todos os casos o passo no tempo utilizado foi calculado em função da frequência de perturbação de acordo com a eq. 4.1. nos casos tridimensionais o espaçamento em beta (δz) foi calculado utilizando a eq. 4.2, onde N_z é o número de pontos na direção z . N_z foi escolhido de modo que $\Delta z < 1$.

$$\Delta t = \frac{t_{\text{periodo}}}{2048} = \frac{2\pi}{2048\omega} \quad (4.1)$$

$$\Delta z = \frac{2\pi}{\beta N_z} \quad (4.2)$$

4.2.2 Simulação Numérica para perturbações bidimensionais.

Alguns casos foram simulados utilizando simulação numérica: usando ambas as configurações de jatos e diferentes valores de frequência. Para estas simulações foi adotado um número de Reynolds igual a $Re = 10000$. Diversas simulações foram realizadas para ambos os jatos e modos, e considerado o número de Mach igual a $M = 1.25$ ou $M = 1.5$.

A figura 17 mostra os contornos da concentração junto com a análise de Fourier. Os contornos da concentração permitem observar a formação dos vórtices e seu crescimento. O domínio pode ser dividido em 4 regiões de acordo com suas características na primeira região ocorre a perturbação do escoamento. Logo após existe a região linear, nesta região é possível comparar os resultados obtidos utilizando LST com os resultados obtidos por simulação numérica. A região seguinte é a região não linear, a partir desta região a teoria da estabilidade linear não é mais válida. Por fim tem a região de amortecimento, que não está ilustrada a fig 17, está é a única

região que não tem significado físico. Nesta região o escoamento volta a ser laminar devido ao estiramento da malha, evitando que ocorra reflexão de perturbações no contorno de saída.

Figura 17 – Contornos da concentração de H_2 , em um jato com a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e o crescimento da amplitude da perturbação obtido pela análise de Fourier. Para esta simulação foi utilizado $\omega = 0,5$

Fonte: Elaborada pelo autor.

As figuras 18 e 19 mostram os contornos da concentração da espécie do jato para ambos os modos. Nestas figuras é possível observar a estrutura dos vórtices formado por cada modo.

A região linear da análise de Fourier é aproximada para uma função utilizando o programa Gnuplot que implementa o método dos mínimos quadrados utilizando o algoritmo de Marquardt-Levenberg. Os valores da taxa de amplificação α_i utilizando simulação numérica foram obtidos por meio desta aproximação. O resultados da análise de Fourier são apresentados em fig. 21 até 24 para os jatos $O_2 - H_2 - O_2$ e $H_2 - O_2 - H_2$, onde a linha tracejada é o resultado obtido utilizando o método LST e a linha contínua é obtida pela análise de Fourier. Conforme é possível observar que ocorre uma boa concordância entre os resultados obtidos por DNS e por LST. Na maioria dos gráficos é possível perceber nitidamente a região linear, a qual coincide com o resultado do LST. De acordo com os resultados obtidos utilizando LST, a taxa máxima de amplificação é 0.386 para o jato $H_2 - O_2 - H_2$ e 0.2286 para o jato $O_2 - H_2 - O_2$.

Figura 18 – Contorno de densidade para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0,2$ e $M = 1,25$ para o caso sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Contorno de densidade para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0,4$ e $M = 1,25$ para o caso varicoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambos os jatos, a esquerda os resultados obtidos para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e a direita os resultados para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando $Ma = 1.25$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo sinuoso utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0.5$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo sinuoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $m = 1.25$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambos os jatos, a esquerda os resultados obtidos para a configuração $H_2 - O_2 - H_2$ e a direita os resultados para a configuração $O_2 - H_2 - O_2$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando $Ma = 1.5$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações com DNS obtiveram resultados muito próximos os resultados obtidos pelo LST. De modo geral o comportamento das simulações utilizando $M = 1.5$ é similar ao escoamento com $M = 1.25$ e conforme o esperado a amplitude máxima com $M = 1.5$ foi inferior a amplitude máxima com $M = 1.25$.

4.2.3 Múltiplas Perturbações

A análise de Fourier permite observar a amplitude de modo fundamental assim como a amplitude de seus harmônicos. Para um caso com apenas um modo sendo excitado, a amplitude das frequências das perturbações secundárias crescem linearmente com o dobro da taxa de crescimento da perturbação primária. A figura 27 ilustra este comportamento para o jato $O_2 - H_2 - O_2$ onde a frequência da perturbação é $\omega = 0,2$, observe que o crescimento da amplitude do primeiro modo deixa de ser linear no momento em que a amplitude dos modos secundários é próxima a amplitude do modo 0. Em casos com mais de uma frequência sendo perturbada ou com mais de um modo este comportamento deixa de ocorrer.

A tabela 4 mostra os casos bidimensionais que foram simulados com mais de um modo. Na mesma tabela são apresentados o passo no tempo utilizado. Em todos os casos foram realizadas análises de Fourier, apresentando comportamentos distintos em relação às simulações com apenas um modo sendo perturbado, em alguns casos o modo secundário apresentou uma amplitude maior que o modo fundamental.

Figura 26 – Máxima amplitude da velocidade ao longo de x , para o modo varicoso utilizando a configuração $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$ e $M = 1.5$. O resultado obtido por DNS é representado pela linha contínua enquanto o resultado obtido por LST é representado pela linha tracejada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para $\omega = 0,2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Casos estudados com múltiplas perturbações.

	Perturbações		Δt
caso 1	$\omega = 0.2$	Sinuoso	$\frac{2\pi}{2048 \cdot 0.4} = 7,67e - 3$
	$\omega = 0.4$	Sinuoso	
caso 2	$\omega = 0.2$	Varicoso	$\frac{2\pi}{2048 \cdot 0.4} = 7,67e - 3$
	$\omega = 0.4$	Varicoso	
caso 3	$\omega = 0.2$	Varicoso	$\frac{2\pi}{2048 \cdot 0.2} = 0,0153$
	$\omega = 0.2$	Sinuoso	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para $\omega = 0,2$ utilizando perturbações para ambos os modos, varicoso e sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 28 mostra o comportamento dos modos secundários para um escoamento com uma perturbação composta com o autofunções do modo varicoso e sinuoso, ambos para $\omega = 0.2$. Neste caso é possível perceber que os modos secundários possuem uma taxa e crescimento similar e que o modo primário apresenta pequenos ondulações. A taxa de amplificação obtida para este caso na região entre $x = 200$ e $x = 300$ foi $\alpha = 0.036583$, este valor fica entre as amplificações para o escoamento perturbado apenas com as autofunções modo sinuoso e o escoamento perturbado apenas com as autofunções do modo varicoso.

No caso 2, a amplitude do modo ($\omega = 0.4$) secundário é maior que a amplitude do modo primário em quase todo o domínio exceto na região não linear, conforme mostra a fig. 29 onde é possível observar que os modos ímpares crescem mais que os modos pares

Figura 29 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para perturbações com $\omega = 0,2$ e $\omega = 0,4$ do modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

conforme o escoamento avança. Provavelmente este comportamento ocorre devido ao fato da taxa de amplificação ser maior para o modo secundário do que para o modo primário. Um comportamento análogo ocorre para o caso 2 com as perturbações do modo varicoso, conforme pode ser observado na fig. 30.

4.3 Simulação Numérica 3D

Diversas simulações foram realizadas considerando uma perturbação tridimensional com $\beta = 0.4$. As simulações para o caso tridimensional foram realizada considerando $\beta = 0,4$. As condições de contorno na direção z são periódicas. Os parâmetros das simulações são apresentados na tab. 5. Diferentes valores de ω foram utilizado para amos os modos e configurações do jato.

A figura 31 mostra curvas para $Q_{criterion} = 1e - 5$ para o modo sinuoso utilizando o jato $O_2 - H_2 - O_2$ e $\omega = 0,2$. O volume foi duplicado para facilitar a visualização. é possível perceber que as superfícies superiores e inferiores se alteram ao longo de x , característica do modo sinuoso. No caso do modo varicoso as superfícies inferiores e superiores coincidem na mesma posição em x , este comportamento pode ser observado na fig. 32, que ilustra as curvas para $Q_{criterion} = 1e - 5$ para a mesma configuração porem utilizando o modo varicoso, note que as superfícies superiores estão na mesma posição na direção x das superfícies inferiores,

Figura 30 – Análise da amplitude máxima para vários modos do jato $O_2 - H_2 - O_2$, para perturbações com $\omega = 0,2$ e $\omega = 0,4$ do modo sinuoso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Parâmetros utilizados para as simulações tridimensionais.

Pontos na direção x	2046
Pontos na direção y	1046
Pontos na direção Z	32 ou 16
Número total de pontos	$68,4 \times 10^6$ ou $34,2 \times 10^6$
Número de processadores	40
$\Delta\eta$	0.05
$\Delta\xi$	0.05
Δz	0.98
Re	10^4
β	0.4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Iso-superfície para $Q_{criterion} = 1e-5$ do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo sinuoso. A superfície foi colorida de acordo com a magnitude do escoamento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

uma característica que indica o modo varicoso.

A figura 33 mostra a amplitude máxima em função de x para o jato composto por $O_2 - H_2 - O_2$ para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,1$. a região em que a amplitude cresce consideravelmente pode ser observado também na fig. 32 na região com $x > 250$. Este comportamento não foi observado no modo sinuoso devido a introdução de forma suave das perturbações no começo da simulação, o que não foi realizado na outras simulações. A fig. 34 apresenta a análise de Fourier para o modo sinuoso do jato $O_2 - H_2 - O_2$ utilizando $\omega = 0.2$.

As análises de Fourier do jato composto por $H_2 - O_2 - H_2$ resultaram em curvas com mais oscilações do que as do jato com a configuração $O_2 - H_2 - O_2$. Para estes casos foi utilizado a malha com 32 pontos na direção Z. A fig. 35 mostra a análise de Fourier para o modo sinuoso utilizando $\omega = 0,5$, enquanto a fig. 36 mostra a análise de Fourier para o modo varicoso utilizando $\omega = 0,7$. Note que apesar das oscilações a inclinação média da amplitude da velocidade é próxima ao resultado obtido pelo LST.

A amplificação das perturbações tridimensionais é menor do que a amplificação para as perturbações bidimensionais para os casos estudados, isto pode ser observado tanto pelos

Figura 32 – Iso-superfície para $Q_{criterion} = 1e - 5$ do jato $O_2 - H_2 - O_2$ para o modo varicoso. A superfície foi colorida de acordo com a magnitude do escoamento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

resultados do DNS quanto para os resultados do LST. A fig. 37 mostra os resultado obtidos utilizando DNS, representandos como pontos e os resultados obtidos pelo LST são representados como linhas solidas para o modo sinuoso e tracejadas para o modo varicoso, é possível perceber que ambos os resultados estão muito próximos.

Figura 33 – Amplitude máxima no modo varicoso da configuração $O_2 - H_2 - O_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Amplitude máxima no modo sinuoso da configuração $O_2 - H_2 - O_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Amplitude máxima no modo sinuoso da configuração $H_2 - O_2 - H_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,5$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Amplitude máxima no modo varicoso da configuração $H_2 - O_2 - H_2$, em função de x para $\beta = 0,4$ e $\omega = 0,7$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Taxa de amplificação em função da frequência da perturbação para ambas configurações utilizando $\beta = 0,4$. As linhas mostram os resultados obtidos utilizando LST e os pontos são os resultados obtidos por DNS.

Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido e verificado um código que permite simular um jato binário, planar, compressível e tridimensional, utilizando o método das diferenças finitas de alta ordem. Utilizando o código foi possível investigar a evolução de diversos tipos de perturbações.

Primeiramente estudou-se o efeito de perturbações em escoamentos bidimensionais para alguns números de Mach, e duas configurações de jato. Em todos os casos foi observado que a taxa de amplificação é inversamente proporcional ao número de Mach. Em casos tridimensionais foi observado que a taxa de amplificação da perturbação na direção transversal tem um efeito estabilizante similar ao número de Mach.

Utilizando o LST foi possível obter muitas informações sobre os efeitos da compressibilidade e de perturbações tridimensionais. Conforme o esperado tanto a compressibilidade quanto as perturbações tridimensionais causam um efeito estabilizante. Porém em alguns casos para valores baixos da frequência da perturbação, este efeito pode ser invertido.

O DNS fornece resultados muito mais detalhados do que os obtidos pelo LST, porém o tempo gasto com as simulações é muito elevado, muitas vezes chegando a levar mais de dias, enquanto o LST é resolvido em poucos minutos. Utilizando o LST é possível obter rapidamente a taxa de amplificação para vários casos, como diferentes configurações de jatos, vários números de Mach e valores de beta, além disso é possível obter as autofunções que são utilizado no DNS, de modo a garantir que o modo varicoso, ou sinuoso será exitado. Porém o LST fornece informações apenas para a região linear de escoamentos invíscidos. DNS nos permite observar as estruturas de vórtices formadas na região não linear do escoamento assim o crescimento dos modos secundários entre outras informações. Apesar de suas diferenças os dois métodos combinados permitem um análise mais completa do escoamento.

A simulações utilizando DNS podem servir como base para o estudo da geração de ruídos em jatos. Para isto é necessário algumas alterações no pós processamento código. Outra possibilidade de trabalho futuro é adicionar um termo fonte na equação do calor e analisar a

sua influência na estabilidade dos jatos, assim como estudar configurações com diferenças na temperatura entre o jato e fluido ao redor. Esta ultima linha de pesquisa pode levar ao estudo do jato binário com combustão.

REFERÊNCIAS

- BABUCKE, A. **Direct numerical simulation of noise-generation mechanisms in the mixing layer of a jet**. [S.l.]: Verlag Dr. Hut, 2009. Citado na página 27.
- BERGMAN, T. L.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; LAVINE, A. S. **Fundamentals of heat and mass transfer**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado na página 33.
- BOGDANOFF, D. Compressibility effects in turbulent shear layers. **AIAA journal**, v. 21, n. 6, p. 926–927, 1983. Citado na página 27.
- BROWN, G. L.; ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 64, n. 4, p. 775–816, 1974. Citado na página 27.
- CHINZEI, N.; MASUYA, G.; KOMURO, T.; MURAKAMI, A.; KUDOU, K. Spreading of two-stream supersonic turbulent mixing layers. **The Physics of fluids**, AIP, v. 29, n. 5, p. 1345–1347, 1986. Citado na página 27.
- DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic stability**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 33.
- DUNN, D.; LIN, C. On the stability of the laminar boundary in a compressible uid. **J. Aero. Sci**, v. 22, p. 455–477, 1955. Citado na página 27.
- GROPENGIESSER, H. Study on the stability of boundary layers and compressible fluids. **NASA TT F-12**, v. 786, 1970. Citado na página 36.
- HO, C.-M.; HUERRE, P. Perturbed free shear layers. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 16, n. 1, p. 365–422, 1984. Citado na página 27.
- LACERDA, J. F. **Aeroacústica computacional através de simulação numérica direta de escoamentos livres cisalhantes compressíveis**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado nas páginas 27, 40 e 41.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. Citado nas páginas 40 e 41.
- LESSEN, M.; FOX, J.; ZIEN, H. Stability of the laminar mixing of two parallel streams with respect to supersonic disturbances. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 25, n. 4, p. 737–742, 1966. Citado na página 27.
- LOCK, R. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 4, n. 1, p. 42–63, 1951. Citado na página 26.

- MENDONCA, M. T. Linear stability analysis of binary compressible mixing layers modified by a jet or a wake deficit. In: **52nd Aerospace Sciences Meeting**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1444. Citado nas páginas 27, 40, 41 e 43.
- MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 19, n. 4, p. 543–556, 1964. Citado na página 27.
- PAPAMOSCHOU, D.; ROSHKO, A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. **Journal of fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 197, p. 453–477, 1988. Citado na página 27.
- PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, W.; FLANNERY, B. Numerical recipes in fortran 77: The art of scientific computing. cambridge univ. **Press, Cambridge**, 1992. Citado na página 42.
- QUIRINO, S. F. **Simulação Numérica Direta de Camada Cisalhante Compressível com Fonte de Calor**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São Paulo, Brasil, 2006. Citado na página 27.
- REYNOLDS, O. Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society, v. 174, p. 935–982, 1883. Citado na página 27.
- SALEMI, L. d. C. **Simulação Numérica Direta de Camada Cisalhante Compressível com Fonte de Calor**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São Paulo, Brasil, 2006. Citado nas páginas 27 e 36.
- SAMIMY, M.; BREUER, K. S.; LEAL, L.; STEEN, P. **A gallery of fluid motion**. [S.l.]: AAPT, 2004. Citado nas páginas 37 e 38.
- SANDHAM, N. **A numerical investigation of the compressible mixing layer**. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1989. Citado na página 37.
- SOUZA, L.; MENDONÇA, M.; MEDEIROS, M. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 565–582, 2005. Citado na página 41.